

MICHEL GATESOUBE

**Caractérisation locale de la sous-algèbre fermée
des fonctions radiales de $FL^1(\mathbf{R}^n)$**

Annales de l'institut Fourier, tome 17, n° 1 (1967), p. 93-107

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1967__17_1_93_0

© Annales de l'institut Fourier, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISATION LOCALE DE LA SOUS ALGÈBRE FERMÉE DES FONCTIONS RADIALES DE $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n)$

par Michel GATESOUBE

I

Notations et Introduction.

a) ω est une application de \mathbf{R}^+ dans \mathbf{R}^+ continue, croissante telle

i) $\omega(0) = +1$

ii) $\omega(a+b) \leq \omega(a)\omega(b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{R}^+$

iii) $\omega(\lambda r) = O(\omega(r))$ λ fixé > 0 , r tendant vers $+\infty$, enfin ω est à croissance lente à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ tel que lorsque x tend vers $+\infty$

$$\omega(x) = O(x^k).$$

En particulier on pourra prendre $\omega(r) = (1+r)^k$ $k \in \mathbf{R}^+$.

b) $L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ désigne l'algèbre de Banach des applications $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ intégrables pour la mesure $\omega(|x|) dx$ munie de la norme :

$$\|f\| = \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| \omega(|x|) dx$$

$\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ est l'algèbre de Banach des transformées de Fourier avec la même norme; si $\hat{f} = \mathcal{F} f$

$$\|\hat{f}\| = \|f\|.$$

c) Une application de \mathbf{R}^n dans \mathbf{C} sera dite « radiale » si elle ne dépend que de la distance $r = |x|$; une telle application sera notée $(F)_n$ où F est la fonction d'une variable définie par

$$F(|x|) = (F)_n(x).$$

On sait que la transformation de Fourier, isomorphisme de $L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ sur $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ se restreint en un isomorphisme des sous algèbres fermées des fonctions radiales qu'on notera

$$L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega).$$

Le résultat qui va être établi dans cet article est le suivant :

Dans le complémentaire de l'origine, les algèbres

$$\mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega)$$

sont localement isomorphes.

De façon précise : Soit K un compact d'intérieur non vide contenu dans $]0, +\infty[$, $\theta : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction C^∞ à support compact dans $]0, +\infty[$, égale à 1 sur K et telle que $0 \leq \theta(x) \leq 1$ partout.

Alors

$$(F)_n \in \mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega) \quad (\text{I})$$

$$F \in \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega) \Rightarrow (\theta F)_n \in \mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega) \quad (\text{II})$$

Le théorème du graphe fermé montre immédiatement que ces deux applications sont continues. Cas particulier : $\omega(|x|) = +1$, alors

$$\text{loc } \mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n) \approx \text{loc } \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}}).$$

Une application : le contre exemple de L. Schwarz ([2]).

On sait que :

— un point de \mathbf{R} n'est pas de synthèse spectrale pour

$$\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^k) \quad \text{avec } k \geq 1.$$

On en déduit que

— Une sphère $S_{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ $n \geq 3$, n'est pas de synthèse spectrale pour $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^n)$.

Il suffit de remarquer que si on peut approcher une fonction de $\mathcal{F}L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n)$ par une suite de fonctions $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^n)$, la suite de fonctions radiales obtenues en faisant la moyenne sur les sphères de centre O , approche encore la fonction initiale.

II

Soit $(f)_n \in L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega)$ et $(F_n) = \mathcal{F}(f)_n \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega)$.

Un calcul classique ([1]) donne :

$$F(\rho) = C \int_0^{+\infty} r^{n-1} f(r) (\rho r)^{\frac{-n+2}{2}} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)}{2} dr$$

avec

$$\|F_n\| = \|f_n\| = \int_0^{+\infty} r^{n-1} |f(r)| \omega(r) dr < +\infty$$

où $J_\nu(t)$ est la fonction de Bessel ([3])

$$J_\nu(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-it \cos \theta} (\sin \theta)^{2\nu} d\theta$$

$z^{-\nu} J_\nu(z)$ est la fonction entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)} z^{2n}$.

