ARMAND BOREL
JACQUES TITS

Compléments à l'article « Groupes réductifs »

Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 41 (1972), p. 253-276
<http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1972__41__253_0>

COMPLÉMENTS À L'ARTICLE : « GROUPES RÉDUCTIFS »

par ARMAND BOREL *et* JACQUES TITS

Les compléments à [3] donnés ici portent principalement sur les isogénies centrales (§ 2), l'adhérence des doubles classes d'une décomposition de Bruhat (§ 3) et le groupe fondamental des sous-groupes déployés maximaux construits dans le § 7 de [3] (§ 4). Nous profitons aussi de cette occasion pour rectifier quelques erreurs de [3]; celles indiquées au § 5 nous ont été en partie signalées par J. Humphreys et S. P. Wang; nous les en remercions vivement.

Les notations utilisées sans explication sont celles de [3].

L'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G, H, ... est notée L(G), L(H), ... et $L(f) : L(G) \to L(H)$ désigne le morphisme d'algèbres de Lie associé à un morphisme de groupes algébriques $f : G \to H$. C'est donc la différentielle de f en l'élément neutre.

Si A est une partie d'un groupe algébrique G, le centralisateur de A dans L(G) est par définition

$$\mathscr{Z}_{L(G)}(A) = \{X \in L(G) \mid (\mathrm{Ad}\, a)(X) = X, \quad (a \in A)\}.$$

Si X est un groupe ou une algèbre de Lie, $\mathscr{Z}(X)$ désigne son centre.

Si k est un corps commutatif, ${}_k\mathbf{Add}$ ou $\mathbf{Add}$ désigne le groupe additif sur k.

Dans toute la suite, k est un corps commutatif, p sa caractéristique, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, k_s la clôture séparable de k dans $\bar{k}$, et G *un k-groupe connexe réductif.*

1. Groupes orthogonaux.

(1.1) Dans [3; 4.24], on a supposé implicitement que le groupe orthogonal O(Q) est défini sur k. C'est toujours le cas si la caractéristique p de k est $\neq 2$. Lorsque $p = 2$, cela est vrai si Q est non dégénérée et de défaut ≤ 1 (cf. [10], Remarque p. 30, en tenant compte de la terminologie introduite au bas de la p. 21).

(1.2) Le n° 4.26 de [3] a pour but de fournir un exemple de deux k-groupes connexes réductifs G, G′ de k-rangs différents mais liés par une k-isogénie (qui ne peut être séparable vu [3; 4.25], ni même centrale vu (2.19) ci-dessous). Cet exemple est erroné, et le n° 4.26 de [3] doit être remplacé, à partir de la troisième ligne, par le texte suivant :

Supposons k de caractéristique 2 ; soit Q′ une forme quadratique à deux variables, non dégénérée et non défective, qui ne représente pas 1 (on suppose qu'une telle forme existe, ce qui implique en particulier que k est non parfait); soient Q la forme à trois variables définie par $Q(x, y, z) = x^2 + Q'(y, z)$, et enfin $G = O(Q)$ le groupe orthogonal associé à Q. La forme Q ne représente pas zéro sur k, donc G est anisotrope sur k (4.24). D'autre part, la forme bilinéaire associée à Q admet la droite $y = z = 0$ comme noyau. On en déduit aisément que les éléments de G sont les matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1 & Q'(a, b)^{1/2} + \xi & Q'(c, d)^{1/2} + \eta \\ 0 & a & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix}, \qquad (ad - bc = 1),$$

où $\xi = Q'(1, 0)^{1/2}$, $\eta = Q'(0, 1)^{1/2}$, donc que $M \mapsto \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est une k-isogénie de G sur $\mathbf{SL}_2 = G'$. Cependant, $r_k(G) = 0$ et $r_k(G') = 1$.

2. Isogénies centrales.

La proposition 4.25 de [3] montre que le k-rang est conservé par une isogénie séparable. Nous voulons prouver ici qu'il en est encore de même pour une isogénie centrale et que, plus généralement, une telle isogénie conserve les invariants sur k d'un k-groupe réductif étudiés dans [3; §§ 4, 5].

Définition (**2.1**). — Soit $f : H \to H'$ un morphisme de groupes algébriques. Nous disons que f est *quasi-central* si son noyau (ensembliste) est contenu dans le centre de H. En d'autres termes, f est quasi-central si le commutateur $H \times H \to H$ se factorise à travers $f(H) \times f(H)$ *en tant qu'application*, c'est-à-dire s'il existe une application $\kappa : f(H) \times f(H) \to H$ telle que $\kappa(f(x), f(y)) = xyx^{-1}y^{-1}$ pour $x, y \in H$.

Définition (**2.2**). — Un morphisme $f : H \to H'$ de groupes algébriques est dit *central* si le commutateur $H \times H \to H$ se factorise à travers $f(H) \times f(H)$ *en tant que morphisme*, c'est-à-dire s'il est quasi-central et si l'application κ de (2.1) (qui est évidemment unique) est un morphisme.

Remarque (**2.3**). — Soit k un corps de définition de f. Il est facile de voir que, avec les notations de [1; § 1], f est central si et seulement si $\operatorname{Ker} f(C) \subset \mathscr{Z}(H(C))$ pour toute k-algèbre C. Dans le langage des schémas en groupes, cela revient à dire que le noyau (schématique) de f est contenu dans le centre de H.

Proposition (**2.4**). — *Soit $f : H \to H'$ un morphisme de groupes algébriques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est quasi-central* (resp. *central*);

(ii) *pour tout $h \in H$, il existe une application* (resp. *un morphisme de variétés*) $\varphi_h : f(H) \to H$ *tel que* $\varphi_h(f(x)) = xhx^{-1}$ *pour* $x \in H$;

(iii) *l'action de* H *sur soi-même par les automorphismes intérieurs induit une action ensembliste* (resp. *algébrique*) *de* $f(\mathrm{H})$ *sur* H, *c'est-à-dire qu'il existe une application* (resp. *un morphisme de variétés*) $\iota : f(\mathrm{H}) \times \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$ *tel que* $\iota(f(x), y) = xyx^{-1}$ *pour* $x, y \in \mathrm{H}$.

Dans le cas quasi-central, la proposition est évidente. Pour établir l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) dans le cas central, il suffit de remarquer que si κ est défini comme en (2.1), le morphisme $\varphi_h : x' \mapsto \kappa(x', f(h)).h$ (pour $x' \in f(\mathrm{H})$) possède la propriété requise. Enfin, les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) sont des conséquences immédiates du lemme suivant, où on pose successivement $\mathrm{X}=\mathrm{Z}=\mathrm{H}$, $\mathrm{X}'=f(\mathrm{H})$, $\mathrm{Y}=\mathrm{H}$, $\psi(x,y)=xyx^{-1}$ et $\mathrm{X}=\mathrm{Z}=\mathrm{H}$, $\mathrm{X}'=f(\mathrm{H})$, $\mathrm{Y}=f(\mathrm{H})$, $\psi(x,y')=x.\iota(y',x^{-1})$ (d'où $\psi'=\kappa$).

Lemme **(2.5)**. — *Soient* X, X′, Y *des ensembles algébriques (noethériens),* Z *un ensemble algébrique affine,* $f : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}'$ *un morphisme surjectif,* $\psi : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Z}$ *un morphisme et* $\psi' : \mathrm{X}' \times \mathrm{Y} \rightarrow \mathrm{Z}$ *une application telle que* $\psi = \psi' \circ (f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Y}})$. *Alors, pour que* ψ' *soit un morphisme, il faut et il suffit que* $\psi'|_{\mathrm{X}' \times \{y\}}$ *en soit un pour tout* $y \in \mathrm{Y}$.

(N.B. — Nous ignorons si ce lemme reste valable pour un ensemble algébrique Z quelconque. P. Gabriel nous a fait remarquer qu'il l'est en tout cas si on suppose le morphisme f fidèlement plat. Cela permet d'étendre la proposition (2.4) à des groupes algébriques non affines.)

La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est aussi suffisante. L'assertion est évidemment locale en X′ et Y, que nous pouvons donc supposer affines. Si (U_i) est un recouvrement fini de X par des ouverts affines, il suffit de remplacer X par $\coprod_i \mathrm{U}_i$ et f par le composé de f et de l'application canonique $\coprod_i \mathrm{U}_i \rightarrow \mathrm{X}$ pour se ramener au cas où X est affine, ce que nous supposerons aussi.

Soient $\mathrm{K}[\mathrm{X}], \mathrm{K}[\mathrm{X}'], \ldots$ les algèbres affines de $\mathrm{X}, \mathrm{X}', \ldots$ sur un corps de définition K algébriquement clos. Nous devons faire voir que si $a \in \mathrm{K}[\mathrm{Z}]$, alors $\psi'^*(a) \in \mathrm{K}[\mathrm{X}'] \otimes \mathrm{K}[\mathrm{Y}]$. Comme f est surjectif, cela revient à prouver que $\psi^*(a) \in f^*(\mathrm{K}[\mathrm{X}']) \otimes \mathrm{K}[\mathrm{Y}]$. Posons

$$\psi^*(a) = \sum_{1 \leq i \leq r} b_i \otimes c_i, \qquad (b_i \in \mathrm{K}[\mathrm{X}],\ c_i \in \mathrm{K}[\mathrm{Y}],\ i = 1, \ldots, r),$$

les c_i étant supposés linéairement indépendants. Soient $y_1, \ldots, y_r$ des points de Y tels que la matrice $(c_i(y_j))$ soit inversible. Comme la restriction de ψ à $\mathrm{X} \times \{y_j\}$ est un morphisme $(j=1, \ldots, r)$, on a $\sum_i c_i(y_j).b_i \in f^*(\mathrm{K}[\mathrm{X}'])$ pour tout j, d'où $b_i \in f^*(\mathrm{K}[\mathrm{X}'])$, q.e.d.

Remarque **(2.6)**. — Si H, H′ sont des k-groupes et $f : \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}'$ un k-morphisme central, les morphismes κ et ι définis en (2.1) et (2.4) (iii) sont définis sur k, et il en est de même de φ_h ((2.4) (ii)) si $h \in \mathrm{H}_k$: cela résulte de ce que si $\alpha : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}'$ est un k-morphisme surjectif de k-ensembles algébriques, un morphisme α' de X′ dans un autre k-ensemble algébrique est défini sur k si et seulement si $\alpha' \circ \alpha$ l'est.

Proposition **(2.7)**. — *Soient* H, H′ *des k-groupes algébriques et* $f : \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}'$ *un k-morphisme central surjectif. Alors,* $f(\mathrm{H}_k)$ *est un sous-groupe distingué de* H'_k *et* $\mathrm{H}'_k/f(\mathrm{H}_k)$ *est commutatif.*

(Cette propriété est bien connue : cf. par ex. [8].)

Le commutateur $H' \times H' \to H'$ coïncidant avec le composé $f \circ \kappa$ (où κ est défini comme en (2.1)), on a, vu la remarque (2.6), $(H'_k, H'_k) = f(\kappa(H'_k \times H'_k)) \subset f(H_k)$, d'où l'assertion.

Lemme **(2.8)**. — *Soient* H, H', H'' *des groupes algébriques,* $h : H'' \to H$ *un morphisme surjectif et* $f : H \to H'$ *un morphisme de noyau fini. Supposons* H'' *connexe.*

(i) *Si* $h' : H'' \to H$ *est un morphisme tel que* $f \circ h' = f \circ h$, *on a* $h' = h$.

(ii) *Tout automorphisme de* H' « *se relève* » *d'au plus une façon en un automorphisme de* H.

(iii) *Supposons* H, H', H'' *et* $f \circ h$ *définis sur* k, *et* f *et* h *définis sur une extension séparable* k' *de* k. *Alors, pour que* h *soit défini sur* k, *il faut et il suffit que* f *le soit.*

(i) Si $f \circ h' = f \circ h$, l'application $x \mapsto h(x) . h'(x)^{-1}$ est un morphisme de variétés de H'' dans Ker f, dont l'image contient 1. Comme H'' est connexe et Ker f fini, cela implique que $h(x) . h'(x)^{-1} = 1$ pour tout x.

