ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SAMIR AIT AMRANE

Sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre $g = (d-3)(d-4)/2$

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 6 (2000), p. 1671-1707

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1671_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 6 (2000), 1671–1708

SUR LE SCHÉMA DE HILBERT DES COURBES GAUCHES DE DEGRÉ d ET GENRE $g = (d-3)(d-4)/2$

par Samir AIT AMRANE

Introduction.

Le but de cet article est d'étudier le schéma de Hilbert $X_d = H_{d,g}$ des courbes (localement de Cohen-Macaulay et équidimensionnelles, mais pas nécessairement lisses ni même réduites) de $\mathbf{P}^3_k$ (espace projectif de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos), de degré d et genre $g = (d-3)(d-4)/2$, suivant les méthodes inaugurées et développées par Martin-Deschamps-Perrin [MDP].

Le problème de la classification des courbes gauches, formulé à la manière d'Halphen est le suivant (cf. [Hal]) :

«Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.»

Pour aborder cette classification, Mireille Martin-Deschamps et Daniel Perrin ont proposé dans plusieurs articles [MDP] une philosophie qui repose sur l'utilisation du module de Rao $M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{J}_C(n)$, qui est un module gradué de longueur finie sur $R = k[X,Y,Z,T]$.

Mots-clés : Géométrie algébrique – Courbes gauches – Schéma de Hilbert – Paramétrisation – Module de Rao – Triade.
Classification math. : 14H50 – 14C05.

La philosophie de [MDP] consiste à stratifier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ par les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ à cohomologie constante, sur lesquels on dispose d'un morphisme lisse $\Phi : H_{\gamma,\rho} \longrightarrow E_\rho$ qui à une courbe C associe son module de Rao M_C, où E_ρ désigne le "schéma" des structures de R-modules de fonction de Rao ρ. L'étude de $H_{d,g}$ est alors décomposée en trois étapes : l'étape du bas qui consiste à trouver tous les modules de Rao des courbes de $H_{d,g}$, l'étape intermédiaire qui consiste à passer de ces modules aux sous-schémas à cohomologie constante $H_{\gamma,\rho}$ de $H_{d,g}$ via le morphisme Φ, et enfin l'étape du haut qui consiste à recoller les $H_{\gamma,\rho}$ pour obtenir des renseignements sur $H_{d,g}$.

Le programme de Halphen peut alors être reformulé, à l'aide des principes de [MDP], sous la forme suivante :

1) Énumérer les divers composants Y de $H_{d,g}$ (c'est-à-dire les composantes irréductibles des $H_{\gamma,\rho}$, cf. 0.1) et préciser s'ils sont réduits, voire lisses et calculer leurs dimensions. En déduire les composantes irréductibles de $H_{d,g}$.

2) Décrire la courbe générique de chaque composant de $H_{d,g}$.

3) Préciser pour chaque couple de composants Y_0, Y de $H_{d,g}$ si Y_0 est adhérent ou sous-adhérent à Y (i.e. si $Y_0 \cap \overline{Y} \neq \varnothing$), ou encore, s'il existe une famille de courbes sur un anneau de valuation discrète, dont le point spécial est dans Y_0 et dont le point générique est dans Y (problème d'incidence).

4) Étudier l'incidence des diverses composantes irréductibles de $H_{d,g}$ et sa connexité.

En général, on ne sait absolument pas traiter le programme Halphen-[MDP] ci-dessus pour un schéma de Hilbert $H_{d,g}$ donné. Par exemple, A. Hirschowitz et E. Mezzetti (cf. [EHM]) ont montré que le schéma de Hilbert contient souvent une profusion de composantes irréductibles. Les seuls résultats tangibles connus à ce jour sur $H_{d,g}$ tout entier le sont soit en tout petit degré : $d \leqslant 3$ (cf. [Mi] et [N1]), soit en genre très grand par rapport à d : $g > \frac{(d-3)(d-4)}{2}$ (cf. [MDP3], [MDP4] et [E]).

Le genre $g = (d-3)(d-4)/2$, qui constitue l'objet de cet article, est donc le plus grand pour lequel l'étude du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est non triviale et intéressante. Dans ce travail, nous traitons entièrement le programme Halphen-[MDP] ci-dessus pour le schéma de Hilbert X_d.

Quelques précisions sur le contenu des trois paragraphes :

Au paragraphe 1, nous montrons que le module de Rao M_C de toute courbe C de X_d est un module de Koszul (c'est-à-dire le quotient de R par une suite régulière) et nous donnons pour chaque $d \geqslant 4$ tous les modules de Rao obtenus avec les courbes de X_d. On obtient ainsi :

THÉORÈME 1.— *Le module de Rao d'une courbe de X_d pour $d \geqslant 8$ ou $d = 4,\ 5$, est du type de l'un des modules suivants :*

– Le module extrémal $M_1 = R(d-4)/(X,Y,F,G)$ où F et G sont des polynômes homogènes de degrés $d-3$ et $2d-5$ respectivement.

– Le module $M_2 = R(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3})$.

– Le module $M_3 = k(-1)$.

Pour $d = 6$ on obtient en outre le module $k(-2)$ et le module nul.

Pour $d = 7$ on obtient en plus le module nul.

Au paragraphe 2, nous montrons comment passer de ces modules aux sous-schémas à cohomologie constante $H_{\gamma,\rho}$ et aux composantes irréductibles de X_d. Précisément, nous montrons le résultat suivant :

THÉORÈME 2.— *Pour $d \geqslant 8$, le schéma de Hilbert X_d a trois composantes irréductibles H_1, H_2 et H_3 qui correspondent aux types de modules M_1, M_2 et M_3 du théorème précédent. Pour $4 \leqslant d \leqslant 7$ on a les résultats suivants :*

– Le schéma X_7 a une quatrième composante H_4 formée de courbes ACM.

– Les composantes irréductibles de X_6 sont H_1, H_2 et la composante H_5 des courbes ACM.

– Les composantes irréductibles de X_5 sont H_1 et H_3.

– Les composantes irréductibles de X_4 sont H_1 et $H_2 = H_3$.

La dimension de X_d est égale à $\mathrm{Sup}_i\, t_{\gamma_i,\rho_i} = (d-1)(d+6)/2 = t_{\gamma_1,\rho_1}$ pour $d \geqslant 5$ (t_{γ_i,ρ_i} désigne la dimension de H_i), et égale à 16 pour $d = 4$.

Pour terminer, nous décrivons la courbe générique de chaque composant de X_d pour tout $d \geqslant 4$, et nous précisons lesquelles sont lisses et connexes. Avec les notations ci-dessus, c'est l'objet des deux propositions suivantes (cf. 2.4) :

PROPOSITION 3.— *Soit d un entier $\geqslant 4$.*

1) *Pour $d \geqslant 5$, la courbe générique C de H_1 est la réunion schématique transversale d'une courbe plane et d'une structure multiple sur une droite. Si $d = 4$, C est la réunion disjointe d'une droite et d'une cubique plane (cf. [MDP4] prop. 0.6).*

2) *Pour* $d \geqslant 5$, *la courbe générique de* H_2 *est de la forme* $C = C_1 \cup C_2$ *où* C_1 *désigne une conique lisse et* C_2 *une courbe plane et lisse de degré* $d-2$ *coupant transversalement* C_1 *en un point.*

3) *Pour* $d \geqslant 6$, *la courbe générique de* H_3 *est de la forme* $C = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ *où* Γ *désigne une courbe plane et lisse de degré* $d-2$ *et où* D_1 *et* D_2 *sont deux droites disjointes qui coupent transversalement* Γ *chacune en un unique point.*

PROPOSITION 4.— *Soit* d *un entier* $\geqslant 4$. *Alors* X_d *contient des courbes* C *lisses et connexes si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :*

1) $d = 4$ *et* $M_C = k(-1)$, *et dans ce cas,* C *est une courbe de bidegré* $(3,1)$ *sur une quadrique lisse.*

2) $d = 5$ *et* $M_C = k(-1)$.

3) $d = 6$ *et* $M_C = 0$.

4) $d = 6$ *et* $M_C = k(-2)$, *et dans ce cas,* C *est une courbe de bidegré* $(2,4)$ *sur une quadrique lisse.*

5) $d = 7$ *et* $M_C = 0$.

Au paragraphe 3, nous étudions les spécialisations entre les différents composants du schéma X_d en utilisant la notion de triade de [HMDP].

Si $Y_0 \subset H_{\gamma_0,\rho_0}$ et $Y \subset H_{\gamma,\rho}$ sont deux composants de $H_{d,g}$, une condition nécessaire pour que Y_0 soit sous-adhérent à Y est la condition de semi-continuité : $(\gamma,\rho) \leqslant (\gamma_0,\rho_0)$ (i.e. si $C \in Y$ et $C_0 \in Y_0$, on a $h^i\mathcal{J}_C(n) \leqslant h^i\mathcal{J}_{C_0}(n)$ pour tous $i \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$).

Dans le cas de X_d, il n'y a pas d'autre condition :

THÉORÈME 5.— *Si* Y_0 *et* Y *sont des composants de* $H_{d,g}$ *vérifiant la condition de semi-continuité,* Y_0 *est sous-adhérent à* Y.

Un corollaire de ce théorème est le suivant :

THÉORÈME 6.— *Le schéma* X_d *est connexe pour tout* $d \geqslant 4$.

La construction des familles de courbes du théorème 5 à l'aide des triades est parfois longue et complexe. Nous avons essayé de dégager des conditions nécessaires sur les triades pour qu'elles fournissent des familles joignant deux composants donnés (cf. 3.1). De plus, nous proposons en 3.2 une démarche permettant de réaliser pratiquement les constructions. Les calculs nécessaires ont été réalisés, soit à l'aide du logiciel Macaulay, soit directement à l'aide des bases de Gröbner.

Remerciements. — Tous mes remerciements à D. Perrin pour son aide et ses remarques durant la rédaction de cet article.

0. Rappels et notations.

On désigne par k un corps algébriquement clos et on note R l'anneau des polynômes $k[X, Y, Z, T]$. Si $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ est un R-module gradué de longueur finie, sa fonction de Rao $\rho_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $\rho_M(n) = \dim_k M_n$ est à support fini et on pose

$$r_a(M) = \mathrm{Inf}\,\{n \in \mathbb{Z} \mid M_n \neq 0\} \quad \text{et} \quad r_o(M) = \mathrm{Sup}\,\{n \in \mathbb{Z} \mid M_n \neq 0\}$$

si M est non nul. Rappelons, cf. [MDP1], que le module dual de M est le k-espace vectoriel $M^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(M_{-n}, k)$, muni de la structure de R-module définie par $a.f(x) = f(ax)$ et de la graduation définie par $(M^*)_n = (M_{-n})^*$.

On appelle courbe un sous-schéma de $\mathbf{P}^3_k$ de pure dimension 1, sans composante ponctuelle (immergée ou non), c'est-à-dire localement de Cohen-Macaulay. On désigne par $H_{d,g}$ l'ouvert du schéma de Hilbert général $H^{nd+1-g}_{\mathbf{P}^3}$ formé des courbes localement Cohen-Macaulay et de pure dimension 1, et par X_d le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ pour $g = \frac{(d-3)(d-4)}{2}$.

Si C est une courbe de $\mathbf{P}^3_k$, on note $\mathcal{O}_C$ son faisceau structural, $\mathcal{J}_C$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3_k}$ qui la définit et $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$ son module de Rao qui est un R-module gradué de longueur finie. Si $M_C = 0$, on dit que C est ACM (arithmétiquement de Cohen-Macaulay).