On aura besoin du développement asymptotique, à un ordre N quelconque, de $J_0(z)$, valable pour $|z|$ assez grand, dans la demie bande $|\text{Im } z| \leq C^{\text{te}}, \text{Re}(z) > 0$.

$$J_0(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{a_q}{z^q}\right) \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sum_{q=1}^{n-1} \frac{b_q}{z^q}\right) \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right] + R_N(z)$$

où $R_N(z)$ est une fonction, holomorphe dans la demie bande

$$|\text{Im } z| \leq C^{\text{te}}, \text{Re}(z) > 0$$

$$|R_N(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^{N+1/2}}\right)$$

alors pour p quelconque on a la même estimation

$$|R_N^{(p)}(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^{N+1/2}}\right)$$

En effet :

$$R_N^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_C \frac{R_N(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta$$

où C est la circonférence de centre z , de rayon unité, donc

$$|R_N(z)| \leq p! \sup_{\zeta \in C} |R_N(\zeta)|.$$

PROPOSITION 1.

$$(F)_2 \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^2, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega).$$

Démonstration. — Par homothétie on peut se ramener au cas où le support de θ est contenu dans $]1, +\infty[$. On a

$$F(\rho) = C \int_0^{+\infty} r J_0(\rho r) f(r) dr$$

avec

$$\|(F)_2\| = \|(f)_2\| = \int_0^{+\infty} r |f(r)| \omega(r) dr < +\infty.$$

Soit

$$G(\rho) = C \int_0^M r J_0(\rho r) f(r) dr$$

c'est une fonction C^∞ dans $]0, +\infty[$, donc

$$\theta G \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega).$$

Reste

$$H(\rho) = C \int_M^{+\infty} r J_0(\rho r) f(r) dr.$$

Pour $\rho r \geq M$ nous allons utiliser le développement asymptotique de $J_0(\rho r)$ à l'ordre $N = k + 2$. Posons pour $0 \leq q \leq N - 1$

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} r \frac{f(r)}{(\rho r)^{q+1/2}} \cos\left(\rho r - \frac{\pi}{4}\right) dr$$

$$h_q(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{f(s+M)}{(s+M)^{q-1/2}} \frac{1}{\rho^{q+1/2}} \cos\left(\rho s + \rho M - \frac{\pi}{4}\right) ds$$

$$\cos\left(\rho s + \rho M - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[e^{i\rho s} e^{i\left(\rho M - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\rho s} e^{-i\left(\rho M - \frac{\pi}{4}\right)} \right]$$

Soit

$$k_q(\rho) = \int_0^{+\infty} \frac{f(s + M)}{(s + M)^{q-1/2}} e^{i\rho s} ds$$

pour montrer que $k_q \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$ il suffit de montrer que l'intégrale suivante est bornée

$$I_q(\rho) = \int_0^{+\infty} (1 + |s|)^{1/2} \frac{|f(s + M)|}{(s + M)^{q-1/2}} \omega(s) ds$$

$$I_q(\rho) \leq \frac{1}{M^q} \int_0^{+\infty} (s + M)^2 (1 + |s|)^{1/2} |f(s + M)| \omega(s) ds$$

$M > 1$, donc

$$I_q(\rho) \leq \frac{1}{M^q} \int_0^{+\infty} (s + M) |f(s + M)| \omega(s) ds$$

or

$$\int_0^{+\infty} (s + M) |f(s + M)| \omega(s) ds \leq \int_M^{+\infty} t |f(t)| \omega(t) dt < +\infty$$

puisque $\omega(t - M) \leq \omega(t)$.

Ainsi $k_q \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$.

Posons

$$\varphi_q(\rho) = \frac{1}{2} e^{i(\rho M - \frac{\pi}{4})} \frac{1}{\rho^{q+1/2}}$$

$\theta\varphi_q$ appartient à $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$ de même que $\theta\varphi_q k_q$. Pour montrer que θH appartient à $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$ il suffit de remarquer que

$$S(\rho) = C \int_M^{+\infty} r R_N(\rho r) f(r) dr$$

est une fonction $(k + 2)$ fois dérivable, car pour tout $p, 0 \leq p \leq k + 2$, l'intégrale

$$\int_M^{+\infty} r^{p+1} |R^{(p)}(\rho r)| |f(r)| dr$$

est bornée puisque

$$R^{(p)}(\rho r) = O\left(\frac{1}{r^{k+2+1/2}}\right).$$

Alors θS fonction $(k + 2)$ fois dérivable a une transformée de Fourier qui est $O\left(\frac{1}{|x|^{k+2}}\right)$ à l'infini, donc sommable pour le poids

$$(1 + |x|)^{1/2} \omega.$$

Ainsi $\theta S \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$.