(ii) est un cas particulier de (i) (poser $H'' = H$).

(iii) Nous pouvons évidemment supposer k' séparablement clos. Tout élément γ de $\mathrm{Aut}(k'/k)$ définit des automorphismes de $H(k')$, $H'(k')$, $H''(k')$, que nous désignerons aussi par γ. Par hypothèse, $f \circ h \circ \gamma = \gamma \circ f \circ h$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}(k'/k)$. Si f est défini sur k, on a $f \circ \gamma = \gamma \circ f$, d'où $f \circ h \circ \gamma = f \circ \gamma \circ h$ et, vu (i), $h \circ \gamma = \gamma \circ h$. Réciproquement, si h est défini sur k, on a $h \circ \gamma = \gamma \circ h$, d'où $f \circ \gamma \circ h = \gamma \circ f \circ h$ et, comme h est surjectif, $f \circ \gamma = \gamma \circ f$.

Proposition **(2.9)**. — *Soient* T *un tore maximal et* N *un sous-groupe distingué fermé de* G. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes* : (i) N *est central*; (ii) $N \subset T$; (iii) N *est contenu dans l'intersection des tores maximaux de* G; (iv) N *est formé d'éléments semi-simples*; (v) *pour tout* $a \in \Phi(T, G)$, *on a* $U_a \not\subset N$.

Les implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes, compte tenu de la conjugaison des tores maximaux de G et du fait que leur intersection est le centre de G [1; 13.17, p. 316].

Montrons que (v) implique (ii). Le groupe N^0 étant normalisé par T, il est engendré par son intersection avec T et par les U_a qu'il contient [3; 3.4]. Si $U_a \not\subset N$ quel que soit $a \in \Phi(T, G)$, on a donc $N^0 \subset T$ et, quitte à remplacer G, T et N par G/N^0, T/N^0 et N/N^0, nous pouvons supposer que N est fini. Mais alors, N est central, donc contenu dans T, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — La proposition est encore valable si on ne suppose pas N fermé.

Corollaire **(2.10)**. — *Pour que* N *soit central, il faut et il suffit que* N^0 *le soit.*

On utilise la propriété (2.9) (v).

Proposition **(2.11)**. — *Soient* G' *un groupe algébrique,* $f : G \to G'$ *un morphisme et* T *un tore maximal de* G. *Alors, les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) f *est quasi-central*;

(ii) *la restriction de f à tout sous-groupe unipotent fermé et connexe de* G *est injective*;

(iii) *pour toute racine* $a \in \Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$, *il existe un entier n et une racine* $a' \in \Phi(f(\mathrm{T}), f(\mathrm{G}))$ *tels que* $a = n.(f|_{\mathrm{T}})^*(a')$;

(iv) *l'image réciproque par f d'un tore maximal de* G' *est un tore maximal de* G.

Lorsque ces conditions sont remplies, la restriction de f à tout sous-groupe unipotent de G *est injective, et l'entier n de* (iii) *est une puissance de l'exposant caractéristique de k.*

Si f est quasi-central, son noyau est formé d'éléments semi-simples, vu (2.9), donc la restriction de f à tout sous-groupe unipotent de G est injective; en particulier, (ii) est satisfaite.

Supposons que la restriction de f à tout sous-groupe unipotent fermé connexe soit injective. Si $a \in \Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$, le groupe $f(\mathrm{U}_a)$ est un sous-groupe additif de $f(\mathrm{G})$ normalisé par $f(\mathrm{T})$; il existe donc $a' \in \Phi(f(\mathrm{T}), f(\mathrm{G}))$ tel que $f(\mathrm{U}_a) = \mathrm{U}_{a'}$. Comme f induit une isogénie purement inséparable de U_a sur $\mathrm{U}_{a'}$, on a $a = n.(f|_{\mathrm{T}})^*(a')$, où n est une puissance de l'exposant caractéristique de k.

Enfin, (i) $\Leftrightarrow$ (iv) vu (2.9) et [1; 11.14]. Si (iii) est satisfaite, il est clair que $\mathrm{Ker} f$ ne contient aucun des U_a, pour $a \in \Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$, donc f est quasi-central, vu (2.9).

Corollaire **(2.12)**. — *Soient* G' *un k-groupe algébrique et* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un k-morphisme quasi-central. Alors* $\mathrm{Ker} f$ *est défini sur k.*

Comme G possède un tore maximal défini sur k [1; 18.2], (2.9) et [3; 1.6] entraînent que $\mathrm{Ker} f$ est défini sur une extension séparable de k. Comme il est k-fermé, l'assertion s'ensuit.

Proposition **(2.13)**. — *Soient* T *un tore maximal de* G *et* M *un idéal de* L(G) *stable par* G. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes* : (i) $\mathrm{M} \subset \mathscr{Z}_{\mathrm{L(G)}}(\mathrm{G})$; (ii) $\mathrm{M} \subset \mathrm{L}(\mathrm{T})$; (iii) M *est contenu dans l'intersection* Z *des algèbres de Lie des tores maximaux de* G; (iv) M *est formé d'éléments semi-simples*; (v) M *ne contient aucune des algèbres* $\mathrm{L}(\mathrm{U}_a)$ *pour* $a \in \Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$. *On a* $\mathscr{Z}(\mathrm{L}(\mathrm{G})) = \mathscr{Z}_{\mathrm{L(G)}}(\mathrm{G}) = \mathrm{Z}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) parce que $\mathscr{Z}_{\mathrm{L(G)}}(\mathrm{T}) = \mathrm{L}(\mathscr{Z}(\mathrm{T})) = \mathrm{L}(\mathrm{T})$ (cf. [1; (9.2), Cor. p. 229]).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) vu la conjugaison des tores maximaux de G.

(iii) $\Rightarrow$ (i) puisque tout tore centralise son algèbre de Lie et que G est engendré par ses tores maximaux.

Les implications (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes.

L'idéal M est la somme de ses sous-espaces propres pour T, donc est engendré par son intersection avec L(T) et par les $\mathrm{L}(\mathrm{U}_a)$ qu'il contient, d'où l'implication (v) $\Rightarrow$ (ii). L'équivalence des propriétés (i) à (v) est ainsi établie.

L'idéal $\mathscr{Z}(\mathrm{L}(\mathrm{G}))$ est stable par tout automorphisme de L(G), donc par G, et il ne contient aucun des $\mathrm{L}(\mathrm{U}_a)$ car $\mathrm{L}(\mathrm{U}_a)$ n'est pas central dans l'algèbre de Lie du groupe isomorphe à SL_2 ou à PSL_2 engendré par U_a et U_{-a}. Par conséquent $\mathscr{Z}(\mathrm{L}(\mathrm{G})) \subset \mathscr{Z}_{\mathrm{L(G)}}(\mathrm{G})$. L'inclusion inverse étant évidente, la dernière assertion s'ensuit, vu l'équivalence de (i) et (iii).

Lemme **(2.14)**. — *Soient* G′ *un groupe algébrique*, $f: G \to G'$ *un morphisme quasi-central surjectif*, T *un tore maximal de* G, U^+ *et* U^- *deux sous-groupes unipotents maximaux de* G *normalisés par* T *et opposés, et* $\psi : G \times X \to X$ *une action algébrique de* G *sur un ensemble algébrique* X. *Alors, pour que* ψ *se factorise à travers* $G' \times X$, *c'est-à-dire pour qu'il existe un morphisme* $\psi' : G' \times X \to X$ *tel que* $\psi = \psi' \circ (f \times \mathrm{id}_X)$, *il faut et il suffit que les restrictions de* ψ *à* $U^+ \times X$, $U^- \times X$ *et* $T \times X$ *se factorisent respectivement à travers* $f(U^+) \times X$, $f(U^-) \times X$ *et* $f(T) \times X$.

La condition est évidemment nécessaire. Supposons donc qu'elle soit remplie et soient $\upsilon^\pm : f(U^\pm) \times X \to X$ et $\tau : f(T) \times X \to X$ les morphismes définis par

$$\psi|_{U^\pm \times X} = \upsilon^\pm \circ (f \times \mathrm{id}_X), \qquad \psi|_{T \times X} = \tau \circ (f \times \mathrm{id}_X).$$

L'existence de τ implique que le noyau de f opère trivialement sur X, donc qu'il existe une action ensembliste $\psi' : G' \times X \to X$ de G′ sur X telle que $\psi = \psi' \circ (f \times \mathrm{id}_X)$. Il est clair que $\upsilon^\pm$ et τ sont les restrictions de ψ' à $f(U^\pm) \times X$ et à $f(T) \times X$ respectivement. Pour $u_+ \in f(U^+)$, $u_- \in f(U^-)$ et $t \in f(T)$, on a

$$\psi'(u_+ t u_-, x) = \psi'(u_+, \psi'(t, \psi'(u_-, x))) = \upsilon^+(u_+, \tau(t, \upsilon^-(u_-, x))).$$

Posant $V = f(U^+).f(T).f(U^-)$, on voit donc que la restriction de ψ' à $V \times X$ est un morphisme. D'autre part, pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto \psi(g, x) = \psi'(f(g), x)$ est un automorphisme de X, donc la restriction de ψ' à $(f(g).V) \times X$ est aussi un morphisme. Notre assertion résulte à présent de ce que les ouverts $(f(g).V) \times X$ recouvrent $G' \times X$.

Proposition **(2.15)**. — *Soient* G′ *un groupe algébrique*, $f: G \to G'$ *un morphisme et* T *un tore maximal de* G. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) f *est central*;

(ii) f *est quasi-central et* $\mathrm{Ker}\, L(f) \subset \mathscr{Z}(L(G))$;

(iii) *la restriction de* f *à tout sous-groupe unipotent fermé et connexe de* G *est une immersion*;

(iv) $(f_T)^* : X^*(f(T)) \to X^*(T)$ *applique les racines de* $f(G)$ *par rapport à* $f(T)$ *sur les racines de* G *par rapport à* T.

Lorsque ces conditions sont remplies, la restriction de f *à tout sous-groupe unipotent fermé de* G *est une immersion.*

Soient g un élément de G et $\gamma : G \to G$ l'application définie par $\gamma(x) = gxg^{-1}x^{-1}$. Si f est central, il existe un morphisme $\gamma' : f(G) \to G$ tel que $\gamma = \gamma' \circ f$, d'où $(d\gamma)_1 = \mathrm{Ad}\, g - 1 = (d\gamma')_1 \circ L(f)$. On a donc, vu (2.13),

$$\mathrm{Ker}\, L(f) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}\, g - 1) = \mathscr{Z}_{L(G)}(G) = \mathscr{Z}(L(G)),$$

ce qui établit l'implication (i) ⇒ (ii).

Si (ii) est satisfaite, il résulte de (2.11) que la restriction de f à tout sous-groupe unipotent fermé de G est une injection; de plus, celle-ci est une immersion, et en particulier (iii) est satisfaite, puisque, vu (2.13), $\mathrm{Ker}\, L(f)$ est formé d'éléments semi-simples.

Pour faire voir que la condition (iii) implique (iv), il suffit de l'appliquer aux groupes U_a ($a \in \Phi(T, G)$).

