UN CRITÈRE D'EXTENSION DES FONCTEURS DÉFINIS SUR LES SCHÉMAS LISSES*

par Francisco GUILLÉN *et* Vicente NAVARRO AZNAR

Introduction

Soient k un corps de caractéristique zéro et X une variété algébrique sur k. On sait, d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka ([Hi1]), que l'on peut résoudre les singularités de X, c'est-à-dire qu'il existe une variété non singulière $\widetilde{\mathrm{X}}$ et un morphisme $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ birationnel et propre. De plus, si Y est une sous-variété fermée de X, il existe une résolution $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ telle que $\widetilde{\mathrm{Y}} = f^{-1}(\mathrm{Y})$ est un diviseur à croisements normaux dans $\widetilde{\mathrm{X}}$ et f est un isomorphisme en dehors de la réunion de Y et du lieu singulier de X.

On a donné de nombreuses applications de ce théorème de résolution à l'étude cohomologique des variétés algébriques. En particulier, il a été utilisé pour étendre certains foncteurs cohomologiques définis a priori sur une classe de schémas lisses à une classe plus vaste de schémas. La cohomologie de De Rham ([G],[Ha2]) et la théorie de Hodge-Deligne ([D1]) sont des exemples de telles extensions.

Or, Hironaka a prouvé dans [Hi1] des théorèmes de résolution des singularités plus précis. Par exemple, on peut obtenir une résolution des singularités $\widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ d'une variété algébrique X par une suite finie d'éclatements $\mathrm{X}_{i+1} \longrightarrow \mathrm{X}_i$ de centre lisse contenu dans le lieu singulier de X_i, $0 \leq i < r$, où $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0$ et $\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}_r$ ([Hi1], (0.3), p. 132). De plus, d'après le lemme de Chow-Hironaka ([Hi1], (0.5), p. 144), tout morphisme birationnel entre deux résolutions peut être dominé par une suite finie d'éclatements de centres lisses.

Dans cet article, où nous continuons notre travail précédent ([HC]), nous prouvons, à partir de cette forme plus précise des théorèmes d'Hironaka, un critère d'extension d'un foncteur défini sur les schémas séparés, de type fini et lisses sur k. Ce critère, dans un langage peu précis, montre que si l'on a pour un foncteur la suite exacte habituelle d'un éclatement, on peut alors étendre ce foncteur à tous les schémas séparés et de type fini sur k. Plus précisément, nous prouvons au numéro (2.1) le résultat suivant.

Soient k un corps de caractéristique zéro, **Sch**(k) la catégorie des schémas séparés et de type fini sur k, et **Reg**(k) la sous-catégorie des schémas lisses. Soient

* Ce travail a été partiellement subventionné par les projets DGCYT PB96-0234 et BFM2000-0799-C02-01.

$\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, $\mathrm{C}^b(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes bornés de $\mathscr{A}$, et $\mathrm{D}^b(\mathscr{A})$ sa catégorie dérivée.

Théorème. — *Soit* $\mathrm{G} : \mathbf{Reg}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^b(\mathscr{A})$ *un foncteur contravariant tel que:*

(F1) $\mathrm{G}(\emptyset) = \mathrm{O}$, *et le morphisme canonique* $\mathrm{G}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}) \times \mathrm{G}(\mathrm{Y})$ *est un quasi-isomorphisme; et*

(F2) si $i : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ *est une immersion fermée de* $\mathbf{Reg}(k)$, $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *l'éclatement de* X *le long de* Y, $\widetilde{\mathrm{Y}} := f^{-1}(\mathrm{Y})$ *le diviseur exceptionnel,* $j : \widetilde{\mathrm{Y}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{X}}$ *l'inclusion et* $g : \widetilde{\mathrm{Y}} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *la restriction de* f, *alors le morphisme*

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) \xrightarrow{f^*+i^*} \mathbf{s}\Big(\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}) \oplus \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \xrightarrow{j^*-g^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{Y}})\Big)$$

est un quasi-isomorphisme, où $\mathbf{s}$ *désigne le complexe simple ou total.*

Alors, il existe une unique extension de G *en un foncteur contravariant* $\mathrm{G} : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{D}^b(\mathscr{A})$, *muni d'une rectification pour les diagrammes ordonnables finis (voir (1.6.5)), et qui vérifie la propriété de descente cohomologique suivante: si* $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *est un morphisme propre de schémas,* $i : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ *une immersion fermée,* $\widetilde{\mathrm{Y}} = f^{-1}(\mathrm{Y})$, $j : \widetilde{\mathrm{Y}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{X}}$ *l'inclusion,* $g : \widetilde{\mathrm{Y}} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *la restriction de* f, *et si* f *induit un isomorphisme* $\widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{Y}} \longrightarrow \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}$, *alors le morphisme de* $\mathrm{D}^b(\mathscr{A})$

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) \xrightarrow{f^*+i^*} \mathbf{s}\Big(\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}) \oplus \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \xrightarrow{j^*-g^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{Y}})\Big)$$

est un isomorphisme.

Notons que dans ce résultat nous considérons les foncteurs cohomologiques comme des foncteurs prenant leurs valeurs dans une catégorie de complexes, en accord avec les axiomatisations récentes des théories cohomologiques ([B] et [Gi]), tandis que dans la formulation classique de la cohomologie singulière et de ses différentes généralisations, cohomologies de Weil ou de Bloch-Ogus, par exemple, on ne considère que le foncteur que l'on obtient après application du foncteur de cohomologie H^*. Cette formulation paraît essentielle pour traiter les problèmes liés à la théorie de la descente cohomologique ([D1]), et, en particulier, le problème qui nous intéresse.

Or, dans les applications que nous avons en vue du critère d'extension, la catégorie où le foncteur considéré prend ses valeurs ne provient pas d'une catégorie abélienne, comme c'est le cas de la catégorie des motifs de Chow, qui est pseudo-abélienne, ou ne provient même pas d'une catégorie additive, comme c'est le cas de la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives (dgc) sur k, nécessaire en homotopie rationnelle. Ainsi, nous sommes conduits à prouver le critère d'extension dans une situation plus générale, non nécessairement additive, dans laquelle on remplace la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne par une catégorie vérifiant certaines propriétés naturelles au contexte et que nous appelons catégorie de descente. La notion de catégorie de descente est une variante des catégories triangulées de Verdier et nous développons ce formalisme au §1. Ce contexte non additif et non stable inclut le cas des algèbres dgc sur un corps k de caractéristique zéro. C'est le cadre qui nous permet de donner, au §3, une réalisation en théorie de De Rham algébrique de l'homotopie rationnelle des schémas.

Le critère d'extension précédent est aussi vérifié dans le cas des espaces analytiques, c'est-à-dire que le théorème est aussi vrai si l'on substitue dans l'énoncé la catégorie des schémas par la catégorie des espaces analytiques, et la sous-catégorie des schémas lisses par celle des variétés complexes, car on a aussi dans ce contexte des théorèmes de résolution ([AH], voir aussi [Vi] et [BM]). Comme application, nous prouvons, au §4, l'existence du complexe filtré de Hodge-De Rham pour tout espace analytique, sans recours à la théorie de Hodge-Deligne (cf. [DB] et [HC](Exp. V)). Ce complexe, pour une variété complexe X, n'est autre que le complexe $\Omega^*(\mathrm{X})$ des formes différentielles holomorphes muni de la filtration par le degré, $\mathrm{F}^p\Omega^*(\mathrm{X}) = \Omega^{*\geq p}(\mathrm{X})$.

Finalement, au §5, nous prouvons l'existence de deux foncteurs h et h_c qui étendent la théorie des motifs de Grothendieck à la catégorie des schémas $\mathbf{Sch}(k)$ et qui correspondent respectivement à une théorie cohomologique sans support et à support compact. Bien que ces foncteurs ne soient pas les foncteurs motiviques que l'on attend (le foncteur h ne serait que le terme E_1 de la suite spectrale associée à la filtration par le poids du "vrai motif mixte", par exemple), on en déduit une réponse affirmative au problème posé par Serre ([Se], §8) sur l'indépendance du motif virtuel d'une variété algébrique; ce problème avait déjà été résolu par Gillet et Soulé au congrès Algebraic K-Theory Conference de Paris, juillet 1994, suivant une autre voie ([GS]).

Une première version de ce travail a paru dans alg-geom 9505008. Depuis lors plusieurs travaux relatifs à ce thème ont été publiés, voir [dBN], [DL], [Han], [Le], [dB].

Nous sommes reconnaissants à C. Soulé pour les discussions que nous avons eues sur ce sujet, et à P. Deligne pour l'aide qu'il nous a apportée pendant la rédaction finale de ce travail.

1. Catégories de descente et foncteurs rectifiés

Dans cette première section nous introduisons les catégories de descente qui sont une variante des catégories triangulées de Verdier ([Ve]) adaptée à la formulation de la théorie de la descente homologique, même pour les théories non additives et non stables, comme celles que nous rencontrerons dans les applications des paragraphes suivants.

Une catégorie de descente homologique est une catégorie $\mathcal{D}$ munie d'une classe saturée de morphismes distingués E et d'un foncteur $\mathbf{s}$ défini sur les diagrammes cubiques de $\mathcal{D}$. Les définitions précises seront données dans les nos. suivants.

(**1.1**) *Types de diagrammes.* — Nous présentons ci-dessous les catégories des diagrammes sur lesquelles est défini le foncteur $\mathbf{s}$. D'abord, nous introduirons les différentes (petites) catégories sur lesquelles ces diagrammes sont définis. Nous utiliserons "type de diagramme" comme synonyme de "petite catégorie" dans ce contexte.

Si I est un ensemble ordonné, on attache à I un type de diagramme dont l'ensemble d'objets est I, et, pour deux objets $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$, l'ensemble des morphismes $Hom_{\mathrm{I}}(\alpha, \beta)$ a un élément si $\alpha \leq \beta$, et est vide sinon. Ceci définit un foncteur $\mathbf{Ord} \longrightarrow \mathbf{Cat}$, de la catégorie **Ord** des ensembles ordonnés, dans la catégorie **Cat** des types de diagrammes. Ce foncteur étant pleinement fidèle, nous identifierons un ensemble ordonné au type de diagramme qu'il définit.

(**1.1.1**) *La catégorie* Π. — À un ensemble fini et non vide S, on attache l'ensemble $\square_{\mathrm{S}}$ des parties *non vides* de S, ordonné par l'inclusion. Il y a lieu de voir $\square_{\mathrm{S}}$ comme l'ensemble des facettes du simplexe tendu par S. Nous identifierons un élément α de $\square_{\mathrm{S}}$ à l'application caractéristique $\mathrm{S} \longrightarrow \{0, 1\}$ telle que "$s \mapsto 1$ si, et seulement si, $s \in \alpha$", donc à un élément $(\alpha(s))_{s\in\mathrm{S}}$ de $\{0, 1\}^{\mathrm{S}}$, différent de l'élément nul. Nous noterons $dim\,\mathrm{S}$ la dimension de $\square_{\mathrm{S}}$ comme complexe simplicial, c'est-à-dire, $dim\,\mathrm{S} = card(\mathrm{S}) - 1$.

Pour tout nombre naturel $n \geq 0$, nous désignerons par $\square_n$ (cf. [HC](I.1.D)) l'ensemble ordonné attaché à l'ensemble à $n+1$ éléments $\{0, 1, ..., n\}$. En particulier, $\square_0$ est réduit à un seul élément.

Soient S et T deux ensembles finis. Toute application injective $u : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{T}$ induit une application strictement croissante $\square_u : \square_{\mathrm{S}} \longrightarrow \square_{\mathrm{T}}$, définie par $\square_u(\alpha) = u(\alpha)$.

À une famille $\mathrm{S} = (\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ensembles finis et non vides, paramétrée par un ensemble fini I, on attache le produit cartésien $\Pi_{i\in\mathrm{I}}\square_{\mathrm{S}_i}$, muni de l'ordre produit. On pose $\square_{\mathrm{S}} = \Pi_{i\in\mathrm{I}}\square_{\mathrm{S}_i}$. Il y a lieu de voir $\square_{\mathrm{S}}$ comme l'ensemble des facettes du produit des simplexes tendus par les S_i. En particulier, $\Pi_i\mathrm{S}_i$ s'identifie à l'ensemble des éléments minimaux de $\square_{\mathrm{S}}$. On pose $dim\,\mathrm{S} = \sum_{i\in\mathrm{I}} dim\,\mathrm{S}_i$.

Soit Π la catégorie dont les objets sont les familles $(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'ensembles finis et non vides, paramétrées par un ensemble fini variable I. Soient $\mathrm{S} = (\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $\mathrm{T} = (\mathrm{T}_j)_{j\in\mathrm{J}}$ deux objets de Π, un morphisme $u : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{T}$ de Π est une application injective $u : \Pi_i\mathrm{S}_i \longrightarrow \Pi_j\mathrm{T}_j$, telle que, pour chaque $\alpha = (\alpha_i) \in \square_{\mathrm{S}}$, il existe $\beta = (\beta_j) \in \square_T$ tel que l'on a $u(\Pi\alpha_i) = \Pi\beta_j$. Soit I' l'ensemble des $i \in I$ tels que $dim(S_i) > 0$. Pour u un morphisme, comme ci-dessus, il existe une injection $\nu : I' \longrightarrow J$ et pour chaque $i \in I'$ une injection $u_i : S_i \longrightarrow T_{\nu(i)}$ tels que $\beta_{\nu(i)}$ soit $u_i(\alpha_i)$; les β_j pour $j \notin \nu(I')$ sont constants, réduits à un élément.

La catégorie Π est munie d'une structure monoïdale symétrique, (voir [ML](XI.2)), où le produit de deux objets $S = (S_i)_{i\in I}$ et $T = (T_j)_{j\in J}$ est défini par $S \sqcup T = (U_k)_{k\in K}$, où: $K = I \sqcup J$; et $U_k = S_k$, si $k \in I$, ou $= T_k$, si $k \in J$. L'objet unité est la famille paramétrée par l'ensemble vide.

Maintenant, considérons sur **Cat** la structure monoïdale définie par le produit cartésien. On a un foncteur monoïdal symétrique strict $\Pi \longrightarrow$ **Cat** (voir (1.5.2)), qui attache à un objet S de Π, l'ensemble ordonné $\square_S$, et à un morphisme u, l'application croissante $\square_u : \square_S \longrightarrow \square_T$ induite par u.

Le foncteur $\Pi \longrightarrow$ **Cat** est clairement fidèle. En outre, ce foncteur est conservatif, puisque, si S et T sont des objets de Π, l'image de l'application $Hom_\Pi(S,T) \longrightarrow Hom_{\mathbf{Cat}}(\square_S, \square_T)$ est l'ensemble des applications strictement croissantes qui préservent la dimension. Nous identifierons Π à la sous-catégorie de **Cat** définie par l'image de ce foncteur, et désignerons aussi par $\square_S$ l'objet S de Π, et par u l'application $\square_u$, s'il n'y a pas de confusion possible.

(**1.1.2**) *La catégorie Φ des types de diagrammes ordonnables finis.* — Rappelons ([HC](I.1.10)) qu'un type de diagramme est appelé *ordonnable fini* si l'ensemble de ses flèches est fini, ses objets ont comme unique endomorphisme l'identité et, si on munit l'ensemble des objets de la relation de préordre: "$i \leq j$ si et seulement si $Hom(i,j)$ est non vide", alors ce préordre est un ordre, c'est-à-dire, si $i \leq j$ et $j \leq i$, alors $i = j$.

Les types de diagrammes ordonnables finis sont les objets d'une sous-catégorie pleine de la catégorie **Cat**, que nous noterons Φ. Il est clair que tout objet de Π définit un type de diagramme ordonnable fini.

(**1.2**) *Diagrammes d'une catégorie.* — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie. Pour tout type de diagramme $\mathscr{I}$, notons $(\mathscr{I}, \mathscr{D})$ la catégorie ayant pour objets les foncteurs covariants $X : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{D}$, et pour morphismes les transformations naturelles de foncteurs.

Notons $\mathscr{I}^{op}$ la catégorie opposée de $\mathscr{I}$. Si $X : \mathscr{I}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$ est un objet de $(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$, nous dirons que X est un $\mathscr{I}$-objet, ou un diagramme de type $\mathscr{I}$ de $\mathscr{D}$.

Si X est un objet de $\mathscr{D}$, nous noterons $X \times \mathscr{I}$ le $\mathscr{I}$-objet constant défini par X, et nous noterons $i_{\mathscr{I}} : \mathscr{D} \longrightarrow (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ le foncteur qui à X associe le $\mathscr{I}$-objet $X \times \mathscr{I}$.

(**1.2.1**) *Les catégories $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$ et $Real_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$.* — Nous nous intéressons aux diagrammes de $\mathscr{D}$ dont le type $\mathscr{I}$ est variable dans une catégorie $\mathfrak{I}$. Précisons ceci.

Notons $\mathbf{Cat}'$ la catégorie des catégories, qui est une catégorie dans un univers convenable (voir [ML]). On a un foncteur contravariant

$$\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}', \quad \mathscr{I} \mapsto (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D}).$$

Si $\mathfrak{I}$ est une sous-catégorie de $\mathbf{Cat}$, on obtient par composition avec le foncteur d'inclusion $\mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ un foncteur contravariant

$$Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{Cat}',$$

qui associe à un objet $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{I}$ la catégorie $(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$, et à un morphisme $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ de $\mathfrak{I}$, le foncteur d'*image inverse* $\delta^* : (\mathscr{J}^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$, tel que $\delta^*(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} \circ \delta^{op}$, où $\delta^{op} : \mathscr{I}^{op} \longrightarrow \mathscr{J}^{op}$ est le foncteur induit par δ.

Une catégorie fibrée sur $\mathfrak{I}$ est associée au foncteur $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$ ([SGA1] Exp. VI, ou voir [D3](2.2.12)). Nous noterons aussi $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \longrightarrow \mathfrak{I}$ cette catégorie fibrée. Rappelons la description de ses objets et morphismes. Un objet est un diagramme X de $\mathscr{D}$, de type $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$. Si $\mathrm{X} : \mathscr{I}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$ et $\mathrm{Y} : \mathscr{J}^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$, sont des objets de $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, un morphisme $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est un couple (δ, f), où $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ est un morphisme de $\mathfrak{I}$, et $f : \mathrm{X} \longrightarrow \delta^*(\mathrm{Y})$ est une transformation naturelle de foncteurs.

Nous noterons $Real_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$ la catégorie cofibrée sur $\mathfrak{I}$ dont la fibre sur un objet $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{I}$ est la catégorie $((\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D})$, et dont, pour tout morphisme $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ de $\mathfrak{I}$, le foncteur d'image directe est le foncteur

$$\delta_* : ((\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D}) \longrightarrow ((\mathscr{J}^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D}), \quad \mathrm{F} \mapsto \delta_*(\mathrm{F}) := \mathrm{F} \circ \delta^*.$$

La donnée d'un foncteur covariant $\mathbf{s} : Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ est équivalent à la donnée d'une section du foncteur de projection $Real_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \longrightarrow \mathfrak{I}$.

De même, le foncteur contravariant $\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}'$, $\mathscr{I} \mapsto (\mathscr{I}, \mathscr{D})$, induit un foncteur contravariant

$$Codiag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{Cat}',$$

qui associe à un objet $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{I}$ la catégorie $(\mathscr{I}, \mathscr{D})$, et à un morphisme $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ de $\mathfrak{I}$, le foncteur $\delta^* : (\mathscr{J}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\mathscr{I}, \mathscr{D})$ tel que $\delta^*(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} \circ \delta$. Il est aisé de définir aussi la catégorie correspondante $Coreal_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, etc.

Notons que dans (1.6) nous considérerons aussi la structure de 2-catégorie de $\mathbf{Cat}$, et le comportement des catégories de diagrammes et codiagrammes par rapport aux transformations naturelles des morphismes entre les types de diagrammes. Mais, pour l'instant, nous ne considérons pas cette structure additionnelle.

(**1.2.2**) *Diagrammes cubiques.* — Les diagrammes auxquels nous sommes le plus intéressés sont les diagrammes dont les types parcourent bien la catégorie Φ, ou bien la catégorie Π. Pour ces derniers nous utiliserons la terminologie suivante.

Nous appellerons *diagrammes cubiques* de $\mathscr{D}$ les objets de la catégorie fibrée $Diag_\Pi \mathscr{D}$, c'est-à-dire les foncteurs $\mathrm{X} : \square^{op} \longrightarrow \mathscr{D}$, où $\square \in Ob\,\Pi$. Par exemple, si $\square = \square_0$, X est simplement un objet X_1 de $\mathscr{D}$, et, si $\square = \square_1$, X est un diagramme

$$\mathrm{X}_{10} \longleftarrow \mathrm{X}_{11} \longrightarrow \mathrm{X}_{01}$$

de $\mathscr{D}$.

La catégorie $Real_\Pi \mathscr{D}$ a une structure de catégorie monoïdale, telle que $Real_\Pi \mathscr{D} \longrightarrow \Pi$ est un foncteur monoïdal strict. En effet, soient $\square, \square' \in Ob\,\Pi$, $\mathbf{s}_\square \in Ob((\square^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D})$, et $\mathbf{s}_{\square'} \in Ob((\square'^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D})$. La composition $\mathbf{s}_\square \circ \mathbf{s}_{\square'} : ((\square \times \square')^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D}$ est définie par

$$\mathbf{s}_\square \circ \mathbf{s}_{\square'}(\mathrm{X}) = \mathbf{s}_\square(\alpha \mapsto \mathbf{s}_{\square'}(\beta \mapsto \mathrm{X}_{\alpha\beta})).$$

L'objet unité est le foncteur d'évaluation $((\square_0^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D})$.

Soient $\square \in Ob\,\Pi$ et $\mathbf{s}_\square \in ((\square^{op}, \mathscr{D}), \mathscr{D})$. Si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_\alpha)$ est un $\square$-objet de $\mathscr{D}$, nous désignerons aussi par $\mathbf{s}_\alpha \mathrm{X}_\alpha$ l'objet $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$ de $\mathscr{D}$. Avec cette convention, si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{\alpha\beta})$ est un $\square \times \square'$-objet, où $\square, \square' \in Ob\,\Pi$, l'objet $\mathbf{s}_\square \mathbf{s}_{\square'} \mathrm{X}$ sera noté aussi $\mathbf{s}_\alpha \mathbf{s}_\beta \mathrm{X}_{\alpha\beta}$.

Soit $\mathscr{D}$ une catégorie avec un objet initial noté 0. Si $\delta : \square \longrightarrow \square'$ est un morphisme de Π, on a un foncteur d'*image directe*

$$\delta_* : (\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\square'^{op}, \mathscr{D}),$$

tel que, si X est un $\square$-objet de $\mathscr{D}$, alors $\delta_* \mathrm{X}$ est le $\square'$-objet $\mathscr{D}$ défini par

$$(\delta_* \mathrm{X})_\beta = \begin{cases} \mathrm{X}_\alpha, & \text{si } \beta = \delta(\alpha),\ \alpha \in \square, \\ 0, & \text{si } \beta \in \square' \setminus \delta(\square), \end{cases}.$$

avec les morphismes de transition évidents. Le foncteur δ_* est défini aisément sur les morphismes de $(\square^{op}, \mathscr{D})$.

Le foncteur δ_* est l'adjoint à gauche du foncteur $\delta^* : (\square'^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\square^{op}, \mathscr{D})$, et on a un morphisme canonique $\mathrm{X} \longrightarrow \delta_* \mathrm{X}$ défini par l'adjonction.

De même, nous appellerons *codiagrammes cubiques* de $\mathscr{D}$ les objets de la catégorie $Codiag_\Pi \mathscr{D}$, etc.

(**1.3**) *Les foncteurs simple et de réalisation géométrique.* — Pour motiver la définition des catégories de descente que nous donnerons par la suite, nous considérerons d'abord deux modèles concrets qui sont à l'origine de cette définition.

(**1.3.1**) *Le complexe simple d'un diagramme cubique de complexes.* — Le premier modèle de catégorie de descente que nous considérons est la catégorie $C_*(\mathscr{A})$ des complexes de chaînes (sans limitation de degré) d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, munie de la classe distinguée des morphismes qui induisent un isomorphisme en homologie. Ces morphismes sont appelés *quasi-isomorphismes*.

Si X est un complexe multiple naïf d'une catégorie additive $\mathscr{A}$, on sait associer canoniquement à X un complexe multiple non naïf, et définir le complexe simple correspondant (voir [D3], (0.4) et (1.1.4)). Nous allons adapter cette construction dans le contexte présent et définir le complexe simple d'un diagramme cubique de la catégorie des complexes d'une catégorie additive.

Soit S un ensemble fini et non vide, on attache à S le **Z**-module gradué libre de rang 1, dont les générateurs sont les *orientations* de S ([D1](II.3.1.4)), concentré en degré ascendant $dim\, \mathrm{S}$:

$$or(\mathrm{S}) = \wedge^{card\, \mathrm{S}}(\mathbf{Z}^{\mathrm{S}})[-dim\, \mathrm{S}].$$

Si $k \in \mathrm{S}$, et $\mathrm{T} = \mathrm{S} \setminus \{k\}$, l'inclusion $u : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{S}$ induit un morphisme de degré $+1$

$$or(u) : or(\mathrm{T}) \longrightarrow or(\mathrm{S}), \quad or(u) := e_k \wedge u_*,$$

où e_k est le vecteur de la base de $\mathbf{Z}^{\mathrm{S}}$ d'indice k.

Soit $\square = \Pi_{i\in \mathrm{I}}\square_{\mathrm{S}_i}$ un objet de Π. Pour tout $\alpha \in \square$, notons

$$or(\alpha) := \otimes_{i\in\mathrm{I}} or(\alpha_i),$$

le produit tensoriel gradué de la famille $(or(\alpha_i))_{i\in\mathrm{I}}$ de **Z**-modules graduées.

Si $u : \beta \to \alpha$ est un morphisme de $\square$ tel que $dim\, \beta = dim\, \alpha - 1$, il existe $j \in \mathrm{I}$, et $k \in \alpha_j$ tels que:

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_i\ , & \text{si } \ i \neq j, \\ \alpha_j \setminus \{k\}, & \text{si } \ i = j, \end{cases}$$

et u est le produit des morphismes d'inclusion $u_i : \beta_i \to \alpha_i$. Alors on définit le morphisme

$$or(u) = \otimes_i or(u_i) : or(\beta) \longrightarrow or(\alpha),$$

où, si $i \neq j$, $or(u_i)$ est l'identité.

Maintenant, soit $\mathscr{A}$ une catégorie additive. Soient X un objet de $\mathscr{A}$, et E un **Z**-module libre de rang n fini. Si $\{e_s\}_{s\in\mathrm{S}}$ est une base de E, et Y est un objet de $\mathscr{A}$, on a l'isomorphisme naturel

$$Hom_{\mathscr{A}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^{\mathrm{S}}) \longrightarrow Hom_{\mathscr{A}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{E}, \quad (f_s)_s \mapsto \sum_s f_s \otimes e_s.$$

Le foncteur

$$\mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Z\text{-}mod}, \quad \mathrm{Y} \mapsto \mathit{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{E},$$

est donc représentable, et nous noterons $\mathrm{X} \otimes \mathrm{E}$ l'objet qui le représente.

Soient X, Y des objets de $\mathscr{A}$, et E, F des $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini, on a un isomorphisme canonique

$$\mathit{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \otimes \mathit{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \cong \mathit{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathrm{X} \otimes \mathrm{E}, \mathrm{Y} \otimes \mathrm{F}).$$

On en déduit un foncteur

$$\mathscr{A} \times \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{A}, \quad (\mathrm{X}, \mathrm{E}) \mapsto \mathrm{X} \otimes \mathrm{E},$$

où $\mathscr{E}$ désigne la sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules, dont les objets sont les $\mathbf{Z}$-modules libres de rang fini.

Après ces préliminaires, si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_\alpha)$ est un $\square$-objet de $\mathrm{C}_*(\mathscr{A})$, on définit son complexe simple $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$, par

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})_q = \bigoplus_{q = p + \dim \alpha} \mathrm{X}_{p\alpha} \otimes \mathit{or}(\alpha)^\vee_{\dim \alpha}, \quad q \in \mathbf{Z},$$

et la différentielle

$$d = d_{\mathrm{X}} \otimes 1 + (-1)^p \sum_{u : \beta \longrightarrow \alpha} \mathrm{X}(u) \otimes \mathit{or}(u)^\vee,$$

sur $\mathrm{X}_{p\alpha} \otimes \mathit{or}(\alpha)^\vee_{\dim \alpha}$.

Ceci définit un foncteur

$$\mathbf{s}_\square : (\square^{op}, \mathrm{C}_*(\mathscr{A})) \longrightarrow \mathrm{C}_*(\mathscr{A}).$$

Notons, en particulier, que le complexe simple du $\square_{\mathrm{S}}$-objet constant $\mathbf{Z} \times \square_{\mathrm{S}}$ de $\mathrm{C}_*(\mathbf{Z\text{-}mod})$ est le complexe des chaînes orientées $\mathrm{C}_*(\square_{\mathrm{S}})$ du complexe simplicial $\square_{\mathrm{S}}$ des parties non vides de S.

Si $\square = \Pi_{i \in \mathrm{I}} \square_{\mathrm{S}_i} \in \mathit{Ob}\, \Pi$, et si on pose $\mathrm{C}_*(\square) = \mathbf{s}_\square(\mathbf{Z} \times \square)$, il résulte immédiatement des définitions qu'on a $\mathrm{C}_*(\square) \cong \otimes_i \mathrm{C}_*(\square_{\mathrm{S}_i})$.

L'objet $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$ est naturellement isomorphe à la cofin du foncteur $\square^{op} \times \square \longrightarrow \mathrm{C}_*(\mathscr{A})$, $(\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{C}_*(\square_\beta)$:

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}) \cong \int^\alpha \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{C}_*(\square_\alpha),$$

puisque, le foncteur $\mathbf{s}_\square$ commute aux colimites représentables, et, pour tout α, β, on a un isomorphisme naturel $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}_\alpha \times \square_\beta) \cong \mathrm{X}_\alpha \otimes \mathrm{C}_*(\square_\beta)$ (voir la remarque (1.5.4)).

On en déduit que $\mathbf{s}_\square$ est fonctorielle par rapport à $\square$, et finalement, on a le foncteur *simple* cherché,

$$\mathbf{s} : Diag_\Pi\, \mathrm{C}_*(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{C}_*(\mathscr{A}).$$

Ce foncteur simple vérifie les propriétés suivantes:

1. Additivité: Pour tout complexe X, il existe un isomorphisme naturel $\mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{X} \times \square_0) \cong \mathrm{X}$, et, si $\square \in Ob\,\Pi$, pour tout couple (X, Y) de $\square$-complexes, le morphisme naturel $\mathbf{s}_\square \mathrm{X} \oplus \mathbf{s}_\square \mathrm{Y} \longrightarrow \mathbf{s}_\square(\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y})$ est un isomorphisme.

2. Factorisation: Soient $\square, \square' \in Ob\,\Pi$. Pour tout $\square \times \square'$-complexe $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{\alpha\beta})$, il existe un isomorphisme $\mu : \mathbf{s}_{\alpha\beta}\mathrm{X}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbf{s}_\alpha \mathbf{s}_\beta \mathrm{X}_{\alpha\beta}$, naturel en X.

En plus, si on suppose $\mathscr{A}$ abélienne, on a

3. Exactitude: Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ un morphisme de $\square$-complexes, $\square \in Ob\,\Pi$. Si, pour tout $\alpha \in \square$, $f_\alpha : \mathrm{X}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Y}_\alpha$ est un quasi-isomorphisme, alors le morphisme $\mathbf{s}_\square f : \mathbf{s}_\square \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_\square \mathrm{Y}$ est un quasi-isomorphisme.

Et on peut réduire la donnée des quasi-isomorphismes à la donnée des complexes acycliques, c'est-à-dire à ceux qui sont quasi-isomorphes à l'objet 0, en utilisant le cône d'un morphisme et le critère d'acyclicité. En effet, si $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0$ est un morphisme de complexes, on définit le complexe *cône* de f, noté $c(f)$, (voir [Ve](I.3.1.2)), qui est isomorphe au complexe simple du $\square_1$-complexe,

$$0 \longleftarrow \mathrm{X}_1 \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{X}_0,$$

et, d'après la suite exacte d'homologie du cône, on a

4. Critère d'acyclicité: Soit $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0$ un morphisme de complexes. Alors f est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, le cône de f est un complexe acyclique.

(**1.3.2**) *La réalisation géométrique d'un diagramme cubique d'espaces topologiques.* — Dans l'exemple précédent, la catégorie $\mathrm{C}_*(\mathscr{A})$ est additive, et l'objet initial et l'objet final coïncident, ce qui n'illustre pas bien la situation générale. Étudions comme deuxième modèle la catégorie **Top** des espaces topologiques, munie de la classe distinguée des morphismes qui induisent un isomorphisme en homologie singulière entière. Nous appellerons ces morphismes *équivalences homologiques*. Nous dirons qu'un espace topologique est *homologiquement contractile* s'il a l'homologie d'un espace ponctuel.

Dans cette catégorie, on peut définir la réalisation géométrique d'un diagramme cubique, qui est l'analogue du complexe simple associé à un diagramme cubique de complexes.

Pour tout ensemble fini et non vide S, notons Δ_{S} le simplexe standard de $\mathbf{R}^{\mathrm{S}}$,

$$\Delta_{\mathrm{S}} = \{(x_s)_s \in \mathbf{R}^{\mathrm{S}};\ \sum_{s\in \mathrm{S}} x_s = 1,\ 0 \leq x_s \leq 1, \forall s \in \mathrm{S}\},$$

qui est la réalisation géométrique du complexe simplicial $\square_{\mathrm{S}}$ des parties non vides de S.

Soit $\square = \Pi_{i\in\mathrm{I}}\square_{\mathrm{S}_i}$ un objet de Π. Pour tout $\alpha \in \square$, notons $\Delta_\alpha = \Pi_{i\in\mathrm{I}}\Delta_{\alpha_i}$. Alors $\alpha \mapsto \Delta_\alpha$ définit un codiagramme de type $\square$ de **Top**.

Le foncteur *réalisation géométrique,* ou foncteur *simple,*

$$\mathbf{s} : Diag_\Pi \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top},$$

associe à un $\square$-espace topologique X, $\square \in Ob\,\Pi$, l'espace topologique $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$, défini par la cofin

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}) := \int^\alpha \mathrm{X}_\alpha \times \Delta_\alpha,$$

quotient de la somme disjointe des espaces topologiques $\mathrm{X}_\alpha \times \Delta_\alpha$, où $\alpha \in \square$, par la relation d'équivalence: $(u^*x, t) \sim (x, u_*t)$, pour tout morphisme $u : \alpha \to \beta$ de $\square$, et tout $(x, t) \in \mathrm{X}_\beta \times \Delta_\alpha$ (voir [ML](IX.6)).

Par exemple, il est aisé de voir que, pour tout espace topologique X, et tout ensemble fini et non vide S, la réalisation géométrique du $\square_{\mathrm{S}}$-diagramme $\mathrm{X} \times \square_{\mathrm{S}}$ est homéomorphe à l'espace $\mathrm{X} \times \Delta_{\mathrm{S}}$.

Ce foncteur simple

$$\mathbf{s} : Diag_\Pi \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Top},$$

vérifie les propriétés analogues à celles du foncteur simple sur $\mathrm{C}_*(\mathscr{A})$ considéré auparavant. Plus précisément, on a

1. Additivité: Pour tout espace topologique X, il existe un homéomorphisme naturel $\mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{X} \times \square_0) \cong \mathrm{X}$, et, si $\square \in Ob\,\Pi$, pour tout couple (X, Y) de $\square$-espaces topologiques, le morphisme naturel $\mathbf{s}_\square \mathrm{X} \sqcup \mathbf{s}_\square \mathrm{Y} \longrightarrow \mathbf{s}_\square(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y})$ est un homéomorphisme.

2. Factorisation: Soient $\square, \square' \in Ob\,\Pi$. Pour tout $\square \times \square'$-espace topologique $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{\alpha\beta})$, il existe un homéomorphisme $\mu : \mathbf{s}_{\alpha\beta}\mathrm{X}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathbf{s}_\alpha \mathbf{s}_\beta \mathrm{X}_{\alpha\beta}$, naturel en X (voir [ML](IX.8)).

3. Exactitude: Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ un morphisme de $\square$-espaces topologiques, $\square \in Ob\,\Pi$. Si, pour tout $\alpha \in \square$, $f_\alpha : \mathrm{X}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Y}_\alpha$ est une équivalence homologique, le morphisme $\mathbf{s}_\square f : \mathbf{s}_\square \mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_\square \mathrm{Y}$ est une équivalence homologique (voir [Du](5.16)).

Finalement, dans la catégorie **Top** on peut aussi réduire la donnée des équivalences homologiques à la donnée des objets homologiquement contractiles par une construction cône et un critère d'acyclicité. En effet, à chaque application continue $f : X_1 \longrightarrow X_0$, on associe l'espace topologique *cône*, ou *cofibre homotopique*, de f, qui est la réalisation géométrique du $\square_1$-espace topologique

$$\{*\} \longleftarrow X_1 \xrightarrow{f} X_0 \,,$$

et, d'après la suite exacte d'homologie du cône d'une application, on a le

4. Critère d'acyclicité: Soit $f : X_1 \longrightarrow X_0$ une application continue. Alors f est une équivalence homologique si, et seulement si, le cône de f est un espace topologique homologiquement contractile.

En général, on a un critère d'acyclicité pour tous les diagrammes cubiques augmentés d'espaces topologiques qui s'énonce en termes du cône d'un objet cubique augmenté qu'on définit ci-dessous. Ce sera la condition (CD8) de la définition (1.5.3) suivante, définition avec laquelle on peut donner une forme précise aux analogies observées entre les deux exemples précédents.

