

APPENDICE A

Funzioni olomorfe a valori vettoriali

In questa appendice richiameremo e dimostreremo alcuni risultati di base sulle funzioni olomorfe a valori vettoriali. A tal fine ricordiamo in primis la definizione di integrale per una funzione continua a valori vettoriali, rinviando a [6, Ch.3], per ulteriori approfondimenti.

DEFINIZIONE A.1. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $f : [a, b] \rightarrow X$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile su $[a, b]$ se esiste $x \in X$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni partizione $\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ di $[a, b]$ con $\sup_{i=1, \dots, n} (t_i - t_{i-1}) < \delta$ e per ogni scelta di punti $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ risulta

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \right\| < \varepsilon.$$

In tal caso, si pone

$$\int_a^b f(t) dt = x.$$

Si dimostra che ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile.

PROPOSIZIONE A.2. Siano $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g : [a, b] \rightarrow X$ integrabili. Allora valgono le seguenti proprietà.

- (a) $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$
- (b) $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\| (b - a).$
- (c) $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt.$
- (d) $\left\langle \int_a^b f(t) dt, x' \right\rangle = \int_a^b \langle f(t), x' \rangle dt$ per ogni $x' \in X'.$
- (e) Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni continue da $[a, b]$ in X tali che $\lim_n \max_{t \in [a, b]} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$, then $\lim_n \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$

Nella Proposizione A.2, e anche in seguito, $\langle x, x' \rangle$ sta a indicare $x'(x)$ se $x \in X$ e $x' \in X'.$

Se Ω è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow X$ è una funzione continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva regolare a tratti, allora l'integrale di f lungo γ è definito come

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Nel seguito, siano X uno spazio di Banach su \mathbb{C} e Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} .

DEFINIZIONE A.3. $f : \Omega \rightarrow X$ è detta *olomorfa in Ω* se per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste in X il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0).$$

f è detta *debolmente olomorfa in Ω* se è continua in Ω e la funzione complessa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω per ogni $x' \in X'$.

Ogni funzione olomorfa è chiaramente debolmente olomorfa. In realtà vale il viceversa.

TEOREMA A.4. Se $f : \Omega \rightarrow X$ è debolmente olomorfa in Ω , allora è olomorfa in Ω .

DIM. Dato $\overline{B(z_0, r)}$ disco chiuso contenuto in Ω , proviamo che per ogni $z \in B(z_0, r)$ vale la seguente formula integrale di Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (\text{A.1})$$

Osserviamo che l'espressione a destra di (A.1) è ben definita perchè f è continua. D'altro canto, f è debolmente olomorfa in Ω , quindi per la funzione olomorfa $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$, con $x' \in X'$, vale la formula integrale ordinaria di Cauchy in $B(z_0, r)$, cioè,

$$\langle f(z), x' \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{\langle f(\xi), x' \rangle}{\xi - z} d\xi = \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, x' \right\rangle.$$

Per l'arbitrarietà di x' si ottiene (A.1). Differenziando rispetto a z sotto il segno d'integrale, otteniamo che f è olomorfa e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

per ogni $z \in B(z_0, r)$ e $n \in \mathbb{N}$. □

DEFINIZIONE A.5. Si dice che $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ è rappresentabile in serie di potenze nel punto $z_0 \in \Omega$ se esistono una successione $(a_n)_n$ a valori in X e

$r > 0$ tali che $B(z_0, r) \subset \Omega$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{in } B(z_0, r).$$

TEOREMA A.6. *Sia $f : \Omega \rightarrow X$ una funzione continua. Allora f è olomorfa se e solo se f è rappresentabile in serie di potenze in ogni punto di Ω .*

DIM. Supponiamo che f sia olomorfa in Ω . Allora se $z_0 \in \Omega$ e $B(z_0, r) \subset \Omega$, la formula integrale di Cauchy (A.1) vale per ogni $z \in B(z_0, r)$. Se $z \in B(z_0, r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z}$$

converge uniformemente rispetto a ξ in $\partial B(z_0, r)$, poichè $|(z - z_0)/(\xi - z_0)| = r^{-1}|z - z_0|$. Allora per (A.1) e la Proposizione A.2(e), si ottiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right] (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

dove la serie converge in X .

Viceversa, supponiamo che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r),$$

dove (a_n) è una successione in X . Allora f è continua, e per ogni $x' \in X'$,

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle a_n, x' \rangle (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r).$$

Dunque la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in $B(z_0, r)$ per ogni $x' \in X'$ e quindi f è olomorfa per il Teorema A.4. \square

TEOREMA A.7 (TEOREMA DI CAUCHY). *Sia $f : \Omega \rightarrow X$ olomorfa in Ω e sia $D \subseteq \Omega$ un dominio regolare. Allora*

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

DIM. Basta osservare che per ogni $x' \in X'$ la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in Ω e quindi

$$0 = \int_{\partial D} \langle f(z), x' \rangle dz = \left\langle \int_{\partial D} f(z) dz, x' \right\rangle.$$

\square

TEOREMA A.8 (SVILUPPO DI LAURENT). Sia $f : D := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \rightarrow X$ olomorfa. Allora, per ogni $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e $r < \varrho < R$.

DIM. Per ogni $x' \in X'$, la funzione $z \mapsto \langle f(z), x' \rangle$ è olomorfa in D , quindi

$$\langle f(z), x' \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(x')(z - z_0)^n$$

dove

$$a_n(x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, \varrho)} \frac{\langle f(z), x' \rangle}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Per la Proposizione A.2(d), si ha che

$$a_n(x') = \langle a_n, x' \rangle, \quad n \in \mathbb{Z},$$

dove a_n ha l'espressione indicata nell'enunciato. □