Enfin, supposons (iv) satisfaite et montrons que f est central. Soient U^+ et U^-

deux sous-groupes unipotents maximaux de G normalisés par T et opposés. De (iv), il résulte aussitôt que l'homomorphisme $U^{\pm} \to f(U^{\pm})$ induit par f est un isomorphisme de groupes algébriques; son inverse sera noté $\alpha^{\pm}$. On a $(\mathrm{Ker} f) \cap U^{+} = \{1\}$. Comme $\mathrm{Ker} f$ est distingué dans G, cela implique qu'il est formé d'éléments semi-simples, donc que f est quasi-central (2.9). Soit $\iota : f(G) \times G \to G$ l'application définie par $\iota(f(x), y) = xyx^{-1}$ (cf. (2.4) (iii)). Pour établir notre assertion, il suffit, vu (2.4), de montrer que ι est un morphisme, ou encore, en vertu de (2.14), de montrer que les restrictions $\upsilon^{\pm}$ et τ de ι à $f(U^{\pm}) \times G$ et à $f(T) \times G$ sont des morphismes. Mais $\upsilon^{\pm}$ n'est autre que le composé de $\alpha^{\pm} \times \mathrm{id}_G$ et du morphisme $(u, x) \mapsto uxu^{-1}$ de $U^{\pm} \times G$ dans G. Reste donc à faire voir que τ est un morphisme ou, ce qui revient au même vu (2.5), que pour tout $g \in G$, l'application $\tau_g : f(T) \to G$ définie par $\tau_g(t') = \tau(t', g)$ est un morphisme. Vu l'identité $\tau_{gg'}(t') = \tau_g(t') . \tau_{g'}(t')$, il suffit d'établir cette assertion pour g appartenant à un système générateur de G, par exemple pour $g \in T \cup U^{+} \cup U^{-}$. Or, si $g \in T$, τ_g est l'application constante $f(T) \to \{g\}$ et si $g \in U^{\pm}$, on a $\tau_g(t') = \alpha^{\pm}(t' . f(g) . t'^{-1})$, relation qui définit bien un morphisme.

Remarque **(2.16)**. — Utilisons à nouveau les notations de [1]. En particulier, soit $\bar{k}[\delta]$ l'algèbre des nombres duaux sur $\bar{k}$. Il résulte de l'équivalence des propriétés (i) et (ii) de (2.15), compte tenu des propriétés de la suite exacte scindée

$$\{1\} \to L(G)(\bar{k}) \to G(\bar{k}[\delta]) \to G(\bar{k}) \to \{1\}$$

[1; I, (3.5)], que $f : G \to G'$ est central si et seulement si $\mathrm{Ker} f(\bar{k}[\delta]) \subset \mathscr{Z}(G(\bar{k}[\delta]))$. (On comparera avec (2.3), où H n'était pas supposé réductif.)

Corollaire **(2.17)**. — *Supposons le morphisme* $f : G \to G'$ *central et surjectif. Alors,* $\mathrm{Im}\, L(f)$ *contient tous les éléments nilpotents de* $L(G')$. *Si* T' *est un tore maximal de* G', *on a* $L(G') = L(T') + \mathrm{Im}\, L(f)$. *Soit* H' *un* k*-sous-groupe de* G'. *Supposons que* H' *contienne* T', *ou soit contenu dans* T', *ou soit connexe et réductif; alors* $f^{-1}(H')$ *est défini sur* k.

Tout élément nilpotent de $L(G')$ est tangent à un sous-groupe unipotent connexe de G' [1; 14.17]. Si X est un tel sous-groupe, le radical unipotent de $f^{-1}(X)$ est appliqué surjectivement sur X par f. La première assertion résulte donc de (2.15) (iii). La seconde s'ensuit, puisque $L(G') = L(T') + L(U') + L(U'^{-})$, où U' et U'^{-} désignent des sous-groupes unipotents maximaux opposés de G' normalisés par T'. Si $H' \supset T'$, on a $L(G') = L(H') + \mathrm{Im} f$, et $f^{-1}(H')$ est défini sur k, vu [2; 1.18]. Si H' est contenu dans T', il est aussi contenu dans un k-tore maximal T''; d'après ce qu'on vient de voir et (2.11), $f^{-1}(T'')$ est un k-tore de G, dont $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe k-fermé donc défini sur k, vu [3; 1.6]. Enfin, si H' est connexe et réductif, il est engendré par ses k-tores [2; 7.10]; chacun d'eux est contenu dans un tore maximal de G', donc a son image réciproque définie sur k et il en est alors de même pour H'.

Corollaire **(2.18)**. — *Soient* G' *et* G'' *des groupes algébriques,* $f : G \to G'$ *un morphisme surjectif et* $h : G' \to G''$ *un morphisme. Alors,* $h \circ f$ *est central* (resp. *quasi-central*) *si et seulement si* h *et* f *sont centraux* (resp. *quasi-centraux*).

Si $h\circ f$ est central (resp. quasi-central), le commutateur $G\times G\to G$ se factorise en tant que morphisme (resp. en tant qu'application) à travers $h(G')\times h(G')$. Cela implique qu'il se factorise aussi à travers $G'\times G'$, et que le commutateur $G'\times G'\to G'$ se factorise à travers $h(G')\times h(G')$; par conséquent, f et h sont centraux (resp. quasi-centraux). (N.B. Dans cette partie de la démonstration, le fait que G est réductif n'a pas été utilisé.)

Réciproquement, si f et h sont centraux (resp. quasi-centraux), ils possèdent la propriété (2.15) (iv) (resp. (2.11) (iii)) et il en est donc de même de $h\circ f$.

Corollaire **(2.19)**. — *Un morphisme surjectif* $f: G\to G'$ *est central si et seulement s'il est quasi-central et possède une factorisation* $f=f_m\circ\ldots\circ f_0$ *où* $f_0 : G\to G_1 = G/\mathrm{Ker} f$ *est la projection canonique de* G *sur* $G/\mathrm{Ker} f$, $f_i : G_i\to G_{i+1}=G_i/\mathfrak{m}_i$ $(0<i<m)$ *est la projection canonique du but* G_i *de* f_{i-1} *sur le quotient de* G_i *par un idéal* $\mathfrak{m}_i$ *de* $L(G_i)$ *centralisé par* G_i [1; § 17] *et* $f_m : G_m\to G'$ *est un isomorphisme.*

On sait que tout morphisme surjectif $f: G\to G'$ possède une factorisation $f=f_m\circ\ldots\circ f_0$ du type décrit dans l'énoncé, à cela près que $\mathfrak{m}_i$ n'est pas nécessairement centralisé par G_i. Vu (2.18), f est central si et seulement si les f_i le sont, c'est-à-dire si $\mathrm{Ker} f\subset \mathscr{Z}(G)$ et si $\mathfrak{m}_i$ est centralisé par G_i pour $0<i<m$ (cf. (2.13) et (2.15) (ii)).

Théorème **(2.20)**. — *Soient* G' *un k-groupe et* $f : G\to G'$ *un k-morphisme central surjectif.*

(i) *Les k-sous-groupes paraboliques de* G' (resp. G) *sont les images* (resp. *les images réciproques*) *par f des k-sous-groupes paraboliques de* G (resp. G').

(ii) *Les tores déployés sur k maximaux de* G' (resp. G) *sont les images* (resp. *les tores déployés maximaux des images réciproques*) *des tores déployés sur k maximaux de* G (resp. G').

(iii) *Soient* S *un tore déployé sur k maximal de* G *et* $f(S)=S'$. *Alors, f applique* $\mathscr{N}(S)$ (resp. $\mathscr{Z}(S)$) *sur* $\mathscr{N}(S')$ (resp. $\mathscr{Z}(S')$) *et induit un isomorphisme de* ${}_kW(G)=\mathscr{N}(S)/\mathscr{Z}(S)$ *sur* ${}_kW(G')=\mathscr{N}(S')/\mathscr{Z}(S')$. *L'homomorphisme* $(f|_S)^* : X^*(S')\to X^*(S)$ *applique* $\Phi(S', G')$ *isomorphiquement sur* $\Phi(S, G)$. *Si* $a'\in\Phi(S', G')$ *et* $a=(f|_S)^*(a')$, *alors f induit un isomorphisme de* $U_{(a)}$ *sur* $U'_{(a')}$.

Dans cet énoncé, $U_{(a)}$ est le groupe défini en [3; 5.2] et $U'_{(a')}$ est le sous-groupe analogue dans G'.

(i) Le seul point non évident est que l'image réciproque d'un k-sous-groupe parabolique est définie sur k. Mais cela résulte de (2.17).

(ii) Comme l'image d'un tore déployé sur k est déployée sur k, il suffit de montrer, compte tenu de (2.11), que tout tore X' déployé sur k maximal de G' est l'image d'un tore déployé sur k de G. Soit T' un k-tore maximal de G' contenant X' et soit T_d le tore déployé sur k maximal du tore $f^{-1}(T')$ (cf. (2.11)). Alors, vu [1; 8.15], $f(T_d)$ est le tore déployé sur k maximal de T', donc $f(T_d)=X'$.

(iii) On a $f(\mathscr{Z}(S))=\mathscr{Z}(S')$ d'après [2; 4.6], donc aussi $\mathscr{Z}(S)=f^{-1}(\mathscr{Z}(S'))$. Comme les automorphismes intérieurs de G associés aux éléments de $\mathscr{N}(S)$ permutent transitivement les k-sous-groupes paraboliques minimaux contenant S ([3; 5.9]) il résulte de (i) que les automorphismes intérieurs de G' associés aux éléments de $f(\mathscr{N}(S))$ permutent transitivement les k-sous-groupes paraboliques minimaux de G' contenant S'. D'après [3; 5.9], cela implique que $f(\mathscr{N}(S))=\mathscr{N}(S')$ et que f induit un isomorphisme de ${}_k W(G)$ sur ${}_k W(G')$.

Soient P, P^- deux k-sous-groupes paraboliques minimaux opposés de G d'intersection $\mathscr{Z}(S)$, et U, U^- leurs radicaux unipotents. Alors, $f(P)$ et $f(P^-)$ sont des k-sous-groupes paraboliques minimaux opposés de G', d'intersection $\mathscr{Z}(S')$ et ayant $f(U)$ et $f(U^-)$ pour radicaux unipotents. De plus, f induit un k-isomorphisme de U sur $f(U)$ et de U^- sur $f(U^-)$ ((2.15) (iii)). Les assertions restantes de l'énoncé résultent alors de ce que $\Phi(S, G)$ est la réunion des ensembles de poids de S dans U et U^-, que $U_{(a)}$ est le plus grand sous-groupe connexe X de G normalisé par S et tel que les poids de S dans X soient des multiples entiers positifs de a [3; 3.12], et qu'on a des caractérisations analogues pour $\Phi(S', G')$ et $U'_{(a')}$.

Corollaire **(2.21)**. — *Si la composante neutre de* $\mathrm{Ker} f$ *est un tore anisotrope sur* k, *on a* $\mathrm{rg}_k G=\mathrm{rg}_k G'$.

En effet, $(S\cap \mathrm{Ker} f)^0$ est alors un k-tore à la fois déployé et anisotrope sur k, donc réduit à $\{1\}$, et $\dim S=\dim f(S)$.

(2.22) Soient M, N deux sous-groupes fermés connexes distingués d'intersection finie de G. Alors, M et N se centralisent mutuellement, donc $M\cap N$ et $L(M)\cap L(N)$ sont centralisés par M.N. Par suite, si G est produit presque direct de k-sous-groupes fermés connexes $G_1, \ldots, G_n$, l'application produit $G_1\times \ldots \times G_n \to G$ est une k-isogénie *centrale*. Elle n'est pas nécessairement séparable, comme cela est implicitement admis dans la démonstration de [3; 4.27], mais cette démonstration subsiste si l'on remplace la référence à 4.25 par une référence à (2.20) ci-dessus. Le même raisonnement montre que si P est un k-sous-groupe parabolique de G, alors $P\cap G_i$ est un k-sous-groupe parabolique de G_i et P est produit presque direct des $P\cap G_i$. Réciproquement, si P_i est un k-sous-groupe parabolique de G_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, alors, le produit des P_i est un k-sous-groupe parabolique P de G. De plus, $R_u(P)$ est le produit direct des $R_u(P_i)$.

