ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

H. GOURGEON
JACQUELINE MOSSINO

Sur un problème à frontière libre de la physique des plasmas

Annales de l'institut Fourier, tome 29, nº 4 (1979), p. 127-141
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1979__29_4_127_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 4 (1979), 127-141.

SUR UN PROBLÈME A FRONTIÈRE LIBRE DE LA PHYSIQUE DES PLASMAS

par H. GOURGEON et J. MOSSINO

Ce papier porte sur l'étude mathématique d'une équation du type de Grad-Mercier qui décrit, dans certaines circonstances, l'équilibre d'un plasma confiné [9], [12], [13]. Il s'agit de trouver une fonction « régulière » u solution du système

$$(1)\qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda g[\delta(u)] = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = \text{constante (inconnue)} > 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{I}, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$, et

$$\delta(u)(x) = \text{mes}\,\{y \in \Omega \,|\, u(x) < u(y) < 0\}.$$

L'opérateur non linéaire δ n'est ni monotone, ni local (ni même continu).

Nous montrons l'existence, ou la non-existence, de solutions, selon les valeurs du paramètre λ. Cet article utilise des résultats antérieurs de l'un des auteurs [18] et il nécessite néanmoins de nouveaux arguments permettant de contourner la difficulté liée au manque de coercivité de l'opérateur. Une technique de symétrisation intervient ici de façon essentielle. □

Sous certaines conditions l'équilibre d'un plasma confiné dans une machine Tokomak peut se traduire mathématiquement par le problème à frontière libre suivant : trouver une fonction u suffisamment régulière qui vérifie

$$(2)\qquad \begin{cases} -\Delta u + \begin{Bmatrix} 0 & \text{si} \quad u \geqslant 0 \\ f(x,u) & \text{si} \quad u < 0 \end{Bmatrix} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = \gamma \text{ constante inconnue} > 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{I}, \end{cases}$$

(Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{I} > 0$ est donné tandis que $\gamma > 0$ est inconnu – cf. l'appendice de [22] –).

L'expression exacte de la fonction $f(x,u)$ est inconnue : c'est là l'une des difficiles questions du point de vue physique. De nombreux travaux mathématiques portent sur le cas où

$$(3.1) \qquad f(x,u) = \lambda u(x)$$

(cf. [22], [23], [3], [20], [5], [6], [7]). Nous étudions ici un modèle, du type de Grad-Mercier (cf. [9], [13]) :

$$(3.2) \qquad f(x,u) = \lambda g\,(\text{mes}\,\{y \in \Omega \,|\, u(x) < u(y) < 0\}),$$

où g est une fonction positive qui ne s'annule qu'en zéro. En reportant (3.2) dans (2) nous obtenons (1). Nous considérons λ comme un paramètre et nous discutons l'existence de solutions suivant la valeur de λ.

L'un des auteurs avait étudié en [18] des problèmes voisins de (1). Il s'agissait du problème dans un ouvert fixe Ω

$$(4.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = g(x, \text{mes}\,\{y \in \Omega \,|\, u(y) \leqslant u(x)\}) \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ou bien du problème à frontière libre

$$(4.2) \qquad \begin{cases} u(x) - \Delta u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } u(x) \geqslant 0 \\ g(x, \delta(u)(x)) & \text{si } u(x) < 0 \end{cases} \text{ dans } \Omega, \\ u = \text{constante inconnue sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = -1. \end{cases}$$

(δ comme dans (1)). Dans [18] on ne faisait pas d'hypothèse de signe sur la fonction g, qui pouvait également dépendre de x. Nous utiliserons ici certains résultats de ce travail précédent. Mais les problèmes (4.1), (4.2) sont coercifs. Ici l'opérateur $u - \Delta u$ de (4.2) est remplacé par $-\Delta u$: le problème (1) n'est pas coercif, ce qui introduit quelques difficultés supplémentaires. Une technique de « réarrangement croissant » (cf. par exemple [11] et [19]) intervient de façon essentielle en permettant de calculer l'intégrale

$$\int_{u<0} g(\delta(u)(x))\, dx.$$

□

1. Transformation du problème initial (1).

Soit v une fonction mesurable réelle définie presque partout dans Ω. On pose

(5.1) $$\underline{\beta}(v)(x) = \text{mes}\,\{y \in \Omega \mid v(y) < v(x)\},$$