(**1.4**) *Diagrammes cubiques augmentés et le foncteur cône.* — Nous introduirons d'abord la catégorie Π^+ des types de diagrammes cubiques augmentés.

(**1.4.1**) *La catégorie* Π^+. — Soit Π^+ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis et les morphismes les applications injectives. Cette catégorie est une catégorie monoïdale symétrique avec la somme disjointe.

À un ensemble fini S, *éventuellement vide*, on attache l'ensemble $\square^+_{\mathrm{S}}$ des parties de S, ordonné par inclusion. L'ensemble vide est le plus petit élément de $\square^+_{\mathrm{S}}$, et, si S est non vide, $\square_{\mathrm{S}}$ est le sous-ensemble ordonné $\square^+_{\mathrm{S}} \setminus \{\emptyset\}$ de $\square^+_{\mathrm{S}}$.

On identifie un élément α de $\square^+_{\mathrm{S}}$ à l'application caractéristique associée $\mathrm{S} \longrightarrow \{0,1\}$, donc à un élément $(\alpha(s))_{s\in \mathrm{S}}$ de $\{0,1\}^{\mathrm{S}}$. L'élément $\emptyset$ est donc identifié à l'élément nul.

Pour tout entier $n \geq 0$, nous désignerons simplement par $\square^+_n$ l'ensemble ordonné attaché à l'ensemble à $n+1$ éléments $\{0,1,...,n\}$. En particulier, $\square^+_0$ est isomorphe à l'ensemble ordonné à deux éléments $\{0,1\}$, et l'ensemble ordonné $\square^+_n$ est isomorphe au produit cartésien de $n+1$ copies de l'ensemble ordonné $\square^+_0$. Nous noterons $\square^+_{-1}$ l'ensemble ordonné $\square^+_{\emptyset}$, et son unique élément sera noté 0.

Soient S et T deux ensembles finis, toute application injective $u : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{T}$ induit une application strictement croissante $\square^+_u : \square^+_{\mathrm{S}} \longrightarrow \square^+_{\mathrm{T}}$, définie par $\square^+_u(\alpha) = u(\alpha)$.

On a ainsi défini un foncteur $\Pi^+ \longrightarrow$ **Cat**, qui est fidèle et conservatif. Ce foncteur est monoïdal symétrique strict, car on a $\square^+_{\emptyset} = \{\emptyset\}$, et $\square^+_{\mathrm{S}\sqcup \mathrm{T}} \cong \square^+_{\mathrm{S}} \times \square^+_{\mathrm{T}}$.

Si S est un ensemble fini, on note δ_0 l'application croissante $\square^+_{-1} \to \square^+_{\mathrm{S}}$ définie par l'inclusion $\emptyset \longrightarrow \mathrm{S}$.

Soit, finalement, $\Pi \times \Pi^+$ la catégorie produit cartésien des catégories Π et Π^+. Cette catégorie $\Pi \times \Pi^+$ est aussi une catégorie monoïdale symétrique, dont l'unité est l'objet $(\square_0, \square^+_{-1})$, et dont le produit sera noté simplement $\times$. Les catégories Π et Π^+ s'identifient à des sous-catégories de $\Pi \times \Pi^+$. Avec ces identifications on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{S} \times \mathrm{T} \longrightarrow (\mathrm{S}, \mathrm{T}) \longleftarrow \mathrm{T} \times \mathrm{S}$, pour tout $(\mathrm{S}, \mathrm{T}) \in \mathit{Ob}\, \Pi \times \Pi^+$.

Le foncteur

$$\Pi \times \Pi^+ \longrightarrow \mathbf{Cat}, \quad (\mathrm{S}, \mathrm{T}) \mapsto \square_{\mathrm{S}} \times \square^+_{\mathrm{T}}$$

est un foncteur fidèl, conservatif et monoïdal symétrique strict. Dans ce qui suit nous noterons aussi $\square_{\mathrm{S}} \times \square^+_{\mathrm{T}}$ l'objet (S, T) de $\Pi \times \Pi^+$. Un objet de $\Pi \times \Pi^+$ de la forme $\square \times \square^+_{\mathrm{S}}$, où S est non vide, sera appelé un *type de diagramme cubique augmenté*.

(**1.4.2**) *Diagrammes cubiques augmentés.* — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie. Nous appellerons *diagrammes cubiques augmentés* de $\mathscr{D}$ les diagrammes de $\mathscr{D}$ de type cubique augmenté.

Par exemple, un $\square^+_0$-diagramme de $\mathscr{D}$ est un morphisme $\mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0$ de $\mathscr{D}$, et un $\square^+_1$-diagramme de $\mathscr{D}$ est un carré commutatif de $\mathscr{D}$ de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}_{11} & \longrightarrow & \mathrm{X}_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{X}_{10} & \longrightarrow & \mathrm{X}_{00}\,. \end{array}$$

Soit S un ensemble fini et non vide. Si X est un $\square_{\mathrm{S}}$-objet de $\mathscr{D}$, une *augmentation* de X vers un objet X_0 de $\mathscr{D}$, $\epsilon : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0$, est un morphisme de $\square_{\mathrm{S}}$-objets $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0 \times \square_{\mathrm{S}}$. Cela étant, nous noterons X^+, ou $\mathit{tot}(\epsilon)$, le diagramme de type $\square^+_{\mathrm{S}}$, défini par ϵ de façon évidente. En particulier, si X_1 est un objet de $\mathscr{D}$, une augmentation de $\mathrm{X}_1 \times \square_0$ vers X_0 est un morphisme $\epsilon : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0$ de $\mathscr{D}$, et $\mathit{tot}(\epsilon)$ est le diagramme de type $\square^+_0$ défini par le morphisme ϵ.

(**1.4.3**) *Le foncteur cône.* — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie avec un objet final noté 1. Si $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0$ est un morphisme de $\mathscr{D}$, on peut, en suivant la construction en Topologie du cône d'une application continue, associer à f le $\square_1$-objet de $\mathscr{D}$ défini par le diagramme

$$1 \longleftarrow \mathrm{X}_1 \xrightarrow{f} \mathrm{X}_0\,.$$

On obtient ainsi le foncteur *cône* $(\square^{+op}_0, \mathscr{D}) \longrightarrow (\square^{op}_1, \mathscr{D})$.

Si U est un ensemble (resp. ordonné) arbitraire, nous noterons U^+ l'ensemble (resp. ordonné) pointé $(\{*_{\mathrm{U}}\} \sqcup \mathrm{U}, *_{\mathrm{U}})$ (resp. tel que U est un sous-ensemble ordonné de U^+ et $*_\mathrm{U}$ est le plus petit elément de U^+). Puisque $(\square_\mathrm{S})^+$ est isomorphe à $\square_\mathrm{S}^+$, cette notation est cohérente avec les notations précedentes. Avec ces notations, pour tout ensemble $\{s\}$ réduit à un seul élément, on définit comme ci-dessus le foncteur $\mathbf{c}_{\{s\}} : (\square_{\{s\}}^{+op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\square_{\{s\}^+}^{op}, \mathscr{D})$.

Plus géneralement, nous nous proposons de définir un foncteur *cône* $c : \Pi^+ \longrightarrow \Pi$ monoïdal symétrique strict, tel que $c(\{s\}) = \{s\}^+$; et un foncteur fibré au dessus de c

$$\mathbf{c} : Diag_{\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow Diag_{\Pi}\mathscr{D},$$

tel que, si $\mathbf{c}_\mathrm{S} : (\square_\mathrm{S}^{+op}, \mathscr{D}) \longrightarrow ((c\square_\mathrm{S}^+)^{op}, \mathscr{D})$ est la fibre de $\mathbf{c}$ sur $\mathrm{S} \in Ob\,\Pi^+$, alors: $\mathbf{c}_{\{s\}}$ est le foncteur cône défini ci-dessus; et on a un isomorphisme naturel de foncteurs $\mathbf{c}_{\mathrm{S}\sqcup\mathrm{T}} \cong \mathbf{c}_\mathrm{S} \circ \mathbf{c}_\mathrm{T}$, pour tout $\mathrm{S}, \mathrm{T} \in Ob\,\Pi^+$.

On définit le foncteur $c : \Pi^+ \longrightarrow \Pi$ par: à un ensemble fini S on attache la famille $c(\mathrm{S}) = (\{s\}^+)_{s\in\mathrm{S}}$; et à un morphisme $\sigma : \mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{T}$ de Π^+, le morphisme $c(\sigma) : (\{s\}^+)_{s\in\mathrm{S}} \longrightarrow (\{t\}^+)_{t\in\mathrm{T}}$ de Π défini par l'application $\square_\sigma^+ : \Pi_s\{s\}^+ \cong \square_\mathrm{S}^+ \longrightarrow \Pi_t\{t\}^+ \cong \square_\mathrm{T}^+$, en identifiant l'ensemble pointé $(\{s\}^+, *)$ à $(\square_{\{s\}}^+, 0)$.

Il résulte immédiatement que le foncteur c ainsi défini est monoïdal symétrique strict.

En outre, soit ρ la transformation naturelle monoïdale définie, pour tout objet S de Π^+, par le morphisme de types de diagrammes

$$\rho_\mathrm{S} : \square_\mathrm{S}^+ \longrightarrow c\square_\mathrm{S}^+ = \Pi_s\square_{\{s\}^+}, \quad \rho_\mathrm{S}(\alpha) = (\{s\}^+)_{s\in\alpha} \sqcup (\{*_s\})_{s\in\mathrm{S}\setminus\alpha}.$$

Alors ρ_S induit le foncteur d'image inverse

$$\rho_\mathrm{S}^* : ((c\square_\mathrm{S}^+)^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\square_\mathrm{S}^{+op}, \mathscr{D}).$$

Le foncteur adjoint à droite de ρ_S^* est le foncteur, naturel en S,

$$\mathbf{c}_\mathrm{S} : (\square_\mathrm{S}^{+op}, \mathscr{D}) \longrightarrow ((c\square_\mathrm{S}^+)^{op}, \mathscr{D})$$

défini par

$$(\mathbf{c}_\mathrm{S}\mathrm{X})_\beta = \begin{cases} \mathrm{X}_\alpha, & si\ \beta = \rho(\alpha),\ \alpha \in \square_\mathrm{S}^+, \\ 1, & si\ \beta \in c(\mathrm{S}) \setminus \rho_\mathrm{S}(\square_\mathrm{S}^+). \end{cases}$$

Puisque les $\mathbf{c}_\mathrm{S}$ sont compatibles aux images inverses, ceci définit le foncteur cône cherché

$$\mathbf{c} : Diag_{\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow Diag_{\Pi}\mathscr{D}.$$

Le foncteur $c : \Pi^+ \longrightarrow \Pi$ s'étend en le foncteur $c : \Pi \times \Pi^+ \longrightarrow \Pi$, défini par $c(\mathrm{S}, \mathrm{T}) = \mathrm{S} \times c(\mathrm{T})$, et le foncteur $\mathbf{c} : \mathit{Diag}_{\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow \mathit{Diag}_{\Pi}\mathscr{D}$, s'étend en le foncteur

$$\mathbf{c} : \mathit{Diag}_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow \mathit{Diag}_{\Pi}\mathscr{D},$$

fibré au-dessus de c, défini par

$$\mathbf{c}_{(\mathrm{S},\mathrm{T})}(\mathrm{X}_{\bullet\bullet}) : \square_{\mathrm{S}} \times c(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathscr{D}, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \mathbf{c}_{\mathrm{T}}(\mathrm{X}_{\alpha\bullet})_{\beta}.$$

Ce foncteur cône permet d'étendre aux diagrammes cubiques augmentés de $\mathscr{D}$, tout foncteur défini, initialement, sur les diagrammes cubiques de $\mathscr{D}$. En effet, si $\mathrm{F} : \mathit{Diag}_{\Pi}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ est un foncteur, F s'étend en le foncteur

$$\mathit{Diag}_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{D} \xrightarrow{\mathbf{c}} \mathit{Diag}_{\Pi}\mathscr{D} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathscr{C}.$$

(**1.5**) *Catégories de descente homologique.* — Dans une catégorie de descente homologique $\mathscr{D}$ la classe de morphismes E, qui est l'analogue des quasi-isomorphismes de la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne, est une classe saturée, et nous nous intéressons à la localisation de $\mathscr{D}$ par rapport à E, analogue de la catégorie dérivée dans l'exemple (1.3.1) précédent. D'abord, nous rappellerons la définition de classe saturée de morphismes.

(**1.5.1**) *Classes saturées de morphismes.* — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie, et E une classe de morphismes de $\mathscr{D}$. Nous désignons par $\mathscr{D}[\mathrm{E}^{-1}]$, ou $\mathit{Ho}\mathscr{D}$ si aucune confusion n'est possible, la catégorie localisée de $\mathscr{D}$ par rapport à E, et par $\gamma : \mathscr{D} \longrightarrow \mathit{Ho}\mathscr{D}$ le foncteur de localisation. Ainsi γ transforme les morphismes de E en isomorphismes, et, si $\mathrm{F} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ est un foncteur tel que, pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\mathrm{F}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}$, alors il existe un unique foncteur $\mathrm{G} : \mathit{Ho}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ tel que $\mathrm{F} = \mathrm{G} \circ \gamma$. Cette localisation existe toujours dans un univers convenable, voir [GZ](I.1), et elle est uniquement déterminée, à isomorphisme unique près.

Définition. — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie, et E *une classe de morphismes de $\mathscr{D}$. On dit que* E *est une* classe saturée *de morphismes si tout morphisme f de $\mathscr{D}$, tel que $\gamma(f)$ est un isomorphisme, est dans* E.

Par exemple, si E est la classe des morphismes de $\mathscr{D}$ qui se transforment en isomorphismes par l'application d'un foncteur $\psi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$, alors E est saturée, d'après la propriété d'universalité de γ.

Si E est une classe saturée de morphismes de $\mathscr{D}$, nous appellerons *quasi-isomorphismes*, ou *équivalences faibles*, les morphismes de E. Nous dirons que deux objets X et Y de $\mathscr{D}$ sont quasi-isomorphes s'ils sont isomorphes dans $\mathit{Ho}\mathscr{D}$, et nous écrirons alors $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$.

Soit $\mathscr{D}$ une catégorie monoïdale, avec un produit $\otimes$, et une unité U, et soit E une classe saturée de morphismes de $\mathscr{D}$, compatible à la structure monoïdale, i.e. telle que si $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$ et si $g : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y}'$ sont des morphismes de E, $f \otimes g : \mathrm{X} \otimes \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}' \otimes \mathrm{Y}'$ est un morphisme de E. Alors le foncteur $\gamma \circ \otimes : \mathscr{D} \times \mathscr{D} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ induit un produit

$$\otimes : Ho\mathscr{D} \times Ho\mathscr{D} \longrightarrow Ho\mathscr{D}, \quad (\gamma(\mathrm{X}), \gamma(\mathrm{Y})) \mapsto \gamma(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}).$$

Ce produit, l'unité $\gamma(\mathrm{U})$, et les contraintes d'associativité et d'unité induites par les contraintes correspondantes de $\mathscr{D}$, définissent une structure monoïdale dans $Ho\mathscr{D}$, telle que le foncteur γ est monoïdal fort (voir (1.5.2) ci-dessous).

(**1.5.2**) *Foncteurs monoïdaux quasi-stricts.* — Soient $(\mathscr{C}, \otimes, \mathrm{U})$ et $(\mathscr{D}, \otimes, \mathrm{U}')$ des catégories monoïdales. Rappelons (voir [ML](XI.2)) qu'un foncteur monoïdal $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_0) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, ou simplement F, est la donnée de

(i) un foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$,
(ii) pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathscr{C}$, un morphisme de $\mathscr{D}$

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) : \mathrm{F}(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{X} \otimes \mathrm{Y}),$$

qui est naturel en (X, Y), et
(iii) un morphisme de $\mathscr{D}$

$$\mathrm{F}_0 : \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{U}),$$

compatibles aux contraintes d'associativité et d'unité.

Nous appellerons F_2 le *morphisme de Künneth*, et F_0 le *morphisme d'unités*.

On dit qu'un foncteur monoïdal $\mathrm{F} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ est *fort* (resp. *strict*), si les morphismes de Künneth F_2 et d'unités F_0 sont des identités (resp. isomorphismes) (voir *loc. cit.*).

Si $\mathscr{D}$ est une catégorie munie d'une classe saturée de morphismes, nous dirons que F est un *foncteur monoïdal quasi-strict* si F_2 et F_0 sont des quasi-isomorphismes de $\mathscr{D}$. Lorsque les morphismes F_2 et F_0 ont le sens inverse, nous dirons que $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_0)$ est un *foncteur op-monoïdal* (voir [KS], p. 83 et 84).

Rappelons qu'on dit qu'une catégorie $\mathscr{D}$ est une *catégorie cocartésienne* si les sommes (ou coproduits) finies, que nous noterons $\sqcup$, sont représentables. En particulier, $\mathscr{D}$ a un objet initial, noté 0. Il en résulte que si $\mathscr{D}$ est une catégorie cocartésienne, la somme définit une structure canonique de catégorie monoïdale sur $\mathscr{D}$, que tout foncteur $\mathrm{F} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ entre des catégories cocartésiennes est un foncteur monoïdal, et que toute transformation naturelle entre des foncteurs est une transformation naturelle monoïdale.

(**1.5.3**) *Définition.* — *Une* catégorie de descente homologique *est la donnée de* $(\mathscr{D}, \mathrm{E}, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$, *où:*

(CD1) $\mathscr{D}$ *est une catégorie cocartésienne, avec un objet final, noté* 1.

(CD2) E *est une classe saturée de morphismes de* $\mathscr{D}$, *stable par sommes, i.e., telle que si* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$ *et si* $g : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y}'$ *sont des morphismes de* E, *alors la somme* $f \sqcup g : \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}' \sqcup \mathrm{Y}'$ *est un morphisme de* E.

(CD3) $\mathbf{s} : Diag_{\Pi}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ *est un foncteur covariant, tel que, si* $\delta : \square \longrightarrow \square'$ *est un morphisme de* Π, *et* X *est un* $\square$*-objet de* $\mathscr{D}$, *le morphisme* $\mathbf{s}_{\square}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square'}\delta_*\mathrm{X}$, *induit par le morphisme canonique* $\mathrm{X} \longrightarrow \delta_*\mathrm{X}$, *est dans* E.

(CD4) Pour tout objet $\square$ *de* Π, *le foncteur* $\mathbf{s}_{\square} : (\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D}$ *est un foncteur monoïdal quasi-strict, c'est-à-dire, le morphisme naturel de Künneth associé à la somme,*

$$\sigma = \sigma_{\square}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) : \mathbf{s}_{\square}\mathrm{X} \sqcup \mathbf{s}_{\square}\mathrm{Y} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}),$$

et le morphisme d'unités,

$$\sigma^0_{\square} : 0 \longrightarrow \mathbf{s}_{\square}(0 \times \square),$$

sont dans E.

(CD5) Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme de* $\square$*-objets de* $\mathscr{D}$, $\square \in Ob\,\Pi$. *Si, pour tout* $\alpha \in \square$, f_α *est dans* E, $\mathbf{s}_{\square}f$ *est dans* E.

(CD6) Le foncteur $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi \longrightarrow Real_{\Pi}\mathscr{D}$, $\square \mapsto (\mathbf{s}_{\square} : (\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D})$, *est op-monoïdal quasi-strict.*

Plus explicitement:

$$\mu = \mu_{\square,\square'} : \mathbf{s}_{\square\times\square'} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square} \circ \mathbf{s}_{\square'}$$

est une transformation naturelle de foncteurs, qui est aussi naturelle en $(\square, \square') \in Ob\,\Pi \times \Pi$;

$$\lambda_0 : \mathbf{s}_{\square_0} \circ i_{\square_0} \longrightarrow id_{\mathscr{D}},$$

est une transformation naturelle de foncteurs; et μ *et* λ_0 *vérifient:*

(i) pour tout $\square \times \square'$*-objet* X, $\square, \square' \in Ob\,\Pi$, *le morphisme* $\mu_{\square,\square'}(\mathrm{X}) : \mathbf{s}_{\square\times\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square}\mathbf{s}_{\square'}\mathrm{X}$ *est dans* E,

(ii) pour tout objet X *de* $\mathscr{D}$, *le morphisme* $\lambda_0(\mathrm{X}) : \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{X} \times \square_0) \longrightarrow \mathrm{X}$ *est dans* E, *et*

(iii) les transformations naturelles μ *et* λ_0 *sont compatibles aux contraintes d'associativité et d'unité.*

(CD7) λ *est une transformation naturelle monoïdale du foncteur op-monoïdal* $\square \mapsto \mathbf{s}_\square \circ i_\square$ *au foncteur* $\square \mapsto id_{\mathscr{D}}$*, qui coïncide avec* λ_0 *sur* $\square_0$.

Plus explicitement, pour tout $\square \in Ob\,\Pi$*,* $\lambda_\square : \mathbf{s}_\square \circ i_\square \longrightarrow id_{\mathscr{D}}$ *est une transformation naturelle compatible à* μ*, et* $\lambda_{\square_0} = \lambda_0$.

(CD8) Pour tout diagramme X *de type* $\square := \square_{\mathrm{S}}$*, où* S *est un ensemble fini et non vide, et toute augmentation* $\epsilon : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0$*, le morphisme* $\lambda_\epsilon := \lambda_\square(\mathrm{X}_0) \circ \mathbf{s}_\square(\epsilon) : \mathbf{s}_\square\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0$ *est dans* E *si, et seulement si, le morphisme canonique* $\mathbf{s}_{\square^+}\mathrm{X}^+ \longrightarrow 1$ *est dans* E.

Nous dirons alors que $\mathscr{D}$ est une catégorie de descente homologique. Nous appellerons *acycliques* les objets de $\mathscr{D}$ quasi-isomorphes à l'objet final 1; et *foncteur simple*, ou *total*, le foncteur $\mathbf{s}$.

(**1.5.4**) *Remarques.* — **1.** Les propriétés (CD4), (CD5), (CD6) et (CD8) sont une formulation abstraite des propriétés d'additivité, d'exactitude, de factorisation et du critère d'acyclicité, respectivement, du foncteur simple des exemples de (1.3). Mais, on peut donner des variantes de la définition précédente.

D'abord, on a des variantes plus faibles. Par exemple, sans l'hypothèse que $\mathscr{D}$ soit une catégorie cocartésienne; ou bien, on peut supposer une structure monoïdale sur $\mathscr{D}$, et adapter les axiomes convenablement.

Dans l'autre sens, on a des variantes plus fortes. Par exemple, on peut supposer $\mathscr{D}$ additive, ou additive graduée, ou que E admet un calcul de fractions, etc. C'est dans ce contexte qu'on peut établir le lien avec les catégories triangulées de Verdier.

Aussi, on pourrait considérer d'autres catégories monoïdales symétriques de types de diagrammes que la catégorie Π. Par exemple, la catégorie des ensembles simpliciaux, ou celle des ensembles multisimpliciaux stricts.

Nous avons donné la définition (1.5.3) compte tenu des applications que nous avons en vue dans ce travail.

2. Dans les deux exemples de (1.3), le foncteur simple s'exprime comme une cofin. Ceci sera "presque" le cas général, car tout diagramme X de type $\square$, $\square \in \Pi$, est une cofin de diagrammes cubiques constants:

$$\mathrm{X} \cong \int^{\alpha} u_{\alpha *}(\mathrm{X}_\alpha \times \square_\alpha),$$

où $u_\alpha : \square_\alpha \to \square$ est le morphisme d'inclusion, pour tout $\alpha \in \square$.

Donc, si la catégorie de descente vérifie

(CD3b) pour tout morphisme $\delta : \square \longrightarrow \square'$ de Π, et tout $\square$-objet X de $\mathscr{D}$, le morphisme $\mathbf{s}_\square\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square'}\delta_*\mathrm{X}$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}$, et

(CD4b) $\mathbf{s}$ commute aux colimites finies représentables, alors on a un isomorphisme naturel

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}) \cong \int^\alpha \mathbf{s}(\mathrm{X}_\alpha \times \square_\alpha),$$

pour tout $\square$-objet X de $\mathscr{D}$.

(**1.5.5**). — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, et soit $\mathrm{C}_*(\mathscr{A})$ (resp. $\mathrm{C}_+(\mathscr{A})$, resp. $\mathrm{C}_b(\mathscr{A})$) la catégorie des complexes de chaînes de $\mathscr{A}$ sans limitation de degré (resp. bornés inférieurement, resp. bornés supérieurement et inférieurement).

Soit $\mathbf{s}$ le foncteur simple défini dans (1.3.1).

Pour tout couple $\square$, $\square'$ d'objets de Π, soit $\mu_{\square,\square'}$ l'isomorphisme de Fubbini correspondant à la cofin itérée [ML](IX.8), défini à partir des isomorphismes $\mathrm{C}_*(\square_{(\alpha,\beta)}) \cong \mathrm{C}_*(\square_\alpha) \otimes \mathrm{C}_*(\square_\beta)$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \square \times \square'$.

Pour tout objet X de $\mathrm{C}_*(\mathscr{A})$, et tout $\square \in \mathit{Ob}\,\Pi$, soit

$$\lambda_\square(\mathrm{X}): \quad \mathbf{s}_\square(\mathrm{X} \times \square) \cong \mathrm{X} \otimes \mathrm{C}_*(\square) \longrightarrow \mathrm{X} \cong \mathrm{X} \otimes \mathbf{Z}$$

le morphisme induit par l'augmentation $\mathrm{C}_*(\square) \longrightarrow \mathbf{Z}$.

Proposition. — La catégorie $\mathrm{C}_\natural(\mathscr{A})$, *où* $\natural = *, +$ *ou* b, *munie de la classe* E *des quasi-isomorphismes, du foncteur simple* $\mathbf{s}$, *et des données* (μ, λ) *définies plus haut, est une catégorie de descente homologique.*

Preuve. — Les propriétés (CD1) à (CD7) dans $\mathrm{C}_\natural(\mathscr{A})$ ou bien sont évidentes, ou bien elles ont déjà été prouvées dans (1.3.1). Il suffit donc de vérifier la condition (CD8). Soit X un diagramme de $\mathrm{C}_\natural(\mathscr{A})$ de type $\square := \square_\mathrm{S}$, et $\epsilon : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0$ une augmentation. Si $\mathrm{X}^+ = \mathit{tot}(\epsilon : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0)$, alors il est aisé de voir qu'il existe un isomorphisme

$$\mathbf{s}_{\square^+}\mathrm{X}^+ \cong \mathbf{s}_{\square_0^+}(\mathit{tot}(\lambda_\epsilon : \mathbf{s}_\square \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0)),$$

et (CD8) résulte du critère d'acyclicité de (1.3.1).

Nous prouverons maintenant quelques propriétés élémentaires des catégories de descente qui nous seront utiles par la suite. Toutes ces propriétés sont immédiates dans le cas des complexes de chaînes d'une catégorie abélienne.

(**1.5.6**) *Proposition. — Soit* $\mathscr{D}$ *une catégorie de descente homologique.*

(1) *Soit* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme de* $\mathscr{D}$, *alors le morphisme* f *est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, l'objet* $\mathbf{s}_{\square_0^+}(\mathit{tot}(f))$ *est acyclique.*

(2) *Soit* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *un morphisme de* $\mathscr{D}$, *et soit* U *le* $\square_1^+$*-diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y} \\ {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y}, \end{array}$$

alors l'objet $\mathbf{s}_{\square_1^+}\mathrm{U}$ *est acyclique.*

(3) *Soit* T *le* $\square_1$*-diagramme de* $\mathscr{D}$

$$\mathrm{Y} \xleftarrow{f} \mathrm{X} \xrightarrow{w} \mathrm{X}',$$

et $\delta : \square_0 \longrightarrow \square_1$ *le morphisme de* Π *défini par* $\delta(1) = (1, 0)$. *Si* $w : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$ *est un quasi-isomorphisme, le morphisme*

$$\mathbf{s}_\delta(\delta, 1) : \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{Y} \times \square_0) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_1}\mathrm{T}$$

est un quasi-isomorphisme.

(4) *Pour tout* $\square \in Ob\,\Pi \times \Pi^+$, *l'objet* $\mathbf{s}_\square(1 \times \square)$ *est acyclique.*

Preuve. — Prouvons (1). D'après la naturalité de λ, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{X} \times \square_0) & \xrightarrow{\mathbf{s}_{\square_0}(f)} & \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{Y} \times \square_0) \\ {\scriptstyle \lambda_{\square_0}(\mathrm{X})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{\square_0}(\mathrm{Y})} \\ \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y}, \end{array}$$

est commutatif, d'où $\lambda_f := \lambda_{\square_0}(\mathrm{Y}) \circ \mathbf{s}_{\square_0}(f) = f \circ \lambda_{\square_0}(\mathrm{X})$. Puisque, par (CD6), on a $\lambda_{\square_0}(\mathrm{X}) \in \mathrm{E}$, et, par (CD8), $\lambda_f \in \mathrm{E}$ si, et seulement si, $\mathbf{s}_{\square_0^+}(tot(f)) \sim 1$, on déduit (1), compte tenu de (CD2).

Prouvons (2). Rappelons que $\mathbf{s}_{\square_1^+}\mathrm{U}$ est l'objet simple du diagramme de type $\square_1 \times \square_1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \longleftarrow & \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y} \\ \downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ 1 & \longleftarrow & \mathrm{X} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Y}. \end{array}$$

D'après (CD6) on peut calculer l'objet simple de ce diagramme par facteurs. Ainsi, le simple obtenu par colonnes est, d'après (1) et (CD5), quasi-isomorphe à $\mathbf{s}_{\square_1}(1 \times \square_1)$ qui, à son tour, est acyclique, d'après (1).

Pour prouver (3), considérons le $\square_1$-diagramme U défini par

$$\mathrm{Y} \xleftarrow{f} \mathrm{X} \xrightarrow{id} \mathrm{X}$$

et soit $\epsilon : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Y}$ l'augmentation induite par f et le morphisme identité de Y. Le morphisme $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{T}$ défini par w et les identités, induit un morphisme $\mathbf{s}_{\square_1}\mathrm{U} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_1}\mathrm{T}$, qui, par (CD5), est un quasi-isomorphisme, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[d, "id"'] & \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{Y} \times \square_0) \arrow[l, "\lambda_{\square_0}(\mathrm{Y})"'] \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\mathbf{s}_\delta(\delta,1)"'] & \mathbf{s}_{\square_0}(\mathrm{Y} \times \square_0) \arrow[d, "\mathbf{s}_\delta(\delta,1)"'] \\
\mathrm{Y} & \mathbf{s}_{\square_1}\mathrm{U} \arrow[l, "\lambda_\epsilon"'] \arrow[r] & \mathbf{s}_{\square_1}\mathrm{T}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Puisque, par (CD2), on a $\lambda_{\square_0}(\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}$, il suffit de prouver que $\lambda_\epsilon \in \mathrm{E}$. D'après (CD8), si on note U^+ le $\square_1^+$-diagramme défini par l'augmentation ϵ, ceci est équivalent à prouver que $\mathbf{s}_{\square_1^+}\mathrm{U}^+ \sim 1$, ce qui résulte de (2).

Finalement, prouvons (4). Soit $\square \in Ob\,\Pi \times \Pi^+$, alors on a $\square \cong \mathrm{I}_1 \times \cdots \times \mathrm{I}_r$, où chaque I_j est isomorphe à un $\square_n$ ou à un $\square_m^+$. Nous prouverons (4) par récurrence sur r.

Supposons $r = 1$. Si $\square = \square_0$, (4) résulte de (CD6). Si $\square = \square_1$ ou $\square = \square_0^+$, (4) résulte de (1). Si $\square = \square_m^+$ on a $c(1 \times \square_m^+) = 1 \times (\square_1)^{m+1}$, et alors (4) résulte de (CD6), (CD5) et du cas $\square = \square_1$ précédent. Finalement, si $\square = \square_m$, (4) résulte de (CD8) et du cas $\square = \square_m^+$ précédent.

Si $r > 1$, (4) résulte, par récurrence sur r, de (CD5) et de (CD6).

Dans la proposition suivante, on établit pour les diagrammes cubiques augmentés de $\mathscr{D}$ la propriété de factorisation (CD6).

(**1.5.7**) *Proposition. — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique, $\square, \square' \in Ob\,\Pi \times \Pi^+$, et $p : \square' \times \square \longrightarrow \square \times \square'$ le morphisme de permutation des facteurs. Soit* X *un $\square \times \square'$-objet de $\mathscr{D}$, alors*

(1) *Le morphisme $(p, 1) : p^*\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{s}_p(p, 1) : \mathbf{s}_{\square' \times \square}(p^*\mathrm{X}) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square \times \square'}\mathrm{X}.$$

(2) *Il existe un quasi-isomorphisme $\mathbf{s}_{\square \times \square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_\square\mathbf{s}_{\square'}\mathrm{X}$, qui est naturel en* X.

(3) *Il existe un isomorphisme $\mathbf{s}_\square\mathbf{s}_{\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square'}\mathbf{s}_\square\mathrm{X}$, dans $Ho\,\mathscr{D}$, qui est naturel en* X.

Preuve. — Prouvons (1). Si $p^{-1} : \square \times \square' \longrightarrow \square' \times \square$ est la permutation inverse de p, $(p^{-1}, 1) : \mathrm{X} \longrightarrow p^*\mathrm{X}$ est le morphisme inverse de $(p, 1) : p^*\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$. D'après la fonctorialité de $\mathbf{s}$, il résulte que le morphisme $\mathbf{s}(p, 1)$ est un isomorphisme.

Prouvons (2). Puisque $\mathbf{c}$ est monoïdal strict, d'après (CD6) on a un quasi-isomorphisme

$$\mu : \mathbf{s}_{\square\times\square'}\mathrm{X} = \mathbf{s}_{c(\square\times\square')}\mathbf{c}_{\square\times\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{c\square}\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X}.$$

En outre, on a

$$(\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X})_\beta = \begin{cases} \mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X}_{\alpha\bullet}, & \text{si } \beta = \rho_\square(\alpha),\ \alpha \in \square, \\ \mathbf{s}_{c\square'}(1 \times c\square'), & \text{si } \beta \notin \rho_\square(\square), \end{cases}$$

et

$$(\mathbf{c}_{\square}\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X})_\beta = \begin{cases} \mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X}_{\alpha\bullet}, & \text{si } \beta = \rho_\square(\alpha),\ \alpha \in \square, \\ 1, & \text{si } \beta \notin \rho_\square(\square), \end{cases}$$

donc, le morphisme $\lambda_{c\square'}(1)$ induit un morphisme naturel de $c\square$-diagrammes

$$\lambda : \mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{c}_{\square}\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X},$$

qui, par (4) de la proposition (1.5.6) et (CD5), induit un quasi-isomorphisme naturel

$$\mathbf{s}_{c\square}(\lambda) : \mathbf{s}_{c\square}\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{c\square}\mathbf{c}_{\square}\mathbf{s}_{c\square'}\mathbf{c}_{\square'}\mathrm{X} = \mathbf{s}_{\square}\mathbf{s}_{\square'}\mathrm{X}$$

et, donc, le quasi-isomorphisme naturel

$$\mathbf{s}_{\square\times\square'}\mathrm{X} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square}\mathbf{s}_{\square'}\mathrm{X}.$$

Finalement, (3) est une conséquence immédiate de (1) et (2).

(**1.5.8**) *Proposition. — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique, et soit* X *un objet de $\mathscr{D}$.*

(1) *Si $\square$ est un type de diagramme cubique augmenté, l'objet $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\times\square)$ est acyclique.*
(2) *Si $\square \in Ob\,\Pi$, $\lambda_\square(\mathrm{X}) : \mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\times\square) \longrightarrow \mathrm{X}$ est un quasi-isomorphisme.*

Preuve. — Prouvons (1). Puisque $\square$ est un type de diagramme cubique augmenté, on a $\square \cong \square' \times \square_n^+$, où $\square'$ est un objet de Π et $n \geq 0$. Prouvons d'abord le cas où $\square \cong \square_n^+$, par récurrence sur n. Si $n = 0$, $\mathbf{s}(\mathrm{X}\times\square_0^+)$ est acyclique par (1) de la proposition (1.5.6). Si $n > 0$, par (2) de (1.5.7), l'hypothèse de récurrence et (CD5), on a

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\times\square) \sim \mathbf{s}_{\square_{n-1}^+}(\mathbf{s}_{\square_0^+}(\mathrm{X}\times\square_{n-1}^+\times\square_0^+)) \sim \mathbf{s}_{\square_{n-1}^+}(1\times\square_{n-1}^+) \sim 1.$$

Dans le cas général, où $\square \cong \square'\times\square_n^+$, par (2) de (1.5.7), (CD5), (4) de (1.5.6) et le cas précedent, on a

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\times\square) \sim \mathbf{s}_{\square'}(\mathbf{s}_{\square_n^+}(\mathrm{X}\times\square'\times\square_n^+)) \sim \mathbf{s}_{\square'}(1\times\square') \sim 1.$$

Prouvons (2). Puisque $\square \in Ob\,\Pi$, on a $\square \cong \Pi_{i=1}^{r}\square_{n_i}$. Si $r = 1$, (2) se suit de (CD8) et (1). Si $r > 1$, notons $\mathrm{I}' = \square_{n_1}$ et $\mathrm{I}'' = \Pi_{i=2}^{r}\square_{n_i}$. Par (CD7) le morphisme $\lambda_\square(\mathrm{X})$ se factorise par

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\times\square) \xrightarrow{\mu} \mathbf{s}_{\mathrm{I}'}\left(\mathbf{s}_{\mathrm{I}''}(\mathrm{X}\times\mathrm{I}'\times\mathrm{I}'')\right) \xrightarrow{\mathbf{s}_{\mathrm{I}'}\lambda_{\mathrm{I}''}(\mathrm{X}\times\mathrm{I}')} \mathbf{s}_{\mathrm{I}'}(\mathrm{X}\times\mathrm{I}') \xrightarrow{\lambda_{\mathrm{I}'}(\mathrm{X})} \mathrm{X}$$

et, puisqu'il résulte de (CD5), (CD6) et l'hypothèse de récurrence que ces morphismes sont des quasi-isomorphismes, $\lambda_\square(\mathrm{X})$ est aussi un quasi-isomorphisme.

