VINCENT COSSART
CARLOS GALINDO
OLIVIER PILTANT

Un exemple effectif de gradué non noethérien associé à une valuation divisorielle

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 1 (2000), p. 105-112
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_1_105_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 1 (2000), 105–112

UN EXEMPLE EFFECTIF DE GRADUÉ NON NOETHÉRIEN ASSOCIÉ À UNE VALUATION DIVISORIELLE

par V. COSSART, C. GALINDO(*) et O. PILTANT

Introduction.

En dimension 2, le gradué d'un anneau local régulier associé à une valuation divisorielle est noethérien [Gö], cor. 3.11, [Li], prop. 3.11 ou [S], th. 8.6. L'étude d'un tel gradué nécessite la théorie des idéaux complets [Z]. En dimension supérieure, il existe une théorie des idéaux complets à *supports finis* [L]. Cette note prouve que la structure du gradué associé à une valuation divisorielle à support fini, c'est-à-dire une valuation associée à un diviseur exceptionnel obtenu après une suite finie d'éclatements de points fermés, est loin d'être connue.

Notations et construction de la valuation.

On éclate $X_0 = \operatorname{Spec} R$ le long de son idéal maximal, soit X_1 la variété obtenue. Dans le diviseur exceptionnel $E_1 := \operatorname{Proj} k[x, y, z]$, soit la cubique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2z + xy^2 + y^3$ et on note M_1 le point fermé de E_1 de coordonnées homogènes $(1 : 0 : 0)$. M_1 est un point lisse de C. On définit alors la suite d'éclatements :

$$X_0 \longleftarrow X_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow X_n, \ 10 \leq n,$$

(*) Le deuxième auteur remercie l'Université de Versailles-Saint-Quentin et plus particulièrement l'U.F.R. de Versailles pour son invitation d'un mois en 1998 sur un support de professeur. C'est durant cette visite que cet article a été écrit.
Mots-clés : (finitely supported) Divisorial valuations – Effective – Graded algebra (relative to a valuation).
Classification math. : 14B05 – 13F30.

où $X_i \longleftarrow X_{i+1}$ est l'éclatement centré en le point fermé M_i, exceptionnel pour $X_i \longleftarrow X_{i+1}$, sur le transformé strict de la cubique $\mathcal{C}$ dans X_i, $1 \leq i \leq n-1$. Soit $\mathfrak{M}_{n-1}$ l'idéal maximal définissant M_{n-1}, on prend pour ν la valuation $\mathfrak{M}_{n-1}$-adique de $\mathcal{O}_{X_{n-1},M_{n-1}}$. C'est-à-dire que, si on désigne par E_n le diviseur exceptionnel de $X_{n-1} \longleftarrow X_n$, $\nu=\mathrm{ord}_{E_n}$.

Calcul du gradué.

Posons $R_i = \mathcal{O}_{X_i,M_i}$, $1 \leq i \leq n-1$. On a :

$$R_1 = k[a_1, b_1, c_1]_{(a_1,b_1,c_1)}$$

où $a_1 = x,\ b_1 = \frac{y}{x},\ c_1 = \frac{z}{x} + (\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})^3$ et

$$R_{n-1} = k[a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}]_{(a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1})}$$

où $a_{n-1} = \frac{x}{b_1^{n-2}} = \frac{x^{n-1}}{y^{n-2}},\ b_{n-1} = b_1,\ c_{n-1} = \frac{c_1}{b_1^{n-2}}$.