(5.2) $$\bar{\beta}(v)(x) = \text{mes}\,\{y \in \Omega \mid v(y) \leqslant v(x)\},$$

(5.3) $$\beta(v)(x) = [\underline{\beta}(v)(x), \bar{\beta}(v)(x)].$$

Par le théorème de Fubini $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$ (définies p.p. dans Ω) sont mesurables. Ainsi $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$ appartiennent à

(6) $$B = \{\psi \in L^{\infty}(\Omega) \mid 0 \leqslant \psi(x) \leqslant |\Omega| \text{ p.p. } x \in \Omega\} \text{ [1]}$$

□

Dans toute la suite nous supposerons que

(7) g est une fonction continue de $[0, |\Omega|]$ dans $\mathbf{R}^+$, qui s'annule en 0, et en 0 seulement.

Nous désignerons par G la primitive de g qui est nulle à l'origine :

(8) $$G(x) = \int_0^x g(\tau)\,d\tau.$$

Il est clair que G est dans $\mathscr{C}^1([0, |\Omega|]; \mathbf{R}^+)$, est strictement croissante sur $[0, |\Omega|]$, et par suite est inversible, la fonction inverse G^{-1} étant continue et strictement croissante. □

Nous verrons que les solutions de (1) sont dans la classe des fonctions « admissibles » définies ci-après.

DÉFINITION. — *Une fonction* $u : \Omega \to \mathbf{R}$ *est dite « admissible » si et seulement si*

(i) $$u \in \mathscr{C}^1(\bar{\Omega}),$$

(ii) $$0 < |\Omega_-(u)| < |\Omega|,$$

(iii) $$\underline{\beta}(u) = \bar{\beta}(u) \text{ dans } \Omega_-(u) = \{u < 0\}$$

(c'est-à-dire u *est « sans palier » dans* $\Omega_-(u)$*).*

[1] Si E est un ensemble mesurable inclus dans Ω, nous noterons $|E|$ sa mesure.

Nous considérons maintenant le problème suivant (nous verrons ci-après qu'il est équivalent au problème (1)):

$$
(1') \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)\right]_+ = 0 \text{ dans } \Omega \text{ (}^2\text{)}, \\ u = \gamma \text{ constante inconnue sur } \partial\Omega, \\ |\Omega_-(u)| = G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) \end{cases}
$$

(I et γ comme ci-dessus; on suppose ici $\lambda \geqslant \dfrac{I}{G(|\Omega|)}$, c'est-à-dire $\dfrac{I}{\lambda} \in G([0, |\Omega|])$, de sorte que $G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right)$ est bien défini. □

D'après Agmon-Douglis-Nirenberg [2], toute solution de (1) ou (1') est dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout entier p (puisque $-\Delta u$ est dans $L^\infty(\Omega)$), donc dans $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ par le théorème d'injection de Sobolev [1]. De plus, sur $\{x \in \Omega \,|\, \underline{\beta}(u)(x) = \bar{\beta}(u)(x)\}$, la continuité de u implique celle de $\underline{\beta}(u) = \bar{\beta}(u)$ (cf. [14], p. A2, A3).

Nous allons voir que les problèmes (1) et (1') sont équivalents. Plus précisément, on a le

THÉORÈME 1. — *Soit* u *une solution de* (1). *Alors nécessairement*

$$
\lambda > \frac{I}{G(|\Omega|)}, \tag{9}
$$

$$
|\Omega_-(u)| = G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right). \tag{10}
$$

De plus u *est admissible, et est solution de* (1').

Réciproquement, soit u *une solution de* (1'). *Alors, on a nécessairement* (9). *De plus* u *est admissible, et est solution de* (1).