Dans la proposition suivante on établit pour les objets augmentés de $\mathscr{D}$ la propriété (CD5) de la définition (1.5.3), et une variante de la propriété (CD4).

(**1.5.9**) *Proposition. — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique.*
(1) *Soit $\square \in Ob\,\Pi\times\Pi^+$. Si $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est un morphisme de $\square$-objets de $\mathscr{D}$ tel que, pour tout $\alpha \in \square$, f_α est un quasi-isomorphisme, alors $\mathbf{s}_\square f$ est un quasi-isomorphisme.*
(2) *Soit $\square$ un type de diagramme cubique augmenté. Si X et Y sont deux $\square$-objets de $\mathscr{D}$ tels que $\mathbf{s}_\square\mathrm{X}$ et $\mathbf{s}_\square\mathrm{Y}$ sont acycliques, alors $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y})$ est acyclique.*

Preuve. — (1) se déduit de (CD5), et de la définition de $\mathbf{s}$ sur les diagrammes cubiques augmentés, (1.4.3).

Prouvons (2). Puisque les morphismes $\mathrm{X} \longrightarrow 1\times\square$ et $\mathrm{Y} \longrightarrow 1\times\square$ induisent, respectivement, des quasi-isomorphismes $\mathbf{s}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathbf{s}(1\times\square)$ et $\mathbf{s}(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathbf{s}(1\times\square)$, d'après (CD2) et (CD4) on a un isomorphisme $\mathbf{s}(\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y}) \cong \mathbf{s}((1\sqcup 1)\times\square)$ dans $Ho\mathscr{D}$, et donc $\mathbf{s}(\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y}) \sim 1$, car, d'après (1) de (1.5.8), on a $\mathbf{s}((1\sqcup 1)\times\square) \sim 1$.

(**1.5.10**) *Proposition. — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique, $\square \in Ob\,\Pi\times\Pi^+$, et r un entier ≥ 0. Soient $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{\alpha\beta})$ et $\mathrm{Y} = (\mathrm{Y}_{\alpha\beta})$ des diagrammes de $\mathscr{D}$ de type $\square_0^+\times\square$ et $\square_r^+\times\square$, respectivement, tels que $\mathrm{Y}_{0\beta} = \mathrm{X}_{1\beta}$, pour tout $\beta \in \square$, et soit $\mathrm{Z} = (\mathrm{Z}_{\alpha\beta})$ le $\square_r^+\times\square$-objet de $\mathscr{D}$ défini par*

$$\mathrm{Z}_{\alpha\beta} = \begin{cases} \mathrm{Y}_{\alpha\beta}\,, & si\ (\alpha,\beta) \in \square_r\times\square, \\ \mathrm{X}_{0\beta}, & si\ \alpha = 0, \beta \in \square, \end{cases}$$

avec les morphismes induits. Si deux des objets $\mathbf{s}\mathrm{X}$, $\mathbf{s}\mathrm{Y}$ et $\mathbf{s}\mathrm{Z}$ sont acycliques, le troisième objet l'est aussi.

Preuve. — Soit $f : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Z}$ le morphisme défini par $f_{\alpha\beta} = 1_{\mathrm{Y}_{\alpha\beta}}$, si $\alpha \in \square_r$, et tel que, pour tout $\beta \in \square$, $f_{0\beta} : \mathrm{Y}_{0\beta} \longrightarrow \mathrm{Z}_{0\beta}$ est le morphisme de transition $\mathrm{X}_{1\beta} \longrightarrow \mathrm{X}_{0\beta}$ de X. Soit $\delta = \delta_0\times 1_\square : \square_{-1}^+\times\square \longrightarrow \square_r^+\times\square$, et soit T le diagramme total du diagramme commutatif de $\square_r^+\times\square$-objets défini par

$$\begin{array}{ccc} \delta_*\mathrm{X}_{1\bullet} & \longrightarrow & \delta_*\mathrm{X}_{0\bullet} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Y} & \xrightarrow{f} & \mathrm{Z}\,. \end{array}$$

Le diagramme T évalué en $(0,\beta) \in \square_r^+ \times \square$ est

$$\begin{array}{ccc} X_{1\beta} & \longrightarrow & X_{0\beta} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y_{0\beta} = X_{1\beta} & \xrightarrow{f} & X_{0\beta}\,, \end{array}$$

et évalué en $(\alpha,\beta) \in \square_r \times \square$ est

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y_{\alpha\beta} & \longrightarrow & Y_{\alpha\beta}\,, \end{array}$$

donc $\mathbf{s}_{\square_1^+} T_{(\alpha,\beta)}$ est acyclique, pour tout $(\alpha,\beta) \in \square_r^+ \times \square$. D'après (2) de (1.5.7), (1) de (1.5.9) et (1.5.8) il s' ensuit que $\mathbf{s}$T est acyclique. Mais, par (2) de (1.5.7), (3) de (1.5.6) et (1) de (1.5.8), on a

$$\mathbf{s}T \sim \mathbf{s}\,tot\,(\mathbf{s}\,tot\,(\mathbf{s}Y \longrightarrow \mathbf{s}Z) \longrightarrow \mathbf{s}X)\,,$$

d'où il résulte la proposition.

(**1.5.11**). — Si $\mathscr{D}$ est une catégorie de descente homologique, la catégorie $\mathscr{D}_*$ des objets pointés de $\mathscr{D}$, $1 \longrightarrow X$, est munie de la classe saturée de morphismes induite par E, i.e., celle des morphismes $(1 \to X) \longrightarrow (1 \to Y)$ tels que $X \longrightarrow Y$ est dans E.

Rappelons que, par (ii) de (CD6), le morphisme $u := \lambda_{\square_0}(1) : \mathbf{s}(1 \times \square_0) \longrightarrow 1$ est un quasi-isomorphisme.

Lemme. — Si u est un isomorphisme de $\mathscr{D}$, il existe un foncteur

$$Ho\,(\square_0^+, \mathscr{D}) \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}_*,$$

tel que le foncteur

$$\mathbf{s} : Ho\,(\square_0^+, \mathscr{D}) \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}$$

se factorise par

$$Ho\,(\square_0^+, \mathscr{D}) \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}_* \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}\,.$$

Preuve. — En effet, l'objet $\mathbf{s}tot(0 \longrightarrow 0)$ est canoniquement pointé par le quasi-isomorphisme

$$\epsilon_0 : 1 \xrightarrow{u^{-1}} \mathbf{s}(1 \times \square_0) \longrightarrow \mathbf{s}\delta_*(1 \times \square_0) = \mathbf{s}tot(id_0 : 0 \longrightarrow 0),$$

où $\delta : \square_0 \longrightarrow \square_1$ est le morphisme de Π défini par $\delta(1) = (1, 0)$, et $\mathbf{s}(1 \times \square_0) \longrightarrow \mathbf{s}\delta_*(1 \times \square_0)$ est un quasi-isomorphisme, par (CD3). Il en résulte que, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathscr{D}$, l'objet $\mathbf{s}tot(f)$ est naturellement pointé par le morphisme

$$\epsilon_f : 1 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathbf{s}tot(id_0) \longrightarrow \mathbf{s}tot(f).$$

On a donc un foncteur

$$((\square_0^+)^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D}_*\,,$$

qui, par (CD6), induit le foncteur

$$Ho(\square_0^+, \mathscr{D}) \longrightarrow Ho\mathscr{D}_*\,,$$

qui vérifie la propriété du lemme.

(**1.5.12**). — Dans la plupart des exemples que nous rencontrerons par la suite, la classe de morphismes E d'une catégorie de descente s'obtient par relèvement des quasi-isomorphismes d'une catégorie de descente connue à l'avance, par exemple la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne. Dans ce cas, on pourra utiliser la proposition suivante.

Proposition. — Soient $(\mathscr{D}, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$*, tels qu'on a (CD1), (CD7) et*

(CD3') $\mathbf{s} : Diag_\Pi\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ *est un foncteur covariant.*

(CD4') Pour tout $\square \in Ob\,\Pi$, $\mathbf{s}_\square : (\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D}$ *est un foncteur monoïdal.*

(CD6') $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi \longrightarrow Real_\Pi\mathscr{D}$, $\square \mapsto (\mathbf{s}_\square : (\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathscr{D})$, *est un foncteur op-monoïdal.*

Soient $\mathscr{D}'$ *une catégorie de descente homologique, et*

$$\psi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$$

un foncteur covariant, tel que

(FD1) ψ *est un foncteur monoïdal quasi-strict par rapport à la somme, c'est-à-dire que* $\psi(0) \sim 0$*, et, pour tout couple* (X, Y) *d'objets de* $\mathscr{D}$ *le morphisme naturel associé à la somme* $\sigma_\psi(X, Y) : \psi(X) \sqcup \psi(Y) \longrightarrow \psi(X \sqcup Y)$ *est un quasi-isomorphisme;*

(FD2) *il existe un isomorphisme monoïdal de foncteurs monoïdaux*

$$\theta : \mathbf{s} \circ \psi \to \psi \circ \mathbf{s} : Diag_\Pi\mathscr{D} \longrightarrow Ho\mathscr{D}'\,,$$

c'est-à-dire, pour tout $\square$*-objet* X *de* $\mathscr{D}$*,* $\square \in Ob\,\Pi$*, il existe un isomorphisme de* $Ho\mathscr{D}'$

$$\theta(X) : \mathbf{s}_\square\psi(X) \longrightarrow \psi\mathbf{s}_\square(X),$$

qui est naturel en X *et compatible à la somme et aux morphismes* μ *et* λ.

Alors, si E *est la classe des morphismes* f *de* $\mathscr{D}$ *tels que* $\psi(f)$ *est un quasi-isomorphisme de* $\mathscr{D}'$, $(\mathscr{D}, \mathrm{E}, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$ *est une catégorie de descente homologique.*

Preuve. — Vérifions les conditions de la définition (1.5.3) qui restent à prouver.

Prouvons (CD2). La classe E est évidemment saturée. Soient $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$ et $g : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y}'$ des morphismes de E. Puisque dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\psi(\mathrm{X}) \sqcup \psi(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\psi(f)\sqcup\psi(g)"] \arrow[d, "\sigma_\psi(\mathrm{X},\mathrm{Y})"'] & \psi(\mathrm{X}') \sqcup \psi(\mathrm{Y}') \arrow[d, "\sigma_\psi(\mathrm{X}',\mathrm{Y}')"] \\
\psi(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \arrow[r, "\psi(f\sqcup g)"] & \psi(\mathrm{X}' \sqcup \mathrm{Y}')
\end{tikzcd}$$

on a $\psi(f), \psi(g) \in \mathrm{E}'$, et, que d'après la propriété (FD1), les morphismes verticaux sont dans E′, il résulte de (CD2) dans $\mathscr{D}'$ que $\psi(f \sqcup g) \in \mathrm{E}'$. Donc $f \sqcup g \in \mathrm{E}$.

La propriété (CD3) résulte immédiatement de (FD1), (FD2), et des propriétés (CD3) et (CD5) dans $\mathscr{D}'$.

Prouvons (CD4). Soient X, Y des $\square$-objets de $\mathscr{D}$, $\square \in Ob\,\Pi$. Considérons le diagramme de $Ho\mathscr{D}'$

$$\begin{tikzcd}
\psi(\mathbf{s}\mathrm{X} \sqcup \mathbf{s}\mathrm{Y}) \arrow[r, "\psi(\sigma(\mathrm{X},\mathrm{Y}))"] & \psi\mathbf{s}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \\
\psi\mathbf{s}\mathrm{X} \sqcup \psi\mathbf{s}\mathrm{Y} \arrow[u, "\sigma_\psi(\mathbf{s}\mathrm{X},\mathbf{s}\mathrm{Y})"] \arrow[r, "\sigma_{\psi\mathbf{s}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})"] \arrow[d, "\theta(\mathrm{X})\sqcup\theta(\mathrm{Y})"'] & \psi\mathbf{s}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \arrow[u, "id"'] \arrow[d, "\theta(\mathrm{X}\sqcup\mathrm{Y})"] \\
\mathbf{s}\psi\mathrm{X} \sqcup \mathbf{s}\psi\mathrm{Y} \arrow[r, "\sigma_{\mathbf{s}\psi}(\mathrm{X},\mathrm{Y})"] \arrow[d, "\sigma(\psi\mathrm{X},\psi\mathrm{Y})"'] & \mathbf{s}\psi(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \arrow[d, "id"] \\
\mathbf{s}(\psi\mathrm{X} \sqcup \psi\mathrm{Y}) \arrow[r, "\mathbf{s}(\sigma_\psi(\mathrm{X},\mathrm{Y}))"] & \mathbf{s}\psi(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y})\,,
\end{tikzcd}$$

où le carré central est commutatif, grâce à la compatibilité de θ à la somme, et les carrés supérieur et inférieur sont aussi commutatifs par la naturalité des morphismes.

D'après la condition (FD2) et la propriété (CD2) dans $\mathscr{D}'$, les morphismes $\theta(\mathrm{X}) \sqcup \theta(\mathrm{Y})$, et $\theta(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y})$ sont des isomorphismes. Par (FD1) et la propriété (CD5) dans $\mathscr{D}'$, on a $\sigma_\psi(\mathbf{s}\mathrm{X}, \mathbf{s}\mathrm{Y}), \mathbf{s}(\sigma_\psi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) \in \mathrm{E}'$. D'après la propriété (CD4) dans $\mathscr{D}'$, on a $\sigma(\psi\mathrm{X}, \psi\mathrm{Y}) \in \mathrm{E}'$, et il en résulte que le morphisme $\psi(\sigma(\mathrm{X}, \mathrm{Y})) : \psi(\mathbf{s}\mathrm{X} \sqcup \mathbf{s}\mathrm{Y}) \longrightarrow \psi\mathbf{s}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y})$ est un quasi-isomorphisme, ce qui prouve (CD4).

La propriété (CD5) résulte de la propriété (CD5) dans $\mathscr{D}'$ et de la condition (FD2).

Prouvons (CD6). Le diagramme de $Ho\mathscr{D}'$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s}\psi(\mathrm{X}\times\square_0) & \xrightarrow{\lambda_{\square_0}(\psi(\mathrm{X}))} & \psi(\mathrm{X}) \\ {\scriptstyle \theta(\mathrm{X}\times\square_0)}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow \\ \psi\mathbf{s}(\mathrm{X}\times\square_0) & \xrightarrow{\psi(\lambda_{\square_0}(\mathrm{X}))} & \psi(\mathrm{X}) \end{array}$$

est commutatif, d'après la compatibilité de θ à λ. Alors, puisque $\theta(\mathrm{X}\times\square_0)$ est un isomorphisme, et que $\lambda_{\square_0}(\psi(\mathrm{X}))\in\mathrm{E}'$, il résulte que $\lambda_{\square_0}(\mathrm{X})\in\mathrm{E}$. De la même façon, de (FD2) il s'ensuit que μ est dans E, puisque μ' est dans E′.

Finalement, prouvons (CD8). Soit X un diagramme de $\mathscr{D}$ de type $\square:=\square_{\mathrm{S}}$, et soit $\epsilon:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}_0$ une augmentation. Notons $u:\mathrm{X}^+\longrightarrow 1\times\square^+$ le morphisme canonique. Dans le diagramme de $Ho\mathscr{D}'$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{s}\psi\mathbf{c}\,\mathrm{X}^+ & \xrightarrow{\mathbf{s}\psi\mathbf{c}(u)} & \mathbf{s}\psi\mathbf{c}\,(1\times\square^+)=\mathbf{s}(\psi(1)\times c\,\square^+) & \xrightarrow{\lambda_{c\square^+}\psi(1)} & \psi(1) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ \psi\mathbf{sc}\,\mathrm{X}^+ & \xrightarrow{\psi\mathbf{sc}(u)} & \psi\mathbf{sc}\,(1\times\square^+)=\psi\mathbf{s}(1\times c\square^+) & \xrightarrow{\psi(\lambda_{c\square^+}(1))} & \psi(1)\,, \end{array}$$

le carré gauche est commutatif par la naturalité de θ, et le carré droite est commutatif par la compatibilité de θ et λ. Les morphismes θ sont des isomorphismes, et, d'après (2) de (1.5.8), on a $\lambda_{c\square^+}\psi(1)\in\mathrm{E}'$.

Le morphisme $\psi(\mathbf{sc}\mathrm{X}^+\longrightarrow 1)$ étant la composition $\psi(\lambda_{c\square^+}(1))\circ\psi\mathbf{sc}(u)$, il en résulte que $\psi(\mathbf{sc}\mathrm{X}^+\longrightarrow 1)\in\mathrm{E}'$ si, et seulement si, $\mathbf{s}\psi\mathbf{c}(u)\in\mathrm{E}'$.

D'ailleurs, on a que $\mathbf{s}\psi\mathbf{c}(u)\in\mathrm{E}'$ si, et seulement si, $\mathbf{sc}\psi u:\mathbf{sc}\psi\mathrm{X}^+\longrightarrow\mathbf{sc}(\psi(1)\times\square^+)\in\mathrm{E}'$. En effet, on a le $\square_1^+$-diagramme de $c\square^+$-objets de $\mathscr{D}'$

$$\begin{array}{ccc} \psi\mathbf{c}\mathrm{X}^+ & \longrightarrow & \mathbf{c}\psi\mathrm{X}^+ \\ {\scriptstyle\psi\mathbf{c}(u)}\downarrow & & {\scriptstyle\mathbf{c}\psi(u)}\downarrow \\ \psi\mathbf{c}(1\times\square^+) & \longrightarrow & \mathbf{c}\psi(1\times\square^+), \end{array}$$

dont le diagramme total associé $\mathrm{U}=(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ est un diagramme de $\mathscr{D}'$ de type $\square_1^+\times c\square^+$, et il suffit de voir que $\mathbf{s}\mathrm{U}$ est acyclique. Mais $\mathbf{s}\mathrm{U}\sim\mathbf{s}_{c\square^+}\mathbf{s}_{\square_1^+}\mathrm{U}$, d'après (2) de (1.5.7). Si $\alpha=\rho(\beta)\in\rho(\square^+)$ (avec les notations de (1.4.3)), $\mathrm{U}_{\bullet\alpha}$ est le $\square_1^+$-diagramme

$$\begin{array}{ccc} \psi\mathrm{X}_\beta^+ & \longrightarrow & \psi\mathrm{X}_\beta^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi 1 & \longrightarrow & \psi 1, \end{array}$$

et si $\alpha \notin \rho(\square^+)$, $\mathrm{U}_{\bullet\alpha}$ est le $\square_1^+$-diagramme

$$\begin{array}{ccc} \psi 1 & \longrightarrow & 1 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \psi 1 & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

donc on a que $\mathbf{s}_{\square_1^+}\mathrm{U}_{\bullet\alpha}$ est acyclique, pour tout $\alpha \in c\square^+$. D'après (CD5) et (4) de (1.5.6) il en résulte que $\mathbf{s}\mathrm{U}$ est acyclique.

Puisque $\mathbf{s}(\psi 1 \times \square^+)$ est acyclique, $\mathbf{s}\psi u : \mathbf{s}\,\mathrm{X}^+ \longrightarrow \mathbf{s}(\psi 1 \times \square^+) \in \mathrm{E}'$ si, et seulement si, $\mathbf{s}\psi\mathrm{X}^+ \sim 1$. D'après (CD8) dans $\mathscr{D}'$, ceci équivaut à son tour à ce que $\lambda_{\psi\epsilon} : \mathbf{s}\psi\mathrm{X} \longrightarrow \psi\mathrm{X}_0$ soit un quasi-isomorphisme. Finalement, d'après la compatibilité de θ et λ, le diagramme de $Ho\mathscr{D}'$

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s}\psi\mathrm{X} & \xrightarrow{\lambda_{\psi\epsilon}} & \psi\mathrm{X}_0 \\ {\scriptstyle\theta(\mathrm{X})}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle id} \\ \psi\mathbf{s}\mathrm{X} & \xrightarrow{\psi\lambda_\epsilon} & \psi\mathrm{X}_0 \end{array}$$

est commutatif, et puisque $\theta(\mathrm{X})$ est un isomorphisme, $\lambda_{\psi\epsilon} \in \mathrm{E}'$ si, et seulement si, $\psi\lambda_\epsilon \in \mathrm{E}'$, c'est-à-dire, si, et seulement si, $\lambda_\epsilon : \mathbf{s}\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_0 \in \mathrm{E}$, ce qui prouve (CD8).

(**1.5.13**). — Nous prouverons maintenant que la catégorie **Top**, munie de la classe E des équivalences homologiques, est une catégorie de descente homologique.

Soit $\mathbf{s}$ le foncteur de réalisation géométrique des diagrammes cubiques, défini dans (1.3.2).

Pour tout couple $\square$, $\square'$ d'objets de Π, soit $\mu_{\square,\square'}$ l'isomorphisme de Fubbini correspondant à la cofin itérée, qui résulte des homéomorphismes $\Delta_{(\alpha,\beta)} \cong \Delta_\alpha \times \Delta_\beta$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \square \times \square'$.

Pour tout espace topologique X, et tout $\square_\mathrm{S} \in Ob\,\Pi$, soit

$$\lambda_{\square_\mathrm{S}}(\mathrm{X}) : \quad \mathbf{s}_{\square_\mathrm{S}}(\mathrm{X} \times \square_\mathrm{S}) \cong \mathrm{X} \times \Delta_\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{X}$$

le morphisme de projection.

Proposition. — *La catégorie* **Top**, *munie de la classe* E *des équivalences homologiques, du foncteur* $\mathbf{s}$ *de réalisation géométrique des diagrammes cubiques, et des données* (μ,λ) *définies plus haut, est une catégorie de descente homologique.*

Preuve. — D'abord nous remarquons que les propriétés (CD1) à (CD7) ou bien sont immédiates, ou bien ont déjà été prouvées dans (1.3.2). Bien qu'il ne nous reste à prouver que la condition (CD8), nous utiliserons la proposition (1.5.12).

Soit

$$S_* : \mathbf{Top} \longrightarrow C_+(\mathbf{Z\text{-}mod})$$

le foncteur du complexe des chaînes singulières à coefficients entiers. Puisque la catégorie $C_+(\mathbf{Z\text{-}mod})$ est de descente homologique, et que le foncteur S_* vérifie clairement la condition (FD1) de (1.5.12), il suffit de prouver l'existence d'une transformation naturelle

$$\theta(X) : \mathbf{s}_\alpha S_*(X_\alpha) \longrightarrow S_*\left(\int^\alpha X_\alpha \times \Delta_\alpha\right)$$

qui vérifie (FD2), (cf. [Du](5.15)). Nous prouverons ceci à partir du théorème des modèles acycliques, dans sa version filtrée.

Soit $\square$ un objet de Π. Considérons sur la catégorie $(\square^{op}, \mathbf{Top})$ les foncteurs filtrés

$$F(X) = \mathbf{s}_\alpha S_*(X_\alpha), \qquad W_pF(X) = F(sq_pX),$$
$$G(X) = S_*\left(\int^\alpha X_\alpha \times \Delta_\alpha\right), \quad W_pG(X) = G(sq_pX),$$

où $(sq_pX)_\alpha = X_\alpha$, si $dim\,\alpha \leq p$, et $= \emptyset$, sinon; c'est-à-dire, la filtration par la dimension des α. Et prenons comme modèles de $(\square^{op}, \mathbf{Top})$ la famille filtrée d'objets

$$\mathfrak{M} = (u_{\alpha *}(\Delta_n \times \square_\alpha))_{n\geq 0, \alpha\in\square}, \quad W_p\mathfrak{M} = (u_{\alpha *}(\Delta_n \times \square_\alpha))_{dim\,\alpha \leq p}.$$

Le foncteur F admet pour base la famille des éléments $\mathfrak{B} = (1_n \otimes \mu_\alpha)$, avec $1_n \otimes \mu_\alpha \in S_*(\Delta_n) \otimes C_*(\square_\alpha) \cong F(u_{\alpha *}(\Delta_n \times \square_\alpha))$, où μ_α est une base de $(or(\alpha)^{dim\,\alpha})^\vee$. La sous-famille $W_p\mathfrak{B} = (1_n \otimes \mu_\alpha)_{dim\,\alpha\leq p}$ est une base du foncteur W_pF.

Le foncteur W_pG est acyclique sur les modèles de $W_p\mathfrak{M}$, car $W_pG(u_{\alpha *}(\Delta_n \times \square_\alpha)) \cong S_*(\Delta_n \times \Delta_\alpha)$, si $dim\,\alpha \leq p$.

Finalement, on a un système compatible de morphismes naturels en $M \in W_p\mathfrak{M}$

$$\theta_{0,p}(M) : H_0(W_pF(M)) \longrightarrow H_0(W_pG(M)), \quad p \geq 0.$$

Donc, d'après la variante filtrée du théorème des modèles acycliques, θ_0 est induit par une transformation naturelle filtrée $\theta : (F, W) \longrightarrow (G, W)$, unique à homotopie filtrée près. (À défaut de référence, nous laissons au lecteur le soin de prouver cette variante du théorème des modèles acycliques.)

Le morphisme $\theta(X)$, étant un morphisme filtré, induit un morphisme sur les complexes gradués correspondants

$$\begin{aligned} Gr_p^W F(X) \cong \bigoplus_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha) \otimes or(\alpha) &\xrightarrow{Gr_p^W\theta(X)} Gr_p^W G(X) \\ &\cong S_*(\mathbf{s}_\square sq_pX, \mathbf{s}_\square sq_{p-1}X) \end{aligned}$$

Prouvons que $Gr_p^W\theta(X)$ induit un isomorphisme sur l'homologie, pour tout X. En effet, soient

$$\phi : Gr_p^W F(X) \to \bigoplus_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha)\otimes S_*(\Delta_\alpha, \partial\Delta_\alpha),$$

$$\psi : \bigoplus_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha)\otimes S_*(\Delta_\alpha, \partial\Delta_\alpha) \to \bigoplus_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha\times\Delta_\alpha, X_\alpha\times\partial\Delta_\alpha),$$

$$\gamma : \bigoplus_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha\times\Delta_\alpha, X_\alpha\times\partial\Delta_\alpha) \longrightarrow Gr_p^W G(X),$$

les quasi-isomorphismes naturels déduits, respectivement, du quasi-isomorphisme $or(\alpha) \longrightarrow S_*(\Delta_\alpha, \partial\Delta_\alpha)$, du théorème d'Eilenberg-Zilber, et du diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{dim\,\alpha=p}\coprod\limits_{0\le i\le p}\Delta_{p-1}\times X_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{s}_\square sq_{p-1}X \arrow[d] \\
\coprod\limits_{dim\,\alpha=p}\Delta_p\times X_\alpha \arrow[r] & \mathbf{s}_\square sq_p X
\end{tikzcd}$$

(voir [Du](5.16)). Alors, pour tout X, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Gr_p^W F(X) \arrow[r, "Gr_p^W\theta(X)"] \arrow[d, "\phi"'] & Gr_p^W G(X) \\
\bigoplus\limits_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha)\otimes S_*(\Delta_\alpha, \partial\Delta_\alpha) \arrow[r, "\psi"] & \bigoplus\limits_{dim\,\alpha=p} S_*(X_\alpha\times\Delta_\alpha, X_\alpha\times\partial\Delta_\alpha), \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif, à homotopie près, car, $Gr_p^W F[-p]$ est un foncteur libre qui admet pour base $W_p\mathfrak{M}\setminus W_{p-1}\mathfrak{M}$, $Gr_p^W G[-p]$ est acyclique sur ces modèles, et il est commutatif sur l'homologie p-dimensionelle des modèles. Il en résulte que $Gr_p^W\theta(X)$ est un quasi-isomorphisme, et, donc, que $\theta(X)$ est un quasi-isomorphisme filtré.

Les compatibilités de θ à la somme, à μ, et à λ, sont aussi des conséquences du théorème des modèles acycliques. Par exemple, prouvons la compatibilité à λ. Si X est un espace topologique, et $S \in Ob\,\Pi$, d'après ce théorème, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
S_*(X)\otimes C_*(\square_S) \arrow[r, "\theta(X)"] \arrow[d, "\lambda(S_*(X))"'] & S_*(X\times\Delta_S) \arrow[d, "S_*(\lambda(X))"] \\
S_*(X) \arrow[r, "="] & S_*(X)
\end{tikzcd}$$

est homotopiquement commutatif, car il induit un diagramme commutatif sur l'homologie de dimension 0, pour tout modèle X. Il en résulte immédiatement la compatibilité de θ à λ dans $Ho\,\mathbf{Top}$.

(**1.5.14**). — Le couple (S_*, θ) de la preuve précédente, et, en général, le couple (ψ, θ) de la proposition (1.5.12), est, *a posteriori*, un exemple de foncteur exact de catégories de descente, avec la définition suivante.

Définition. — *Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux catégories de descente. Un foncteur exact de $\mathscr{D}$ dans $\mathscr{D}'$ est la donnée d'un foncteur monoïdal quasi-strict $\psi : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$, tel que $\psi(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}'$, et d'un quasi-isomorphisme monoïdal*

$$\theta : \mathbf{s}\psi \to \psi\mathbf{s} : \mathit{Diag}_{\Pi}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}',$$

compatible aux morphismes μ et λ.

(**1.6**) *Foncteurs rectifiés*

(**1.6.1**). — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique. Pour tout type de diagramme $\mathscr{I}$, la catégorie $(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ est aussi une catégorie de descente, avec E et $\mathbf{s}$ définis composante par composante. Si $\mathfrak{I}$ est une sous-catégorie de **Cat**, la catégorie $\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$ de diagrammes de $\mathscr{D}$ dont le type parcourt $\mathfrak{I}$, est une catégorie fibrée au dessus de $\mathfrak{I}$ dont les fibres sont des catégories de descente. Puisque les foncteurs d'image inverse δ^* préservent les quasi-isomorphismes, les catégories localisées $\mathit{Ho}(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ définissent un foncteur contravariant

$$\mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{Cat}'', \quad \mathscr{I} \mapsto \mathit{Ho}(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D}),$$

où $\mathbf{Cat}''$ est la catégorie des catégories d'un univers convenable. La catégorie fibrée associée sera notée $\mathit{Ho}_{\mathfrak{I}}\,\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, ou simplement $\mathit{Ho}\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$. Le lecteur prendra garde que cette catégorie n'est pas une catégorie localisée.

Il résulte de (2) de (1.5.9) et de (CD5) que, pour tout $\square \in \mathit{Ob}\,\Pi \times \Pi^+$, le foncteur $\mathbf{s}_\square : (\square^{op}, \mathscr{D}) \to \mathscr{D}$ induit un foncteur $\mathit{Ho}(\square^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathit{Ho}\mathscr{D}$, naturel par rapport aux morphismes de $\Pi \times \Pi^+$, et donc on a un foncteur

$$\mathit{Ho}\,\mathit{Diag}_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow \mathit{Ho}\,\mathscr{D}.$$

Nous noterons encore $\mathbf{s}$ ce foncteur.

(**1.6.2**). — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie, munie d'une classe saturée E de morphismes, $\gamma : \mathscr{D} \longrightarrow \mathit{Ho}\mathscr{D}$ le foncteur de localisation, et $\mathfrak{I}$ une sous-catégorie de **Cat**.

Si $\mathrm{F} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ est un foncteur, F induit trivialement un foncteur entre les catégories de diagrammes $\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathrm{F} : \mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \longrightarrow \mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, et, par composition, on obtient un foncteur $\mathrm{F}_{\mathfrak{I}} : \mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \longrightarrow \mathit{Ho}\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$.

Or, dans un bon nombre d'applications, et surtout dans le cas des foncteurs dérivés, on trouve des foncteurs $\mathrm{G} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathit{Ho}\mathscr{D}$ qui ne sont définis que dans la catégorie localisée $\mathit{Ho}\mathscr{D}$. Un tel foncteur induit un foncteur $\mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathrm{G} : \mathit{Diag}_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \longrightarrow$

$Diag_{\mathfrak{I}} Ho\mathscr{D}$, mais cette catégorie de diagrammes $Diag_{\mathfrak{I}} Ho\mathscr{D}$ n'est pas une catégorie satisfaisante, car, en général, elle n'est pas équivalente à la catégorie $Ho Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, dont les objets sont représentables par des diagrammes commutatifs de $\mathscr{D}$. Par exemple, si $\mathrm{F} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ est un foncteur covariant additif entre des catégories abéliennes, exact à gauche, et $\mathscr{C}$ a assez d'objets injectifs, alors F induit un foncteur dérivé $\mathrm{RF} : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\mathrm{C}^{+}(\mathscr{D})$, mais, comme il est bien connu, ce foncteur ne suffit pas pour définir le foncteur hyperdérivé $\mathrm{RF} : \mathrm{C}^{+}(\mathscr{C}) \longrightarrow Ho\mathrm{C}^{+}(\mathscr{D})$.

On peut se demander d'une façon naïve si le foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ s'étend en un foncteur fibré $\mathrm{G}_{\mathfrak{I}} : Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \longrightarrow Ho Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$, mais ceci n'entraîne pas, par exemple, que la composition $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{G}_{\mathfrak{I}}} Ho Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \longrightarrow Diag_{\mathfrak{I}} Ho\mathscr{D}$ soit naturellement isomorphe à $Diag_{\mathfrak{I}}\mathrm{G}$. Or, puisque les catégories $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{C}$ sont des "catégories de catégories", on a des transformations naturelles des foncteurs, et ce qu'il faut est préciser le comportement du foncteur $\mathrm{G}_{\mathfrak{I}}$ par rapport à ces transformations naturelles. Pour ceci nous utiliserons la structure de 2-catégorie de **Cat**, car c'est la structure qui tient aussi compte des transformations naturelles de foncteurs.

Rappelons qu'une 2-catégorie est une catégorie enrichie en la catégorie des catégories (voir [KS], [ML](XII.3)), en particulier, c'est une catégorie dont les morphismes entre deux objets sont, à leur tour, les objets d'une catégorie. Ainsi dans une 2-catégorie on a des objets ou 0-cellules, des morphismes ou 1-cellules, et des transformations naturelles ou 2-cellules. Les catégories **Cat**, **Cat**′,..., sont des 2-catégories, dans des univers convenables. Nous noterons **2Cat**, **2Cat**′,..., la 2-structure de **Cat**, **Cat**′,....

(**1.6.3**) *Définition. — Soit $\mathfrak{I}$ une 2-sous-catégorie de* **2Cat**. *Nous dirons que $\mathfrak{I}$ est une* 2-catégorie de types de diagrammes *si, pour tout $\mathscr{I}$, $\mathscr{J} \in Ob\mathfrak{I}$, on a $Hom_{\mathfrak{I}}(\mathscr{I}, \mathscr{J}) = Hom_{\mathbf{2Cat}}(\mathscr{I}, \mathscr{J})$, et si $\mathfrak{I}$ a un objet distingué* **1**, *qui est une catégorie ponctuelle.*

Ainsi, si $\mathfrak{I}$ est une 2-catégorie de types de diagrammes, pour tout $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$ on a un isomorphisme canonique de types de diagrammes $i_{\mathscr{I}} : \mathscr{I} \longrightarrow Hom_{\mathfrak{I}}(\mathbf{1}, \mathscr{I})$.

Par exemple, la catégorie Φ, introduite dans (1.1.2), avec la structure de 2-catégorie induite par la 2-structure de **2Cat**, est une 2-catégorie de types de diagrammes. Mais les catégories Π et Π^{+} ne le sont pas.

(**1.6.4**). — Soient $\mathscr{D}$ une catégorie, et $\mathfrak{I}$ une 2-catégorie de types de diagrammes. L'assignation $\mathscr{I} \mapsto (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ définit un 2-foncteur (voir [KS], p. 81, et [ML](XII.4))

$$\mathbf{2Cat} \longrightarrow \mathbf{2Cat}',$$

dont la composition avec le 2-foncteur d'inclusion de $\mathfrak{I}$ dans **2Cat** induit un 2-foncteur

$$Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{2Cat}'\,.$$

Ce 2-foncteur $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$ associe: à un objet $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{I}$, la catégorie $(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$; à un morphisme $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ de $\mathfrak{I}$, le foncteur $\delta^{op*} : (\mathscr{J}^{op}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ tel que $\delta^{op*}(Y) = Y \circ \delta^{op}$; et, à une 2-cellule $\tau : \delta \longrightarrow \delta'$ de $\mathfrak{I}$, la transformation naturelle $\tau^{op*} : \delta'^{op*} \longrightarrow \delta^{op*}$ telle que, pour tout objet Y de $(\mathscr{J}^{op}, \mathscr{D})$, $\tau^{op*}(Y) : \delta'^{op*}(Y) \longrightarrow \delta^{op*}(Y)$ est définie par la famille $(Y(\tau_i))_{i\in\mathscr{I}}$.

Finalement, si $\mathscr{D}$ est une catégorie munie d'une classe saturée de morphismes E, et si $\mathfrak{I}$ est une 2-catégorie de types de diagrammes, par la fonctorialité de la localisation, l'assignation $\mathscr{I} \mapsto Ho(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$ définit le 2-foncteur

$$Ho_{\mathfrak{I}}Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{2Cat}''.$$

(**1.6.5**) *Définition. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathscr{D}$ une catégorie munie d'une classe saturée de morphismes* E, $\mathfrak{I}$ *une 2-catégorie de types de diagrammes, et* $G : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ *un foncteur. Une* $\mathfrak{I}$-rectification *de* G *est une pseudo-transformation 2-naturelle de 2-foncteurs (voir [KS], p. 81 et p. 83),*

$$G_{\mathfrak{I}} : Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \longrightarrow Ho_{\mathfrak{I}}Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}$$

dont la restriction à $\mathscr{C}$ *est* G.