On en déduit : $\nu(a_1) = n-1, \nu(b_1) = 1, \nu(c_1) = n-1$. Soit

$$P = P_1 + \cdots + P_m \in (x,y,z)k[x,y,z]$$

avec $P_i \in k[x,y,z]$ homogène de degré i, $1 \leq i \leq m = \deg(P)$.

$$\begin{aligned} P &= a_1 P_1(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3) + \cdots + a_1^m P_m(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3) \\ &= a_1 Q_1(b_1, c_1) + \cdots + a_1^m Q_m(b_1, c_1) \end{aligned}$$

où $Q_j(b_1, c_1) = P_j(1, b_1, c_1 - {b_1}^2 - {b_1}^3)$, $1 \leq j \leq m$.

$$P = a_{n-1}b_{n-1}^{n-2}Q_1(b_{n-1}, b_{n-1}^{n-2}c_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1}b_{n-1}^{n-2})^m Q_m(b_{n-1}, b_{n-1}^{n-2}c_{n-1}).$$

De ces calculs fastidieux, il ressort que la valeur d'un polynôme $P \in k[x,y,z]$ est la plus petite valeur de ses composantes homogènes : il suffit de faire le développement de P dans $k[a_1,b_1,c_1]$ et d'affecter à a_1 le poids $n-1$, à b_1 le poids 1 et à c_1 le poids $n-1$ [S], cor. 8.5, th. 8.6. Dans le langage de Spivakovsky, ν est monomiale en a_1, b_1, c_1.

Plus précisément, en posant $I_\alpha = \{r \in R \mid \nu(r) \geq \alpha\}$, l'anneau $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha/I_{\alpha+1}$ qui est le "petit gradué" de R associé à ν est une sous $k[A_1]$-algèbre de $\mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$ où A_1 est la forme initiale de a_1 dans $\mathrm{gr}_\nu(R_1)$, B_1 celle de b_1 et C_1 celle de c_1, $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha/I_{\alpha+1}$ est *bigradué*; il est gradué par les valeurs des α du semi-groupe de ν et par les degrés en A_1, un élément $A_1^m Q(B_1, C_1)$ est la forme initiale d'un polynôme homogène de degré m de $k[x,y,z]$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, le k-espace vectoriel des éléments de la forme $A_1^m Q(B_1, C_1)$ de $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$*

est engendré par les monômes $A_1^m B_1^a C_1^b$ *avec (1)* $m \geq 3b$ *et (2)* $a = 0$ *ou* $a \leq 3(m - 3b) - 1$.

Prouvons d'abord trois lemmes et nous reprendrons ensuite la preuve de la proposition 1.

LEMME 1. — *Avec les hypothèses et notations de la proposition 1, si* P *est un polynôme homogène de degré* m *et si* P *n'est pas divisible par* $C = x^2z + xy^2 + y^3$, *alors*

$$\operatorname{col}\Big(c_1, P\Big(1, b_1, \frac{z}{x}\Big)\Big) \leq 3m - 1,$$

où $\operatorname{col}(c_1, r)$ *est la colongueur de l'idéal* $(c_1, r) \subset k[b_1, c_1]_{(b_1, \frac{z}{x})}$.

Preuve. — On a $P = a_1^m P(1, b_1, \frac{z}{x}) = a_1^m Q(b_1, c_1)$, où Q est un polynôme de degré total $\leq 3m$. Comme c_1 ne divise pas Q, on a $\operatorname{col}(c_1, Q(b_1, c_1)) = \operatorname{col}(c_1, Q(b_1, 0)) \leq \operatorname{col}(c_1, b_1^{3m}) = 3m$.

Supposons le lemme faux, alors, pour un P, $\operatorname{col}(P(1, b_1, \frac{z}{x}), c_1) = 3m$, $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda b_1^{3m} \operatorname{mod} c_1 R_1$, $\lambda \in k^*$. Donc : $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda(\frac{z}{x})^m + \sum_{0 \leq j \leq m-1} (\frac{z}{x})^j P_j$, où $P_j \in k[b_1]$ est de degré au plus $m - j$. En substituant $\frac{z}{x} = c_1 - b_1^2 - b_1^3$, on a : $P(1, b_1, \frac{z}{x}) = \lambda(-1)^m (b_1^{3m} + m b_1^{3m-1}) + P' \operatorname{mod} c_1 R_1$, où $P' \in k[b_1]$ est de degré $\leq 3m - 2$, comme $m \neq 0$, on a une contradiction. *Rappelons que la caractéristique de* k *est nulle.*

LEMME 2. — *Pour tout* j, $0 \leq j \leq 3m-1$, *il existe un polynôme* $P_{j,m} \in k[x, y, z]$ *homogène de degré* m *tel que*

$$P_{j,m}(1, b_1, \frac{z}{x}) = \gamma_{j,m} b_1^j \operatorname{mod} c_1 R_1,$$

avec $\gamma_{j,m} \in k[b_1]$ *et* $\gamma_{j,m}(0) \neq 0$.