Démonstration. — Soit u une solution de (1). Nous remarquons d'abord que $\lambda \neq 0$ (sinon $-\Delta u = 0$ dans Ω, $u = \gamma$ constante sur $\partial\Omega$, donc $u = \gamma$ dans Ω, en contradiction avec $\left.\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = I > 0\right)$. Supposons

(2) Pour t réel, on note $t_+ = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$, et $g[t]_+ = g(t_+)$.

maintenant que u ait un palier P dans $\Omega_-(u)$. D'après Stampacchia [21], on a alors, puisque $u \in H^2(\Omega)$,

$$0 = \frac{1}{\lambda} \Delta u = g[|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)] \text{ p.p. sur } P,$$

d'où (par (7))

$$|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u) = 0 \text{ p.p. sur } P. \tag{11}$$

Comme u est dans $\mathscr{C}^\circ(\bar{\Omega})$, nous avons, si $u(x) < 0$,

$$|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)(x) = \text{mes}\,\{y \in \Omega | u(x) < u(y) < 0\} > 0,$$

en contradiction avec (11). D'où (iii). Maintenant,

$$0 < I = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Omega \Delta u = \int_{\Omega_-(u)} \Delta u, \tag{12}$$

et il en résulte que $|\Omega_-(u)| > 0$. De plus, comme $u = \gamma > 0$ *sur* $\partial\Omega$, $|\Omega_-(u)| < |\Omega|$. D'où (ii). Par (12),

$$I = \int_{\Omega_-(u)} \Delta u = \lambda \int_{\Omega_-(u)} g[|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)] = \lambda G(|\Omega_-(u)|) \tag{13}$$

(cf. lemme 1 ci-dessous). On a par suite (9), (10), et u est admissible. Il reste à vérifier que u est solution de (1'). Or on montre aisément que

$$\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)\right]_+ = [|\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u)]_+ \tag{14}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } u \geqslant 0, \\ |\Omega_-(u)| - \bar{\beta}(u) & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Réciproquement soit u une solution de (1'). On a alors (14) comme ci-dessus, et l'on établit (iii) comme dans la démonstration de la partie directe. D'où

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Omega \Delta u = \lambda \int_\Omega g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)\right]_+$$

$$= \lambda \int_{\Omega_-(u)} g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)\right] = \lambda G \circ G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) = I$$

(on a utilisé le lemme 1 ci-dessous et (iii)). Donc u est solution de (1). Par la partie directe de la proposition, u est admissible, et l'on a nécessairement (9).

Il reste à établir le

LEMME 1. — *Soit* v *une fonction continue de* Ω *dans* $\mathbf{R}$, *et soit* E *un ensemble mesurable inclus dans* Ω, *tel que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \underline{\beta}(v)(x) = \overline{\beta}(v)(x) \tag{15}$$

(*c'est-à-dire les points de* E *ne sont pas dans des paliers de* v),

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \forall y \in \Omega \setminus \mathrm{E}, \qquad v(x) < v(y). \tag{16}$$

Soit g *une fonction continue de* $[0, |\Omega|]$ *dans* $\mathbf{R}$, *et soit* G *la primitive de* g *qui s'annule en* 0. *Alors*

$$\int_{\mathrm{E}} g[\overline{\beta}(v)(x)]\, dx = \int_{\mathrm{E}} g[|\mathrm{E}| - \overline{\beta}(v)(x)]\, dx = \mathrm{G}(|\mathrm{E}|). \tag{17}$$

Avant de démontrer ce lemme, remarquons qu'il s'applique en particulier à

$$\mathrm{E} = \{x \in \Omega \,|\, v(x) < c\},$$

ou bien

$$\mathrm{E} = \{x \in \Omega \,|\, v(x) \leqslant c\}$$

(c réel donné) dès que E vérifie (15).

Nous l'appliquerons toujours avec $\mathrm{E} = \{x \in \Omega \,|\, v(x) < 0\}$, et $v = u$.

