

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES

COMME EXIGENCE PARTIELLE
DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE APPLIQUÉES

PAR
ANDRÉ VALLIÈRES

DYNAMIQUE TRICOMPLEXE ET SOLIDES DE PLATON

JANVIER 2021

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Dominic Rochon, directeur de recherche
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

M. Sébastien Tremblay, membre du jury
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

M. François Meunier, membre du jury
Département de mathématiques et d'informatique
Université du Québec à Trois-Rivières

AVANT-PROPOS

« In mathematics, the worst you can do to a problem is solve it completely. »

Daniel Kleitman

Au moment où je débutais mon baccalauréat en mathématiques, je n'étais pas certain de vouloir poursuivre mon parcours académique au-delà de ce programme. Cependant, trois sessions ponctuées de découvertes fascinantes étaient tout ce qu'il fallait pour me persuader de la nécessité de m'inscrire à la maîtrise, ce qui allait me permettre d'approfondir mes connaissances dans un domaine spécifique, et par le fait-même, de satisfaire ma curiosité. Trois ans plus tard, les recherches entreprises et les résultats obtenus ont permis de rédiger le présent mémoire, dont la forme et le fond auront changé à de nombreuses reprises au fil du temps. Au final, je peux affirmer sans aucune hésitation que les nombreux questionnements, les obstacles rencontrés et les moments d'exaltation dus à des découvertes emballantes m'auront donné un aperçu fiable de ce qu'est la recherche fondamentale en milieu universitaire.

Je désire donc remercier chaleureusement Dominic Rochon, mon directeur de recherche, pour m'avoir guidé tout au long de mon cheminement au deuxième cycle. Dominic, c'est ton côté accueillant qui m'aura convaincu de te demander d'être mon superviseur de stage en troisième année et d'ensuite diriger mes travaux à la maîtrise. Merci pour ton authenticité, qui a toujours laissé transparaître ta passion et ton enthousiasme contagieux au regard du sujet captivant que sont les fractales multicomplexes. Merci également pour ta patience et ta compréhension à mon égard : elles auront été déterminantes dans ma réussite. Je te remercie aussi pour tous tes conseils, ainsi que pour m'avoir permis de saisir l'opportunité d'enseigner au collégial pendant un an au travers de mes études, ce qui s'est avéré être une expérience très enrichissante. J'ai vraiment apprécié chacune de nos discussions, qu'elles aient été de nature mathématique ou pas, et je garde le souvenir d'une collaboration fructueuse basée sur la confiance.

Par ailleurs, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers ma conjointe pour son soutien indéfectible qui aura fait la différence. À nos deux enfants, Adam et Zélia, qui sont de constantes sources d'émerveillement, d'épanouissement et de distractions. Merci également à ma famille et à mes amis, en particulier mes parents, pour votre support et vos encouragements tout au long de mes études.

Enfin, je tiens aussi à remercier le Fonds de Recherche du Québec – Nature et Technologies et l’Institut des Sciences Mathématiques pour le soutien financier qu’ils m’ont octroyé durant mon parcours au deuxième cycle, de même que l’Université du Québec à Trois-Rivières ainsi que sa Fondation pour les bourses qu’elles m’ont accordées. Le support financier de ces différents organismes m’aura permis de me concentrer pleinement sur mon cheminement académique.

SOMMAIRE

Dans ce mémoire, on présente de nouveaux résultats en lien avec les nombres tricomplexes ainsi que l'ensemble de Mandelbrot généralisé sur ce même espace. Plus spécifiquement, après avoir rappelé les notions de géométrie euclidienne et de convexité pertinentes au cadre de ce travail et après avoir introduit les nombres bicomplexes, on étudie en détail l'algèbre des nombres tricomplexes \mathbb{TC} , qui forme un anneau commutatif unitaire avec diviseurs de zéro. On montre notamment qu'il existe exactement seize éléments idempotents dans \mathbb{TC} , et on introduit par la suite deux nouvelles représentations idempotentes détenant les mêmes propriétés que celles rendant pratiques les représentations classiques. En outre, on propose pour la première fois un critère général d'inversibilité d'un nombre tricomplexe ayant le mérite d'unifier les différentes approches proposées dans la littérature, en plus de fournir une expression algébrique explicite de l'inverse multiplicatif de tout nombre tricomplexe basée sur l'utilisation de ses sept différents conjugués. Puis, le sous-espace particulier des nombres biduplexes est abordé et on étudie ses propriétés fondamentales, tout en soulignant son étroite relation avec les nombres hyperboliques.