Nous dirons que $G : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ *est un foncteur* $\mathfrak{I}$-rectifié *s'il est muni d'une* $\mathfrak{I}$*-rectification.*

Si G *et* F *sont des foncteurs munis de* $\mathfrak{I}$*-rectifications* $G_{\mathfrak{I}}$ *et* $F_{\mathfrak{I}}$*, un* morphisme de foncteurs rectifiés *de* G *en* F *est une modification* $\theta : G_{\mathfrak{I}} \longrightarrow F_{\mathfrak{I}}$ *(voir* loc. cit.*).*

Plus explicitement, une $\mathfrak{I}$-rectification $G_{\mathfrak{I}}$ de G est la donnée de:

(R1) *pour tout* $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$*, un foncteur* $G_{\mathscr{I}} : (\mathscr{I}^{op}, \mathscr{C}) \longrightarrow Ho(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$,
(R2) *un isomorphisme de foncteurs* $G_{\mathbf{1}} \cong G$*, et*
(R3) *pour tout morphisme* $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ *de* $\mathfrak{I}$*, un isomorphisme naturel de foncteurs*

$$G_\delta : G_{\mathscr{I}} \circ \delta^*_{\mathscr{C}} \longrightarrow \delta^*_{\mathscr{D}} \circ G_{\mathscr{J}},$$

tel que

$$G_{\mathbf{1}_{\mathscr{I}}} = \mathbf{1}_{G_{\mathscr{I}}}, \quad G_{\delta'\circ\delta} = (\delta^*_{\mathscr{D}} * G_{\delta'}) \circ (G_\delta * \delta'^*_{\mathscr{C}}),$$

et que, si $\tau : \delta \longrightarrow \delta'$ *est une 2-cellule de* $\mathfrak{I}$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G_{\mathscr{I}} \circ \delta'^*_{\mathscr{C}} \arrow[r, "G_{\mathscr{I}}*\tau"] \arrow[d, "G_{\delta'}"'] & G_{\mathscr{I}} \circ \delta^*_{\mathscr{C}} \arrow[d, "G_\delta"] \\ \delta'^*_{\mathscr{D}} \circ G_J \arrow[r, "\tau*G_J"] & \delta^*_{\mathscr{D}} \circ G_J \end{tikzcd}$$

est commutatif dans $Ho(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$.

Un morphisme de foncteurs rectifiés $\theta : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ est la donnée de

(MR) *pour tout* $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$, *un morphisme naturel* $\theta_{\mathscr{I}} : \mathrm{G}_{\mathscr{I}} \longrightarrow \mathrm{F}_{\mathscr{I}}$, *tel que, pour tout morphisme* $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ *de* $\mathfrak{I}$, *et tout* $\mathscr{J}$*-objet* $\mathrm{Y} : \mathscr{J}^{op} \longrightarrow \mathscr{C}$ *de* $\mathscr{C}$, *le diagramme de morphismes de* $Ho(\mathscr{I}^{op}, \mathscr{D})$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\delta^*\mathrm{Y}) \arrow[r, "\mathrm{G}_\delta"] \arrow[d, "\theta_{\mathscr{I}}(\delta^*\mathrm{Y})"'] & \delta^*\mathrm{G}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y}) \arrow[d, "\delta^*\theta_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y})"] \\
\mathrm{F}_{\mathscr{I}}(\delta^*\mathrm{Y}) \arrow[r, "\mathrm{F}_\delta"] & \delta^*\mathrm{F}_{\mathscr{J}}(\mathrm{Y})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

En particulier, θ est un *isomorphisme* si $\theta_{\mathscr{I}}$ est un isomorphisme, pour tout $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$.

Évidemment, si $\mathrm{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est un foncteur, le foncteur $\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{F}} \mathscr{D} \xrightarrow{\gamma} Ho\mathscr{D}$ est muni d'une $\mathfrak{I}$-rectification canonique définie par l'extension naturelle de F aux $\mathfrak{I}$-diagrammes, et si $\theta : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ est un morphisme de foncteurs, alors θ induit un morphisme des foncteurs rectifiés associés.

(**1.6.6**) *Proposition. — Soient* $\mathscr{C}$ *une catégorie,* $\mathscr{D}$ *une catégorie munie d'une classe saturée de morphismes* E, *et* $\mathfrak{I}$ *une 2-catégorie de types de diagrammes. Si* $\mathrm{G}_{\mathfrak{I}}$ *est une* $\mathfrak{I}$*-rectification d'un foncteur* $\mathrm{G} : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$, *alors les pseudo-transformations 2-naturelles de 2-foncteurs* $Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{G}_{\mathfrak{I}}} Ho Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \xrightarrow{\gamma'} Diag_{\mathfrak{I}} Ho\mathscr{D}$ *et* $Diag_{\mathfrak{I}}\mathrm{G}$ *sont isomorphes.*

Preuve. — Il suffit de voir que, pour tout diagramme X de $\mathscr{C}$ de type $\mathscr{I} \in Ob\mathfrak{I}$, on a un isomorphisme naturel $\gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X}) \cong Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})$, compatible aux images inverses. En effet, pour tout objet α de $\mathscr{I}$, notons $i_\alpha : 1 \longrightarrow \mathscr{I}$ le morphisme de $\mathfrak{I}$ défini par $i_\alpha(*) = \alpha$, et $i_u : i_\alpha \longrightarrow i_\beta$ la 2-cellule de $\mathfrak{I}$ définie par un morphisme $u : \alpha \longrightarrow \beta$ de $\mathscr{I}$. Alors, pour tout $\alpha \in Ob\mathscr{I}$, on a, par (R2), un isomorphisme $Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})(\alpha) \cong i_\alpha^* Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})(*)$, et, par (R3), un isomorphisme $i_\alpha^* Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})(*) \cong \gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X})(\alpha)$, tels que, pour tout morphisme $u : \alpha \longrightarrow \beta$ de $\mathscr{I}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})(\alpha) \arrow[r, "\mathrm{G}(\mathrm{X}(u))"] \arrow[d] & Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})(\beta) \arrow[d] \\
\gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X})(\alpha) \arrow[r, "\gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X})(u)"] & \gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X})(\beta),
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ceci définit l'isomorphisme naturel $\gamma'\mathrm{G}_{\mathscr{I}}(\mathrm{X}) \cong Diag_{\mathscr{I}}\mathrm{G}(\mathrm{X})$, qui prouve la proposition.

(**1.6.7**). — Supposons que $\mathscr{C}$ est une catégorie cocartésienne, et soit

$$\mathrm{G} : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}$$

un foncteur covariant Φ-rectifié. Pour tout couple X et Y d'objets de $\mathscr{C}$, le diagramme

$$\mathrm{G}(\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y} \longleftarrow \mathrm{Y}) = \gamma(\mathrm{G}'(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{G}'(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \longleftarrow \mathrm{G}'(\mathrm{Y}))$$

induit un morphisme

$$\mathrm{G}'(\mathrm{X}) \sqcup \mathrm{G}'(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{G}'(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y})$$

de $\mathscr{D}$, et donc un morphisme

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) \sqcup \mathrm{G}(\mathrm{Y}) \cong \gamma(\mathrm{G}'(\mathrm{X}) \sqcup \mathrm{G}'(\mathrm{Y})) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \cong \gamma(\mathrm{G}'(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}))$$

de $Ho\,\mathscr{D}$ (voir (1.5.1)). Donc,

Proposition. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie cocartésienne, et $\mathscr{D}$ une catégorie de descente. Si

$$\mathrm{G} : \mathscr{C} \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}$$

est un foncteur covariant Φ-rectifié, alors G *est monoïdal.*

D'après (1.5.11), on a la proposition suivante.

(**1.6.8**) *Proposition. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique. Si $\mathrm{G}_\Phi : Diag_\Phi \mathscr{C} \to Ho\,Diag_\Phi \mathscr{D}$ est une Φ-rectification d'un foncteur $\mathrm{G} : \mathscr{C} \to Ho\,\mathscr{D}$, alors G_Φ induit un foncteur Φ-rectifié*

$$(\mathbf{s} \circ \mathrm{G}_\Phi)_{|Diag_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{C}} : Diag_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{C} \longrightarrow Ho\,Diag_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{D} \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}.$$

En particulier, pour tout diagramme cubique X *de $\mathscr{C}$, l'objet $\mathbf{s}\mathrm{G}_\Phi(\mathrm{X})$ de $Ho\,\mathscr{D}$ est bien défini.*

Pour simplifier les notations, si G est un foncteur Φ-rectifié, nous noterons encore G sa rectification, et $\mathbf{s}\mathrm{G}$ le foncteur Φ-rectifié $Diag_{\Pi\times\Pi^+}\mathscr{C} \longrightarrow Ho\,\mathscr{D}$ défini ci-dessus.

(**1.6.9**) *Définition. — Soient $\mathscr{C}$ une catégorie, $\mathscr{D}$ une catégorie de descente homologique, et $\mathrm{G} : \mathscr{C} \to Ho\,\mathscr{D}$ un foncteur Φ-rectifié. Nous dirons qu'un diagramme cubique* X *de $\mathscr{C}$ est* G-acyclique *si l'objet $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X})$ de $Ho\,\mathscr{D}$ est acyclique, et qu'un morphisme $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ de diagrammes cubiques de $\mathscr{C}$ est un* G-isomorphisme *si $\mathbf{s}\mathrm{G}(f) : \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{Y})$ est un isomorphisme de $Ho\,\mathscr{D}$.*

De même, on définit le 2-foncteur $Codiag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} : \mathfrak{I} \longrightarrow \mathbf{2Cat}'$, des codiagrammes de $\mathscr{D}$ dont le type est dans $\mathfrak{I}$, qui associe: à un objet $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{I}$, la catégorie $(\mathscr{I}, \mathscr{D})$; à un morphisme $\delta : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{J}$ de $\mathfrak{I}$, le foncteur $\delta^* : (\mathscr{J}, \mathscr{D}) \longrightarrow (\mathscr{I}, \mathscr{D})$ tel que $\delta^*(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} \circ \delta$; et, à une 2-cellule $\tau : \delta \longrightarrow \delta'$ de $\mathfrak{I}$, la transformation naturelle $\tau^* : \delta^* \longrightarrow \delta'^*$ telle que, pour tout objet Y de $(\mathscr{J}, \mathscr{D})$, $\tau^*(\mathrm{Y}) : \delta^*(\mathrm{Y}) \longrightarrow \delta'^*(\mathrm{Y})$ est définie par la famille $(\mathrm{Y}(\tau_i))_{i \in \mathscr{I}}$.

Nous remarquons qu'on a un isomorphisme de 2-foncteurs

$$Codiag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D} \cong \left(Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}^{op}\right)^{op},$$

où $\left(Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}^{op}\right)^{op}$ est le 2-foncteur $\mathscr{I} \mapsto \left((Diag_{\mathfrak{I}}\mathscr{D}^{op})(\mathscr{I})\right)^{op}$.

Nous utiliserons librement les résultats pour les codiagrammes analogues à ceux obtenus ci-dessus.

(**1.7**) *Catégories de descente cohomologique.* — Les axiomes donnés dans (1.5.3) pour les catégories de descente homologique ne sont pas autoduaux. Pour une théorie de descente cohomologique la définition est la suivante.

(**1.7.1**) *Définition. — Considérons la donnée de* $(\mathscr{D}, \mathrm{E}, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$*, où* $\mathscr{D}$ *est une catégorie,* E *est une classe de morphismes de* $\mathscr{D}$*,* $\mathbf{s} : Codiag_{\Pi}\mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ *est un foncteur covariant,* $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi \longrightarrow Coreal_{\Pi}\mathscr{D}$ *est un foncteur op-monoïdal et* $\lambda = \lambda_{\square} : id_{\mathscr{D}} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square} \circ i_{\square}$ *est une transformation naturelle de foncteurs, qui est aussi naturelle en* $\square \in Ob\,\Pi$.

Nous dirons que $(\mathscr{D}, \mathrm{E}, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$ *est une catégorie de* descente cohomologique *si* $\mathscr{D}^{op}$ *est une catégorie de descente homologique, autrement dit, si* $\mathscr{D}$ *vérifie les conditions de la définition (1.5.3) obtenues en changeant* $\mathscr{D}$ *par* $\mathscr{D}^{op}$.

Nous appellerons *quasi-isomorphismes* les morphismes de E, et *acycliques*, les objets de $\mathscr{D}$ quasi-isomorphes à l'objet initial 1.

Le produit $\times$ de $\mathscr{D}$ induit une structure de catégorie monoïdale dans $Ho\mathscr{D}$, dont l'unité est l'image par γ de l'objet final de $\mathscr{D}$, et le foncteur γ est op-monoïdal.

Pour une catégorie additive, où l'objet initial et l'objet final coïncident, de même que la somme et le produit, la situation homologique et la situation cohomologique ne diffèrent que pour le foncteur simple. En particulier la proposition qui suit est l'analogue à (1.5.5).

(**1.7.2**). — Soient $\mathscr{A}$ une catégorie additive, et $\mathrm{C}^*(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes de $\mathscr{A}$ (sans limitation de degré).

On peut aisément dualiser les constructions et preuves de (1.3.1) et (1.5.5), et on obtient alors:

Le foncteur *simple*

$$\mathbf{s} : \mathit{Codiag}_{\Pi} \mathrm{C}^*(\mathscr{A})) \longrightarrow \mathrm{C}^*(\mathscr{A}),$$

tel que, si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^\alpha)$ est un codiagramme de $\mathrm{C}^*(\mathscr{A})$ de type $\square \in \mathit{Ob}\,\Pi$, le complexe simple $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$ est défini par

$$\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})^q = \bigoplus_{q=p+\dim\alpha} or(\alpha)^{\dim\alpha} \otimes \mathrm{X}^{\alpha p}, \quad q \in \mathbf{Z}.$$

et la différentielle

$$d = \sum_{u:\beta\longrightarrow\alpha} or(u) \otimes \mathrm{X}(u) + (-1)^{\dim\alpha} 1 \otimes d_{\mathrm{X}},$$

sur $or(\alpha)^{\dim\alpha} \otimes \mathrm{X}^{\alpha p}$.

Le complexe simple $\mathbf{s}_\square(\mathrm{X})$ est naturellement isomorphe à la fin $\int_\alpha \mathrm{C}^*(\square_\alpha) \otimes \mathrm{X}^\alpha$, où $\mathrm{C}^*(\square_\alpha) := \mathbf{s}(\square_\alpha^{op} \times \mathbf{Z})$.

Pour tout couple $\square$, $\square'$ d'objets de Π, soit $\mu_{\square,\square'}$ l'isomorphisme correspondant à la fin itérée, défini à partir des isomorphismes $\mathrm{C}^*(\square_\alpha) \otimes \mathrm{C}^*(\square_\beta) \cong \mathrm{C}^*(\square_{(\alpha,\beta)})$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \square \times \square'$.

Pour tout objet X de $\mathrm{C}^*(\mathscr{A})$, et tout $\square \in \mathit{Ob}\,\Pi$, le morphisme

$$\lambda_\square(\mathrm{X}) : \mathrm{X} \cong \mathrm{X} \otimes \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{s}_\square(\square^{op} \times \mathrm{X}) \cong \mathrm{C}^*(\square) \otimes \mathrm{X}$$

est le morphisme induit par la coaugmentation $\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{C}^*(\square)$.

Finalement, on a la proposition suivante.

Proposition. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. La catégorie $\mathrm{C}^\natural(\mathscr{A})$ des complexes de cochaînes de $\mathscr{A}$, où $\natural = *, +$ ou b, munie de la classe E *des quasi-isomorphismes, du foncteur simple* $\mathbf{s}$*, et des données (μ, λ) définies plus haut, est une catégorie de descente cohomologique.*

On déduit de ceci la proposition $(1.5.12)^{op}$, qui correspond à (1.5.12) dans le cas cohomologique.

(**1.7.3**) *Le foncteur simple de Thom-Whitney.* — Soit k un corps de caractéristique zéro, et désignons par $\mathbf{Adgc}(k)$ la catégorie des k-algèbres différentielles graduées à degrés ≥ 0, anticommutatives et avec élément unité (dgc pour abréger). Tout objet A de $\mathbf{Adgc}(k)$ est muni d'un morphisme structural $\eta_{\mathrm{A}} : k \longrightarrow \mathrm{A}$, qui est unifère, et non nul si A est différent de l'algèbre 0. Les morphismes entre ces objets sont les morphismes de k-algèbres compatibles avec le morphisme structural. L'algèbre k est l'objet initial de cette catégorie, et l'algèbre nulle 0 est l'objet final. Dans cette catégorie, les limites inductives et projectives finies sont représentables, le coproduit étant le produit tensoriel d'algèbres dgc.

Nous allons munir $\mathbf{Adgc}(k)$ d'une structure de catégorie de descente cohomologique.

La classe E est la classe des quasi-isomorphismes, c'est-à-dire des morphismes qui induisent un isomorphisme en l'homologie.

Le foncteur simple cubique qu'on va définir est une variante du foncteur simple de Thom-Whitney, $\mathbf{s}_{\mathrm{TW}}$, introduit dans [N](3.2).

Rappelons la définition du foncteur $\mathbf{s}_{\mathrm{TW}}$. Dans la catégorie $\mathbf{Adgc}(k)$, on a l'objet simplicial $\mathrm{L}^* = (\mathrm{L}^*_n)$, dont la composante d'indice n, L^*_n, est la k-algèbre dgc des formes différentielles régulières sur l'hyperplan de l'espace affine $\mathbf{A}^{n+1}_k$ défini par l'équation $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Si $\mathrm{A} = (\mathrm{A}^{n*})$ est une k-algèbre dgc cosimpliciale stricte, on définit (voir *loc. cit.*) le simple de Thom-Whitney de A comme la fin

$$\mathbf{s}_{\mathrm{TW}}\mathrm{A} := \int_p \mathrm{L}^*_p \otimes \mathrm{A}^{p*}$$

du foncteur $(\Delta_{mon})^{op} \times (\Delta_{mon}) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(k), \quad (p, q) \longmapsto \mathrm{L}^*_p \otimes \mathrm{A}^{q*}.$

Maintenant, soit S un ensemble fini. On note $\mathrm{L}^*_{\mathrm{S}}$ la k-algèbre dgc des formes différentielles régulières sur l'hyperplan de l'espace affine $\mathbf{A}^{\mathrm{S}}_k$, défini par l'équation $\sum_{s\in \mathrm{S}} t_s = 1$.

Si $\square = \Pi_{i\in \mathrm{I}}\square_{\mathrm{S}_i} \in Ob\,\Pi$, pour tout $\alpha = (\alpha_i)_i \in \square$, on pose $\mathrm{L}^*_\alpha = \otimes_i \mathrm{L}^*_{\alpha_i}$. Alors $(\mathrm{L}^*_\alpha)_{\alpha\in\square}$ est un diagramme de $\mathbf{Adgc}(k)$ de type $\square$, et on définit le foncteur

$$\mathbf{s}_\square : (\square, \mathbf{Adgc}(k)) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(k)$$

comme étant la fin

$$\mathbf{s}_\square \mathrm{A} = \int_\alpha \mathrm{L}^*_\alpha \otimes \mathrm{A}^{\alpha *}$$

du foncteur $\square^{op} \times \square \longrightarrow \mathbf{Adgc}(k), \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \mathrm{L}^*_\alpha \otimes \mathrm{A}^{\beta *}.$

Puisque $\mathbf{s}_\square$ est fonctoriel par rapport à $\square$, on a le foncteur

$$\mathbf{s}_{\mathrm{TW}} : Codiag_\Pi(\mathbf{Adgc}(k)) \longrightarrow \mathbf{Adgc}(k)\,.$$

Pour tout couple $\square$, $\square'$ d'objets de Π, soit $\mu_{\square,\square'}$ l'isomorphisme correspondant à la fin itérée, défini à partir des isomorphismes $\mathrm{L}^*_\alpha \otimes \mathrm{L}^*_\beta \cong \mathrm{L}^*_{(\alpha,\beta)}$, pour tout $(\alpha, \beta) \in \square \times \square'$.

Pour tout $\mathrm{S} \in Ob\,\Pi$, et toute k-algèbre dgc A^*, soit

$$\lambda_{\square_{\mathrm{S}}}(\mathrm{A}^*) : \mathrm{A}^* \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_{\mathrm{S}}}(\square^{op}_{\mathrm{S}} \times \mathrm{A}^*) \cong \mathrm{L}^*_{\mathrm{S}} \otimes \mathrm{A}^*$$

le morphisme induit par le morphisme structurel $k \longrightarrow \mathrm{L}^*_{\mathrm{S}}$.

(**1.7.4**) *Proposition. — La catégorie* $\mathbf{Adgc}(k)$, *munie de la classe* E *des quasi-isomorphismes, du foncteur simple* $\mathbf{s}_{\mathrm{TW}}$ *et des données* (λ, μ) *définies plus haut, est une catégorie de descente cohomologique.*

Preuve. — Les propriétés $(\mathrm{CD1})^{op}$, $(\mathrm{CD2})^{op}$, $(\mathrm{CD4})^{op}$ et $(\mathrm{CD7})^{op}$ sont trivialement vérifiées, tandis que la propriété $(\mathrm{CD6})^{op}$ résulte de [ML](IX.8). Pour vérifier les propriétés $(\mathrm{CD3})^{op}$, $(\mathrm{CD5})^{op}$ et $(\mathrm{CD8})^{op}$, nous utiliserons la proposition $(1.5.12)^{op}$ comme dans le cas des espaces topologiques.

Soit

$$\psi : \mathbf{Adgc}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^{+}(k\text{-}\mathbf{mod})$$

le foncteur d'oubli de la structure multiplicative, et $\theta : \psi \circ \mathbf{s}_{\mathrm{TW}} \longrightarrow \mathbf{s} \circ \psi$ la transformation naturelle d'intégration définie comme suit (voir [N](2.5)).

Pour tout ensemble S, fini et non vide, on a le morphisme d'integration

$$\mathrm{I}_{\mathrm{S}} : \mathrm{L}^{*}_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{C}^{*}(\square_{\mathrm{S}}, k) = \bigoplus_{u:\alpha\to \mathrm{S}} or(\alpha) \otimes k,$$

$$\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(w) = \sum_{u:\alpha\to\mathrm{S}} \mu_{\alpha} \otimes \int_{\Delta_{\alpha},\mu_{\alpha}} u^{*}(w).$$

Ce morphisme coïncide avec le morphisme d'integration de l'objet cosimplicial strict de $\mathbf{Adgc}(k)$ défini par le codiagramme cubique $(or(\alpha)^{\dim\alpha} \otimes k)_{\alpha\in\square_{\mathrm{S}}}$ (voir [N](3.3) et [Gu](2.1.6)). C'est donc une équivalence homotopique de complexes, avec pour équivalence inverse

$$\mathrm{E}_{\mathrm{S}} : \mathrm{C}^{*}(\square_{\mathrm{S}}, k) \longrightarrow \mathrm{L}^{*}_{\mathrm{S}}$$

naturelle en S, telle que $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} \circ \mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ est l'identité de $\mathrm{C}^{*}(\square_{\mathrm{S}}, k)$, et il existe une homotopie $h_{\mathrm{S}} : \mathrm{E}_{\mathrm{S}} \circ \mathrm{I}_{\mathrm{S}} \sim 1_{\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{S}}}$, elle aussi naturelle en S.

On en déduit, pour tout $\alpha \in \square = \Pi_i \square_{\mathrm{S}_i} \in Ob\,\Pi$, un morphisme de complexes naturel en α,

$$\mathrm{I}_{\alpha} = \otimes_i \mathrm{I}_{\alpha_i} : \mathrm{L}^{*}_{\alpha} = \otimes_i \mathrm{L}^{*}_{\alpha_i} \longrightarrow \mathrm{C}^{*}(\square_{\alpha}, k) = \otimes_i \mathrm{C}^{*}(\square_{\alpha_i}, k),$$

qui est une équivalence homotopique, avec pour équivalence inverse E_{α} naturelle en α, telle que $\mathrm{I}_{\alpha} \circ \mathrm{E}_{\alpha}$ est l'identité, et l'homotopie $h_{\alpha} : \mathrm{E}_{\alpha} \circ \mathrm{I}_{\alpha} \sim 1_{\mathrm{L}^{*}_{\alpha}}$, elle aussi naturelle en α.

Soit A un codiagramme de type $\square$ de $\mathbf{Adgc}(k)$. Pour tout $\alpha, \beta \in \square$, on a le morphisme

$$\theta_{\alpha\beta} = \mathrm{I}_{\alpha} \otimes 1_{\mathrm{A}^{\beta *}} : \mathrm{L}^{*}_{\alpha} \otimes \mathrm{A}^{\beta *} \longrightarrow \mathrm{C}^{*}(\square_{\alpha}, k) \otimes \mathrm{A}^{\beta *},$$

qui est naturel en (α, β), donc il induit le morphisme des fins

$$\theta(\mathrm{A}) : \int_{\alpha} \mathrm{L}^{*}_{\alpha} \otimes \mathrm{A}^{\alpha *} \longrightarrow \int_{\alpha} \mathrm{C}^{*}(\square_{\alpha}, k) \otimes \mathrm{A}^{\alpha *},$$

qui est une équivalence homotopique naturelle en A, avec pour équivalence homotopique inverse le morphisme E(A) induit par les $\mathrm{E}_{\alpha} \otimes 1_{\mathrm{A}^{\beta *}}$.

Il est aisé de vérifier que θ est compatible au produit et aux morphismes μ et λ, et la proposition résulte alors de $(1.5.12)^{op}$.

(**1.7.5**). — Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, $\mathrm{CF}^{\natural}(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes de cochaînes de $\mathscr{A}$ (où $\natural = *, +, b$), filtrés par une filtration décroissante et birégulière, et $\mathbf{s}$ le foncteur simple filtré, défini par $\mathbf{s}(\mathrm{X}, \mathrm{F}) := (\mathbf{s}(\mathrm{X}), \mathbf{s}(\mathrm{F}))$.

Proposition. — La catégorie $\mathrm{CF}^{\natural}(\mathscr{A})$*, munie de la classe* E *des quasi-isomorphismes filtrés, du foncteur simple filtré* $\mathbf{s}$ *et des données* (λ, μ) *définies comme dans (1.7.2), est une catégorie de descente cohomologique.*

Preuve. — Pour vérifier que ces données définissent une catégorie de descente cohomologique, nous considérons le foncteur de passage au gradué

$$\mathrm{G}r : \mathrm{CF}^{\natural}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{C}^{\natural}(\mathscr{A}).$$

Il est évident que ce foncteur commute avec le foncteur simple, et la proposition $(1.5.12)^{op}$ permet de prouver aisément que $\mathrm{CF}^{\natural}(\mathscr{A})$ est une catégorie de descente cohomologique.

(**1.7.6**). — Soient X un espace analytique complexe, et $\mathrm{C}_{diff}(\mathrm{X})$ (resp. $\mathrm{C}_{diff,coh}(\mathrm{X})$) la catégorie des complexes des faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules K bornés inférieurement, filtrés par une filtration F par des sous-$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules, décroissante et birégulière, et munis d'une différentielle d qui est un opérateur différentiel d'ordre ≤ 1 respectant F, dont le gradué $\mathrm{G}r_{\mathrm{F}}(d)$ est $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-linéaire (resp. et dont la cohomologie de $\mathrm{G}r_{\mathrm{F}}\mathrm{K}$ est cohérente) (voir [DB] §1). Les morphismes de $\mathrm{C}_{diff}(\mathrm{X})$ (resp. $\mathrm{C}_{diff,coh}(\mathrm{X})$) sont les morphismes $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-linéaires de complexes, compatibles à la filtration.

D'une façon analogue à (1.7.5) on obtient:

Proposition. — Soit X *un espace analytique complexe, alors* $\mathrm{C}_{diff}(\mathrm{X})$ *(resp.* $\mathrm{C}_{diff,coh}(\mathrm{X})$*) munie de la classe des quasi-isomorphismes filtrés, du foncteur simple filtré et des données* (μ, λ) *définies comme dans (1.7.2), est une catégorie de descente cohomologique.*

(**1.7.7**). — Nous donnons un dernier exemple de catégorie de descente, que nous utiliserons au §5 dans le contexte de la théorie des motifs.

Proposition. — Soit $\mathscr{A}$ *une catégorie additive. La catégorie* $\mathrm{C}^{\natural}(\mathscr{A})$ *des complexes de cochaînes de* $\mathscr{A}$*, où* $\natural = *, +, b$*, munie de la classe* E *des équivalences d'homotopie (ou homotopismes), le foncteur simple* $\mathbf{s}$ *et les données* (μ, λ) *définis dans (1.7.2), est une catégorie de descente cohomologique.*

Preuve. — Toutes les propriétés, sauf la saturation de E, $(\mathrm{CD5})^{op}$ et $(\mathrm{CD8})^{op}$, se prouvent comme dans (1.5.5).

Prouvons que la classe E est saturée. En effet, la catégorie $\mathrm{K}^{\natural}(\mathscr{A})$, quotient de $\mathrm{C}^{\natural}(\mathscr{A})$ par la relation d'homotopie, est isomorphe à la catégorie localisée de

$C^\natural(\mathscr{A})$ par rapport aux homotopismes, et les homotopismes sont exactement les isomorphismes dans $K^\natural(\mathscr{A})$.

Pour prouver $(CD5)^{op}$, il suffit de considérer le cas où $\square = \square_n^+$, car on peut étendre un diagramme X de type $\square_S$ à un diagramme $\widetilde{X}$ de type $\square_S^+$ en le complétant par l'objet nul, et on a un isomorphisme $\mathbf{s}_{\square_S} X[1] \cong \mathbf{s}_{\square_S^+}\widetilde{X}$. Maintenant procédons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, avec les notations de $(CD5)^{op}$, X est un morphisme de complexes $X^0 \longrightarrow X^1$, Y est un morphisme de complexes $Y^0 \longrightarrow Y^1$, et f est un couple d'homotopismes (f^0, f^1), tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X^0 & \longrightarrow & X^1 \\ {\scriptstyle f^0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f^1} \\ Y^0 & \longrightarrow & Y^1 \end{array}$$

est commutatif. Puisque la catégorie $K^\natural(\mathscr{A})$ est triangulée, il résulte que $\mathbf{s}_{\square_0^+}(f)$ est un homotopisme (voir [Ve]).

Supposons que $n \geq 1$. Puisqu'on a $\square_n^+ \cong \square_0^+ \times \square_{n-1}^+$, compte tenu de la propriété de factorisation de (1.3.1) et l'hypothèse de récurrence, il résulte que $\mathbf{s}_{\square_n^+}(f)$ est un homotopisme.

Finalement, la propriété $(CD8)^{op}$ est une conséquence de l'isomorphisme $\mathbf{s}_{\square_0^+}\, tot(s_\square X \to X^0) \cong \mathbf{s}_{\square^+} X_+$, et du critère de contractibilité: un morphisme de complexes est une équivalence d'homotopie si, et seulement si, le cône du morphisme est contractile. Notons que ce critère est une conséquence immédiate des axiomes TRI et TRIII des catégories triangulées, dans $K^\natural(\mathscr{A})$.

2. Les théorèmes d'extension

Dans ce paragraphe, nous donnons des critères d'extension pour un foncteur défini sur une catégorie de schémas séparés, de type fini et lisses sur un corps k à une catégorie plus large de schémas. Ces critères étant basés essentiellement sur les théorèmes de résolution des singularités d'Hironaka, comme ils sont développés dans la théorie des hyperrésolutions cubiques de [HC], nous nous placerons dans un contexte où cette théorie est disponible, en supposant le corps k de caractéristique zéro.

(**2.1**) *Extension d'un foncteur défini sur les schémas lisses.* — Soient k un corps de caractéristique zéro, et $\mathbf{Sch}(k)$ la catégorie des schémas réduits, séparés et de type fini sur k, que nous appellerons simplement schémas, et $\mathbf{Reg}(k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}(k)$ d' objets les schémas lisses.

Dans toute cette section (2.1) nous noterons $\mathscr{M}'$ la catégorie $\mathbf{Sch}(k)$, et $\mathscr{M}$ la sous-catégorie $\mathbf{Reg}(k)$.

Dans les catégories $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ nous considérons des classes distinguées de diagrammes.

(**2.1.1**) *Définition. — Nous dirons qu'un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd} \tag{2.1.1.1}$$

de $\mathscr{M}'$ *est un* carré acyclique *si* i *est une immersion fermée, si* f *est propre et s'il induit un isomorphisme* $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \longrightarrow X \setminus Y$.

Si (2.1.1.1) *est un carré acyclique dont les objets sont des objets irréductibles de la catégorie* $\mathscr{M}$*, et tel que* $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *est l'éclatement de* X *le long de* Y*, nous dirons que* f *est une* modification propre élémentaire*, et que le diagramme* (2.1.1.1) *est un* carré acyclique élémentaire.

Le théorème de résolution des singularités d'Hironaka ([Hi1]) entraîne aussitôt la propriété d'existence suivante:

(**2.1.2**) *Théorème de résolution. — Pour tout objet* X *de* $\mathscr{M}'$ *il existe un carré acyclique* (2.1.1.1)*, où* $\widetilde{X}$ *est un objet de* $\mathscr{M}$*, et* $\dim Y$, $\dim \widetilde{Y} < \dim X$.

Cette propriété est un argument essentiel dans la preuve du théorème de la descente cubique [HC](I.3.10), qui est utilisé pour démontrer le théorème d'extension (2.1.5) ci-dessous.

Dans ce qui suit, en plus du théorème de résolution (2.1.2) et de la théorie des hyperrésolutions cubiques, nous utiliserons une propriété qui nous permettra de relier deux résolutions différentes; ce résultat-clé est le lemme de Chow-Hironaka ([Hi1], (0.5), p. 144):

(**2.1.3**) *Lemme de Chow-Hironaka. — Si* $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ *est un morphisme birationnel propre de* $\mathscr{M}$ *tel que* X *et* $\widetilde{X}$ *sont irréductibles, il existe un morphisme birationnel propre* $g : X' \longrightarrow X$ *qui est la composition d'une suite finie de modifications propres élémentaires et qui se factorise par* f.

(**2.1.4**) *Le problème d'extension.* — Soit $\mathscr{D}$ une catégorie de descente cohomologique cubique, et $\gamma : \mathscr{D} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ le foncteur de localisation. Si

$$G : \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{D}$$

est un foncteur contravariant, et Φ est la 2-catégorie de types de diagrammes des catégories ordonnables finies (voir (1.6.3)), G induit une Φ-rectification (voir (1.6.5))

$$G_\Phi : Diag_\Phi \mathscr{M} \longrightarrow Ho\, Codiag_\Phi \mathscr{D},$$

du foncteur

$$\gamma \circ \mathrm{G} : \mathscr{M} \longrightarrow Ho\mathscr{D}.$$

Le problème qui se pose alors est de donner des conditions naturelles pour qu'on puisse étendre ce foncteur à toute la catégorie $\mathscr{M}'$, et dans cette direction, nous proposons le critère (2.1.5) suivant.

(**2.1.5**) *Théorème. — Soit*

$$\mathrm{G} : \mathscr{M} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

un foncteur contravariant Φ*-rectifié, vérifiant les conditions*

(F1) $\mathrm{G}(\emptyset) = 0$, *et le morphisme canonique* $\mathrm{G}(\mathrm{X} \sqcup \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}) \times \mathrm{G}(\mathrm{Y})$ *est un isomorphisme, et*

(F2) *si* $\mathrm{X}_\bullet$ *est un carré acyclique élémentaire de* $\mathscr{M}$, $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet)$ *est acyclique.*

Alors il existe une extension de G *en un foncteur contravariant* Φ*-rectifié*

$$\mathrm{G}' : \mathscr{M}' \longrightarrow Ho\mathscr{D},$$

vérifiant la condition

(D) *si* $\mathrm{X}_\bullet$ *est un carré acyclique de* $\mathscr{M}'$, $\mathbf{s}\mathrm{G}'(\mathrm{X}_\bullet)$ *est acyclique.*

En plus, si $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathscr{M} \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ *sont des foncteurs* Φ*-rectifiés qui vérifient les conditions (F1) et (F2), si* F' *et* G' *sont des extensions de* F *et* G*, respectivement, qui vérifient la condition (D), et si* $\tau : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ *est un morphisme de foncteurs* Φ*-rectifiés, alors* τ *s'étend d'une façon unique, en un morphisme* $\tau' : \mathrm{F}' \longrightarrow \mathrm{G}'$ *de foncteurs* Φ*-rectifiés.*

Preuve. — Pour la preuve de (2.1.5) rappelons d'abord quelques notations et résultats de [HC], exp. I. Soient $\mathscr{I}$ un type de diagramme ordonnable fini, et $\mathrm{X}_\bullet$ un $\mathscr{I}$-objet de $\mathscr{M}'$. Une 2-*résolution augmentée* de $\mathrm{X}_\bullet$ (voir [HC] (I.2.7), où la définition adoptée est moins restrictive) est un $\mathscr{I} \times \square_1^+$-objet $\mathrm{Z}_{\bullet\bullet}$ de $\mathscr{M}'$, tel que, pour tout $i \in Ob\mathscr{I}$,

(i) $\mathrm{Z}_{i00} = \mathrm{X}_i$,

(ii) Z_{i*} est un carré acyclique de $\mathscr{M}'$,

(iii) Z_{i01} est un objet de $\mathscr{M}$,

(iv) le morphisme $f_i : \mathrm{Z}_{i01} \longrightarrow \mathrm{X}_i$ est exhaustif, et il est une transformation birationnelle entre les composantes irréductibles de Z_{i01} et X_i de dimension maximum.

Nous dirons que la restriction de $Z_{\bullet\bullet}$ à $\mathscr{I} \times \square_1$ est une 2-*résolution* de $X_\bullet$. On définit alors les hyperrésolutions cubiques comme dans [HC](I.2.12), et [HC](I.3.2).