PROPOSITION 2.

$$(F)_3 \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^3, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega).$$

Démonstration.

$$F(\rho) = \frac{C}{\rho} \int_0^{+\infty} r \sin \rho r f(r) dr$$

avec

$$\| (F)_3 \| = \int_0^{+\infty} r^2 |f(r)| \omega(r) dr < +\infty$$

posons

$$\tilde{f}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \begin{cases} \tilde{f}(u) = f(u) & u \geq 0 \\ \tilde{f}(u) = f(-u) & u < 0 \end{cases}$$

alors

$$F(\rho) = \frac{iC}{2\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho u} u \tilde{f}(u) du$$

et

$$u \tilde{f}(u) \in L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega)$$

donc

$$\theta F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega).$$

PROPOSITION 3.

$$(F)_n \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^n, \omega) \Rightarrow \theta F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega).$$

Démonstration. — On l'a vu pour $n = 2$ et $n = 3$. Supposons la proposition établie à l'ordre $n - 2$. Soit $(F)_n \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^n, \omega)$. On a

$$\rho^{n-2} F(\rho) = C \int_0^{+\infty} (\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r) r f(r) dr$$

or

$$\frac{d}{dt} [t^\lambda J_\lambda(t)] = t^\lambda J_{\lambda-1}(t)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [(\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r)] = (\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r) r.$$

Considérons

$$\begin{aligned} C \int_0^{+\infty} (\rho r)^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r) r^2 f(r) dr \\ = C \frac{\rho^{n+1}}{\rho^{\frac{n-4}{2}}} \int_0^{+\infty} r^{\frac{n-2}{2}} J_{\frac{n-4}{2}}(\rho r) r^2 f(r) dr \end{aligned}$$

le second membre est le produit par ρ^{n+1} d'une fonction $G(\rho)$ telle que

$$(G)_{n-2} \in \mathcal{F} L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^{n-2}, \omega)$$

car

$$\int_0^{+\infty} r^{n-3} |r^2 f(r)| \omega(r) dr < +\infty.$$

Ceci prouve que $\rho^{n-2} F(\rho)$ est dérivable et que sa dérivée est $\rho^{n+1} G(\rho)$ qui d'après l'hypothèse de récurrence coïncide sur K avec un élément de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-3}{2}} \omega)$. Alors la primitive $\rho^{n-2} F(\rho)$ coïncide sur K avec un élément de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{\frac{n-1}{2}} \omega)$, donc $F(\rho)$ aussi d'après le lemme suivant :

LEMME. — Si Φ est un élément à support compact K de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, \omega)$, toute primitive de Φ coïncide sur K avec un élément de

$$\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega).$$

Preuve. — Soit

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

φ fonction entière appartenant à $L^1(\mathbf{R}, \omega)$. Soit ψ fonction C^∞ à support

compact dans \mathbf{R} , telle que $\psi(0) = \varphi(0)$, alors $\varphi(t) - \psi(t) = t \lambda(t)$ où λ est une fonction C^∞ appartenant à $L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega)$ et

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \psi(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} t \lambda(t) dt.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} t \lambda(t) dt$$

a pour primitive

$$C^{be} + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \lambda(t) dt.$$

Une primitive de Φ est donc la somme d'une fonction C^∞ et d'une fonction de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|) \omega)$ ce qui prouve le lemme.

Le résultat (I) est ainsi établi.

III

PROPOSITION 4. — Soit F à support compact K

$$(F)_n \in \mathcal{F} L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^n, (1 + |x|) \omega) \Rightarrow (F)_{n+2} \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^{n+2}, \omega).$$

Démonstration. — Soit $(F)_n = \mathcal{F}(f)_n$

avec

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} |f(r)| (1 + |r|) \omega(r) dr < +\infty.$$

Posons

$$G(\rho) = C \int_0^{+\infty} r^{n+1} (\rho r)^{-n/2} J_{n/2}(\rho r) \frac{f(r)}{r^2} dr$$

$$(G)_{n+2} \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^{n+2}, (1 + |x|) \omega)$$

car

$$\int_0^{+\infty} r^{n+1} \frac{|f(r)|}{r^2} (1 + |r|) \omega(r) dr < +\infty.$$