Démonstration du lemme 1. — Il suffit évidemment de prouver

$$\int_{\mathrm{E}} g[\overline{\beta}(v)(x)]\, dx = \mathrm{G}(|\mathrm{E}|), \tag{18}$$

l'autre égalité de (17) s'en déduisant aisément par changement de fonction g. Par (15) et la continuité de v, il est aisé de vérifier que la fonction

$$\mu : [\operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}} v(x),\ \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E}} v(x)] \to \mathrm{E}^* = [0,\ |\mathrm{E}|]$$

définie par

$$\mu(s) = \operatorname{mes} \{x \in \mathrm{E} \,|\, v(x) \leqslant s\}$$

est continue et strictement croissante entre 0 et $|\mathrm{E}|$. Elle est donc inversible. Nous appellerons « réarrangement croissant de v sur E » la fonction

$$v^* : \quad \mathrm{E}^* \to [\operatorname*{Inf}_{x \in \mathrm{E}} v(x),\ \operatorname*{Sup}_{x \in \mathrm{E}} v(x)] \quad \text{inverse de } \mu\ (^3).$$

(3) Nous renvoyons le lecteur à [11], [19], [4] pour une étude plus systématique de cette notion de réarrangement croissant.

Remarquons que v^* est elle-même continue et strictement croissante, et que par (16),

$$\forall x \in \mathrm{E},$$
$$\bar{\beta}(v)(x) = \operatorname{mes}\{y \in \Omega \,|\, v(y) \leqslant v(x)\} = \operatorname{mes}\{y \in \mathrm{E} \,|\, v(y) \leqslant v(x)\}.$$

On a alors

$$\forall \tau \in \mathrm{E}^*, \qquad \bar{\beta}(v^*)(\tau) = \operatorname{mes}\{\theta \in \mathrm{E}^* \,|\, v^*(\theta) \leqslant v^*(\tau)\} = \tau,$$

de sorte que (18) sera démontré si nous prouvons que

$$\int_{\mathrm{E}} g[\bar{\beta}(v)(x)]\, dx = \int_{\mathrm{E}^*} g[\bar{\beta}(v^*)(\tau)]\, d\tau, \tag{19}$$

et pour cela il suffit d'établir que les deux mesures images de Borel sur **R**, $\bar{\beta}(v)(dx)$ et $\bar{\beta}(v^*)(d\tau)$ (dx = mesure de Lebesgue sur E, $d\tau$ = mesure de Lebesgue sur E^*), sont égales, c'est-à-dire que

$$\bar{\beta}(v)(dx)(\mathscr{B}) = \bar{\beta}(v^*)(d\tau)(\mathscr{B}), \tag{20}$$

lorsque $\mathscr{B}$ est un borélien de E^*, ou même lorsque $\mathscr{B}$ est un intervalle $]0, t]$, $t \in \mathrm{E}^*$. Dans ce cas, (20) se réduit à

$$\int_{\mathrm{E}} \bar{h}(t - \bar{\beta}(v)(x))\, dx = \int_{\mathrm{E}^*} \bar{h}(t - \bar{\beta}(v^*)(\tau))\, d\tau \tag{21}$$

où $\bar{h}$ est la fonction d'Heaviside qui vaut 1 en 0. Maintenant, pour $x \in \mathrm{E}$, et $\tau_0 = v^*(t)$ il est aisé de vérifier que

$$\bar{\beta}(v)(x) \leqslant t \quad \text{équivaut à} \quad v(x) \leqslant \tau_0,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{E}} \bar{h}(t - \bar{\beta}(v)(x))\, dx &= \operatorname{mes}\{x \in \mathrm{E} \,|\, \bar{\beta}(v)(x) \leqslant t\} \\ &= \operatorname{mes}\{x \in \mathrm{E} \,|\, v(x) \leqslant \tau_0\} \\ &= t. \end{aligned}$$

Comme $\bar{\beta}(v^*)(\tau) = \tau$, le second membre de (21) a la même valeur t.

Remarque. — Nous pouvons donner une autre démonstration de (19), utilisant un résultat connu en théorie de la symétrisation. Sur E,

$$\mathrm{V} = \bar{\beta}(v) = \mu \circ v : \quad \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$$

est une fonction continue et sans palier. Soit

$$V^* = \bar{\beta}(v)^* : \quad E^* \to E^*$$

son réarrangement croissant sur E.

