ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL BROISE
YVES DÉNIEL
YVES DERRIENNIC

Réarrangement, inégalités maximales et théorèmes ergodiques fractionnaires

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 3 (1989), p. 689-714
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_3_689_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 3 (1989), 689–714

RÉARRANGEMENT, INÉGALITÉS MAXIMALES ET THÉORÈMES ERGODIQUES FRACTIONNAIRES

par M. BROISE, Y. DÉNIEL et Y. DERRIENNIC

1. Introduction.

Suivant le théorème ergodique de Birkhoff les moyennes arithmétiques d'une suite stationnaire intégrable convergent presque partout. Que devient ce théorème si l'on remplace la moyenne arithmétique par un procédé de moyenne plus faible, comme par exemple la moyenne de Cesàro d'indice $\alpha < 1$, dont la convergence implique la convergence de la moyenne arithmétique?

D'après la loi forte des grands nombres de Kolmogorov, les moyennes arithmétiques d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées convergent presque partout si et seulement si les variables sont intégrables. Bien qu'une telle suite soit un cas très particulier de suite stationnaire, c'est la même hypothèse d'intégrabilité qui gouverne les deux théorèmes que nous venons de rappeler. Comment peut-on expliquer cette coïncidence? Par quels autres procédés de moyenne est-elle conservée?

Nous nous proposons d'apporter une réponse précise à ces questions.

Considérons un semi-flot mesurable à temps discret $(\theta^n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou à temps continu $(\theta_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ ou à temps multidimensionnel $(\theta_x)_{x\in\mathbf{R}_+^d}$ préservant la mesure μ d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. La moyenne ergodique au

Mots-clés : Réarrangement – Inégalité maximale – Théorème ergodique – Convergence presque partout – Empilage.
Classification A.M.S. : 28D.

sens de Cesàro d'indice $\alpha > 0$ est définie, pour une fonction réelle f mesurable sur Ω, en temps discret par :

$$\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} f \circ \theta^k$$

et en temps continu par

$$\frac{\alpha}{t^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f \circ \theta_s \, ds \ .$$

Les propriétés des moyennes (C, α) sont décrites dans [9] et [24]. Pour $\alpha = 1$ on retrouve les moyennes arithmétiques. Dans la définition de la moyenne (C, α) en temps continu on reconnaît l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann et Liouville; elle s'écrit aussi :

$$\frac{1}{t} \int \varphi\left(\frac{s}{t}\right) f \circ \theta_s \, ds$$

où $\varphi(t) = \alpha(1-t)^{\alpha-1}$ pour $0 < t < 1$.

Plus généralement, étant donné une fonction-poids φ positive (au sens large) sur $\mathbb{R}_+^d$, vérifiant $\int \varphi(x)dx = 1$ on introduit les moyennes

$$\mathcal{A}_t^\varphi f = \frac{1}{t^d} \int_{\mathbb{R}_+^d} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) f \circ \theta_x dx \ .$$

Dans l'étude de la convergence de telles moyennes quand $t \to 0^+$ ou $+\infty$, la forme de φ joue un rôle essentiel. Quand φ est décroissante, ou décroissante par rapport à la norme de x en dimension $d > 1$, on déduit la convergence de $\mathcal{A}_t^\varphi f$ de la convergence des moyennes arithmétiques (voir par exemple [4], chap.10). Ceci est analogue au fait que la convergence (C, α) implique la convergence (C, β) pour $\beta > \alpha$; pour les moyennes continues ceci vaut aussi bien pour $t \to +\infty$ que $t \to 0^+$ ([9], [24]). Le problème étudié ici est celui de la convergence p.p. de moyennes du type $\mathcal{A}_t^\varphi f$ pondérées par un poids φ qui n'est pas supposé décroissant. Pour les moyennes (C, α) le cas qui nous intéresse est donc le cas $0 < \alpha \leq 1$.

Rappelons ce qui est connu à ce sujet. Tout d'abord pour la convergence en norme dans L_μ^1 ou L_μ^p ou tout autre espace normé, tous les systèmes de moyennes considérés ici sont équivalents. Ceci résulte du théorème ergodique en moyenne ([14] chap.2). Nous n'avons donc à nous préoccuper que de la convergence p.p.. Pour une suite de v.a. X_k i.i.d., cas particulier de suite stationnaire $f \circ \theta^k$, la convergence p.p. des moyennes (C, α) équivaut à l'existence d'un moment d'ordre $1/\alpha$ *i.e.* $E(|X_k|^{1/\alpha}) < \infty$, quand $0 < \alpha \leq 1$, (pour $1/2 < \alpha \leq 1$ voir [18]; pour $0 < \alpha \leq 1/2$ voir [6]). Ceci montre déjà que l'ensemble des fonctions f telles que les moyennes $\mathcal{A}_t^{\varphi} f$ convergent p.p. peut être strictement plus petit que L^1_μ quand φ n'est pas décroissant. Pour une suite stationnaire $f \circ \theta^k$ les moyennes (C, α) convergent p.p. dès que $f \in L^p_\mu$ avec $\alpha p \gneqq 1$ ([12] et aussi [5]). Mais pour $\alpha \lneqq 1$ tout système dynamique ergodique, non atomique, porte une fonction $f \in L^{1/\alpha}_\mu$ telle que les moyennes (C, α) divergent p.p. ([5]). La condition donnant la convergence p.p. des moyennes (C, α) de v.a. i.i.d. ne s'étend donc pas aux suites stationnaires quand $\alpha < 1$, contrairement à ce qu'on sait pour $\alpha = 1$. Cette différence entre les cas $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$ a été la motivation initiale de cette étude.

2. Aperçu des résultats. Plan de l'article.

Avant d'énoncer nos résultats il faut rappeler ce que sont les espaces fonctionnels de Lorentz relativement à un poids ([16]), [17], chap.3). Une fonction réelle ψ définie sur une partie de $\mathbb{R}^d$ est appelée poids si :

1) $\psi(t) \geq 0$ p.p.

et

2) $\int \psi(t) dt = 1$.

Etant donné un espace mesuré fini $(E, \mathcal{B}, m)$ et un poids ψ défini et décroissant sur $(0,1)$ l'espace de Lorentz $\Lambda_m(\psi, q)$ est l'espace des fonctions mesurables m.p.p. sur E telles que

$$\|f\|^*_{\psi,q} = \Big(\frac{1}{m(E)} \int_0^{m(E)} \psi\big(\frac{s}{m(E)}\big)(f^*(s))^q \, ds\Big)^{1/q} < \infty$$

où $q \geq 1$ et où f^* désigne la réarrangée décroissante de $|f|$ définie sur $(0, m(E))$ *i.e.* f^* est la fonction décroissante continue à droite caractérisée par

$$m\{|f| > y\} = \lambda\{f^* > y\}$$

pour tout $y \geq 0$, λ désignant la mesure de Lebesgue.

Quand $\psi(s) = (q/p)s^{(q/p)-1}$, avec $p \geq 1$ cet espace est couramment noté $L_m(p, q)$ ([11], [21]). Dans ce cas la définition s'étend à des espaces mesurés infinis en posant

$$\|f\|^*_{p,q} = \Big(\frac{q}{p} \int_0^\infty (s^{1/p} f^*(s)^q \frac{ds}{s}\Big)^{1/q} .$$

La quantité $\|f\|^*_{\psi,q}$ est une norme et ces espaces sont des espaces de Banach qui interpolent les espaces L^p_m usuels car $L_m(p, q) \subset L_m(p, q')$ si

$q' > q$ et $L_m(p,p) = L^p_m$. Dans la suite on considérera surtout le cas où $q = 1$ et on notera pour alléger $\Lambda_m(\psi, 1) = \Lambda_m(\psi)$ et $\|f\|^*_{\psi,1} = \|f\|^*_\psi$.

Notre premier résultat est alors le suivant, où comme ci-dessus φ^* désigne la réarrangée décroissante de φ.

THÉORÈME 1. — *Un poids φ à support compact dans $\mathbb{R}^d_+$, $d \geq 1$, étant donné, les moyennes ergodiques*

$$\mathcal{A}^\varphi_t f = \frac{1}{t^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) f \circ \theta_x dx$$

convergent μ p.p. quand $t \to +\infty$ si $f \in \Lambda_\mu(\varphi^*)$.

COROLLAIRE 1 (théorème ergodique fractionnaire). — *Les moyennes ergodiques (C, α) "continues" $\alpha/t^\alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f \circ \theta_s \, ds$ ou "discrètes"*

$$\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} f \circ \theta^k$$

avec $0 < \alpha \leq 1$, convergent μ p.p. quand t ou $n \to +\infty$ si $f \in L_\mu(1/\alpha, 1)$.

