JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOUEZ DIMASSI

Formule de trace et applications

Journées Équations aux dérivées partielles (1997), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1997____A6_0>

Formule de trace et applications.

Mouez Dimassi
Université de Paris-Nord
Institut Galilée.

Introduction.

Soit $A = a^w(x, hD_x)$ un opérateur h-pseudodifférentiel auto-adjoint. Soit $I = [\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbf{R}$, on suppose que le spectre de A dans un voisinage de I est discret. On note par $N_I(h)$ le nombre des valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités) de A dans l'intervalle I. Pour avoir une bonne précision sur le comportement de $N_I(h)$, lorsque $h \to 0$, on est ramené a étudier:

$$\mathrm{tr}(\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\lambda - A)f(A)) = (2\pi h)^{-1}\int e^{it\lambda/h}\theta(t)\mathrm{tr}(f(A)e^{-itA/h})dt, \tag{$\star$}$$

où $f \in C_0^\infty(]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[$, $\theta \in C_0^\infty(] - \frac{1}{C}, \frac{1}{C}[)$ ($\epsilon, \frac{1}{C}$ sont des constantes positives assez petites et $\tau = \alpha, \beta)$. Voir C.Chazarin [Ch], B.Helffer-D.Robert [HeRo]... . Dans le cas scalaire ces auteurs ont obtenu un développement asymptotique en puissances de h de $(\star)$. Pour cela ils ont construit une approximation modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ du groupe unitaire $e^{-itA/h}$. Leur méthode repose sur l'application de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier. Cette méthode est difficile à géneraliser dans le cas où $a(x, \xi)$ est une matrice ayant des valeurs propres de multiplicité variable. Dans le cas où $a(x, \xi)$ est microhyperbolique (voir défintion 1) V.Ivrii a obtenu des résultats comparables pour des opérateurs à symbole matriciel. Pour supp$\theta \subset \{t;\ h^\delta < |t| < \frac{1}{C}\}$, $\delta \in]0, 1[$ il démontre que $(\star) = \mathcal{O}(h^\infty)$. Sa méthode utilise la théorie des propagations des singularités. Avec J.Sjöstrand nous avons utilisé cette idée pour la variable duale. Nous avons donné une méthode stationnaire qui repose sur l'utilisation des extensions presque analytiques introduites par L.Hörmander (i.e $\widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbf{C}^n)$ une extension de f tel que $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z) = \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z|^\infty))$. Par la formule de B.Helffer-J.Sjöstrand [HeSj1] on écrit:

$$\mathrm{tr}(\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\lambda - A)f(A)) = -\mathrm{tr}\frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}\widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\lambda - z)(z - A)^{-1}L(dz). \tag{$\widetilde{\star}$}$$

Modulo un terme $\mathcal{O}(h^\infty)$, l'hypothèse de microhyperbolicité nous permet de reduire le domaine d'intégration du second membre de $(\widetilde{\star})$ à $K_\delta = \{z \in \mathbf{C}^n; |\operatorname{Im} z| > h^\delta\}$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. Par un résultat de R.Beals [Be] (voir B.Helffer-J.Sjöstrand [HeSj2] pour le cas semi-classique) on peut associer à l'opérateur $(z - A)^{-1}, \operatorname{Im} z \neq 0$ un symbole qui admet un développement asymptotique en puissance de h dans la zone K_δ (voir lemme 3). Ceci nous donne le résultat.

Ici on se propose de géneraliser cette méthode pour des problèmes où $(z - A)$ n'est plus linéaire en z. Une telle situation apparaît dans les problèmes périodiques où l'étude de $(z - A)$ au voisinage d'un niveau d'énergie z_0, se ramène à celle d'un système h-pseudodifférentiel $E^w_{-+}(x, hD_x, z; h)$ qui dépend d'une façon implicite de z. Voir V.Buslaev [Bu], J.L.Guillot-J.Ralston-E.Trubowitz [GRT], C.Gérard-A.Martinez-J.Sjöstrand. Nous appliquons cette formule de trace pour deux types de perturbation de l'opérateur de Schrödinger périodique ($P_0 = -\Delta + V(x)$ où V est Γ-périodique, Γ est un réseau de $\mathbf{R}^n$). Dans le cas semi-classique nous étudions l'opérateur $P_h = P_0 + \varphi(hx)$ où $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ et $\varphi(x) \to 0$ à l'infini. On démontre que

$$N_I(h) = h^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} (\rho(\beta - \varphi(x)) - \rho(\alpha - \varphi(x)))dx + \mathcal{O}(h^{-n+1}),\ h \to 0,$$

sous des conditions convenables. Ici $\rho(E)$ est la densité d'états intégrée associée à P_0.