Maintenant, rappelons que (voir [HC] (I.2.8) et [HC](I.2.14)), si $X_\bullet$ est un $\mathscr{I}$-objet de $\mathscr{M}'$, et $Z_{\bullet\bullet}$ un $\mathscr{I} \times \square_1$-objet (resp. $\mathscr{I} \times \square$-objet) de $\mathscr{M}'$, alors $Z_{\bullet\bullet}$ est une 2-résolution (resp. hyperrésolution cubique) de $X_\bullet$ si, et seulement si, $Z_{i\bullet}$ est une 2-résolution (resp. hyperrésolution cubique) de X_i, pour tout $i \in Ob\,\mathscr{I}$.

Finalement, remarquons que si $Z_{\bullet\bullet}$ est une 2-résolution d'un $\mathscr{I}$-objet $X_\bullet$ de $\mathscr{M}'$, en général on n'a pas $dim\, Z_{\bullet 11}, dim\, Z_{\bullet 10} < dim\, X_\bullet$, contrairement à (2.1.2).

Revenons à la preuve de (2.1.5). Soient $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi$, et $X_\bullet : \mathscr{I}^{op} \longrightarrow \mathscr{M}'$ un $\mathscr{I}$-objet de $\mathscr{M}'$. Si $X_{\bullet\bullet}$ est une hyperrésolution cubique de $X_\bullet$, et si l'extension G' existe, d'après la condition (D), les propriétés (CD8), (1.5.10) et la définition d'hyperrésolution cubique, on a un isomorphisme $G'(X_\bullet) \cong \mathbf{s}_\beta G(X_{\bullet\beta})$ dans $Ho(\mathscr{I}, \mathscr{D})$. Ceci suggère l'identité $G'(X_\bullet) := \mathbf{s}_\beta G(X_{\bullet\beta})$ comme définition de $G'(X_\bullet)$. Pour montrer que cette définition de G' donne un foncteur Φ-rectifié, rappelons que, pour tout $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi$, on a un foncteur ([HC](I.3.3))

$$w_{\mathscr{I}}\, \mathbf{Hrc}(\mathscr{I} - \mathscr{M}') \longrightarrow \mathscr{I} - \mathscr{M}'$$

qui induit une équivalence de catégories ([HC](I.3.8))

$$How_{\mathscr{I}}\, Ho\mathbf{Hrc}(\mathscr{I} - \mathscr{M}') \longrightarrow \mathscr{I} - \mathscr{M}' .$$

L'assignation $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi \mapsto \mathbf{Hrc}(\mathscr{I} - \mathscr{M}')$ (resp. $Ho\mathbf{Hrc}(\mathscr{I} - \mathscr{M}')$) est un 2-foncteur, que nous noterons $\mathbf{Hrc}(Diag_\Phi - \mathscr{M}')$ (resp. $Ho\mathbf{Hrc}(Diag_\Phi - \mathscr{M}')$), et les foncteurs $How_{\mathscr{I}}$, $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi$, étant compatibles aux images inverses, induisent une transformation 2-naturelle de 2-foncteurs

$$Ho\mathbf{Hrc}(Diag_\Phi - \mathscr{M}') \longrightarrow Diag_\Phi \mathscr{M}' .$$

Donc, le foncteur induit sur les correspondentes Φ-catégories fibrées associées est une équivalence de catégories sur Φ ([SGA1], exp. VI, p. 159). Ainsi, on est ramené à prouver que la transformation 2-naturelle de 2-foncteurs

$$\mathbf{s}G_\Phi : \mathbf{Hrc}(Diag_\Phi - \mathscr{M}') \longrightarrow Ho\, Codiag_\Phi \mathscr{D}$$

induit une transformation 2-naturelle de 2-foncteurs

$$G'_\Phi : Ho\mathbf{Hrc}(Diag_\Phi - \mathscr{M}') \longrightarrow Ho\, Codiag_\Phi \mathscr{D} ,$$

c'est-à-dire à prouver que la définition $G'(X_\bullet) := \mathbf{s}_\beta G(X_{\bullet\beta})$ ne dépend pas de l'hyperrésolution $X_{\bullet\bullet}$ de $X_\bullet$ choisie.

Pour prouver que G' est bien défini, remarquons d'abord que si $X_{\bullet\bullet} \longrightarrow X_\bullet$ est une hyperrésolution cubique d'un $\mathscr{I}$-objet $X_\bullet$ de $\mathscr{M}'$, il résulte de [HC](I.2.14) que, pour tout $\alpha \in \mathscr{I}$, $X_{\alpha\bullet} \longrightarrow X_\alpha$ est une hyperrésolution cubique de X_α, donc que $G'(X_\alpha) = \mathbf{s}_\beta G(X_{\alpha\beta})$, d'où il s'ensuit qu'il suffit de prouver que $G'(X_\bullet)$ est bien défini dans le cas où $\mathscr{I}$ est la catégorie ponctuelle.

Soit X un schéma, rappelons que, d'après [HC](I.3.10), pour vérifier que $G'(X)$ est bien défini, il suffit de prouver que si $X_\bullet$ et $X'_\bullet$ sont des hyperrésolutions cubiques de X, alors tout morphisme $X_\bullet \longrightarrow X'_\bullet$ d'hyperrésolutions cubiques de X, est un G-isomorphisme (voir (1.6.9)). Nous prouverons ceci par récurrence sur la dimension de X.

Pour tout entier $n \geq 0$ notons $\mathscr{M}'_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}'$ des objets de dimension $\leq n$, et $\mathscr{M}'_{n,0}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}'_n$ dont les objets sont sommes d'objets de $\mathscr{M}'_{n-1}$ et d'objets de $\mathscr{M}$ de dimension $\leq n$. Pour $\nu = (n, 0)$ ou $\nu = n$, nous considérons l'assertion suivante:

(T_ν). — G' *induit un foncteur* Φ*-rectifié*

$$G'_\nu : \mathscr{M}'_\nu \longrightarrow Ho\mathscr{D},$$

qui vérifie la condition (D).

Le théorème (2.1.5) résulte alors de "(T_n), pour tout $n \geq 0$", qui, à son tour, résulte par récurrence de (T_0) et des assertions suivantes

$$(T_{n-1}) \Longrightarrow (T_{n,0}), \quad \text{pour tout } n > 0, \text{ et}$$
$$(T_{n,0}) \Longrightarrow (T_n), \quad \text{pour tout } n > 0.$$

L'assertion (T_0) résulte trivialement des propriétés d'additivité (F1), (CD4), et (2) de (1.5.9), et des propriétés (4) de (1.5.6), et (CD8).

(**2.1.6**) *Preuve de "*$(T_{n-1}) \Longrightarrow (T_{n,0})$*, pour tout* $n > 0$*".* — Soient X un objet de $\mathscr{M}'_{n,0}$, et $X_\bullet$ une hyperrésolution cubique de X. Alors X est la somme d'un objet X' de $\mathscr{M}'_{n-1}$ et d'un objet X^0 de $\mathscr{M}$ de dimension pure n. Cette décomposition de X induit une décomposition $X_\bullet = X'_\bullet \amalg X^0_\bullet$, où $X'_\bullet$ est une hyperrésolution de X' et $X^0_\bullet$ est une hyperrésolution de X^0. Par (T_{n-1}), $X'_\bullet \longrightarrow X'$ est un G'-isomorphisme, et, d'après (F1), (CD4), (2) de (1.5.9) et (CD8), il suffit de voir que $X^0_\bullet \longrightarrow X^0$ est un G-isomorphisme. Compte tenu de (1.5.10), il suffit de prouver le lemme suivant:

Lemme 1. — Supposons (T_{n-1}) *vrai. Si* $X_\bullet$ *est une 2-résolution augmentée d'un objet* X *de* $\mathscr{M}$ *de dimension pure n, alors* $X_\bullet$ *est* G'*-acyclique.*

Preuve du lemme 1. — Soit (2.1.1.1) le diagramme $X_\bullet$. Si $Y = X$, le lemme 1 résulte de (2) de (1.5.6), ainsi on peut supposer que Y est sous-objet propre de X.

(i) Cas où X, $\widetilde{X}$ *sont des objets irréductibles de* $\mathscr{M}$ *de dimension n, et* $\widetilde{X} \longrightarrow X$ *est une modification propre élémentaire.*

Soit Z le centre de l'éclatement $\widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$, alors Y et $\widetilde{\mathrm{Y}}$ sont des objets de $\mathcal{M}'_{n-1}$, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$, et il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathrm{Z}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Y}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Y} & \longrightarrow & \mathrm{X}, \end{array}$$

où le diagramme $\mathrm{X}'_\bullet$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Z}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Z} & \longrightarrow & \mathrm{X} \end{array}$$

est un carré acyclique élémentaire, et le diagramme $\mathrm{Y}'_\bullet$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Z}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Y}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Y} \end{array}$$

est un carré acyclique de $\mathcal{M}'_{n-1}$. Par (T_{n-1}), $\mathrm{Y}'_\bullet$ est G′-acyclique, et par (F2), $\mathrm{X}'_\bullet$ est aussi G′-acyclique, et, compte tenu de (1.5.10), on en conclut que $\mathrm{X}_\bullet$ est G′-acyclique, ce qui prouve le lemme 1 dans ce cas.

(ii) Cas où X, $\widetilde{\mathrm{X}}$ *sont des objets irréductibles de* $\mathcal{M}$ *et de dimension* n*, et* $\widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *est la composition d'une suite finie de modifications propres élémentaires.*

Nous prouverons le lemme 1 dans ce cas par récurrence sur le nombre e de modifications propres élémentaires. Le cas $e = 1$ c'est le cas (i) qu'on vient de prouver. Supposons $e > 1$. Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathrm{Y}} & \longrightarrow & \mathrm{Y}' & \longrightarrow & \mathrm{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathrm{X}} & \longrightarrow & \mathrm{X}' & \longrightarrow & \mathrm{X} \end{array}$$

où $\widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}'$ est une modification propre élémentaire avec un centre d'éclatement lisse contenu dans Y′, d'où il résulte, compte tenu du cas précédent, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Y}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Y}' & \longrightarrow & \mathrm{X}' \end{array}$$

est G'-acyclique. Par ailleurs, $X' \longrightarrow X$ est la composition d'une suite de $e-1$ modifications propres élémentaires, d'où il résulte, d'après l'hypothèse de récurrence sur e, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longrightarrow & X' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

est G'-acyclique. Compte tenu de (1.5.10) il en résulte que $X_\bullet$ est G'-acyclique, ce qui prouve le lemme 1 dans ce cas.

(iii) Cas où X, $\widetilde{X}$ *sont des objets irréductibles de* $\mathscr{M}$ *et de dimension* n.

Puisque $\widetilde{X} \longrightarrow X$ est, dans ce cas, un morphisme birationnel propre, d'après le lemme de Chow-Hironaka (2.1.3), il existe un morphisme $X' \longrightarrow X$ qui est la composition d'une suite de modifications propres élémentaires, et qui domine $\widetilde{X}$. Il existe aussi un morphisme $\widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ qui est la composition d'une suite de modifications propres élémentaires et qui domine X'. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{Y}' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & \widetilde{Y} & \longrightarrow & Y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widetilde{X}' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & \widetilde{X} & \longrightarrow & X \end{array}$$

tel que les morphismes

$$\widetilde{X}' \setminus \widetilde{Y}' \longrightarrow X' \setminus Y' \longrightarrow \widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \longrightarrow X \setminus Y$$

sont des isomorphismes. En appliquant le lemme 1 dans le cas particulier démontré auparavant, il résulte que les morphismes

$$\mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y' \to X') \longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y \to X),$$
$$\mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y}' \to \widetilde{X}') \longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y} \to \widetilde{X})$$

sont des isomorphismes, et compte tenu de la composition

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y}' \to \widetilde{X}') &\longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y' \to X') \\ &\longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y} \to \widetilde{X}) \longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y \to X), \end{aligned}$$

le morphisme central $\mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y' \to X') \longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y} \to \widetilde{X})$ a un inverse à droite et à gauche, donc il est aussi un isomorphisme. Il en résulte que le morphisme

$$\mathbf{s}_{\square_0^+} G'(\widetilde{Y} \to \widetilde{X}) \longleftarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} G'(Y \to X)$$

est un isomorphisme, ce qui prouve, compte tenu de (2) de (1.5.7), (1) de (1.5.9), (1) de (1.5.6) et (CD8), le lemme 1 dans ce cas.

(iv) Cas général.

D'abord nous remarquons que, par (F1), (CD4), (2) de (1.5.9) et (CD8), on se ramène aussitôt au cas où X est irréductible. Nous verrons ci-dessous que nous pouvons suposer aussi que $\widetilde{X}$ est irréductible. En effet, sinon, on a une décomposition $\widetilde{X} = \widetilde{X}^0 \sqcup \widetilde{X}'$, où $\widetilde{X}^0$ est un objet irréductible de $\mathscr{M}$ de dimension $\geq n$, et $\widetilde{X}'$ est un objet de $\mathscr{M}'_{n-1}$. Soient $\widetilde{Y}^0 = \widetilde{X}^0 \cap \widetilde{Y}$, et $\widetilde{Y}' = \widetilde{X}' \cap \widetilde{Y}$. Alors on a $\widetilde{Y}' = \widetilde{X}'$, car X est irréductible, donc le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y}^0 & \longrightarrow & \widetilde{X}^0 \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widetilde{Y}^0 \sqcup \widetilde{Y}' & \longrightarrow & \widetilde{X}^0 \sqcup \widetilde{X}', \end{array}$$

est G′-acyclique, d'après (F1), (2) de (1.5.9), et (2) de (1.5.6). Finalement, le lemme 1 résulte de (T_{n-1}), (F1), (CD4), (2) de (1.5.9) et (CD8), compte tenu du cas précédent.

Il reste à prouver que $G'_{n,0}$ vérifie la propriété de descente (D). Soit $X_\bullet$ un carré acyclique de $\mathscr{M}'_{n,0}$ défini par le diagramme (2.1.1.1). D'après (F1), (CD4), (2) de (1.5.9), (CD8) et (T_{n-1}), on peut supposer, comme auparavant, que X et $\widetilde{X}$ sont des objets irréductibles de $\mathscr{M}$ de dimension n. Si $\widetilde{X} \longrightarrow X$ n'est pas un morphisme birationnel, on a $Y = X$, et la propriété (D) en résulte immédiatement. Dans le cas où $\widetilde{X} \longrightarrow X$ est un morphisme birationel, la condition (D) résulte du lemme 1 qu'on vient de prouver.

(**2.1.7**) *Preuve de "*$(T_{n,0}) \Longrightarrow (T_n)$*, pour tout* $n \geq 1$*".* — Soit X un objet de $\mathscr{M}'$ de dimension n. Nous noterons $\nu(X) = (n, c_n(X), \cdots, c_0(X))$, où $c_i(X)$ est le nombre de composantes irréductibles de X de dimension i qui contiennent des points singuliers de X, $0 \leq i \leq n$. Nous noterons $c(X) := (c_n(X), ..., c_0(X))$. Nous ordonnons l'ensemble Λ des couples $\nu(X)$ par ordre lexicographique. Évidemment, l'ordre Λ ainsi obtenu est noethérien, c'est-à-dire que toute suite descendante est stationnaire.

Si $X_\bullet$ est un $\mathscr{I}$-objet de $\mathscr{M}'$, $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi$, on note $\nu(X_\bullet) := max\{\nu(X_i); i \in Ob\,\mathscr{I}\}$.

Il résulte immédiatement des définitions que si Y est un sous-objet propre et fermé d'un objet X de $\mathscr{M}'$, on a $\nu(Y) < \nu(X)$ si Y ne contient pas toutes les composantes irréductibles de X qui contiennent des points singuliers de X.

Notons $\mathscr{M}_\nu$ (resp. $\mathscr{M}_{<\nu}$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{M}'$ dont les objets sont les objets X de $\mathscr{M}'$ tels que $\nu(X) \leq \nu$ (resp. $\nu(X) < \nu$). Pour $\nu = (n, 0, ..., 0)$ on a $\mathscr{M}'_{n,0} = \mathscr{M}'_\nu$.

Si (2.1.1.1) est une 2-résolution augmentée d'un objet X de $\mathscr{M}'_{n,c}$, $\widetilde{X}$ est un objet de $\mathscr{M}'_{n,0}$ et, si $\nu(Y) < \nu(X)$, on a aussi $\nu(\widetilde{Y}) < \nu(X)$. C'est cette propriété qui va nous permettre de raisonner par récurrence sur $\nu(X)$.

Pour tout $\nu \in \Lambda$, les assertions (T_ν) et $(T_{<\nu})$ ont un sens, et l'implication $(T_{n,0}) \Rightarrow (T_n)$ résulte, par récurrence, de l'assertion "$(T_{<(n,c)}) \Longrightarrow (T_{(n,c)})$, pour tout $c > 0$".

Soit $c = (c_n, \dots, c_0) > 0$, et soit $X \in Ob\mathscr{M}'_{(n,c)}$. D'abord nous prouverons que $G'(X)$ est bien défini. Soient $X'_\bullet$ et $X_\bullet$ des hyperrésolutions cubiques de X, et $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ un morphisme d'hyperrésolutions cubiques de X. Montrons que $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est un G-isomorphisme. Soit X' la réunion de toutes les composantes irréductibles de X qui contiennent des points singuliers de X, alors on a $X = X^0 \sqcup X'$, où X^0 est un objet de $\mathscr{M}'_{n,0}$, et $c(X) = c(X')$. D'après (F1), (CD1) et l'hypothèse $(T_{n,0})$, on peut supposer que $X = X'$, c'est-à-dire que toutes les composantes irréductibles de X contiennent des points singuliers de X.

Prouvons maintenant le lemme suivant:

Lemme 2. — *Supposons* $(T_{<(n,c)})$ *vrai. Soit* X *un objet de* $\mathscr{M}'_{n,c}$ *tel que toutes les composantes irréductibles de* X *contiennent des points singuliers de* X. *Soient* $X'_\bullet$ *et* $X_\bullet$ *des hyperrésolutions cubiques de* X, *et* $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ *un morphisme d'hyperrésolutions cubiques de* X. *Alors il existe un diagramme commutatif*

(**2.1.7.1**)
$$\begin{tikzcd}
X^1 \arrow[dr] & X^2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & X^3 \arrow[dl] \\
 & X^0 & \\
X^4 \arrow[uu] \arrow[ur] & X^5 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & X^6 \arrow[ul],
\end{tikzcd}$$

où

(i) $X^0 = X$, $X^1 = X_\bullet$ *et* $X^4 = X'_\bullet$,

(ii) les morphismes $X^2 \longrightarrow X$ *et* $X^5 \longrightarrow X$ *sont des hyperrésolutions cubiques augmentées* 1*-itérées de* X,

(iii) les morphismes $X^3 \longrightarrow X$ *et* $X^6 \longrightarrow X$ *sont des* 2*-résolutions augmentées de* X, *telles que* X^3 *et* X^6 *soient des diagrammes de* $\mathscr{M}'_{<(n,c)})$, *et*

(iv) les morphismes horizontaux sont des G'*-isomorphismes.*

Preuve du lemme 2. — Notons $X^1 := X_\bullet$, et supposons que X^1 soit une hyperrésolution cubique m-itérée. Voyons qu'il existe une hyperrésolution cubique 1-itérée $X^{(1)}$ de X, et un morphisme $X^{(1)} \longrightarrow X^1$ de diagrammes augmentés sur X qui est G-isomorphisme. En effet, si $m = 1$, posons $X^{(1)} := X_\bullet$. Si $m > 1$, d'après la définition d'hyperrésolution cubique itérée (voir [HC](I.3.2)), il existe une hyperrésolution cubique $(m-1)$-itérée $X^{(m-1)}$ de X telle que $X^1 \longrightarrow X$ soit le diagramme total du

$$\begin{array}{ccc} X^{(m)} & \longrightarrow & X^{(1)} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ X^{(m-1)} & \longrightarrow & X\,, \end{array}$$

où $X^{(m)}$ et $X^{(1)}$ sont des hyperrésolutions cubiques 1-itérées de $X^{(m-1)}$ et X, respectivement. D'après $(T_{n,0})$, le morphisme $X^{(m)} \longrightarrow X^{(m-1)}$ est un G-isomorphisme, donc $X^{(1)} \longrightarrow X^1$ est aussi un G-isomorphisme.

Puisque $X^{(1)} \longrightarrow X$ est une hyperrésolution cubique augmentée 1-itérée de X, il existe une 2-résolution augmentée $X^{[2]} \longrightarrow X$ de X, définie par le diagramme (2.1.1.1) et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Y}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X\,, \end{array}$$

où $\widetilde{Y}_\bullet$ et $Y_\bullet$ sont des hyperrésolutions cubiques de $\widetilde{Y}$ et Y, respectivement, tels que $X^{(1)} \longrightarrow X$ soit le diagramme total de

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & X\,. \end{array}$$

On a donc un morphisme $X^{(1)} \longrightarrow X^{[2]}$ de diagrammes, augmenté sur X.

Si Y est un sous-objet propre de X, posons $X^2 := X^{(1)}$ et $X^3 := X^{[2]}$. Alors le diagramme X^3 est dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, et, $\widetilde{Y}_\bullet$ et $Y_\bullet$ étant des hyperrésolutions cubiques de $\widetilde{Y}$ et Y, respectivement, compte tenu de $(T_{<(n,c)})$, les morphismes $\widetilde{Y}_\bullet \longrightarrow \widetilde{Y}$ et $Y_\bullet \longrightarrow Y$ sont des G′-isomorphismes, donc le morphisme induit $X^2 \longrightarrow X^3$ est aussi un G′-isomorphisme.

Dans le cas où $Y = X$, on obtient que $Y_\bullet$ est une hyperrésolution cubique de X, $\widetilde{Y} = \widetilde{X}$ est dans $\mathscr{M}$, et que $\widetilde{Y}_\bullet$ est une hyperrésolution cubique de $\widetilde{X}$. D'après $(T_{n,0})$, (F1) et (CD4), il en résulte que $\widetilde{Y}_\bullet \longrightarrow \widetilde{X}$ est un G′-isomorphisme, donc que le morphisme de diagrammes $Y_\bullet \longrightarrow X^{(1)}$ est un G′-isomorphisme. Maintenant, on peut substituer $X^{(1)}$ par $Y_\bullet$, et, en itérant l'argument, on obtient une hyperrésolution 1-itérée X^2, dont la 2-résolution correspondante X^3 est telle que le discriminant Y est un sous-objet propre de X, et X^3 est donc un diagramme de $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$. Le morphisme de diagrammes $X^2 \longrightarrow X^3$ est donc un G'-isomorphisme.

On a une situation parallèle pour l'hyperrésolution cubique $X^4 := X'_\bullet$, et on obtient ainsi le lemme 2.

Continuons la preuve de (2.1.7). Puisque le diagramme total du diagramme (2.1.7.1) est de type ordonnable fini, par [HC](I.1.12), il existe, d'après [HC](I.2.10), une 2-résolution de ce diagramme:

$$\begin{tikzcd}
Z^1_\bullet \arrow[dr] & Z^2_\bullet \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Z^3_\bullet \arrow[dl] \\
& Z^0_\bullet & \\
Z^4_\bullet \arrow[uu] \arrow[ur] & Z^5_\bullet \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & Z^6_\bullet \arrow[ul]
\end{tikzcd},$$

qui est un diagramme de $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, tel que Z^0_{10} ne contienne aucune composante irréductible de X et $\dim Z^i_\beta < n$, pour tout $i = 0, \ldots, 6$, et tout $\beta \neq (0, 1)$.

Puisque, d'après [HC](1.2.8), pour tout $i \neq 0$, $Z^i_\bullet \longrightarrow X^i$ est une 2-résolution augmentée, c'est un G'-isomorphisme, compte tenu de $(T_{<(n,c)})$. Pour finir de prouver que $X'_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ est un G-isomorphisme, il suffit alors de prouver que $Z^3_\bullet \longrightarrow Z^0_\bullet$ et $Z^6_\bullet \longrightarrow Z^0_\bullet$ sont des G'-isomorphismes, ce qui résultera du lemme 3 suivant.

Lemme 3. — Supposons $(T_{<(n,c)})$ *vrai. Soit* X *un objet de* $\mathscr{M}'_{n,c}$ *tel que toute composante irréductible de* X *contienne des points singuliers de* X, *et soit (2.1.1.1) une* 2*-résolution augmentée de* X *telle que* Y *soit un sous-objet propre et fermé de* X. *Si* $X_{\bullet\bullet}$ *est une* 2*-résolution du diagramme (2.1.1.1), telle que, pour tout* $(\alpha, \beta) \in \square_1^+ \times \square_1$, *on a* $\dim X_{\alpha\beta} < n$, *si* $\beta \neq (0, 1)$, *et* X_{0010} *ne contient aucune composante irréductible de* X, *alors le* $\square_1^+ \times \square_1$*-diagramme* $X_{\bullet\bullet}$ *est* G'*-acyclique.*

Preuve du lemme 3. — D'après l'hypothèse de récurrence sur c, on peut se limiter au cas où $c(X) = c$. La 2-résolution $X_{\bullet\bullet}$ est alors un $\square_1^+ \times \square_1$-diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y}_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X}_\bullet \arrow[d] \\
Y_\bullet \arrow[r] & X_\bullet
\end{tikzcd},$$

où, d'après [HC](I.2.8), $Y_\bullet, \widetilde{Y}_\bullet, \widetilde{X}_\bullet$ et $X_\bullet$ sont des 2-résolutions de $Y, \widetilde{Y}, \widetilde{X}$ et X respectivement, qui sont les trois colonnes centrales du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
Y & \longleftarrow & Y_{01} & \longleftarrow & Y_{11} & \longrightarrow & Y_{10} & \longrightarrow & Y \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\widetilde{Y} & \longleftarrow & \widetilde{Y}_{01} & \longleftarrow & \widetilde{Y}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{Y}_{10} & \longrightarrow & \widetilde{Y} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{X} & \longleftarrow & \widetilde{X}_{01} & \longleftarrow & \widetilde{X}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{10} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \longleftarrow & X_{01} & \longleftarrow & X_{11} & \longrightarrow & X_{10} & \longrightarrow & X \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
Y & \longleftarrow & Y_{01} & \longleftarrow & Y_{11} & \longrightarrow & Y_{10} & \longrightarrow & Y\,,
\end{array}$$

où nous identifions la première et la dernière colonne, ainsi que la première et la dernière ligne. Rappelons que les objets avec l'indice 01 sont dans $\mathscr{M}'_{n,0}$, que les morphismes de la deuxième et quatrième colonne de morphismes sont des immersions fermées, et que X_{10} ne contient aucune composante irréductible de X.

Dans la suite, nous ferons plusieurs réductions pour prouver que le $\square_1^+ \times \square_1$-diagramme $X_{\bullet\bullet}$ est G'-acyclique.

Première réduction: On peut supposer que $Y \subset X_{10}$, $\widetilde{Y} \subset \widetilde{X}_{10}$, *et que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{Y}_{01} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{01} \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y_{01} & \longrightarrow & X_{01}
\end{array}$$

se factorise par

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{Y}_{01} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{01} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Y_{01} & \longrightarrow & X_{11} & \longrightarrow & X_{01}.
\end{array}$$

En effet, considérons la 2-résolution $X'_\bullet$ de X, telle que $X'_{01} = X_{01}$, $X'_{10} = X_{10} \cup Y$ et X'_{11} est défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}
X'_{11} & \longrightarrow & X'_{01} \\
\downarrow & & \downarrow \\
X'_{10} & \longrightarrow & X\,.
\end{array}$$

On a alors $Y \subset X'_{10}$, et le morphisme $Y_{01} \longrightarrow X_{01}$ se factorise par X'_{11}, car le carré

$$\begin{array}{ccc} Y_{01} & \longrightarrow & X_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'_{10} & \longrightarrow & X \end{array}$$

est commutatif.

De la même façon, nous considérons la 2-résolution $\widetilde{X}'_\bullet$ de $\widetilde{X}$, telle que $\widetilde{X}'_{01} = \widetilde{X}_{01}$, $\widetilde{X}'_{10} = \widetilde{X}_{10} \cup \widetilde{Y}$, et $\widetilde{X}'_{11}$ est défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}'_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}'_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{X}'_{10} & \longrightarrow & \widetilde{X}\,. \end{array}$$

On obtient que $\widetilde{Y} \subset \widetilde{X}'_{10}$ et que le morphisme $\widetilde{Y}_{01} \longrightarrow \widetilde{X}_{01}$ se factorise par $\widetilde{X}'_{11}$.

D'ailleurs X'_{10} est dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, car X_{10} ne contient aucune composante irréductible de X et Y est dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$. Les objets X'_{11}, $\widetilde{X}'_{10}$ et $\widetilde{X}'_{11}$ sont aussi dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, car X_{01}, $\widetilde{X}$ et $\widetilde{X}_{01}$ sont dans $\mathscr{M}'_{n,0}$.

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Y}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X}'_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet & \longrightarrow & X'_\bullet\,, \end{array}$$

tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X}'_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\bullet & \longrightarrow & X'_\bullet \end{array}$$

est G'-acyclique. En effet, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}'_{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X'_{10} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{X}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}'_{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{X}_{10} & \longrightarrow & \widetilde{X}'_{10}, \end{array}$$

étant acycliques, ils sont G'-acycliques, compte tenu de $(T_{<(n,c)})$. Ainsi, d'après (1.5.10), il suffit de prouver le lemme 3 pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X}'_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & X'_\bullet\,. \end{array}$$

Deuxième réduction: On peut supposer, de plus, que $Y_{11} = Y_{01}$, $Y_{10} = Y$, $\widetilde{Y}_{11} = \widetilde{Y}_{01}$ *et* $\widetilde{Y}_{10} = \widetilde{Y}$.

En effet, d'après la première réduction, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{Y}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{Y}'_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{X}_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y_\bullet & \longrightarrow & Y'_\bullet & \longrightarrow & X_\bullet\,, \end{array}$$

où $Y'_\bullet \longrightarrow Y$ et $\widetilde{Y}'_\bullet \longrightarrow \widetilde{Y}$ sont les 2-résolutions augmentées de Y et $\widetilde{Y}$, respectivement, définies par les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} Y_{01} & \longrightarrow & Y_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{Y}_{01} & \longrightarrow & \widetilde{Y}_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{Y} & \longrightarrow & \widetilde{Y}. \end{array}$$

Compte tenu de $(T_{<(n,c)})$, $Y'_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ (resp. $\widetilde{Y}'_\bullet \longrightarrow \widetilde{Y}_\bullet$) est un G'-isomorphisme, car $Y_\bullet$ et $Y'_\bullet$ (resp. $\widetilde{Y}_\bullet$ et $\widetilde{Y}'_\bullet$) sont des 2-résolutions de Y (resp. $\widetilde{Y}$), ce qui entraîne, d'après (1.5.10), que pour prouver le lemme 3, on peut se limiter au cas où $Y_\bullet = Y'_\bullet$ et $\widetilde{Y}_\bullet = \widetilde{Y}'_\bullet$.

Troisième réduction: On peut aussi supposer que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{11} & \longrightarrow & X_{01} \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{X}_{10} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X \end{array}$$

sont cartésiens.

En effet, considérons la 2-résolution $\widetilde{X}'_\bullet$ de $\widetilde{X}$, telle que $\widetilde{X}'_{01} = \widetilde{X}_{01}$, et où $\widetilde{X}'_{10}$ et $\widetilde{X}'_{11}$ sont définis par les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}'_{10} & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{10} & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \widetilde{X}'_{11} & \longrightarrow & \widetilde{X}_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{11} & \longrightarrow & X_{01}\,. \end{array}$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathrm{Y}}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Y}}_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{Y}_\bullet \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widetilde{\mathrm{X}}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}'_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{X}_\bullet\,. \end{array}$$

Les objets $\widetilde{\mathrm{X}}'_{10}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}'_{11}$ sont dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, car $\widetilde{\mathrm{X}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}_{01}$ sont dans $\mathscr{M}'_{n,0}$. Le morphisme $\widetilde{\mathrm{X}}_{01} \setminus \widetilde{\mathrm{X}}_{11} \to \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{X}}_{10}$ est un isomorphisme, et on a $\widetilde{\mathrm{X}}_{10} \subset \widetilde{\mathrm{X}}'_{10} \subset \widetilde{\mathrm{X}}$ et $\widetilde{\mathrm{X}}_{11} \subset \widetilde{\mathrm{X}}'_{11} \subset \widetilde{\mathrm{X}}_{01}$, d'où il résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{X}}_{11} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}'_{11} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widetilde{\mathrm{X}}_{10} & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}'_{10}\,, \end{array}$$

étant cartésien, est un carré acyclique, et donc G′-acyclique, compte tenu de $(\mathrm{T}_{<(n,c)})$. Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Y}}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}_\bullet \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \widetilde{\mathrm{Y}}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}'_\bullet \end{array}$$

est G′-acyclique. Ainsi, par (1.5.10), il suffit donc de prouver le lemme 3 pour le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Y}}_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{X}}'_\bullet \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Y}_\bullet & \longrightarrow & \mathrm{X}_\bullet\,. \end{array}$$

Fin de la preuve du lemme 3: Prouvons que le $\square_1^+ \times \square_1$-diagramme $\mathrm{X}_{\bullet\bullet}$ est G′-acyclique. En effet, d'après les réductions précédentes, nous obtenons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X}_{1110} = \widetilde{\mathrm{Y}}_{10} & \longrightarrow & \mathrm{X}_{0110} = \widetilde{\mathrm{X}}_{10} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{X}_{1010} = \mathrm{Y}_{10} & \longrightarrow & \mathrm{X}_{0010} = \mathrm{X}_{10} \end{array}$$

est un carré acyclique de $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$, et compte tenu de $(\mathrm{T}_{<(n,c)})$, il résulte que $\mathrm{X}_{\bullet\bullet 10}$ est G′-acyclique.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{0111} = \widetilde{X}_{11} & \longrightarrow & X_{0101} = \widetilde{X}_{01} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X_{0011} = X_{11} & \longrightarrow & X_{0001} = X_{01} \end{array}$$

est un carré acyclique de $\mathscr{M}'_{n,0}$. En effet, ce diagramme est cartésien, $Y \subset X_{10}$, $\widetilde{Y} \subset \widetilde{X}_{10}$, et on a des isomorphismes $\widetilde{X}_{01} \setminus \widetilde{X}_{11} \to \widetilde{X} \setminus \widetilde{X}_{10}$ et $X_{01} \setminus X_{11} \to X \setminus X_{10}$, car $\widetilde{X}_\bullet$ et $X_\bullet$ sont des 2-résolutions augmentées. On a aussi un isomorphisme $\widetilde{X} \setminus \widetilde{X}_{10} \to X \setminus X_{10}$, d'après la troisième réduction. Donc, compte tenu de $(T_{n,0})$, $X_{0\bullet\bullet 1}$ est G′-acyclique, et, par (2) de (1.5.7), il en résulte que $\mathbf{s}_\lambda \mathbf{s}_\beta G'(X_{0\beta\lambda 1}) \cong 1$.

D'après la deuxième réduction, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{1111} = \widetilde{Y}_{11} & \longrightarrow & X_{1101} = \widetilde{Y}_{01} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X_{1011} = Y_{11} & \longrightarrow & X_{1001} = Y_{01} \end{array}$$

est aussi acyclique, et il est dans $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$. Donc, compte tenu de $(T_{<(n,c)})$, $X_{1\bullet\bullet 1}$ est G′-acyclique, et, par (2) de (1.5.7), il en résulte que $\mathbf{s}_\lambda \mathbf{s}_\beta G'(X_{1\beta\lambda 1}) \cong 1$.

Puisque $\mathbf{s}_\lambda \mathbf{s}_\beta G'(X_{\alpha\beta\lambda 1}) \cong 1$, de (1) de (1.5.6), on en déduit que $\mathbf{s}_\beta G'(X_{\alpha\beta 11}) \cong \mathbf{s}_\beta G'(X_{\alpha\beta 01})$, pour $\alpha = 0, 1$. D'après (2) de (1.5.7) et (1) de (1.5.9), il en résulte que $\mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta 11}) \cong \mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta 01})$.

Finalement on a $\mathbf{s}_{\square_1^+ \times \square_1} G'(X_{\bullet\bullet}) = \mathbf{s}_{\alpha\beta\lambda\mu} G'(X_{\alpha\beta\lambda\mu}) \cong \mathbf{s}_{\lambda\mu} \mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta\lambda\mu}) \cong 1$, d'après (2) de (1.5.7), (3) de (1.5.6) et (1) de (1.5.9), car on vient de prouver que $\mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta 11}) \cong \mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta 01})$ et $\mathbf{s}_{\alpha\beta} G'(X_{\alpha\beta 10}) \cong 1$. Ceci prouve le lemme 3, et donc que G′ est bien défini sur $\mathscr{M}'_{n,l}$.

Il reste à vérifier que G′ vérifie la propriété (D). Soit $X_\bullet$ un carré acyclique de $\mathscr{M}'_{n,c}$ défini par le diagramme (2.1.1.1). Soit X′ la réunion de toutes les composantes irréductibles de X qui contiennent des points singuliers de X, alors on a une décomposition $X = X^0 \sqcup X'$, où X^0 est un objet de $\mathscr{M}$ de dimension $\geq n$. D'après (F1), (CD4), (2) de (1.5.9), (CD8) et $(T_{n,0})$ il suffit de considérer le cas où $X = X'$. Maintenant, si $Y = X$ la condition (D) est triviale, car on vient de prouver que le foncteur est bien défini. Ainsi, on est ramené au cas où $Y \neq X$, et donc $\nu(Y) < \nu(X)$. Dans ce cas, d'après la propriété (D) pour le foncteur $G'_{<(n,c)}$, on peut supposer que $X \backslash Y$ et $\widetilde{X} \backslash \widetilde{Y}$ sont irréductibles et de dimension n, donc que $\widetilde{X} \longrightarrow X$ est un morphisme birationnel au-dessus de la composante irréductible X^0 qui contient $X \setminus Y$.

