

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL CORON

HAÏM BRÉZIS

**Une deuxième surface à courbure moyenne prescrite
s'appuyant sur une courbe donnée**

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A5_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE DEUXIEME SURFACE A COURBURE MOYENNE

PRESCRITE S'APPUYANT SUR UNE COURBE DONNEE

par J.M. CORON

0 - INTRODUCTION -

Cet exposé porte sur un travail fait en collaboration avec H. Brézis ([2], [3]).

Soit Γ une courbe de Jordan "régulière" dans \mathbb{R}^3 . On suppose que $\Gamma \subset B(0,R)$ où $B(0,R)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon R. Soit H un réel strictement positif. On montre (théorème 2) que si

$$(1) \quad H R < 1$$

alors il existe au moins deux surfaces à courbure moyenne H en tout point "régulier" s'appuyant sur Γ .

On montrera avant un théorème (théorème 1) qui nous servira pour la démonstration du théorème 2.

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < 1\}$.

Soit γ une application de $\partial\Omega$ dans \mathbb{R}^3 . On suppose que

$$(2) \quad \gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega ; \mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\partial\Omega ; \mathbb{R}^3)$$

et on pose $\|\gamma\|_\infty = R$.

On cherche des fonctions u de $H^1(\Omega ; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant le système

$$(3) \quad \Delta u = 2 H u_x \wedge u_y$$

et une des deux conditions suivantes.

Condition de Dirichlet :

$$(4) \quad u = \gamma \text{ sur } \partial\Omega$$

Condition de Plateau : (on supposera dans ce cas γ injective)

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u_x|^2 - |u_y|^2 = u_x \cdot u_y = 0 \\ u(\partial\Omega) = \gamma(\partial\Omega) \\ \gamma^{-1} \circ u \text{ est croissante.} \end{array} \right.$$

On montre les deux théorèmes.

Théorème 1 : (Problème de Dirichlet)

Si (1) et

$$(6) \quad \gamma \text{ n'est pas une application identiquement constante,}$$

alors il existe au moins deux fonctions distinctes satisfaisant (3) et (4).

Théorème 2 : (Problème de Plateau)

Si (1) et si

$$(7) \quad \gamma \text{ est continue et injective,}$$

alors il existe au moins deux solutions géométriquement continues sur $\bar{\Omega}$ de (3) et (5).

Remarques :

1 - Si u vérifie (3) alors $u \in C^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^3)$. Ce résultat est dû à H. Wente [12].

2 - Soit u une fonction vérifiant (3) et (5) alors en tout point x de Ω tel que $\nabla u(x) \neq 0$ la courbure moyenne de la surface $u(\Omega)$ au point x est H. On sait en outre que les points x de Ω tels que $\nabla u(x) = 0$ sont isolés si $u \neq C$.

3 - Si $\gamma \equiv C$ alors $u \equiv C$ est la seule solution du problème de Dirichlet (comme du problème de Plateau). Ce résultat est dû à H. Wente [13].

4 - Rellich avait conjecturé (voir [7]) que sous les hypothèses

(1) et (7) il existe alors $H^* > 0$ tel que si $0 < H < H^*$ alors le problème de Plateau admet au moins deux solutions distinctes ; le théorème 2 démontre donc la conjecture de Rellich et précise que l'on peut prendre $H^* = 1/R$. K. Steffen avait montré dans [9] qu'il existe une suite H_n ; $H_n > 0$; $H_n \rightarrow 0$, tel que pour $H = H_n$ le problème de Plateau a au moins deux solutions.

5 - Si $\gamma(\partial\Omega)$ est un cercle centré en 0 et si $H R > 1$ alors le problème de Plateau n'a pas de solution. Ce résultat est dû à E. Heinz [5].

6 - L'existence d'au moins une solution pour le problème de Dirichlet comme pour le problème de Plateau (sous les hypothèses de ces théorèmes) est due à S. Hildebrandt [6] ; (1) pouvant d'ailleurs alors être remplacé par $H R \leq 1$.

7 - La démonstration du théorème 1 repose sur une méthode analogue à celles utilisées dans [1] et [4].