La fonction de Rao d'une courbe C est définie par $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ et on pose $r_a(C) = r_a(M_C)$ et $r_o(C) = r_o(M_C)$ si C n'est pas ACM. On pose aussi

$$s_0(C) = \mathrm{Inf}\,\{n \in \mathbb{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\} \;\text{ et }\; e(C) = \mathrm{Sup}\,\{n \in \mathbb{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

Outre ces invariants, on associe à la courbe C son caractère de postulation γ_C lié à sa postulation $(h^0\mathcal{J}_C(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ (cf. [MDP1] I.2.3). Si C est une courbe de $H_{d,g}$, se donner la cohomologie de C, i.e. la collection $\{h^i\mathcal{J}_C(n)\}$ pour $i \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, revient à se donner le couple (γ_C, ρ_C). On obtient ainsi une stratification du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ par ses sous-schémas (localement fermés) à cohomologie constante $H_{\gamma,\rho}$. En général, ces schémas ne sont pas irréductibles. On pose alors la définition suivante :

Définition 0.1. — *On appelle composant de $H_{d,g}$ toute composante irréductible d'un sous-schéma à cohomologie constante $H_{\gamma,\rho}$ de $H_{d,g}$.*

Rappelons enfin la définition suivante ([MDP4] 0.1) :

Définition 0.2. — *Soit C une courbe non ACM de degré d et genre g de $\mathbf{P}^3_k$. On dit que C est extrémale si elle atteint les bornes de [$MDP3$], i.e. si on a :*

$$r_a = g + 1 - \frac{(d-2)(d-3)}{2}, \qquad r_o = \frac{d(d-3)}{2} - g,$$

et, pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant d-2$:

$$\rho_C(n) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g.$$

La proposition suivante caractérise les courbes extrémales (cf. [MDP4] prop.0.5, th. 1.1 et [E] th. 2.8) :

Proposition 0.3. — 1) *La courbe C est extrémale si et seulement si C est une courbe minimale associée à un module de Koszul de la forme $R/(X,Y,F,G)$ où F et G sont des polynômes homogènes tels que (X,Y,F,G) soit une suite régulière.*

2) *Pour $d \geqslant 5$, la courbe C est extrémale si et seulement si son caractère numérique $\chi(C)$ est égal à $(d-1,2)$ que l'on note $\theta_{d,2}$ (cf. [E] th. 2.8).*

On renvoie à [N2] 1.8 pour la définition des courbes sous-extrémales.

1. Modules de Rao des courbes de X_d.

Nous allons étudier dans ce paragraphe les modules de Rao des courbes de X_d.

1.1. Le cas des courbes ACM.

La proposition suivante va découler des résultats de [E] :

Proposition 1.1. — *Dans le domaine*

$$d > 7,\ (d-4)(d-5)/2 + 3 < g < (d-3)(d-4)/2 + 1,$$

il n'y a pas de courbes ACM dans $H_{d,g}$.

Preuve.— Supposons au contraire qu'il existe des courbes ACM C dans $H_{d,g}$. D'une part on a $g = g(\chi(C))$ ([E] rem. 1.1) où $\chi(C)$ désigne le caractère d'une section plane générale $\Gamma = H \cap C$ qui ne dépend que de C. D'autre part, on a $\chi(C) \neq \theta_{d,2}$ puisque C n'est pas extrémale (cf. prop. 0.3). Par ailleurs, on ne peut avoir $\chi(C) = \psi_{d,2}$ avec $\psi_{d,2} = (d-2,3)$ ([E] lemme 1.8), sinon on aurait

$$g = g(\chi(C)) = g(\psi_{d,2}) = (d-3)(d-4)/2 + 1,$$

ce qui est absurde. D'où l'inégalité suivante ([E] lemme 1.9) :

$$g = g(\chi(C)) \leqslant g(\eta_{d,2}) = (d-4)(d-5)/2 + 3,$$

où $\eta_{d,2}$ désigne le caractère $(d-3,4)$. Or, cette dernière inégalité ne peut avoir lieu compte tenu de l'hypothèse. Par conséquent, $H_{d,g}$ ne contient pas de courbes ACM dans le domaine considéré.

COROLLAIRE 1.2.— *Soit d un entier $\geqslant 4$. Pour qu'il existe des courbes ACM dans X_d, il faut et il suffit que d soit égal à* 6 *ou à* 7.

Preuve.— Pour $d > 7$, cela résulte de la proposition précédente. Si $d = 4$ ou $d = 5$, il n'y a pas de courbes ACM dans X_d non plus. En effet, dans les deux cas, si C désigne une courbe de X_d, on a $h^1\mathcal{J}_C(1) \geqslant 1$ par le théorème de Riemann-Roch.

Si $d = 6$ ou $d = 7$, X_d contient des courbes ACM qui sont dans la classe de biliaison d'une cubique gauche de X_3.

1.2. Modules de Rao des courbes non ACM de X_d.

Rappelons la définition suivante (cf. [MDP5]) :

DÉFINITION 1.3.— *Soit $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ un R-module gradué de longueur finie non nul. Le module M est dit connexe si le support de ρ_M est un intervalle de $\mathbb{Z}$. On dira que M est fendu s'il se décompose en tant que R-module sous la forme $M = M_1 \oplus M_2$ avec M_1, M_2 non nuls et $r_o(M_1) < r_a(M_2)$.*

Exemple 1.4.— Un module de Koszul $M = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$, ou plus généralement un module monogène, n'est jamais fendu. Le module de Rao d'une courbe extrémale est un module de Koszul donc non fendu ([MDP4] Th. 1.1).

PROPOSITION 1.5.— *Soit d un entier $\geqslant 4$. Le module de Rao d'une courbe de X_d non ACM n'est jamais fendu. Précisément, si C n'est pas extrémale, ρ_C est la fonction caractéristique d'un intervalle $[\![m_0, n_0[\![$ de $\mathbb{Z}$ avec $0 < m_0 < n_0$.*

Preuve.— Pour $d = 4$ le résultat est bien connu (cf. [MDP3]).

Soit maintenant d un entier $\geqslant 5$. Si C est une courbe extrémale il n'y a rien à démontrer (cf. *exemple* 1.4). On peut donc considérer une courbe C de X_d qui n'est ni extrémale ni ACM. Soit H un hyperplan général de $\mathbf{P}^3_k$. La multiplication par une équation de H définit un homomorphisme $\mu_H : \mathcal{J}_C(n-1) \longrightarrow \mathcal{J}_C(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, qui donne par passage à la cohomologie une flèche $u_n : H^1\mathcal{J}_C(n-1) \longrightarrow H^1\mathcal{J}_C(n)$.

Soient $P_n = \operatorname{Ker} u_n$ et $Q_n = \operatorname{Coker} u_n$, de sorte qu'on a une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow H^1\mathcal{J}_C(n-1) \xrightarrow{u_n} H^1\mathcal{J}_C(n) \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0.$$

Posons $p_n = \dim_k P_n$ et $q_n = \dim_k Q_n$. On a le lemme suivant qui résulte de la suite (1) et de [E] lemmes 1.8 et 2.1, th. 2.8 et rem. 2.1.1 :

LEMME 1.6.— *Si C n'est ni ACM ni extrémale on a :*

1) $p_n - q_n = h^1\mathcal{J}_C(n-1) - h^1\mathcal{J}_C(n)$.

2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q_n = 1$.

Considérons l'unique entier n_0 (resp. m_0) vérifiant $p_{n_0} = 1$ et $p_n = 0$ pour $n \neq n_0$ (resp. $q_{m_0} = 1$ et $q_n = 0$ pour $n \neq m_0$). J'affirme que $m_0 < n_0$ et que $\rho_C = \chi_{[\![m_0,n_0[\![}$ (χ désigne la fonction caractéristique).

En effet, on ne peut avoir $m_0 = n_0$, sinon on aurait $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par 1.6.1, ce qui entraîne par récurrence sur n que $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ est nul pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci est impossible vu que C est supposée non ACM.

On ne peut non plus avoir $m_0 > n_0$; en effet, si c'était le cas, on devrait avoir $p_n = q_n = 0$ pour tout $n > m_0$, donc $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour tout $n > m_0$ par 1.6.1. Mais ρ_C est à support fini et on en déduit que $h^1\mathcal{J}_C(n)$ est nul pour tout $n \geqslant m_0$. En particulier, pour $n = m_0$, 1.6.1 donne $-1 = h^1\mathcal{J}_C(m_0 - 1)$, ce qui est absurde. On en conclut tout d'abord que l'on a $m_0 < n_0$.

Montrons maintenant que ρ_C est égale à $\chi_{[\![m_0,n_0[\![}$. Si $n > n_0$, 1.6.1 montre alors que l'on a $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ puisque l'on a $p_n = q_n = 0$ pour tout $n > n_0$, d'où $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ car ρ_C est à support fini. Le même raisonnement montre que $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour $n < m_0$ et $h^1\mathcal{J}_C(m_0) = 1$.

Soit maintenant n un entier vérifiant $m_0+1 \leqslant n \leqslant n_0-1$ et montrons que $h^1\mathcal{J}_C(n) = 1$. On a $p_n = q_n = 0$, ce qui entraîne $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n)$; une petite récurrence montre alors que $h^1\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(m_0) = 1$ pour tout $n = m_0+1, \dots, n_0-1$. Ceci montre enfin que l'on a $\rho_C = \chi_{[\![m_0,n_0[\![}$ et que, bien entendu, le module M_C est connexe.

Enfin, le module M_C ne peut pas être fendu, sinon il existerait un entier n, $m_0 < n < n_0$ tel que la flèche $u_n : H^1\mathcal{J}_C(n-1) \longrightarrow H^1\mathcal{J}_C(n)$ soit nulle. Mais on vient de voir qu'on a $h^1\mathcal{J}_C(n-1) = h^1\mathcal{J}_C(n) = 1$, ceci entraîne $p_n = q_n = 1$, contradiction.

COROLLAIRE 1.7. — *Soit d un entier $\geqslant 4$. Le module de Rao de toute courbe de X_d non ACM est de Koszul.*

Preuve. — Si C est extrémale c'est clair. Si C n'est pas extrémale, cela résulte de la proposition ci-dessus et du lemme suivant :

LEMME 1.8. — *Soit M un R-module gradué de longueur finie non nul, non fendu et dont la fonction de Rao ρ est majorée par 1. Alors M est un module de Koszul du type de $R(-h)/(X,Y,Z,T^{l+1})$, donc extrémal de paramètres 1,l.*

Preuve. — Quitte à décaler, on peut supposer $M = \bigoplus_{i=0}^{l} M_i$ où les M_i sont des k-espaces vectoriels de dimension 1. On a un k-homomorphisme naturel $u : R_1 \longrightarrow Hom_k(M_0, M_1)$ qui est non nul car M n'est pas fendu. Le noyau de u est donc de dimension 3 sur k. Par un changement de base dans R_1 (cf. [MDP1] définition I.3.6), on peut supposer $Xe_0 = Ye_0 = Ze_0 = 0$ où e_0 désigne un vecteur de base de M_0 sur k. Maintenant, $Te_0 = e_1$ est non nul et définit un vecteur de base de M_1. Par récurrence sur i, on montre que $Xe_i = Ye_i = Ze_i = 0$ et $Te_i = e_{i+1} \neq 0$ pour tout $i < l$ où $e_i = T^ie_0$ définit une base de M_i, donc M est isomorphe à $R/(X,Y,Z,T^{l+1})$.

On est maintenant en mesure de déterminer tous les modules de Rao non nuls possibles des courbes de X_d :

THÉORÈME 1.9.— *Soit d un entier $\geqslant 4$, et C une courbe de X_d qui n'est ni extrémale ni ACM. Alors on a soit $M_C \simeq k(-1)$ soit $M_C \simeq R(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3})$, sauf si $d = 6$ où on a en plus la possibilité $M_C \simeq k(-2)$.*

Inversement, on peut obtenir tous les modules ci-dessus ; en effet :

a) *Pour $M = k(-1)$, on obtient une courbe C de X_d admettant M pour module de Rao, en appliquant une biliaison $(d-2,1)$ à la courbe C_0, réunion disjointe de deux droites.*

b) *Pour $M = R(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3})$, on obtient une courbe C de X_d admettant M pour module de Rao, en appliquant une biliaison $(2,1)$ à une courbe minimale associée à ce module.*

c) *Pour $d = 6$ et $M = k(-2)$, on obtient une courbe C de X_6 admettant M pour module de Rao, en appliquant une biliaison $(2,2)$ à la courbe C_0, réunion disjointe de deux droites.*

En outre, toutes les courbes de X_d qui ont pour module de Rao l'un des modules ci-dessus, s'obtiennent par ces opérations de biliaison, à déformation près.

Preuve.— Soit C une courbe de X_d qui n'est ni extrémale ni ACM. Le corollaire précédent montre que M_C est du type $M = R(-h)/(X,Y,Z,T^{l+1})$ avec $l \geqslant 0$.

Si C_0 désigne la courbe minimale associée au module M, alors C_0 est extrémale et on a $M_{C_0} = R/(X,Y,Z,T^{l+1})$ ([MDP1] IV.6.7). Comme C n'est pas extrémale, on en conclut que l'on a $h \geqslant 1$. La proposition IV.5.1 de [MDP1] montre alors qu'il existe une suite de courbes $C_1,\dots,C_h$ telle que C_i s'obtienne à partir de C_{i-1} par une biliaison élémentaire triviale $(s_i,1)$ pour $i = 1,\dots,h$, et C à partir de C_h par une déformation à cohomologie et module de Rao constants. On constate immédiatement que $s_i \geqslant 2$ pour $i = 1,\dots,h$; en effet, les courbes C_i ne sont pas ACM, donc ne sont pas planes non plus.