Preuve. — Prouvons ce lemme par récurrence sur m. Dans le cas $m = 1$, il suffit de prendre $P_{0,1} = x$, $P_{1,1} = y$, $P_{2,1} = z$.

Passons au cas $m \geq 2$. On peut poser $P_{0,m} = x^m$, $P_{1,m} = x^{m-1}y$ et, par récurrence sur m, pour $2 \leq j \leq 3m - 2$, $P_{j,m} = z P_{j-2,m-1}$. Il n'y a plus qu'à construire $P_{3m-1,m}$.

Soit P l'unique combinaison linéaire $P = y^m + \sum_{m \leq j \leq 3m-2} \alpha_j P_{j,m}$, $\alpha_j \in k$ telle que : $\operatorname{mult}_0[P(1, b_1, \frac{z}{x})] \operatorname{mod} c_1 R_1 \geq 3m-1$. On a $P = y^m \operatorname{mod} z$ et donc $x^2z + xy^2 + y^3$ ne divise pas P.

Par le lemme 1, on peut prendre $P_{3m-1,m} = P$.

LEMME 3. — *Dans le lemme 2 ci-dessus, on peut prendre* $P_{j,m} \in k[x, y, z]$ *de façon que* $\operatorname{in}_\nu(P_{j,m}) = \gamma_{j,m}(0) B_1^j A_1^m$.

Preuve. — En effet, si ce n'est pas le cas, $\mathrm{in}_\nu(P_{j,m}) = A_1^m \sum \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b$ [S], th. 8.6, avec $9b + a \leq (n-1)b + a \leq \nu(B_1^j) = j \leq 3m - 1$ et donc $a \leq 3(m-3b) - 1$ (la première inégalité est une conséquence de $10 \leq n$, c'est la première fois que nous utilisons cette hypothèse). On remplace alors $P_{j,m}$ par $P_{j,m} - \sum \lambda_{a,b}(x^2z + xy^2 + y^3)^b \gamma_{a,m-3b}(0)^{-1} P_{a,m-3b}$, une récurrence simple sur $\nu(P_{j,m})$ prouve l'assertion.

Preuve de la proposition 1. — Montrons que le k-espace vectoriel des éléments de la forme

$$A_1^m Q(B_1, C_1) = A_1^m \sum_{a+b \leq m} \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b, \ \lambda_{a,b} \in k$$

de $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$ est inclus dans le k-espace vectoriel engendré par les monômes $A_1^m B_1^a C_1^b$, $a \leq 3(m-3b) - 1$ *ou* $a = 0$, $3b = m$. Soit $P \in k[x,y,z]$ homogène de degré m. $P = a_1^m P(1, b_1, \frac{z}{x}) = a_1^m Q(b_1, c_1)$, où Q est un polynôme de degré total $\leq 3m$. Si c_1 ne divise pas Q, on a $\mathrm{in}_\nu(P) = A_1^m \mathrm{in}_\nu(P(1, b_1, \frac{z}{x})) = A_1^m \sum \lambda_{a,b} B_1^a C_1^b$ avec $9b + a \leq (n-1)b + a = \nu(P) \leq 3m - 1$. Si c_1 divise Q, on se ramène au cas précédent en divisant P par la plus grande puissance possible de C.