Ensuite, on entame l'analyse des huit coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe \mathcal{M}_3 dans le but de faire ressortir leurs propriétés géométriques. Pour ce faire, on développe pour chacune d'entre elles au moins une caractérisation en fonction d'ensembles 2D associés aux diverses projections de l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe sur les différents sous-espaces vectoriels de \mathbb{BC} . Dès lors, pour chaque coupe principale, cela nous permet de remarquer l'incidence de son espace des itérées sur ses propriétés, puisqu'on voit que celui-ci détermine combien de caractérisations il est possible de développer, de même que le nombre et le type d'ensembles 2D y intervenant. Aussi, on établit formellement que les deux coupes principales dont l'espace des itérées est isomorphe au sous-espace des nombres biduplexes correspondent à un octaèdre et à un tétraèdre réguliers.

Enfin, les représentations idempotentes sont employées afin de révéler de quelle façon deux des coupes principales dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{TC} sont reliées aux trois coupes dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} . En terminant, les coupes idempotentes sont introduites et on montre que l'une d'entre elles correspond à un cube.

Mots-clés : nombres tricomplexes ; ensembles de Mandelbrot généralisés ; dynamique tricomplexe ; solides de Platon ; Stella octangula ; fractales 3D ; Metatronbrot ; Earthbrot ; Airbrot ; Firebrot.

ABSTRACT

In this thesis, we present new results concerning tricomplex numbers and the tricomplex Mandelbrot set \mathcal{M}_3 . More precisely, after reviewing relevant concepts from convexity, euclidean geometry and bicomplex numbers, we study the algebra of tricomplex numbers (denoted \mathbb{TC}), which is a commutative unitary ring with zero divisors. Notably, we show that there are exactly sixteen idempotent elements in \mathbb{TC} , and we introduce two new idempotent representations which possess the same properties as those that make the classical representations convenient. Moreover, for the first time, we propose a general invertibility criterion for tricomplex numbers which unifies the known incomplete approaches, in addition to providing an explicit algebraic formula for the multiplicative inverse of a given tricomplex number based on its seven different conjugates. Furthermore, a particular subspace of \mathbb{TC} called the biduplex numbers is studied, along with its fundamental properties and its close relationship with hyperbolic numbers.

Then, we undertake the analysis of the eight principal 3D slices of the tricomplex Mandelbrot set in order to uncover their geometric properties. To do so, we develop for each of them at least one geometrical characterization involving specific 2D sets that correspond to projections of the bicomplex Mandelbrot set on various two-dimensional vector subspaces of \mathbb{BC} . This way, we can immediately derive how a particular subspace called the *iterates space* of a given principal slice affects its properties, as it becomes clear that it determines how many characterizations it is possible to develop, as well as the type and number of 2D sets that are involved in them. We also formally establish that the two principal slices whose iterates space is isomorphic to biduplex numbers correspond to two platonic solids, namely the regular octahedron and the regular tetrahedron.

At last, we use the aforementioned idempotent representations to reveal hidden but fundamental connections between two of the principal slices whose iterates space is isomorphic to \mathbb{TC} and the three principal slices whose iterates space is isomorphic to \mathbb{BC} . Finally, we rigorously define the idempotent 3D slices of \mathcal{M}_3 and we show that one of them corresponds to a third platonic solid : the cube.

Keywords : tricomplex numbers ; generalized Mandelbrot sets ; tricomplex dynamics ; Platonic solids ; Stella octangula ; 3D fractals ; Metatronbrot ; Earthbrot ; Airbrot ; Firebrot.

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	i
Sommaire	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Table des figures	ix
Liste des symboles	xi
Introduction	1
1 Polyèdres et ensembles convexes	5
1.1 Notions de géométrie euclidienne	6
1.2 Dualité entre polyèdres	17
1.3 Notions de convexité supplémentaires	24
2 Nombres bicomplexes et tricomplexes	35
2.1 Nombres bicomplexes	36
2.2 Nombres hyperboliques	42
2.3 Nombres tricomplexes	45
2.4 Nombres biduplexes	73

3	Ensembles de Mandelbrot généralisés	79
3.1	Éléments de base	79
3.2	Dynamique des itérées et coupes tridimensionnelles	85
3.3	Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à \mathbb{BC}	94
3.4	Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à \mathbb{TC}	101
3.5	Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à $\mathbb{D}(2)$	111
4	Coupes non principales et coupes idempotentes	137
4.1	Le Starbrot	137
4.2	Coupes non principales	150
4.3	Coupes idempotentes	156
	Conclusion	163
	Bibliographie	169
A	Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin	173
A.1	Polyèdres convexes et demi-espaces	173
A.2	Application de la méthode à la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$	175
B	Unicité des représentations idempotentes sur \mathbb{TC}	181
C	Visualisation de fractales 2D dans Maple 18	189