Soient $\widetilde{X}^0$ la composante irréductible de $\widetilde{X}$ qui contient $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Y}$, $X' \longrightarrow \widetilde{X}^0$ une résolution de $\widetilde{X}^0$, et $Y_0 \subset X$ un sous-objet propre et fermé de X tel que

$Y \subset Y_0$ et que la composition $X' \longrightarrow \widetilde{X} \longrightarrow X$ soit un isomorphisme en dehors de Y_0. Et soit $\widetilde{Y}_0 \subset \widetilde{X}$ (resp. $Y'_0 \subset X'$) l'image réciproque de Y_0 dans $\widetilde{X}$ (resp. X').

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & Y'_0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
\widetilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Y}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{X} \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Y_0 \arrow[r] & X .
\end{tikzcd}$$

Le morphisme $X' \longrightarrow \widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{X} \longrightarrow X$, resp. $\widetilde{Y}_0 \longrightarrow Y_0$) est un isomorphisme en dehors de $\widetilde{Y}_0$ (resp. Y_0, resp. Y). Ainsi, le carré de $\mathscr{M}'_{<(n,c)}$

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Y}_0 \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Y_0
\end{tikzcd}$$

est acyclique, et, d'après $(\mathrm{T}_{<(n,c)})$, il est aussi G′-acyclique. Les diagrammes cartésiens

$$\begin{tikzcd}
Y'_0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Y_0 \arrow[r] & X,
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
Y'_0 \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
\widetilde{Y}_0 \arrow[r] & \widetilde{X},
\end{tikzcd}$$

sont des 2-résolutions augmentées de X et $\widetilde{X}$ respectivement, donc, d'après $(\mathrm{T}_{<(n,c)})$ et la définition de $G'_{n,c}$, ils sont G′-acycliques, et, par (1.5.10) on conclut que $X_\bullet$ est G′-acyclique, ce qui achève la preuve de (2.1.7).

(**2.1.8**) *Fin de la preuve de (2.1.5).* — La démonstration de l'existence et de l'unicité de l'extension τ' se fait aussi par récurrence sur la dimension, mais, dans ce cas, elle est immédiate d'après la propriété (D).

(**2.1.9**). — Notons qu'il y a une version homologique du théorème (2.1.5), qui s'obtient par passage à la catégorie opposée de la catégorie de descente.

(**2.1.10**). — Dans les applications que nous donnerons dans les paragraphes suivants, nous utiliserons différentes variantes du théorème (2.1.5), où l'analogue des catégories **Reg**(k) et **Sch**(k) sera différente selon le cas, mais on disposera toujours d'un théorème de résolution analogue à (2.1.2), donc la théorie des hyperrésolutions cubiques sera applicable (cf. [HC](I.3.11)), et d'un lemme de Chow-Hironaka analogue à (2.1.3). Ainsi dans toutes les situations considérées, la preuve de la propriété d'extension est analogue à celle donnée dans le cas ci-dessus. Pour abréger les énoncés des différents théorèmes d'extension, nous donnons la définition suivante.

Définition. — Soit $\mathcal{M}'$ une catégorie avec un objet initial $\emptyset$ et des sommes finies, munie d'une classe distinguée de carrés commutatifs, appelés carrés acycliques, *et soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie de $\mathcal{M}'$, qui contient l'objet initial de $\mathcal{M}'$, qui est stable par sommes finies, et qui est munie d'une classe distinguée de carrés acycliques, appelés* carrés acycliques élémentaires. *Nous dirons que le foncteur d'inclusion $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ a la* propriété d'extension, *s'il vérifie l'énoncé du théorème* (2.1.5).

(**2.1.11**). — Notons $\mathbf{Reg}_{\mathbf{q\text{-}proj}}(k)$ la catégorie des schémas quasi-projectifs et lisses sur k, munie des carrés acycliques élementaires définis comme dans (2.1.1). La première variante du théorème (2.1.5) concerne le foncteur d'inclusion $\mathbf{Reg}_{\mathbf{q\text{-}proj}}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}(k)$. La propriété d'extension (2.1.10) est aussi vraie dans ces cas. En effet, d'après le lemme de Chow, pour tout schéma irréductible X, il existe un morphisme birationnel propre $\mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$, où X' est quasi-projectif sur k, donc les propriétés (2.1.2) et (2.1.3) sont aisément vérifiées. On obtient ainsi le théorème d'extension suivant.

Théorème. — Le foncteur $\mathbf{Reg}_{\mathbf{q\text{-}proj}}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}(k)$ a la propriété d'extension (2.1.10).

(**2.2**) *Extension d'un foncteur défini sur $\mathbf{V}(k)$ à une théorie à support compact.* — Dans ce paragraphe, nous considérons le problème d'étendre, à tous les schémas, un foncteur défini seulement sur les variétés projectives et lisses sur k. Bien que dans le cas des schémas propres sur k il n'y ait qu'une seule extension, dans le cas ouvert, il y a d'ordinaire deux extensions possibles qui correspondent à une théorie à support compact et à une théorie sans supports, selon la fonctorialité de l'extension. Nous donnons d'abord l'extension correspondante à une théorie à support compact.

(**2.2.1**). — Notons $\mathbf{Sch}_{\mathbf{Comp}}(k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}(k)$ dont les objets sont propres sur k, munie des carrés acycliques définis comme dans (2.1.1), et notons $\mathbf{V}(k)$ la catégorie des schémas projectifs et lisses sur k, munie aussi des carrés acycliques élémentaires définis comme dans (2.1.1). Le foncteur d'inclusion $\mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}_{\mathbf{Comp}}(k)$ vérifie la propriété d'extension (2.1.10). En effet, d'après le lemme de Chow, les propriétés (2.1.2) et (2.1.3) sont aisément vérifiées, comme dans (2.1.11). On obtient ainsi le

Théorème. — Le foncteur $\mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}_{\mathbf{Comp}}(k)$ a la propriété d'extension (2.1.10).

(**2.2.2**). — Nous donnons maintenant l'extension correspondante à une théorie à support compact, qui est une conséquence immédiate du théorème précédent. Notons $\mathbf{Sch_c}(k)$ la sous-catégorie de $\mathbf{Sch}(k)$ avec les mêmes objets et mêmes carrés acycliques que $\mathbf{Sch}(k)$, mais avec des morphismes propres.

Théorème. — Soit

$$G : \mathbf{V}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

un foncteur contravariant Φ*-rectifié qui vérifie les conditions* (F1) *et* (F2) *de* (2.1.5). *Alors, il existe une extension de* G *en un foncteur contravariant* Φ*-rectifié*

$$G_c : \mathbf{Sch_c}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

tel que:

(1) G_c *vérifie la propriété* (D) *de* (2.1.5),

(2) *si* Y *est un sous-schéma fermé d'un schéma* X, *on a un isomorphisme naturel*

$$G_c(X - Y) \cong \mathbf{s}_{\square_0^+} tot\, (G_c(X) \to G_c(Y))\,.$$

En outre, cette extension est unique, à isomorphisme unique près.

Preuve. — D'après (2.2.1), G s'étend à $Diag_\Phi(\mathbf{Sch_{Comp}}(k))$, et on définit G_c sur les objets de $Diag_\Phi(\mathbf{Sch_c}(k))$ de la façon suivante. Soient $\mathscr{I} \in Ob\,\Phi$, et $U_\bullet$ un $\mathscr{I}$-objet de $\mathbf{Sch_c}(k)$. D'après [HC](I.4.2) et [HC](I.4.3), il existe une compactification $U_\bullet \longrightarrow X_\bullet$ de $U_\bullet$, telle que le complémentaire $Y_\bullet$ est aussi un diagramme de schémas. On définit

$$G_c(U_\bullet) := \mathbf{s}_{\square_0^+} G(Y_\bullet \to X_\bullet).$$

D'après la propriété (D) et [HC](I.4.4), $G_c(U_\bullet)$ ne dépend pas de la compactification, et G_c vérifie la propriété (1) du théorème. La propriété (2) résulte aussitôt de la définition de G_c et de la propriété (D). L'unicité est immédiate.

(**2.3**) *Extension d'un foncteur défini sur* $\mathbf{V^2}$ *à une théorie sans supports.* — Maintenant nous considérons le problème d'extension d'un foncteur G défini sur les variétés projectives et lisses sur k qui correspondrait à une théorie sans supports. Pour ceci désignons par $\mathbf{Sch^2_{Comp}}(k)$ la catégorie des couples (X, U), où X est un objet de $\mathbf{Sch_{Comp}}(k)$ et U est un sous-schéma ouvert de X, les morphismes étant les morphismes de couples usuels, et désignons par $\mathbf{V^2}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch^2_{Comp}}(k)$ formée par les couples (X, U), où X est un objet de $\mathbf{V}(k)$ et $D = X - U$ est un diviseur à croisements normaux dans X.

(**2.3.1**). — Nous allons expliciter la propriété d'extension (2.1.10) pour le foncteur d'inclusion $\mathbf{V^2}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch^2_{Comp}}(k)$.

D'abord, on définit les carrés acycliques de la catégorie $\mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k)$. Nous dirons qu'un carré commutatif de $\mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k)$

$$
\begin{tikzcd}
(\widetilde{\mathrm{Y}}, \widetilde{\mathrm{U}} \cap \widetilde{\mathrm{Y}}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{U}}) \arrow[d, "f"] \\
(\mathrm{Y}, \mathrm{U} \cap \mathrm{Y}) \arrow[r, "i"] & (\mathrm{X}, \mathrm{U})
\end{tikzcd}
\tag{\textbf{2.3.1.1}}
$$

est un *carré acyclique* si $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ est un morphisme propre, $i : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ est une immersion fermée, le carré des premières composantes est cartésien, $f^{-1}(\mathrm{U}) = \widetilde{\mathrm{U}}$ et le diagramme des secondes composantes est un carré acyclique de $\mathbf{Sch}(k)$.

Soit $f : (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{U}}) \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ un morphisme de $\mathbf{V^2}(k)$, nous dirons que f est une *modification propre élémentaire* si $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ est l'éclatement de X avec un centre lisse Y qui a des croisements normaux avec le complémentaire D de U dans X, et si $\widetilde{\mathrm{U}} = f^{-1}(\mathrm{U})$. Rappelons ([Hi1], (0.5) Def. 2) qu'on dit que Y a des croisements normaux avec D en un point p de Y s'il existe un système régulier de paramètres de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},p}$ de X en p, disons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tel que l'idéal dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},p}$ de chaque composante irréductible de D qui contient p, est engendré par un des x_i, et l'idéal de Y dans $\mathscr{O}_{\mathrm{X},p}$ est engendré par $(x_1, \ldots, x_s)$, $0 \leq s \leq n$. On dit que Y a des croisements normaux avec D, ou que D a des croisements normaux avec Y, s'il en est ainsi en tout point p de Y.

Nous dirons qu'un carré acyclique (2.3.1.1) d'objets de $\mathbf{V^2}(k)$ est un *carré acyclique élémentaire* si $f : (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{U}}) \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ est une modification propre élémentaire de $\mathbf{V^2}(k)$, et le diagramme des secondes composantes est un carré acyclique élémentaire de $\mathbf{Reg}(k)$.

Le théorème de simplification d'une frontière algébrique d'Hironaka ([Hi1], (0.5) Cor. 3) entraîne la propriété (2.1.2) pour les objets de $\mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k)$, et d'après ([Hi1], Main Th. II), on obtient la version du lemme de Chow-Hironaka (2.1.3) correspondante:

(**2.3.2**) *Lemme. — Soit* $f : (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{U}}) \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ *un morphisme de* $\mathbf{V^2}(k)$ *tel que* $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *est un morphisme birationnel propre,* $\widetilde{\mathrm{U}} = f^{-1}(\mathrm{U})$ *et* X *est irréductible. Si* U_0 *est un sous-schéma ouvert de* X *tel que* f *est un isomorphisme au-dessus de* U_0*, il existe un morphisme* $g : (\mathrm{X}', \mathrm{U}') \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ *de* $\mathbf{V^2}(k)$*, tel que*

(1) g *est la composition d'une suite finie de modifications propres élémentaires,*

(2) $g : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ *est un isomorphisme au-dessus de* U_0*, et*

(3) g *se factorise par* f.

Preuve. — En effet, $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ étant un morphisme birationnel, il existe un faisceau cohérent d'idéaux $\mathscr{I}$ sur X et à support dans $\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}_0$, tel que si un morphisme $g : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$ transforme $\mathscr{I}$ dans un faisceau inversible, alors g se factorise par $\widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$. Mais, par [Hi1]((0.5), Cor. 1 du Main Th. II, p. 143) et [Hi1]((I.2), Th. II_1) il est possible d'obtenir un morphisme g de ce type à partir de (X, U) par une suite de modifications propres élémentaires dont les centres des éclatements ne coupent pas U_0, ce qui prouve le lemme.

Il en résulte le théorème

(**2.3.3**) *Théorème. — Le foncteur d'inclusion* $\mathbf{V}^2(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k)$ *a la propriété d'extension (2.1.10).*

(**2.3.4**). — L'objectif suivant est de donner un critère pour étendre un foncteur Φ-rectifié

$$\mathrm{G} : \mathbf{V}^2(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}\,,$$

à la catégorie $\mathbf{Sch}(k)$. Pour ceci, nous utiliserons les lemmes de localisation suivants:

Lemme. — Soient $\gamma : \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k) \longrightarrow \mathbf{Sch}(k)$ *le foncteur défini par* $\gamma(\mathrm{X}, \mathrm{U}) = \mathrm{U}$, *et* Σ *la classe des morphismes* s *de* $\mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k)$ *tels que* $\gamma(s)$ *est un isomorphisme. Alors* γ *induit une équivalence de catégories*

$$\eta : \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k)[\Sigma^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Sch}(k)\,.$$

Preuve. — L'affirmation est essentiellement une conséquence du théorème de compactification de Nagata.

En effet, l'existence de compactifications prouve que le foncteur η est essentiellement exhaustif. Pour prouver que η est plein, soit $g : \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}$ un morphisme de schémas, (Y, V) une compactification de V et $(\mathrm{X}_0, \mathrm{U})$ une compactification de U. Alors U a une compactification (X, U) dans le produit $\mathrm{X}_0 \times \mathrm{Y}$, et le morphisme g s'étend à cette compactification, ce qui prouve que η est plein. Finalement, il est aisé de voir de la même façon que la classe Σ admet un calcul de fractions à droite, et, ensuite, que η est fidèle.

D'après ([HC](I.4)), ce résultat s'étend à la catégorie des diagrammes. Notons $Diag_\Phi \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k)[\Sigma^{-1}]$ le 2-foncteur défini par $\mathscr{I} \mapsto (\mathscr{I}^{op}, \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k))[\Sigma^{-1}]$.

(**2.3.5**) *Lemme. — La transformation 2-naturelle de 2-foncteurs*

$$\gamma : Diag_\Phi \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k) \longrightarrow Diag_\Phi \mathbf{Sch}(k)$$

induit une équivalence de catégories fibrées sur Φ

$$\eta : Diag_\Phi \mathbf{Sch}^2_{\mathbf{Comp}}(k)[\Sigma^{-1}] \longrightarrow Diag_\Phi \mathbf{Sch}(k).$$

(**2.3.6**) *Théorème.* — *Soit*

$$\mathrm{G} : \mathbf{V^2}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

un foncteur contravariant Φ*-rectifié qui vérifie les propriétés* (F1) *et* (F2) *de* (2.1.5).

Alors, il existe un foncteur contravariant Φ*-rectifié*

$$\mathrm{G}' : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D},$$

tel que

(1) *si* (X, U) *est un objet de* $\mathbf{V^2}(k)$, *on a un isomorphisme naturel* $\mathrm{G}'(\mathrm{U}) \cong \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$,
(2) G' *vérifie la propriété* (D) *de* (2.1.5),

En outre ce foncteur est unique, à isomorphisme unique près.

Preuve. — D'après (2.3.3), le foncteur G s'étend en un foncteur Φ-rectifié

$$\mathrm{G} : \mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}\,,$$

qui vérifie la propriété (D) de (2.1.5). Maintenant, d'après (2.3.5), il suffit de prouver que si $s : (\mathrm{X}', \mathrm{U}') \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{U})$ est un morphisme de $\mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k)$ tel que $\gamma(s)$ est un isomorphisme, alors $\mathrm{G}(s)$ est un isomorphisme. Puisque le morphisme $\mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{U}$ est propre et se factorise par $\mathrm{U}' \longrightarrow s^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{U}$, où $s^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{U}$ est separé, il en résulte que $\mathrm{U}' \longrightarrow s^{-1}(\mathrm{U})$ est propre. Donc $s^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U}'$, U' étant dense dans $s^{-1}(\mathrm{U})$. Ainsi, le carré de $\mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(k)$

$$\begin{array}{ccc}
(\emptyset, \emptyset) & \longrightarrow & (\mathrm{X}', \mathrm{U}') \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
(\emptyset, \emptyset) & \longrightarrow & (\mathrm{X}, \mathrm{U})\,,
\end{array}$$

est acyclique, et, d'après (D) et (F1), il en résulte que $\mathrm{G}(s)$ est un isomorphisme.

Finalement, la propriété (D) pour G' s'ensuit aisément de la même propriété pour G.

(**2.3.7**). — Soit

$$\mathrm{G} : \mathbf{V^2}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

un foncteur contravariant Φ-rectifié qui vérifie les propriétés (F1) et (F2) de (2.1.5).

Le foncteur G induit un foncteur Φ-rectifié $\widetilde{\mathrm{G}} : \mathbf{V}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$ par $\widetilde{\mathrm{G}}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, et d'après (2.3.2), $\widetilde{\mathrm{G}}$ s'étend en un foncteur Φ-rectifié $\mathrm{G}_c : \mathbf{Sch}_c(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$. D'ailleurs, d'après (2.3.6), G induit un foncteur Φ-rectifié $\mathrm{G}' : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$. En particulier G_c et G' induisent des foncteurs Φ-rectifiés

$$\mathbf{Sch}_{\mathbf{Comp}}(k) \longrightarrow Ho\mathscr{D}$$

qui coïncident sur $\mathbf{V}(k)$ et qui vérifient la propriété de descente. De l'unicité de l'extension il résulte donc le corollaire suivant.

Corollaire. — *Sur* $\mathbf{Sch_{Comp}}(k)$ *on a un isomorphisme de foncteurs* $G_c \cong G'$. *En particulier, si* X *est un schéma propre sur* k, *on a un isomorphisme naturel* $G_c(X) \cong G'(X)$.

3. Application à l'homotopie de De Rham algébrique

La première application du critère d'extension (2.1.5) que nous considérerons est à l'homotopie de De Rham des variétés algébriques, lisses ou non, sur un corps de caractéristique zéro.

(**3.1**) *Rappels sur l'homotopie rationnelle d'un espace topologique.* — Soient **Top** la catégorie des espaces topologiques et $\mathbf{Adgc}(\mathbf{Q})$ la catégorie des $\mathbf{Q}$-algèbres dgc. Rappelons que Sullivan ([Su], voir aussi [BG]), a prouvé l'existence d'un foncteur contravariant

$$A_{Su} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Adgc}(\mathbf{Q})$$

qui associe à tout espace topologique X une algèbre de formes différentielles $A_{Su}(X)$ dont la cohomologie est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients rationnels de X, et qui contient aussi des informations sur le type d'homotopie rationnelle de X, si X est connexe par arcs et de type fini. Plus précisément, si x est un point de X, puisque $A_{Su}(x) = \mathbf{Q}$, il résulte de la fonctorialité de A_{Su} que l'algèbre $A_{Su}(X)$ a une augmentation, qui dépend de x. Notons $A_{Su}(X, x)$ cette algèbre dgc augmentée. Alors (voir [Su]), l'algèbre de Lie $\pi_1(A_{Su}(X, x))$, dual de l'espace d'indécomposables de degré 1 d'un modèle minimal de $A_{Su}(X, x)$, est isomorphe à l'algèbre de Lie rationnelle associée au groupe fondamental de (X, x), c'est-à-dire à l'algèbre de Lie du complété de Malcev $\pi_1^{Mal}(X, x)$ de $\pi_1(X, x)$. Et, si X est simplement connexe et $n \geq 2$, l'espace $\pi_n(A_{Su}(X, x))$, dual de l'espace d'indécomposables de degré n d'un modèle minimal de $A_{Su}(X, x)$, est isomorphe au n-ième espace d'homotopie rationnelle de X, $\pi_n(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

(**3.2**) *Le type d'homotopie de De Rham algébrique d'un schéma.* — Si X est une variété algébrique affine non singulière sur un sous-corps k de $\mathbf{C}$, on peut réaliser algébriquement la construction d'une k-algèbre dgc de Sullivan, car les formes différentielles algébriques définissent une k-algèbre dgc $\Omega^*(X)$ telle que $\Omega^*(X) \otimes_k \mathbf{C}$ est quasi-isomorphe à $A_{Su}(X^{an}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, d'après le théorème de comparaison de Grothendieck ([G], voir aussi [Ha2]). Nous allons généraliser cette réalisation à tous les schémas séparés, réduits et de type fini sur k.

Soit k un corps de caractéristique zéro. Rappelons que la catégorie des k-algèbres dgc $\mathbf{Adgc}(k)$ a été munie d'une structure de catégorie de descente cohomologique dans (1.7.3), et qu'on a un foncteur

$$\mathbf{Reg}(k) \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}(k), \quad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{R}_{\mathrm{TW}}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}}),$$

où R_{TW} est le foncteur dérivé au sens des k-algèbres dgc ([N](4.4)), tel que, si X est affine $\mathrm{R}_{\mathrm{TW}}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}})$ est naturellement isomorphe à $\Omega^*(\mathrm{X})$, et, si k est un sous-corps de $\mathbf{C}$, l'algèbre $\mathrm{R}_{\mathrm{TW}}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}}) \otimes_k \mathbf{C}$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{A}_{\mathrm{S}u}(\mathrm{X}^{an}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, d'après [N](3.3) et le théorème de comparaison de Grothendieck (*loc. cit.*).

Théorème. — Il existe un foncteur contravariant Φ*-rectifié*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{DR}} : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}(k)$$

tel que:

(1) *si* X *est un schéma lisse, on a* $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) = \mathrm{R}_{\mathrm{TW}}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}})$,
(2) A_{DR} *vérifie la propriété* (D) *de* (2.1.5),
(3) *la cohomologie* $\mathrm{H}^*\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X})$ *est naturellement isomorphe à la cohomologie de De Rham algébrique de* X *(*[Ha2]*),*
(4) *si* k *est un sous-corps de* $\mathbf{C}$*, pour toute immersion* $\sigma : k \to \mathbf{C}$*, notons* X^{an}_{σ} *l'espace analytique complexe associé à* $\mathrm{X} \otimes_{k,\sigma} \mathbf{C}$*, alors, on a un isomorphisme naturel* $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) \otimes_{k,\sigma} \mathbf{C} \cong \mathrm{A}_{\mathrm{S}u}(\mathrm{X}^{an}_{\sigma}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$.

En outre, le foncteur Φ*-rectifié* A_{DR} *est uniquement déterminé, à isomorphisme unique près, par les propriétés* (1) *et* (2).

Preuve. — En effet, il est aisé de voir que le foncteur

$$\mathrm{G} : \mathbf{Reg}(k) \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}(k), \quad \mathrm{G}(\mathrm{X}) := \mathrm{R}_{\mathrm{TW}}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}}),$$

est Φ-rectifié, et qu'il vérifie la condition (F1).

Puisque la condition (F2) est une condition cohomologique, pour prouver que le foncteur $\mathrm{G} : \mathbf{Reg}(k) \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}(k)$ la vérifie il suffit de le faire pour le foncteur

$$\mathbf{Reg}(k) \xrightarrow{\mathrm{G}} Ho\mathbf{Adgc}(k) \longrightarrow Ho\mathrm{C}^+(k\text{-}\mathbf{mod})$$

qui est isomorphe au foncteur $\mathrm{DR}^*(\mathrm{X}) := \mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^*_{\mathrm{X}})$, par [N](3.3). Et dans ce cas la propriété (F2) est une conséquence de la proposition (3.3) ci-dessous.

Maintenant, d'après le théorème (2.1.5), il existe une extension, essentiellement unique, de G en un foncteur Φ-rectifié A_{DR} qui vérifie la propriété (2) de (3.2).

La propriété (3) résulte de l'unicité de l'extension, et de la suite exacte en cohomologie de De Rham d'un morphisme birationnel propre ([Ha2](II.4.4)).

Finalement, la propriété (4) résulte de l'isomorphisme, $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}) \otimes_k \mathbf{C} \cong \mathrm{A}_{\mathrm{S}u}(\mathrm{X}^{an}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$, pour X lisse, de la propriété de descente de la cohomologie rationelle, et de l'unicité de l'extension.

Le résultat suivant est dû essentiellement à M. Gross (voir [Gr](IV.1.2.1)).

(**3.3**) *Proposition.* — *Soit* X *un schéma lisse et* Y *un sous-schéma lisse de* X. *Si (2.1.1.1) est le diagramme cartésien défini par l'éclatement* $\widetilde{X} \longrightarrow X$ *de* X *le long de* Y, *alors pour tout* $p \geq 0$, *le morphisme*

$$\Omega^p_X \xrightarrow{i^*+f^*} \mathbf{s}_{\square_0^+} tot\Big(Ri_*\Omega^p_Y \oplus Rf_*\Omega^p_{\widetilde{X}} \xrightarrow{g^*-j^*} R(f\circ j)_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}\Big)$$

est un quasi-isomorphisme.

Preuve. — En considérant la suite exacte des faisceaux de cohomologie, cette proposition est une conséquence de l'exactitude de i_* et des isomorphismes

$$\begin{aligned}
&f^* : \Omega^p_X \cong f_*\Omega^p_{\widetilde{X}},\\
&g^* : \Omega^p_Y \cong g_*\Omega^p_{\widetilde{Y}},\\
&j^* : R^q f_*\Omega^p_{\widetilde{X}} \cong i_*R^q g_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}, \quad \text{pour tout } q \geq 1,
\end{aligned}$$

que l'on va prouver.

Le cas où Y est un diviseur est trivial, car dans ce cas, f est un isomorphisme. Ainsi nous supposerons que Y est une sous-variété de codimension ≥ 2.

Le morphisme

$$f^* : \Omega^p_X \longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{X}}$$

est évidemment injectif, et il est surjectif car toute forme différentielle définie sur le complémentaire de Y s'étend à X.

Le morphisme

$$g^* : \Omega^p_Y \longrightarrow g_*\Omega^p_{\widetilde{Y}}$$

est aussi un isomorphisme, car $\widetilde{Y}$ est un espace projectif relatif sur Y.

Maintenant, considérons les suites exactes

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1) \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \longrightarrow 0,\\
&0 \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\widetilde{Y}}(1) \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{Y}} \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{Y}} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

où $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$ est le faisceau d'idéaux de $\widetilde{Y}$ dans $\widetilde{X}$. Si on tensorise ces suites exactes par les faisceaux localement libres $\Omega^p_{\widetilde{X}}(m)$ et $\mathscr{O}_{\widetilde{Y}}(m)$, respectivement, on obtient les suites exactes

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}}(m+1) \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}}(m) \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}(m) \longrightarrow 0\,,\\
&0 \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\widetilde{Y}}(m+1) \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{X}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{Y}}(m) \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{Y}}(m) \longrightarrow 0\,.
\end{aligned}$$

Fixons $q \geq 1$. Par le théorème d'annulation de Bott on a

$$\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}(m+1) = 0, \quad \mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}(m) = 0\,,$$

pour tout $m > 0$, d'où, par la seconde suite exacte,

$$\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}(m) = 0$$

si $m > 0$. Il résulte alors de la première suite exacte que le morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}}(m+1) \longrightarrow \mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}}(m)$$

est surjectif pour tout $m > 0$. Et puisque, par le théorème (B) de Serre, on a

$$\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}}(l) = 0\,,$$

si $l > 0$ est suffisamment grand, on obtient $\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}}(m) = 0$, pour tout $m > 0$, et ainsi

$$\mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}} \cong \mathrm{R}^q f_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{X}}} \otimes \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \cong i_* \mathrm{R}^q g_* \Omega^{p}_{\widetilde{\mathrm{Y}}},$$

ce qui conclut la preuve de (3.3).

(**3.4**) *Les groupes d'homotopie de De Rham algébrique.* — Soit x un k-point d'un schéma X géométriquement connexe. Bien que, comme dans le cas topologique, on ait $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(x) = k$, maintenant le foncteur A_{DR} est seulement défini à quasi-isomorphisme près, et on n'obtient pas immédiatement une augmentation de l'algèbre $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X})$. Or, si $\mathbf{Sch}(k)_*$ désigne la catégorie des schémas pointés, on a le foncteur

$$\mathbf{Sch}(k)_* \longrightarrow (\square_0^{+op}, \mathbf{Sch}(k)),$$

qui associe à chaque schéma pointé (X, x) le diagramme $tot(\{x\} \longrightarrow \mathrm{X})$.

Puisque A_{DR} est muni d'une Φ-rectification, A_{DR} induit le foncteur

$$(\mathrm{A}_{\mathrm{DR}})_{\square_0^+} : (\square_0^{+op}, \mathbf{Sch}(k)) \longrightarrow Ho(\square_0^+, \mathbf{Adgc}(k)),$$

et, puisque dans $\mathbf{Adgc}(k)$ le morphisme $\lambda_{\square_0}$ est un isomorphisme, d'après $(1.5.11)^{op}$, on a le foncteur

$$Ho(\square_0^+, \mathbf{Adgc}(k)) \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}_*(k)\,.$$

Donc, par composition, on obtient le foncteur

$$\mathrm{A}_{\mathrm{DR}} : \mathbf{Sch}_* \longrightarrow Ho\mathbf{Adgc}_*(k)\,.$$

Ce foncteur vérifie que, pour tout schéma pointé (X, x), $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X}, x)$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{A}_{\mathrm{DR}}(\mathrm{X})$ dans $Ho\mathbf{Adgc}(k)$. En effet, $(\mathrm{A}_{\mathrm{DR}})_{\square_0^+}(tot(\{x\} \longrightarrow \mathrm{X}))$

est un $\square_0^+$-codiagramme de k-algèbres dgc $A_0 \longrightarrow A_1$, où A_0 est quasi-isomorphe à $A_{DR}(X)$, et A_1 est quasi-isomorphe à $A_{DR}(x) = k$. Ainsi, par (3) de $(1.5.6)^{op}$, $A_{DR}(X, x)$, est isomorphe à $A_{DR}(X)$ dans $Ho\mathbf{Adgc}(k)$.

D'après la théorie de Sullivan ([Su], [GM] §12, voir aussi [BG]) on peut associer à $A_{DR}(X, x)$ un modèle minimal, ses espaces d'indécomposables et leurs duaux, $\pi_n(A_{DR}(X, x))$, pour tout $n \geq 1$. Ces espaces $\pi_n(A_{DR}(X, x))$ sont indépendants, à isomorphisme unique près, du modèle minimal et sont fonctoriels en (X, x). On pose $\pi_n(X, x)_{DR} := \pi_n(A_{DR}(X, x))$, pour tout $n \geq 1$. L'espace $\pi_1(X, x)_{DR}$ est muni naturellement d'une structure d'algèbre de Lie sur k qui est pro-nilpotente, ce qui revient à dire, d'une structure de schéma en groupes sur k, pro-algébrique unipotente (voir [D2]).

On a alors le corollaire de (3.2) suivant.

Corollaire. — *Soient k un sous-corps de $\mathbf{C}$, X un schéma géométriquement connexe, et x un k-point de X. Pour toute immersion $\sigma : k \to \mathbf{C}$ on a:*

(1) *un isomorphisme naturel* $A_{DR}(X, x) \otimes_{k,\sigma} \mathbf{C} \cong A_{Su}(X_\sigma^{an}, x) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$,

(2) *un isomorphisme naturel*

$$\pi_1(X, x)_{DR} \otimes_{k,\sigma} \mathbf{C} \cong \pi_1^{Mal}(X_\sigma^{an}, x) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C},$$

(3) *si X_σ^{an} est simplement connexe, des isomorphismes naturels*

$$\pi_n(X, x)_{DR} \otimes_{k,\sigma} \mathbf{C} \cong \pi_n(X_\sigma^{an}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C},$$

pour tout entier $n \geq 2$.

4. Application au complexe filtré de Hodge-De Rham

Soit X une variété analytique complexe, et désignons par Ω_X^* le complexe de De Rham des faisceaux des formes différentielles holomorphes sur X. Il est bien connu que ce complexe est muni de la filtration de Hodge $F^p\Omega^*(X) = \Omega^{*\geq p}(X)$, et qu'il en résulte la suite spectrale de Hodge-De Rham

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega_X^p) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \Omega_X^*) \cong H^{p+q}(X, \mathbf{C}),$$

laquelle, par le théorème de Hodge, dégénère au terme E_1 si X est une variété kählérienne compacte.

Dans le cadre algébrique, Du Bois a prouvé ([DB], voir aussi [HC](V.3.5)), en utilisant la théorie de Hodge-Deligne, que si X est une variété algébrique sur $\mathbf{C}$, il existe un objet $(\underline{\Omega}_X^*, F)$ de $Ho\mathrm{C}_{diff,coh}(X)$ (voir (1.5.7) pour la notation), appelé de Hodge-De Rham, qui est une généralisation naturelle au cas éventuellement singulier du complexe précédent. On a en particulier une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, Gr_F^p\underline{\Omega}_X^*[p]) \Longrightarrow H^{p+q}(X, \underline{\Omega}_X^*) \cong H^{p+q}(X, \mathbf{C}),$$

laquelle, par la théorie de Hodge-Deligne, dégénère au terme E_1 si X est une variété algébrique compacte.

L'objectif de ce paragraphe est d'étendre la théorie du complexe filtré de Hodge-De Rham aux espaces analytiques.

(**4.1**). — Nous noterons **An** la catégorie des espaces analytiques complexes, réduits, séparés, de dimension finie et dénombrables à l'infini, munie des carrés acycliques définis comme dans (2.1.1) et **Man** la sous-catégorie pleine des espaces analytiques lisses, munie des carrés acycliques élémentaires définis comme dans (2.1.1). Nous appellerons simplement *espaces analytiques complexes* les objets de **An**, et *variétés complexes* les objets de **Man**.

Nous prouverons d'abord, comme application de la variante analytique du théorème (2.1.5), et sans recours à la théorie de Hodge-Deligne, l'existence d'un complexe filtré de Hodge-De Rham, associé à tout espace analytique X. Plus précisément on a

Théorème. — Pour tout espace analytique complexe X*, il existe un objet* $(\underline{\Omega}^*_X, F)$ *de* $Ho\mathrm{C}_{diff,coh}(X)$ *qui vérifie les propriétés suivantes:*

(1) *Si on note* (Ω^*_X, σ) *le complexe de faisceaux des formes différentielles de Kähler de* X*, filtré par la filtration bête* σ*, alors il existe un morphisme naturel de complexes filtrés*

$$(\Omega^*_X, \sigma) \longrightarrow (\underline{\Omega}^*_X, F),$$

qui est un quasi-isomorphisme filtré si X *est une variété complexe.*

(2) *Si* $f : X' \longrightarrow X$ *est un morphisme (resp. un morphisme propre) d'espaces analytiques,* $Rf_*(\underline{\Omega}^*_{X'}, F)$ *est un objet bien défini de* $Ho\mathrm{C}_{diff}(X)$ *(resp.* $Ho\mathrm{C}_{diff,coh}(X)$*), et l'assignation* $(f : X' \longrightarrow X) \mapsto Rf_*(\underline{\Omega}^*_{X'}, F)$ *est un foncteur contravariant* Φ*-rectifié, défini sur la catégorie des espaces analytiques (resp. espaces analytiques propres) sur* X*, et qui vérifie la propriété (D) de (2.1.5).*

(3) *Le complexe de faisceaux* $\underline{\Omega}^*_X$ *est naturellement quasi-isomorphe au faisceau* $\mathbf{C}_X$.

(4) *Si* X *est un* **C***-schéma, le complexe filtré* $(\underline{\Omega}^*_{X^{an}}, F)$ *est naturellement isomorphe à l'analytisé* $(\underline{\underline{\Omega}}^*_X, F)^{an}$ *du complexe filtré* $(\underline{\underline{\Omega}}^*_X, F)$ *défini par Du Bois.*

(5) *On a* $Gr^p_F \underline{\Omega}^*_X \cong 0$*, si* $p \notin [0, dim\, X]$.

En outre, le complexe filtré $(\underline{\Omega}^*, F)$ *est uniquement déterminé, à isomorphisme unique près, par les propriétés* (1) *et* (2).

Preuve. — Nous utiliserons une variante relative et en géométrie analytique du théorème (2.1.5). D'après le théorème de résolution des singularités dans le cas analytique ([AH], voir aussi [Vi] et [BM]), on a le théorème de résolution analogue à (2.1.2) et on a donc aussi dans ce contexte les résultats sur les hyperrésolutions cubiques nécessaires ([HC](I.3.11.2)). Le lemme de Chow-Hironaka analogue à (2.1.3) est aussi vérifié dans ce contexte, mais dans une forme un peu plus faible que nous rappelons ci-dessous. Ce résultat est une conséquence du théorème de platification d'Hironaka ([Hi2]), et du théorème de résolution des singularités (voir [Hi2]).

Lemme de Chow-Hironaka analytique. — Soient $\widetilde{\mathrm{X}}$ *et* X *des variétés complexes irréductibles. Si* $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *est un morphisme birationnel propre, il existe un morphisme* $g : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$ *qui est la composition d'une suite localement finie de modifications propres élémentaires, et un morphisme propre* $h : \mathrm{X}' \longrightarrow \widetilde{\mathrm{X}}$ *tels que* $g = f \circ h$.

Maintenant, donné un espace analytique X, notons $\mathscr{M}'$ la sous-catégorie de **An** des espaces analytiques (resp. espaces analytiques propres) sur X, et $\mathscr{M}$ la sous-catégorie de $\mathscr{M}'$ des variétés complexes. Les catégories $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{M}$ sont munies des carrés acycliques et des carrés acycliques élémentaires induits par ceux de **An** et de **Man**, respectivement.