On a alors les relations de récurrence suivantes (cf. [MDP1] III.3.2) :

$$d_i = d_{i-1} + s_i\,, \tag{1}$$

$$g_i = g_{i-1} + d_{i-1} + s_i(s_i-3)/2, \tag{2}$$

où $d_h = d$, $g_h = g = (d-3)(d-4)/2$; $d_0 = l+2$ et $g_0 = l(l-1)/2 - 1$ (cf. [MDP4] 0.5), et où d_i et g_i désignent le degré et le genre de C_i pour $i = 0,\dots,h$.

En faisant la somme membre à membre dans (1) pour $j = 1, \dots, i$, on trouve

$$d_i = l + 2 + s_1 + \dots + s_i,$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{h-1} d_i = (h-1)(l+2) + \sum_{i=1}^{h-1} (h-i)s_i. \tag{3}$$

Si on fait la somme membre à membre dans (2) pour $i = 1, \dots, h$, on trouve

$$g_h = g_0 + d_0 + \sum_{i=1}^{h-1} d_i + \sum_{i=1}^{h} \frac{s_i(s_i-3)}{2},$$

i.e.,

$$\begin{aligned}(d-3)(d-4)/2 = {} & \frac{l(l-1)}{2} - 1 + l + 2 + \sum_{i=1}^{h-1} d_i \\ & + \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{h} s_i\right)^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant h} s_i s_j - 3\sum_{i=1}^{h} s_i\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) conduisent à

$$\begin{aligned}d^2 - 7d + 12 = {} & l^2 + l + 2 + 2(h-1)(l+2) \\ & + 2\sum_{i=1}^{h-1}(h-i)s_i + (d-l-2)^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant h} s_i s_j - 3(d-l-2).\end{aligned}$$

Cette égalité se réduit après simplification à la relation suivante :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant h} s_i s_j = \sum_{i=1}^{h} (h-i-l)s_i + h(l+2) + l - 2. \tag{5}$$

Cette dernière égalité nous permet d'obtenir, suivant les valeurs de h, les résultats suivants :

a) $h = 1$:

La relation (5) entraîne $l(2 - s_1) = 0$, *i.e.* $l = 0$ ou $s_1 = 2$.

Si $l = 0$, la courbe C doit vérifier $M_C \simeq k(-1)$. Inversement, de telles courbes existent ; en effet, il suffit d'appliquer une biliaison $(d-2, 1)$ à la réunion disjointe de deux droites qui a pour module de Rao k, pour obtenir une courbe C de degré d et genre $(d-3)(d-4)/2$, de module de Rao $k(-1)$.

Si $l \neq 0$, on doit avoir $s_1 = 2$, d'où $d - l - 2 = 2$, *i.e.* $l = d - 4$. On a donc $M_C \simeq R(-1)/(X, Y, Z, T^{d-3})$ et C s'obtient par biliaison (2,1) à partir d'une courbe extrémale associée au module $R/(X, Y, Z, T^{d-3})$ (à déformation près), et C est bien dans X_d.

b) $h = 2$:

La relation (5) entraîne $s_1 s_2 + l(s_1 + s_2) = s_1 + 3l + 2$. Comme on a déjà $s_1, s_2 \geqslant 2$, on en déduit que l'on a $l = 0$ et $s_1 = s_2 = 2$, d'où $d = 6$ et $g = 3$. La courbe C que l'on obtient, à déformation près, à partir de la réunion disjointe de deux droites, par deux biliaisons successives (2,1), vérifie $M_C \simeq k(-2)$.

c) $h \geqslant 3$:

L'équation (5) est impossible pour tout $h \geqslant 3$, cela découle du résultat suivant que l'on démontre aisément par récurrence sur h :

LEMME 1.10. — *Soient h un entier $\geqslant 3$, $s_1, \dots, s_h$ des entiers $\geqslant 2$ et l un entier $\geqslant 0$. On a alors l'inégalité suivante :*

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant h} s_i s_j > \sum_{i=1}^{h} (h - i - l) s_i + h(l+2) + l - 2.$$

2. Dimension et composantes irréductibles de X_d.

Rappelons qu'on appelle caractère (au sens de [MDP]) toute fonction à support fini $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = 0$. Désignons par $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{S}$) l'ensemble des caractères (resp. l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ à support fini). On a alors une application naturelle $\Psi_d : X_d \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{S}$ qui à une courbe C associe le couple formé de son caractère de postulation et de sa fonction de Rao $\Psi_d(C) = (\gamma_C, \rho_C)$.

Nous allons déterminer l'image de l'application Ψ_d (problème A) et les fibres de cette application (problème B), voir l'introduction de [MDP1].

2.1. Le problème A pour le couple (γ,ρ).

PROPOSITION 2.1. — *Soient d un entier $\geqslant 4$, C une courbe de X_d et M son module de Rao. Alors $\Psi_d(C)$ est entièrement déterminé par M.*

Preuve. — Si C est extrémale, la proposition est triviale ([MDP4] 0.5).

Considérons une courbe C qui n'est ni extrémale ni ACM. Comme le module de Rao M est un module de Koszul extrémal, le caractère de postulation d'une courbe minimale C_0 de la classe de biliaison de C ne dépend que de M ([MDP4] 0.5). Mais d'après le théorème 1.9, il existe une unique façon d'obtenir C à partir de C_0 par une suite de biliaisons élémentaires triviales, à déformation près. Par conséquent, $\Psi_d(C)$ ne dépend que de M.

Reste le cas ACM pour lequel on a deux cas : $d=6$ et $d=7$. On montre par des arguments numériques (cf. [MDP1] I.2.6 et [MDP3] 2.4) que toutes les courbes ACM de X_6 (resp. de X_7) ont le même caractère de postulation qui est le suivant : $\gamma(0)=\gamma(1)=\gamma(2)=-1$, $\gamma(3)=3$ et $\gamma(n)=0$ sinon (resp. $\gamma(0)=\gamma(1)=-1$, $\gamma(4)=2$ et $\gamma(n)=0$ sinon).

COROLLAIRE 2.2. — *Soit d un entier >7. Alors l'image de Ψ_d contient exactement trois couples (γ_i,ρ_i) $i=1,2,3$, qui correspondent respectivement aux courbes extrémales, sous-extrémales et à celles dont le module de Rao vaut $k(-1)$.*

Preuve. — 1) L'étude faite au paragraphe précédent montre que pour $d>7$ on a trois types de modules de Rao possibles pour les courbes de X_d : $M_1=R(d-4)/(X,Y,F,G)$ où F et G sont des polynômes homogènes de degrés respectifs $a=d-3$ et $a+l=2d-5$, $M_2=R(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3})$ et $M_3=k(-1)$. Il résulte alors immédiatement de la proposition précédente que l'image de Ψ_d contient précisément trois couples (γ_i,ρ_i) $i=1,2,3$, correspondant respectivement aux modules M_i $i=1,2,3$, et qu'on sait calculer avec [MDP4] 0.2 et 0.5 et [MDP1] III.3.4.

2.2. Le problème B pour le couple (γ,ρ).

PROPOSITION 2.3. — *Soit d un entier >7. Alors on a :*

1) *Les fibres $\Psi_d^{-1}(\gamma_i,\rho_i)=H_{\gamma_i,\rho_i}$, pour $i=1,2,3$, sont des sous-schémas irréductibles et lisses de dimensions respectives $t_{\gamma_1,\rho_1}=d(d-1)/2+3(d-1)$, $t_{\gamma_2,\rho_2}=d(d-1)/2+9$ et $t_{\gamma_3,\rho_3}=d(d-1)/2+8$. Ce sont donc précisément les composants du schéma de Hilbert X_d.*

2) *Les composantes irréductibles de X_d ne sont autres que les fermés irréductibles $\overline{H_{\gamma_i,\rho_i}}$, pour $i = 1, 2, 3$. Le schéma X_d est donc de dimension*

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant 3} t_{\gamma_i,\rho_i} = (d-1)(d+6)/2 = t_{\gamma_1,\rho_1}.$$

Preuve. — 1) Comme on n'a affaire qu'à des modules de Koszul, le théorème 2.1 de [MDP4] entraîne que les sous-schémas $H_{\gamma_i,\rho_i} = \Psi_d^{-1}(\gamma_i, \rho_i)$ de X_d sont irréductibles et lisses, de dimensions t_{γ_i,ρ_i} données par le tableau ci-dessous, que l'on complète grâce aux formules qui se trouvent dans [MDP1] IX :

i	δ_{γ_i}	$\epsilon_{\gamma_i,\rho_i}$	h_{M_i}	$ext^1(M_i, M_i)^0$	$t_{\gamma_i,\rho_i} = dim\, H_{\gamma_i,\rho_i}$
1	$d(d-1)/2+7$	$d-6$	1	$2d-3$	$d(d-1)/2+3(d-1)$
2	$d(d-1)/2+7$	0	1	3	$d(d-1)/2+9$
3	$d(d-1)/2+8$	1	1	0	$d(d-1)/2+8$

2) Posons $H_i = \overline{H_{\gamma_i,\rho_i}}$. La famille $\mathcal{F} = \{H_i\}_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ constitue un recouvrement de X_d par des fermés irréductibles. Or, pour des raisons de dimension et par semi-continuité, il est clair qu'aucun des H_i pour $i = 1, 2, 3$ ne contient l'autre, cela entraîne que ce sont exactement les composantes irréductibles de X_d.

2.3. Les cas particuliers.

Occupons-nous à présent des cas particuliers $4 \leqslant d \leqslant 7$.

1) *Les courbes* $(4, 0)$. Il y a deux types de modules de Rao possibles : $M_1 = R/(X, Y, Z, T^3)$ et $M_2 = k(-1)$. Les sous-schémas H_{γ_i,ρ_i} $i = 1, 2$ de X_4 sont tous les deux de dimension 16 ; le schéma $X_4 = H_{4,0}$ a donc deux composantes irréductibles de dimension 16 et est lui même de dimension 16.

2) *Les courbes* $(5, 1)$. Cette fois il y a trois types de modules de Rao possibles : $M_1 = R(1)/(X, Y, F, G)$ avec $d^0F = 2$ et $d^0G = 5$, $M_2 = R(-1)/(X, Y, Z, T^2)$ et $M_3 = k(-1)$, et les sous-schémas correspondants H_{γ_i,ρ_i} $i = 1, 2, 3$ de X_5 sont respectivement de dimension 22, 19 et 20, ce qui entraîne que X_5 est de dimension 22. On pose $H_i = \overline{H_{\gamma_i,\rho_i}}$. Un argument de dimensions et de semi-continuité montre qu'on a $H_2 \subset H_3$ et que les composantes irréductibles de $X_5 = H_{5,1}$ sont H_1 et H_3.

3) *Les courbes* $(6, 3)$: Pour $d = 6$, les types de modules de Rao obtenus sont : $M_1 = R(2)/(X, Y, F, G)$ où F et G sont des polynômes homogènes

de degrés 3 et 7 respectivement, $M_2 = R(-1)/(X,Y,Z,T^3)$, $M_3 = k(-1)$, $M_4 = k(-2)$ et $M_5 = 0$. Les dimensions respectives des sous-schémas H_{γ_i,ρ_i} $i = 1,\ldots,5$ de X_6 sont : 30, 24, 23, 23, 24, ce qui entraîne que X_6 est de dimension 30. Posons $H_i = \overline{H_{\gamma_i,\rho_i}}$. Le même genre d'arguments qu'en 2) montre que H_5 contient H_3 et H_4 et que les composantes irréductibles de $X_6 = H_{6,3}$ sont H_1,H_2 et H_5.

4) *Les courbes* $(7,6)$. Les types de modules obtenus sont : $M_1 = R(3)/(X,Y,F,G)$ où F et G sont des polynômes homogènes de degrés 4 et 9 respectivement, $M_2 = R(-1)/(X,Y,Z,T^4)$, $M_3 = k(-1)$ et $M_4 = 0$. Les sous-schémas H_{γ_i,ρ_i} $i = 1,2,3,4$ de X_7 ont pour dimensions 39, 30, 29 et 28 respectivement, ce qui entraîne que X_7 est de dimension 39. On pose $H_i = \overline{H_{\gamma_i,\rho_i}}$. Un argument de dimensions et de semi-continuité montre que les composantes irréductibles de $X_5 = H_{5,1}$ sont H_1, H_2, H_3 et H_4.

2.4. Description des courbes génériques des sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ et des composantes irréductibles de X_d.