(2.23) Rappelons brièvement quelques faits concernant la classification des groupes semi-simples déployés et des isogénies entre tels groupes. Pour plus de détails, voir [5].

a) Soient Φ un système de racines réduit dans un espace vectoriel réel, $P(\Phi)$ le réseau des poids de Φ et $Q(\Phi)$ le réseau engendré par Φ. A tout réseau X intermédiaire entre $Q(\Phi)$ et $P(\Phi)$ correspond un et, à isomorphisme près, un seul système (H, T, φ) formé d'un k-groupe semi-simple H déployé sur k, d'un tore déployé maximal T de H et d'un isomorphisme $\varphi: X^*(T)\to X$ tel que $\varphi(\Phi(T, H))=\Phi$. Le groupe H, et plus généralement tout k-groupe semi-simple isomorphe à H sur $\bar{k}$, est dit *simplement connexe* (resp. *adjoint*) si $X=P(\Phi)$ (resp. $Q(\Phi)$). Pour qu'un groupe réductif G soit semi-simple et adjoint, il faut et il suffit que sa représentation adjointe $\mathrm{Ad}: G\to GL(L(G))$ soit une immersion, ou encore que $\mathscr{Z}(G)=\{1\}$ et $\mathscr{Z}_{L(G)}(G)=\{0\}$. Un groupe semi-simple simplement connexe ou adjoint est le produit direct de ses facteurs presque simples.

b) Soient H_1, H_2 des k-groupes semi-simples déployés sur k, T_i $(i=1, 2)$ un tore déployé sur k maximal de H_i et $\varphi : X^*(T_2)\rightarrow X^*(T_1)$ un monomorphisme. Posons $\Phi_i=\Phi(T_i, H_i)$. Pour qu'il existe une k-isogénie $f: H_1\rightarrow H_2$ telle que $f(T_1)=T_2$ et que $(f|_{T_1})^*=\varphi$, il faut et il suffit qu'il existe une bijection $\varphi' : \Phi_2\rightarrow\Phi_1$ telle que, pour tout $a\in\Phi_2$, on ait $\varphi(a)=\lambda(a).\varphi'(a)$, où $\lambda(a)$ est une puissance entière de l'exposant caractéristique de k. Lorsque cette condition est remplie, f est entièrement déterminé à la multiplication à droite près par un automorphisme de H_1 centralisant T_1. De plus, φ transforme le groupe de Weyl W_2 de Φ_2 en le groupe de Weyl W_1 de Φ_1, donc aussi toute forme bilinéaire sur $X^*(T_1)$ invariante par W_1 en une forme bilinéaire invariante par W_2. On en déduit aussitôt que φ, étendu par linéarité à $X^*(T_2)\otimes\mathbf{R}$, applique $P(\Phi_2)$ dans $P(\Phi_1)$.

Proposition **(2.24)**. — (i) *Soient* $f: G'\rightarrow G$ *une* k*-isogénie centrale,* G_1 *un* k*-groupe semi-simple simplement connexe et* $h : G_1\rightarrow G$ *un* k*-morphisme. Alors, il existe un morphisme* $h' : G_1\rightarrow G'$ *et un seul tel que* $h=f\circ h'$; *il est défini sur* k.

(ii) *Si* G *est semi-simple, il existe une* k*-isogénie centrale* $\widetilde{G}\rightarrow G$ *telle que* $\widetilde{G}$ *soit un* k*-groupe simplement connexe. Cette isogénie est unique à* G*-isomorphisme près.*

L'assertion d'unicité signifie que si, pour $i=1, 2$, $f_i : \widetilde{G}_i\rightarrow G$ est une k-isogénie centrale telle que $\widetilde{G}_i$ soit un k-groupe simplement connexe, il existe un k-isomorphisme $\alpha : \widetilde{G}_1\rightarrow\widetilde{G}_2$ tel que $f_1=f_2\circ\alpha$.

(i) Vu (2.17), le groupe $G''=f^{-1}(h(G_1))^0$ est défini sur k. Quitte à remplacer G par $h(G_1)$, G' par G'' et G_1 par $G_1/(\mathrm{Ker}\, h)^0$, nous pouvons supposer que G et G' sont semi-simples et que h est une isogénie. Vu (2.23) *b)*, il existe alors un k_s-morphisme $h' : G_1\rightarrow G'$ tel que $h=f\circ h'$. Ce morphisme est unique et défini sur k en vertu de (2.8).

(ii) A un k-isomorphisme près, le groupe G peut être obtenu en tordant un k-groupe semi-simple H déployé sur k par un cocycle ξ de $\mathrm{Aut}(k_s/k)$ à valeurs dans $\mathrm{Aut}_{k_s}H$. Soit $f: \widetilde{H}\rightarrow H$ une k-isogénie centrale telle que $\widetilde{H}$ soit un k-groupe simplement connexe. Une telle isogénie existe vu (2.23). De (i), il résulte que tout k_s-automorphisme de H « se relève » de façon unique en un k_s-automorphisme de $\widetilde{H}$. Cela étant, le groupe $\widetilde{G}$ et l'isogénie $\widetilde{G}\rightarrow G$ s'obtiennent en tordant $\widetilde{H}$ et f par ξ. L'unicité est une conséquence immédiate de (i) (et d'ailleurs aussi des principes généraux de la cohomologie galoisienne).

Définition **(2.25)**. — Si G est semi-simple, une (k)-isogénie centrale $\widetilde{G}\rightarrow G$ telle que $\widetilde{G}$ soit simplement connexe est appelée un $(k$-$)$*revêtement universel* de G.

Proposition **(2.26)**. — (i) *Soient* $f: G\rightarrow G'$ *une* k*-isogénie centrale,* G_1 *un* k*-groupe semi-simple adjoint et* $h : G\rightarrow G_1$ *un* k*-morphisme. Alors, il existe un morphisme* $h' : G'\rightarrow G_1$ *et un seul tel que* $h=h'\circ f$; *il est défini sur* k.

(ii) *Il existe un et, à G-isomorphisme près, un seul k-morphisme central surjectif de* G *sur un k-groupe semi-simple adjoint, à savoir, le morphisme canonique de* G *sur son image par la représentation adjointe* $\mathrm{Ad}: G \rightarrow GL(L(G))$.

(i) Pour montrer l'existence de h', on peut, vu (2.19), se borner à considérer le cas où f est la projection canonique de G sur un quotient, soit par un sous-groupe fermé central, soit par un idéal de L(G) centralisé par G. Mais alors, cette existence résulte de la propriété universelle du quotient. Le morphisme h' est évidemment unique, puisque f est surjectif. Enfin, h' est défini sur k en vertu de (2.8).

(ii) On sait que Ad G est un groupe adjoint (il suffit de le vérifier pour G déployé). Le noyau de L(Ad) est le centre de L(G), donc (2.15) Ad est un morphisme central. Enfin, l'unicité est une conséquence immédiate de (i).

3. Décomposition de Bruhat.

Dans ce paragraphe, nous donnons diverses propriétés des doubles classes de la décomposition de Bruhat et des produits de deux telles doubles classes. En particulier, nous décrivons l'adhérence dans G_k d'une double classe pour la topologie de Zariski et nous montrons que si k est un corps topologique non discret, le même résultat est valable pour la topologie associée à celle de k.

(3.1) On fixe un tore déployé sur k maximal S de G et un k-sous-groupe parabolique minimal P contenant S; on pose $\Phi = \Phi(S, G)$, $\Phi^+ = \Phi(S, P)$, $\Phi^- = -\Phi^+ = \Phi - \Phi^+$, $\Phi_0 = \{a \in \Phi \mid a/2 \notin \Phi\}$, $\Phi_0^{\pm} = \Phi^{\pm} \cap \Phi_0$, $W = \mathscr{N}(S)/\mathscr{Z}(S) = \mathscr{N}(S)_k/\mathscr{Z}(S)_k = W(S, G)$. Selon les circonstances, un élément de W sera considéré comme une classe latérale de $\mathscr{Z}(S)$ dans $\mathscr{N}(S)$, comme une classe latérale de $\mathscr{Z}(S)_k$ dans $\mathscr{N}(S)_k$ ou comme une transformation linéaire du dual de $X^*(S) \otimes \mathbf{R}$. Si X est une partie de G normalisée par $\mathscr{Z}(S)_k$, on pose $w(X) = nXn^{-1}$, où n désigne un représentant quelconque de w dans $\mathscr{N}(S)_k$. On note Δ la base de Φ contenue dans Φ^+ et $\sigma : \Delta \rightarrow W$ l'application canonique qui envoie une « racine simple » sur la réflexion correspondante. La projection canonique $G \rightarrow G/P$ est désignée par π. Pour $w \in W$, $\ell(w)$ représente la « longueur » de w, c'est-à-dire le plus petit entier q tel que w puisse s'écrire comme produit de q éléments de $\sigma(\Delta)$. Une suite $(s_1, \ldots, s_q)$, $(q = \ell(w))$ d'éléments de $\sigma(\Delta)$ telle que $w = s_1 \ldots s_q$ est appelée une *décomposition réduite* de w.

(3.2) Pour $w \in W$, nous désignons par Ψ_w l'ensemble $w(\Phi_0^-) \cap \Phi^+$. On a $w(\Phi_0^-) = \Psi_w \cup (\Phi_0^- \cap \complement(-\Psi_w))$, donc l'élément w de W est déterminé par l'ensemble Ψ_w, vu [4; 3.3, Th. 1]. Pour $w, w' \in W$, on a

(1) $$\Psi_w \cap w(\Psi_{w'}) = \emptyset,$$

(2) $$\Psi_{ww'} \subset \Psi_w \cup w(\Psi_{w'}),$$

(3) $$\mathrm{Card}\, \Psi_w = \ell(w).$$

Les relations (1), (2) sont immédiates et (3) résulte de [4; Cor. 2, p. 158].

Pour $w \in W$, nous posons $C(w) = PwP$ et $U_w = \prod_{a \in \Psi_w} U_{(a)}$ (dans [3], U_w est noté U'_w) ; ce dernier produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs et, quel que soit cet ordre, l'application produit du produit direct des $U_{(a)}$ $(a \in \Psi_w)$ dans U_w est un k-isomorphisme de variétés [3; 3.11]. D'autre part, on déduit facilement de [3; 4.10] que si $w \in W$ et si $n \in N(S)_k$ est un représentant de w, alors l'application produit définit un k-isomorphisme de variétés

$$(4) \qquad (U_w . n) \times P \rightarrow U_w . w . P = C(w).$$

En particulier, $\pi(C(w))$ est k-isomorphe à l'espace affine U_w et

$$(5) \qquad C(w)_k = P_k . w . P_k = U_{w,k} . w . P_k.$$

Remarque **(3.3).** — Le groupe G_k est réunion disjointe des $C(w)_k$ [3; 5.16] mais G n'est réunion des $C(w)$ que s'il est déployé sur k (*i.e.*, si S est un tore maximal de G). Si G est quasi-déployé sur k, autrement dit si P est un sous-groupe de Borel de G, les $C(w)$ sont les doubles classes de P dans G qui sont définies sur k; en effet, $\mathscr{Z}(S) = T$ est alors un tore maximal de G, toute double classe de P dans G est de la forme $P . w' . P$ avec $w' \in \overline{W} = N(T)/T$, et l'on sait qu'un élément de $\overline{W}$ appartient à W si et seulement s'il est invariant par le groupe de Galois d'un corps normal de déploiement de G opérant sur $\overline{W}$ de la façon évidente (cf. [3; 6.11]). Enfin, dans tous les cas, les $C(w)$ sont les doubles classes de P dans G qui possèdent des points rationnels sur k, mais une double classe peut être définie sur k sans pour autant posséder de tels points.

Lemme **(3.4).** — *Les conditions*

$$\text{(i)} \qquad \ell(w . w') = \ell(w) + \ell(w')$$

$$\text{(ii)} \qquad \Psi_{ww'} = \Psi_w \cup w(\Psi_{w'}),$$

sont équivalentes. Lorsqu'elles sont remplies, on a

$$\text{(iii)} \qquad C(w) . C(w') = C(w . w')$$

$$\text{(iv)} \qquad C(w)_k . C(w')_k = C(w . w')_k.$$

Plus précisément, l'application produit $C(w) \times C(w') \rightarrow C(w . w')$ *identifie* $C(w . w')$ *au « produit fibré », quotient de* $C(w) \times C(w')$ *par* P *opérant par* $(g, g') . p = (g . p, p^{-1} . g')$ *pour* $(g \in C(w), g' \in C(w'), p \in P)$.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte de (3.2) (1), (2), (3). Supposons-les remplies et soient n, n' des représentants de w, w' dans $N(S)_k$. Vu (ii) et (3.2), l'application produit

$$U_w . n \times U_{w'} . n' \rightarrow U_{ww'} . nn'$$

est un k-isomorphisme de variétés. Il en est alors de même de l'application produit

$$(U_w . n) \times C(w') \rightarrow C(w . w')$$

ce qui démontre (iii), (iv). D'autre part, l'application $P \times C(w') \to C(w') \times P$ qui applique (p, g') sur (pg', p) est un isomorphisme de variétés. Par conséquent, l'application $\alpha : C(w) \times C(w') \to C(ww') \times P$ définie par

$$\alpha(unp, g') = (unpg', p) \qquad (u \in U_w\,;\, p \in P\,;\, g' \in C(w'))$$

en est aussi un et la dernière assertion de l'énoncé résulte à présent de ce que l'application produit $C(w) \times C(w') \to C(ww')$ est composée de α et de la première projection du produit $C(ww') \times P$.