Soient $\mathscr{D}$ la catégorie de descente $\mathrm{C}_{diff}(\mathrm{X})$ (resp. $\mathrm{C}_{diff,coh}(\mathrm{X})$) définie dans (1.7.6), et $\mathrm{G} : \mathscr{M} \to Ho\mathscr{D}$ le foncteur contravariant Φ-rectifié défini par $\mathrm{G}(\mathrm{X}') := \mathrm{R}f_*(\Omega^*_{\mathrm{X}'}, \mathrm{F})$, pour tout objet X′ de $\mathscr{M}$, où $f : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$ est le morphisme structurel, et F la filtration de Hodge.

Voyons que le foncteur G vérifie (F1) et (F2). En effet, la propriété (F1) est triviale. La propriété (F2), est locale sur X, car G(X′) est un complexe de faisceaux sur X, donc, pour vérifier (F2) on peut supposer que X est l'espace affine $\mathbf{C}^n$. Alors (F2) s'ensuit de (3.3), car la filtration de Hodge dans le cas non singulier est la filtration par le degré. La preuve de (2.1.5) dans cette situation utilise un argument supplémentaire pour le lemme 1 du point (2.1.6), où nous utilisons le lemme de Chow-Hironaka, car, maintenant, nous n'avons pas une suite finie de modifications propres élémentaires, mais une suite localement finie. Néanmoins, G(X′) étant un complexe de faisceaux sur X, il suffit de vérifier ce lemme localement sur X. Il est clair alors qu'avec ces données, on a la propriété d'extension (2.1.10) pour G, d'où il en résulte (1) et (2).

Prouvons (3). Donné l'espace analytique complexe X, on a sur la catégorie $\mathscr{M}'$ des espaces analytiques sur X les foncteurs $(f : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}) \mapsto \mathrm{R}f_*\mathbf{C}_{\mathrm{X}'}$ et $(f : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}) \mapsto \mathrm{R}f_*\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}'}$ qui vérifient la propriété (D) (voir [HC](I.6.9)), et qui sont isomorphes sur la sous-catégorie $\mathscr{M}$ des variétés complexes. La propriété (3) résulte alors de l'unicité de l'extension d'un foncteur (2.1.5).

La propriété (4) se démontre comme dans [HC] (V.3.7), et, finalement, (5) résulte de l'existence d'une hyperrésolution $\mathrm{X}_\bullet$ de X de type $\square \in Ob\,\Pi$, telle que $dim\,\mathrm{X}_\alpha \leq dim\,\mathrm{X} - dim\,\alpha$, pour tout $\alpha \in \square$ ([HC](I.2.15).

(**4.2**). — Avec ce complexe filtré de Hodge-De Rham $(\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}, \mathrm{F})$ on peut étendre la théorie classique de Hodge-De Rham aux espaces analytiques complexes de la façon suivante.

D'abord, pour tout espace analytique complexe X, on définit les complexes de faisceaux

$$\underline{\Omega}^{[p]}_{\mathrm{X}} := \mathrm{G}r^p_{\mathrm{F}}\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}[p],\ 0 \leq p \leq \mathit{dim}\,\mathrm{X},$$

qui sont à cohomologie cohérente et fonctoriels en X, et définis à quasi-isomorphisme unique près. Ensuite, on définit la cohomologie de Hodge de X par

$$\mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{X}) := \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \underline{\Omega}^{[p]}_{\mathrm{X}}),\ 0 \leq p, q \leq n,$$

qui est fonctorielle en X et de dimension finie, si X est compact. On peut donc définir, pour X compact, les nombres de Hodge de X par

$$h^{p,q}(\mathrm{X}) = \mathit{dim}_{\mathbf{C}}\mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{X}).$$

De même, on a une suite spectrale de Hodge-De Rham associée au complexe filtré $(\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}, \mathrm{F})$,

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{X}) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathbf{C}),$$

donc, si X est compact,

$$\chi(\mathrm{X}) = \sum_{p,q}(-1)^{p+q}h^{p,q}(\mathrm{X})$$

est la caractéristique d'Euler de X, et on a

$$\sum_{p+q=r} h^{pq}(\mathrm{X}) \geq b_r(\mathrm{X}) = \mathit{dim}\,\mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \mathbf{C}).$$

Finalement, si X est sous-kählérien (i.e. il existe une variété kählérienne X′ et un morphisme surjectif propre $\mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{X}$), et compacte, par la théorie de Hodge-Deligne, cette suite spectrale dégénère au terme E_1.

(**4.3**). — Du point de vue global, cette extension de la théorie de Hodge aux espaces analytiques n'est satisfaisante que dans le cas compact. Pour obtenir une théorie analogue à la théorie de Hodge-Deligne dans le cas ouvert, nous considérerons les espaces analytiques compactifiables, et utiliserons les différentielles à pôles logarithmiques, comme dans cette théorie.

Nous noterons $\mathbf{An^2}$ la catégorie des couples (X, U), où X est un espace analytique complexe et U est un sous-espace ouvert de X tel que $\mathrm{D} = \mathrm{X} - \mathrm{U}$ est un sous-espace analytique fermé de X, et dont un morphisme $f : (\mathrm{X}', \mathrm{U}') \longrightarrow$

(X, U) est un morphisme d'espaces analytiques complexes $f : X' \longrightarrow X$ tel que $f(U') \subset U$. Nous appellerons simplement couple d'espaces analyques complexes les objets de $\mathbf{An}^2$. De même, nous noterons $\mathbf{Man}^2$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An}^2$ dont les objets sont les couples (X, U) tels que X est lisse, et D est un diviseur à croisements normaux dans X qui est une réunion de diviseurs lisses.

Théorème. — Pour tout espace analytique complexe X, *et tout sous-espace ouvert* U *tel que le complémentaire* $D := X - U$ *soit un sous-espace analytique de* X, *il existe un objet* $(\underline{\Omega}^*_X\langle D\rangle, F)$ *de* $Ho\mathrm{C}_{diff,coh}(X)$ *qui vérifie les propriétés suivantes:*

(1) *Si* X *est une variété complexe, si* D *est un diviseur à croisements normaux dans* X, *et si* $(\Omega^*_X(log D), F)$ *désigne le complexe des formes différentielles sur* X *à pôles logarithmiques le long de* D, *filtré par la filtration de Hodge* F, *il existe un quasi-isomorphisme filtré naturel*

$$(\Omega^*_X(log D), F) \longrightarrow (\underline{\Omega}^*_X\langle D\rangle, F).$$

(2) *Si* $f : (X', U') \mapsto (X, U)$ *est un morphisme (resp. un morphisme propre) de couples d'espaces analytiques, alors* $Rf_*(\underline{\Omega}^*_{X'}\langle D'\rangle, F)$ *est un objet bien défini de* $Ho\mathrm{C}_{diff}(X)$ *(resp.* $Ho\mathrm{C}_{diff,coh}(X)$*), et l'assignation*

$$(f : (X', U') \mapsto (X, U)) \mapsto Rf_*(\underline{\Omega}^*_{X'}\langle D'\rangle, F)$$

est un foncteur contravariant Φ*-rectifié, défini sur la catégorie des objets de* $\mathbf{An}^2$ *(resp. propres) sur* (X, U), *et qui vérifie la propriété* (D) *de (2.1.5) et la propriété (D') de (2.3.6)*

(3) *Le complexe de faisceaux* $\underline{\Omega}^*_X\langle D\rangle$ *est naturellement quasi-isomorphe au complexe de faisceaux* $Rj_*\mathbf{C}_U$, *où* $j : U \to X$ *est le morphisme d'inclusion.*

(4) *Si* X *est un* $\mathbf{C}$*-schéma, et* U *est un ouvert dense de Zariski de* X, *le complexe* $(\underline{\Omega}^*_{X^{an}}\langle D^{an}\rangle, F)$ *est naturellement quasi-isomorphe à l'analytisé* $(\underline{\underline{\Omega}}^*_X\langle D\rangle, F)^{an}$ *du complexe filtré* $(\underline{\underline{\Omega}}^*_X\langle D\rangle, F)$ *défini par Du Bois.*

(5) *On a* $Gr^p_F\underline{\Omega}^*_X\langle D\rangle \cong 0$, *si* $p \notin [0, dim X]$.

En outre, le complexe filtré $(\underline{\Omega}^*_X\langle D\rangle, F)$ *est uniquement déterminé, à isomorphisme unique près, par les propriétés* (1) *et* (2).

Preuve. — La preuve est analogue à celle du théorème (4.1), mais en utilisant cette fois-ci la variante analytique du théorème d'extension (2.3.3), et la variante logarithmique de la proposition (3.3), que nous donnons ci-dessous, et qui permet de prouver la propriété (F2) dans ce contexte.

(**4.4**) *Proposition. — Soient* X *une variété complexe,* D *un diviseur à croisements normaux dans* X *qui est une réunion de diviseurs lisses,* Y *une sous-variété complexe de* X *qui a des* *croisements normaux avec* D, *(2.1.1.) le diagramme cartésien défini par l'éclatement de* X *le long de* Y, *et* $\widetilde{\mathrm{D}} = f^{-1}(\mathrm{D})$.

(i) Si Y *n'est pas contenue dans* D, *le morphisme*

$$\Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}) \xrightarrow{i^*+f^*} \mathbf{s}_{\square_0^+}\Big(\mathrm{R}i_*\Omega^p_{\mathrm{Y}}(log(\mathrm{D}\cap\mathrm{Y})) \oplus \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}) \xrightarrow{g^*-j^*} \mathrm{R}(fj)_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{Y}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}\cap\widetilde{\mathrm{Y}})\Big)$$

est un quasi-isomorphisme, pour tout $p \geq 0$.

(ii) Si Y *est contenue dans* D, *le morphisme*

$$f^* : \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})$$

est un quasi-isomorphisme, pour tout $p \geq 0$.

Preuve. — On raisonne par récurrence sur la dimension de X. Dans le cas où Y n'est pas contenue dans D, nous montrons la proposition par récurrence sur le nombre s de composantes de D. Pour $s = 0$, la proposition est une conséquence de (3.3). Supposons donc que $s > 0$ et soit $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' \cup \mathrm{X}'$, où X' est une composante de D. Notons $(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}_\bullet)$ le carré commutatif de $\mathbf{Man}^2$ défini par

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathrm{Y}}, \widetilde{\mathrm{Y}} \setminus \widetilde{\mathrm{E}}) & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Y}, \mathrm{Y} \setminus \mathrm{E}) & \longrightarrow & (\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}), \end{array}$$

où $\mathrm{E} = \mathrm{D} \cap \mathrm{Y}$ et $\widetilde{\mathrm{E}} = \widetilde{\mathrm{D}} \cap \widetilde{\mathrm{Y}}$. Notons $(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}''_\bullet)$ le carré commutatif de $\mathbf{Man}^2$ défini par

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathrm{Y}}, \widetilde{\mathrm{Y}} \setminus \widetilde{\mathrm{E}}'') & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Y}, \mathrm{Y} \setminus \mathrm{E}'') & \longrightarrow & (\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}''), \end{array}$$

où $\mathrm{E}'' = \mathrm{D}'' \cap \mathrm{Y}$, $\widetilde{\mathrm{D}}'' = f^{-1}(\mathrm{D}'')$, et $\widetilde{\mathrm{E}}'' = \widetilde{\mathrm{D}}'' \cap \widetilde{\mathrm{Y}}$. Et notons $(\mathrm{X}'_\bullet, \mathrm{X}'_\bullet \setminus \mathrm{D}'_\bullet)$ le carré commutatif de $\mathbf{Man}^2$ défini par

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{\mathrm{Y}}', \widetilde{\mathrm{Y}}' \setminus \widetilde{\mathrm{E}}') & \longrightarrow & (\widetilde{\mathrm{X}}', \widetilde{\mathrm{X}}' \setminus \widetilde{\mathrm{D}}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Y}', \mathrm{Y}' \setminus \mathrm{E}') & \longrightarrow & (\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}'), \end{array}$$

où $\widetilde{\mathrm{X}}'$ est l'éclatement de X' le long de $\mathrm{Y}' := \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}'$, $\mathrm{D}' = \mathrm{D}'' \cap \mathrm{X}'$, $\mathrm{E}' = \mathrm{D}' \cap \mathrm{Y}'$, $\widetilde{\mathrm{Y}}' = \widetilde{\mathrm{X}}' \cap \widetilde{\mathrm{Y}}$, $\widetilde{\mathrm{D}}' = \widetilde{\mathrm{X}}' \cap f^{-1}(\mathrm{D}')$ et $\widetilde{\mathrm{E}}' = \widetilde{\mathrm{D}}' \cap \widetilde{\mathrm{Y}}'$.

Pour abréger, si (Z,V) est un objet de $\mathbf{Man^2}$ et si l'on a un morphisme $h:\mathrm{Z}\longrightarrow\mathrm{X}$, on note $\mathrm{G}(\mathrm{Z},\mathrm{V},p)=\mathrm{R}h_*\Omega^p_{\mathrm{Z}}(log(\mathrm{Z}\setminus\mathrm{V}))$. Le morphisme résidu induit une suite exacte de complexes

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{X}\setminus\mathrm{D}'',p)&\longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{X}\setminus\mathrm{D},p)\\ &\xrightarrow{Res}\mathrm{G}(\mathrm{X}',\mathrm{X}'\setminus\mathrm{D}',p-1)[1]\longrightarrow 0\,,\end{aligned}$$

et, de la même façon, on obtient une suite exacte de complexes

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet,\mathrm{X}_\bullet\setminus\mathrm{D}''_\bullet,p)&\longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet,\mathrm{X}_\bullet\setminus\mathrm{D}_\bullet,p)\\ &\xrightarrow{Res}\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}'_\bullet,\mathrm{X}'_\bullet\setminus\mathrm{D}'_\bullet,p-1)[1]\longrightarrow 0\,.\end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}'_\bullet,\mathrm{X}'_\bullet\setminus\mathrm{D}'_\bullet,p-1)$ et $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet,\mathrm{X}_\bullet\setminus\mathrm{D}''_\bullet,p)$ sont acycliques par les hypothèses de récurrence, on en conclut que $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet,\mathrm{X}_\bullet\setminus\mathrm{D}_\bullet,p)$ est acyclique, d'où il résulte (i).

Supposons que Y soit contenue dans D. Nous procédons par récurrence sur le nombre r des composantes de D qui contiennent Y, et sur le nombre s de celles qui ne le contiennent pas.

Pour le cas $r=1, s=0$, nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme. — Soient X *une variété complexe,* Y *une sous-variété lisse de* X *de codimension* $e>1$, *et (2.1.1.1) le diagramme cartésien défini par l'éclatement de* X *le long de* Y. *Alors, on a*

$$\begin{aligned}&\Omega^p_{\mathrm{X}}\cong f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}}),\\ &\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})=0,\quad si\ q>0\ \ et\ q\neq e-1,\\ &\mathrm{R}^{e-1}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\cong i_*\mathrm{R}^{e-1}g_*\Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}\cong i_*\big(\Omega^{p-e}_{\mathrm{Y}}\otimes\mathrm{R}^{e-1}g_*\Omega^{e-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}\big),\end{aligned}$$

pour tout $p\geq 0$.

Preuve du lemme. — Considérons la suite exacte

$$0\to\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}\longrightarrow\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\xrightarrow{Res}j_*\Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}\longrightarrow 0$$

et la suite exacte induite par application de $\mathrm{R}f_*$. Par (3.3) on a $\Omega^p_{\mathrm{X}}\cong f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}$ et, si $q\geq 1$, $\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}\cong i_*\mathrm{R}^qg_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$, qui est nulle si $q>e-1$, et $\mathrm{R}^qg_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{Y}}}\cong\Omega^{p-q}_{\mathrm{Y}}\otimes\mathrm{R}^qg_*\Omega^q_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}$, si $0\leq q\leq e-1$. Puisque le morphisme de connexion

$$\begin{aligned}&i_*\mathrm{R}^{q-1}g_*\Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}\cong i_*\Omega^{p-q}_{\mathrm{Y}}\otimes i_*\mathrm{R}^{q-1}g_*\Omega^{q-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}\\ &\longrightarrow\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}\cong i_*\mathrm{R}^qg_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{Y}}}\cong i_*\Omega^{p-q}_{\mathrm{Y}}\otimes i_*\mathrm{R}^qg_*\Omega^q_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}\end{aligned}$$

est le produit par $c_1\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}}(1)$, si $0<q\leq e-1$, c'est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve du lemme.

Continuons la preuve de (ii) avec $r=1$ et $s=0$. Notons $\widehat{\mathrm{D}}$ la transformée stricte de D par f, et posons $\widehat{\mathrm{E}}=\widetilde{\mathrm{Y}}\cap\widehat{\mathrm{D}}$. On a la suite exacte

$$0\longrightarrow\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\longrightarrow\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\xrightarrow{Res}\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})\longrightarrow 0,$$

d'où on obtient, par application de $\mathrm{R}f_*$, la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned}0\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\xrightarrow{Res} f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})&\\ \longrightarrow \mathrm{R}^1f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\longrightarrow \dots .&\end{aligned}$$

Soient $q>0$ et $e>2$. Si $q\neq e-1$, on a $\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\cong 0$, et $\mathrm{R}^{q-1}f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})\cong 0$, et le morphisme $\mathrm{R}^{e-2}f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})\longrightarrow\mathrm{R}^{e-1}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})$ s'identifie, à travers des isomorphismes du lemme, au morphisme de Gysin en cohomologie de Hodge de la section hyperplane, relative sur Y, $\widehat{\mathrm{E}}$ de $\widetilde{\mathrm{Y}}$

$$\Omega^{p-e}_{\mathrm{Y}}\otimes\mathrm{R}^{e-2}f_*\Omega^{e-2}_{\widehat{\mathrm{E}}/\mathrm{Y}}\longrightarrow\Omega^{p-e}_{\mathrm{Y}}\otimes\mathrm{R}^{e-1}f_*\Omega^{e-1}_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}},$$

qui est un isomorphisme. On a donc $\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\cong 0$ pour tout $q\neq 0$, et on dispose d'un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}}) \arrow[r] & f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}) \arrow[r] & f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}}) \arrow[r] & 0\\
0 \arrow[r] & \Omega^p_{\mathrm{X}} \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}) \arrow[r] \arrow[u] & \Omega^{p-1}_{\mathrm{D}} \arrow[r] \arrow[u] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux morphismes latéraux sont des isomorphismes, d'après le lemme précédent, donc $\Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D})\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})$ est un isomorphisme. Il reste à considérer le cas où $e=2$. Dans ce cas on a $\widehat{\mathrm{D}}\cong\mathrm{D}$, et l'on obtient $\mathrm{R}^qf_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\cong 0$ si $q\geq 2$, d'après le lemme, et une suite exacte

$$\begin{aligned}0\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\xrightarrow{Res} f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})&\\ \longrightarrow \mathrm{R}^1f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})\longrightarrow \mathrm{R}^1f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\longrightarrow 0\,,&\end{aligned}$$

où le morphisme $f_*\Omega^{p-1}_{\widehat{\mathrm{D}}}(log\widehat{\mathrm{E}})\longrightarrow\mathrm{R}^1f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{Y}})$ s'identifie au morphisme

$$\Omega^{p-1}_{\mathrm{D}}(log\mathrm{Y})\xrightarrow{Res\otimes Gysin}\Omega^{p-2}_{\mathrm{Y}}\otimes\mathrm{R}^1f_*\Omega^1_{\widetilde{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}$$

qui est surjectif et dont le noyau s'identifie à $\Omega^{p-1}_{\mathrm{D}}$. On en déduit que $\mathrm{R}^1f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})\cong 0$, donc que $\Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D})\longrightarrow f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}})$ est un isomorphisme, ce qui prouve (ii) dans ce cas.

Dans le cas $r=1, s>0$, la preuve est analogue à celle du cas $r=0, s>0$, par récurrence sur s. En effet, considérons une décomposition $\mathrm{D}=\mathrm{D}''\cup\mathrm{X}'$, où X'

est une composante de D qui ne contient pas Y, et notons $\mathrm{D}' = \mathrm{D}'' \cap \mathrm{X}'$. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}'') \longrightarrow \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}) \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\mathrm{X}'}(log\mathrm{D}') \longrightarrow 0.$$

Posons $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y} \cap \mathrm{X}'$, et soit $\widetilde{\mathrm{X}}' \longrightarrow \mathrm{X}'$ l'éclatement de X' le long de $\mathrm{Y}' \subset \mathrm{D}'$. Notons $\widetilde{\mathrm{D}}' = \widetilde{\mathrm{X}}' \cap f^{-1}(\mathrm{D}')$, $\widetilde{\mathrm{D}}'' = f^{-1}(\mathrm{D}'')$. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}'') \longrightarrow \Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}) \longrightarrow \Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{X}}'}(log\widetilde{\mathrm{D}}') \longrightarrow 0,$$

et donc un triangle distingué

$$\begin{aligned} \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}'') &\longrightarrow \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}) \\ &\longrightarrow \mathrm{R}f_*\Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{X}}'}(log\widetilde{\mathrm{D}}') \longrightarrow \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}'')[1] \end{aligned}$$

Le morphisme f induit un morphisme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}'') \arrow[r] \arrow[d, "f''^*"'] & \Omega^p_{\mathrm{X}}(log\mathrm{D}) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & \Omega^{p-1}_{\mathrm{X}'}(log\mathrm{D}') \arrow[d, "f'^*"'] \\ \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}'') \arrow[r] & \mathrm{R}f_*\Omega^p_{\widetilde{\mathrm{X}}}(log\widetilde{\mathrm{D}}) \arrow[r] & \mathrm{R}f_*\Omega^{p-1}_{\widetilde{\mathrm{X}}'}(log\widetilde{\mathrm{D}}') \end{tikzcd}$$

où, d'après l'hypothèse de récurrence, f''^* et f'^* sont des quasi-isomorphismes. D'où il résulte que f^* est un quasi-isomorphisme, ce qui prouve (ii) dans ce cas.

Finalement, dans le cas $r > 1$, on raisonne par récurrence sur r, et on considère une décomposition $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' \cup \mathrm{X}'$, où X' est une composante de D qui contient Y. Un argument analogue à celui du cas précédent achève alors la preuve de (4.4).

(**4.5**). — Nous allons expliciter la variante analytique du théorème (2.3.6). On note $\mathbf{An_{Comp}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An}$ des espaces compacts, et $\mathbf{An^2_{Comp}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{An^2}$, dont les objets sont les couples (X, U), où X est un espace analytique compact.

Comme dans le cas algébrique, on a un foncteur

$$\gamma^{an} : \mathbf{An^2_{Comp}} \longrightarrow \mathbf{An}$$

défini par $\gamma^{an}(\mathrm{X}, \mathrm{U}) = \mathrm{U}$. Notons Σ_{an} la classe de morphismes s de $\mathbf{An^2_{Comp}}$ tels que $\gamma^{an}(s)$ est un isomorphisme. Alors γ^{an} induit un foncteur

$$\eta^{an} : \mathbf{An^2_{Comp}}[\Sigma^{-1}_{an}] \longrightarrow \mathbf{An}.$$

La différence essentielle entre le cas analytique et le cas algébrique, c'est que dans le deuxième cas, le théorème de compactification de Nagata entraîne (voir (2.3.4)) que le foncteur $\gamma : \mathbf{Sch^2_{Comp}(C)} \longrightarrow \mathbf{Sch(C)}$ induise une équivalence de catégories

$\eta : \mathbf{Sch}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}(\mathbf{C})[\Sigma^{-1}] \longrightarrow \mathbf{Sch}(\mathbf{C})$, tandis que, dans le cas analytique, le foncteur correspondant $\eta^{an} : \mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}[\Sigma^{-1}_{an}] \longrightarrow \mathbf{An}$ n'est pas, en général, essentiellement surjectif, pas même pleinement fidèle, d'après un exemple de Serre ([Ha1](VI.3.2)). Mais nous avons le lemme suivant.

(**4.6**) *Lemme. — La classe de morphismes* Σ_{an} *admet un calcul de fractions à droite. De plus, si* (X, U) *et* $(\mathrm{X}', \mathrm{U}')$ *sont deux objets de* $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}$ *tels que* U *et* U′ *sont des espaces analytiques isomorphes, et si* X *et* X′ *sont des espaces analytiques biméromorphiquement équivalents, alors* (X, U) *et* $(\mathrm{X}', \mathrm{U}')$ *sont isomorphes dans la catégorie localisée* $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}[\Sigma^{-1}_{an}]$.

Preuve. — Les conditions duales de a), b), d) de [GZ](Ch.I,2.3) sont évidentes. Il reste à prouver la condition c). Etant donné un diagramme $(\mathrm{X}, \mathrm{U}) \xrightarrow{u} (\mathrm{Y}, \mathrm{V}) \xleftarrow{s} (\mathrm{Y}', \mathrm{V}')$ de morphismes de $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}$ tel que $\gamma(s)$ soit un isomorphisme, nous considérons la réunion X′ des composantes irréductibles du produit fibré $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ qui coupent l'image réciproque U′ de U par le morphisme de projection, alors $(\mathrm{X}', \mathrm{U}')$ est un objet de $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{X}', \mathrm{U}') & \xrightarrow{v} & (\mathrm{Y}', \mathrm{V}') \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ (\mathrm{X}, \mathrm{U}) & \xrightarrow{u} & (\mathrm{Y}, \mathrm{V}) \end{array}$$

où t est un morphisme de Σ_{an}, ce qui prouve c).

Montrons la deuxième propriété. Si on a un diagramme $\mathrm{X} \longleftarrow \mathrm{X}'' \longrightarrow \mathrm{X}'$ de morphismes biméromorphes entre espaces analytiques compacts, considérons l'espace analytique X_0, image de X″ dans le produit $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$. Il existe un ouvert dense V″ de X″ tel que la restriction à cet ouvert induise des isomorphismes $\mathrm{V} \longleftarrow \mathrm{V}'' \longrightarrow \mathrm{V}'$, et on peut supposer que $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}' \subset \mathrm{U}'$. Alors X_0 est une compactification du graphe U_0 de l'isomorphisme $\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{U}'$. On obtient donc un diagramme de $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}$ $(\mathrm{X}, \mathrm{U}) \longleftarrow (\mathrm{X}_0, \mathrm{U}_0) \longrightarrow (\mathrm{X}', \mathrm{U}')$ qui se transforme en un diagramme d'isomorphismes par le foncteur γ^{an}, et les couples (X, U) et $(\mathrm{X}', \mathrm{U}')$ sont donc isomorphes dans la localisation.

(**4.7**). — D'après (4.6) et [GZ](Ch. I,(2.4)), la catégorie localisée $\mathbf{An}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{Comp}}[\Sigma^{-1}_{an}]$ est équivalente à la catégorie $\mathbf{An}_{\infty}$ suivante. Un objet U_{∞} de $\mathbf{An}_{\infty}$ est un espace analytique U muni d'une classe d'équivalence de compactifications analytiques X de U, où deux compactifications X et X′ sont dites équivalentes si elles sont biméromorphiquement équivalentes. Nous dirons aussi que U_{∞} est un espace analytique compactifiable U muni d'une structure biméromorphe à l'infini. Soient U (resp. U′) un espace analytique, et U_{∞} (resp. U'_{∞}) une structure biméromorphe à l'infini sur U (resp. U′). Une compactification d'un morphisme analytique $g : \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{U}$, par rapport aux structures U_{∞} et U'_{∞}, est une extension de g en un morphisme

$f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}'$, où X et X′ sont des représentants des structures de U_∞ et U'_∞. Deux compactifications $f'_1 : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}'_1$ et $f'_2 : \mathrm{X}_2 \longrightarrow \mathrm{X}'_2$ de g son dites équivalentes si et seulement s'il existe une troisième compactification $f'_3 : \mathrm{X}_3 \longrightarrow \mathrm{X}'_3$ qui domine f'_1 et f'_2. Un morphisme $g_\infty : \mathrm{U}_\infty \longrightarrow \mathrm{U}'_\infty$ de $\mathbf{An}_\infty$ est, par définition, un morphisme analytique $g : \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{U}$ muni d'une classe d'équivalence de compactifications de g par rapport aux structures U_∞ et U'_∞.

Remarquons que l'exemple de Serre signalé auparavant montre l'existence d'un espace analytique U compactifiable et qui admet deux structures biméromorphes à l'infini non isomorphes.

Le foncteur ${}^{\mathbf{an}} : \mathbf{Sch}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{An}$ de passage de la structure algébrique à la structure analytique, se factorise à travers $\mathbf{An}_\infty$, car toute variété algébrique a une structure biméromorphe à l'infini bien définie, qui s'obtient à partir d'une compactification algébrique arbitraire, et ${}^{\mathbf{an}}$ induit donc un foncteur ${}^{\mathbf{an}_\infty} : \mathbf{Sch}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{An}_\infty$.

(**4.8**) *Théorème. — Pour tout espace analytique compactifiable* U *muni d'une structure biméromorphe à l'infini* $\mathrm{U}_\infty := (\mathrm{X}, \mathrm{U})$*, le complexe filtré de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels*

$$\mathrm{G}(\mathrm{U}_\infty) := (\mathrm{R}\Gamma(\mathrm{X}, \underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\rangle), \mathrm{F})$$

définit un foncteur contravariant Φ*-rectifié sur la catégorie* $\mathbf{An}_\infty$*, qui vérifie la propriété (D) de (2.1.5).*

Preuve. — La preuve est analogue à celle de (2.3.6), car, d'après (4.7) la localisation de $\mathbf{An}^2_{\mathbf{Comp}}$ par $(\mathrm{X}, \mathrm{U}) \mapsto \mathrm{U}$ est $\mathbf{An}_\infty$.

(**4.9**). — Soient X un espace analytique, et U un sous-espace ouvert dense de X tel que $\mathrm{X} - \mathrm{U}$ soit un sous-espace analytique de X, alors il résulte de (4.3) un isomorphisme

$$\mathrm{H}^r(\mathrm{X}, \underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{D}\rangle) \cong \mathrm{H}^r(\mathrm{U}, \mathbf{C}),$$

et donc une suite spectrale de Hodge-De Rham associée au complexe filtré $(\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{D}\rangle, \mathrm{F})$,

$$\mathrm{E}_1^{p,q} = \mathrm{H}^{q+p}(\mathrm{X}, \mathrm{G}r^p_{\mathrm{F}}\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{D}\rangle) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{U}, \mathbf{C}).$$

Si X est compact, la cohomologie $\mathrm{H}^{q+p}(\mathrm{X}, \mathrm{G}r^p_{\mathrm{F}}\underline{\Omega}^*_{\mathrm{X}}\langle \mathrm{D}\rangle)$ est de dimension finie, notée $h^{pq}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$, et, d'après le théorème (4.8), ces espaces de cohomologie ne dépendent que de la structure biméromorphe U_∞ de U à l'infini, définie par la compactification X. Ceci permet aussi d'étendre dans le cas ouvert la définition des nombres de Hodge $h^{pq}(\mathrm{U}_\infty)$ et les relations (4.2):

$$\chi(\mathrm{U}_\infty) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} h^{pq}(\mathrm{U}_\infty), \qquad \text{et} \qquad \sum_{p+q=r} h^{pq}(\mathrm{U}_\infty) \geq b_r(\mathrm{U}).$$

Finalement, si U_∞ admet une compactification par une variété complexe sous-kählérienne, cette suite spectrale dégénère au terme E_1.

5. Application à la théorie des motifs

Soient k un corps de caractéristique zéro, et notons $\mathscr{M}^+_{rat}(k)$ la catégorie des motifs de Chow effectifs sur k (voir [M], [Sc]). On rappelle que cette catégorie est pseudo-abélienne, et qu'on a un foncteur contravariant

$$h : \mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathscr{M}^+_{rat}(k),$$

qui associe à tout schéma projectif et lisse X, le motif effectif $h(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}, id_{\mathrm{X}})$. L'objectif de ce paragraphe est d'étendre le foncteur h à tous les schémas séparés et de type fini.

Dans le cas des variétés ouvertes on a, de fait, deux extensions qui correspondent à une théorie à supports compacts et à une théorie sans supports.

(**5.1**). — Notons $\mathrm{C}^b(\mathscr{M}^+_{rat}(k))$ la catégorie des complexes bornés de motifs de Chow effectifs sur k, et munissons $\mathrm{C}^b\left(\mathscr{M}^+_{rat}(k)\right)$ de la structure de catégorie de descente cohomologique définie dans (1.7.7).

Le foncteur $h : \mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathscr{M}^+_{rat}(k)$ induit un foncteur contravariant, canoniquement Φ-rectifié,

$$h : \mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^b\left(\mathscr{M}^+_{rat}(k)\right)$$

qui vérifie trivialement la condition (F1) de (2.1.5), et qui vérifie aussi la propriété (F2), grâce, essentiellement, au calcul effectué par Manin du motif de Chow d'un éclatement. En effet, la propriété (F2) résulte de la proposition suivante.

Proposition. — *Soient* $i : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{X}$ *une immersion fermée de schémas projectifs et lisses,* $f : \widetilde{\mathrm{X}} \longrightarrow \mathrm{X}$ *l'éclatement de* X *le long de* Y, *et*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Y}} & \xrightarrow{j} & \widetilde{\mathrm{X}} \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Y} & \xrightarrow{i} & \mathrm{X} \end{array}$$

le diagramme cartésien construit à partir de f *et* i. *Alors, la suite de motifs de Chow*

$$0 \longrightarrow h(\mathrm{X}) \xrightarrow{f^*+i^*} h(\widetilde{\mathrm{X}}) \bigoplus h(\mathrm{Y}) \xrightarrow{j^*-g^*} h(\widetilde{\mathrm{Y}}) \longrightarrow 0$$

est exacte et scindée, en particulier le morphisme

$$h(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_0^+} tot\left(h(\widetilde{\mathrm{X}}) \bigoplus h(\mathrm{Y}) \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{Y}})\right)$$

est un homotopisme.

Preuve. — D'après [M](§9 Cor., voir aussi [Sc], Th. (2.8)) on a l'isomorphisme

$$\varphi : h(\mathrm{X}) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r-1} h(\mathrm{Y})(-i)\right) \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{X}}),$$

défini par

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_{r-1}) = f^*(x) + \sum_{i=1}^{r-1} j_*(\xi^{i-1} \cup g^*(y_i)),$$

où ξ est la première classe de Chern de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}(1)$. On a aussi l'isomorphisme

$$\psi : \bigoplus_{i=0}^{r-1} h(\mathrm{Y})(-i) \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{Y}}),$$

défini par

$$\psi(y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}) = \sum_{i=0}^{r-1} \xi^i \cup g^*(y_i)\,.$$

Donc, avec ces isomorphismes, si on pose

$$\mathrm{A} = \bigoplus_{i=1}^{r-1} h(\mathrm{Y})(-i),$$

la suite du lemme s'écrit simplement

$$0 \longrightarrow h(\mathrm{X}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i^* \end{pmatrix}} h(\mathrm{X}) \oplus \mathrm{A} \oplus h(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i^* & 0 & -1 \end{pmatrix}} \mathrm{A} \oplus h(\mathrm{Y}) \longrightarrow 0,$$

qui est évidemment une suite exacte et scindée.

(**5.2**). — Maintenant, il résulte immédiatement de (2.2.2) et de (5.1), l'extension du foncteur h correspondante à une théorie à support compact, déjà prouvée par Gillet et Soulé.

Théorème ([GS], Th. 2.). — Il existe un foncteur Φ-rectifié contravariant

$$h_c : \mathbf{Sch}_c(k) \longrightarrow Ho\mathrm{C}^b\left(\mathscr{M}_{rat}^+(k)\right)$$

tel que:

(1) *si* X *est un schéma projectif et lisse,* $h_c(\mathrm{X})$ *est naturellement isomorphe au motif de Chow de* X,

(2) h_c *vérifie la propriété* (D) *de* (2.1.5),

(3) *si* Y *est un sous-schéma fermé d'un schéma* X, *on a un isomorphisme naturel*

$$h_c(\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cong \mathbf{s}_{\square_0^+} tot\,(h_c(\mathrm{X}) \to h_c(\mathrm{Y}))\,.$$

En outre, ce foncteur est unique, à isomorphisme unique près.

(**5.3**). — Nous rappelons que dans une catégorie pseudo-abélienne, tout complexe borné contractile L^* a une caractéristique d'Euler $\chi(\mathrm{L}^*) = \sum(-1)^i[\mathrm{L}^i]$ nulle dans le groupe K_0 correspondant. Pour la commodité du lecteur, nous donnons ici une preuve de ce résultat à partir du lemme suivant.

Lemme. — Soit $\mathscr{A}$ *une catégorie pseudo-abélienne. Si* L *est un complexe contractile de* $\mathrm{C}(\mathscr{A})$, *il existe un complexe à différentielle nulle* P *et un isomorphisme de complexes* $\varphi : Con(\mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{L}$, *où* $Con(\mathrm{P})$ *est le complexe cône de* P.

Preuve. — Soit h une contraction de L, c'est-à-dire que $h : \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}[-1]$ est un morphisme gradué tel que $1 = hd + dh$. Alors, dh et hd sont des projecteurs complémentaires, et puisque $\mathscr{A}$ est pseudo-abélienne, L est isomorphe, en tant qu'objet gradué, à la somme $Ker\,dh \oplus Im\,dh$, avec les égalités $Ker\,dh = Im\,hd$ et $Im\,dh = Ker\,hd$. Puisque $d^2 = 0$, la restriction de d à $Im\,dh$ est nulle, et la restriction de d à $Ker\,dh$ induit un isomorphisme de complexes $Ker\,dh \longrightarrow Im\,dh[1]$. Alors, $\mathrm{P} = Im\,dh$ vérifie les conditions du lemme.