Montrons l'inclusion inverse. Dans le cas $m{=}1$, on remarque que $\mathrm{in}_\nu(x) = A_1$, $\mathrm{in}_\nu(y) = A_1 B_1$, $\mathrm{in}_\nu(z) = A_1 B_1^2$. Dans le cas $m \geq 2$, si $a \leq 3(m-3b)-1$ *ou* $a = 0$, $3b = m$, on a

$$A_1^m B_1^a C_1^b = \mathrm{in}_\nu(\gamma_{a,m-3b}(0)^{-1} P_{a,m-3b} C^b).$$

PROPOSITION 2. — *Le système* A_1, A_1B_1, $A_1^3C_1$, $A_1B_1^2$, $A_1^2B_1^5$, $A_1^3B_1^8$, $A_1^4B_1^{11}, \ldots, A_1^m B_1^{3m-1}, \ldots$ *est un système minimal de générateurs de la k-algèbre* $\mathrm{gr}_\nu(R) \subset \mathrm{gr}_\nu(R_1) = k[A_1, B_1, C_1]$. *En particulier,* $\mathrm{gr}_\nu(R)$ *n'est pas noethérien.*

Preuve. — Prouvons que ce système est générateur.

Dans le cas où $a \geq 3$, définissons $a' \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ par : $a = (3q-1) + a'$, $0 \leq a' \leq 2$. On a alors

$$A_1^m B_1^a C_1^b = (A_1^3 C_1)^b (A_1^q B_1^{3q-1})(A_1^{m-q-3b} B_1^{a'}),$$

la condition $a \leq 3(m-3b) - 1$ est équivalente à $a' \leq 3(m-q-3b)$. On se ramène donc à étudier les cas $a = 0, 1, 2$. Dans le cas $a = 0$, on a $m - 3b \geq 0$ et

$$A_1^m C_1^b = (A_1^3 C_1)^b A_1^{m-3b},$$

qui est engendré par le système de générateurs de l'énoncé.

Dans les cas $a = 1$ ou $a = 2$, on a

$$A_1^m B_1^a C_1^b = (A_1 B_1^a)(A_1^3 C_1)^b A_1^{m-3b-1},$$

en remarquant que la condition $a \leq 3(m - 3b) - 1$ implique $0 < m - 3b$.

Montrons que le système est minimal. On se convainc qu'il suffit de montrer que, pour tout $p \geq 0$, le monôme $A_1^p B_1^{3p-1}$ n'est pas dans la k-algèbre engendrée par les monômes

$$A_1, A_1 B_1, A_1^3 C_1, A_1^m B_1^{3m-1},\ m < p.$$

Mais tout élément de l'algèbre ainsi engendrée est un polynôme $P = \sum_{p\beta < \alpha(3p-1), \gamma \in \mathbb{N}} A_1^\alpha B_1^\beta C_1^\gamma$ et donc ne peut être $A_1^p B_1^{3p-1}$.

PROPOSITION 3. — *La série de Poincaré de* $\mathrm{gr}_\nu(R)$ *est une fraction rationnelle.*

Preuve. — Notons $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha$ la composante homogène de degré $\alpha \in \mathbb{N}$ de $\mathrm{gr}_\nu(R)$ pour sa graduation définie par le groupe de valeurs de ν et d_α la dimension du k-espace vectoriel $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha$. On définit γ et σ par : $\gamma = n - 1 \geq 9$ et $\sigma = 4\gamma = 4n - 4$. Il y a une injection naturelle des k-espaces vectoriels $\mathrm{gr}_\nu(R)_\alpha \to \mathrm{gr}_\nu(R)_{\alpha+\sigma}$ qui consiste à multiplier par $A_1^3 C_1$, c'est-à-dire par $\mathrm{in}_\nu(x^2 z + xy^2 + y^3)$. On définit ϵ_α par : $d_{\alpha+\sigma} = d_\alpha + \epsilon_\alpha$. Posons $\alpha = \sigma q + r,\ 0 \leq r \leq \sigma - 1,\ q, r \in \mathbb{N}$. On vérifie que

$$\begin{aligned}
\epsilon_\alpha = q + 1 \ \text{ si } & \ 0 \leq r \leq \gamma - 1, \\
\text{ou } & \ \gamma + 3 \leq r \leq 2\gamma - 1, \\
\text{ou } & \ 2(\gamma + 3) \leq r \leq 3\gamma - 1, \\
\text{ou } & \ 3(\gamma + 3) \leq r \leq 4\gamma - 1, \\
\epsilon_\alpha = q + 2 \ & \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On en déduit aisément la rationalité de la série de Poincaré $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} d_\alpha T^\alpha$. Remarquons que l'inégalité $3(\gamma + 3) \leq r \leq 4\gamma - 1$ n'a de sens que pour $\gamma \geq 10$.