Dans le cas des grandes perturbations:

$$P_\lambda = P_0 + \lambda g(x),\ \lambda \to +\infty$$

où $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^+)$ et $g(x) \sim \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta} + \phi_1(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta-1}$ à l'infini (ici δ constante strictement positive), on démontre que

$$N_I(\lambda) = (\lambda)^{n/\delta} \int_{\mathbf{R}^n_x} \rho(\beta - \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}) - \rho(\alpha - \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta})dx + \mathcal{O}(\lambda^{(n-1)/\delta}),\ \lambda \to +\infty.$$

Des résultats du type $N_I(\lambda) = \lambda^{n/\delta} c_0(1 + o(1))$, $\lambda \to +\infty$ ont été obtenus par M.S.Birman [Bi], A.Alama-R.Hempel-P.Deift [ADH] . Bien sur dans ce cas il suffit de supposer que $g(x) \sim \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}$, pour $|x| \to \infty$.

Formule de trace.

Soient $\tau \in \mathbf{R}$ et J un voisinage complexe de τ. Soit $p^w(z) = p^w(x, hD_x, z; h)$, $q^w(z) = q^w(x, hD_x, z; h)$ deux opérateurs h-pseudodifférentiels de symboles associés $p(x, \xi, z; h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j p_j(x, \xi, z)$, $q(x, \xi, z; h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j q_j(x, \xi, z)$ dans $S^0(\mathbf{R}^{2n}; \mathcal{L}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}^m))$ uniformément en z dans J. Ici $S^0(\mathbf{R}^{2n}) = \{a(x, \xi; h) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}); \partial^\alpha_{x,\xi} a(x, \xi; h) = \mathcal{O}_\alpha(1),\ \forall \alpha \in \mathbf{N}^{2n}\ h \in]0, h_0[\}$. On dit que $a(x, \xi, z; h)$ admet un développement en puissances de h dans $S^0(\mathbf{R}^{2n})$ uniformément en z dan J et on note si $\forall N \in \mathbf{N}$, $(a(x, \xi, z; h) - \sum_{j=0}^N a_j(x, \xi, z)h^j) \in h^{N+1} S^0(\mathbf{R}^{2n})$. On suppose:

(H1) Pour $z \in \mathbf{R}$, $h \in]0, h_0[$, $p(x, \xi, z; h)$ est une matrice hermitienne. En particulier $p_j(x, \xi, z) = p_j(x, \xi, z)^*\ \forall j$.

(H2) $p(x, \xi, z; h), q(x, \xi, z; h)$ sont analytiques en z dans J.

(H3) Soient $\lambda_1(x, \xi, \tau) \leq .. \leq \lambda_m(x, \xi, \tau)$ les valeurs propres de $p_0(x, \xi, \tau)$ comptées avec leurs multiplicités. Alors il existe $\alpha, R > 0$ tels que:

$$|\lambda_j(x, \xi, \tau)| \geq \alpha > 0 \text{ pour } |x| + |\xi| > R \text{ et } 1 \leq j \leq m$$

(H4) $\exists C>0$ tel que: $(\frac{\partial p_0}{\partial z}(x,\xi,\tau)\omega,\omega)\geq \frac{1}{C}||\omega||^2 - C||p_0(x,\xi,\tau)\omega||^2$ pour tout $(x,\xi)\in \mathbf{R}^{2n}$ et tout $\omega\in \mathbf{C}^m$.

Définition 1. On dit que $p_0(x,\xi,z)$ est microhyperbolique en $(\overline{x},\overline{\xi})$ dans la direction $T=(T_{\overline{x}},T_{\overline{\xi}})\in \mathbf{R}^{2n}$, ssi il existe une constante $C_0>0$ telle que:

$$\Re((\langle T_{\overline{x}},\partial_x\rangle + \langle T_{\overline{\xi}},\partial_\xi\rangle)p_0(x,\xi,z)\omega,\omega)\geq \frac{1}{C_0}||\omega||^2 - C_0||p_0(x,\xi,z)\omega||^2,$$

pour tout $(x,\xi)\in\{(y,\eta)\mathbf{R}^{2n};\ ||(y,\eta)-(\overline{x},\overline{\xi})||\leq \frac{1}{C_0}\}$ et tout $\omega\in\mathbf{C}^m$.