Par définition, une fonction et son réarrangement croissant sont équimesurables. Donc

$$\int_E g[V(x)]\, dx = \int_{E^*} g[V^*(\tau)]\, d\tau.$$

Pour prouver (19), il suffit donc de montrer que

$$\bar{\beta}(v)^* = \bar{\beta}(v^*),$$

c'est-à-dire que $\bar{\beta}(v)^*$, ou encore son inverse

$$t \to \operatorname{mes}\{x \in E \,|\, \bar{\beta}(v)(x) \leqslant t\},$$

est l'identité sur E^*. Or nous remarquons (comme dans la démonstration précédente) que

$$\operatorname{mes}\{x \in E \,|\, \bar{\beta}(v)(x) \leqslant t\} = t. \qquad \square$$

Nous allons utiliser maintenant la formulation (1′) pour nous ramener à un problème du type (4.1). Nous pourrons alors appliquer les résultats de [18], et nous obtiendrons ainsi l'existence d'une solution de (1′), pour tout $\lambda > \dfrac{I}{G(|\Omega|)}$. $\square$

2. Résolution du problème transformé (1′).

L'idée est la suivante. Soit $\lambda > \dfrac{I}{G(|\Omega|)}$ fixé. Si u est solution de (1′), $v = u - \gamma$ est solution de

$$(22) \qquad \begin{cases} -\Delta v + \lambda g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(v)\right]_+ = 0 \text{ dans } \Omega, \\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Réciproquement, si l'on sait trouver v solution de (22), puis $\gamma > 0$ tel que

$$(23) \qquad \underline{\mu}(v)(-\gamma) = \operatorname{mes}\{y \in \Omega \,|\, v(y) < -\gamma\} = G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right),$$

alors $u = v + \gamma$ est solution de (1'). On sait d'après [18] que (22) a des solutions, mais de toute façon $v \equiv 0$ est solution ! De plus la possibilité de déterminer γ par le procédé (23) n'est pas assurée, la fonction $\underline{\mu}(v)(\cdot)$. n'étant continue que si v est sans palier.

Notons que du point de vue numérique, cette méthode paraît cependant satisfaisante (cf. les essais effectués par l'un des auteurs [8]).

Nous allons décrire un procédé de régularisation qui permet de contourner la difficulté théorique, et d'établir de façon constructive le

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\lambda > \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{G}(|\Omega|)}$, *il existe* u *solution du problème* (1') (*équivalent à* (1)) [4]. *Une telle solution est déterminée comme limite dans* $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ (*pour* $\varepsilon \searrow 0$) *d'une suite* $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$, *où* v_ε *est une solution de*

$$(22_\varepsilon)\qquad \begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + \lambda g\left[\mathrm{G}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(v_\varepsilon)\right]_+ = -\varepsilon \ \textit{dans} \ \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 \ \textit{sur} \ \partial\Omega, \end{cases}$$

et γ_ε *est défini de façon unique à partir de* v_ε *par*

$$(23_\varepsilon)\qquad \underline{\mu}(v_\varepsilon)(-\gamma_\varepsilon) = \mathrm{mes}\,\{y \in \Omega \mid v_\varepsilon(y) < -\gamma_\varepsilon\} = \mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right).$$

Démonstration. — Nous utiliserons le *lemme fondamental* suivant, obtenu par application d'un résultat de [18] (cf. Chap. I, lemme 1 et la vérification de (1.5) au § 2.1). □

LEMME 2. — *Soit* k ($\mathbf{R} \to \mathbf{R}$) *donnée par* $k(s) = g\left[\mathrm{G}^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - s\right]_+$. *Soit* $\Gamma(\mathrm{L}^2(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Omega))$ *l'opérateur multivoque défini par*

$$\Gamma(v) = \{\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega) \mid \psi(x) \in k(\beta(v)(x)) \ \text{p.p } x \in \Omega\} \ ({}^5)$$

[4] Pour $\lambda \leqslant \dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{G}(|\Omega|)}$, il n'existe pas de solution d'après le théorème I.

[5] On montre en [18] (chap. 1, § 2.1) que l'on a aussi

$$\Gamma(v) = \{\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega) \mid \exists\, \xi \in \beta(v),\ \psi(x) = k(\xi(x)) \ \text{p.p. } x \in \Omega\}$$

avec

$$\beta(v) = \{\xi \in \mathrm{B} \mid \xi(x) \in \beta(v)(x) \ \text{p.p. } x \in \Omega\}$$

(B défini en (6), $\beta(v)(x)$ défini en (5.3)).