8 - Une application h de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega$ est dite croissante si il existe une application g croissante de $[\theta, 2\pi]$ dans \mathbb{R} telle que

$$h(e^{i\theta}) = e^{ig(\theta)}$$

$$\text{et } g(2\pi) - g(0) = 2\pi.$$

9 - Si q est un difféomorphisme conforme de $\bar{\Omega}$ dans $\bar{\Omega}$ et $q|_{\partial\Omega}$ est croissant (de $\partial\Omega$ dans $\partial\Omega$ - voir remarque 8), alors si u est une solution du problème de Plateau, $u \circ q$ est solution du problème de Plateau et

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{4H}{3} \int_{\Omega} u \cdot u_x \wedge u_y = \int_{\Omega} |\nabla(u \circ q)|^2 + \frac{4H}{3} \int_{\Omega} (u \circ q) \cdot [(u \circ q)_x \wedge (u \circ q)_y].$$

On dira que deux solutions u_1 et u_2 sont géométriquement distinctes s'il n'existe pas un tel difféomorphisme avec $u_2 = u_1 \circ q$.

Alors que ces résultats étaient annoncés dans [2], nous avons appris que M. Struwe [11] avait obtenu indépendamment des résultats partiels dans la même direction. Il a prouvé que les problèmes de Plateau et Dirichlet pour une certaine famille de fonctions γ "admissibles" ont deux solutions si

$H < H^*$ où H^* est une constante non explicitement donnée mais qui est inférieure à $1/2 R$. K. Steffen [9] a ensuite montré que tout γ vérifiant (2) (et (7) pour le problème de Plateau) est admissible.

Nous remercions S. Hildebrandt et L. Nirenberg qui ont attiré notre attention sur ce problème.

Notations :

On notera H_0^1 pour $H_0^1(\Omega ; \mathbb{R}^3)$, L^∞ pour $L^\infty(\Omega ; \mathbb{R}^3)$ etc... ;

On notera \int pour \int_Ω , et on posera

$$Q(v) = \int v \cdot v_x \wedge v_y$$

$$E(u) = \int |\nabla u|^2 + \frac{4H}{3} Q(u).$$

I - ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 1 -

Elle se divise en 4 étapes. (Pour les détails voir [3]).

Etape 1 :

On rappelle les grandes lignes de la démonstration de S. Hildebrandt [6] pour l'existence d'au moins une solution u.

Etape 2 :

On esquisse une démonstration du lemme

lemme 1 :

u étant la solution de l'étape 1,

$\exists \delta > 0$ tel que

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y \geq \delta \int |\nabla v|^2 \quad \forall v \in H_0^1.$$

Etape 3 :

On définit $Q(v) = \int v \cdot v_x \wedge v_y$ pour $v \in H_0^1$ et on montre que

$$J = \inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ Q(v) = 1}} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y < \inf_{\substack{v \in H_0^1 \\ Q(v) = 1}} \int |\nabla v|^2$$

Etape 4 :

On montre que J est atteint pour un certain v^0 et que $\bar{u} = \underline{u} - \frac{J}{2H} v^0$ est une autre solution du problème de Dirichlet.

Etape 1 :

Soit $R' > R$ avec $H R' < 1$ et soit

$$K = \{u \in H^1; u = \gamma \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \|u\|_\infty \leq R'\}$$

On montre qu'il existe $\underline{u} \in K$ tel que

$$(8) \quad E(\underline{u}) \leq E(v) \quad \forall v \in K$$

On vérifie ensuite à l'aide du principe du maximum que $\|\underline{u}\|_\infty \leq R$, puis que \underline{u} est solution du problème de Dirichlet.