Remarque. — On verra plus loin (3.18) que (iii) est équivalente à (i), (ii).

(3.5) Soient $a \in \Delta$, $s = \sigma(a)$ et $w \in W$. Vu [3; 5.16] et [4, p. 23 et Th. 2, p. 25], on a

$$C(w)_k . C(s)_k = C(w.s)_k \qquad \text{si} \quad \ell(w.s) > \ell(w), \tag{1}$$

$$C(w)_k . C(s)_k = C(w.s)_k \cup C(w)_k \qquad \text{si} \quad \ell(w.s) < \ell(w). \tag{2}$$

On a évidemment $\ell(w.s) > \ell(w)$ si et seulement si $\ell(ws) = \ell(w) + \ell(s) = \ell(w) + 1$, donc (1) est aussi un cas particulier de (3.4) (iv) (et l'entraîne par une récurrence immédiate). De même, (3.4) (iii) entraîne

$$C(w) . C(s) = C(w.s) \qquad \text{si} \quad \ell(ws) > \ell(w). \tag{3}$$

La double classe $C(s)$ est ouverte dans le sous-groupe parabolique standard $P_{\{s\}}$ de G (cf. [3; 5.12] ou (3.6) ci-dessous pour la notation). On a donc, en notant par une barre l'adhérence en topologie de Zariski,

$$P_{\{s\}} = \overline{C(s)} = C(s) . C(s) \supset C(s) \cup P. \tag{4}$$

En multipliant les trois derniers membres de (4) à gauche par $C(ws)$ et en tenant compte de (3), on en déduit :

$$\overline{C(w)} \supset C(w) . C(s) \supset C(w) \cup C(ws) \qquad \text{si} \quad \ell(ws) < \ell(w). \tag{5}$$

(3.6) Pour toute partie θ de Δ, nous notons W_θ le sous-groupe de W engendré par $\sigma(\theta)$, et P_θ ou $P_{\sigma(\theta)}$ le k-sous-groupe parabolique « standard » engendré par P et W_θ (*i.e.*, défini par $P_{\theta, k} = P_k . W_\theta . P_k$; on n'a pas, en général, $P_\theta = P . W_\theta . P$, cf. (3.3)), P_θ^- le sous-groupe parabolique opposé à P_θ et contenant $\mathscr{Z}(S)$, $\Phi_{0,\theta}$ l'ensemble des éléments de Φ_0 qui sont combinaisons linéaires d'éléments de θ, et nous posons

$$\Phi_{0,\theta}^{\pm} = \Phi_{0,\theta} \cap \Phi^{\pm},$$

$$\widetilde{\Phi}_{0,\theta}^{\pm} = \Phi_0 \cap \Phi(S, R_u P_\theta^{\pm}) = \Phi_0^{\pm} - \Phi_{0,\theta}^{\pm}.$$

Lemme **(3.7)**. — *Soit* $n \in \mathbf{N}^*$. *Pour* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *soient* θ_i *une partie de* Δ *et* w_i *un élément de* W_{θ_i}. *Posons* $w = w_1 \ldots w_n$. *Alors, il existe* $w_i' \in W_{\theta_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *tels que*

$$\ell(w_i') \leqslant \ell(w_i), \qquad w = w_1' \ldots w_n' \qquad \textit{et} \qquad \ell(w) = \sum_{i=1}^{n} \ell(w_i').$$

C'est une conséquence immédiate de la « condition d'échange » caractérisant les groupes de Coxeter ([4; chap. IV, n° 1.5]).

Lemme **(3.8)**. — *Soient* P_1 *un k-sous-groupe parabolique minimal de* G *et* P_2 *un k-sous-groupe parabolique quelconque. Alors* $P_3 = (P_1 \cap P_2) . R_u(P_2)$ *est un k-sous-groupe parabolique minimal.*

On sait [3; 4.4, 4.7] que P_3 est un k-sous-groupe parabolique. Pour voir qu'il est minimal, il suffit d'observer que si S' est un tore déployé maximal contenu dans $P_1 \cap P_2$ [3; 4.18] et si $a \in \Phi(S', G)$, $U_{(a)}$ et $U_{(-a)}$ ne peuvent être contenus simultanément dans P_3.

Proposition **(3.9)**. — *Soient* $w \in W$ *et* $\theta \subset \Delta$. *Alors il existe une décomposition unique* $w = \widetilde{w}_\theta . w_\theta$ *possédant les propriétés suivantes et caractérisée par chacune d'elles :*

(i) $\widetilde{w}_\theta$ *est l'unique élément de longueur minimum dans* $w . W_\theta$;

(ii) $\Psi_{\widetilde{w}_\theta} = w(\widetilde{\Phi}^-_{0,\theta}) \cap \Phi^+$;

(iii) $\Psi_{w_\theta^{-1}} = w^{-1}(\Phi^-_0) \cap \Phi^+_\theta$;

(iv) $w_\theta^{-1}(P) = (w^{-1}(P) \cap P_\theta) . R_u(P_\theta)$.

On a $w_\theta \in W_\theta$ *et*

$$\ell(w) = \ell(\widetilde{w}_\theta) + \ell(w_\theta). \tag{1}$$

(N.B. — L'existence d'un unique élément de longueur minimum dans $w . W_\theta$ est une propriété générale bien connue des systèmes de Coxeter (cf. p. ex. [4; chap. IV, ex. 3 du § 1]). Nous la redémontrons ici dans le cas qui nous intéresse.)

Le produit $(w^{-1}(P) \cap P_\theta) . R_u(P_\theta)$ étant un k-sous-groupe parabolique minimal (3.8), il existe un unique élément $w_\theta \in W$ satisfaisant à (iv), et cet élément appartient à W_θ puisque $w_\theta^{-1}(P) \subset P_\theta$.

La relation (iv) peut aussi s'écrire

$$w_\theta^{-1}(\Phi^+_0) = (w^{-1}(\Phi^+_0) \cap \Phi_\theta) \cup \widetilde{\Phi}^+_{0,\theta},$$

ou encore

$$w_\theta^{-1}(\Phi^-_0) = (w^{-1}(\Phi^-_0) \cap \Phi_\theta) \cup \widetilde{\Phi}^-_{0,\theta}, \tag{2}$$

d'où on déduit la relation (iii), qui caractérise aussi w_θ, vu (3.2).

Soit w'' un élément quelconque de W_θ. Posons $w' = ww''$. On a alors

$$\Psi_{w'} = ww''(\Phi^-_{0,\theta} \cup \widetilde{\Phi}^-_{0,\theta}) \cap \Phi^+ = (ww''(\Phi^-_{0,\theta}) \cap \Phi^+) \cup (w(\widetilde{\Phi}^-_{0,\theta}) \cap \Phi^+).$$

Les deux termes du dernier membre sont disjoints, le second ne dépend pas de w'' et il résulte de (2) que le premier est vide si et seulement si $w'' = w_\theta^{-1}$. Les propriétés (i) et (ii) s'ensuivent. Enfin, (1) est une conséquence immédiate de (i) et (3.7) (ou, si l'on préfère, de (ii), (iii) et (3.2) (3), par un calcul facile).

Corollaire **(3.10)**. — *Soient* $\theta, \theta_0 = \emptyset, \theta_1, \ldots, \theta_n$ *des parties de* Δ *et* $w \in W$.

(i) *Si* $w \in W_{\theta_1} \ldots W_{\theta_n}$, *alors* $\widetilde{w}_{\theta_n} \in W_{\theta_1} \ldots W_{\theta_{n-1}}$.

(ii) *Soient* $g \in P_k w P_k$ *et* $h \in G_k$. *Supposons que* $h^{-1}Ph = (g^{-1}Pg \cap P_\theta) . R_u P_\theta$. *Alors* $gh^{-1} \in P_k . \widetilde{w}_\theta . P_k$.

(i) résulte de (3.7) et (3.9) (i). Démontrons (ii). Posons $g' = gh^{-1}$ et soit $u \in W$ tel que $g' \in P_k u P_k$. Comme $hPh^{-1} \in P_\theta$, on a $h \in P_\theta$ [3; 5.18], par conséquent

$$g = g'h \in P_k u P_k W_\theta P_k \subset P_k u W_\theta P_k$$

(vu (3.5) (1) et (2) et [3; 5.20]), d'où $w \in uW_\theta$ et $\widetilde{w}_\theta = \widetilde{u}_\theta$. D'autre part, l'hypothèse peut s'écrire $P = (g'^{-1}Pg' \cap P_\theta) \cdot R_u(P_\theta)$, ce qui veut dire que $u_\theta = 1$, vu (3.9) (iv). On a donc $u = \widetilde{u}_\theta = \widetilde{w}_\theta$, c.q.f.d.

Proposition **(3.11)**. — *Soient* $P_1, \ldots, P_n$ *des k-sous-groupes paraboliques de* G *contenant* P. *Alors* $(P_1 \ldots P_n)_k = P_{1,k} \ldots P_{n,k}$.

Soient T un tore maximal de P contenant S et B un sous-groupe de Borel de P contenant T. Posons $\overline{\Phi} = \Phi(T, G)$, $\overline{\Phi}^+ = \Phi(T, B)$ et $\overline{W} = {}_{\bar{k}}W = \mathcal{N}(T)/T$. Soit $\overline{\Delta}$ la base de $\overline{\Phi}$ contenue dans $\overline{\Phi}^+$. Pour $\theta \subset \overline{\Delta}$ et $w \in \overline{W}$, nous définissons P_θ, W_θ, $\widetilde{w}_\theta$, w_θ comme en (3.6) et (3.9). Soit $\theta_i \subset \overline{\Delta}$ tel que $P_i = P_{\theta_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Nous allons montrer par récurrence sur n que si $g \in (P_1 \ldots P_n)_k$, alors $g \in P_{1,k} \ldots P_{n,k}$. Soit $w \in \overline{W}$ tel que $g \in BwB$. On a $w \in \overline{W}_{\theta_1} \ldots \overline{W}_{\theta_n}$, d'où $\widetilde{w}_{\theta_n} \in W_{\theta_1} \ldots W_{\theta_{n-1}}$ vu (3.10) (i). D'après (3.8), $P' = (g^{-1}Pg \cap P_n) . R_u P_n$ est un k-sous-groupe parabolique minimal de G contenu dans P_n, donc il existe $h \in P_{n,k}$ tel que $h^{-1}Ph = P'$. Mais alors $gh^{-1} \in B\widetilde{w}_{\theta_n}B \subset P_1 \ldots P_{n-1}$ vu (3.10) (ii) et notre assertion résulte de l'hypothèse de récurrence.

Lemme **(3.12)**. — *Soient* Q *et* R *deux sous-groupes paraboliques et* M *une partie fermée de* G. *Supposons que* $Q \subset R$ *et que* $MQ = M$. *Alors* MR *est fermé.*

Comme G/Q est une variété complète, la projection canonique $G/Q \to G/R$ est propre, donc fermée. D'autre part, les projections canoniques de G sur G/Q et G/R sont ouvertes, donc une partie de G/Q ou G/R est fermée si et seulement si son image inverse dans G l'est; d'où le lemme.