(cf. (5.3)). *Alors le graphe* $\mathscr{G}(\Gamma) = \{(v,\psi) \in L^2(\Omega)^2 \mid \psi \in \Gamma(v)\}$ *est fermé dans* $L^2(\Omega)$ *fort* $\times$ $L^2(\Omega)$ *faible.* □

Enfin le lemme ci-après est contenu dans un résultat beaucoup plus général, démontré en [18], qui assure que

$$\{(v,\psi) \in L^2(\Omega)^2 \| \Omega_-(v)| \leqslant \psi(x) \leqslant |\Omega_-(v)| + |\Omega_0(v)| \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

est fermé dans $L^2(\Omega)$ fort $\times$ $L^2(\Omega)$ faible (cf. [18], chap. II, § 2.1, vérification de (1.5)).

LEMME 3. — *Soit* v_m *une suite de* $L^2(\Omega)$ *telle que*

$$v_m \to v \text{ dans } L^2(\Omega),$$
$$|\Omega_-(v_m)| \to \mu \text{ dans } \mathbf{R}.$$

Alors

$$|\Omega_-(v)| \leqslant \mu \leqslant |\Omega_-(v)| + |\Omega_0(v)| .$$ □

Ces rappels étant faits, nous passons à la démonstration constructive du théorème 2. On considère (pour $\varepsilon > 0$ fixé) le problème :

$$(22'_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + \lambda\Gamma(v_\varepsilon) \ni -\varepsilon \text{ dans } \Omega, \\ v_\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après [18] (chap. I, théorème 2.1) $(22'_\varepsilon)$ a des solutions v_ε dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ et elles sont clairement sans palier ([6]) (car $-\varepsilon \in \lambda g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(v_\varepsilon)\right]_+$ sur tout palier de v_ε, ce qui est impossible puisque g est à valeurs positives). Ainsi $(22'_\varepsilon)$ est en fait (22_ε). D'autre part v_ε est (borné lorsque $\varepsilon \searrow 0$) dans $W^{2,p}(\Omega)$ pour tout entier p, d'après Agmon-Douglis-Nirenberg [2], donc v_ε est (borné lorsque $\varepsilon \searrow 0$) dans $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ d'après le théorème d'injection de Sobolev [1]. Ainsi, puisque v_ε est continue et sans palier, $s \to \underline{\mu}(v_\varepsilon)(s)$ est continue et strictement croissante entre 0 et $|\Omega|$. Il existe donc un unique réel γ_ε déterminé par (23_ε), et puisque $-\gamma_\varepsilon$ est une valeur de v_ε atteinte dans Ω, on a $\gamma_\varepsilon > 0$ par le principe du maximum (car $-\Delta v_\varepsilon < 0$ dans Ω, $v_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$). De plus, lorsque $\varepsilon \searrow 0$, γ_ε est borné dans $\mathbf{R}$, puisque v_ε est borné dans $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$.

([6]) C'est-à-dire $\underline{\beta}(v_\varepsilon) = \bar{\beta}(v_\varepsilon)$ p.p. dans Ω.

On pose alors $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$. Ainsi u_ε est sans palier et vérifie

$$(1'_\varepsilon)\quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \lambda g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \beta(u_\varepsilon)\right]_+ = -\varepsilon \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \text{ sur } \partial\Omega, \\ |\Omega_-(u_\varepsilon)| = G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(24)\quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \begin{Bmatrix} 0 \text{ si } u_\varepsilon \geqslant 0 \\ \lambda g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \beta(u_\varepsilon)\right] \text{ si } u_\varepsilon < 0 \end{Bmatrix} = -\varepsilon \text{ dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \text{ sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = I + \varepsilon|\Omega|, \\ |\Omega_-(u_\varepsilon)| = G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) \end{cases}$$

(l'égalité $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = I + \varepsilon|\Omega|$ s'établissant comme dans la démonstration du théorème 1, partie réciproque). Nous faisons maintenant tendre ε vers 0. Nous avons vu que v_ε est borné dans $W^{2,p}(\Omega)$ et que γ_ε est borné dans $\mathbf{R}$. Ainsi u_ε est borné dans $W^{2,p}(\Omega)$. De plus $\psi_\varepsilon = g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \beta(u_\varepsilon)\right]_+$ est borné dans $L^2(\Omega)$.