TABLE DES FIGURES

1.1	Les cinq solides de Platon	11
1.2	Démonstration de la relation d'Euler - illustration	16
1.3	Relation de dualité entre certains solides platoniciens	18
1.4	Icosidodécaèdre et triacontaèdre rhombique	19
1.5	Sphères remarquables du tétraèdre régulier	20
1.6	Transformations polaires variées d'un octaèdre vers un cube	22
1.7	Ensemble convexe ayant une infinité de points extrémaux	29
1.8	Proposition 1.5 Illustrations du polyèdre P_1	32
2.1	Tables de Cayley des groupes $(\frac{1}{7}, \circ)$ et $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$	40
2.2	Produits des unités imaginaires tricomplexes	45
2.3	Tables de Cayley des groupes $(\frac{1}{7}, \circ)$ et $(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$	62
2.4	Produits des unités hyperboliques tricomplexes	74
3.1	L'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}_1 dans le plan complexe	80
3.2	L'ensemble de Mandelbrot hyperbolique \mathcal{H}	82
3.3	Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$	94
3.4	Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$	102
3.5	Visualisation de l'ensemble $\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$	107
3.6	Ensemble $A := \{a \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\} : \{P_a^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$	110

3.7	Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$	111
3.8	Intersections de la forme $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$	114
3.9	Intersections de la forme $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$	119
3.10	Inégalités du type $(a + b \leq \frac{1}{4} + y) \wedge (a - b \leq \frac{1}{4} - y)$	122
3.11	Illustration des huit inéquations associées à la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$	132
4.1	L'octangle étoilé	139
4.2	Génération simultanée des coupes \mathcal{F} et \mathcal{F}'	141
4.3	Plan de réflexion $y\mathbf{j}_2 = 0$	145
4.4	Le Starbrot \mathcal{S} généré par l'union des coupes \mathcal{F} et \mathcal{F}'	149
4.5	Conjugués tricomplexes – signes des huit coefficients réels	150
4.6	Vue alternative de la coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$	154
4.7	La coupe idempotente $\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \bar{\gamma}_1\gamma_3, \gamma_1\bar{\gamma}_3)$ – Earthbrot	158

LISTE DES SYMBOLES

\mathbb{N}	Ensemble des nombres naturels
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{C} \simeq \mathbb{M}(1)$	Ensemble des nombres complexes
$\mathbb{BC} = \mathbb{M}(2)$	Ensemble des nombres bicomplexes
$\mathbb{TC} = \mathbb{M}(3)$	Ensemble des nombres tricomplexes
$\mathbb{M}(n)$	Ensemble des nombres multicomplexes d'ordre n
\mathbb{D}	Ensemble des nombres hyperboliques
$\mathbb{D}(2)$	Ensemble des nombres biduplexes
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4$	Unités imaginaires
$\mathbb{C}(\mathbf{i}_k)$	Ensemble des nombres complexes générés par \mathbf{i}_k
$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$	Unités hyperboliques
γ	Élément idempotent
$w^{\dagger k}$	k -ième conjugué de $w \in \mathbb{BC}$, $k \in \{1, 2, 3\}$
$\eta^{\ddagger k}$	k -ième conjugué de $\eta \in \mathbb{TC}$, $k \in \{1, \dots, 7\}$
$\ \cdot\ _2$	Norme euclidienne d'un élément de \mathbb{BC}
$\ \cdot\ _3$	Norme euclidienne d'un élément de \mathbb{TC}
$\overline{D}(z, r)$	Disque fermé centré en $z \in \mathbb{C}$ de rayon $r \geq 0$
$P_c^n(z)$	Énième itérée du polynôme $P_c(z) = z^2 + c$
\mathcal{M}_n	Ensemble de Mandelbrot n -complexe
\mathcal{H}	Ensemble de Mandelbrot hyperbolique (Hyperbrot)
$\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Espace engendré par $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$
$\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$	Coupe tridimensionnelle $\mathcal{M}_3 \cap \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$
$\mathcal{T}_e(\alpha, \beta, \delta)$	Coupe tridimensionnelle idempotente $\mathcal{M}_3 \cap \mathbb{T}(\alpha, \beta, \delta)$ où $\alpha, \beta, \delta \in \{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1\gamma_3}, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}, \mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1\gamma_3}, \mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}\}$

INTRODUCTION

En mathématiques, l'un des domaines ayant le plus bénéficié de l'avènement des ordinateurs est sans contredit celui des systèmes dynamiques complexes, développés au début du vingtième siècle par Gaston Julia et Pierre Fatou. En effet, l'informatique aura rendu possible la visualisation des lieux géométriques obtenus via l'application de règles simples à des polynômes quadratiques complexes, ce qui était auparavant impossible en raison de la quantité colossale de calculs à effectuer pour y parvenir. C'est ainsi que dans les années 1970, Benoît Mandelbrot commence à s'intéresser à l'ensemble qui portera son nom, avant d'en générer les premières images en 1980. Durant la même période, il introduira et développera par lui-même le concept de *fractale*, jetant les bases d'une théorie centrée sur l'étude d'objets extrêmement irréguliers et dont la structure est similaire à toutes les échelles. Dès lors, la curiosité de plusieurs chercheurs est piquée, et les ensembles autrefois strictement abstraits issus des systèmes dynamiques complexes ont commencé à révéler leurs propriétés captivantes, tant au niveau géométrique que sur le plan analytique. En fait, de cette fascination a découlé un engouement pour les fractales qui ne s'est toujours pas estompé à ce jour, alors que l'ensemble de Mandelbrot, pour ne nommer que celui-ci, continue de susciter l'intérêt des chercheurs ainsi que celui du grand public.