Théorème **(3.13)**. — *Supposons k infini. Soit* $w \in W$ *et soit* $(s_1, \ldots, s_l)$ *une décomposition réduite de w. Alors, l'ensemble* $A_w = \{s_{i_1} \ldots s_{i_m} \mid m \in \mathbf{N}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant \ell\}$ *ne dépend que de w et non de la décomposition réduite choisie, et on a, en notant par une barre l'adhérence pour la topologie de Zariski,*

$$(1) \qquad (\overline{C(w)})_k = \overline{C(w)_k} \cap G_k = \bigcup_{w' \in A_w} C(w')_k.$$

Il suffit évidemment d'établir les relations (1).

Vu [3; 3.20], on a $\overline{U_{w,k}} = U_w$ et $\overline{P_k} = P$, donc, compte tenu de (3.2) (4), $\overline{C(w)_k} = \overline{C(w)}$, ce qui établit la première égalité de (1).

Pour $X \subset G_k$, notons $A(X) = \overline{X} \cap G_k$ l'adhérence relative de X dans G_k. C'est une propriété connue de la topologie de Zariski que $\overline{A.B} \supset \overline{A}.\overline{B}$ quels que soient $A, B \subset G$. Par conséquent, si $X_1, \ldots, X_s$ sont des parties de G_k, on a

$$(2) \qquad A(X_1 \ldots X_s) = A(\prod_{1 \leq i \leq s} A(X_i)).$$

Posons $P_i = P_{\{s_i\}}$ $(1 \leq i \leq m)$. Il résulte de (3.12), par récurrence sur j, que le produit $P_1 \ldots P_j$ est fermé pour tout $j \leq m$. On a donc, compte tenu de (3.11),

$$(3) \qquad A(\prod_{i=1}^{m} P_{i,k}) = \prod_{i=1}^{m} P_{i,k}.$$

D'autre part, vu la première égalité (1), déjà établie, on a aussi

$$(4) \qquad A(C(s_i)_k) = P_{i,k} = C(s_i)_k \cup P_k.$$

Utilisant (2) et (3.4), on en déduit que

$$A(C(w)_k) = A(\prod_{i=1}^{m} C(s_i)_k) = A(\prod_{i=1}^{m} A(C(s_i)_k)) = \prod_{i=1}^{m} P_{i,k} = \prod_{i=1}^{m} (C(s_i)_k \cup P_k);$$

or le dernier membre de cette égalité n'est autre que le dernier membre de (1), vu (3.5) (1), (2). Le théorème est démontré.

Proposition **(3.14)**. — *Supposons* G_k *muni d'une topologie* $\mathscr{E}$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathscr{E}$ *est plus fine que la topologie induite par la topologie de Zariski.*

(ii) *L'application produit* $G_k \times G_k \to G_k$ *est continue,* $G_k \times G_k$ *étant muni de la topologie produit.*

(iii) *Pour tout* $a \in \Delta$, *le groupe* P_k *n'est pas ouvert dans* $P_{\{a\},k}$.

Alors l'adhérence de $C(w)_k$ *pour* $\mathscr{E}$ *coïncide avec son adhérence relative* $\overline{C(w)_k} \cap G_k$ *pour la topologie de Zariski, décrite en* (3.13).

Dans la démonstration de (3.13), la topologie de Zariski est intervenue uniquement par l'intermédiaire des propriétés (2), (3), (4). Il suffit donc de voir qu'elles sont satisfaites par la topologie $\mathscr{E}$. Les relations (2) et (3) pour $\mathscr{E}$ résultent évidemment de (ii) et (i) respectivement. Soient $a \in \Delta$ et $s = \sigma(a)$. Si P_k n'est pas ouvert dans $P_{\{a\},k}$ alors $A(C(s)_k) \cap P_k \neq \emptyset$ et l'on a, compte tenu de (ii),

$$A(C(s)_k) = A(P_k . C(s)_k) \supset P_k . A(C(s)_k) \supset P_k,$$

d'où (3.13) (4) pour $\mathscr{E}$.

Corollaire **(3.15)**. — *Supposons* k *muni d'une topologie* $\mathscr{S}$ *non discrète (satisfaisant à l'axiome* T_1) *qui en fait un anneau topologique. Alors l'adhérence de* $C(w)_k$ *pour la topologie* $\mathscr{E}$ *sur* G_k *associée à* $\mathscr{S}$ *coïncide avec son adhérence relative pour la topologie de Zariski, décrite en* (3.13).

Rappelons que $\mathscr{E}$ est la topologie la moins fine telle que les fonctions $G_k \to k$ restrictions de fonctions k-régulières sur G soient continues. Elle satisfait évidemment à (3.14) (i), (ii). De plus, comme k n'est pas discret et $U_{(-a),k}$ est un espace affine sur k, l'ensemble $\{1\} = P_k \cap U_{(-a),k}$ n'est pas ouvert dans $U_{(-a),k}$, donc (3.14) (iii) est aussi satisfaite. On peut donc appliquer (3.14).

Remarque. — Pour k algébriquement clos, (3.13) a aussi été obtenu par C. Chevalley (manuscrit non publié). Pour $k=\mathbf{C}$ muni de sa topologie usuelle, (3.15) est démontré dans [9; p. 107].

Proposition **(3.16).** — *On conserve les notations de* (3.6), (3.9) *et l'on pose* $\widetilde{W}_\theta=\{\widetilde{w}_\theta \mid w\in W\}$. *Soient* $\theta\subset\Delta$, $w\in W$, *et notons* π_θ *la projection canonique de* G *sur* G/P_θ.

(i) *Pour tout* $w\in W$, *on a* $PwP_\theta=P\widetilde{w}_\theta P_\theta$ *et* $\pi_\theta(C(w))=\pi_\theta(C(\widetilde{w}_\theta))$.

(ii) *Les applications canoniques* $\pi(C(w))\to\pi_\theta(C(\widetilde{w}_\theta))$ *et* $\pi(C(w))_k\to\pi_\theta(C(\widetilde{w}_\theta))_k$ *sont surjectives. Chacune d'elle est injective si et seulement si* $w\in\widetilde{W}_\theta$, *auquel cas* $\pi(C(w))\to\pi_\theta(C(w))$ *est un k-isomorphisme de variétés.*

(iii) *On a* $(C(w).P_\theta)_k=C(w)_k.P_{\theta,k}$.

(iv) *Si* w', w'' *sont des éléments distincts de* $\widetilde{W}_\theta$, *on a* $\pi_\theta(C(w'))\cap\pi_\theta(C(w''))=\emptyset$. *Les* $\pi_\theta(C(x))_k$, *pour* $x\in\widetilde{W}_\theta$, *forment une partition de* $(G/P_\theta)_k$.

Les relations (i) résultent de (3.9).

Soient n, $\widetilde{n}_\theta$, n_θ des représentants de w, $\widetilde{w}_\theta$, w_θ dans $\mathcal{N}(S)_k$. L'ensemble $X=\widetilde{n}_\theta.U_{w_\theta,k}.n_\theta$, qui est contenu dans $C(\widetilde{w}_\theta)_k.C(w_\theta)_k=C(w)_k$, est appliqué injectivement dans $\pi(C(w))_k$ par π, et on a $\pi_\theta(X)=\{\widetilde{n}_\theta.P_\theta\}$; donc si l'application $\pi(C(w))_k\to\pi_\theta(C(\widetilde{w}_\theta))_k$ est injective, on a $U_{w_\theta}=\{1\}$, d'où $w_\theta=\{1\}$ et $w\in\widetilde{W}_\theta$. Les autres assertions de (ii) et (iii) résultent immédiatement des relations

$$U_{\widetilde{w}_\theta}.n\subset C(w),\qquad U_{\widetilde{w}_\theta}.n.P_\theta=C(w).P_\theta,$$

et du fait que, comme $n^{-1}.U_{\widetilde{w}_\theta}.n\subset R_u(P_\theta^-)$ (vu (3.9) (ii)), l'application produit $(U_{\widetilde{w}_\theta}.n)\times P_\theta\to C(w).P_\theta$ est un k-isomorphisme de variétés, en vertu de [3; 4.10].

Soient $w', w''\in\widetilde{W}_\theta$. Si $\pi_\theta(C(w'))\cap\pi_\theta(C(w''))\neq\emptyset$, cela signifie que les doubles classes $C(w').P_\theta=Pw'P_\theta$ et $C(w'').P_\theta=Pw''P_\theta$ ont une intersection non vide, donc coïncident. Vu (iii), on a alors $P_kw'P_{\theta,k}=P_kw''P_{\theta,k}$, d'où $w'\in w''W_\theta$ (cf. [3; 5.20]). Comme w' et w'' appartiennent à $\widetilde{W}_\theta$, cela implique qu'ils sont égaux. La dernière assertion de (iv) résulte à présent de (i), de la relation $G_k=P_kWP_k$ et de la surjectivité de $G_k\to(G/P_\theta)_k$ [3; 3.25].

Corollaire **(3.17).** — *Pour* $w\in W$ *et* $s\in\sigma(\Delta)$, *on a* $(C(w).C(s))_k=C(w)_k.C(s)_k$.

Si $\ell(ws)=\ell(w)+1$, cela résulte de (3.4). Sinon, on a, compte tenu de (3.16) (iii) et (3.5) (2),

$$\begin{aligned}(C(w).C(s))_k\subset(C(w).P_{\{s\}})_k=C(w)_k.P_{\{s\},k}&=C(w)_k.(C(s)_k\cup P_k)\\&=C(w)_k.C(s)_k\cup C(w)_k=C(w)_k.C(s)_k\subset(C(w).C(s))_k.\end{aligned}$$

Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques sur le produit de deux cellules $C(w)$, $C(w')$ lorsque $\ell(w.w')$ n'est pas nécessairement égal à $\ell(w)+\ell(w')$.

Proposition **(3.18).** — *Soient* $w, w'\in W$, $\ell'=\ell(w')$ *et* $(s_1,\ldots,s_{\ell'})$ *une décomposition réduite de* w'. *Soit* $i_0,\ldots,i_m$ *la suite d'indices définie récursivement par les propriétés sui-*

vantes : $0 = i_0 < \ldots < i_m \leq \ell'$ *et, pour* $q \geq 1$, i_q *est le plus petit entier* $h \in [i_{q-1}+1, \ell']$ *tel que* $\ell(ws_{i_1} \ldots s_{i_{q-1}} s_h) > \ell(ws_{i_1} \ldots s_{i_{q-1}})$. *Posons* $w'' = s_{i_1} \ldots s_{i_m}$. *Alors*

$$(1) \qquad \ell(w'') = m, \qquad \ell(w \, . \, w'') = \ell(w) + \ell(w'')$$

$$(2) \qquad C(ww'') \subset C(w) \, . \, C(w') \subset \overline{C(w) \, . \, C(w')} = \overline{C(ww'')},$$

et w'' *est le seul élément de* W *satisfaisant aux relations* (2). *On a* $w' = w''$ *si et seulement si* $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$.

Les relations (1) sont évidentes par construction, et (2) se déduit immédiatement de (3.5) (3), (5) en raisonnant par récurrence sur ℓ'. Pour établir l'unicité de w'', il suffit de remarquer que toute double classe PgP étant ouverte et dense dans son adhérence, deux doubles classes distinctes ont des adhérences distinctes. La dernière assertion est conséquence immédiate de la définition de w''.

Remarques **(3.19)**. — *a)* Conservons les notations de (3.18). Soit J l'ensemble des suites $(j_0, \ldots, j_m)$ telles que $0 = j_0 < \ldots < j_m \leq \ell'$ et que, pour $q \geq 1$, j_q soit *inférieur* au plus petit entier $h \in [j_{q-1}+1, \ell']$ tel que $\ell(ws_{j_1} \ldots s_{j_{q-1}} s_h) > \ell(ws_{j_1} \ldots s_{j_{q-1}})$, et posons

$$X(w, w') = \{ws_{j_1} \ldots s_{j_m} \mid (0, j_1, \ldots, j_m) \in J\}.$$

Alors, il résulte de (3.5) (1) et (3.5) (2) que

$$(1) \qquad C(w)_k . C(w')_k = \bigcup_{x \in X(w, w')} C(x)_k.$$

En particulier, l'ensemble $X(w, w')$ ne dépend pas de la décomposition réduite de w' choisie — ce qui justifie la notation *a posteriori* — et l'on a

$$(2) \qquad X(w, w')^{-1} = X(w'^{-1}, w^{-1}).$$

L'ensemble $X(w, w')$ possède un unique élément de longueur maximum, à savoir ww''.

b) On peut montrer que si w, w' sont des éléments d'un groupe de Coxeter quelconque, l'ensemble $X(w, w')$ défini comme en *a)* à partir d'une décomposition réduite de w' ne dépend pas de cette décomposition, possède un unique élément de longueur maximum et satisfait à la relation (2). De plus, la première assertion de (3.13) est valable dans ce cas, et l'on a $X(w, w') \subset A_x$, où x désigne l'élément de longueur maximum de $X(w, w')$.