Ceci précise le résultat de [12] (ou [5]) rappelé dans l'introduction car, pour $\mu(\Omega) < \infty$, $L^{(1/\alpha)+\varepsilon}_\mu \subset L_\mu(1/\alpha, 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Quand φ est décroissant par rapport à la norme ou seulement décroissant "radialement" ce résultat est moins bon que celui qu'on déduit directement de la convergence des moyennes arithmétiques car $\Lambda_\mu(\varphi^*) \subset L^1_\mu$ ([4], chap. 10). Mais, en dimension $d = 1$, quand φ est croissant (au sens large), en particulier pour les moyennes (C, α), $0 < \alpha \leq 1$, ce résultat est le meilleur possible en un sens qu'il faut préciser. Une fonction g mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est dite "réarrangée équimesurable" de f donnée si, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mu\{g > y\} = \mu\{f > y\}$; si f et g sont ≥ 0 ceci équivaut à $f^* = g^*$. Si l'espace est du type de Lebesgue ceci équivaut aussi à l'existence d'une transformation mesurable τ préservant la mesure μ telle que $g = f \circ \tau$ ([19], p. 17 et [17], p. 60). Alors on peut énoncer la "réciproque" suivante des énoncés précédents.

THÉORÈME 2. — *En dimension $d = 1$ pour un poids φ croissant, au sens large, sur* $(0, 1)$, *le plus grand espace, stable par réarrangement équimesurable, de fonctions pour lesquelles le théorème 1 soit valide est l'espace $\Lambda_\mu(\varphi^*)$.*

Plus précisément, dans le cas discret, une transformation ergodique θ préservant la mesure d'un espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ étant donnée, si

$f \notin L_\mu(1/\alpha, 1)$ $(0 < \alpha \leq 1)$, il existe une réarrangée équimesurable f' de f dont les moyennes ergodiques (C, α) divergent μ p.p..

La démonstration du théorème 1 suit la démarche de Wiener [23]. On obtient d'abord une inégalité maximale de type faible, à la Hardy-Littlewood, pour des moyennes définies sur $\mathbf{R}^d$ par

$$A_t^\varphi f(x) = \frac{1}{t^d} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi\left(\frac{z}{t}\right) f(x+z)\, dz \, .$$

C'est dans l'inégalité maximale que s'introduit naturellement la norme de Lorentz. Ensuite on transfère l'inégalité maximale purement réelle aux moyennes ergodiques en intégrant par rapport à la mesure invariante l'inégalité écrite sur chaque trajectoire du flot. Enfin, on démontre la convergence par densité. Les formules étant plus simples pour les moyennes "continues" le détail des démonstrations n'est donné que dans ce cas.

Le plan de la suite est le suivant. Dans la partie 3 on démontre une inégalité liant moyennes et réarrangement sur un espace produit et on l'applique pour prouver l'inégalité maximale. Celle-ci renforce une inégalité donnée dans [13] et implique une inégalité portant seulement sur les moyennes (C, α) donnée dans [22]. Dans la partie 4 on déduit un théorème de différentiation et un théorème ergodique local. Dans la partie 5 on démontre le principe de transfert puis le théorème 1. Dans la partie 6 on démontre le théorème 2. On termine par quelques remarques sur le cas où la mesure invariante est infinie et sur la convergence d'autres moyennes ((C, α) pour $\alpha > 1$, Abel, Borel, Euler...).

3. Réarrangement et inégalité maximale.

On rappelle d'abord l'inégalité fondamentale sur les réarrangements décroissants ([10], chap. X). Deux fonctions mesurables positives f et g étant définies sur un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, m)$ on a :

$$\int_E fg\, dm \leq \int_0^{m(E)} f^*(t) g^*(t)\, dt \, .$$

Désignons, comme ci-dessus, par ψ un poids *décroissant* sur $[0,1]$. On pose pour $B \in \mathcal{B}$

$$\rho_\psi(m, B, f) = \frac{1}{m(B)} \int_0^{m(B)} \psi\left(\frac{t}{m(B)}\right) (f\chi_B)^*(t)\, dt$$

où χ_B désigne l'indicatrice de B. Si $B = E$

$$\rho_\psi(m, E, f) = \|f\|_\psi^* \ .$$

Cette quantité est le maximum des moyennes relativement au poids ψ des réarrangées de f sur B.

L'inégalité suivante joue un rôle clé dans toute la suite.

PROPOSITION 1. — *Soient (E_1, m_1) et (E_2, m_2) deux espaces mesurés. Soient $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}^+$ et $B \subset E_1 \times E_2$ mesurables. En notant $f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$ et $B_{x_2} = \{x_1 \in E_1 \ ; \ (x_1, x_2) \in B\}$ on a :*

$$\rho_\psi(m_1 \otimes m_2, B, f) \geq \frac{1}{m_1 \otimes m_2(B)} \int m_1(B_{x_2}) \rho_\psi(m_1, B_{x_2}, f_{x_2}) dm_2(x_2) \ .$$

Si pour m_2-presque tout x_2 dans la projection $\pi_2(B)$ de B sur E_2 les fonctions $f_{x_2}\chi_{B_{x_2}}$ de x_1 ont la même distribution alors l'égalité est réalisée et :

$$\rho_\psi(m_1 \otimes m_2, B, f) = \rho_\psi(m_1, B_{x_2}, f_{x_2}) \neq m_2 \ \text{ p.p. sur } \ \pi_2(B) \ .$$

Démonstration. — Dans l'espace produit $[0, m_1(E_1)] \times E_2$ dont le premier facteur est muni de la mesure de Lebesgue λ , on considère :

1) la partie $\overline{B} = \{(t, x_2) \ ; \ 0 \leq t \leq m_1(B_{x_2})\}$

2) la fonction $\overline{f}(t, x_2) = (f_{x_2}\chi_{B_{x_2}})^*(t)$

3) la fonction $h(t, x_2) = \psi(t/m_1(B_{x_2}))$.

En vertu du théorème de Fubini on a $\lambda \otimes m_2(\overline{B}) = m_1 \otimes m_2(B)$. Les fonctions $\overline{f}\chi_{\overline{B}}$ et $f\chi_B$ ont même distribution donc $(\overline{f}\chi_{\overline{B}})^* = (f\chi_B)^*$. D'autre part pour $y \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\lambda \otimes m_2\{(t, x_2) \in \overline{B} \ ; \ \psi\Big(\frac{t}{m_1(B_{x_2})}\Big) > y\} \\
&= \int_{\pi_2(B)} \sup\{s \ ; \ \psi(s) > y\} m_1(B_{x_2}) dm_2(x_2) \\
&= m_1 \otimes m_2(B) \sup\{s \ ; \ \psi(s) > y\} \\
&= \lambda\{t \ ; \ \psi\Big(\frac{t}{m_1 \otimes m_2(B)}\Big) > y\} \ .
\end{aligned}$$

Ceci prouve $(h\chi_{\overline{B}})^*(t) = \psi(t/m_1 \otimes m_2(B))$. L'inégalité cherchée résulte donc de l'inégalité fondamentale rappelée au début du paragraphe. La seconde partie est alors évidente.

En supposant l'espace E_2 dénombrable on trouve le cas particulier important suivant.

COROLLAIRE 2. — *Soit B_n une suite de parties mesurables de E, disjointes 2 à 2 et soit $B = \bigcup_n B_n$. On a*

$$\rho_\psi(m, B, f) \geq \frac{1}{m(B)} \sum_n m(B_n)\rho_\psi(m, B_n, f) .$$

On introduit maintenant un poids φ sur le cube unité $[0,1]^d = I$ de $\mathbb{R}^d$. Ce choix n'est pas essentiel : on pourrait remplacer I par une boule ou un ensemble convexe compact fixé. Une fonction f réelle mesurable sur $\mathbb{R}^d$ étant donnée on pose :

$$A_t^\varphi f(x) = \frac{1}{t^d} \int \varphi(\frac{z}{t}) f(x+z)\, dz .$$

On peut écrire $A_t^\varphi f(x) = f * \check{\varphi}_t(x)$ où $\check{\varphi}(z) = \varphi(-z)$ et $\varphi_t(z) = \frac{1}{t^d}\varphi(\frac{z}{t})$. En analyse il est habituel de considérer $f * \varphi_t(x)$. On choisit ici de considérer $A_t^\varphi f$ afin de pouvoir écrire ensuite des moyennes ergodiques de ce type pour un flot non nécessairement inversible.

On considère aussi la moyenne "réarrangée maximale" de f par rapport à φ :

$$A_t^{*\varphi} f(x) = \rho_{\varphi *}(\lambda, x + tI, f)$$

i.e.

$$A_t^{*\varphi} f(x) = \frac{1}{t^d} \int_0^{t^d} \varphi^*(\frac{s}{t^d})(f(x+\cdot)\chi_{tI}(\cdot))^*(s)\, ds .$$

On a $A_t^\varphi f \leq A_t^{*\varphi} f$.

Associées à ces moyennes on définit les fonctions maximales :

$$M_T^\varphi f(x) = \sup_{T>t>0} A_t^\varphi f(x) \ ; \ M^\varphi f(x) = \sup_{t>0} A_t^\varphi f(x)$$

et

$$M_T^{*\varphi} f(x) = \sup_{T>t>0} A_t^{*\varphi} f(x) \ ; \ M^{*\varphi} f(x) = \sup_{t>0} A_t^{*\varphi} f(x) .$$

Quand il s'agit des moyennes (C, α) c'est-à-dire pour $\varphi(s) = \alpha(1-s)^{\alpha-1}$, $s \in (0,1)$, on remplace dans les notations φ par α.