Par ailleurs, il n'aura pas fallu attendre longtemps après la publication des premières images de l'ensemble de Mandelbrot pour que certains développent le moyen d'en visualiser des versions tridimensionnelles. En particulier, Alan Norton a fourni dès 1982 [29] des algorithmes permettant de générer cette fractale à l'aide des quaternions, c'est-à-dire à partir de l'itération d'un polynôme quadratique à valeurs quaternioniques. Précisons que comme les quaternions forment une algèbre en quatre dimensions, il faut travailler avec des projections tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot quaternionique pour être en mesure de le visualiser. Toutefois, Bedding et Briggs [5] ont montré que la dynamique des ensembles ainsi obtenus présente un intérêt plutôt limité en raison du fait que le polynôme quadratique itéré sur les quaternions ne joue pas un rôle aussi fondamental que celui dans le cas complexe. Par conséquent, on peut faire ressortir de ce qui précède un principe fondamental concernant les fractales basées sur l'itération de polynômes : l'algèbre

choisie comme support pour les générer a une incidence drastique sur leurs propriétés, notamment en raison de la façon dont les opérations élémentaires telles que l'addition et la multiplication y fonctionnent.

Dans ce mémoire, les structures algébriques qui seront employées pour généraliser l'ensemble de Mandelbrot sont l'algèbre des nombres bicomplexes (dénotee \mathbb{BC}), et plus particulièrement, celle des nombres tricomplexes (dénotee \mathbb{TC}), qui sont toutes deux des cas particuliers d'algèbres multicomplexes en quatre et huit dimensions, respectivement. Il est cependant bon de mentionner que beaucoup de travail a déjà été accompli en ce sens. En effet, cette étude a débuté en 2000 avec Rochon [37], qui a utilisé les nombres bicomplexes pour donner une version 4D de l'ensemble de Mandelbrot. Ensuite, Garant-Pelletier [19, 20] a employé l'algèbre des nombres tricomplexes pour donner une version en huit dimensions du même ensemble. Dans son mémoire, il introduit notamment une relation d'équivalence pour classifier les différentes coupes 3D et généralise le théorème de Fatou-Julia aux espaces multicomplexes $\mathbb{M}(n)$. Puis, Parisé [30, 31, 32, 33] a généralisé certains résultats aux ensembles Multibrots (obtenus en itérant un polynôme de degré $p \geq 2$) et a étudié les coupes obtenues lorsque $p = 3$, tandis que Brouillette [6] a quant à lui formalisé l'ensemble de la théorie entourant les Multibrots généralisés sur $\mathbb{M}(n)$. En 2019, ses travaux en collaboration avec Rochon [7] ont également permis d'établir l'optimalité de l'espace tricomplexe, qui signifie que dans le cas des coupes principales, il est inutile de pousser l'exploration plus loin que sur \mathbb{TC} .

En somme, le contenu de ce mémoire s'articule autour de deux objectifs. Le premier consiste à formaliser les ponts existant entre la géométrie euclidienne traditionnelle dans \mathbb{R}^3 et la dynamique propre à certaines coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe \mathcal{M}_3 . Cela se traduira, entre autres, par des démonstrations établissant l'appartenance de ces coupes à une classe très restreinte de polyèdres : les solides de Platon. Le second objectif, plus général, est d'approfondir les connaissances actuelles au sujet des huit coupes 3D principales de \mathcal{M}_3 en développant pour chacune différentes caractérisations. Comme on pourra le constater, les démarches en ce sens feront ressortir leurs propriétés géométriques, en plus de révéler les interrelations remarquables existant entre certaines coupes. En outre, cela permettra d'illustrer de quelle façon l'espace des itérées d'une coupe donnée influe sur ses caractéristiques.

La structure du document est donc la suivante. Pour commencer, le chapitre I est consacré à la géométrie euclidienne, et plus particulièrement, aux polyèdres convexes et

leurs propriétés. On y introduit également certaines notions afférentes à la convexité dans le but d'énoncer et de démontrer un théorème assurant l'existence et l'unicité de tout polyèdre convexe en fonction des coordonnées de ses sommets. Ensuite, au chapitre 2, nous aborderons brièvement les nombres bicomplexes avant de nous concentrer davantage sur les nombres tricomplexes, qui seront utilisés à pratiquement toutes les étapes subséquentes de ce travail. Nous serons alors prêts à entamer le chapitre 3, dans lequel nous investiguerons en détail les propriétés des huit coupes principales. Notons que ce chapitre est également celui où on démontre que deux des coupes principales sont des polyèdres réguliers convexes.

