## 11. PRIME FORMULE DI TRASFORMAZIONE.

Sulla retta del riferimento K alla quale appartengono i punti A e B si stabilisca un sistema di ascisse con origine in un punto 0, orientamento concorde con $\vec{v}$ (la velocità di K' rispetto a K) e unità di misura arbitraria.

Sulla retta di riferimento K' alla quale appartengono i punti A' e B' si stabilisca un sistema di ascisse con origine in un punto 0' orientamento concorde con $\vec{v}$ e unità di misura avente lunghezza di quiete uguale alla lunghezza di quiete della unità di misura scelta in K.

Tanto in K quanto in K' si assuma come origine dei tempi l'istante dell'evento di sovrapposizione di 0 e 0'.

Si ha in K per un punto P:

$$x = |0\ 0'|_{/K} + |0'P|_{/K} = vt + \frac{x'}{\gamma}$$

dato che 0 0', con le scelte fatte, ha lunghezza v t e il segmento 0'P, che in K' ha lunghezza x', in K ha lunghezza $x'/\gamma$. Si ha così:

$$x' = \gamma(x-vt) \; .$$

Naturalmente per simmetria si ha:

$$x = \gamma(x'+vt') .$$

Sostituendo qui l'espressione di x' si ha:

$$x = \gamma|\gamma(x-vt)+vt'|$$

ossia:

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \quad .$$

Da questa:

$$t' = \frac{x(1-\gamma^2)+\gamma^2 vt}{\gamma v} = \gamma t + \gamma \frac{x}{v} \quad \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} =$$

$$= \gamma t - \frac{\gamma x}{v} \left( \frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) = \gamma t - \frac{\gamma x}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right) =$$

$$= \gamma t - \gamma x \frac{v}{c^2} .$$

Si hanno così le trasformazioni:

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = \gamma(x' - vt) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases}$$

che sono dette trasformazioni di Lorentz. Per ottenere le trasformazioni inverse senza risolvere le precedenti rispetto a x e a t, basta scambiare le quantità accentate con quelle non accentate e mutare v in -v:

$$(18') \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) . \end{cases}$$

Le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni di Galileo per $\frac{v}{c} << 1$ cioé per $\gamma \sim 1$: di conseguenza le trasformazioni di Galileo sono approssimazioni delle trasformazioni di Lorentz.

Le formule esprimenti le trasformazioni di Lorentz contengono naturalmente tutti i risultati che sono stati ricavati dall'esempio del N. 6.

E' utile ricavare esplicitamente le conseguenze dei postulati di Einstein anche per mettere in evidenza che le formule precedenti vanno usate con attenzione se si vogliono evitare risultati assurdi.

Va tenuto presente che le trasformazioni di Lorentz stabiliscono *relazioni fra le coordinate spazio - temporali che uno stesso even-*

*to* possiede rispetto ai due riferimenti K e K'.

Si abbia per es. un regolo in quiete in K' e siano $x'_1$ e $x'_2$ le coordinate degli estremi del regolo in tale riferimento: la lunghezza del regolo per l'osservatore K' è quindi $x'_2 - x'_1$. L'osservatore K per ottenere la lunghezza del regolo deve determinare le ascisse degli estremi in *uno stesso istante* del suo riferimento.

Dalle (18) per t qualunque si ha:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt); \qquad x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

e quindi per differenza:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1)$$

cioé si ritrova che la lunghezza propria del regolo è maggiore di quella non propria.

Va notato che la relazione precedente non può essere dedotta direttamente dalla prima delle (18') perché le formule:

$$x_2 = \gamma(x'_2 - vt'); \qquad x_1 = \gamma(x'_1 - vt')$$

forniscono le relazioni fra le coordinate spaziali di due eventi simultanei in K'; questi eventi, non essendo simultanei in K non possono essere utilizzati per il calcolo della lunghezza del regolo in questo riferimento. L'intervallo temporale in K fra i due eventi si ricava dalle (18') e vale:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) .$$

In modo analogo si può calcolare la relazione fra un intervallo di tempo proprio ad un intervallo di tempo non proprio.

Se $t'_2 - t'_1$ è un intervallo di tempo proprio fra due eventi in

K', i due eventi, in tale riferimento, avvengono nello stesso punto $x'_0$ e quindi si ha:

$$t_2 = \gamma(t'_2 - \frac{v}{c^2} x'_0), \quad t_1 = \gamma(t'_1 - \frac{v}{c^2} x'_0)$$

da cui:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

e si ritrova che l'intervallo di tempo proprio è minore dell'intervallo di tempo non proprio fra i due stessi eventi.

In K la distanza fra i due eventi è data da:

$$x_2 - x_1 = \gamma v(t'_2 - t'_1) \ .$$

Si suggerisce di interpretare con un esempio le relazioni trovate.

Come altra conseguenza delle (18), (18') conviene mettere in evidenza che gli orologi di ognuno dei due riferimenti, pur essendo sincronizzati nella maniera indicata al n. 4 non appaiono sincronizzati nell'altro riferimento. Infatti allo stesso valore di t corrispondono in K' valori diversi di t' in punti diversi dello spazio . Così se $(x_1,t)$, $(x_2,t)$ sono le coordinate di due eventi simultanei in K, si ha in K':

$$t'_2 - t'_1 = - \frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$$

(si vede in particolare che i due eventi sono simultanei in K' se e solo se in K, oltre ad essere simultanei, avvengono anche nello stesso luogo. In questo caso anzi si vede che gli eventi, coincidenti in K, sono coincidenti anche in K', in accordo con quanto si è notato al n. 5.)

Allo stesso risultato si può pervenire in maniera meno formale. In corrispondenza all'evento di sovrapposizione delle origini 0,0' dei riferimenti K e K' i due osservatori azzerino i rispettivi orologi posti in tali punti. In tale istante t = t' = 0 venga inviato un segnale luminoso. Dopo un intervallo di tempo $t_2 - 0 = t_2$ tale segnale avrà raggiunto in K un punto $P_2$ di ascissa $x_2 = ct_2$. Per il secondo postulato di Einstein l'evento di arrivo del raggio luminoso in $P_2$ ha in K' coordinate $x'_2, t'_2$ legate dalla relazione $x'_2 = ct'_2$. In virtù delle (14') si ha:

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2) = \gamma t_2 (1 - \frac{v}{c}).$$

Nell'intervallo di tempo $t_2 - 0 = t_2$ l'origine 0' si sarà spostata rispetto a K, al punto $P_1$ di ascissa $x_1 = vt_2$. Ma in K' l'intervallo fra i due eventi

$E_{00'}$ sovrapposizione di 0 e 0'

$E_{0'P_1}$ sovrapposizione di $P_1$ e 0'

è un intervallo di tempo proprio e quindi:

$$t'_1 = \frac{t_2}{\gamma}$$

cioé nel riferimento K' gli istanti corrispondenti a $t_2$ nei punti $P_1$ e $P_2$ sono diversi.

## 12. RELAZIONI FRA LE MISURE DI SEGMENTI IN MOTO RELATIVO, ORTOGONALI ALLA VELOCITA' RELATIVA. TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Siano AB, A'B' due segmenti ortogonali alla velocità relativa $\vec{v}$ di K' rispetto a K. Sia inoltre vers AB = vers A'B'. E' facile riconoscere che, se i due segmenti AB, A'B' hanno la stessa lunghezza di riposo, essi sono (esattamente) sovrapponibili per entrambi gli osservatori.

Si adottino in K e K' terne di assi con gli assi x e x' paralleli e concordi a $\vec{v}$, e scorrenti l'uno su l'altro e gli assi y e z