THÉORÈME 3 (inégalité maximale). — *Il existe une constante c ne dépendant que de la dimension d , telle que pour toute $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et tout $y > 0$ on a :*

$$\lambda\{M^{*\varphi} f > y\} \leq \frac{c}{y} \int_0^{\lambda\{M^{*\varphi} f > y\}} f^*(t)\varphi^*(t/\lambda\{M^{*\varphi} f > y\})dt$$

et de même avec $M^{\varphi}f$, $M_T^{*\varphi}f$ et $M_T^{\varphi}f$.

Démonstration. — Pour une fonction f bornée à support compact et T fixés posons $E_y = \{M_T^{*\varphi} > y\}$. Pour tout $x \in E_y$, il existe $T > t > 0$ tel que $A_t^{*\varphi}f(x) > y$. Suivant un lemme de recouvrement classique ([20], p. 9) on construit une suite (x_i, t_i) telle que $A_{t_i}^{*\varphi}f(x_i) > y$, telle que les cubes $I_i = x_i + t_i I$ soient disjoints 2 à 2, et telle que $\lambda(E_y) \leq c\lambda(L)$ où $L = \bigcup_i I_i$. La constante c ne dépend que de d; pour $d = 1$, $c = 1$ sinon $c \geq 1$. D'après le corollaire 2, on trouve

$$y < \frac{1}{\lambda(L)} \sum_i \lambda(I_i) A_{t_i}^{*\varphi} f(x_i) \leq \rho_{\varphi*}(\lambda, L, f) \leq \frac{1}{\lambda(L)} \int_0^{\lambda(L)} f^*(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{\lambda(L)}\Big) dt.$$

La décroissance des fonctions f^* et φ^* nous donne alors

$$\begin{aligned} y < \int_0^1 f^*(s\lambda(L))\varphi^*(s)\, ds &\leq \int_0^1 f^*\Big(\frac{s\lambda(E_y)}{c}\Big)\varphi^*(s)\, ds \\ &\leq \frac{c}{\lambda(E_y)} \int_0^{\lambda(E_y)/c} f^*(t)\varphi^*\Big(\frac{ct}{\lambda(E_y)}\Big)\, dt \\ &\leq \frac{c}{\lambda(E_y)} \int_0^{\lambda(E_y)} f^*(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{\lambda(E_y)}\Big)\, dt \end{aligned}$$

car $c \geq 1$. C'est l'inégalité cherchée. On passe au cas général par des passages à la limite monotone évidents d'abord en f puis en T.

L'inégalité portant sur $M^{\varphi}f$ se démontre de façon analogue grâce à $A_t^{\varphi}f(x) \leq \rho_{\varphi*}(\lambda, x + tI, f)$.

COROLLAIRE 3 (inégalité maximale fractionnaire). — *Pour les moyennes (C, α), $0 < \alpha < 1$, $d = 1$, on a pour toute $f \geq 0$ et tout $y > 0$:*

$$\lambda\{M^{\alpha}f > y\} \leq \lambda\{M^{*\alpha}f > y\} \leq \big(\frac{1}{y}\|f\|_{1/\alpha,1}^*\big)^{1/\alpha} .$$

Plus généralement ces inégalités sont valides si $\varphi^*(t) = \alpha t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, $d \geq 1$, avec 1 remplacé par c .

Remarques. — D'après le théorème de Marcinkiewicz on peut déduire des inégalités précédentes, des inégalités maximales de type fort : $\|M^{\alpha}f\|_{p,q}^* \leq B\|f\|_{p,q}^*$ pour $1 \leq q \leq \infty$ et $p > 1/\alpha$.

L'inégalité classique de Hardy et Littlewood est celle du corollaire 3 pour $\alpha = 1$ ([10]).

Dans [22], Stein prouve l'inégalité

$$\lambda\Big\{x \ ; \ \sup_{\delta>0} \frac{\|f\chi_\delta(x)\|_{p,1}}{\|\chi_\delta(x)\|_{p,1}} > y\Big\} \leq \frac{A}{y^p}\|f\|_{p,1}^p ,$$

où $\chi_\delta(x)$ est la fonction indicatrice de la boule de centre x et de rayon δ et où
$$\|f\|_{p,1} = \frac{1}{p}\int_0^\infty t^{1/p-2}\int_0^t f^*(u)\,du\,dt$$
avec $p \geq 1$. Suivant [21] (chap. V, section 3) la quantité $\|f\|_{p,1}$ est une norme sur $L_{p,1}$ équivalente à $\|f\|^*_{p,1}$. Cette inégalité est donc du même type que celle donnée par le corollaire 3 (la fonction maximale $M^{*\alpha}f$ considérée ici peut aussi s'écrire :
$$M^{*\alpha}f(x) = \sup_{t>0}\frac{\|f\chi_{x+tI}\|^*_{1/\alpha,1}}{\|\chi_{x+tI}\|^*_{1/\alpha,1}})\ .$$

La démonstration de Stein ramène le cas $p > 1$ au cas $p = 1$, c'est-à-dire à l'inégalité de Hardy et Littlewood, de façon directe. Mais cet argument utilise la propriété d'homogénéité de la fonction $t^{1/p}$; il ne peut pas être utilisé pour les moyennes pondérées par un poids φ quelconque.

L'inégalité du théorème 3 s'écrit aussi :
$$(M^{*\varphi}f)^*(z) \leq c\int_0^1 \varphi^*(t)f^*(tz)\,dt\ .$$

Sous cette forme elle apparaît dans [13] mais seulement pour la fonction maximale $M^\varphi f$, qui est majorée par $M^{*\varphi}f$.

4. Théorème de différentiation et théorème ergodique local.

Il nous faut d'abord préciser la notion d'appartenance locale à l'espace $\Lambda_\lambda(\psi)$ sur $\mathbb{R}^d$. Une partie $B \subset \mathbb{R}^d$, de mesure de Lebesgue $\lambda(B)$ finie, étant donnée, on note $\Lambda(\psi, B)$ l'espace de Lorentz $\Lambda_\lambda(\psi, 1)$ défini sur B relatif au poids décroissant ψ et $\|f\|^*_{\psi,B}$ sa norme (voir le début du §2).

PROPOSITION 2. — *Soit $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$,*

i) *si $C \subset B$, si $f\chi_B \in \Lambda(\psi, B)$ alors $f\chi_C \in \Lambda(\psi, C)$;*

ii) *si $f\chi_B \in \Lambda(\psi, B)$ et $f\chi_C \in \Lambda(\psi, \chi)$ alors $f\chi_{B\cup C} \in \Lambda(\psi, B\cup C)$;*

iii) *il y a équivalence entre :*

1) pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $f\chi_K \in \Lambda(\psi, K)$

2) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ il existe un voisinage V_x tel que $f\chi_{V_x} \in \Lambda(\psi, V_x)$.

Dans ce cas, on dit que f est localement dans $\Lambda(\psi)$ sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration.

i) résulte de $(f\chi_B)^* \geq (f\chi_C)^*$ et de la décroissance de ψ .

ii) En vertu de i), il suffit de considérer $B \cap C = \emptyset$. On a alors $(f\chi_{B\cup C})^*(s+t) \leq \sup((f\chi_B)^*(s),(f\chi_C)^*(t))$ inégalité réciproque de

$$\lambda\{f\chi_{B\cup C} > \sup(u,v)\} \leq \lambda\{f\chi_B > u\} + \lambda\{f\chi_C > v\} .$$

Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(B\cup C)}\int_0^{\lambda(B\cup C)} & (f\chi_{B\cup C})^*(t)\psi\Big(\frac{t}{\lambda(B\cup C)}\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 (f\chi_{B\cup C})^*(t\lambda(B)+t\lambda(C))\psi(t)\,dt \\ &\leq \int_0^1 \sup((f\chi_B)^*(t\lambda(B)),(f\chi_C)^*(t\lambda(C)))\psi(t)\,dt\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat cherché. La 3ème partie résulte immédiatement des 2 premières.

THÉORÈME 4 (différentiation pondérée multidimensionnelle). — *Si f appartient localement à $\Lambda(\varphi^*)$ sur $\mathbb{R}^d$*

$$\lim_{t\to 0} A_t^{\varphi} f(x) = \lim_{t\to 0} A_t^{*\varphi} f(x) = f(x) \neq \lambda \ \ p.p.$$

et même

$$A_t^{*\varphi}(f-f(x))(x) = \frac{1}{t^d}\int_0^{t^d} \varphi^*\big(\frac{s}{t^d}\big)\big[|f(x+\cdot)-f(x)|\chi_{tI}(\cdot)\big]^*(s)\,ds \longrightarrow 0\,\lambda\ p.p..$$

Démonstration. — D'après l'inégalité

$$\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\big(\frac{z}{t}\big)|f(x+z)-f(x)|\,dz \leq A_t^{*\varphi}(f-f(x))(x)$$

la première assertion résulte de la seconde.