Remarque 1. — Dans le cas où $1 \leq n \leq 9$, $\mathrm{gr}_\nu(R) = \bigoplus I_\alpha / I_{\alpha+1}$ est noethérien.

Donnons une esquisse de preuve. Notons S_n le transformé strict dans X_n du plan projectif $\mathbb{P}^2$ qui est le diviseur exceptionnel de $X_1 \longrightarrow X_0$, comme $n \leq 9$, S_n est obtenu à partir de $\mathbb{P}^2$ par au plus 8 éclatements de points fermés, S_n est une *surface de Del Pezzo dégénérée*, on peut déduire de [D], [GP] et [Z] que : *l'anneau des sections de* S_n, $1 \leq n \leq 9$

$$\bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}\ (S_n)} H^0(L)$$

est noethérien.

Il s'agit d'un résultat non publié de L. Gruson. Donnons quelques indications de preuve.

1.1. — On remarque d'abord que *tout diviseur effectif* $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S_n)$ *se décompose en* $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}''$ *avec* $\mathcal{L}''$ *sans courbe base et* $h^0(\mathcal{L}') = 1$. On prend pour $\mathcal{L}'$ le fibré correspondant à la composante fixe de $\mathcal{L}$, le fibré $\mathcal{L}''$ a au plus des points bases : il est numériquement effectif. Le premier point à prouver est que $\mathcal{L}''$ *est sans point base.*

• On montre ensuite que *le semi-groupe NEF des fibrés numériquement effectifs est engendré par les cubiques spéciales, les coniques spéciales (passant par* x_i, $1 \leq i \leq 4$*) , les droites générales et les droites passant par* x_1. On obtient ce résultat par une récurrence décroissante sur $m_1 + \cdots + m_n$, en tensorisant par les duaux des générateurs proposés et en se fondant sur le fait que si un fibré $\mathcal{L}$ est numériquement effectif, sa suite de multiplicités $(\delta, m_1, \cdots, m_{n-1})$ vérifie $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n-1}$ et $\delta \geq m_1 + m_2 + m_5$ [GP], p. 412 ou [H], p. 405–406.

• On remarque que *le diviseur associé à une section décomposée réduite d'un fibré numériquement effectif* $\mathcal{L}$ *est connexe.* En effet, soit il s'agit de l'image inverse d'une droite ou d'une conique, soit ce diviseur contient une cubique qui rencontre toutes les sections des fibrés générateurs de NEF.

• Soit D un tel diviseur, on a donc $H^0(O_D) = k$, de la suite exacte de cohomologie :

$$H^0(O_{S_n}) = k \longrightarrow H^0(O_D) = k \longrightarrow H^1(O_{S_n}(-D)) \longrightarrow H^1(O_{S_n}) = 0$$

associée à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow O_{S_n}(-D) \longrightarrow O_{S_n} \longrightarrow O_D \longrightarrow 0,$$

on déduit que $H^1(\mathcal{L}) = H^1(O_{S_n}(-D)) = 0$.

• Remarquons que *tout fibré numériquement effectif* $\mathcal{L}$ *est engendré par ses sections globales* : c'est clair pour les générateurs et donc pour tous les autres.

1.2. — D'après [Z], théorème 4.2, p. 571, l'anneau

$$S := \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}\,(S_n),\ L \text{ engendré par ses sections globales}} H^0(L)$$

est noethérien.

• Sachant que les fibrés $\mathcal{L}$ avec $h^0(\mathcal{L}) = 1$ sont engendrés par les fibrés correspondant aux composantes du diviseur exceptionnel de S_n, *l'anneau des sections de* S_n, $1 \leq n \leq 9$

$$\mathcal{S} := \bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}(S_n)} H^0(L)$$

est noethérien.