Rappelons que si C est une courbe extrémale de X_d, alors C est la réunion schématique transversale d'une courbe plane et d'une structure multiple sur une droite pour $d \geqslant 5$, qui n'est donc pas réduite puisque l'on a $h^0\mathcal{O}_C(-1) \neq 0$; pour $d = 4$, C est la réunion disjointe d'une droite et d'une cubique plane (cf. [MDP4] prop. 0.6). Pour les courbes génériques des sous-schémas H_{γ_2,ρ_2} et H_{γ_3,ρ_3} de X_d, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — 1) *Soit d un entier $\geqslant 6$. La courbe générique du sous-schéma H_{γ_3,ρ_3} de X_d est de la forme $C = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ où Γ désigne une courbe plane et lisse de degré $d-2$ et où D_1 et D_2 sont deux droites disjointes qui coupent transversalement Γ chacune en un unique point.*

2) *Soit d un entier $\geqslant 5$. La courbe générique du sous-schéma H_{γ_2,ρ_2} de X_d est de la forme $C = C_1 \cup C_2$ où C_1 désigne une conique lisse et C_2 une courbe plane et lisse de degré $d-2$ coupant transversalement C_1 en un point.*

Preuve. — Considérons l'ensemble K_3 (resp. K_2) des courbes décrites au point 1) (resp. au point 2)) de la proposition. Il suffit alors de montrer que K_i est constructible et contenu dans H_{γ_i,ρ_i} avec $\dim K_i = \dim H_{\gamma_i,\rho_i}$ pour $i = 3,2$ (cf. [AA] pour les détails). En effet, dans ce cas il est clair que K_i est dense dans H_{γ_i,ρ_i} car celui-ci est irréductible. On en conclut que K_i contient un ouvert dense de H_{γ_i,ρ_i} (cf. [EGA I] $0_{\mathrm{I}}.2.4.2$).

Corollaire 2.5. — *La courbe générique de H_{γ_i,ρ_i} est connexe mais réductible, donc non lisse mais réduite.*

2.5. Où trouve-t-on des courbes lisses et connexes ?

Il reste à préciser l'existence de courbes lisses et connexes dans X_d :

Proposition 2.6. — *Soit d un entier $\geqslant 4$. Alors X_d contient des courbes C lisses et connexes si et seulement si on est dans l'un des cas suivants :*

1) $d = 4$ *et* $M_C = k(-1)$, *et dans ce cas, C est une courbe de bidegré* $(3,1)$ *sur une quadrique lisse.*

2) $d = 5$ *et* $M_C = k(-1)$.

3) $d = 6$ *et* $M_C = 0$.

4) $d = 6$ *et* $M_C = k(-2)$, *et dans ce cas, C est une courbe de bidegré* $(2,4)$ *sur une quadrique lisse.*

5) $d = 7$ *et* $M_C = 0$.

Preuve. — Les caractères de postulation des courbes ACM de X_6 et de X_7 sont connexes (cf. prop. 3.1) et le résultat vient du théorème de Gruson-Peskine (cf. [MDP1] V.1.4).

Quant aux autres cas, tous les modules de Rao auxquels on a affaire sont de Koszul, et les propositions V.2.3 et V.2.6 [MDP2] permettent de conclure.

3. Connexité du schéma de Hilbert X_d.

Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau de valuation discrète qui n'est pas un corps, a son uniformisante, k son corps résiduel (supposé algébriquement clos), K son corps des fractions, R_A l'anneau de polynômes $A[X,Y,Z,T]$ et $\mathbf{P}^3_A$ le schéma projectif $\operatorname{Proj} R_A$. On suppose, de plus, que A est une k-algèbre. Alors, le complété de A est l'anneau de séries formelles $k[[a]]$ et on a $k[a]_{(a)} \subset A \subset k[[a]]$. On supposera dans ce qui suit qu'on a $A = k[a]_{(a)}$.

Un R_A-module gradué M (resp. un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}$-module $\mathcal{F}$) est dit libre (resp. dissocié) s'il est de la forme $M = \bigoplus_{i=1}^r R_A(-n_i)^{\alpha_i}$ (resp. $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}_A}(-n_i)^{\alpha_i}$).

Notation. — Dans ce qui suit on utilisera souvent la notation chiffrée suivante : le module $\bigoplus_{i=1}^{r} R_A(-n_i)^{\alpha_i}$ sera noté $n_1^{\alpha_1}, \ldots, n_r^{\alpha_r}$. Ainsi, la suite $R_A(-2)^6 \longrightarrow R_A(-1)^4 \longrightarrow R_A$ devient $2^6 \longrightarrow 1^4 \longrightarrow \underline{0}$.

3.1. Quelques conditions nécessaires pour l'existence de familles de courbes.

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{C}$ désigne une famille de courbes sur A, C_0 son point spécial et C_ξ son point générique. On note $\mathcal{J}_C$, $\mathcal{J}_{C_0}$ et $\mathcal{J}_{C_\xi}$ les faisceaux d'idéaux définissant ces courbes. On a $\mathcal{J}_{C_0} = \mathcal{J}_C \otimes_A k$ et $\mathcal{J}_{C_\xi} = \mathcal{J}_C \otimes_A K$.

On note $I_C = H^0_* \mathcal{J}_C$, $I_{C_0} = H^0_* \mathcal{J}_{C_0}$ et $I_{C_\xi} = H^0_* \mathcal{J}_{C_\xi}$ les idéaux saturés correspondants. Le module I_C est sans torsion, donc plat sur A.

Comme K est plat sur A on a $I_{C_\xi} = I_C \otimes_A K$ mais, en revanche, on a seulement une flèche $I_C \otimes_A k \longrightarrow I_{C_0}$ injective mais non surjective en général (cf. lemme 3.4). On pose $I_0 = I_C \otimes_A k$.

Rappelons la définition suivante (cf. [HMDP3] paragraphe 1) :

DÉFINITION 3.1. — *Soit $L. = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ un complexe de R_A-modules gradués.*

Les groupes d'homologie $N = h_1(L.)$, $H = h_0(L.)$ et $C = h_{-1}(L.)$ sont des R_A-modules gradués appelés noyau, cœur et conoyau du complexe $(L.)$ respectivement. Si ces modules vérifient certaines conditions de finitude, on dit que $(L.)$ est une triade.

On a alors la proposition suivante (cf. [HMDP3] 2.3, 2.4, 3.1 et 3.6) :

PROPOSITION 3.2. — *Soit $\mathcal{C}$ une famille de courbes sur A. Il existe une résolution de $\mathcal{C}$, de type N, triadique, i.e., une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}$ est un faisceau dissocié et $\mathcal{N}$ un faisceau triadique, c'est-à-dire tel qu'il existe une suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_{-1} \longrightarrow 0$$

où les faisceaux $\mathcal{L}_i$ sont dissociés.

Si on pose $L_i = H^0_* \mathcal{L}_i$, le complexe $L. = (L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow L_{-1})$ déduit de (1) est une triade majeure qui est appelée une triade de Rao de $\mathcal{C}$.

Considérons une résolution de type N triadique de $\mathcal{C}$ comme ci-dessus, telle que la triade de Rao associée $(L.)$ soit majeure élémentaire (cf. [HMDP3] 2.4, 2.15 et [HMDP1] 2.22).

On rappelle qu'on a $H = H^1_* \mathcal{J}_C$, que $\mathcal{N}$ est le faisceau associé à N et qu'on a $C = H^2_* \mathcal{N}$ qui est de torsion sur A (cf. [HMDP3] 2.4).

Enfin on pose $B_{\mathcal{C}} = H^2_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}$, $B_{C_0} = H^2_* \mathcal{J}_{C_0}$, $B_{C_\xi} = H^2_* \mathcal{J}_{C_\xi}$ et on note M_{C_0} le module de Rao de C_0. On a, par platitude, $B_{\mathcal{C}} \otimes_A K = B_{C_\xi}$ et on retrouvera ci-dessous, cf. lemme 3.3, le fait bien connu (cf. [H] III 12) qu'on a $B_{\mathcal{C}} \otimes_A k \simeq B_{C_0}$. Le module $B_{\mathcal{C}}$ n'est pas, en général, plat sur A. On note $(B_{\mathcal{C}})_\tau$ son sous-module de torsion et on pose $B'_{\mathcal{C}} = B_{\mathcal{C}}/(B_{\mathcal{C}})_\tau$. Cette fois, $B'_{\mathcal{C}}$ est plat sur A.

3.1.1. *Lemmes préliminaires.*

Lemme 3.3. — *Avec les notations ci-dessus on a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow I_{\mathcal{C}} \xrightarrow{.a} I_{\mathcal{C}} \longrightarrow I_{C_0} \longrightarrow H \xrightarrow{.a} H$$
$$\longrightarrow M_{C_0} \longrightarrow B_{\mathcal{C}} \xrightarrow{.a} B_{\mathcal{C}} \longrightarrow B_{C_0} \longrightarrow 0$$

où le symbole $.a$ désigne la multiplication par a.

Preuve. — On part de la suite $0 \longrightarrow A \xrightarrow{.a} A \longrightarrow k \longrightarrow 0$ correspondant à la multiplication par a, on la tensorise par $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$. Comme ce faisceau est plat sur A on obtient : $0 \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{.a} \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{J}_{C_0} \longrightarrow 0$ et on écrit la suite de cohomologie associée qui donne le résultat cherché.

Lemme 3.4. — *On a les suites exactes suivantes :*

$$0 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_{C_0} \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(H, k) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H \otimes_A k \longrightarrow M_{C_0} \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^A(C, k) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow C \otimes_A k \longrightarrow B_{C_0} \longrightarrow B'_{\mathcal{C}} \otimes_A k \longrightarrow 0.$$

Preuve. — La première suite résulte immédiatement du lemme 3.3. Pour les autres, rappelons que l'on a la résolution de type N de $\mathcal{C}$: $0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0$ qui donne $0 \longrightarrow H^2_* \mathcal{N} \longrightarrow H^2_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \longrightarrow H^3_* \mathcal{P} \longrightarrow \cdots$. Comme $H^3_* \mathcal{P}$ est plat, on en déduit $C = H^2_* \mathcal{N} = (B_{\mathcal{C}})_\tau$. On a donc $\operatorname{Tor}_1^A(C, k) = \operatorname{Tor}_1^A(B_{\mathcal{C}}, k)$ d'où la deuxième suite.

Enfin, la dernière suite s'obtient à partir de $0 \longrightarrow C \longrightarrow B_{\mathcal{C}} \longrightarrow B'_{\mathcal{C}} \longrightarrow 0$ (qui vient encore de $C = (B_{\mathcal{C}})_\tau$) par tensorisation par k en tenant compte du fait que $B'_{\mathcal{C}}$ est plat et que $B_{\mathcal{C}} \otimes_A k \simeq B_{C_0}$.

Si on note Grf_k la catégorie des R-modules gradués dont toutes les composantes sont des k-espaces vectoriels de dimension finie, le foncteur de dualité $(^*)$: $M \mapsto M^*$ est exact et involutif, d'où le résultat suivant :

LEMME 3.5. — 1) *Avec les notations ci-dessus, on a la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow (B'_C \otimes_A k)^* \longrightarrow B^*_{C_0} \longrightarrow (C \otimes_A k)^* \longrightarrow 0.$$

2) *Si* $0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{J}_{C_0} \longrightarrow 0$ *désigne une résolution de type* N *de* C_0 *et si on pose* $P = H^0_*\mathcal{P}$, *on a la présentation suivante de* $B^*_{C_0}$ *:*

$$P^\vee(-4) \longrightarrow B^*_{C_0} \longrightarrow 0.$$

Preuve. — 1) Cela résulte de la dernière suite exacte du lemme 3.4 et de l'exactitude du foncteur $(^*)$.

2) La résolution de type N de C_0 fournit l'injection suivante : $0 \longrightarrow B_{C_0} \longrightarrow H^3_*\mathcal{P}$. Rappelons, par ailleurs, que si L est un R-module libre de rang fini et $\mathcal{L}$ le faisceau associé on a un isomorphisme de R-modules gradués : $H^3_*(\mathbf{P}^3_k, \mathcal{L}) \simeq (L^\vee(-4))^*$. D'où la présentation anoncée compte tenu de l'exactitude du foncteur $(^*)$.