Etape 2 :

Il s'agit de montrer le

Lemme 1 :

Soit $\underline{u} \in K$ tel que $E(\underline{u}) \leq E(v) \quad \forall v \in K$ alors :

$$(9) \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que } \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y \geq \delta \int |\nabla v|^2, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Démonstration :

On voit facilement, à l'aide d'intégrations par parties, que :

$$(10) \quad E(\underline{u} + v) = E(\underline{u}) + E(v) + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Soit $v \in H_0^1 \cap L^\infty$; comme $\|\underline{u}\|_\infty \leq R$, $\underline{u} + t v \in K$ pour t assez petit; en utilisant alors (10) et (8) on a

$$(11) \quad \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y \geq 0.$$

Par densité (11) reste vrai pour tout v dans H_0^1 on montre ensuite (voir [3]) que, en fait

$$(12) \quad \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y > 0 \quad \forall v \in H_0^1, v \neq 0.$$

On en déduit alors (9) en raisonnant par l'absurde.

Etape 3 :

Soit $v \in H_0^1$, $v_x \wedge v_y \in L^1$ mais $v \notin L^\infty$ donc l'intégrale $Q(v) = \int v \cdot v_x \wedge v_y$ n'a (à priori au moins) pas de sens. Mais on a le lemme suivant qui va nous permettre de donner un sens à $Q(v)$ pour $v \in H_0^1$:

Lemme 2 :

$$(13) \quad |Q(v)|^{2/3} \leq \frac{1}{S} \int |\nabla v|^2 \quad \forall v \in H_0^1 \cap L^\infty$$

où $S = (3 \cdot 2\pi)^{1/3}$ est la meilleure constante.

Ce lemme est dû à H. Wente [12].

A l'aide du lemme 2 on voit facilement qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$(14) \quad |Q(v) - Q(w)| \leq C \|v-w\|_{H_0^1} (\|v\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2) \quad \forall v \in H_0^1 \cap L^\infty \\ \forall w \in H_0^1 \cap L^\infty.$$

Cette inégalité permet d'étendre Q par continuité à H_0^1 .

On a :

Lemme 3 :

$$(15) \quad J = \inf_{Q(v)=1} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y < S$$

Pour établir ce lemme on s'inspire des méthodes de [1] et [4].
C'est ici qu'intervient l'hypothèse (6). Pour une démonstration voir [3].

Etape 4 :

Montrons que J est atteint. Soit v^n une suite minimisante. On a donc :

$$(16) \quad Q(v^n) = 1 \text{ et } \int |\nabla v^n|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x^n \wedge v_y^n = J + o(1).$$

Utilisant le lemme 1 et (16) on voit que $(v^n)_n$ est bornée dans H_0^1 ; quitte à extraire une sous-suite $v^n \rightarrow v$ faiblement dans H_0^1 ; soit $w^n = v^n - v$.

On a facilement (à l'aide d'intégrations par parties) avec (16) :

$$1 = Q(v^n) = Q(v) + Q(w^n) + o(1)$$

et

$$\int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u} \cdot v_x \wedge v_y + \int |\nabla w_n|^2 = J + o(1).$$

D'où

$$J|Q(v)|^{2/3} + \int |\nabla w_n|^2 < J|Q(v)|^{2/3} + J|Q(w_n)|^{2/3} + o(1)$$

A l'aide des lemmes 2 et 3 on conclut alors que $w^n \rightarrow 0$ dans H_0^1 et donc v réalise l'infimum J .

On montre ensuite facilement que, J étant atteint en v ,

$$-\Delta v + 2H(\underline{u}_x \wedge v_y + v_x \wedge \underline{u}_y) = J v_x \wedge v_y$$

et, par simple calcul, que $\bar{u} = \underline{u} - \frac{J}{2H} v$ est solution du problème de Dirichlet.

Remarque :

On vérifie aisément que

$$(17) \quad E(\bar{u}) = E(\underline{u}) + \frac{J^3}{12H^2}$$

d'où $E(\bar{u}) > E(\underline{u})$.