Quitte à extraire des sous-suites, on peut donc supposer que $u_\varepsilon \to u$ dans $W^{2,p}(\Omega)$ faible et $\mathscr{C}^1(\bar{\Omega})$ fort par compacité (d'après le théorème de Rellich Kondrachov [1]),

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon &\to \psi \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \text{ faible,} \\ \gamma_\varepsilon &\to \gamma \quad \text{dans} \quad \mathbf{R} \text{ (avec } \gamma \geqslant 0). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2, $\psi \in \Gamma(u)$. Le passage à la limite dans

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \lambda g\left[G^{-1}\left(\dfrac{I}{\lambda}\right) - \beta(u_\varepsilon)\right]_+ = -\varepsilon \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon = \gamma_\varepsilon \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = I + \varepsilon|\Omega| \end{cases}$$

est loisible et donne

$$(25)\qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda\psi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = \gamma \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{I}. \end{cases}$$

Maintenant, soit P un palier de u. Alors,

$$0 = \frac{1}{\lambda}\,\Delta u(x) = \psi(x) \in g\left[\mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right]_+ \quad \text{p.p. } x \in \mathrm{P},$$

c'est-à-dire

$$0 = g\left[\mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right]_+ = \psi(x) \text{ p.p. } x \in \mathrm{P},$$

et finalement

$$(26)\qquad \psi(x) = g\left[\mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x)\right]_+ \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

De plus, on a

$$(27)\qquad |\Omega_-(u)| \leqslant \mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) \leqslant |\Omega_-(u)| + |\Omega_0(u)|$$

$\Bigg($cela résulte du lemme 3 : on remplace v_m par u_ε et μ par $\mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right)\Bigg)$. On en déduit

$$(28)\qquad \gamma > 0$$

(sinon $-\Delta u = -\lambda\psi \leqslant 0$ dans Ω, $u = 0$ sur $\partial\Omega$; or $\psi \not\equiv 0$ — autrement $u \equiv 0$, en contradiction avec $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \mathrm{I}$ — donc $u < 0$ dans Ω par le principe du maximum, et alors $|\Omega_-(u)| = |\Omega| \leqslant \mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right)$ par (27), en contradiction avec $\lambda > \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{G}(|\Omega|)}\Big)$. D'autre part, (27) permet de préciser (26) :

— 1) Si $u(x) \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^{-1}\left(\frac{\mathrm{I}}{\lambda}\right) - \bar{\beta}(u)(x) &\leqslant \operatorname{mes}\{y \mid u(y) \leqslant 0\} - \operatorname{mes}\{y \mid u(y) \leqslant u(x)\} \\ &= -\operatorname{mes}\{y \mid 0 < u(y) \leqslant u(x)\} \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc

$$\psi(x) = g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right]_+ = 0.$$

– 2) Si $u(x) < 0$,

$$G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x) \geqslant \operatorname{mes}\{y \mid u(y) < 0\} - \operatorname{mes}\{y \mid u(y) \leqslant u(x)\}$$
$$= \operatorname{mes}\{y \mid u(x) < u(y) < 0\} > 0,$$

donc u vérifie (iii), et

$$\psi(x) = g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right]_+ = g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right].$$

Ainsi

$$(29) \qquad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u(x) \geqslant 0 \\ g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)(x)\right] & \text{si} \quad u(x) < 0 \end{cases} \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Maintenant, par (25) et (29),

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \int_\Omega \Delta u = \lambda \int_\Omega \psi = \lambda \int_{\Omega_-(u)} g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)\right]$$
$$= \lambda\left[\frac{I}{\lambda} - G\left(G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - |\Omega_-(u)|\right)\right]$$

(on a utilisé le Lemme 1 et le fait que u vérifie (iii)) c'est-à-dire

$$(30) \qquad |\Omega_-(u)| = G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right).$$