Le résultat suivant est une conséquence de la construction du cône d'application :

LEMME 3.6. — *Soit* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* Grf_k. *On suppose qu'on a des résolutions libres* $L.'' = (\cdots \longrightarrow L''_2 \longrightarrow L''_1 \longrightarrow L''_0 \longrightarrow M'' \longrightarrow 0)$ *et* $L. = (\cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0)$ *avec* $L.''$ *minimale. Alors*

1) L''_0 *est facteur direct de* L_0 *: on a* $L_0 = L''_0 \oplus L$,

2) *on a une résolution libre de* M' *:*

$$\cdots \longrightarrow L_n \oplus L''_{n+1} \longrightarrow \cdots L_1 \oplus L''_2 \longrightarrow L \oplus L''_1 \longrightarrow M' \longrightarrow 0.$$

3.1.2. *Les conditions nécessaires.*

Supposons que le point générique C_ξ (resp. le point spécial C_0) de la famille de courbes $\mathcal{C}$ soit dans le sous-schéma $H_{\gamma,\rho}$ (resp. H_{γ_0,ρ_0}) du schéma de Hilbert $H_{d,g}$. Le théorème de semi-continuité (cf. [H] III.12) fournit alors la condition suivante :

CONDITION NÉCESSAIRE N1. — *On a* $h^i\mathcal{J}_{C_\xi}(n) \leqslant h^i\mathcal{J}_{C_0}(n)$ *pour tous* $i \geqslant 0,\ n \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas, on écrit $(\gamma, \rho) \leqslant (\gamma_0, \rho_0)$.

Posons $M_0 = H^1_*(\mathcal{J}_C \otimes_A k)$. On a alors la condition suivante (cf. [HMDP3] prop. 5.8) :

CONDITION NÉCESSAIRE N2.— *Le module* $M = H/H_\tau \otimes_A k$, *où* H_τ *désigne le sous-module de torsion de* H, *est un sous-quotient de* M_0, *i.e. il existe deux sous-R-modules* $M_1 \subset J$ *de* M_0 *tels que* $M = J/M_1$. *Si on pose* $M_{-1} = M_0/J$, *on a :*

$$M_1 = H_\tau \otimes_A k,\ J = H \otimes_A k \text{ et } M_{-1} = \mathrm{Tor}^1_A(C, k).$$

Le module $H/H_\tau \otimes_A K = H \otimes_A K$ est le module de Rao de C_ξ. On dit que la courbe $\mathcal{C}$ (resp. la triade $(L.)$) joint les modules M et M_0.

CONDITION NÉCESSAIRE N3.— *Avec les notations ci-dessus on a les formules :*

$$h^0\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^0\mathcal{J}_{C_\xi}(n) = \dim \mathrm{Tor}^A_1(H, k)_n = \dim (H_\tau \otimes_A k)_n = \dim M_{1,n},$$

$$h^2\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^2\mathcal{J}_{C_\xi}(n) = \dim (C \otimes_A k)_n = \dim \mathrm{Tor}^A_1(C, k)_n = \dim M_{-1,n}.$$

Preuve.— Rappelons qu'on a, pour un A-module de torsion M, l'égalité

$$\dim_k M \otimes_A k = \dim_k \mathrm{Tor}^A_1(M, k).$$

Comme I_C est plat les dimensions des composantes homogènes de ses fibres sont égales, de sorte que l'on a $\dim_k(I_0)_n = \dim_K(I_{C_\xi})_n = h^0\mathcal{J}_{C_\xi}(n)$. La première formule est alors claire avec la première suite exacte du lemme 3.4 en se souvenant du fait que M_1 n'est autre que $H_\tau \otimes_A k$. La deuxième résulte de la dernière suite du lemme 3.4, de la platitude de B'_C et de l'égalité $(B'_C) \otimes_A K = B_C \otimes_A K = B_{C_\xi}$.

Considérons maintenant une présentation de $I_{C_0} : F \longrightarrow I_{C_0} \longrightarrow 0$, et une présentation minimale de $\mathrm{Tor}^A_1(H, k) : P_0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^A_1(H, k) \longrightarrow 0$.

Posons $P_0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R(-n)^{q_H(n)}$, $F = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R(-n)^{f(n)}$ et désignons par ρ_1 la fonction de Rao de M_1 qui est la même que celle de $\mathrm{Tor}^A_1(H, k)$. Avec ces notations, on a :

CONDITION NÉCESSAIRE N4.— *On a*

1) $q_H \leqslant f$.

2) $\mathrm{Supp}(q_H) \subset \mathrm{Supp}(\rho_1)$.

Preuve.— 1) Résulte du lemme 3.6 appliqué à la première suite exacte du lemme 3.4.

2) Cela résulte du fait que la présentation de $\mathrm{Tor}_1^A(H,k)$ considérée est minimale.

Considérons enfin une présentation minimale $P_1 \longrightarrow (C\otimes_A k)^* \longrightarrow 0$ du R-module $(C \otimes_A k)^*$. Posons $P_1 = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R(-n)^{q_C(n)}$ et avec les notations du lemme 3.5, posons $P = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R(-n)^{p(n)}$. Désignons enfin par ρ_{-1} la fonction de Rao du module M_{-1} qui est la même que celle de $C\otimes_A k$ et par ρ^*_{-1} la fonction définie par $\rho^*_{-1}(n) = \rho_{-1}(-n)$. On a alors la dernière condition suivante :

Condition Nécessaire N5.— *On a*

1) $q_C(n) \leqslant p(4-n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\mathrm{Supp}(q_C) \subset \mathrm{Supp}(\rho^*_{-1})$.

Preuve.— 1) Cela résulte du lemme 3.6 appliqué à la suite exacte du lemme 3.5.

2) Cela résulte du fait que la présentation de $(C \otimes_A k)^*$ considérée est minimale.

3.2. Démarche à suivre pour construire une famille de courbes.

Soient $H_{\gamma,M}$ et H_{γ_0,M_0} deux sous-schémas de $H_{d,g}$, à cohomologie et module de Rao constants, tels que M soit sous-quotient de M_0 et $(\gamma,\rho) \leqslant (\gamma_0,\rho_0)$ où ρ (resp. ρ_0) désigne la fonction de Rao de M (resp. M_0) (conditions N1 et N2). Nous cherchons à construire une famille de courbes $\mathcal{C}$ dont le point générique C_ξ est dans $H_{\gamma,M}$ et dont le point spécial C_0 est dans H_{γ_0,M_0}. Nous avons vu en 3.2 que, si une telle famille existe, on peut lui associer une triade de Rao $(L.)$ et à cette triade un triplet (C,H,u) où C désigne le conoyau de $(L.)$, H son cœur et u l'élément défini en 1.1 de [HMDP3]. Ces éléments vérifient les conditions nécessaires N1,. . .,N5 ci-dessus. Réciproquement, les étapes pour construire la famille $\mathcal{C}$ sont les suivantes :

Étape 1. Écrire M comme sous-quotient de M_0 (cf. N2) en respectant la condition N3 et écrire la triade triviale $(T.)$ associée à ce sous-quotient (cf. [HMDP3] prop. 5.15) :

$$T. = (M_1 \otimes_k A \xrightarrow{j\otimes a} M_0 \otimes_k A \xrightarrow{p\otimes a} M_{-1} \otimes_k A).$$

Étape 2. Calculer le cœur H et le conoyau C de la triade $(T.)$. Si H et C vérifient les conditions N2, N4 et N5 aller à l'étape 3, sinon aller à l'étape 4.

Étape 3. Déterminer la résolution majeure $(L.)$ de $(T.)$ (cf. [HMDP3] prop. 1.14) et aller directement à l'étape 7. Si à la fin on ne trouve pas la bonne famille, on doit revenir à l'étape 5.

Étape 4. Modifier les modules C et H ci-dessus en respectant les conditions N2, N4 et N5 avec toujours C de torsion.

Étape 5. Trouver un élément u de $\mathrm{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ (cf. [HMDP3] paragraphe 5).

Étape 6. Construire une triade majeure $(L.) = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ dont le triplet (C, H, u) associé est celui construit ci-dessus (cf. [HMDP3] prop.5.1 et prop.5.3).

Étape 7. Calculer la résolution $s : L_2 \longrightarrow L_1$ de $N = \mathrm{Ker} d_1$.

Étape 8. Calculer la fonction q et le décalage h selon [HMDP2] pour trouver la résolution de type N de la famille minimale de courbes $\mathcal{C}_0$ associée à la triade $(L.)$. Si $h > 0$ ou si $h \leqslant 0$ mais qu'il n'y a aucune famille de courbes dans $H_{d,g}$ qui soit dans la classe de biliaison de $\mathcal{C}_0$, il faut retourner à l'étape 5 et modifier u. Si l'on n'y parvient pas, on doit retourner à l'étape 4 et modifier les modules C et H, toujours en respectant les conditions N2, N4 et N5. Si $h \leqslant 0$ et si on arrive à appliquer $-h$ biliaisons élémentaires à $\mathcal{C}_0$ pour trouver une famille de courbes $\mathcal{C}$ de degré d et genre g, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.7. — *La famille $\mathcal{C}$ (resp. la triade $(L.)$) joint deux modules ayant mêmes fonctions de Rao que les modules M et M_0 respectivement.*

Comme, dans X_d, la fonction de Rao détermine le couple (γ, ρ) (prop. 2.1), on a :

COROLLAIRE 3.8. — *Si la famille de courbes $\mathcal{C}$ ci-dessus est dans X_d, alors $\mathcal{C}$ joint $H_{\gamma,\rho}$ et H_{γ_0,ρ_0}.*

Remarques 3.9. — 1) L'utilisation de la triade triviale est un moyen d'expliciter les choix triviaux pour C, H et u (cf. [HMDP3] 5.16). En général il faudra modifier les éléments C, H ou u pour obtenir une triade convenable.

2) Le fil conducteur qui nous a servi à sortir de ce labyrinthe est celui proposé dans le paragraphe 5 de [HMDP3] pour joindre les composantes du schéma de Hilbert $H_{4,0}$.

3) Pour calculer la présentation s de N à l'étape 7, on utilise le logiciel Macaulay, ou, directement, les bases de Gröbner (voir [Eis] paragraphe 15 ou [AA] A1).

Dans ce qui suit, nous désignerons par Γ_1 le chemin (trivial) formé des étapes 1,2,3,7 et 8, Γ_2 celui formé des étapes 1,2,5,6,7 et 8 qu'on ne pourra emprunter que si les modules C et H trouvés à l'étape 2 vérifient les conditions N2, N4 et N5, et Γ_3 celui qui correspond aux étapes 1,2,4,5,6,7 et 8.

Remarques 3.10 (construction de u). — On suppose avoir construit C et H satisfaisant les conditions nécessaires N1,...,N5 et on cherche $u \in \mathrm{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ donnant naissance à une triade, selon la procédure de [HMDP3] paragraphe 5. En vertu de [HMDP3] 5.5, on sait qu'un tel élément définit un élément $\theta(u) \in \mathrm{Ext}^1_R(M_{-1}, J)$ qui correspond à l'extension $0 \longrightarrow J \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_{-1} \longrightarrow 0$.

Pour construire u on considère une résolution libre de C :

$$\dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\delta_2} P_2 \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_0} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

et il suffit de se donner un homomorphisme $\hat{u} : P_2 \longrightarrow H$, de degré 0, vérifiant $\hat{u}\,\delta_2 = 0$. Le choix de $\hat{u}$ est guidé par les remarques suivantes :

1) On peut souvent supposer $\hat{u}$ surjectif, en vertu du lemme suivant qui résulte facilement de [HMDP3] 5.5 :

LEMME 3.11. — *Avec les notations ci-dessus, on suppose que la flèche canonique $M_0 \otimes_R k \longrightarrow M_{-1} \otimes_R k$ (de réduction modulo l'idéal (X, Y, Z, T)) est surjective, c'est-à-dire que tous les générateurs de M_{-1} proviennent de M_0. Soit $u \in \mathrm{Ext}^2_{R_A}(C, H)$ tel que $\theta(u) = M_0$. Alors u provient d'un homomorphisme $\hat{u} : P_2 \longrightarrow H$ surjectif.*

2) Dans la plupart des constructions qui suivent, notre objectif est de trouver une triade $L.$ telle que la famille minimale de courbes qui lui est associée ait le plus petit décalage possible (car la courbe C_0 sera souvent une courbe minimale).

Cela impose que le noyau N de $L.$ soit de rang le plus petit possible. En effet, on sait que le faisceau $\mathcal{N}$ associé à N intervient dans la résolution de type N de $\mathcal{C}$: $0\longrightarrow\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{J}_{\mathcal{C}}\longrightarrow 0$ et que, par biliaison ascendante, ce faisceau devient $\mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}$ dissocié, donc voit son rang augmenter.

Cela signifie encore (cf. [HMDP3] 5.3) que le rang du module $\operatorname{Ker}\hat{u}/\operatorname{Im}\delta_2$ doit, lui aussi, être le plus petit possible, autrement dit, que $\hat{u}$ doit être “le plus injectif possible”. C'est cette idée heuristique qui nous guide dans les constructions des homomorphismes $\hat{u}$ menées ci-dessous.