(**5.4**) *Corollaire. — Soit* $\mathscr{A}$ *une catégorie pseudo-abélienne,* $\mathrm{C}^b(\mathscr{A})$ *la catégorie de complexes bornés de* $\mathscr{A}$ *et* $Ho\mathrm{C}^b(\mathscr{A})$ *sa localisation par rapport aux homotopismes. Alors, la caractéristique d'Euler*

$$\chi : Ob\,\mathrm{C}^b(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathscr{A})$$

induit une application sur la localisation

$$\chi : Ob\,Ho\mathrm{C}^b(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathscr{A}).$$

(**5.5**). — Puisque la catégorie des motifs de Chow est pseudo-abélienne, on déduit de (5.2) et de (5.4) le résultat suivant, qui résout le problème de Serre cité dans l'Introduction, et qui avait déjà été prouvé par Gillet et Soulé.

Corollaire ([GS], Th.4). — Il existe une unique application

$$\chi_c : Ob\,\mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{K}_0\left(\mathscr{M}^+_{rat}(k)\right)$$

telle que:

(1) *si* X *est un schéma projectif et lisse,* $\chi_c(\mathrm{X})$ *est la classe dans* K_0 *du motif de Chow de* X,

(2) *si* Y *est un sous-schéma fermé de* X, $\chi_c(\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) = \chi_c(\mathrm{X}) - \chi_c(\mathrm{Y})$.

(**5.6**). — Maintenant, nous considérons l'extension de h qui correspond à une théorie sans supports.

Rappelons que si $\mathscr{M}_{rat}(k)$ est la catégorie des motifs de Chow, non nécessairement effectifs, on a aussi un foncteur covariant $h_* : \mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathscr{M}_{rat}(k)$ tel que $h_*(\mathrm{X}) = h(\mathrm{X})(dim\,\mathrm{X})$, si X est une variété projective et lisse. Si $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est un morphisme entre de telles variétés, on appelle $f_* : h_*(\mathrm{X}) \longrightarrow h_*(\mathrm{Y})$ le morphisme de Gysin induit par f. Dans cette théorie covariante, nous considérerons la catégorie $\mathrm{C}^b(\mathscr{M}_{rat}(k))$ comme une catégorie de descente homologique, avec le foncteur simple ordinaire des complexes de chaînes, que nous noterons encore $\mathbf{s}$ (cf. $(1.7.7)^{op}$).

Nous allons définir un foncteur contravariant $\mathrm{G}_\bullet : \mathbf{V^2}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^b(\mathscr{M}^+_{rat}(k))$.

Soit (X, U) un objet de $\mathbf{V^2}(k)$, c'est-à-dire que X est un schéma projectif et lisse sur k et $\mathrm{D} = \bigcup_{\alpha=1}^r \mathrm{D}_\alpha$ est un diviseur à croisements normaux dans X, qui est réunion de diviseurs lisses. Notons I l'ensemble ordonné $[1, r]$. On a un diagramme cubique augmenté $\mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{X}$, défini par les intersections des D_α, $\mathrm{S}_\chi(\mathrm{D}) := \bigcap_{\chi(\alpha)=1} \mathrm{D}_\alpha$, pour $\chi \in \square_r$. Par la fonctorialité de h_* on obtient un diagramme cubique $h_*\,(\mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{X})\,(-dim\,\mathrm{X})$ de $\mathscr{M}^+_{rat}(k)$ et donc un complexe de Gysin

$$\mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) := \mathbf{s}\,(h_*(\mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{X}))(-dim\,\mathrm{X})$$

dans $\mathrm{C}^b\left(\mathscr{M}^+_{rat}(k)\right)$. Ce complexe de Gysin du couple $(\mathrm{X}, \mathrm{X}\setminus\mathrm{D})$ est l'analogue dans le présent contexte du terme E_1 de la suite spectrale déduite du complexe de De Rham logarithmique filtré par la filtration par le poids ([D1] (3.2.4), [GN](§1)).

Nous allons voir que $\mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D})$ est un foncteur contravariant.

Si $f : (\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}') \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D})$ est un morphisme de $\mathbf{V^2}(k)$, pour toute composante irréductible D_α de D, le diviseur image inverse $f^{-1}(\mathrm{D}_\alpha)$ est une somme $\sum_{\beta=1}^s m_{\alpha,\beta}\mathrm{D}'_\beta$ de composantes irréductibles de D′. Nous noterons $\mathrm{M} = (m_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ la matrice des multiplicités de f. Nous allons définir un morphisme de complexes $\mathrm{G}_\bullet(f) : \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')$. D'abord, on pose $\mathrm{G}_0(f) = f^*$. Maintenant, pour tout couple de suites croissantes $\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(p)) \subset \mathrm{I}$ et $\tau = (\tau(1), \cdots, \tau(p)) \subset \mathrm{J}$ telle que $f(\mathrm{D}'_\tau) \subset \mathrm{D}_\sigma$, notons $f_{\sigma,\tau} : \mathrm{D}'_\tau \longrightarrow \mathrm{D}_\sigma$ la restriction de f. On définit alors un morphisme

$$\mathrm{G}_{\sigma,\tau}(f) : h_*(\mathrm{D}_\sigma)(-dim\,\mathrm{X}) \longrightarrow h_*(\mathrm{D}'_\tau)(-dim\,\mathrm{X}')$$

par $\mathrm{G}_{\sigma,\tau}(f) := m_{\sigma,\tau} f^*_{\sigma,\tau}$, où $m_{\sigma,\tau}$ est le déterminant du mineur d'indices (σ, τ) de la matrice M des multiplicités de f. En composant $\mathrm{G}_{\sigma,\tau}(f)$ avec l'inclusion canonique $h_*(\mathrm{D}'_\tau)(-dim\,\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{G}_p(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')$ et en faisant la somme par rapport à τ, on obtient les composantes

$$\mathrm{G}_{p,\sigma}(f) : h_*(\mathrm{D}_\sigma)(-dim\,\mathrm{X}) \longrightarrow \mathrm{G}_p(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')$$

du morphisme

$$G_p(f) : G_p(X, X \setminus D) \longrightarrow G_p(X', X' \setminus D').$$

Nous prouverons dans (5.8) que $G_\bullet(f)$ est un morphisme de complexes et que $G_\bullet$ est un foncteur contravariant (cf. [D1] (8.1.19.2)). Pour ce faire, nous utiliserons la variante suivante de la formule d'excès d'intersection de Fulton-MacPherson.

Proposition. — Soit

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{i} & X \end{array} \tag{5.6.1}$$

un diagramme cartésien de schémas éventuellement non réduits, et projectifs, tel que X, X' *et* Y *sont lisses,* Y' *est un diviseur à croisements normaux dans* X'*, dont les composantes irréductibles* Y'_β, $\beta = 1, \ldots, s$, *sont lisses et de multiplicité géométrique* m_β *dans* Y'*, i.e.* $Y' = \sum_{\beta=1}^{s} m_\beta Y'_\beta$, *et* i *est une immersion fermée. Notons* $\mathcal{N}_{Y/X}$ *(resp.* $\mathcal{N}_{Y'/X'}$*) le fibré normal de* Y *dans* X *(resp. de* Y' *dans* X'*), et* $\mathcal{E} := g^*\mathcal{N}_{Y/X}/\mathcal{N}_{Y'/X'}$ *le fibré normal d'excès sur* Y' *(voir [F], (6.3)). Soient* $\eta_\beta : Y'_\beta \longrightarrow Y'$ *l'inclusion,* $g_\beta := g \circ \eta_\beta$, $j_\beta := j \circ \eta_\beta$, $\mathcal{E}_\beta := \eta_\beta^*\mathcal{E}$ *et* ξ_β *la classe de Chern de degré maximum de* $\mathcal{E}_\beta$*. Alors, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\beta=1}^{s} h(Y'_\beta)(-1) & \xrightarrow{\sum_{\beta=1}^{s} j_{\beta *}} & h(X') \\ {\scriptstyle \sum_{\beta=1}^{s} m_\beta g_\beta^* \cup \xi_\beta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^*} \\ h(Y)(dim\, Y - dim\, X) & \xrightarrow{i_*} & h(X) \end{array}$$

est commutatif dans $\mathcal{M}_{rat}^{+}(k)$.

Preuve. — Par le principe d'identité de Manin ([M](§3), cf. [Sc](2.3)) il suffit de prouver la commutativité du diagramme pour le groupe de Chow A^*. Nous utilisons pour ceci l'anneau de Chow opérationnel défini par Fulton ([F](17.3)) pour tout schéma de type fini sur k, et qui coïncide avec l'anneau de Chow classique sur les variétés projectives et lisses. En particulier, il résulte de la formule d'excès d'intersection ([F], Exemple (17.4.1.b)) que, pour tout $y \in A^*(Y)$,

$$f^*(i_*(y)) = j_*(g^*(y) \cup \xi),$$

où $\xi \in A^e(Y')$ est la classe de Chern de degré maximum de $\mathcal{E}$. D'après [F], Exemple (17.4.7.i), et avec ses notations, on a $[j] = \sum_{\beta=1}^{s} m_\beta \eta_{\beta *}([j_\beta])$, où $[\,]$ désigne la classe d'orientation, et compte tenu de [FM](I.2.5)(G_3)(ii), il en résulte que

$j_* = \sum_{\beta=1}^{s} m_\beta j_{\beta *} \circ \eta_\beta^*$, d'où on déduit

$$\begin{aligned} f^*(i_*(y)) &= j_*(g^*(y) \cup \xi) \\ &= \sum m_\beta \, j_{\beta *} \eta_\beta^* (g^*(y) \cup \xi) \\ &= \sum j_{\beta *}(m_\beta g_\beta^*(y) \cup \xi_\beta), \end{aligned}$$

pour tout $y \in \mathrm{A}^*(\mathrm{Y})$, ce qui prouve la proposition.

(**5.7**) *Corollaire. — Soit (5.6.1) un diagramme commutatif de schémas projectifs, tel que i est une immersion fermée,* X, X′ *et* Y *sont lisses,* Y *est un diviseur de* X, Y′ *est un diviseur à croisements normaux dans* X′ *dont les composantes irréductibles* Y'_β, $\beta = 1, \ldots, s$, *sont lisses. Si le diviseur image inverse* $f^{-1}(\mathrm{Y})$ *est* $\sum_\beta m_\beta \mathrm{Y}'_\beta$ *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\beta=1}^{s} h(\mathrm{Y}'_\beta)(-1) & \xrightarrow{\sum_{\beta=1}^{s} j_{\beta *}} & h(\mathrm{X}') \\ {\scriptstyle \sum_{\beta=1}^{s} m_\beta g_\beta^*} \Big\uparrow & & \Big\uparrow {\scriptstyle f^*} \\ h(\mathrm{Y})(-1) & \xrightarrow{i_*} & h(\mathrm{X}) \end{array}$$

est commutatif dans $\mathscr{M}_{rat}^{+}(k)$.

Preuve. — Puisque Y est un diviseur, le fibré normal d'excès est nul, donc $\xi_\beta = 1$, pour tout β, et le corollaire est un cas particulier de la proposition précédente.

(**5.8**) *Proposition. — (i) Pour tout morphisme* $f : (\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}') \longrightarrow (\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D})$ *de* $\mathbf{V}^{\mathbf{2}}(k)$, *le morphisme* $\mathrm{G}_\bullet(f) : \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')$ *est un morphisme de complexes tel que la restriction* $\mathrm{G}_0(f)$ *de* $\mathrm{G}(f)$ *à* $h(\mathrm{X})$ *est* f^*.

(ii) $\mathrm{G}_\bullet$ *définit un foncteur contravariant* $\mathrm{G}_\bullet : \mathbf{V}^{\mathbf{2}}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^b(\mathscr{M}_{rat}^{+}(k))$

Preuve. — La fonctorialité de $\mathrm{G}_\bullet$ est une conséquence de la fonctorialité de l'algèbre extérieure. En effet, si $g : (\mathrm{X}'', \mathrm{X}'' \setminus \mathrm{D}'') \longrightarrow (\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')$ est un morphisme de $\mathbf{V}^{\mathbf{2}}(k)$, et M′ est sa matrice de multiplicités, la matrice M″ des multiplicités de la composée $f \circ g$ est le produit de matrices $\mathrm{M}' \circ \mathrm{M}$. La fonctorialité résulte alors de l'identité $m''_{\sigma,\rho} = \sum_\tau m_{\sigma,\tau} m'_{\tau,\rho}$, pour tout couple (σ, ρ), qui exprime en termes de déterminants la fonctorialité de l'algèbre extérieure.

Vérifions que les morphismes $\mathrm{G}_p(f)$ définissent un morphisme de complexes

$$\mathrm{G}_\bullet(f) : \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{G}_\bullet(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}'),$$

c'est-à-dire que

$$\mathrm{G}_p(f) \circ \gamma_p = \gamma'_p \circ \mathrm{G}_{p+1}(f), \quad p \geq 0,$$

où $\gamma_p : G_{p+1}(X, X\backslash D) \longrightarrow G_p(X, X\backslash D)$ est la différentielle du complexe $G_\bullet(X, X\backslash D)$, i.e. une somme alternée de morphismes de Gysin.

Considérons d'abord le cas où $p = 0$. D'après (5.7) on a, pour chaque $\alpha \in I$,

$$G_0(f) \circ i_{\alpha *} = \sum_{\beta=1}^{s} j_{\beta *} \circ G_{1,\alpha}(f)\,,$$

donc le morphisme

$$G_1(f) : G_1(X, X \setminus D) \longrightarrow G_1(X', X' \setminus D')$$

vérifie

$$G_0(f) \circ \sum_{\alpha=1}^{r} i_{\alpha *} = \sum_{\beta=1}^{s} j_{\beta *} \circ G_1(f),$$

c'est-à-dire que $G_0(f) \circ \gamma_0 = \gamma_1' \circ G_1(f)$.

Maintenant soit $p > 0$. Si $\sigma = (\sigma(1), \cdots, \sigma(p+1)) \subset I$ et $\nu = (\nu(1), \cdots, \nu(p)) \subset J$ sont des suites croissantes, la composante d'indices (σ, ν) de $G_p(f) \circ \gamma_p$ est, compte tenu de (5.7),

$$\begin{aligned}(G_p(f) \circ \gamma_p)_{\sigma,\nu} &= \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{l+1} m_{\sigma-\sigma(l),\nu}\, f^*_{\sigma-\sigma(l),\nu}\, i_{\sigma,\sigma-\sigma(l)*} \\ &= \sum_{l,\beta} (-1)^{l+1} m_{\sigma-\sigma(l),\nu} m_{\sigma(l),\beta}\, j_{\nu\cup\beta,\nu *} f^*_{\sigma,\nu\cup\beta}.\end{aligned}$$

D'une façon analogue, la composante correspondante de $\gamma_p' \circ G_{p+1}(f)$ est

$$(\gamma_p' \circ G_{p+1}(f))_{\sigma,\nu} = \sum_{\beta} \varepsilon(\nu \cup \beta, \nu) m_{\sigma,\nu\cup\beta}\, j_{\nu\cup\beta,\nu *} f^*_{\sigma,\nu\cup\beta},$$

avec $\varepsilon(\nu \cup \beta, \nu) = (-1)^{k+1}$, si $(\nu \cup \beta)(k) = \beta$. L'égalité cherchée est donc une conséquence de l'égalité

$$\sum_{l} (-1)^{l+1} m_{\sigma-\sigma(l),\nu} m_{\sigma(l),\beta} = \varepsilon(\nu \cup \beta, \nu) m_{\sigma,\nu\cup\beta},$$

qui résulte de la règle de Laplace du développement du déterminant $m_{\sigma,\nu\cup\beta}$ par la colonne d'index β. Cette fois-ci, c'est la fonctorialité du complexe de Koszul qu'on entrevoit derrière les calculs.

Dorénavant, nous noterons $G_\bullet$ simplement par G.

(**5.9**) *Proposition. — Le foncteur contravariant*

$$\mathrm{G} : \mathbf{V}^{\mathbf{2}}(k) \longrightarrow \mathrm{C}^b\left(\mathscr{M}^+_{rat}(k)\right)$$

vérifie les propriétés (F1) *et* (F2) *de* (2.1.5).

Preuve. — La propriété (F1) est aisément vérifiée. Prouvons la propriété (F2) par récurrence sur la dimension de X. Soient X un schéma projectif et lisse, D un diviseur à croisements normaux de X qui est réunion de diviseurs lisses, et Y un sous-schéma fermé de X, lisse et à croisements normaux avec D. Soient $\mathrm{X}_\bullet$ le diagramme cartésien (2.1.1.1) défini par l'éclatement de X le long de Y, et $\widetilde{\mathrm{D}} = f^{-1}(\mathrm{D})$.

Nous suivrons maintenant la même démarche que dans la preuve de la proposition (4.4). Ainsi, nous prouverons que

(i) si Y *n'est pas contenu dans* D, *la suite*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) &\xrightarrow{f^*+i^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}) \oplus \mathrm{G}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y} \setminus \mathrm{E}) \\ &\xrightarrow{j^*-g^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{Y}}, \widetilde{\mathrm{Y}} \setminus \widetilde{\mathrm{E}}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

est exacte et scindée, où $\mathrm{E} := \mathrm{Y} \cap \mathrm{D}$ *et* $\widetilde{\mathrm{E}} := \widetilde{\mathrm{Y}} \cap \widetilde{\mathrm{D}}$, *et*

(ii) si Y *est contenu dans* D, *le morphisme*

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \xrightarrow{f^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}})$$

est un homotopisme.

En effet, supposons d'abord que Y ne soit pas contenu dans D. On raisonne par récurrence sur le nombre s de composantes de D. Si $s = 0$, (i) est une conséquence de (5.1). Supposons donc que $s > 0$, et posons $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' \cup \mathrm{X}'$ et $\mathrm{D}' = \mathrm{D}'' \cap \mathrm{X}'$, où X' est une composante de D. Le diagramme $\mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{X}$ est alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}') & \longrightarrow & \mathrm{X}' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}'') & \longrightarrow & \mathrm{X}, \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des inclusions. De la définition de G, il en résulte une suite exacte et scindée

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}'') &\longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \\ &\longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')(-1)[1] \longrightarrow 0\,. \end{aligned}$$

D'une façon analogue, on obtient une suite exacte et scindée

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}''_\bullet) &\longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}_\bullet) \\ &\longrightarrow \mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}'_\bullet, \mathrm{X}'_\bullet \setminus \mathrm{D}'_\bullet)(-1)[1] \longrightarrow 0\,, \end{aligned}$$

où $(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}''_\bullet)$, $(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}_\bullet)$, et $(\mathrm{X}'_\bullet, \mathrm{X}'_\bullet \setminus \mathrm{D}'_\bullet)$ sont définis dans la preuve de (4.4). Puisque $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}'_\bullet, \mathrm{X}'_\bullet \setminus \mathrm{D}'_\bullet)$ et $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}''_\bullet)$ sont contractiles par les hypothèses de récurrence, on conclut que $\mathbf{s}\mathrm{G}(\mathrm{X}_\bullet, \mathrm{X}_\bullet \setminus \mathrm{D}_\bullet)$ est contractile, ce qui prouve (i).

Maintenant, supposons que Y soit contenu dans D, et procédons par récurrence sur le nombre de composantes r de D qui contiennent Y, et sur le nombre s de celles qui ne le contiennent pas.

Considérons d'abord le cas $(r, s) = (1, 0)$, ainsi D n'a qu'une seule composante et $\mathrm{Y} \subset \mathrm{D}$. Notons $\widehat{\mathrm{D}}$ la transformée stricte de D, $\widehat{\mathrm{E}} = \widetilde{\mathrm{Y}} \cap \widehat{\mathrm{D}}$, et

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{E}} \arrow[r, "i_{\widehat{\mathrm{E}},\widehat{\mathrm{D}}}"] \arrow[d, "\widehat{g}"'] & \widehat{\mathrm{D}} \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ \mathrm{Y} \arrow[r, "i_{\mathrm{Y},\mathrm{D}}"] & \mathrm{D} \end{tikzcd}$$

le diagramme induit. Le complexe $\mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}})$ est le complexe simple du diagramme

$$\begin{tikzcd} h(\widetilde{\mathrm{Y}})(-1) \arrow[r, "i_{\widetilde{\mathrm{Y}},\widetilde{\mathrm{X}}*}"] & h(\widetilde{\mathrm{X}}) \\ h(\widehat{\mathrm{E}})(-2) \arrow[u, "i_{\widehat{\mathrm{E}},\widetilde{\mathrm{Y}}*}"] \arrow[r, "i_{\widehat{\mathrm{E}},\widehat{\mathrm{D}}*}"] & h(\widehat{\mathrm{D}})(-1), \arrow[u, "i_{\widehat{\mathrm{D}},\widetilde{\mathrm{X}}*}"'] \end{tikzcd}$$

et le complexe $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D})$ est le complexe simple du morphisme

$$i_{\mathrm{D},\mathrm{X}*} : h(\mathrm{D})(-1) \longrightarrow h(\mathrm{X}),$$

$\mathbf{s}_{\square_0^+} tot(f^*)$ est donc le complexe simple du complexe double

$$h(\mathrm{D})(-1) \oplus h(\widehat{\mathrm{E}})(-2) \longrightarrow h(\widehat{\mathrm{D}})(-1) \oplus h(\widetilde{\mathrm{Y}})(-1) \oplus h(\mathrm{X}) \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{X}}),$$

où le premier morphisme est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} -\widehat{f}^* & -i_{\widehat{\mathrm{E}},\widehat{\mathrm{D}}*} \\ -(i_{\mathrm{Y},\mathrm{D}} \circ g)^* & i_{\widehat{\mathrm{E}},\widetilde{\mathrm{Y}}*} \\ i_{\mathrm{D},\mathrm{X}*} & 0 \end{pmatrix},$$

et le second par la matrice

$$\begin{pmatrix} i_{\widehat{\mathrm{D}},\widetilde{\mathrm{X}}*} & i_{\widetilde{\mathrm{Y}},\widetilde{\mathrm{X}}*} & f^* \end{pmatrix}.$$

Notons

$$\mathrm{A}_1 := h(\mathrm{D})(-1)\,, \quad \mathrm{A}_2 := \bigoplus_0^{r-3} h(\mathrm{Y})(-i-2), \quad \mathrm{A}_3 := h(\mathrm{Y})(-r),$$

$$\mathrm{B}_1 := h(\mathrm{X})\,, \quad \mathrm{B}_2 := \bigoplus_0^{r-2} h(\mathrm{Y})(-i-1).$$

D'après Manin ([M], voir la preuve de (5.1)), on a des isomorphismes

$$\widehat{\varphi}:\ \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_2 \longrightarrow h(\widehat{\mathrm{D}})(-1), \quad \widehat{\psi}: \mathrm{A}_2 \oplus \mathrm{A}_3 \longrightarrow h(\widehat{\mathrm{E}})(-2),$$
$$\varphi:\ \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2 \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{X}}), \quad \psi: \mathrm{B}_2 \oplus \mathrm{A}_3 \longrightarrow h(\widetilde{\mathrm{Y}})(-1).$$

Le complexe $\mathbf{s}_{\square_0^+} tot(\mathrm{G}f)$ est isomorphe, via ces isomorphismes et une permutation des facteurs, au complexe simple du complexe double

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} \mathrm{A} \oplus \mathrm{B} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d & b \end{pmatrix}} \mathrm{B},$$

où

$$\mathrm{A} := \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_2 \oplus \mathrm{A}_3\,, \quad \mathrm{B} := \mathrm{B}_1 \oplus \mathrm{B}_2\,,$$

et a, b, c, d sont les morphismes induits.

Maintenant, nous pouvons expliciter partiellement les morphismes a et b. On a

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, ceci résulte immédiatement des relations suivantes:

$$\widehat{f}^*(x) = \widehat{\varphi}(x, 0),$$

pour tout point x de A_1 ;

$$i_{\widehat{\mathrm{E}},\widehat{\mathrm{D}}*}(\widehat{\psi}(y, 0)) = i_{\widehat{\mathrm{E}},\widehat{\mathrm{D}}*}\Big(\sum_{i=0}^{r-3} \widehat{\xi}^i \cup \widehat{g}^*(y_i)\Big) = \widehat{\varphi}(0, y_0, \ldots, y_{r-3}),$$

pour tout point $y = (y_0, \ldots, y_{r-3})$ de A_2 ;

$$g_* i_{\widehat{\mathrm{E}},\widetilde{\mathrm{Y}}*}(\widehat{\psi}(0, y)) = \widehat{g}_*(\widehat{\psi}(0, y)) = y, \quad \text{et} \quad g_*(\psi(0, y)) = y,$$

pour tout point y de A_3 ;

$$f^*(x) = \varphi(x, 0),$$

pour tout point x de B_1 ; et

$$i_{\widetilde{\mathrm{Y}},\widetilde{\mathrm{X}}*}(\psi(y,0)) = i_{\widetilde{\mathrm{Y}},\widetilde{\mathrm{X}}*}(\sum_{i=0}^{r-2} \xi^i \cup g^*(y_i)) = \varphi(0, y_0, \ldots, y_{r-2}),$$

pour tout point $y = (y_0, \ldots, y_{r-2})$ de B_2.

Le complexe $\mathbf{s}_{\square_0^+} tot(f^*)$ est donc isomorphe au complexe simple du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \xrightarrow{a} & \mathrm{A} \\ {\scriptstyle -c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \mathrm{B} & \xrightarrow{b} & \mathrm{B} \end{array}$$

qui est contractile d'après (1) de (1.5.6), (2) de (1.5.7) et (1) de (1.5.9), car a et b sont des isomorphismes. Ceci prouve (ii) lorsque $(r,s) = (1,0)$.

Considérons le cas où $r = 1$ et $s > 0$. On raisonne par récurrence sur s, comme dans le cas où $r = 0$ et $s > 0$. En effet, on considère une décomposition $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' \cup \mathrm{X}'$, où X' est une composante lisse de D qui ne contient pas Y. Avec les notations de la preuve de (4.4), on obtient, d'après les hypothèses de récurrence, les homotopismes

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}') \xrightarrow{f'^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}', \widetilde{\mathrm{X}}' \setminus \widetilde{\mathrm{D}}'), \quad \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}'') \xrightarrow{f''^*} \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}'').$$

En outre, f induit un morphisme de suites exactes et scindées

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}'') & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) & \longrightarrow & \mathrm{G}(\mathrm{X}', \mathrm{X}' \setminus \mathrm{D}')(-1)[1] & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f''^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f'^*} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}'') & \longrightarrow & \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}} \setminus \widetilde{\mathrm{D}}) & \longrightarrow & \mathrm{G}(\widetilde{\mathrm{X}}', \widetilde{\mathrm{X}}' \setminus \widetilde{\mathrm{D}}')(-1)[1] & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

et (ii) en résulte dans ce cas.

Considérons finalement le cas où $r > 1$. On raisonne par récurrence sur r, et on considère, dans ce cas, une décomposition $\mathrm{D} = \mathrm{D}'' \cup \mathrm{X}'$, où X' est une composante de D qui contient Y. Alors, un argument parallèle à celui du cas précédent conclut la preuve de (ii) dans le cas général et, donc, de (5.9).

(**5.10**) *Théorème. — Il existe un foncteur contravariant* Φ*-rectifié*

$$\mathbf{Sch}(k) \longrightarrow Ho\mathrm{C}^b(\mathscr{M}_{rat}^+(k)),$$

noté aussi h, tel que:

(1) *si* X *est un schéma projectif et lisse,* $h(\mathrm{X})$ *est naturellement isomorphe au motif de Chow de* X,

(2) *h vérifie la propriété* (D) *de* (2.1.5),

(3) *si* X *est un schéma projectif et lisse, et* D *est un diviseur à croisements normaux dans* X *qui est réunion de diviseurs lisses, on a un isomorphisme*

$$h(\mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) \cong \mathbf{s}\,(h_*\,(\mathrm{S}_\bullet(\mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{X}))\,(-\mathit{dim}\,\mathrm{X}).$$

En outre, ce foncteur est unique, à isomorphisme unique près.

Preuve. — Le théorème est une conséquence de (2.3.6), compte tenu de (5.9).

(**5.11**). — Si on applique un foncteur de réalisation, par exemple le foncteur de cohomologie singulière, au complexe $h(\mathrm{X})$, on n'obtient pas la cohomologie singulière de X, mais le terme E_1 de la suite spectrale associée à la filtration par le poids. Néanmoins, le foncteur h vérifie d'autres propriétés des théories cohomologiques, il est aisé de voir par exemple qu'il vérifie la propriété de Künneth:

Théorème. — Pour tout couple (X, Y) *de schémas, il existe un isomorphisme naturel* $h(\mathrm{X}) \otimes h(\mathrm{Y}) \longrightarrow h(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$.

Preuve. — Le foncteur $\otimes$, étant additif, il préserve les homotopies, il induit donc un foncteur

$$\otimes : \mathit{Ho}\mathrm{C}^b(\mathscr{M}^+_{rat}(k)) \times \mathit{Ho}\mathrm{C}^b(\mathscr{M}^+_{rat}(k)) \longrightarrow \mathit{Ho}\mathrm{C}^b(\mathscr{M}^+_{rat}(k)).$$

Il est aisé de vérifier que les foncteurs de deux variables $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto h(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ et $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto h(\mathrm{X}) \otimes h(\mathrm{Y})$ sont isomorphes sur $\mathbf{V^2}(k) \times \mathbf{V^2}(k)$, et qu'ils vérifient la propriété de descente dans chaque variable, il résulte donc de l'unicité du théorème d'extension (2.3.6) qu'ils sont isomorphes.

(**5.12**). — Les foncteurs de torsion $? \otimes \mathbf{L}$ (noté aussi $?(-1)$) et de passage au dual, $?^\wedge$, sont des foncteurs exacts dans la catégorie des motifs, ils induisent donc des morphismes sur le groupe K_0. Alors, de (5.4), (5.10) et de la dualité de Poincaré il résulte immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire. — Il existe une application

$$\chi : \mathit{Ob}\,\mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{K}_0(\mathscr{M}^+_{rat}(k))$$

qui vérifie:

(1) *si* X *est un schéma projectif et lisse,* $\chi(\mathrm{X})$ *est la classe en* K_0 *du motif de Chow de* X,
(2) *si (2.1.1.1) est un carré acyclique,* $\chi(\mathrm{X}) = \chi(\widetilde{\mathrm{X}}) + \chi(\mathrm{Y}) - \chi(\widetilde{\mathrm{Y}})$,
(3) *si* D *est un diviseur lisse d'un schéma lisse* X, $\chi(\mathrm{X} \setminus \mathrm{D}) = \chi(\mathrm{X}) - \chi(\mathrm{D})(-1)$,
(4) *si* X *est une variété lisse,* $\chi(\mathrm{X})^\vee = \chi_c(\mathrm{X})(\mathit{dim}\,\mathrm{X})$.

En outre, l'application χ *est uniquement déterminée par les propriétés* (1) *à* (3).

(**5.13**) *Remarques.* — **1.** On peut vérifier que les caractéristiques d'Euler χ_c et χ précédentes sont compatibles avec les foncteurs de réalisation, ainsi par exemple, elles sont compatibles avec les caractéristiques d'Euler des structures de Hodge mixtes sur la cohomologie à support compact et la cohomologie, respectivement ([D1]).

2. Bien que pour la réalisation de Betti les caractéristiques d'Euler χ_c et χ coïncident, en général χ_c et χ ne coïncident pas dans $K_0(\mathcal{M}^+_{rat}(k))$. Ainsi, en reprenant un exemple de Serre ([Se]), soient Y une variété projective lisse et X le cône affine de base Y. On a alors $\chi_c(X) = 1 + \chi(Y)(-1) - \chi(Y)$, et $\chi(X) = 1$. Dans cet exemple on voit bien que la différence $\chi(X) - \chi_c(X)$ appartient à l'ideal de $K_0(\mathcal{M}^+_{rat}(k))$ engendré par $1 - \mathbf{L}$, et ce résultat a été établi, pour tout X, dans le cadre l-adique (voir [La]). Dans le présent contexte, on peut prouver aisément ce résultat à partir de (5.5) et (5.12).

BIBLIOGRAPHIE

[AH] J. M. Aroca, H. Hironaka and J. L. Vicente, Desingularization theorems, *Memo. Mat. del Inst. Jorge Juan de Mat.*, **30** (1977), Madrid.

[B] A. A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, *J. Sov. Math.*, **30** (1985), 2036–2070.

[BG] A. K. Bousfield and V. K. A. M. Gugenheim, On PL de Rham theory and rational homotopy type, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **179** (1976).

[BM] E. Bierstone and P. Millman, Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. math.*, **128** (1997), 207–302.

[D1] P. Deligne, Théorie de Hodge II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **40** (1972), 5–57; III, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **44** (1975), 2–77.

[D2] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite moins trois points, in *Galois Groups over Q*, pp. 79–297, Y. Ihara, K. Ribet and J.-P. Serre, eds., Springer, New York 1989.

[D3] P. Deligne, Cohomologie à supports propres. SGA 4. Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas, Tome 3, Exp. XVII., *Lect. Notes in Math.*, **305**, Springer, Berlin 1973.

[DM] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus and K. Shih, Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, *Lect. Notes in Math.*, **900**, Springer, Berlin 1982.

[dB] S. del Baño Rollin, On the Chow motive of some moduli spaces, *J. reine angew. Math.*, **532** (2001), 105–132.

[dBN] S. del Baño Rollin and V. Navarro Aznar, On the motive of a quotient variety, *Collect. Math.*, **49** (1998), 203–226.

[DL] J. Denef and F. Loeser, Motivic Igusa zeta functions, *J. Algebraic Geom.*, **7** (1998), 505–537.

[DB] Ph. Du Bois, Complexe de De Rham filtré d'une variété singulière, *Bull. Soc. Math. France*, **109** (1981), 41–81.

[Du] J. Dupont, Curvature and Characteristic Classes, *Lect. Notes in Math.*, **640**, Springer, Berlin 1978.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer, Berlin 1984.

[FM] W. Fulton and R. MacPherson, Categorical framework for the study of singular spaces, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **243** (1981).

[GZ] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer, Berlin 1967.

[Gi] H. Gillet, Riemann-Roch theorems in higher K-theory, *Adv. Math.*, **40** (1981), 203–289.

[GS] H. Gillet and C. Soulé, Descent, Motives and K-Theory, *J. reine angew. Math.*, **478** (1996), 127–176.

[GM] P. A. Griffiths and J. W. Morgan, Rational Homotopy Theory and Differential Forms, *Progress in Math.*, **16** (1981), Birkhäuser, Boston.

[Gr] M. Gross, Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique, *Bull. Soc. Math. France. Mémoire* (nouv. série), **21** (1985).

[G] A. GROTHENDIECK, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **29** (1966), 95–103.

[SGA1] A. GROTHENDIECK, Revêtements Etales et Groupe Fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61 SGA 1, *Lect. Notes in Math.*, **224**, Springer, Berlin 1971.

[Gu] F. GUILLÉN, Une relation entre la filtration par le poids de Deligne et la filtration de Zeeman, *Comp. Math.*, **61** (1987), 201–227.

[GN] F. GUILLÉN and V. NAVARRO AZNAR, Sur le théorème local des cycles invariants, *Duke Math. J.*, **61** (1990), 133–155.

[HC] F. GUILLÉN, V. NAVARRO AZNAR, P. PASCUAL and F. PUERTA, Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique, *Lect. Notes in Math.*, **1335**, Springer, Berlin 1988.

[Han] M. HANAMURA, Homological and cohomological motives of algebraic varieties, *Invent. math.*, **142** (2000), 319–349.

[Ha1] R. HARTSHORNE, Ample Subvarieties of Algebraic Varieties, *Lect. Notes in Math.*, **156**, Springer, Berlin 1970.

[Ha2] R. HARTSHORNE, On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **45** (1976), 5–99.

[Hi1] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Ann. Math.*, **79** (1964), 109–326.

[Hi2] H. HIRONAKA, Flattening Theorem in the Complex Analytic Geometry, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 503–547.

[KS] G. M. KELLY and R. STREET, Review of the elements of 2-categories, *Lect. Notes in Math.*, **420**, pp. 75–103, Springer, Berlin 1974.

[La] G. LAUMON, Comparaison de caractéristiques d'Euler-Poincaré en cohomologie l-adique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **292**, *Série I* (1981), 209–212.

[Le] M. LEVINE, Mixed Motives, *Math. Surveys Monographs*, **57** (1998), A.M.S., Providence, RI.

[M] JU. I. MANIN, Correspondences, motifs and monoidal transformations, *Math. USSR Sbornik*, **6** (1968), 439–470.

[ML] S. MACLANE, *Categories for the Working Mathematician*, Second ed., Springer, Berlin 1998.

[N] V. NAVARRO AZNAR, Sur la théorie de Hodge-Deligne, *Invent. math.*, **90** (1987), 11–76.

[Q] D. QUILLEN, Homotopical Algebra, *Lect. Notes in Math.*, **43**, Springer, Berlin 1967.

[Sc] A. J. SCHOLL, Classical Motives, in *Motives*, U. Jannsen, S. Kleiman and J.-P. Serre, eds.; *Proc. Symp. Pure Math.*, **55** (1994), 163–187.

[Se] J.-P. SERRE, Motives, Journées Arithmétiques de Luminy, 1989. *Astérisque*, **198-199-200** (1991), 333–350.

[Su] D. SULLIVAN, Infinitesimal Computations in Topology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **47** (1978), 269–331.

[Ve] J. L. VERDIER, Des catégories dérivées aux catégories abéliennes, *Astérisque*, **139** (1996).

[Vi] O. VILLAMAYOR, Constructiveness of Hironaka's resolution, *Ann. Sci. Ec. Nor. Sup.*, **22** (1989), 1–32.

F. G. et V. N. A.
Departament d'Àlgebra i Geometria,
Facultat de Matemàtiques,
Universitat de Barcelona,
Gran Via 585,
08007 Barcelona,
Espagne,
guillen@cerber.mat.ub.es

Manuscrit reçu le 23 mai 1995 et revisé en juillet 1996, mars et mai 1998, octobre 2000, janvier 2001, janvier et avril 2002.