(H5) $\forall(\overline{x},\overline{\xi})\in\Sigma_\tau =_{\text{def}} \{(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n};\det(p_0(x,\xi,\tau))=0\}$, il existe $T_{\overline{x},\overline{\xi}}$ tel que $p_0(x,\xi,\tau)$ est microhyperbolique en $(\overline{x},\overline{\xi})$ suivant la direction $T_{\overline{x},\overline{\xi}}$.

En utilisant les hypothèses (H1), (H2), (H4) on démontre:

Lemme 2. *Il existe un voisinage complexe $\widetilde{J}$ de τ tel que $p^w(x,hD_x,z;h)^{-1}$ existe et analytique pour z dans $\{z\in\widetilde{J};\mathrm{Im}z\neq 0\}$. De plus ;*

$$||p^w(x,hD_x,z;h)^{-1}||=\mathcal{O}(|\,\mathrm{Im}\,z|^{-1}). \tag{1}$$

Lemme 3. *Soit $\delta\in]0,\frac{1}{2}[$. Il existe $N_0\in\mathbf{N}$ tel que pour tout $N\geq N_0$ on a:*

$$||(p^w(z))^{-1}\circ q^w(z)-\sum_{j=0}^{N}h^j\mathrm{Op}_h^w(E_j(x,\xi,z))||_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{C}^m);L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{C}^m))}=\mathcal{O}_N(1)(\frac{h}{L^2})^N L^{-1}, \tag{2}$$

uniformément en z dans $K_L=\{z\in\mathbf{C};|\,\mathrm{Im}\,z|\geq L\}$, $L\geq h^\delta$. Ici $E_j(x,\xi,z)$ est une somme finie de termes de la forme $p_0(x,\xi,z)^{-1}b_1(x,\xi,z)p_0(x,\xi,z)^{-1}$ $\ldots b_{k-1}(x,\xi,z)(p_0(x,\xi,z))^{-1}b_k(x,\xi,z)$ avec $k\leq 2j+1$ et $b_k\in S^0(\mathbf{R}^{2n};\mathcal{L}(\mathbf{C}^m,\mathbf{C}^m))$ uniformément en z dans K_δ. En particulier

$$E_0(x,\xi,z)=(p_0(x,\xi,z))^{-1}q_0(x,\xi,z).$$

♯

Remarque 4. D'aprés les hypothèses (H3), (H5) on peut trouver $\sigma>0$ assez petit de sorte que:

i) $\widetilde{J}$ est un voisinage complexe de $]\tau-\sigma,\tau+\sigma[$.

ii) $\Sigma_{\widetilde{J}}=\cup_{z\in\widetilde{J}}\{(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n};\det p_0(x,\xi,z)=0\}$ est un ensemble compact dans $\mathbf{R}^{2n}$.

iii) (H5) est vérifée pour tout $(x,\xi) \in \Sigma_{\widetilde{J}}$. $\sharp$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ tel que $\chi = 1$ sur un voisinage de $\Sigma_{\widetilde{J}}$. Soit $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C},\frac{1}{C}[)$ et $\widetilde{f} \in C_0^\infty(J)$ tel que:

$$\overline{\partial}\widetilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\operatorname{Im} z|^N) \text{ pour tout } N \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Pour $L > 0$ et $\lambda \in]\tau-\sigma, \tau+\sigma[$, on définit:

$$F_{\theta,L}(\lambda) = -\mathrm{tr}\frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}\widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - z)[(p^w(x,hD_x,z;h))^{-1}q^w(x,hD_x,z;h)]L(dz),$$

$$a_j(\lambda, L) =_{\text{def}} -\frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}\widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - z)\iint_{\mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}} \mathrm{tr}E_j(x,\xi,z)\chi(x,\xi)\frac{dxd\xi}{(2\pi)^n}L(dz), \tag{4}$$

ici $\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\tau) = \frac{1}{2\pi L}\int e^{it\tau/L}\theta(t)dt$, (Ldz) est la mesure de Lebesgue dans le plan complexe $\mathbf{C}$.