Finalement, le chapitre 4 contient une approche visant à formaliser le concept de composé polyédrique en lien avec les coupes principales. En particulier, on investigate la possibilité de faire apparaître un polyèdre non convexe dénommé *Stella octangula* dans le sous-espace associé à la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. On y présente également en primeur une étude plus poussée des propriétés géométriques de deux coupes principales de \mathcal{M}_3 , puisque celles-ci possèdent la particularité de pouvoir s'exprimer comme l'intersection de deux autres coupes 3D. Il semble d'ailleurs important de souligner le caractère fondamental d'un tel résultat. Puis, en terminant, on propose une introduction aux coupes idempotentes, grâce à laquelle nous pourrons montrer qu'un troisième solide platonicien, le cube, se manifeste à travers la dynamique tricomplexe.

Quant à elles, les annexes A, B et C contiennent respectivement les justifications en lien avec les arguments invoqués dans certaines preuves de la section 3.5, des suppléments au sujet des représentations idempotentes formulées au chapitre 2, et en complément, les procédures élaborées dans le logiciel Maple 18 pour visualiser certaines fractales 2D présentées au chapitre 3.

Polyèdres et ensembles convexes

Dans ce chapitre, nous présentons certaines notions élémentaires et quelques résultats pertinents en lien avec les polyèdres et les ensembles convexes. Une attention particulière sera accordée à cinq solides de l'espace tridimensionnel ayant d'intéressantes propriétés : il s'agit des cinq polyèdres convexes réguliers, décrits en détail par le mathématicien Euclide environ 300 ans av. J.C. Ils sont aussi parfois appelés les cinq solides de Platon en l'honneur de ce dernier qui leur prêtait un rôle déterminant dans sa philosophie. En effet, le dialogue *Timée* relate comment Platon associait chacun des quatre éléments (eau, terre, feu et air) à l'un de ces solides, alors que le dernier d'entre eux était plutôt « utilisé par le dieu pour arranger les constellations sur tout le ciel¹ », ou encore associé à l'*éther* par Aristote. Même si le contenu de ce mémoire s'inscrit dans l'étude des fractales issues de la dynamique tricomplexe, il n'en demeure pas moins pertinent de s'attarder aux solides platoniciens, puisqu'on retrouve certains d'entre eux à travers l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres tricomplexes. Si le tétraèdre, l'hexaèdre (ou cube), l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre sont connus depuis fort longtemps, ce n'est que tout récemment qu'on a découvert ce lien avec la dynamique multicomplexe (voir [19]).

Fait intéressant : le treizième et dernier livre des *Éléments* d'Euclide est entièrement consacré à l'étude des cinq polyèdres convexes réguliers, et plus précisément à leur construction. Qui plus est, la proposition finale du livre XIII établit l'unicité de ces cinq solides. Il apparaît fort symbolique qu'Euclide, grand géomètre de la Grèce antique, ait choisi de conclure son œuvre monumentale en treize livres en énonçant un résultat que certains mathématiciens et auteurs actuels considèrent comme faisant partie du patrimoine culturel de l'humanité, au même titre que l'*Odyssée* d'Homère, les statues de l'île de Pâques et les pyramides de Gizeh (consulter par exemple [3]). Soulignons que les définitions et résultats présentés ci-dessous sont issus de [1, 3, 16, 36, 41] et [18].

1. Voir [34].

1.1 Notions de géométrie euclidienne

Tout d'abord, on introduit quelques définitions classiques à partir desquelles on pourra ensuite préciser notre champ d'intérêt.

Définition 1.1. Un **polygone** consiste en un domaine planaire arbitraire borné par un nombre fini de segments de droite qui sont eux-mêmes inclus dans le polygone. Chaque segment est un **côté** du polygone, et les extrémités de ceux-ci correspondent à ses **sommets**.

De façon équivalente, toute figure géométrique en deux dimensions bornée par une ligne polygonale fermée est un polygone. Il est bon de noter que les auteurs ne s'entendent pas sur le degré de généralité à accorder à cette définition. À partir de celle-ci, certains d'entre eux admettent deux types de polygones : les polygones croisés (pour lesquels deux côtés non consécutifs se coupent) et les polygones simples, pour lesquels

- l'intersection de deux côtés non consécutifs est toujours vide ;
- l'intersection de deux côtés consécutifs se résume à leur sommet (ou point) commun.

À l'opposé, d'autres auteurs (par exemple [!]) considèrent d'emblée une hypothèse supplémentaire : la ligne polygonale délimitant le domaine planaire doit être une courbe de Jordan, donc doit être simple et fermée. D'après ce dernier critère, il ne peut exister aucun polygone croisé – deux triangles ayant un unique sommet comme point commun sont donc vus comme deux polygones plutôt qu'un seul, par exemple. Il devient alors possible de donner une définition topologique du concept de polygone en utilisant le Théorème de Jordan (dans \mathbb{R}^2).