3.3. Énoncé du théorème principal.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe :

THÉORÈME 3.12. — *Soient d un entier $\geqslant 4$, $H_{\gamma,\rho}$ et H_{γ_0,ρ_0} deux sous-schémas à cohomologie constante de X_d. Alors*

1) *Si $(\gamma,\rho)\leqslant(\gamma_0,\rho_0)$, c'est-à-dire si la condition N1 est vérifiée, on a $H_{\gamma_0,\rho_0}\cap\overline{H_{\gamma,\rho}}\neq\varnothing$.*

2) *En particulier, le schéma de Hilbert X_d est connexe pour tout $d\geqslant 4$. Par exemple, pour $d\geqslant 8$ on a, avec les notations de la proposition 2.3, $H_{\gamma_1,\rho_1}\cap\overline{H_{\gamma_2,\rho_2}}\neq\varnothing$, $H_{\gamma_2,\rho_2}\cap\overline{H_{\gamma_3,\rho_3}}\neq\varnothing$ et $H_{\gamma_1,\rho_1}\cap\overline{H_{\gamma_3,\rho_3}}\neq\varnothing$.*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 3.12. Nous commencerons par construire, pour tout couple (d,g) vérifiant : $g\leqslant(d-3)(d-4)/2$ avec $d\geqslant 5$, une famille de courbes dont le point spécial est une courbe extrémale et le point générique une courbe sous-extrémale. Aussi supposerons-nous en 3.4, contrairement au reste du texte, que le genre g est quelconque.

3.4. Des extrémales aux sous-extrémales.

Soient d un entier $\geqslant 5$ et g un entier $\leqslant(d-3)(d-4)/2$ et considérons les deux sous-schémas H_{γ_0,ρ_0} et $H_{\gamma,\rho}$ de $H_{d,g}$ correspondant aux courbes extrémales et sous-extrémales respectivement.

PROPOSITION 3.13. — *Avec les notations ci-dessus, H_{γ_0,ρ_0} est sous-adhérent à $H_{\gamma,\rho}$, i.e. $\overline{H_{\gamma,\rho}}\cap H_{\gamma_0,\rho_0}\neq\varnothing$.*

Preuve. — D'abord il est clair que la condition N1 est vérifiée. Posons $l=d-2$, $c=(d-2)(d-3)/2-g$; on a $l\geqslant 3$ et $c\geqslant l-1$ (le cas $c=l-1$

est celui de X_d). Il suffit de joindre $H_{\gamma,M}$ et H_{γ_0,M_0} avec

$$M_0 = R(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{c+l}) \text{ et } M = R(c-l)/(X,Y,T^{c-l+2},Z^c),$$

et pour cela, nous allons suivre la démarche 3.2, en détaillant la construction.

a) Construction des modules M_1 et M_{-1} : Il s'agit d'écrire M comme sous-quotient de M_0 en respectant la condition N3. Cherchons d'abord le module M_{-1}, quotient de M_0 et vérifiant $\rho_{-1}(n) = h^2\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^2\mathcal{J}_C(n)$.

Notons $r_a, e, \ldots$ les invariants de C_0 et $r'_a, e', \ldots$ ceux de C. On a

$$r_a = 1-c < r'_a = l-c < s_0 = s'_0 = 2.$$

Il en résulte qu'en degrés $< r'_a = l-c$ les modules M_0 et M_{-1} sont égaux et que M_{-1} comporte une unique relation supplémentaire en degré $l-c$ donc s'écrit

$$M_{-1} = R(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{c+1},P,\ldots)$$

avec P de degré $l-1$. Il y a un certain arbitraire pour le choix de P. Nous choisissons ici le polynôme T^{l-1} (on voit facilement, par exemple, que le choix de Z^{l-1} n'est pas compatible avec la valeur $e' = l-3$) et nous posons $M_{-1} = R(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{l-1})$. On vérifie la condition N3 : $\rho_{-1}(n) = h^2\mathcal{J}_{C_0}(n) - h^2\mathcal{J}_C(n)$. On a donc

$$J = (X,Y,Z^c,T^{l-1})(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{c+l}) \simeq R(c-l)/(X,Y,Z^c,T^{c+1}),$$

l'isomorphisme étant donné par la multiplication par T^{l-1} ; on en déduit

$$M_1 = (X,Y,Z^c,T^{c-l+2})(c-l)/(X,Y,Z^c,T^{c+1}) \simeq R(-2)/(X,Y,Z^c,T^{l-1}),$$

où l'isomorphisme est donné par la multiplication par T^{c-l+2}. D'où la triade triviale $(T.)$ associée à ce sous-quotient

$$\begin{aligned} R_A(-2)/(X,Y,Z^c,T^{l-1}) &\xrightarrow{.aT^{c+1}} R_A(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{c+l}) \\ &\xrightarrow{.ap} R_A(c-1)/(X,Y,Z^c,T^{l-1}). \end{aligned}$$

La famille minimale de courbes associée à la résolution majeure de $(T.)$ a un degré supérieur à d et un genre supérieur à g, autrement dit, le chemin trivial Γ_1 ne mène pas à la bonne famille.

b) Construction de C et H : Un calcul facile donne, pour la triade triviale,

$$C = R_A(c-1)/(a, X, Y, Z^c, T^{l-1}) \text{ et } H = R_A(c-l)/(X, Y, Z^c, aT^{c-l+2}, T^{c+1}).$$

Ces modules C et H vérifient les conditions N2, N4 et N5, nous pouvons donc suivre le chemin Γ_2.

c) Construction de u : On doit calculer la résolution de C :

$$\dots \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\delta_2} P_2 \xrightarrow{\delta_1} P_1 \xrightarrow{\delta_0} P_0 \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

On a $P_0 = R_A(c-1)$, $P_1 = R_A(c-1) \oplus R_A(c-2)^2 \oplus R_A(-1) \oplus R_A(c-l)$, $P_2 = R_A(c-2)^2 \oplus R_A(-1) \oplus R_A(c-l) \oplus R_A(c-3) \oplus R_A(-2) \oplus R_A(c-l-1) \oplus R_A(-2) \oplus R_A(c-l-1) \oplus R_A(-l)$ et $\delta_0 = (a, X, Y, Z^c, T^{l-1})$.

En notation condensée, les matrices δ_1 et δ_2 sont respectivement de la forme

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} U & 0 \\ -aI_4 & V \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} V & 0 \\ aI_6 & V' \end{pmatrix}$$

où $U = (X, Y, Z^c, T^{l-1})$, I_n est la matrice identité d'ordre n et où V, V' sont les matrices intervenant dans le complexe de Koszul. Plus précisément on a

$$V = \begin{pmatrix} Y & Z^c & T^{l-1} & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z^c & T^{l-1} & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T^{l-1} \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z^c \end{pmatrix}$$

et

$$V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & T^{l-1} & Z^c \\ T^{l-1} & 0 & 0 & -Y \\ -Z^c & 0 & -Y & 0 \\ 0 & T^{l-1} & 0 & X \\ 0 & -Z^c & X & 0 \\ X & Y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons vu en 3.10 que, pour se donner u, il suffit de se donner un homomorphisme $\hat{u} : P_2 \longrightarrow H$ vérifiant $\hat{u}\,\delta_2 = 0$ et nous avons donné quelques indications sur le choix de $\hat{u}$ que nous explicitons dans le cas présent. Pour simplifier, nous expliquons ce choix dans le cas $l > 3$ et $l - c < 1$. La base canonique de P_2 est notée $e_1, \dots, e_4; \epsilon_1, \dots, \epsilon_6$.

1) Vu la forme de H, la condition $\hat{u}\,\delta_2 = 0$ s'écrit : $a\hat{u}(\epsilon_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, 5$, $t^{l-1}\hat{u}(e_3) + a\hat{u}(\epsilon_6) = 0$, $t^{l-1}\hat{u}(\epsilon_i) = 0$ pour $i = 1, 2, 4$.

2) Pour des raisons de degré on a $\hat{u}(e_i) = 0$ pour $i = 1, 2$ et $\hat{u}(\epsilon_j) = 0$ pour $j = 1, 3, 5$.

3) Comme on peut supposer $\hat{u}$ surjectif (cf. 3.10.1) on a $\hat{u}(e_4) = \overline{1}$ (à un scalaire inversible près).

4) Les conditions sur $\hat{u}(\epsilon_2)$ et $\hat{u}(\epsilon_4)$ donnent $\hat{u}(\epsilon_2) = \alpha\overline{T}^{c-l+2}$ et de même pour ϵ_4. La remarque 3.10.2 conduit à choisir, par exemple, $\hat{u}(\epsilon_2) = \overline{T}^{c-l+2}$.

On choisit donc $\hat{u}$ donné par $\hat{u}(e_4) = 1$, $\hat{u}(\epsilon_2) = \overline{T}^{c-l+2}$ et les images des autres vecteurs de base nulles (on vérifie que tout autre choix pour $\hat{u}(e_3)$ et $\hat{u}(e_4)$ ne change pas le rang de $\operatorname{Ker}\hat{u}/\operatorname{Im}\delta_2$).

d) Calcul de $\operatorname{Ker}\hat{u}$: Considérons le $R-$module S engendré par les éléments $e_1, e_2, \epsilon_1, \epsilon_3, \epsilon_5, e_3, \epsilon_4, \epsilon_2 - T^{c-l+2}e_4, \epsilon_6$, que l'on note $\xi_1, \ldots, \xi_9$ respectivement. On vérifie aisément le lemme suivant :

LEMME 3.14. — *On a* $\operatorname{Ker}\hat{u} = \operatorname{Im}\delta_2 + S$.

e) Construction de la triade : Comme $\hat{u}\,\delta_2 = 0$, l'homomorphisme $\hat{u}$ passe au quotient par $\operatorname{Im}\delta_2$, et on obtient $\overline{u} : \operatorname{Ker}\delta_0 \longrightarrow H$ surjectif avec $\operatorname{Ker}\overline{u} \simeq \operatorname{Ker}\hat{u}/\operatorname{Im}\delta_2$. On cherche une triade majeure $(L.)$ qui admet C pour conoyau et H pour cœur. On peut donc prendre $L_{-1} = P_{-1}$, $L_0 = P_0$ et $d_0 = \delta_0$ d'une part. D'autre part, on doit avoir $\operatorname{Ker} d_0/\operatorname{Im} d_1 = H = \operatorname{Ker}\delta_0/\operatorname{Ker}\overline{u}$, on considère donc une présentation $d_1 : L_1 \longrightarrow L_0$ de $\operatorname{Ker}\overline{u} \subset L_0$, ce qui nous conduit à prendre $L_1 = (2-c)^2, 3-c, (l-c+1)^2, 1, 2^2, l$. On obtient la triade $(L.) = (L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec

$$d_1 = \begin{pmatrix} X & Y & 0 & 0 & 0 & Z^c & 0 & -T^{c+1} & 0 \\ -a & 0 & Y & T^{l-1} & 0 & 0 & 0 & Z^c & 0 \\ 0 & -a & -X & 0 & T^{l-1} & 0 & Z^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & -Y & 0 & 0 & aT^{c-l+2} & -Z^c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & -Y & -X & T^{l-1} \end{pmatrix}$$

f) Calcul de s : Maintenant que nous avons trouvé la triade majeure $(L.)$, il ne reste plus qu'à déterminer la flèche $s : L_2 \longrightarrow L_1$ pour obtenir des informations sur la famille minimale de courbes associée à $(L.)$ (voir [AA] A3 pour les calculs). On trouve :

$$s_{\leqslant 3} = \begin{pmatrix} Y & 0 & 0 & 0 & XZ^c + aT^{c+1} \\ -X & 0 & Z^c & T^{c+1} & 0 \\ a & T^{l-1} & 0 & -Z^c & 0 \\ 0 & -Y & 0 & 0 & a^2T^{c-l+2} \\ 0 & X & 0 & aT^{c-l+2} & 0 \\ 0 & 0 & -Y & 0 & -X^2 \\ 0 & 0 & a & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y & aX \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$s_{>3} = \begin{pmatrix} 0 & Z^cT^{l-1} & T^{c+l} & Z^{2c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & aZ^c & aT^{c+1} - XZ^c & 0 & -Z^{2c} \\ Z^c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -XT^{l-1} & 0 & aT^{c+1} - XZ^c & T^{c+l} \\ -T^{l-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & XT^{l-1} & aZ^c & Z^cT^{l-1} \\ -Y & -aX & X^2 & a^2T^{c-l+2} & XZ^c + aT^{c+1} \end{pmatrix}$$

avec $L_2 = (3-c, l-c+2, 2, 3^2, (l+1)^2, l+2, c+2, c+l+1)$.

g) Calcul de la fonction q : Rappelons qu'on a $l \leqslant c+1$. Vu les chiffres de L_2, nous sommes ramenés à distinguer trois cas pour calculer la fonction q (cf. [HMDP2] 1.15 et 3.1) :

1) $l < c$. Dans ce cas, les degrés de L_2 sont strictement dans l'ordre donné ci-dessus. On trouve les invariants suivants : $\alpha_{3-c} = \beta_{3-c} = 1$, $\alpha_{l-c+2} = \beta_{l-c+2} = 2$, $\alpha_2 = 3$ et $\beta_2 = 2$ ce qui entraîne $b_0 = 1$, $\alpha_3 = \beta_3 = 4, \alpha_{l+1} = 5$ et $\beta_{l+1} \geqslant 4$; d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(3-c) = q(l-c+2) = q(3) = q(l+1) = 1$ et enfin $h = 0$. On obtient la résolution de $\mathcal{C}$ sous forme chiffrée

$$\begin{aligned} &3-c, l-c+2, 3, l+1 \longrightarrow \\ &\quad [(2-c)^2, 3-c, (l-c+1)^2, 1, 2^2, l \longrightarrow 1-c, (2-c)^2, 1, l-c \longrightarrow 1-c] \\ &\hfill \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que la famille minimale associée à $(L.)$ est de degré d et genre g ([MDP1] prop. II.5.2.), et la proposition 3.7 entraîne que la courbe spéciale (resp. la courbe générique) de cette famille est extrémale (resp. sous-extrémale).