On procède de façon classique. Pour f continue le résultat est clair. Fixons un cube K de côté a, dans $\mathbb{R}^d$. Les fonctions continues sur K sont denses dans $\Lambda(\varphi^*,K)$. Soit $f \in \Lambda(\varphi^*,K)$. L'inégalité maximale (théorème 3) montre déjà que les moyennes $A_t^{*\varphi}(f-f(x))(x)$ sont finies p.p. sur K . Ecrivons $f = g+h$ avec g continue à support dans K. En vertu de l'inégalité générale $(f+g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$ on a :

$$\begin{aligned}A_t^{*\varphi}(f-f(x))(x) &\leq 2A_t^{*\varphi}(g-g(x))(x) + 2A_t^{*\varphi}(h-h(x))(x)\\ &\leq 2A_t^{*\varphi}(g-g(x))(x) + 4A_t^{*\varphi}h(x) + 4|h(x)|\end{aligned}$$

d'où

$$\limsup_{t\to 0} A_t^{*\varphi}(f - f(x))(x) \le 4M_T^{*\varphi}h(x) + 4|h(x)|$$

où T est fixé. On observe que $\{M_T^{*\varphi}h > y\}$ est contenu dans un cube de côté $a+T$; l'inégalité maximale (théorème 3) donne alors :

$$\lambda\{M_T^{*\varphi}h > y\} \le \frac{c}{y}\int_0^{(a+T)^d} h^*(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{(a+T)^d}\Big)\,dt \le \frac{c}{y}(a+T)^d\|h\|^*_{\varphi^*,K}\ .$$

D'autre part on a de façon évidente

$$\lambda\{|h|>y\}\int_0^{\lambda\{|h|>y\}} \varphi^*\Big(\frac{t}{a^d}\Big)\,dt \le a^d\|h\|^*_{\varphi^*,K}\ .$$

La quantité $\|h\|^*_{\varphi^*,K}$ pouvant être arbitrairement petite, le théorème est démontré.

Remarque. — Dans [13] est donné un théorème de différentiation voisin mais moins précis : il porte sur $A_t^{\varphi}f$ et non sur $A_t^{*\varphi}(f-f(x))(x)$, de plus il ne précise pas le rôle de l'appartenance locale à $\Lambda(\varphi^*)$.

COROLLAIRE 4. — *Si f appartient localement à $L(1/\alpha,1)$ sur $\mathbb{R}$ on a :*

$$A_t^{\alpha}f(x) = \frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(x+s)ds \xrightarrow[t\to 0]{} f(x) \ne \lambda \text{ p.p.}$$

$$A_t^{*\alpha}f(x) = \frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}[f(x+\cdot)\chi_{[0,t]}(\cdot)]^*(s)\,ds \xrightarrow[t\to 0]{} 0\ \lambda \text{ p.p.}$$

et même

$$A_t^{*\alpha}(f-f(x))(x) = \frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\big[|f(x+\cdot)-f(x)|\chi_{[0,t]}(\cdot)\big]^*(s)\,ds \xrightarrow[t\to 0]{} 0\ \lambda \text{ p.p.}.$$

Pour obtenir un théorème "ergodique" local pondéré par φ , pour un semi-flot $(\theta_x)_{x\in\mathbb{R}^d_+}$ mesurable préservant la mesure μ d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ il suffit d'établir une relation entre l'appartenance de f à l'espace $\Lambda_\mu(\varphi^*)$ sur Ω et l'appartenance locale à $\Lambda(\varphi^*)$ sur $\mathbb{R}^d$ de la fonction de x , $f(\theta_x\omega)$ à ω fixé, $\omega\in\Omega$.

PROPOSITION 3. — *Si $f\in\Lambda_\mu(\varphi^*)$ sur Ω alors pour μ–presque tout $\omega\in\Omega$, la fonction de x, $f(\theta_x\omega)$ appartient localement à $\Lambda(\varphi^*)$ sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. — Soit $F(x,\omega) = f(\theta_x\omega)$ restreinte à $[0,T]^d\times\Omega$. Il résulte de l'invariance de la mesure μ sous θ_x que

$$\lambda\otimes\mu\{F>y\} = T^d\mu\{f>y\}$$

d'où $F^*(t) = f^*(t/T^d)$. Avec les notations du §3 on a donc :

$$\rho_{\varphi^*}(\lambda \otimes \mu, [0,T]^d \times \Omega, F) = \frac{1}{T^d}\int_0^{T^d} F^*(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{T^d}\Big)\,dt = \rho_{\varphi^*}(\mu, \Omega, f) \ .$$

Par la proposition 1 cette quantité majore

$$\int_\Omega \rho_{\varphi^*}(\lambda, [0,T]^d, F(\cdot,\omega))\,d\mu(\omega)$$

ce qui prouve le résultat cherché.

THÉORÈME 5 (théorème ergodique local pondéré). — *Si $f \in \Lambda_\mu(\varphi^*)$ alors*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^d}\int_{\mathbf{R}_+^d} \varphi\big(\frac{x}{t}\big) f(\theta_x\omega)\,dx = f(\omega) \quad \mu \text{ p.p.}$$

et même

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^d}\int_0^{t^d} \varphi^*\big(\frac{s}{t^d}\big)\left[|f(\theta.\omega) - f(\omega)|\chi_{tI}(\cdot)\right]^*(s)\,ds = 0 \quad \mu \text{ p.p.} \ .$$

En dimension 1, si $f \in L_\mu(1/\alpha, 1)$ sur Ω alors

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(\theta_s\omega)\,ds = f(\omega) \quad \mu \text{ p.p.}$$

et même

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{t^\alpha}\int_0^t s^{\alpha-1}\left[|f(\theta.\omega) - f(\omega)|\chi_{[0,t]}(\cdot)\right]^*(s)\,ds = 0 \quad \mu \text{ p.p.} \ .$$

Démonstration. — La proposition 3 permet d'appliquer l'argument original de Wiener auteur du théorème "ergodique" local pour les moyennes arithmétiques et $f \in L^1_\mu$ ([23], [14], p. 11).

Remarque. — Dans les théorèmes 4 et 5 il est clair que la convergence a lieu aussi en norme de $\Lambda(\varphi^*)$.

5. Transfert. Théorème ergodique fractionnaire.

Suivant la démarche classique de Wiener, développée par Calderon ([23], [3]) on se propose de transférer les inégalités maximales établies dans les paragraphes précédents aux moyennes ergodiques associées à un semi-flot $(\theta_x)_{x\in\mathbf{R}_+^d}$ préservant la mesure μ d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Le poids φ sur $I = [0,1]^d$ étant fixé on définit, pour f mesurable sur Ω, $t > 0$ et $\omega \in \Omega$, les moyennes ergodiques :

$$\mathcal{A}_t^{\varphi} f(\omega) = \frac{1}{t^d} \int_{\mathbf{R}^d} \varphi\Big(\frac{x}{t}\Big) f(\theta_x \omega)\, dx \ ,$$

et les fonctions maximales :

$$\mathcal{M}^{\varphi} f(\omega) = \sup_{t>0} \mathcal{A}_t^{\varphi} f(\omega) \ ; \ \mathcal{M}_T^{\varphi} f(\omega) = \sup_{T>t>0} \mathcal{A}_t^{\varphi} f(\omega) \ .$$

Quand il s'agit des moyennes (C,α), $(\varphi(t) = \alpha(1-t)^{\alpha-1}$ sur $(0,1))$ on remplace dans les notations φ par α .

THÉORÈME 6 (inégalité ergodique maximale). — *Pour un poids φ défini sur $I = [0,1]^d$ quelconque on a pour toute $f \geq 0$ sur Ω et $y > 0$*

$$\mu\{\mathcal{M}^{\varphi} f > y\} \leq \frac{c}{y} \int_0^{\mu\{\mathcal{M}^{\varphi} f > y\}} f^*(t) \varphi^*(t/\mu\{\mathcal{M}^{\varphi} f > y\}) dt$$

où c est la constante ne dépendant que de la dimension fournie par le théorème 3 (pour $d = 1$, $c = 1$). En particulier, quand $\varphi^*(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ avec $0 < \alpha \leq 1$ on a

$$\mu\{\mathcal{M}^{\varphi} f > y\} \leq \Big(\frac{c}{y} \|f\|_{1/\alpha,1}^*\Big)^{1/\alpha} \ .$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer l'inégalité pour $\mathcal{M}_T^{\alpha} f$. Définissons sur l'espace produit $\mathbf{R}_+^d \times \Omega$ muni de la mesure $\lambda \otimes \mu$ où λ désigne toujours la mesure de Lebesgue :

$$F(x,\omega) = f(\theta_x \omega) \ ,$$
$$F_{u+T}(x,\omega) = f(\theta_x \omega) \text{ si } \ x \in (u+T) \cdot I \text{ et } 0 \text{ sinon } .$$

Posons

$$G(x,\omega) = M_T^{\varphi}(F(\cdot,\omega))(x) \ \text{ et } \ G_{u+T}(x,\omega) = M_T^{\varphi}(F_{u+T}(\cdot,\omega))(x)$$

où M_T^{φ} désigne, comme dans les parties précédentes, l'opérateur maximal pondéré par φ agissant sur les fonctions de variables réelles x, $F(\cdot,\omega)$ et $F_{u+T}(\cdot,\omega)$ obtenues en fixant $\omega \in \Omega$. On a

$$A_t^{\varphi}(F(\cdot,\omega))(x) = (\mathcal{A}_t^{\varphi} f)(\theta_x \omega)$$

d'où $G(x,\omega) = \mathcal{M}_T^{\varphi} f(\theta_x \omega)$. Il est clair que $G_{u+T}(x,\omega) = 0$ pour $x \notin (u+T) \cdot I$ et que $G_{u+T}(x,\omega) = G(x,\omega)$ pour $x \in u \cdot I$.