Théorème (de Jordan). Soit C une courbe de Jordan dans le plan. Son complément $\mathbb{R}^2 \setminus C$ est formé d'exactly deux composantes connexes, toutes deux ouvertes, dont l'une est bornée (l'intérieur) et l'autre ne l'est pas (l'extérieur). De plus, chacune de ces composantes connexes a pour frontière la courbe C .

Il en découle, pour les polygones, une définition intéressante dans laquelle il ne subsiste aucune ambiguïté [14].

Définition 1.1. Un **polygone** est une figure plane constituée d'une ligne polygonale simple et fermée (son **périmètre**) et de l'ouvert connexe borné issu de l'application du théorème de Jordan (son **intérieur géométrique**).

En d'autres termes, si L est une ligne polygonale simple et fermée et $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2 \setminus L$ est l'ouvert connexe borné induit par l'application du théorème de Jordan à L , le polygone P correspondant s'exprime comme $P = L \cup \mathcal{O}$.

Remarque 1.1. En vertu de la définition précédente et du fait que tout ensemble ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs, l'intérieur géométrique de tout polygone est également connexe par arcs. Par cette propriété plus intuitive que la seule connexité, on retrouve le caractère géométrique attendu d'un polygone, conformément à notre perception d'un tel objet.

Si la définition formelle d'un polygone a le mérite d'être claire, elle désigne toutefois une vaste gamme de figures géométriques. Nous allons donc raffiner nos critères d'intérêt en introduisant quelques définitions supplémentaires.

Définition 1.2. Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est **convexe** si

$$\forall x, y \in A, (1-t)x + ty \in A, \forall t \in [0, 1].$$

Autrement dit, A est **convexe** si $\forall x, y \in A$, le segment de droite qui les joint est entièrement contenu dans A .

La convexité est une propriété simple mais importante en mathématiques, et certains domaines comme la géométrie et l'algèbre linéaire l'illustrent bien. De nombreux ouvrages ont été publiés à ce sujet et la théorie est désormais plus poussée qu'on ne pourrait le croire au premier abord (voir [1, 2, 43]). Certaines notions élémentaires seront d'ailleurs abordées plus loin, mais pour l'instant, on se contente d'appliquer la Définition 1.2 aux polygones.

Définition 1.3. Un polygone est **convexe** si son intérieur géométrique est un ensemble convexe. De plus, un polygone est **régulier** si tous ses côtés ont la même longueur, et si tous ses angles ont la même mesure.

Ainsi, un **polygone convexe régulier** est un polygone convexe qui est à la fois équilatéral et équiangle.

Cette dernière définition désigne une classe assez restreinte de figures géométriques, puisque les critères de convexité et de régularité écartent d'emblée de nombreux polygones. Pour se convaincre de l'existence de ce type particulier de polygone à n côtés, le lecteur peut considérer l'enveloppe convexe² des n points $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k = 1, \dots, n$ dans le plan complexe [3]. On peut maintenant passer en dimension supérieure.

Définition 1.4. Un **polyèdre** est un solide (un ensemble de points dans l'espace) borné par un nombre fini de polygones constituant sa surface. Ceux-ci sont appelés les **faces** du polyèdre, qui sont à leur tour délimitées par leurs côtés qu'on appelle des **arêtes**. Enfin, le début et la fin de celles-ci constituent les **sommets** du polyèdre.

Soulignons que l'ensemble des polygones délimitant le polyèdre correspond à la surface de celui-ci. En outre, définir clairement ce qu'est un polyèdre est demeuré une tâche ardue pour les mathématiciens durant plusieurs siècles [16], en partie à cause du degré de généralité et de précision à accorder à une telle définition, mais aussi à cause du nombre de résultats préalablement établis qui s'avéraient par la suite invalides pour certains cas pathologiques correspondant pourtant aux définitions proposées. Un exemple particulièrement bien documenté de ce phénomène est celui du théorème d'Euler (ou relation d'Euler) qui sera présenté plus loin. En conséquence, il existe d'autres définitions du concept de polyèdre admettant certains raffinements ajoutés dans le but de bien préciser leur portée (voir par exemple [16]). La Définition 1.4 retenue dans ce mémoire correspond à celle présentée dans [1, 2] et [3] et est suffisante compte tenu de l'usage qui en est fait.

D'autre part, puisque le théorème de Jordan se généralise aux dimensions supérieures (théorème de Jordan-Brouwer), on pourrait proposer une définition topologique du concept de polyèdre de manière analogue à celle qui a été donnée pour un polygone (voir [14]). Une telle définition sera cependant omise, du fait de son intérêt limité dans le contexte de ce

2. La définition formelle de l'enveloppe convexe d'un ensemble sera donnée à la Définition 1.11.

mémoire.