II - ESQUISSE DE DEMONSTRATION DU THEOREME 2 -

On ne donnera que les grandes lignes ; voir les détails dans [3] .

$$\text{Soit } \varepsilon = \left\{ \alpha \left| \begin{array}{l} \alpha \in C(\partial\Omega ; \mathbb{R}^3) \cap H^{1/2}(\partial\Omega ; \mathbb{R}^3), \alpha(\partial\Omega) = \gamma(\partial\Omega) \\ \gamma^{-1} \circ \alpha \text{ est croissante et laisse invariants les} \\ 3 \text{ points } e^{i\theta} \text{ avec } \theta = 0, \theta = \pm \frac{2\pi}{3} . \end{array} \right. \right\}$$

$\varepsilon \neq \emptyset$ car $\gamma \in \varepsilon$; soit $R' > R$ avec $H R' < 1$ et soit

$$\text{Inf } \{E(v) \mid v \in H^1, \|v\|_\infty \leq R' \text{ et } v|_{\partial\Omega} \in \varepsilon\}.$$

On peut montrer (résultat dû à S. Hildebrandt [6], [7]) que cet Inf est atteint en au moins une fonction \underline{u}_p qui est alors solution du problème de Plateau.

Soit maintenant $\alpha \in \varepsilon$ et soit $K_\alpha = \{u \in H^1 \mid u = \alpha \text{ sur } \partial\Omega \text{ et } \|u\|_\infty \leq R'\}$. On sait (voir II - étape 1) qu'il existe \underline{u}^α tel que

$$(18) \quad \underline{u}^\alpha \in K_\alpha \text{ et } E(\underline{u}^\alpha) \leq E(v), \forall v \in K_\alpha$$

On peut montrer qu'un tel \underline{u}^α est unique.

$$\text{Soit } J(\alpha) = \text{Inf}_{Q(v)=1} \int |\nabla v|^2 + 4H \int \underline{u}^\alpha \cdot (v_x \wedge v_y)$$

$$\text{et } A(\alpha) = E(\underline{u}^\alpha) + \frac{J(\alpha)^3}{12 H^2}$$

On montre qu'il existe $\alpha^0 \in \varepsilon$ tel que :

$$A(\alpha^0) \leq A(\alpha) \quad \forall \alpha \in \varepsilon.$$

Soit alors $\bar{v} \in H^1_0$ réalisant $J(\alpha^0)$ et soit

$$\bar{u} = \underline{u}^{\alpha^0} - \frac{J(\alpha^0)}{2H} \bar{v} ; \text{ alors}$$

$E(\bar{u}) > E(\underline{u}^{\alpha^0}) \geq E(\underline{u}_p)$ et on montre que \bar{u} est solution du problème de Plateau.

me de Plateau.

REFERENCES

- [1] : Th. AUBIN : "Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire". J. Math. Pures et Appl. 55 (1976), p. 269-296.
- [2] : H. BREZIS - J.M. CORON : "Sur la conjecture de Rellich pour les surfaces à courbure moyenne prescrite". C.R. Acad. Sc. 295 (1982) I p. 615-619.
- [3] : H. BREZIS - J.M. CORON : "Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture". Comm. Pure Appl. Math. (à paraître).
- [4] : H. BREZIS - L. NIRENBERG : "Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents". A paraître.
- [5] : E. HEINZ : "On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary". Archive Rat. Mech. Anal. 35 (1969), p. 249-252.
- [6] : S. Hildebrandt : "On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature". Comm. Pures Appl. Math. 23 (1970), p. 97-114.
- [7] : S. Hildebrandt : "Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings". Proc. Beijing Symp. Diff. Geom. and Diff. Eq. Beijing. A paraître.
- [8] : C. MORREY : "Multiple integrals in the calculus of variations". Springer (1966).
- [9] : K. STEFFEN : "Flächen constanter mittlerer krümmung mit vorgegebenem volumen öder flächeninhalt". Archive Rat. Mech. Anal. 49 (1972), p. 99-128.
- [10] : K. STEFFEN : "On the nonuniqueness of surfaces with prescribed mean curvature spanning a given contour". A paraître.
- [11] : M. STRUWE : "Nonuniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature". A paraître.
- [12] : H. WENTE : "An existence theorem for surfaces of constant mean curvature". J. Math. Anal. Appl. 26 (1969), p. 318-344.
- [13] : H. WENTE : "The differential equation $\Delta x = 2H(x_u \wedge x_y)$ with vanishing boundary valeus". Proc. A.M.S. 50 (1975), p. 131-137.