Soit

$$E = \{\mathcal{M}^{\varphi} f > y\}$$

et

$$\overline{E} = \{(x,\omega) \ ; \ G_{u+T}(x,\omega) > y\} \subset (u+T) \cdot I \times \Omega \ .$$

Pour ω fixé, $\overline{E}_\omega = \{x \ ; \ G_{u+T}(x,\omega) > y\}$. Par le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned}\lambda \otimes \mu(\overline{E}) &= \int_\Omega \lambda(\overline{E}_\omega)d\mu(\omega) = \int_{\mathbf{R}^d} \mu\{\omega \ ; \ G_{u+T}(x,\omega) > y\}d\lambda(x) \\ &\geq \int_{u\cdot I} \mu\{\omega; G(x,\omega) > y\}d\lambda(x) = \lambda\otimes\mu\{(x,\omega); x \in u\cdot I \text{ et } \theta_x\omega \in E\}\end{aligned}$$

car $G(x,\omega) = \mathcal{M}_T^\varphi f(\theta_x\omega)$. L'invariance de μ sous θ_x donne alors

$$\lambda \otimes \mu(E) \geq u^d \mu(E) \ .$$

Dans le cas particulier où $\varphi^*(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ on peut, grâce à la convexité de φ^*, compléter la démonstration de la façon suivante.

L'inégalité maximale du corollaire 3 s'écrit ici :

$$\lambda(\overline{E}_\omega) \leq \big(\frac{C}{y}\|F_{u+T}(\cdot,\omega)\|^*_{1/\alpha,1}\big)^{1/\alpha} \ .$$

Par une intégration par parties on peut écrire la norme de Lorentz sous la forme :

$$\|F_{u+T}(\cdot,\omega)\|^*_{1/\alpha,1} = \int_0^\infty \lambda\{F_{u+T}(\cdot,\omega) > t\}^\alpha \, dt \ .$$

D'après l'inégalité de Minkowski pour les intégrales, qui est applicable car $0 < \alpha \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}&\int_\Omega d\mu(\omega)\big(\int_0^\infty \lambda\{F_{u+T}(\cdot,\omega) > t\}^\alpha \, dt\big)^{1/\alpha} \\ &\qquad \leq \big(\int_0^\infty \big(\int_\Omega \lambda\{F_{u+T}(\cdot,\omega) > t\} \, d\mu(\omega)\big)^\alpha \, dt\big)^{1/\alpha} \ .\end{aligned}$$

L'invariance de μ sous θ_x donne

$$\int_\Omega \lambda\{F_{u+T}(\cdot,\omega) > t\} \, d\mu(\omega) = (u+T)^d \mu\{f > t\} \ .$$

On obtient finalement

$$u^d \mu\{\mathcal{M}_T^\varphi f > y\} \leq (u+T)^d \big(\frac{C}{y}\|f\|^*_{1/\alpha,1}\big)^{1/\alpha}$$

qui donne l'inégalité cherchée quand $u \to +\infty$.

Dans le cas général nous ne savons pas opérer ce transfert de façon aussi directe à partir du théorème 3; il faut reprendre une partie des arguments de la démonstration de ce théorème. Pour μ presque tout ω dans la seconde projection de $\overline{E}$ on peut construire une suite $(x_i(\omega), t_i(\omega))$ telle que $A^\varphi_{t_i}(F_{u+T}(\cdot,\omega))(x_i) > y$, telle que les cubes $I_i(\omega) = x_i(\omega) + t_i(\omega)I$

soient disjoints 2 à 2 et que $\lambda(\overline{E}_\omega) \leq c\lambda(L_\omega)$ avec $L_\omega = \bigcup_i I_i(\omega)$. D'après le corollaire 2

$$y \leq \rho_{\varphi*}(\lambda, L_\omega, F_{u+T}(\cdot, \omega)) .$$

Admettons pour l'instant que l'ensemble

$$L = \{(x, \omega) \ ; \ \omega \in \text{ seconde projection } (\overline{E}) \text{ et } x \in L_\omega\}$$

soit mesurable dans $\mathbb{R}_+^d \times \Omega$. La proposition 1 donne alors

$$y \leq \rho_{\varphi*}(\lambda \otimes \mu, L, F_{u+T}) .$$

Par l'invariance de μ sous θ_x on a $F^*_{u+T}(t) = f^*(t/u + T)$. Comme $\lambda \otimes \mu(L) = \int \lambda(L_\omega)\mu(d\omega) \geq (1/c)\lambda \otimes \mu(\overline{E}) \geq (u\mu(E))/c$ on obtient

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{1}{\lambda \otimes \mu(L)} \int_0^{\lambda\otimes\mu(L)} F^*_{u+T}(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{\lambda \otimes \mu(L)}\Big)\, dt \\ &= \int_0^1 f^*\Big(\frac{s\lambda \otimes \mu(L)}{u+T}\Big)\varphi^*(s)\, ds \\ &\leq \int_0^1 f^*\Big(\frac{su\,\mu(E)}{c(u+T)}\Big)\varphi^*(s)\, ds \\ &= \frac{c(u+T)}{u\,\mu(E)} \int_0^{\frac{u\,\mu(E)}{(u+T)c}} f^*(t)\varphi^*\Big(\frac{tc(u+T)}{u\,\mu(E)}\Big)\, dt \\ &\leq \frac{c(u+T)}{u\,\mu(E)} \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\varphi^*\Big(\frac{t}{\mu(E)}\Big)\, dt \end{aligned}$$

car $c \geq 1$. On trouve l'inégalité désirée en laissant $u \to +\infty$.

Le lemme de recouvrement utilisé ne nous permet pas d'affirmer directement que l'ensemble L_ω dépend mesurablement de ω et que donc L est mesurable. Pour surmonter cette difficulté nous proposons le raisonnement suivant. Pour chaque suite finie $\sigma = (x_i, t_i)_i$ avec $x_i \in \mathbb{R}_+^d$ à coordonnées rationnelles et $t_i > 0$ rationnel, pour laquelle les cubes $I_i = x_i + t_i I$ sont disjoints 2 à 2, considérons l'ensemble S_σ des $\omega \in \Omega$ tels que

$$A^\varphi_{t_i}(F_{u+T}(\cdot, \omega))(x_i) > y \quad \text{et} \quad \lambda(\overline{E}_\omega) \leq c'\lambda(L_\sigma)$$

avec $L_\sigma = \cup I_i$. Si $c' > c$ il est clair que l'union de ces ensembles S_σ couvre la seconde projection de $\overline{E}$ car tout cube de la forme $x + tI$ peut être approché de l'intérieur par des cubes $x_i + t_i I$ de la forme décrite. L'ensemble des suites finies σ est dénombrable. On peut donc asssocier mesurablement à chaque $\omega \in$ seconde projection $(\overline{E})$ une suite unique $\sigma(\omega)$ et l'ensemble L' dont la seconde projection est celle de $\overline{E}$, dont la section en ω est $L_{\sigma(\omega)}$, est mesurable dans $\mathbb{R}_+^d \times \Omega$. En remplaçant L par L' dans le raisonnement fait ci-dessus on obtient l'inégalité cherchée avec $c' > c$ au lieu de c. Ceci achève la démonstration du théorème 6.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.

Démonstration du théorème 1. — L'inégalité du théorème 6 implique que l'ensemble des $f \in \Lambda_\mu(\varphi^*)$ pour lesquelles les moyennes $\mathcal{A}_t^\varphi f$ convergent μ p.p. est fermé pour la norme $\| \ \|_{\varphi*}^*$. L'argument détaillé a déjà été donné lors de la démonstration du théorème 4. D'autre part, on vérifie facilement que cette convergence a lieu si f est invariante sous le flot θ_x ou si $f = g - g \circ \theta_x$ pour un $x \in \mathbf{R}_+^d$ et une fonction g bornée. Or il résulte du théorème ergodique en moyenne ([14], chap. 2) que ces fonctions engendrent un sous-espace dense de $\Lambda_\mu(\varphi^*)$; en effet les moyennes $\mathcal{A}_t^\varphi f$ convergent en norme $\| \ \|_{\varphi*}^*$ vers une fonction invariante, quand $t \to +\infty$, pour tout $f \in \Lambda_\mu(\varphi^*)$ (voir remarque ci-après). Ainsi le théorème 1 est démontré.

Démonstration du corollaire 1. — La première partie est un cas particulier du théorème 1. La seconde partie qui porte sur les moyennes (C, α) discrètes est entièrement analogue à la première. Pour cette raison on ne donne que quelques brèves indications. Les moyennes

$$\binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} f \circ \theta^k \text{ convergent } \mu \text{ p.p.}$$

quand $f = h + g - g \circ \theta$ où h est $\theta-$invariante et g bornée. En raisonnant comme dans les paragraphes précédents on démontre l'inégalité maximale suivante :

$$\mu\Big\{ \sup_n \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} f \circ \theta^k > y \Big\} \leq \big(\frac{c}{y} \|f\|_{1/\alpha,1}^*\big)^{1/\alpha}$$

pour $f \geq 0$ sur Ω et $y > 0$. Ceci ne demande que quelques observations simples sur les coefficients $\binom{n+\alpha}{n}$ qui permettent de démontrer l'analogue de la proposition 1. La convergence μ p.p. des moyennes (C, α) discrètes pour $f \in L_\mu(1/\alpha, 1)$ s'en déduit aussitôt.