On a

$$\rho^n G(\rho) = C \int_0^{+\infty} (\rho r)^{n/2} J_{n/2}(\rho r) \frac{f(r)}{r} dr$$

mais

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [(\rho r)^{n/2} J_{n/2}(\rho r)] = (\rho r)^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r) r$$

donc $\rho^n G(\rho)$ est dérivable et admet pour dérivée

$$C \int_0^{+\infty} (\rho r)^{n/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho r) f(r) dr = \rho^{n-1} F(\rho)$$

alors $(\rho^{n-1} F(\rho))_{n+2} \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^{n+2}, \omega)$ en vertu du lemme :

LEMME. — Soit $(G)_N$ une fonction radiale qui sur un compact $(K)_N \subset \mathbf{R}^N - \{0\}$ coïncide avec un élément de $\mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^N, (1 + |x|) \omega)$ alors G est dérivable et $\left(\frac{dG}{d\rho}\right)_N$ coïncide sur $(K)_N$ avec un élément de $\mathcal{F} L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^N, \omega)$.

Preuve. — $(G)_N$ est de classe C^1 sur $(K)_N$, et $\frac{\partial (G)_N}{\partial \xi_i}$ dérivée partielle selon une coordonnée quelconque ξ_i , coïncide sur $(K)_N$ avec un élément de $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^N, \omega)$. Or

$$\frac{\partial (G)_N}{\partial \xi_i} = \left(\frac{dG}{d\rho}\right)(|\xi|) \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \text{ est } C^\infty$$

et différent de zéro dans $\mathbf{R}^N - \{0\}$ donc $\left(\frac{d\rho}{dG}\right)_N$ coïncide sur $(K)_N$ avec un élément de $\mathcal{F} L_{\text{rad}}(\mathbf{R}, \omega)$.

PROPOSITION 5.

$$F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^n \omega) \Rightarrow (\theta F)_{2n+1} \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^{2n+1}, \omega).$$

Démonstration évidente à l'aide de la proposition 4. Ceci établit la caractérisation annoncée pour la dimension impaire. Pour le cas de la dimension paire il suffit d'établir le résultat suivant :

PROPOSITION 6. — Soit F à support compact $K \subset]0, +\infty[$

$$F \in \mathcal{F} L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega) \Rightarrow (F)_2 \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^2, \omega).$$

Démonstration. — Soit

$$F(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho x} f(x) dx$$

$f(x)$ est une fonction entière telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)^{1/2} |f(x)| \omega(|x|) dx < +\infty.$$

Considérons les intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x\rho f(x) dx, & \quad \int_0^{+\infty} \sin x\rho f(x) dx, \\ \int_0^{+\infty} \cos x\rho f(-x) dx, & \quad \int_0^{+\infty} \sin x\rho f(-x) dx. \end{aligned}$$

On va montrer que chacune coïncide sur la couronne compacte $(K)_2$ engendrée par K , avec une fonction de $\mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^2, \omega)$. Pour cela utilisons

les développements asymptotiques de $J_0(z)$ et $J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$ à l'ordre $N = k + 3$.

$$C z^{1/2} J_0(z) = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\alpha_q}{z^q}\right) \cos z + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\beta_q}{z^q}\right) \sin z + R_1(z)$$

$$C \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{\gamma_q}{z^q}\right) \cos z + \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\delta_q}{z^q}\right) \sin z + R_2(z)$$

($\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \neq 0$), $R_1(z)$ et $R_2(z)$ sont holomorphes et $0\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le domaine $|z| \geq M$, $|\text{Im}(z)| \leq C^{\text{te}}$, $\text{Re}(z) \geq 0$.

Alors il existe des polynomes en $\frac{1}{z}$ de degré $N - 1$, $T_1, T_2, S_1, S_2,$

S_3, S_4 tels que

$$T_1 \cos z = S_1 z^{1/2} J_0(z) + S_2 \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + R_3(z)$$

$$T_2 \sin z = S_3 z^{1/2} J_0(z) + S_4 \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + R_4(z)$$

$R_3(z)$ et $R_4(z)$ étant holomorphes et $0\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le même domaine.

T_1 et T_2 ont le même terme constant $\beta_0 \gamma_0 \neq 0$, donc il existe des polynomes en $\frac{1}{z}$ de degré $N - 1$ tels que

$$\begin{cases} \cos z = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{a_q}{z^q} \right) z^{1/2} J_0(z) + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{b_q}{z^q} \right) \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^{1/2} J_0 \left(z + \frac{\pi}{4} \right) \Lambda + \\ \sin z = \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{c_q}{z^q} \right) z^{1/2} J_0(z) + \left(\sum_{q=0}^{N-1} \frac{d_q}{z^q} \right) \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^{1/2} J_0 \left(z + \frac{\pi}{4} \right) + W(z) \end{cases} \quad (1)$$

où $V(z)$ et $W(z)$ sont holomorphes et $O\left(\frac{1}{z^N}\right)$ dans le même domaine.