2) $l = c = d-2$. Dans ce cas, on a $l - c + 2 = 2$, d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont : $q(5-d) = q(2) = q(3) = q(d-1) = 1$. On obtient la résolution de $\mathcal{C}$ sous forme chiffrée :

$$5-d, 2, 3, d-1 \longrightarrow \\ [\,(4-d)^2, 5-d, 1^3, 2^2, d-2 \longrightarrow 3-d, (4-d)^2, 1, \underline{0} \longrightarrow 3-d\,] \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}.$$

On vérifie aisément que la famille minimale associée à $(L.)$ est de degré d et genre $g = (d-3)(d-4)/2 - 1$.

3) $l = c+1 = d-2$. Ce dernier cas correspond au schéma de Hilbert X_d. Cette fois, on a dans les degrés de L_2 : $2 < l - c + 2$ et $l + 1 = c + 2$. D'où les invariants suivants : $\alpha_{6-d} = \beta_{6-d} = 1$, $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$ ce qui entraîne $b_0 = 1$, $\alpha_3 = \beta_3 = 4, \alpha_{d-1} = 5$ et $\beta_{d-1} \geqslant 4$; d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(6-d) = 1$, $q(3) = 2$ et $q(d-1) = 1$. On obtient la résolution de $\mathcal{C}$ sous forme chiffrée :

$$6-d, 3^2, d-1 \longrightarrow [\,5-d^2, 6-d, 1, 2^3, d-2, 2 \longrightarrow 4-d, 5-d^2, 1^2 \longrightarrow 4-d\,] \\ \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}.$$

On vérifie aisément que la famille minimale associée à $(L.)$ est de degré d et genre $(d-3)(d-4)/2$. C.Q.F.D.

3.5. Retour à X_d.

Avec les notations du paragraphe 2, posons $Y_i = H_{\gamma_i,\rho_i}$ et $H_i = \overline{Y_i}$. Nous avons montré en 3.4 que Y_1 est sous-adhérent à Y_2. Cette fois, nous commençons par montrer que Y_2 est également sous-adhérent à Y_3, ce qui entraîne en particulier la connexité de X_d pour $d \neq 6, 7$. Nous montrons ensuite que Y_1 est sous-adhérent à Y_3, ce qui achèvera la preuve du point 1) du théorème 3.12 dans le cas $d \neq 6, 7$. Nous terminons enfin la démonstration de ce théorème en traitant les cas particuliers $d = 7$ et $d = 6$.

3.5.1. *Des sous-extrémales aux* $k(-1)$.

PROPOSITION 3.15. — *Avec les notations ci-dessus on a* $Y_2 \cap H_3 \neq \varnothing$.

Preuve. — Cette fois, il suffit de construire une famille de courbes joignant les sous-schémas $H_{\gamma_3,M}$ et H_{γ_2,M_0} de X_d, avec $M = k(-1)$ et

$M_0 = R(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3})$, pour $d \geqslant 5$ (pour $d = 4$ les deux schémas coïncident). Nous allons suivre la procédure 3.2.

Comme il s'agit de construire une famille à spécialité constante car les courbes spéciale et générique de cette famille ont même spécialité, on doit avoir $M_{-1} = 0$ pour satisfaire la condition N3, on écrit donc M comme quotient de M_0 (cf. [HMDP3] 4.6) avec :

$$M_1 = (X,Y,Z,T)(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3}) \simeq R(-2)/(X,Y,Z,T^{d-4}).$$

La triade triviale associée à ce quotient est donc modulaire définie par le module $M_A = R_A(-1)/(X,Y,Z,aT,T^{d-3})$:

$$R_A(-2)/(X,Y,Z,T^{d-4}) \xrightarrow{.aT} R_A(-1)/(X,Y,Z,T^{d-3}) \longrightarrow 0,$$

et cette fois, nous pouvons suivre le chemin Γ_1. La résolution majeure de la triade ci-dessus est la triade suivante (cf. [HMDP3] prop. 1.14) : $(2^4, d-2 \xrightarrow{d_1} 1 \xrightarrow{d_0} 0)$ avec $d_1 = (aT,X,Y,Z,T^{d-3})$.

On utilise les bases de Gröbner pour calculer la flèche $s : L_2 \longrightarrow L_1$ (voir [AA] A.2 pour les calculs). On obtient $L_2 = (3^3, d-2, 3^2, d-1, 3, d-1^2)$ et

$$s = \begin{pmatrix} X & Y & Z & T^{d-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -aT & 0 & 0 & 0 & Y & Z & T^{d-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -aT & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & Z & T^{d-3} & 0 \\ 0 & 0 & -aT & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T^{d-3} \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{pmatrix}$$

On trouve alors les invariants suivants : $\alpha_3 = \beta_3 = 3$, $\alpha_{d-1} = \beta_{d-1} = 4$, $b_0 = 2$; d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(3) = 2$ et $q(d-1) = 1$ et enfin $h = 0$. D'où la résolution de la courbe minimale C associée à $(L_.)$ sous forme chiffrée

$$3^2, d-1 \longrightarrow [2^4, d-2 \longrightarrow 1] \longrightarrow I_C.$$

La courbe C est à spécialité constante, a pour degré d et genre $(d-3)(d-4)/2$ et joint H_{γ_3,ρ_3} et H_{γ_2,ρ_2} en vertu du corollaire 3.8, et on en conclut que $Y_2 \cap H_3$ est non vide.

3.5.2. *Connexité du schéma de Hilbert X_d.*

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le point 2) du théorème 3.12 :

COROLLAIRE 3.16. — *Le schéma de Hilbert X_d des courbes de degré d et genre $(d-3)(d-4)/2$ est connexe pour tout $d \geqslant 4$.*

Preuve. — En effet, pour $d \neq 6$ ou 7, H_1, H_2 et H_3 constituent un recouvrement de X_d, et on en conclut par 3.13 et 3.15.

Pour $d = 6$, les composantes irréductibles de X_6 sont H_1, H_2 et H_5. Comme on a montré que H_5 contient H_3, la connexité de X_6 en résulte encore par 3.13 et 3.15.

Il reste à montrer la connexité de X_7 dont les composantes irréductibles sont H_1, H_2, H_3 et H_4. Nous verrons (cf. 3.5.4.1) ci-dessous) que $H_2 \cap H_4$ est non vide et cela entraîne la connexité de X_7 toujours par 3.13 et 3.15.

3.5.3. *Des extrémales aux $k(-1)$.*

Ce cas est un peu plus compliqué que les précédents. Nous allons devoir modifier le module H bien qu'il vérifie les conditions N2 et N4. En effet, une nouvelle condition nécessaire, qui tient à la structure infinitésimale de la famille cherchée, est donnée par le lemme suivant (cf. [AA] 4.21 pour la preuve) :

LEMME 3.17. — *Soient C une famille de courbes dont le point spécial C_0 est une courbe extrémale, H le cœur d'une triade de Rao associée, H_τ le sous-module de torsion de H, $p : H_\tau \longrightarrow H_\tau \otimes_A k$ la projection canonique et $\phi : \mathrm{Tor}^1_A(H,k) \longrightarrow H_\tau \otimes_A k$ sa restriction à $\mathrm{Tor}^1_A(H,k)$. Alors $\mathrm{Im}\,\phi$ est un R-module monogène.*

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.18. — *On a $Y_1 \cap H_3 \neq \varnothing$.*

Preuve. — Posons $M_0 = R(d-4)/(X,Y,Z^{d-3},T^{2d-5})$, $M = k(-1) = R(-1)/(X,Y,Z,T)$ et essayons de joindre $H_{\gamma_3,M}$ et H_{γ_1,M_0} en suivant la démarche 3.2.

Un calcul facile donne

$$C = R_A(d-4)/(a,X,Y,Z^{d-3},T^{d-3})$$

et

$$H = R_A(-1)/(X,Y,aZ,aT,Z^{d-3},T^{d-2}).$$

Ces modules C et H vérifient les conditions N2, N4 et N5, mais en fait, la famille que nous recherchons ne peut admettre le module H ci-dessus pour cœur car on a $aH_\tau = 0$, et cela équivaut à $H_\tau = \mathrm{Tor}^1_A(H, k)$ ce qui entraîne, avec les notations de 3.17, que ϕ est surjective. Mais cela n'est pas possible car on aurait $\mathrm{Im}\,\phi = M_1$ alors que M_1 n'est pas monogène tandis que $\mathrm{Im}\,\phi$ l'est (lemme 3.17). On doit donc modifier ce H de sorte que H_τ ne soit pas annulé par a. Le H le plus simple vérifiant cette condition et les conditions N2 et N4 est le suivant : $H = R_A(-1)/(X, Y, a^2Z, aT, Z^{d-3}, T^{d-2})$.

Nous pouvons maintenant suivre le chemin Γ_2. La résolution de C est toujours donnée par le complexe de Koszul comme en 3.4.c. On a donc : $P_0 = 4 - d$; $P_1 = 4 - d, (5 - d)^2, 1^2$; $P_2 = (5 - d)^2, 1^2, 6 - d, 2^4, d - 2$ et $\delta_0 = (a, X, Y, Z^{d-3}, T^{d-3})$.

Un calcul analogue à celui de 3.4.e conduit à la triade majeure $(L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec $L_{-1} = P_0$, $L_0 = P_1$, $L_1 = ((5 - d)^2, 6 - d, 1, 2^4, d - 2)$, $d_0 = \delta_0$ et

$$d_1 = \begin{pmatrix} X & Y & 0 & Z^{d-3} & 0 & 0 & 0 & -T^{d-2} & -aZT^{d-3} \\ -a & 0 & Y & 0 & T^{d-3} & 0 & 0 & Z^{d-3} & 0 \\ 0 & -a & -X & 0 & 0 & T^{d-3} & 0 & 0 & Z^{d-3} \\ 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & T^{d-3} & -X & -Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -Y & -Z^{d-3} & aT & a^2Z \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice s et de la fonction q (cf. [AA]) donne la résolution de C suivante :

$$6-d, 3^2, d-1 \longrightarrow [\,(5-d)^2, 6-d, 1, 2^4, d-2 \longrightarrow 4-d, (5-d)^2, 1^2 \longrightarrow 4-d] \longrightarrow \mathcal{J}_C.$$

Il s'ensuit que C est de degré d et genre $g = (d - 3)(d - 4)/2$ et joint Y_1 et Y_3 par 3.8.

Pour achever la démonstration du point 1) du théorème 3.12, il nous reste à traiter les cas particuliers correspondant à $d = 7$ et $d = 6$.

3.5.4. *Le cas du schéma $H_{7,6}$.*

Remarquons que le couple (Y_3, Y_4) ne vérifie pas la condition de semi-continuité N1, donc il n'y a pas de famille qui joint ces deux composants. Les seules relations d'incidence qui restent sont donc Y_2 avec Y_4 et Y_1 avec Y_4 (cf. 1) et 2) ci-dessous).

1) Des sous-extrémales aux ACM.