Remarques. — Dans le théorème 1 et le corollaire 1 les convergences ont lieu aussi en norme $\| \ \|_{\varphi*}^*$ comme on l'a dit au cours de la démonstration du théorème 1. L'espace de Banach $\Lambda_\mu(\varphi^*)$ n'étant pas réflexif on peut démontrer ce fait de la façon suivante. Pour $q > 1$ considérons $\Lambda_\mu(\varphi^*, q)$ (*cf.* §2). D'après l'inégalité de Jensen $\Lambda_\mu(\varphi^*, q) \subset \Lambda_\mu(\varphi^*)$ et $\|f\|_{\varphi*,q}^* \geq \|f\|_{\varphi*}^*$. L'espace $\Lambda_\mu(\varphi^*, q)$ est dense dans $\Lambda_\mu(\varphi^*)$ pour sa norme. Pour $q > 1$

cet espace est réflexif ([14], p. 74). Donc pour $f \in \Lambda_\mu(\varphi^*, q)$ les moyennes $\mathcal{A}_t^\varphi f$ convergent en norme $\|\ \|_{\varphi^*,q}^*$ et a fortiori en norme $\|\ \|_{\varphi^*}^*$. Par densité cela donne le résultat cherché.

Dans ce paragraphe, on aurait pu définir, comme dans les précédents, $\mathcal{A}_t^{*\varphi} f$ et $\mathcal{M}^{*\varphi} f$ moyennes et fonction maximale réarrangées, et obtenir par transfert pour elles des inégalités maximales. Mais celles-ci ne donnent aucun théorème de convergence meilleur car $\mathcal{A}_t^{*\varphi} f$ ne converge pas μ p.p. même pour $f = g - g \circ \theta_x$ quand $t \to +\infty$.

Comme on l'a déjà dit, si le poids φ a une "bonne forme" (décroissant par rapport à la norme ou seulement décroissant radialement [4], chap. 10) la convergence μ p.p. de $\mathcal{A}_t^\varphi f$ a lieu pour tout $f \in L^1_\mu$, ce que ne donne pas le théorème 1 car $\Lambda_\mu(\varphi^*) \subset L^1_\mu$. Mais si φ a la forme opposée on va voir que le théorème 1 est le meilleur possible.

6. Nécessité de l'espace $\Lambda_\mu(\varphi^*)$.

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème 2 qui montre la nécessité de l'espace de Lorentz dans l'énoncé du théorème ergodique fractionnaire. Le théorème 2 comporte 2 parties de caractères assez différents. Dans le cas continu, si f n'est pas dans l'espace de Lorentz convenable la plupart des moyennes ne sont pas définies ou sont infinies, a fortiori elles ne convergent pas. Dans le cas discret au contraire les moyennes sont évidemment finies mais elles oscillent indéfiniment. C'est pourquoi nous allons donner plusieurs propositions qui précisent dans chaque cas le contenu du théorème 2.

PROPOSITION 4. — *Soit φ un poids croissant (au sens large) sur $(0,1)$. Soit $f \geq 0$ sur l'intervalle (a,b). Soit D une partie dénombrable dense dans (a,b). Si $f \notin \Lambda_\lambda(\varphi^*, (a,b))$ il existe une réarrangée équimesurable f' de f, sur (a,b), telle que pour tout $y \in D$ et tout $x < y$:*

$$A_{y-x}^\varphi f'(x) = \frac{1}{y-x} \int_0^{y-x} f'(x+u)\varphi\Big(\frac{u}{y-x}\Big)\, du = +\infty\ .$$

Démonstration. — Donnons une suite $\varepsilon_n > 0$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = b - a$. Posons $z_0 = a$, $z_n = a + \sum_0^{n-1} \varepsilon_k$, $J_n = (z_n, z_{n+1})$. Les intervalles J_n

forment une partition de (a, b). On peut numéroter D de façon à former une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ telle que $y_n + \varepsilon_n < z_n$. Alors $I_n = (y_n, y_n + \varepsilon_n)$ est disjoint de J_n, situé à sa gauche, et ces 2 intervalles ont même longueur ε_n.

Une fonction $f \geq 0$ sur (a, b) étant donnée on va construire une fonction $h \geq 0$ sur (a, b) telle que

i) $h^* = f^*$

ii) pour tout n, $h(x) \geq f^*\Big(\big(\frac{x - y_n}{\varepsilon_n}\big)(b-a)\Big)$ pour $x \in I_n$.

Pour cela on définit d'abord f_0 par :

$$f_0(x) = f^*\Big(\big(\frac{x - z_n}{\varepsilon_n}\big)(b-a)\Big) \quad \text{pour } x \in J_n.$$

Comme $\lambda\{\chi_{J_n} f_0 > y\} = \frac{\varepsilon_n}{b-a}\lambda\{f > y\}$ on a $f_0^* = f^*$. On considère alors la translation τ_1 qui applique I_1 sur J_1 et on définit f_1 par :

$$f_1(x) = f_0(x) \text{ si } x \notin I_1 \cup J_1$$
$$f_1(x) = \sup(f_0(x), f_0(\tau_1 x)) \text{ si } x \in I_1$$
$$f_1(x) = \inf(f_0(x), f_0(\tau_1^{-1} x)) \text{ si } x \in J_1 \ .$$

On vérifie que $f_1^* = f_0^*$ car $I_1 \cap J_1 = \emptyset$. De plus $f_1(x) \geq f_0(x)$ pour $x \in J_0$ et $f_1(x) \geq f^*\Big(\big(\frac{x - y_1}{\varepsilon_1}\big)(b-a)\Big)$ pour $x \in I_1$. On procède alors par récurrence. Supposons $f_1, \ldots, f_n$ construites telles que :

a) $f_1^* = \cdots = f_n^*$.

b) $f_k \leq f_{k+1} \leq \cdots \leq f_n$ sur $J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_k$ pour $k \leq n$.

c) $f_\ell(x) \geq f^*\Big(\big(\frac{x - y_k}{\varepsilon_k}\big)(b-a)\Big)$ pour $k \leq \ell \leq n$.

Soit alors T_{n+1} la translation qui applique I_{n+1} sur J_{n+1}. On pose

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \text{ si } x \notin I_{n+1} \cup J_{n+1}$$
$$f_{n+1}(x) = \sup(f_n(x), f_n(\tau_{n+1} x)) \text{ si } x \in I_{n+1}$$
$$f_{n+1}(x) = \inf(f_n(x), f_n(\tau_{n+1}^{-1} x)) \text{ si } x \in J_{n+1}$$

et on vérifie aussitôt que la suite $f_1, \ldots, f_{n+1}$ vérifie a), b), c) pour $(n+1)$. En vertu de b) la suite f_n converge λ p.p. et sa limite est la fonction $h \geq 0$ vérifiant i) et ii).

Supposons maintenant $f \notin \Lambda_\lambda(\varphi^*, (a, b))$, *i.e.* $\int_0^{b-a} f^*(s)\varphi^*(\frac{s}{b-a})ds = +\infty$. Grâce à la décroissance de f^* et φ^* on vérifie immédiatement que pour tout ε et $\varepsilon' > 0$,

$$\int_0^{\varepsilon'} f^*(s)\varphi^*\big(\frac{s}{\varepsilon}\big)\, ds = +\infty \ .$$

La condition ii) sur h donne donc pour tout n et tout $z > y_n$:

$$\int_{y_n}^{z} h(x)\varphi^*\left(\frac{x-y_n}{z-y_n}\right)dx \geq c\int_0^{\varepsilon'_n} f^*(s)\varphi^*\left(\frac{s}{\varepsilon_n}\right) ds .$$

Si l'on remplace h par h' composée de h avec la symétrie qui échange a et b il est clair que l'on a pour tout $y \in D'$ ensemble symétrique de D :

$$A^{\varphi}_{y-x}h'(x) = +\infty$$

pour tout $x < y$. Comme $(h')^* = h^* = f^*$ ceci démontre la proposition.

PROPOSITION 5. — *Soit φ un poids croissant (au sens large) sur $(0,1)$. Soit $f \geq 0$ sur (a,b) . Si $f \notin \Lambda_\lambda(\varphi^*,(a,b))$ il existe une réarrangée équimesurable f' de f sur (a,b) telle que pour f' :*

1) *le théorème de différentiation pondérée par φ (théorème 4) est en défaut partout sur (a,b);*

2) *pour le flot uniforme sur (a,b), $\theta_t x = a + (x-a+t) \bmod (b-a)$ le théorème ergodique pondéré par φ (théorème 1) est en défaut partout sur (a,b).*

Démonstration. — Considérons f' la fonction construite à la proposition précédente. L'ensemble D étant dense dans (a,b) il y a une suite $y_n \in D$ décroissante vers $x \in (a,b)$. Alors pour $t_n = y_n - x$ on a $t_n \to 0^+$ et $A^{\varphi}_{t_n} f(x) = +\infty$. Pour $t'_n = (y_n - x) + n(b-a)$ on a $t'_n \to +\infty$ et $\mathcal{A}^{\varphi}_{t'_n} f(x) = +\infty$ pour le flot uniforme. La proposition est ainsi prouvée.