Etudions l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos x \rho f(x) dx$ (la démonstration serait analogue pour les autres). On peut l'écrire

$$\int_0^M \cos x \rho f(x) dx + \int_M^{+\infty} \cos x \rho f(x) dx.$$

La première intégrale est une fonction C^∞ , donc coïncide sur $(K)_2$ avec une fonction de $\mathcal{F} L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$.

Pour la deuxième intégrale utilisons le développement de $\cos x \rho$ donné par (1) valable, si on suppose $K \subset]1, +\infty[$, pour $x \geq M$.

a) Posons pour $0 \leq q \leq N - 1$

$$g_q(\rho) = \int_M^{+\infty} r J_0(\rho r) \frac{f(r)}{r^{q+1/2}} dr$$

et soit

$$\tilde{f}(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq r < M \\ \frac{f(r)}{r^{q+1/2}} & \text{pour } r \geq M \end{cases}$$

On a

$$g_q(\rho) = \int_0^{+\infty} r J_0(\rho r) \tilde{f}(r) dr$$

et

$$(g_q)_2 \in \mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^2, \omega).$$

Car

$$\int_0^{+\infty} r |\tilde{f}(r)| \omega(r) dr = \int_M^{+\infty} \frac{r^{1/2}}{r^q} |f(r)| \omega(r) dr$$

$$\leq \frac{C}{M^q} \int_0^{+\infty} (1 + |r|)^{1/2} |f(r)| \omega(r) dr < +\infty.$$

Soit maintenant

$$(\theta \varphi_q)(\rho) = \frac{\theta(\rho)}{\rho^{q-1/2}}.$$

$(\theta \varphi_q)_2$ appartient à $\mathcal{F} L_{\text{rad}}^1(\mathbf{R}^2, \omega)$ ainsi que $(\theta \varphi_q g_q)_2$.

b) Considérons

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} \frac{1}{(\rho r)^q} \left(\rho r + \frac{\pi}{4}\right)^{1/2} J_0\left(\rho r + \frac{\pi}{4}\right) f(r) dr$$

$$h_q(\rho) = \int_{M+\frac{\pi}{4\rho}}^{+\infty} \frac{(\rho t)^{1/2}}{\left(\rho t - \frac{\pi}{4}\right)^q} J_0(\rho t) f\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right) dt$$

$$h_q(\rho) = \int_M^{+\infty} - \int_M^{M+\frac{\pi}{4\rho}} = k_q(\rho) - l_q(\rho)$$

$l_q(\rho)$ est une fonction C^∞ donc $(\theta l_q)_2$ appartient à $\mathcal{F} L_{\text{rad}}(\mathbf{R}_2, \omega)$. Examinons

$$k_q(\rho) = \frac{1}{\rho^{q-1/2}} \int_M^{+\infty} t^{1/2} J_0(\rho t) \frac{f\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right)}{\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right)^q} dt.$$

Posons $f_q(z) = \frac{f(z)}{z^q}$ holomorphe dans le complémentaire de 0. On a pour $t \geq M$

$$f_q\left(t - \frac{\pi}{4\rho}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4\rho}\right)^n \frac{f_q^{(n)}(t)}{n!}.$$

Considérons

$$k_{n,q}(\rho) = \int_M^{+\infty} t^{1/2} J_0(\rho t) \frac{f_q^{(n)}(t)}{n!} dt = \int_0^{+\infty} s J_0(\rho s) \varphi(s) ds$$

avec

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq s \leq M \\ \frac{f_q^{(n)}(s)}{n! s^{1/2}} & \text{si } s > M \end{cases}$$

Pour montrer que $(k_{n,q})_2$ appartient à $\mathcal{F}L_{\text{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$ il suffit de montrer que l'intégrale suivante est finie

$$A_{n,q} = \int_M^{+\infty} |s| \frac{|f_q^{(n)}(s)|}{n! |s|^{1/2}} \omega(s) ds$$