Théorème 5. *Sous les hypothèses (H1-4)on a: $\forall N, M \in \mathbf{N}\ \exists C_{N,M}$ (indépendant de (λ, h) dans $]\tau-\sigma,\tau+\sigma[\times]0,h_0[$ tel que:*

$$|F_{\theta,L}(\lambda) - \sum_{j=0}^{N} h^{j-n}a_j(\lambda, L)| \leq C_{N,M}((\frac{h}{L^2})^N L^{-1} + L^M)h^{-n},$$

pour $L \geq h^{\frac{1}{2}-\beta}$, $\beta > 0$.

Preuve. Soit $\psi \in C_0^\infty(]-2,2[)$, égale à un sur $]-1,1[$, on pose: $\psi_Y(z) = \psi(\frac{\operatorname{Im} z}{Y})$. D'après le lemme 2

$$F_{\theta,L}(\lambda) = -\mathrm{tr}\frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}(\widetilde{f}\psi_L)}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - z)[(p^w(x,hD_x,z;h))^{-1}q^w(x,hD_x,z;h)]L(dz),$$

l'hypothèse (H3) implique:

$$\begin{aligned} F_{\theta,L}(\lambda) &= \mathcal{O}(h^\infty) + \\ &- \mathrm{tr}\frac{1}{\pi}\int \frac{\overline{\partial}(\widetilde{f}\psi_L)}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - z)[(p^w(x,hD_x,z;h))^{-1}q^w(x,hD_x,z;h)\chi^w(x,hD_x)]L(dz). \end{aligned}$$

En utilisant (3) et le fait que $\overline{\partial}\psi_L = L^{-1}1_{[1,2]}(\frac{|\operatorname{Im} z|}{L})$ on obtient: $\forall\ M$

$$\begin{aligned} F_{\theta,L}(\lambda) &= \mathcal{O}_M(L^M)h^{-n} \\ &- \mathrm{tr}\frac{1}{\pi}\int_{|\operatorname{Im} z|>L} \frac{\overline{\partial}(\widetilde{f}\psi_L)}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - z)[(p^w(x,hD_x,z;h))^{-1}q^w(x,hD_x,z;h)\chi^w]L(dz). \end{aligned}$$

Maintenant il suffit d'appliquer le lemme 3.

Lemme 6. *On suppose que (H5) est vérifiée. Alors* $\forall\ j$, $a_j(\lambda, L)$ *est* C^∞ *en* λ *et pour tout* $N \in \mathbf{N}$

$$a_j(\lambda, L) = \sum_{k=0}^{N} a_{j,k}(\lambda)\theta^{(k)}(0)L^k \ + \mathcal{O}_N(L^{N+1})$$

uniformément en $\lambda \in]\tau - \sigma, \tau + \sigma[$. *En particulier si* θ *est égale à un au voisinage de zéro alors*

$$a_j(\lambda, L) = f(\lambda)\gamma_j(\lambda) + \mathcal{O}(L^\infty),$$

avec

$$\gamma_0(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int \operatorname{tr}((p_0(x,\xi,\lambda + i0))^{-1} - (p_0(x,\xi,\lambda - i0))^{-1} q_0(x,\xi,\lambda))\chi(x,\xi)\frac{dxd\xi}{(2\pi)^n}.$$

Preuve. En utilisant l'hypothèse (H5) on démontre que la fonction

$$e_j(z) = -\frac{1}{2\pi i}\iint_{\mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}} \operatorname{tr}E_j(x,\xi,z)\chi(x,\xi)\frac{dxd\xi}{(2\pi)^n},$$

qui est définie et analytique pour $z \in]\tau - \sigma, \tau + \sigma[\times \pm i]0, \alpha_0[$ (α_0 constante positive assez petitte) admet une extension C^∞ sur $]\tau - \sigma, \tau + \sigma[\times \pm i[0, \alpha_0[$. Maintenant la formule de Stokes donne:

$$a_j(\lambda, L) = \int f(\lambda')\mathcal{F}_L^{-1}\theta(\lambda - \lambda')(e_j(\lambda' + i0) - e_j(\lambda' - i0))d\lambda',$$

et le lemme 6 découle facilement.