Des modifications de détail, qu'on ne donne pas pour alléger, montrent que dans les 2 propositions précédentes la restriction $f \geq 0$ n'est pas essentielle. La première partie du théorème 2 est ainsi démontrée.

Pour introduire à la seconde partie considérons d'abord la question de la nécessité de l'hypothèse $f \in L^1_\mu$ dans le théorème de Birkhoff pour une transformation θ ergodique. Deux faits sont bien connus : si $f \geq 0$ et $\int f\,d\mu = +\infty$ alors $\lim_n \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f \circ \theta^k = +\infty$ μ p.p.; il existe f telle que $\int f^+\,d\mu = \int f^-\,d\mu = +\infty$ pour laquelle $\frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f \circ \theta^k$ converge μ p.p. vers une limite finie ([8], p. 32). La condition $f \in L^1_\mu$ n'est donc pas nécessaire stricto sensu dans le théorème de Birkhoff comme elle l'est dans la loi forte des grands nombres de Kolmogorov. Cependant en exploitant la nécessité stricte de l'intégrabilité dans cette loi on déduit automatiquement du théorème d'isomorphisme des espaces mesurés du type de Lebesgue ([19], p. 17) que, f étant donnée vérifiant $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = +\infty$, il existe une transformation ergodique θ' telle que $\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f \circ \theta'^k$ diverge μ p.p..

Ceci est en fait analogue à ce qu'on a prouvé ci-dessus pour les flots continus (première partie du théorème 2 pour le poids φ uniforme). Mais pour les moyennes (C, α) discrètes, $0 < \alpha \lneqq 1$ tout ceci n'est plus valable. On a les inclusions $L_\mu(1/\alpha, 1) \subsetneqq L_\mu^{1/\alpha} \subsetneqq L_\mu^1$. Si $f \geq 0$, $f \notin L_\mu(1/\alpha, 1)$ on peut avoir $f \in L_\mu^1$; alors

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f \circ \theta^k = \int f \, d\mu \text{ p.p.}$$

et nécessairement

$$\limsup_n C_n^\alpha f \geq \int f \, d\mu \geq \liminf_n C_n^\alpha f \ \mu \text{ p.p.}$$

où on note :

$$C_n^\alpha f(\omega) = \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k+\alpha-1}{n-k} f \circ \theta^k(\omega)$$

car c'est une propriété générale de la convergence (C, α) ([24], p. 78). On peut aussi avoir $f \in L_\mu^{1/\alpha}$; alors si la suite $f \circ \theta^k$ est indépendante les moyennes (C, α) convergent μ p.p. ([18], [6]). L'argument très simple d'isomorphisme utilisé ci-dessus pour les moyennes arithmétiques n'est donc plus possible. C'est pourquoi la seconde partie du théorème 2 dit davantage. La transformation ergodique θ est donnée. Pour $\alpha < 1$, $f \notin L_\mu(1/\alpha, 1)$, il faut construire une réarrangée équimesurable f' pour laquelle les moyennes (C, α) divergent en oscillant indéfiniment et ceci même si $f \geq 0$. Pour $\alpha = 1$ et f telle que $\int f^+ d\mu = \int f^- \, d\mu = +\infty$ il faut construire f' pour laquelle les moyennes arithmétiques divergent. Dans ces deux cas la question revient à montrer ces divergences pour une transformation ergodique θ' non pas quelconque mais conjuguée à la transformation θ donnée *i.e.* de la forme $\theta' = \tau^{-1} \theta \tau$.

Pour plus de clarté on énonce la proposition suivante qui traduit l'essentiel de la seconde partie du théorème 2, comme on vient de l'expliquer. On note encore $C_n^\alpha f$ les moyennes ergodiques (C, α) discrètes de f .

PROPOSITION 6. — *Soit θ une transformation ergodique préservant la mesure μ d'un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ du type de Lebesgue. Alors*

a) *pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $f \geq 0$, $f \notin L_\mu(1/\alpha, 1)$ *il existe une réarrangée équimesurable* f' *de* f *telle que*

$$\limsup_n C_n^\alpha f' = +\infty \ \mu \ p.p. \ ;$$

b) *pour* $\alpha = 1$ *et* f *telle que* $\int f^+ \, d\mu = \int f^- d\mu = +\infty$ *il existe une réarrangée équimesurable* f' *de* f *telle que*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f' \circ \theta^k = +\infty \ \mu \ p.p.$$

et

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} f' \circ \theta^k = -\infty \ \mu \ p.p. \ .$$

Démonstration. — Pour alléger on ne donne les détails que pour une transformation θ définie sur $]0, 1]$ par la méthode d'empilage ("stacking") correspondant à la division par 2 ([7]). Autrement dit : à la première étape θ applique le premier étage $]1/2, 1]$ sur le second, $]0, 1/2]$, d'une tour de deux étages, en préservant la mesure de Lebesgue λ ; à la $k^{\text{ième}}$ étape θ est définie sur $]2^{-k}, 2^{-k+1}]$ qu'elle applique sur $]1 - 2^{-k+1}, 1 - 2^{-k}]$ en préservant λ; la tour a 2^k étages, θ applique chaque étage sur le suivant, *etc.*

a) Pour deux entiers k et ℓ donnés formons la tour de hauteur $2^{k+\ell+1}$. Dans cette tour 2^ℓ étages sont des parties de $]2^{-k-\ell-1}, 2^{-k}]$ réparties uniformément de 2^k en 2^k étages. Soit $\tau_{k,\ell}$ la transformation préservant λ de $]2^{-k-\ell-1}, 2^{-k}]$ qui a pour effet de replacer ces étages de façon que les valeurs prises par f^* soient en ordre croissant quand on monte sous l'action de θ dans cette tour; autrement dit pour x au premier étage la suite $(\chi_{]2^{-k-\ell-1}, 2^{-k}]} f^*) \circ \tau_{k,\ell}(\theta^i x)$ est croissante pour $0 \leq i \leq 2^{k+\ell+1} - 1$. Pour $x \in]0, 1]$ soit n le plus petit entier tel que $\theta^n x$ appartienne au plus élevé de ces 2^ℓ étages. On se propose de minorer la moyenne (C, α) discrète

$$C_n^\alpha (\chi_{]2^{-k-\ell-1}, 2^{-k}]} f^* \circ \tau_{k,\ell})(x) \ .$$

Il est clair que ces moyennes sont d'autant plus petites que x est plus bas dans la tour. Si x est au premier étage en utilisant $\binom{n+\alpha}{n} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$ ([24], [9]) on trouve que cette moyenne est de l'ordre de :

$$2^{-(\ell+k+1)\alpha} \sum_{i=0}^{2^\ell} f^*((i+1) 2^{-k-\ell-1})(i 2^{k+1})^{\alpha-1}$$

qui est de l'ordre de

$$2^{(k+1)(\alpha-1)} \int_{2^{-k-\ell-1}}^{2^{-k}} f^*(t)t^{\alpha-1}\,dt\ .$$

Par hypothèse $f \notin L(1/\alpha,1)$ *i.e.* $\int_0^1 f^*(t)t^{\alpha-1}\,dt = +\infty$. On peut donc construire une suite croissante $k(j)$ telle que

$$2^{k(j)(\alpha-1)} \int_{2^{-k(j+1)}}^{2^{-k(j)}} f^*(t)t^{\alpha-1}\,dt \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty\ .$$

Soit τ la transformation de $]0,1]$ définie par $\tau(x) = \tau_{k(j),k(j+1)-k(j)-1}(x)$ si $x \in]2^{-k(j+1)}, 2^{-k(j)}]$; elle préserve λ et d'après l'estimation donnée cidessus

$$\limsup_n C_n^\alpha(f^* \circ \tau)(x) = +\infty\ \lambda \text{ p.p. }.$$

Ceci démontre a); on souligne à nouveau que si

$$f \in L^1\ ,\ \liminf_n C_n^\alpha f \le \int f\,d\mu \text{ p.p. }.$$

b) Ceci est probablement "connu des spécialistes" quoiqu'aucune référence précise ne semble disponible. La démonstration utilise des arguments voisins de ceux qu'on vient d'employer. D'abord on se ramène au cas où $(f^+)^*(x) = (f^-)^*(x) = 0$ pour $x > 1/2$ et on forme la réarrangée équimesurable de f : $g(x) = (f^+)^*(x)$ si $x < 1/2$; $g(x) = -(f^-)^*(x-1/2)$ si $x > 1/2$.