4. Le groupe fondamental de certains sous-groupes semi-simples.

(4.1) *Poids fondamentaux spéciaux.* — Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$, Φ un système de racines dans V et $\check{\Phi}$ le système de racines inverse de Φ dans le dual V' de V [4; VI, 1.1]; par définition, $P(\Phi)$ (resp. $P(\check{\Phi})$) s'identifie au dual de $Q(\check{\Phi})$ (resp. $Q(\Phi)$) [4; VI, 1.9] (pour les notations P( ), Q( ), cf. (2.23) *a)*); les groupes abéliens finis $P(\Phi)/Q(\Phi)$ et $P(\check{\Phi})/Q(\check{\Phi})$ sont en dualité sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, donc isomorphes.

Supposons Φ irréductible et réduit et soient Δ une base de Φ, $d = \sum_{a \in \Delta} m_a . a$ la racine dominante correspondante, $\overline{\omega}_a$ $(a \in \Delta)$ le « poids fondamental » de $\check{\Phi}$ correspondant à a, c'est-à-dire l'élément de V' défini par

$$\langle \overline{\omega}_a, b \rangle = \delta_{ab} \qquad (a, b \in \Delta)$$

et J l'ensemble des éléments a de Δ tels que $m_a = 1$. On sait alors [4; VI, 2.4, corollaire] que $\{0\} \cup \{\overline{\omega}_a \mid a \in \mathrm{J}\}$ est un système de représentants de $\mathrm{P}(\check{\Phi})/\mathrm{Q}(\check{\Phi})$ dans $\mathrm{P}(\check{\Phi})$.

Lemme **(4.2)**. — *Si Φ est un système de racines irréductible non réduit, et si Φ^{nm} est le système de racines formé par les éléments non multipliables de Φ, on a*

$$\mathrm{P}(\Phi^{\mathrm{nm}}) = \mathrm{P}(\Phi) = \mathrm{Q}(\Phi).$$

En effet, Φ et Φ^{nm} sont alors respectivement de type BC et de type C. On a donc $[\mathrm{P}(\Phi^{\mathrm{nm}}) : \mathrm{Q}(\Phi^{\mathrm{nm}})] = 2$. D'autre part, $\mathrm{Q}(\Phi^{\mathrm{nm}}) \subsetneq \mathrm{Q}(\Phi)$; en effet, une racine multipliable $a \in \Phi$ ne peut appartenir à Φ^{nm} puisque $2a$ est une racine et donc un élément primitif de $\mathrm{Q}(\Phi^{\mathrm{nm}})$. Notre assertion résulte alors des inclusions évidentes

$$\mathrm{Q}(\Phi) \subset \mathrm{P}(\Phi) \subset \mathrm{P}(\Phi^{\mathrm{nm}}).$$

Proposition **(4.3)**. — *Supposons* G *semi-simple. Soient* G_1 *un sous-groupe semi-simple de* G, T *un tore maximal de* G *contenant un tore maximal* T_1 *de* G_1 *et* $r : \mathrm{X}^*(\mathrm{T}) \otimes \mathbf{Q} \to \mathrm{X}^*(\mathrm{T}_1) \otimes \mathbf{Q}$ *l'application linéaire prolongeant l'épimorphisme de restriction* $\mathrm{X}^*(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}^*(\mathrm{T}_1)$. *Posons* $\Phi = \Phi(\mathrm{T}, \mathrm{G})$ *et* $\Phi_1 = \Phi(\mathrm{T}_1, \mathrm{G}_1)$. *Supposons que l'ensemble* $r(\Phi)^{\times}$ *des éléments non nuls de* $r(\Phi)$ *soit un système de racines dont* Φ_1 *est l'ensemble des éléments non multipliables, et que* Φ_1 *possède une base* Δ *telle que* $\Delta_1 = r(\Delta) \cap r(\Phi)^{\times}$ *soit une base de* $r(\Phi)^{\times}$. *Alors*

(i) $r(\mathrm{Q}(\Phi)) = \mathrm{Q}(r(\Phi)^{\times})$.

(ii) $r(\mathrm{P}(\Phi)) = \mathrm{P}(r(\Phi)^{\times}) = \mathrm{P}(\Phi_1)$.

(iii) *L'application* r *induit un épimorphisme de* $\mathrm{P}(\Phi)/\mathrm{X}^*(\mathrm{T})$ *sur* $\mathrm{P}(\Phi_1)/\mathrm{X}^*(\mathrm{T}_1)$.

La relation (i) est évidente, et (iii) est conséquence immédiate de (ii). Démontrons donc (ii).

Il existe un groupe simplement connexe $\widetilde{\mathrm{G}}$ et une isogénie centrale $\widetilde{\mathrm{G}} \to \mathrm{G}$. Quitte à remplacer G par $\widetilde{\mathrm{G}}$ et G_1, T, T_1 par les composantes neutres de leurs images réciproques dans $\widetilde{\mathrm{G}}$, nous pouvons supposer G simplement connexe, c'est-à-dire $\mathrm{P}(\Phi) = \mathrm{X}^*(\mathrm{T})$. On a alors

$$r(\mathrm{P}(\Phi)) = r(\mathrm{X}^*(\mathrm{T})) = \mathrm{X}^*(\mathrm{T}_1) \subset \mathrm{P}(\Phi_1). \tag{1}$$

L'égalité $\mathrm{P}(\Phi_1) = \mathrm{P}(r(\Phi)^x)$ étant conséquence de (4.2), il reste seulement à établir l'inclusion

$$\mathrm{P}(\Phi_1) \subset r(\mathrm{P}(\Phi)). \tag{2}$$

Si $a, b \in \Delta$ appartiennent à un même facteur simple de Φ et si $r(a) \neq 0 \neq r(b)$, alors $r(a)$ et $r(b)$ appartiennent à un même facteur simple de $r(\Phi^{\times})$. En effet, il existe une suite $a=a_1, a_2, \dots, a_n=b$ d'éléments de Δ distincts tels que a_i, a_{i+1} soient non orthogonaux pour $i=1, \dots, n-1$; mais alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \in \Phi$, donc $\sum_{i=1}^{n} r(a_i) \in r(\Phi)^\times$ ce qui implique notre assertion. De celle-ci, il résulte qu'on peut décomposer G en un produit direct $\prod_{j=1}^{m} G^{(j)}$ de telle façon que $T_1 = \prod_{j=1}^{m} (T_1 \cap G^{(j)})$ et que les restrictions de Φ_1 aux tores $T_1 \cap G^{(j)}$ soient les facteurs simples de Φ_1. Décomposant la relation à établir en ses composantes suivant les divers $G^{(j)}$, nous sommes ainsi ramenés au cas où Φ_1 est irréductible.

Soit $G = G' \times G''$ une décomposition de G en produit direct d'un facteur G' presque simple et d'un facteur G'' ne contenant pas G_1. Soient T', T'_1, G'_1 les images de T, T_1, G_1 par la première projection $G \to G'$. Celle-ci induit une injection $X^*(T') \otimes \mathbf{Q} \to X^*(T) \otimes \mathbf{Q}$ qui applique $P(\Phi(T', G'))$ dans $P(\Phi)$ et une bijection $X^*(T'_1) \otimes \mathbf{Q} \to X^*(T_1) \otimes \mathbf{Q}$ qui applique $\Phi(T'_1, G_1)$ sur Φ_1. On voit donc que, pour établir (2), il suffit de montrer l'inclusion analogue pour $\Phi(T', G')$ et $\Phi(T'_1, G'_1)$. Autrement dit, il nous est loisible de supposer G presque simple, ce que nous ferons désormais.

Si le système de racines $r(\Phi)^\times$ n'est pas réduit, (2) est une conséquence immédiate de (i) et de (4.2). Nous supposerons donc que $\Phi_1 = r(\Phi)^\times$.

Soient $d = \sum_{a \in \Delta} m_a . a$ la racine dominante de Φ et $d_1 = \sum_{b \in \Delta_1} m_b . b$ celle de Φ_1. On a évidemment $d_1 = r(d)$, d'où

$$m_b = \sum_{\substack{a \in \Delta \\ r(a)=b}} m_a. \tag{3}$$

Soient V', V'_1 les duals des espaces vectoriels V, V_1. Identifions V'_1 à son image dans V' par l'adjoint de r. La relation (2) est alors équivalente à la suivante :

$$Q(\check{\Phi}) \cap V'_1 \subset Q(\check{\Phi}_1). \tag{4}$$

Or on a, en vertu de (i) et (1),

$$Q(\check{\Phi}) \cap V'_1 \subset P(\check{\Phi}) \cap V'_1 = P(\check{\Phi}_1) \tag{5}$$

$$Q(\check{\Phi}_1) \subset Q(\check{\Phi}) \cap V'_1. \tag{6}$$

Vu les résultats rappelés en (4.1), il suffit donc — pour établir (4) — de montrer que pour tout $b \in \Delta_1$ tel que $m_b = 1$, le poids fondamental $\overline{\omega}_b$ (cf. (4.1)) n'appartient pas à $Q(\check{\Phi})$. Or il résulte de (3) que b est la restriction à T_1 d'un seul élément a de Δ, et qu'on a $m_a = 1$. Mais alors

$$\overline{\omega}_b = \overline{\omega}_a \notin Q(\check{\Phi})$$

(toujours en vertu de (4.1)), et la démonstration est terminée.

Corollaire **(4.4)**. — *Si* G *est simplement connexe, ou si le système de racines* $r(\Phi)^\times$ *est de type* BC, *alors* G_1 *est simplement connexe.*

Il suffit de montrer que $X^*(T_1) = P(\Phi_1)$ (cf. (2.23)). Si G est simplement connexe, alors $P(\Phi) = X^*(T)$ et cela résulte de (iii). Si $r(\Phi)^\times$ est de type BC, alors $P(\Phi_1) = P(r(\Phi)^\times) = Q(r(\Phi)^\times)$ vu (4.2), donc $P(\Phi_1) \subset X^*(T_1)$ vu (i).

Remarques **(4.5)**. — *a)* Soient $\pi : \widetilde{G} \to G$ et $\pi_1 : \widetilde{G}_1 \to G_1$ des revêtements universels de G et G_1 respectivement (2.23). Vu (2.24), il existe un unique morphisme $j : \widetilde{G}_1 \to \widetilde{G}$ tel que $\pi \circ j = i \circ \pi_1$, où i est l'inclusion de G_1 dans G. Le corollaire (4.4) entraîne que j *est injectif*. En particulier, j applique injectivement le noyau (schématique) de π_1 dans celui de π. Si $k = \mathbf{C}$, ces noyaux s'identifient respectivement aux groupes fondamentaux de G_1 et G.

b) Rappelons que si S est un tore, alors $X_*(S)$ désigne le groupe des morphismes de $\mathbf{GL}_1$ dans S, groupe qui s'identifie canoniquement au dual sur $\mathbf{Z}$ de $X^*(S)$ ([1; 8.6], [3; § 1]). Le dual V_1' (resp. V') de V_1 (resp. V) s'identifie à $X_*(T_1) \otimes \mathbf{Q}$ (resp. $X_*(T) \otimes \mathbf{Q}$). Par dualité, (ii) et (iii) équivalent respectivement à :

(ii)′ $Q(\check{\Phi}) \cap V_1' = Q(\check{\Phi}_1)$;

(iii)′ *le monomorphisme* $r_* : X_*(T_1) \to X_*(T)$ *associé au morphisme d'inclusion* $T_1 \to T$ *induit un monomorphisme de* $C_1 = X_*(T_1)/Q(\check{\Phi}_1)$ *dans* $C = X_*(T)/Q(\check{\Phi})$.