Théorème 7. *Sous les hypothèse (H1-5) il existe* $\sigma > 0$ *(assez petit) tel que , pour tout* $N \geq 1$ *on a:*

$$F_{\theta,h}(\lambda) = f(\lambda)\sum_{j=0}^{N-1} h^{j-n}\gamma_j(\lambda) + \mathcal{O}_N(h^{N-n}), \tag{5}$$

uniformément en $\lambda \in [\tau - \sigma, \tau + \sigma]$. *Les fonctions* $\gamma_j(\lambda)$ *sont données par le lemme 6.*

Preuve. En utilisant la condition de microhyperbolicité on démontre (voir [DiSj], [Di2]) que pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé on a:

$$\operatorname{tr}\frac{1}{\pi}\int_{|\operatorname{Im} z| < h^\delta} \frac{\overline{\partial}\widetilde{f}}{\partial \overline{z}}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\lambda - z)[(p^w(x, hD_x, z; h))^{-1} q^w(x, hD_x, z; h)]L(dz) = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Maintenant il suffit d'appliquer les lemmes 3-6. ♯

Remarque 8. On suppose que

1) H(1-2-4-5) sont vérifiées.

2) $p(x,\xi,z;h)$, $q(x,\xi,z;h)$ sont Γ-périodiques en x. (i.e $\Gamma = \oplus_{i=1}^{n}\mathbf{Z}e_i$, $(e_i)_{1\leq j\leq n}$ est une base dans $\mathbf{R}^n$).

3) Il existe $\alpha, R > 0$ tel que

$$|\lambda_j(x,\xi,\tau)| \geq \alpha > 0 \text{ pour tous } |\xi| > R,\ x \in E,$$

où E est un domaine fondamental de Γ.

Alors $F_{\theta,L}(\lambda)$ est bien définie sur $L^2(\mathbf{R}^n/\Gamma;\mathbf{C}^m)$ et il est clair que le théorème 7 reste vrai avec

$$\gamma_0(\lambda) = \tag{6}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\iint_{E\times\mathbf{R}^n_\xi} \operatorname{tr}((p_0(x,\xi,\lambda+i0))^{-1} - (p_0(x,\xi,\lambda-i0))^{-1}q_0(x,\xi,\lambda))\chi(x,\xi)\frac{dxd\xi}{(2\pi)^n}.$$

ici $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ est égale à un dans un voisinage de $\Sigma_{[\tau-\sigma,\tau+\sigma]} = \cup_{\eta\in[\tau-\sigma,\tau+\sigma]}\{(x,\xi) \in E\times\mathbf{R}^n; \det(p_0(x,\xi,\eta)) = 0\}$.

<u>**Applications**</u> :

A/ Perturbation semi-classique.

Soient $V(y), \varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, $V(y)$ est Γ-periodique, φ est borné ainsi que toutes ces dérivées et $\varphi(x) \to 0$ à l'infini. On pose

$$P_{A,\varphi} = \sum_{j=1}^{n}(D_{y_j} + A_j(hy))^2 + V(y) + \varphi(hy) \qquad (h \to 0), \tag{7}$$

ici $A \in C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ avec $|\partial_x^\alpha A| \leq C_\alpha$ pour tout $\alpha \neq 0$. Pour $\theta \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*$, on définit ;

$$P_\theta = (D_y+\theta)^2 + V(y), D_y = \frac{1}{i}\partial_y,$$

$$P_0 = -\Delta + V(y),$$

ici $\Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbf{R}^n; \gamma^*.\gamma \in 2\pi\mathbf{Z},\ \forall\gamma\in\Gamma\}$ est le réseau dual de Γ. Soient $\lambda_1(\theta) \leq \lambda_2(\theta) \leq ...$ les valeurs propres de P_θ (comme opérateur non borné sur $L^2(\mathbf{R}^n/\Gamma)$). D'après la théorie de Floquet on a:

$$\sigma(P_0) = \sigma_{\text{ess}}(P_0) = \cup_{k=1}^{k=\infty} J_k, J_k = \lambda_k(\mathbf{R}^n/\Gamma^*) = [\alpha_k,\beta_k]. \tag{8}$$