En combinant (25), (26), (28) et (30), on obtient

$$(1') \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda g\left[G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right) - \beta(u)\right]_+ = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = \gamma > 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ |\Omega_-(u)| = G^{-1}\left(\frac{I}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Remarque. – Évidemment, (22) n'a pas une solution unique : $v \equiv 0$ et $v = u - \gamma$ (u, γ comme dans (1')) sont deux solutions de (22). Il serait intéressant d'étudier l'unicité de solution non triviale (c'est-à-dire $\not\equiv 0$) de (22) (pour $\lambda > I/G(|\Omega|)$ fixé). En effet, si (22) n'avait qu'une seule solution non triviale, alors (1′) (c'est-à-dire (1)) aurait une seule solution (il suffit de raisonner par l'absurde) pour tout $\lambda > \dfrac{I}{G(|\Omega|)}$, et aucune solution pour $\lambda \leqslant \dfrac{I}{G(|\Omega|)}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, *Comm. Pure Applied Math.*, 12 (1959), 623-727.

[3] H. Berestycki et H. Brezis, A free boundary problem arising in plasma physics, A paraître.

[4] H. J. Brascamp, E. H. Lieb et J. M. Luttinger, A general rearrangement inequality for multiple integrals, *J. Funct. Anal.*, 17 (1974), 227-237.

[5] A. Damlamian, Équivalence des formulations de R. Temam, H. Berestycki et H. Brezis pour un problème de frontière libre, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 286 (1978), 153-155.

[6] T. Gallouet, Quelques remarques sur une équation apparaissant en physique des plasmas, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 286 (1978), 739-741.

[7] T. Gallouet, Contribution à l'étude d'une équation apparaissant en physique des plasmas, Thèse de 3e cycle, Université de Paris VI, 1978.

[8] H. Gourgeon, Étude numérique de quelques problèmes non linéaires apparaissant en physique des plasmas, Thèse de 3e cycle, Université de Paris XI, Orsay, 1978.

[9] H. Grad, P. N. Hu et D. C. Stevens, Adiabatic evolution of plasma equilibrium, *Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A.*, 72, n° 10 (1975), 3789-3793.

[10] H. Grad, A. Kadish et D. C. Stevens, A free boundary Tokomak equilibrium, *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 (1974), 39-57.

[11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya, Inequalities in Mathematical Physics, Princeton University Press, Princeton N.J., (1951).

[12] C. Mercier, The Magneto-hydrodynamic Approach to the Problem of Plasma Confinment in Closed Magnetic Configurations, Publication of Euratom C.E.A., Luxembourg (1974).

[13] C. Mercier, Communications personnelles à R. Temam et aux auteurs.

[14] J. Mossino, Étude de quelques problèmes non linéaires d'un type nouveau apparaissant en physique des plasmas, Thèse, Université de Paris XI, Orsay, 1977 (les résultats de cet ouvrage seront publiés dans [17] et [18]).

[15] J. Mossino et R. Temam, Certains problèmes non linéaires de la physique des plasmas, Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Rome 1975, Lectures Notes in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1977).

[16] J. Mossino et J. P. Zolesio, Solution variationnelle d'un problème non linéaire de la physique des plasmas, *C.R. Acad. Sci.*, Série A, 285 (1977), 1033.
[17] J. Mossino, Application des inéquations quasi-variationnelles à quelques problèmes non linéaires de la physique des plasmas, *Isr. J. of Math.*, 30, n^{os} 1-2 (1978), 14-50.
[18] J. Mossino, Some nonlinear problems involving free boundary problems in plasma physics : applications of multivalued analysis, à paraître au *Journal of Differential Equations.*
[19] G. Polya et G. Szego, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton University Press, Princeton N.J., 1951.
[20] J. P. Puel, Sur un problème de valeur propre non linéaire et de frontière libre, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, 284, Série A (1977), 861-863.
[21] G. Stampacchia, Équations Elliptiques du second Ordre à Coefficients Discontinus, Presses de l'Université de Montréal, 1966.
[22] R. Temam, A nonlinear eigenvalue problem : the shape at equilibrium of a confined plasma, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 60 (1975), 51-73.
[23] R. Temam, Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 2 (1977), 563-586.

Manuscrit reçu le 7 février 1979.

H. Gourgeon et J. Mossino,
Université de Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.