Maintenant, on peut définir ce qu'est un polyèdre convexe en utilisant directement la définition de la convexité. Ainsi, on dira qu'un polyèdre est convexe si l'union de son intérieur géométrique et de sa surface est un ensemble convexe, c'est-à-dire si pour toute paire de points appartenant à son intérieur géométrique ou à sa surface, le segment de droite les reliant y est également contenu. Pour faire écho à la Définition 1.4, on peut également définir un polyèdre convexe comme un ensemble convexe de points dans l'espace borné par un nombre fini de polygones [1].

Définition 1.5. Un polyèdre est **régulier** si toutes ses faces sont des polygones convexes réguliers congrus et si elles sont disposées de façon à ce que le même nombre de faces se rejoignent en chaque sommet.

À l'instar de la Définition 1.4, la notion de régularité pour les polyèdres a un historique plutôt chaotique. C'est un concept qui, dès le départ, ne semble avoir été que partiellement défini par Euclide dans ses *Éléments*. En conséquence, de nombreux mathématiciens ont tenté de combler cette lacune, et ce, de différentes façons. Le théorème suivant, issu de [16], l'illustre bien et unifie au passage les différentes approches pour définir ce qu'est un polyèdre régulier.

Théorème 1.1. Considérons un polyèdre convexe P dont toutes les faces sont des polygones convexes réguliers congrus. Alors, les énoncés suivants s'équivalent :

- 1) En chaque sommet de P se rejoint le même nombre de faces ;
- 2) Tous les sommets de P se trouvent sur une sphère ;
- 3) Tous les angles dièdres^a de P sont égaux ;
- 4) Toutes les figures de sommet^b sont des polygones réguliers ;
- 5) Tous les angles solides^c de P sont congrus.

a. Il s'agit de l'angle entre deux faces (ou, de manière plus générale, de l'angle entre deux plans).

b. On appelle *figure de sommet* le polygone obtenu lorsqu'on coupe un coin de polyèdre de façon à enlever la même longueur de chacune des arêtes se rejoignant en un sommet donné.

c. L'angle solide en un sommet, mesuré en stéradians, est égal à l'aire du polygone sphérique correspondant à l'intersection entre le polyèdre P et une sphère de rayon unitaire centrée en ce sommet.

Démonstration.

La preuve consiste à montrer que $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 1)$. Le lecteur intéressé peut

consulter [16]. ■

Soulignons que la régularité d'un polyèdre n'est pas une condition suffisante pour assurer la convexité de celui-ci. Même si les polyèdres réguliers sont constitués exclusivement de polygones convexes réguliers dont le même nombre se rejoint en chaque sommet, cela ne signifie pas que le polyèdre lui-même est convexe : il existe d'ailleurs quatre polyèdres réguliers non convexes qu'on appelle les **solides de Kepler-Poinsot**. Il existe donc, en conjonction avec les cinq polyèdres réguliers convexes, neuf polyèdres réguliers [16]. Enfin, grâce à tout ce qui précède, nous pouvons finalement présenter les polyèdres d'intérêt dans ce mémoire.

Définition 1.6. Un **solide de Platon** est un polyèdre à la fois convexe et régulier.

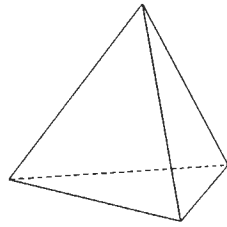
La Figure 1.1 illustre l'ensemble de ces polyèdres particuliers. À ce propos, présentons maintenant l'ultime théorème des *Éléments* d'Euclide.

Théorème 1.2. Il existe seulement cinq polyèdres convexes réguliers : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.

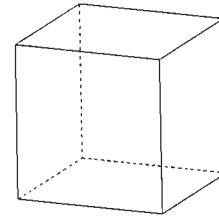
Il est intéressant de noter que le Théorème 1.2 doit être adapté pour rester valide en d'autres dimensions. Pour ce faire, on définit le concept de *polytope* [14, 15], qui correspond à une figure géométrique bornée par des segments de droite, des plans ou des hyperplans. Ainsi, un polytope de dimension 2 est un polygone et un polytope de dimension 3 est un polyèdre. S'il est facile de se convaincre qu'il existe une infinité de polygones convexes réguliers en deux dimensions, il apparaît surprenant qu'il existe précisément six polytopes réguliers convexes en dimension quatre, et **exactement trois dans toutes les dimensions supérieures**³.

Trois démonstrations différentes seront élaborées pour établir le Théorème 1.2. Avant de débiter, une nuance importante doit cependant être apportée : si ces démonstrations assurent l'*unicité* des cinq polyèdres convexes réguliers, elle prend pour acquis leur *existence*. S'assurer de cette dernière requiert une construction distincte pour chaque solide, ce que le lecteur pourra retrouver dans [24].