Il s'agit cette fois de joindre les sous-schémas $H_{\gamma_4,M}$ et H_{γ_2,M_0} du schéma $X_7 = H_{7,6}$ avec $M_0 = R(-1)/(X,Y,Z,T^4)$ et $M = 0$. Un calcul facile donne pour la triade triviale

$$C = R_A(-1)/(a,X,Y,Z,T^2) \text{ et } H = R_A(-3)/(a,X,Y,Z,T^2).$$

Par un calcul analogue à celui de 3.4.e, on obtient la triade majeure $(L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec $L_{-1} = P_0$, $L_0 = P_1$, $L_1 = (2^3,3,4,3,4^2,3)$, $d_0 = \delta_0$ et

$$d_1 = \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T^2 \\ -a & 0 & 0 & Y & T^2 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 0 & -a & 0 & -X & 0 & Z & T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -Y & 0 & T^2 & -X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z & a \end{pmatrix}$$

Grâce à Macaulay (cf. [BS]), on calcule la matrice s et on trouve la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(3) = q(4) = 1$, $q(5) = 2$, et enfin $h = -1$ [HMDP2]. La famille $\mathcal{C}$ est donc de degré 5 et genre 2 ([MDP1] prop. II.5.2.). En appliquant une biliaison (2,1) à $\mathcal{C}$ on trouve une famille $\mathcal{C}'$ de degré 7 et genre 6 dont la courbe générique est dans H_4 et dont la courbe spéciale est dans H_2 (corollaire 3.8).

2) Des extrémales aux ACM.

Il s'agit de joindre les sous-schémas $H_{\gamma_4,M}$ et H_{γ_1,M_0} de $H_{7,6}$ avec : $M = 0$ et $M_0 = R(3)/(X,Y,Z^4,T^9)$. Un calcul facile donne pour la triade triviale

$$C = R_A(3)/(a,X,Y,Z^4,T^5,Z^2T^4)$$

et

$$H = (X,Y,Z^2,T)(-1)/(X,Y,aZ^2,aT,Z^4,T^5).$$

Ces modules C et H ne vérifient pas les conditions N4 et N5, nous devons donc suivre le chemin Γ_3.

La condition N4 donne $q_H(2) \leqslant 2$, $q_H(7) \leqslant 1$ et $q_H(n) = 0$ sinon. On en déduit que dans $\operatorname{Tor}_1^A(H,k)$, z^2 doit être engendré par t, ce qui n'est pas vérifié par le module H ci-dessus. Voici un module H

qui comble cette lacune et qui vérifie les conditions N2 et N4 : $H = (X,Y^2,Z^2,T)(-1)/(X,Y^2,aT,aZ^2-YT,YZ^2,YT^2,Z^4,T^5)$.

La condition N5 donne $q_C(-3)=1$ et $q_C(n)=0$ sinon, ce qui entraîne que $(C\otimes_A k)^*$ doit être monogène ce qui n'est pas vérifié par le module C ci-dessus et on doit donc le modifier. Voici un module C défini par sa résolution et vérifiant les conditions N2 et N5 :

$$\dots \xrightarrow{\delta_2} -2^2,-1,1,2^5,3^4,4^4 \xrightarrow{\delta_1} -3,-2^2,1^2,2^3,3 \xrightarrow{\delta_0} -3,1 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où les matrices δ_1 et δ_2 se calculent avec le logiciel Macaulay à partir de δ_0 :

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} a & X & Y & 0 & 0 & 0 & Z^4 & T^4 & Z^2T^3 \\ 0 & 0 & 0 & X & T & Z^2 & 0 & -a & -Y \end{pmatrix}$$

Désignons par $e_1,\dots,e_{17}$ la base canonique de P_2. Considérons alors l'homomorphisme $\hat{u} : P_2 \longrightarrow H$ défini par $\hat{u}(e_9)=\hat{u}(e_{14})=t$, $\hat{u}(e_{15})=z^2$ et $\hat{u}(e_i)=0$ sinon qui vérifie $\hat{u}\,\delta_2=0$. On montre alors, en utilisant les bases de Gröbner, que l'on a

$$\operatorname{Ker}\hat{u} = \operatorname{Im}\delta_2 + \langle e_i, i\neq 9,14,15; e_{14}-e_9\rangle.$$

On obtient ainsi la triade majeure $(L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec $L_{-1} = (-3,1)$, $L_0=(-3,-2^2,1^2,2^3,3)$, $L_1=(-2^2,-1,1,2^4,3^3,4^4)$, $d_0=\delta_0$ et

$$d_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y & X & 0 & 0 & 0 & 0 & Z^4 & 0 & 0 & Z^2T^3 & T^5 & 0 & 0 \\ 0 & -Y & 0 & -a & 0 & 0 & T^4 & Z^4 & 0 & Z^2T^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T^4 & -Z^4 & Z^2T^4 & 0 \\ -T & 0 & 0 & 0 & Z^2 & 0 & -a & 0 & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & Z^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -T & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -aY & Y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -a & 0 & 0 & 0 & Y & 0 & -T^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & -Z^2 & Y & -aT & -YZ^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & T & -a & 0 & 0 & Z^2 \end{pmatrix}$$

Grâce à Macaulay, on calcule la matrice s et on trouve les invariants suivants : $\alpha_{-1}=\beta_{-1}=1$, $\alpha_2=2$ et $\beta_2=1$ ce qui entraîne $b_0=1$; $\alpha_3=4$, $\beta_3=3$; $\alpha_4=6$, $\beta_4\geqslant 5$; $\alpha_5\geqslant 8$ et $\beta_5\geqslant 7$, d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(-1)=1$ et $q(3)=q(4)=q(5)=2$, et enfin $h=0$. La famille minimale C associée à la triade $(L.)$ est donc de degré 7 et genre 6 et joint H_1 et H_4 en vertu du corollaire 3.8.

3.5.5. *Le cas du schéma* $H_{6,3}$.

Nous avons déjà vu que l'on a $H_3 \cup H_4 \subset H_5$ (cf. 2.3.3)), et il est clair que le couple (Y_3, Y_4) ne vérifie pas la condition de semi continuité N1. Les seules incidences qui restent à montrer sont donc Y_2 avec Y_4 et Y_1 avec Y_4 (cf. 1) et 2) ci-dessous).

1) Des sous-extrémales aux $k(-2)$.

En appliquant une biliaison (2,1) à une famille de courbes qui joint les deux composantes de $H_{4,0}$, on obtient une famille (6,3) dont la courbe spéciale est sous-extrémale et dont la courbe générique a pour module de Rao $k(-2)$.

2) Des extrémales aux $k(-2)$.

Il s'agit de joindre les sous-schémas $H_{\gamma_4,M}$ et H_{γ_1,M_0} de $H_{6,3}$ avec : $M = k(-2)$ et $M_0 = R(2)/(X,Y,Z^3,T^7)$. Un calcul facile donne

$$C = R_A(2)/(a, X, Y, Z^3, T^4, ZT^3)$$

et

$$H = (X, Y, Z, T)(-1)/(X, Y, aZ^2, aT, Z^3, T^4).$$

Ces modules C et H ne vérifient pas les conditions N4 et N5, nous devons donc suivre le chemin Γ_3.

La condition N4 donne $q_H(2) \leqslant 1$, $q_H(4) \leqslant 3$ et $q_H(n) = 0$ sinon. On en déduit que dans $\mathrm{Tor}_1^A(H,k)$, z^2 doit être engendré par t, ce qui n'est pas vérifié par le module H ci-dessus. Voici un module H qui comble cette lacune et qui vérifie les conditions N2 et N4 : $H = (X, Y^2, Z, T)(-1)/(X, Y^2, aT, aZ^2 - YT, YZ, YT^2, Z^3, T^4)$.

La condition N5 donne $q_C(-2) = 1$ et $q_C(n) = 0$ sinon, ce qui entraîne que $(C \otimes_A k)^*$ doit être monogène ce qui n'est pas vérifié par le module C ci-dessus et on doit donc le modifier. Voici un module C défini par sa résolution et vérifiant les conditions N2 et N5 :

$$\ldots \xrightarrow{\delta_2} -1^2, 0, 1, 2^6, 3^8 \xrightarrow{\delta_1} -2, -1^2, 1^2, 2^4 \xrightarrow{\delta_0} -2, 1 \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

où les matrices δ_1 et δ_2 se calculent avec le logiciel Macaulay à partir de δ_0 :

$$\delta_0 = \begin{pmatrix} a & X & Y & 0 & 0 & 0 & Z^3 & T^3 & Z^2T^2 \\ 0 & 0 & 0 & X & Z & T & 0 & -a & -Y \end{pmatrix}$$

Désignons par $e_1, \ldots, e_{18}$ la base canonique de P_2 et considérons l'homomorphisme $\hat{u} : P_2 \longrightarrow H$ défini par $\hat{u}(e_9) = \hat{u}(e_{16}) = t$, $\hat{u}(e_{15}) = z$, $\hat{u}(e_{18}) = z^2$ et $\hat{u}(e_i) = 0$ sinon. On vérifie que $\hat{u}\,\delta_2 = 0$ et on montre que l'on a

$$\operatorname{Ker} \hat{u} = \operatorname{Im} \delta_2 + \langle e_i, i \neq 9, 15, 16, 18; e_{16} - e_9 \rangle.$$

On obtient ainsi la triade majeure $(L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{d_0} L_{-1})$ avec $L_{-1} = (-2, 1)$, $L_0 = (-2, -1^2, 1^2, 2^4)$, $L_1 = (-1^2, 0, 1, 2^4, 3^7)$, $d_0 = \delta_0$ et

$$d_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & Y & X & 0 & 0 & Z^3 & 0 & 0 & 0 & Z^2T^2 & T^4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -Y & 0 & -a & T^3 & Z^3 & 0 & Z^2T^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -T^3 & -Z^3 & ZT^3 \\
-T & 0 & -Z & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & -Y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -T & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y & aZ & 0 & 0 & -aY \\
X & Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Y & 0 & -a^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -a & 0 & -T^2 & 0 & 0 & Y & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 & 0 & 0 & Z^2 & Y & -aT & -YZ \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & Z & -T & -a & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Grâce à Macaulay, on calcule la matrice s et on trouve les invariants suivants : $\alpha_0 = \beta_0 = 1$, $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$ ce qui entraîne $b_0 = 1$; $\alpha_3 = 5$, $\beta_3 = 4$; $\alpha_4 \geqslant 8$ et $\beta_4 \geqslant 7$, d'où la fonction q dont les valeurs non nulles sont $q(0) = 1$, $q(2) = 0$ et $q(3) = q(4) = 3$, et enfin $h = 0$. La famille minimale $\mathcal{C}$ associée à la triade $(L.)$ est donc de degré 6 et genre 3 et joint Y_1 et Y_4 en vertu du corollaire 3.8.

BIBLIOGRAPHIE

[AA] S. AIT AMRANE, Sur le schéma de Hilbert des courbes gauches de degré d et genre $g = (d-3)(d-4)/2$, Thèse de l'Université Paris-Sud, Décembre 1998.

[E] Ph. ELLIA, On the cohomology of projective space curves, Bolletino U.M.I., (7), 9-A (1995), 593-607.

[BS] D. BAYER et M. STILLMAN, Macaulay : A system for computation in algebraic geometry and commutative algebra.

[EGA I] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique, I, Grundlehren 166, Springer Verlag, Heidelberg, 1971.

[Eis] D. EISENBUD, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Springer Verlag, New York, 1995.

[Hal] G. HALPHEN, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Journal de l'École Polytechnique, 52^e cahier, 1882-Œuvres complètes, t. 3, Gauthiers-Villars éditeur, Paris, 1921, p. 261-455.

[H] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[HMDP1] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches, rapport de recherche du LMENS 97-15, 1997.

[HMDP2] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Construction de familles minimales de courbes gauches, rapport de recherche du LMENS 97-29, 1997.

[HMDP3] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Triades et familles de courbes gauches, rapport de recherche du LMENS 97-33, 1997.

[MDP1] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Sur la classification des courbes gauches I, Astérisque, vol. 184-185 (1990).

[MDP2] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Quand un morphisme de fibrés dégénère-t-il le long d'une courbe lisse ?, in Algebraic Geometry (P.E. Newstead ed.), Lecture Notes in pure and applied math., vol. 200, 1998, p. 119-167.

[MDP3] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Sur les bornes du module de Rao, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 137, série I, (1993), 1159-1162.

[MDP4] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^{e} série, t. 29 (1996), 757-785.

[MDP5] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Sur les courbes gauches à modules de Rao non connexes, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I (1994), 233-236.

[Mi] J. MIGLIORE, On linking double lines, Trans. A.M.S., vol. 294, n^{o}1 (1986), 177-185.

[N1] S. NOLLET, The Hilbert scheme of degree three curves, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 30 (1997), 367-384.

[N2] S. NOLLET, Subextremal curves, Manuscr. Math., 94 (1997), 303-317.

Manuscrit reçu le 23 novembre 1999,
accepté le 27 avril 2000.

Samir AIT AMRANE,
Université Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).
Samir.Aitamrane@math.u-psud.fr