Soit $z_0 \in \sigma(P_0)$ tel que $\lambda_{s-1}(\theta_0) < z_0 = \lambda_s(\theta_0) = \ldots = \lambda_{s+r}(\theta_0) < \lambda_{s+r+1}(\theta_0)$ et $u_j =_{\text{def}} u_j(\theta_0, z_0)$, $s \leq j \leq s+r$ une base orthonormée de $\ker(\mathrm{P}_{\theta_0} - \mathrm{z}_0)$. Pour $T \in \mathbf{R}^n$ on définit la matrice $\widehat{P}(\theta_0, z_0; T)) = (\int_{\mathbf{R}^n/\Gamma} \overline{u_j(y)} \langle (D_y + \theta_0), T\rangle u_i(y) dy)_{s\leq i,j\leq s+r}$.

Soit $\alpha < \beta$ tels que

$$[\alpha, \beta] \cap \sigma(P_0) = \emptyset. \tag{9}$$

D'aprés le critère de Weyl il existe σ assez petit tel que le spectre de $P_{A,\varphi}$ dans $[\alpha-\sigma, \beta+\sigma]$ est discret. Soit $(\lambda_j(h))_{0\leq j\leq N(h)}$ la suite des valeurs propres de $P_{A,\varphi}(h)$ dans $[\alpha-\sigma, \beta+\sigma]$, comptées selon leurs multiplicités. On définit:

$$N_h(\alpha, \beta) = \sharp\{j; \lambda_j(h) \in [\alpha, \beta]\}. \tag{10}$$

Pour $\tau \in \{\alpha, \beta\}$ et $k \geq 1$, on pose: $\Sigma_{\tau,k} = \{(x, \xi) \in E^* \times \mathbf{R}^n; \varphi(\xi) + \lambda_k(-x + A(\xi)) = \tau\}$, $\Sigma_\tau = \cup_{k\geq 1}\Sigma_{\tau,k}$, ($E^*$ est un domaine fondamental de $\mathbf{R}^n/\Gamma^*$). Comme $\varphi(x)$ est bornée et $\lambda_k(\xi)$ tend vers l'infini quand $k \to \infty$, alors Σ_τ est un ensemble compact. Pour $(x_0, \xi_0) \in \Sigma_\tau$ on suppose que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée ;

(H_A)

i) $\partial\varphi(\xi_0) \neq 0$

ii) Pour $z_0 = \tau - \varphi(\xi_0)$, $\theta_0 = A(\xi_0) - x_0$ *il existe* $T \in \mathbf{R}^n$, $C > 0$ *tel que ;*

$$\langle \widehat{P}(\theta_0, z_0; T)\omega, \omega\rangle \geq \frac{1}{C}\|\omega\|^2, \tag{11}$$

pour tout $\omega \in \mathbf{C}^r$.

Théorème 9 [Di2]. *Sous l'hypothèse* H_A *on a:*

$$N_h(\alpha, \beta) = h^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} (\rho(\beta - \varphi(x)) - \rho(\alpha - \varphi(x)))dx + \mathcal{O}(h^{-n+1}), \ h \to 0. \tag{12}$$

Ici $\rho(E)$ *est la densité d'états intégrée associée à* $P_0 = -\Delta + V(y)$. ♯

Remarque 10.

1) Si la condition ii) de l'hypothèse H_A est verifiée pour $s = 1$, alors ii) est équivalent à iii) $\nabla\lambda_{k_0}(-x_0 + A(\xi_0)) \neq 0$.

2) En génerale la multiplicité de valeurs propres de Floquet $\lambda_j(\xi)$ est variable et dans plusieurs situations la conditions ii) de l'hypothèse H_A n'est pas vérifiée. Par exemple si $\partial\varphi(\xi_0) = 0$ et $\lambda_{r-1}(\theta_0) < \lambda_r(\theta_0) = \lambda_{r+1}(\theta_0) < \lambda_{r+2}(\theta_0)$ avec $\lambda_r(\theta) = \lambda_r(\theta_0) - |\theta - \theta_0| + o(|\theta - \theta_0|)$, $\lambda_{r+1}(\theta) = \lambda_{r+1}(\theta_0) + |\theta - \theta_0| + o(|\theta - \theta_0|)$ au voisinage de θ_0. Alors H_A n'est pas vérifiée. En utilisant le théorème 5 on démontre que dans cette situation (12) reste vrai si on remplace $\mathcal{O}(h^{-n+1})$ par $\mathcal{O}(h^{-n+\frac{1}{2}-\beta})$, avec $\beta > 0$.