On a

$$\frac{f_q^{(n)}(s)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_q(s + e^{i\alpha}) e^{-in\alpha} d\alpha$$

donc

$$A_{n,q} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \left[\int_M^{+\infty} |t|^{1/2} |f_q(t + e^{i\alpha})| \omega(t) dt \right]$$

mais

$$|f_q(t + e^{i\alpha})| \leq \frac{1}{(M-1)^q} |f(t + e^{i\alpha})|$$

Montrons que

$$\int_M^{+\infty} |t|^{1/2} |f(t + e^{i\alpha})| \omega(t) dt$$

est majoré par une constante indépendante de α . F étant à support compact on a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} F(u) du.$$

Posons $\theta_\alpha(u) = e^{iue^{i\alpha}}$, alors

$$f(t + e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \theta_\alpha(u) F(u) du$$

$f(t + e^{i\alpha})$ est transformée de Fourier de $\theta_\alpha(u) F(u)$. Soit $\varphi(u)$ une fonction C^∞ à support compact, égale à 1 sur le support de $F(u)$, $\theta_\alpha(u) \varphi(u)$ fonction C^∞ à support compact appartient à $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|)^{1/2} \omega)$, ainsi que $\theta_\alpha(u) F(u)$, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{1/2} |f(t + e^{i\alpha})| \omega(t) dt = \|\theta_\alpha(u) \varphi(u) F(u)\| \\ \leq \|F(u)\| \|\theta_\alpha(u) \varphi(u)\|.$$

L'application $\alpha \rightarrow \theta_\alpha(u) \varphi(u)$ de $[0, 2\pi]$ dans $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}, (1 + |x|^{1/2})\omega)$ est continue. En effet $[\theta_\alpha(u) \varphi(u) - \theta_{\alpha_0}(u) \varphi(u)]$ tend vers zéro uniformément en u , lorsque α tend vers α_0 , ainsi que toutes ses dérivées. L'ensemble des $\theta_\alpha(u) \varphi(u)$ est compact, donc $\|\theta_\alpha(u) \varphi(u)\|$ est borné par une constante. Il suit que

$$A_{n,q} = \frac{C}{(M-1)^q}.$$

On a :

$$k_q(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{1}{\rho^{n+q-1/2}} k_{n,q}(\rho)$$

(il est facile de le voir à l'aide de la majoration

$$\left| \frac{f_q^{(n)}(t)}{n!} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(t + e^{i\alpha})|}{(M-1)^q} d\alpha.$$

Alors

$$\theta(\rho) k_q(\rho) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}} k_{n,q}(\rho)$$

est tel que $(\theta k_q)_2$ appartient à $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^2, \omega)$ car la série des normes dans $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^2, \omega)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \frac{C}{(M-1)^q} \left\| \left(\frac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}} \right)_2 \right\|$$

converge. (La suite de fonctions $\frac{\theta(\rho)}{\rho^{n+q-1/2}}$ tend uniformément vers zéro

ainsi que toutes ses dérivées ce qui assure la convergence vers zéro dans $\mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^2, \omega)$).

c) Pour achever de montrer que $\int_M^{+\infty} \cos x \rho f(x) dx$ coïncide sur (K_2) avec une fonction de $\mathcal{F}L^1_{\text{rad}}(\mathbf{R}^2, \omega)$, il suffit de remarquer que

$$\tilde{V}(\rho) = \int_M^{+\infty} V(\rho x) f(x) dx$$

est une fonction $(k + 3)$ fois dérivable puisque $V^{(p)}(z) = 0 \left(\frac{1}{z^{k+3}} \right)$ pour tout $p \geq 0$ assure la convergence des intégrales

$$\int_M^{+\infty} x^p |V^{(p)}(\rho x)| |f(x)| dx$$

pour $0 \leq p \leq k + 3$.

Alors $(\theta \tilde{V})_2$ a une transformée de Fourier qui à l'infini est $0 \left(\frac{1}{r^{k+3}} \right)$ avec $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, donc sommable pour le poids $\omega((x^2 + y^2)^{1/2})$. Ainsi $(\theta \tilde{V})_2$ appartient à $\mathcal{F} L^1(\mathbf{R}^2, \omega)$. Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOCHNER, Vorlesungen über Fouriersche Integral, Leipzig, (1932), p. 187.
- [2] L. SCHWARTZ, « Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts », *C. R. Acad. Sc.*, Paris, (1948), t. 227, 424-426.
- [3] WHITTAKER et WATSON, *A course of Modern Analysis*, Cambridge, (1927), chap. 17.

Manuscrit reçu le 25 juillet 1966.

Michel GATESOUBE,
13, rue de la Ferronnerie
91 - Igny