En fait, c'est essentiellement sous cette forme qu'ils ont été démontrés.

Si $k = \mathbf{C}$, les groupes C_1 et C s'identifient aux groupes fondamentaux de G_1 et G respectivement, et l'on retrouve l'injectivité signalée ci-dessus.

(4.6) La proposition (4.3) et son corollaire nous ont été suggérés par le résultat suivant de J. Humphreys, qui en a donné une démonstration d'ailleurs très différente de la nôtre.

Corollaire (J. Humphreys). — *Supposons que le groupe* G *soit simplement connexe, ou bien qu'il soit presque simple et que son système de racines relatives* ${}_k\Phi$ *soit non réduit. Alors, le sous-groupe semi-simple déployé maximal* F *de* G *défini en* [3; 7.2] *est simplement connexe.*

Cela résulte de (4.4), vu [3; 6.8].

Corollaire **(4.7)**. — *Supposons* G *semi-simple et* $k = \mathbf{R}$. *Soient* S *un tore* $\mathbf{R}$*-déployé maximal de* G, $\varphi : \widetilde{G} \to G$ *un revêtement universel de* G, $\widetilde{S}$ *la composante neutre de l'image réciproque de* S *dans* $\widetilde{G}$ *et* $G^0_{\mathbf{R}}$ *la composante neutre du groupe de Lie* $G_{\mathbf{R}}$. *Alors* $\widetilde{S}$ *est un tore déployé sur* $\mathbf{R}$ *maximal de* $\widetilde{G}$; *on a*

$$|G_{\mathbf{R}}/G^0_{\mathbf{R}}| = |(\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}| / |(\mathrm{Ker}\ \varphi/(\widetilde{S} \cap \mathrm{Ker}\ \varphi))_{\mathbf{R}}|,$$

où $|Y|$ *désigne l'ordre du groupe* Y. *En particulier, si* G *est simplement connexe,* $G_{\mathbf{R}}$ *est connexe.*

Rappelons en outre que $G_{\mathbf{R}}/G^0_{\mathbf{R}}$ est un 2-groupe abélien élémentaire [3; 14.5]. Plus précisément [3; 14.4]

$$G_{\mathbf{R}}/G^0_{\mathbf{R}} \xrightarrow{\sim} S_{\mathbf{R}}/(S_{\mathbf{R}} \cap G^0_{\mathbf{R}}). \tag{1}$$

La première assertion résulte de (2.20). Pour tout groupe algébrique X défini sur $\mathbf{R}$, notons $X^0_{\mathbf{R}}$ la composante neutre du groupe de Lie $X_{\mathbf{R}}$. Soit F le sous-groupe déployé de G défini en [3; 7.2] et soit $\widetilde{F}$ la composante neutre de $\varphi^{-1}(F)$. Vu (4.6), $\widetilde{F}$ est simplement connexe, et on sait alors que le tore maximal $\widetilde{S}$ de $\widetilde{F}$ est produit direct de ses intersections avec les sous-groupes de type $\mathbf{SL}_2$ de $\widetilde{F}$ correspondant aux racines simples. On a donc $\widetilde{S}_{\mathbf{R}} \subset \widetilde{F}^0_{\mathbf{R}} \subset \widetilde{G}^0_{\mathbf{R}}$ d'où $\widetilde{G}_{\mathbf{R}} = \widetilde{G}^0_{\mathbf{R}}$, vu [3; 14.4]. Par conséquent, $\varphi(\widetilde{G}_{\mathbf{R}}) = G^0_{\mathbf{R}}$ et

$$\text{(2)} \qquad S \cap G^0_{\mathbf{R}} = \varphi((\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}) \cong (\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}/(\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}.$$

D'autre part, il résulte du théorème 90 de Hilbert que l'application canonique

$$(\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}} \rightarrow ((\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)/\widetilde{S})_{\mathbf{R}} \cong (\mathrm{Ker}\ \varphi/(\widetilde{S} \cap \mathrm{Ker}\ \varphi))_{\mathbf{R}}$$

est surjective. Par conséquent, le nombre de composantes connexes de $(\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}$ est égal à $2^l.|(\mathrm{Ker}\ \varphi/(\widetilde{S} \cap \mathrm{Ker}\ \varphi))_{\mathbf{R}}|$, où $\ell = \dim S = \dim \widetilde{S}$. Comme $(\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}} \cap (\widetilde{S}.\mathrm{Ker}\ \varphi)^0_{\mathbf{R}} = \{1\}$, il résulte alors de (2) que le nombre de composantes connexes de $S \cap G^0_{\mathbf{R}}$ est égal à

$$2^l.|(\mathrm{Ker}\ \varphi/(\widetilde{S} \cap \mathrm{Ker}\ \varphi))_{\mathbf{R}}|/|(\mathrm{Ker}\ \varphi)_{\mathbf{R}}|.$$

La relation à établir s'ensuit aussitôt, vu (1) et le fait que $S_{\mathbf{R}}$ possède 2^l composantes connexes.

(4.8) La dernière assertion du corollaire (4.7)est connue et remonte à E. Cartan. Elle est essentiellement équivalente au cas réel de la conjecture selon laquelle le groupe G_k des points rationnels d'un groupe presque simple, simplement connexe, non anisotrope G est engendré par les points rationnels des radicaux unipotents de ses k-sous-groupes paraboliques. La démonstration donnée ici est à peu près celle de V. P. Platonov [7].

5. Remarques et rectifications.

(5.1) La seconde égalité (2) de [3; 3.8] doit être remplacée par une inclusion :

$$G^{*(S')}_{\tau} \supset G^{*(S)}_{\psi}.$$

L'égalité n'a pas toujours lieu comme le montre l'exemple suivant. Supposons $G = G_1 \times G_2$, où G_i est un groupe déployé de type A_i. Posons $\Phi(T, G_1) = \{\pm a\}$ et $\Phi(T, G_2) = \{\pm a_i \mid i = 1, 2, 3\}$. On obtient le contre-exemple annoncé en faisant $S = (\mathrm{Ker}\ a \cap \mathrm{Ker}\ a_1)^0$, $S' = (\mathrm{Ker}(a - a_1))^0$ et $\psi = \{\pm a_2|_S\} = \{\pm a_3|_S\}$. En effet, on a alors $\tau = \{\pm a_i|_{S'} \mid i = 1, 2, 3\}$, $G^{*(S)}_{\psi} = G_2$ et $G^{*(S')}_{\tau} = G$.

(5.2) La proposition 5.7 de [3] est valable pour toute partie ψ de ${}_k\Phi(G)$, sans restriction. En effet, on se ramène aussitôt au cas considéré dans [3] en remplaçant G par G_Ψ (cf. [3; 3.8]) où Ψ est l'ensemble des racines relatives qui sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'éléments de ψ.

Dans la démonstration du corollaire 5.8 de [3], c'est cette généralisation de 5.7 — et non 5.7 elle-même — qu'il convient d'appliquer, en posant $\psi = \{a\}$.

(5.3) Notons une conséquence immédiate mais utile de [3; 6.4 (2)]. Supposons G semi-simple et soit Γ le groupe de Galois de k_s sur k. Alors, dim S est égal au nombre d'orbites de Γ dans $\Delta-\Delta^0$ (pour l'action $\gamma\mapsto{}_\Delta\gamma$ de Γ sur Δ), et la dimension du centre de $\mathscr{Z}(S)$ est $\mathrm{card}(\Delta-\Delta^0)$. Par conséquent, S est la composante neutre du centre de $\mathscr{Z}(S)$ si et seulement si Γ fixe tous les éléments de $\Delta-\Delta^0$.

(5.4) L'assertion (iv) de [3; 12.6] doit être complétée comme suit :

(iv) *Il existe une algèbre à division* C *centrale sur k et un k-morphisme*

$$G\to\mathbf{GL}_m(C) \qquad (d(\xi)=m.c,\ c^2=[C:k])$$

équivalent sur $\bar{k}$ à un élément de ξ.

(Ici, $\mathbf{GL}_m(C)$ désigne le k-groupe algébrique réductif isomorphe sur $\bar{k}$ à $\mathbf{GL}_{mc}$, dont le groupe des points à valeurs dans une k-algèbre A est $\mathbf{GL}_m(C\otimes_k A)$, au sens usuel de la notation.)

Pour plus de détails sur les questions traitées au § 12 de [3] et la généralisation des résultats de ce paragraphe à un corps k quelconque, cf. [11].

(5.5) *Autres corrections à* [3] :

P. 70, l. 3, lire G au lieu de G_k.

P. 72, l. 28, lire L_{i-1}/L_i au lieu de H/L_{i-1}.

P. 76, l. 23, lire $\Phi(S, G)$ au lieu de $\Phi(S, T)$.

P. 83, ll. 6, 7, 8, lire $\mathbf{G}_a$ au lieu de $\mathbf{G}_m$.

P. 83, l. 9, lire $H\not\subset U_\mu$ au lieu de $H\subset U_\mu$.

P. 84, l. 4 du bas, lire positifs au lieu de positive.

P. 91, l. 4, lire *de Levi de* P au lieu de *de Levi de* G.

P. 113, l. 28, lire $\mathscr{Z}(S)_K$ au lieu de $\mathscr{Z}(T)_K$.

P. 141, la lettre ρ, utilisée sans avoir été introduite (sinon en (6.3)), représente la restriction de j (définie en (12.12) mais non utilisée par la suite) à Δ.

P. 142, l. 11, lire $d\pi_e$ au lieu de ρ.

Les références à [6] doivent être remplacées par les suivantes :

P. 62, l. 2 du bas : [6; VI, 1.1].

P. 63, l. 9 : [6; VI, 1.3, Prop. 8].

P. 71, ll. 13, 14 : Prop. 19 de [6; VI, 1.6].

P. 74, l. 19 : [6; VI, 1.7, Prop. 22].

P. 83, l. 13 du bas : [6; V, 3.3, Prop. 1].

Pp. 85, 86, dernière ligne : [6; VI, 1.7, Prop. 20].

P. 97, l. 6, p. 98, l. 4 : [6; V, 3.3, Prop. 1].

P. 98, l. 10 : [6; 1.10, Prop. 27].

P. 100, l. 2 : [6; VI, 1.7, Prop. 20].

P. 107, l. 16 : [6; V, 3.3, Prop. 1].

P. 143, l. 6 : [6; V, 3.3, Th. 2].

P. 149, l. 10 : [6] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI, *Act. Sci. Ind.*, 1337, Paris, Hermann, 1968.

The Institute for Advanced Study et Universität Bonn.

RÉFÉRENCES

[1] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, notes by H. Bass, New York, Benjamin, 1969.

[2] — and T. A. Springer, Rationality properties of linear algebraic groups, II, *Tôhoku Math. Jour.*, **20** (1968), 443-497.

[3] — et J. Tits, Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **27** (1965), 55-151.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chap. IV, V, VI, *Act. Sci. Ind.*, 1337, Paris, Hermann, 1968.

[5] C. Chevalley, *Séminaire sur la classification des groupes de Lie algébriques*, 2 vol., notes polycopiées, Inst. H. Poincaré, Paris, 1958.

[6] M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques*, t. I, Paris, Masson, 1970.

[7] V. P. Platonov, The problem of strong approximation and the conjecture of Kneser-Tits on algebraic groups, *Isvestia Ak. Nauk. USSR*, **33** (1969), 1211-1219.

[8] C. Riehm, The congruence subgroup problem over local fields, *Amer. Jour. Math.*, **92** (1970), 771-778.

[9] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, notes by J. Faulkner and R. Wilson, Yale University, 1967.

[10] J. Tits, Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, *Inventiones Math.*, **5** (1968), 19-41.

[11] —, Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque, *J. Reine Angew. Math.*, **247** (1971), 196-220.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1971.

1972. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)
ÉDIT. N° 32 388 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 23 074