Dans la tour de hauteur $2^{k+\ell+1}$ on réordonne les étages provenant de $J_{k,\ell} =]2^{-k-\ell-1}, 2^{-k}] \cup]2^{-1} + 2^{-k-\ell-1}, 2^{-1} + 2^{-k}]$, de façon à ranger les valeurs positives de g en ordre croissant dans la moitié du bas de la tour et les valeurs négatives en ordre décroissant dans la moitié du haut. Ceci définit une transformation $\tau_{k,\ell}$ préservant λ de $J_{k,\ell}$. Les deux étages du haut sont $]0, 2^{-k-\ell-1}]$ et $]2^{-1}, 2^{-1} + 2^{-k-\ell-1}]$: ils portent les grandes valeurs de $(f^+)^*$ et $(f^-)^*$. Pour x situé dans la moitié du bas, soit n le plus petit entier tel que $\theta^n x$ soit au milieu de la tour. Alors

$$C_n^1(g \circ \tau_{k,\ell})(x) \ge C_n^1(g\chi_{J_{k,\ell}} \circ \tau_{k,\ell})(x) + C_n^1(g\chi_{]2^{-k},2^{-1}]\cup]2^{-1}+2^{-k},1]})(x)$$

qui est minoré par une quantité de l'ordre de

$$\int_{2^{-k-\ell-1}}^{2^{-k}} (f^+)^*(t)\,dt - (f^-)^*(2^{-k})\ .$$

Pour x dans la moitié du haut, soit n le plus petit entier tel que $\theta^{n-1}x$ soit au $(2^{k+\ell+1}-2)^{\text{ième}}$ étage. On trouve de même que $C_n^1(g \circ \tau_{k,\ell})(x)$ est majoré par une quantité de l'ordre de

$$-\int_{2^{-k-\ell-1}}^{2^{-k}} (f^-)^*(t)\,dt + (f^+)^*(2^{-k})\ .$$

Si $\int f^+ = \int f^- = +\infty$ on peut choisir une suite croissante $k(j)$ telle que ces deux quantités tendent vers $\pm\infty$ quand $j \to \infty$.

On recolle les transformations $\tau_{k(j),k(j+1)-k(j)-1}$ ainsi formées pour définir une transformation τ de $]0,1]$ préservant λ . Comme $\lambda-$presque tout $x \in]0,1]$ visite une infinité de fois la moitié supérieure de la tour de hauteur $2^{k(j)}$ et aussi la moitié inférieure de la tour, on trouve

$$\limsup_n C_n^1(g \circ \tau)(x) = +\infty \ \lambda \text{ p.p.}$$

et

$$\liminf_n C_n^1(g \circ \tau)(x) = -\infty \ \lambda \text{ p.p.} .$$

On peut aussi démontrer b) avec les moyennes (C,α), $0 < \alpha < 1$, en supposant $f^+ \notin L(1/\alpha,1)$ et $f^- \notin L(1/\alpha,1)$. Ainsi le théorème 2 est entièrement jusitifié.

7. Quelques remarques finales.

Si la mesure invariante μ est infinie, $\sigma-$finie, le théorème ergodique fractionnaire reste valide : si $f \in L_\mu(1/\alpha,1)$, $0 < \alpha \leq 1$, les moyennes ergodiques (C,α) continues ou discrètes convergent μ p.p.. Mais dans ce cas, pour un flot ergodique, la limite est 0 μ p.p. alors que dans le cas où μ est finie la limite est $\int f\,d\mu$. Pour un poids φ à support compact on peut encore définir un espace $\Lambda_\mu(\varphi^*) = \{f \ ; \int_0^{+\infty} f^*(t)\varphi^*(t)\,dt < \infty\}$ qui est un espace de Banach; on peut étendre le théorème ergodique local pondéré par φ aux fonctions de cet espace mais évidemment on ne peut pas étendre le théorème ergodique à l'infini.

Pour les moyennes (C,α) avec $\alpha > 1$ ou les moyennes d'Abel la situation est beaucoup plus simple. Les moyennes ergodiques (C,α), $\alpha > 1$, ou d'Abel convergent μ p.p. dès que $f \in L^1_\mu$, car la convergence $(C,1)$ implique la convergence (C,α), $\alpha > 1$ et aussi la convergence d'Abel. On peut se demander si cette convergence a lieu pour un espace de fonctions, stable par réarrangement équimesurable, strictement plus grand que L^1_μ. La réponse est négative; elle est donnée par un théorème remarquable de Lai suivant lequel la convergence p.p. au sens d'Abel d'une suite de variables aléatoires i.i.d. X_n (*i.e.* $\lim_{t\to 1}(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} t^n X_n$ existe p.p.) équivaut à l'intégrabilité $E(|X_n|) < \infty$ et donc aussi à la convergence $(C, 1)$ ([15]). La condition ne portant que sur les répartitions qui donnent la convergence d'Abel p.p. pour une suite stationnaire ne peut évidememnt pas être moins stricte.

Des études récentes ont porté sur la convergence p.p. de moyennes de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées X_n formées par la méthode suivante : une probabilité ν sur $\mathbb{Z}$ étant donnée on définit les moyennes $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \nu^{*n}(k)X_k$. Cette méthode est appelée méthode de la marche aléatoire. Les moyennes d'Euler ou de Borel sont de ce type ([9]). Sous des hypothèses larges sur ν mais avec l'hypothèse $E(|X_n|^2) < \infty$ on prouve la convergence p.p. de ces moyennes quand $n \to +\infty$ (*cf.* [2] et les références qui y sont données). On peut se demander ce qui reste de ces résultats si la suite X_n est seulement stationnaire *i.e.* $X_n = f \circ \theta^n$, θ préservant la mesure. Si $\sum_k k\nu(k) > 0$ ces moyennes ne sont plus de la forme générale étudiée ici; en effet $m_n = \sum_k k\nu^{*n}(k)$ croît linéairement en n mais $\sigma_n^2 = \sum_k (k - m_n)^2 \nu^{*n}(k)$ croît aussi linéairement en n et non pas en n^2, ce qui distingue ces moyennes des moyennes homothétiques entre elles étudiées dans les paragraphes précédents. On peut conjecturer que le plus grand espace, stable par réarrangement équimesurable, de fonctions pour lesquelles la convergence p.p. de moyennes de ce type ait lieu, est réduit aux constantes, la transformation θ étant supposée ergodique. Ceci est suggéré par l'exemple des moyennes $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\sqrt{n}} f \circ \theta^{n+k}$ traité dans [1], qui semble typique.

En guise de conclusion, si le théorème de Birkhoff et la loi forte des grands nombres de Kolmogorov sont gouvernés par la même hypothèse d'intégrabilité c'est, au moins pour une part, à cause de l'égalité des espaces L^1_μ et $L_\mu(1, 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. AKCOGLU and A. DEL JUNCO, Convergence of averages of point transformations, Proc. Amer. Math. Soc., 49 (1975), 265–266.

[2] N. BINGHAM and G. TENENBAUM, Riesz and Valiron means and fractional moments, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 99, n° 1 (1986), 143–150.

[3] A. CALDERON, Ergodic theory and translation invariant operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 59 (1968), 349–353.

[4] M. DE GUZMAN, Real variable methods in Fourier analysis, North Holland, Math. Studies, 46 (1981).

[5] Y. DÉNIEL, On the a.e. Cesàro-α convergence for stationary or orthogonal random variables, Journal of Theoretical Probability, vol. 2, n° 4 (1989), 475–485.

[6] Y. DÉNIEL et Y. DERRIENNIC, Sur la convergence presque sûre au sens de Cesàro d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, de v.a. i.i.d., Proba. theory, 79 (1988), 629–636.

[7] N. FRIEDMAN, Introduction to ergodic theory, Van Nostrand Math. Studies, 29 (1970).

[8] P. HALMOS, Lectures on ergodic theory, Chelslea Pub. Comp., 1956.

[9] G.H. HARDY, Divergent series, Oxford press, 1959.

[10] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD & G. POLYA, Inequalities, Cambridge Press, 1934.

[11] R.A. HUNT, On $L(p,q)$ spaces, L'enseignement mathématique XII, n° 4 (1966), 249–276.

[12] R. IRMISCH, Punktweise Ergodensätze für (C,α)-Verfahren, $0 < \alpha < 1$, Dissertation, Fachbereich Math., TH Darmstadt, 1980.

[13] W. JURKAT and J. TROUTMAN, Maximal inequalities related to generalized a.e. continuity, Trans. Amer. Math. Soc., 252 (1979), 49–64.

[14] U. KRENGEL, Ergodic theorems, De Gruyter, 1985.

[15] T.L. LAI, Summability methods for iid random variables, Proc. Amer. Math. Soc., 43 (1974), 253–261.

[16] G.G. LORENTZ, Some new functional spaces, Ann. of Math., 51 (1950), 37–55.

[17] G.G. LORENTZ, Bernstein polynomials, Math. expositions, Toronto press n° 8, 1953.

[18] G.G. LORENTZ, Borel and Banach properties of methods of summation, Duke Math. J., n° 22 (1955), 129–141.

[19] K. PETERSEN, Ergodic theory, Cambridge Univ. Press, 1983.

[20] E.M. STEIN, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, 1970.

[21] E.M. STEIN, G. WEISS, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

[22] E.M. STEIN, Editor's note : the differentiability of functions in $\mathbb{R}^n$, Ann. of Math., 113 (1981), 383–385.

[23] N. WIENER, The ergodic theorem, Duke Math. J., 5 (1939), 1–18.

[24] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Cambridge Univ. Press, 1959.

Manuscrit reçu le 4 juillet 1988,
révisé le 28 mars 1989.

M. BROISE, Y. DÉNIEL, Y. DERRIENNIC,
Département de Mathématiques
et Informatique
Université de Bretagne occidentale
6, avenue Victor le Gorgeu
29287 Brest (France).