1.3. Fin de la preuve de la remarque 1. — Notons π l'application $S_n \longrightarrow \mathbb{P}^2$. L'image de l'application

$$H^0(\pi_*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \otimes \mathcal{O}_{S_n}(-a_2E_2' - \cdots - a_nE_n'))) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = k[x,y,z]_m$$

induite par l'isomorphisme

$$H^0(\pi_*(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)))) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) = k[x,y,z]_m,$$

est l'ensemble des polynômes homogènes de degré m et de valuation E_i-adique supérieure ou égale à a_i, $2 \leq i \leq n$, où $E_2 \cup \cdots \cup E_n$ est le diviseur exceptionnel réduit de $X_n \longrightarrow X_1$ et $E_i' = E_i \cap X_n$, $2 \leq i \leq n$. Donc l'image de

$$\bigoplus_{m,a_2,\cdots,a_{n-1}} H^0(\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)) \otimes \mathcal{O}(-a_2E_2' - \cdots - a_nE_n')) \longrightarrow \bigoplus_m k[x,y,z]_m = k[x,y,z]$$

est l'idéal $\mathcal{I}_{a_n} = \{P \in k[x,y,z] | \nu(P) \geq a_n\}$. On a donc une surjection naturelle

$$\bigoplus_{L \in \mathrm{Pic}\ (S_n)} H^0(L) \longrightarrow \bigoplus_{a_n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{a_n}.$$

Il suffit alors de remarquer que $\mathrm{gr}_\nu(R)$ est un quotient de $\bigoplus_{a_n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_{a_n}$.

Remarque 2. — Il existe d'autres exemples de valuations divisorielles sur des anneaux locaux normaux dont les gradués ne sont pas noethériens, dans [CS], ex. 6, p. 557, on trouvera un anneau dont le gradué associé a une fonction de Hilbert dont le comportement à l'infini implique la non-noetherianité. L'originalité de l'exemple construit ici est, outre son effectivité et sa simplicité, que la valuation utilisée est divisorielle à support fini au sens de [L].

Remarque 3. — Le cône caractéristique de la surface S_{10} n'est pas polyhédral rationnel [CGS]. C'est en étudiant l'anneau des sections de S_{10} (cf. remarque 1, 1.2 (1)) que nous est venu l'idée de cet exemple.

BIBLIOGRAPHIE

[CGS] A. CAMPILLO, G. GONZÁLEZ-SPRINBERG, On Characteristic cones, clusters and chains of infinitely near points, Singularities (Oberwolfach 1996) Progr. Math., 162, Birkhäuser, Basel (1998), 173–189.

[CS] D. CUTKOSKY, V. SRINIVAS, On a problem of Zariski on dimensions of linear systems, Ann. Math., 137 (1993), 531–559.

[D] M. DEMAZURE, Exposés sur les surfaces de Del Pezzo, Lect. Notes Math., 777 (1976), 21–70.

[Gö] H. GÖHNER, Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings, Jour. of Algebra, 34 (1975), 403–429.

[GP] L. GRUSON, C. PESKINE, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, 15 (1982), 401–429.

[H] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1977).

[L] J. LIPMAN, On complete ideals in regular local rings, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of M. Nagata (1988), 203–231.

[S] M. SPIVAKOVSKY, Valuations in function fields of surfaces, Amer. Jour. Math., 112 (1990), 107–156.

[Z] O. ZARISKI, The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface, Ann. Math., 76 n°3 (November 1962), 560–615.

Manuscrit reçu le 27 mai 1999,
accepté le 8 septembre 1999.

V. COSSART,
Université de Versailles
Laboratoire E.P. 1755
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex (France).
cossart@math.uvsq.fr

C. GALINDO,
Universidad Jaume I
Depto. de Matematicas
Campus Riu Sec
12071 Castellón (Spain)
galindo@mat.uji.es

O. PILTANT,
École polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex (France).
piltant@math.polytechnique.fr