B/ Grandes perturbations.

Soit $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n,]0, +\infty[)$ tel que:

1) Il existe $(\phi_j)_{j\geq 0} \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$ tels que pour tout entier $N \geq 0$ il existe $R_N(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$ tel que:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{N} \phi_j(x/|x|)|x|^{-\delta-j} + R_N(x) \qquad \text{pour} \qquad |x| >> 1, \tag{13}$$

avec

$$|\partial_x^\beta R_N(x)| \leq C_\beta(1+|x|)^{-|\beta|-\delta-N-1}, \qquad \forall\beta.$$

Ici $\delta > 0$ et $0 < \phi_0 \in C^\infty(S^{n-1};]0, +\infty[)$.

On définit:

$$P_\lambda = -\Delta + V(y) + \lambda g(y), \qquad (\lambda \to +\infty). \tag{14}$$

Théorème 11 [Di2]. *Soit $\alpha < \beta$ vérifiant (9) , alors:*

$$N_\lambda(\alpha,\beta) = (\lambda)^{n/\delta} \int_{\mathbf{R}_x^n} \rho(\beta - \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta}) - \rho(\alpha - \phi_0(\frac{x}{|x|})|x|^{-\delta})dx \tag{15}$$
$$+\mathcal{O}(\lambda^{(n-1)/\delta}), \ \lambda \to +\infty.$$

Références.

[ADH] S.Alama, P.A.Deift and R.Hempel, *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator,* Commun. Math. Phys. 121, 291-321 (1989).

[AvSi] J.Avron, B.Simon, *Stability of gaps for periodic potentials under variation of a magnetic field.* J. Phys. A: Math. Gen. 18(2) 2199-2205.

[Be] R.Beals, *Characterization of pseudo-differential operators and applications,* Duke Math. J. vol. 44 (1), (1977), p. 45-57.

[Bi] M.Birman, *Discrete spectrum in the gap of the continous one in the large coupling limit,* Oper. Theory: Adv. App. (46), (1990), 17-25.

[Bu] V.S.Buslaev, *Semi-classical approximation for equations with periodic coefficients.* Russian. Math. Surveys. 42 (6), 97-125 (1987).

[C] J.Chazarin, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique,* Comm. Partial. Diff Eq 6 (1980), 595-644.

[Di1] M.Dimassi, *Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique,* Comm. P.D.E 18(56)(1993), 771-803 .

[Di2] M.Dimassi, *Trace formula and some application.*Preprint Université Paris-Nord.

[DiSj] M.Dimassi, J.Sjöstrand, *Trace asymptotics via almost analytic extensions.*Partial differential equations and Mathemaical physics. The Danish-Swedish Analysis. Seminaire 1995 (126-142).

[GMS] C.Gérard, A.Martinez, J.Sjöstrand, *A Mathematical Approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic Problems.* Commun. Math. Phys. Comm. Math. Phys. 142, 217-244(1991)

[GRT] J.L.Guillot, J.Ralston, E.Trubowitz, *Semi-classical methods in solid state physics.* Commun. Math. Phys. 116, 401-415 (1988).

[HeRo] B.Helffer, D.Robert, *Calcul fontionnel par la transformation de Melin et opérateurs admissibles,* J.Funct. Ana. 53 no 3 (1983), 246-268.

[HeSj1] B.Helffer, J.Sjöstrand, *On diamagnetisme and de Hass-Van Alphen effect,* Ann. I.H.P, vol.52, (1990), p.303-375.

[HeSj2] B.Helffer, J.Sjöstrand, *Analyse semi-classique pour l'équation de Harper (avec application à l'équation de Schrödinger avec champ magnétique.* Mémoires SMF (34) 1988.

[Hö] L.Hörmander, *Lecture notes at the Nordic Summer School of Mathematics.* 1969. 121 (1968), 173-218.

[I] V.Ivrii, *Semiclassical microlocal analysis and precise spectral asymptotics,* Preprints from École Polytechnique, no 1 (1990), no 2-6 (1991), no 7-9 (1992).