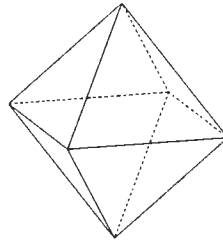
3. On retrouve une preuve de cet énoncé dans [14]. De plus, la notion de régularité d'un polytope doit être adaptée lors du passage aux dimensions supérieures. L'approche préconisée par Coxeter dans le même ouvrage utilise une généralisation du concept de figure de sommet pour définir celle-ci.



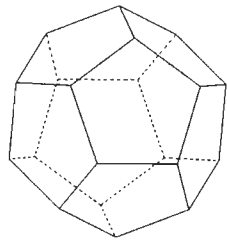
(a) Un tétraèdre régulier



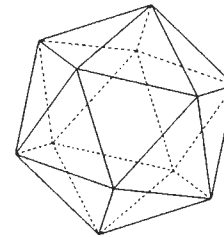
(b) Un hexaèdre régulier



(c) Un octaèdre régulier



(d) Un dodécaèdre régulier



(e) Un icosaèdre régulier

FIGURE 1.1 – Les cinq solides de Platon

Démonstration.

La première approche en est une déductive et il s'agit de celle privilégiée par Euclide. Rappelons les caractéristiques des polyèdres convexes réguliers :

- Toutes les faces doivent être des polygones convexes réguliers congrus ;
- On doit avoir le même nombre de faces se rejoignant à chaque sommet.

Forcément, pour qu'un sommet quelconque en soit vraiment un, il faut qu'un minimum de trois faces s'y rejoignent. Autrement, il s'agit soit d'un point sur une arête (deux faces s'y rejoignent) ou alors nous sommes en présence d'un polygone en deux dimensions (une seule face possède ce point comme sommet). Donc, au moins trois faces se rejoignent en chacun des sommets des polyèdres concernés.

Intéressons-nous maintenant à un sommet donné. Considérons la somme des angles en ce sommet (un angle par face). La somme doit être strictement inférieure à 2π , sinon le

polyèdre ne peut pas être convexe⁴. Ainsi, la preuve se résume en une étude de cas :

i) Les polygones réguliers sont des triangles équilatéraux

On sait qu'il y a au moins trois faces rejoignant chaque sommet et que chaque angle dans un triangle équilatéral mesure $\frac{\pi}{3}$ rad. Puisque $6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$, il peut seulement y avoir trois, quatre ou cinq triangles se rejoignant en chaque sommet. Ces solutions donnent respectivement le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre.

ii) Les polygones réguliers sont des carrés

De manière similaire, on sait que les angles d'un carré mesurent tous $\frac{\pi}{2}$ rad. Puisque $4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$, alors on doit avoir simultanément au moins et au plus trois carrés se rejoignant à chaque sommet : on obtient ainsi l'unique solution possible, l'hexaèdre régulier.

iii) Les polygones réguliers sont des pentagones

En divisant l'intérieur d'un pentagone régulier en cinq triangles isocèles et isométriques, on peut constater que la mesure de l'angle (intérieur) à un sommet donné d'un pentagone régulier est de $\frac{3\pi}{5}$ rad. Comme $3 \times \frac{3\pi}{5} = \frac{9\pi}{5} < 2\pi$ tandis que $4 \times \frac{3\pi}{5} = \frac{12\pi}{5} > 2\pi$, on conclut, à l'instar du cube, qu'on doit avoir simultanément au moins et au plus trois pentagones se rejoignant à chaque sommet. Conséquemment, on aboutit à l'unique solution possible, à savoir le dodécaèdre.

Si on applique la même stratégie qu'au pentagone régulier à un hexagone régulier, on trouve que la mesure de l'angle intérieur à un sommet donné d'un hexagone régulier est de $\frac{2\pi}{3}$ rad. Or, $3 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$; ainsi, on doit avoir simultanément *moins de et au moins* trois hexagones se rejoignant à chaque sommet, ce qui est bien sûr impossible. Puisqu'un argument similaire disqualifie d'emblée tous les polygones réguliers à plus de six côtés, on conclut que les cinq solides trouvés précédemment correspondent aux seules solutions possibles. ■

Il est possible de reprendre l'approche déductive utilisée plus haut et d'exprimer ses arguments en termes d'inéquations. On introduit à cet effet la définition suivante.

4. Il n'est pas nécessairement évident à première vue que dans le cas d'un polyèdre convexe, la somme des angles en un sommet donné est strictement inférieure à 2π . Une démonstration de cet énoncé est disponible dans [18].

Définition 1.7. On associe à chaque polyèdre convexe régulier un **symbole de Schläfli** $\{p, q\}$, signifiant que le polyèdre en question possède des faces qui sont des p -gones, donc des polygones à p côtés, et pour lequel q faces se rejoignent en chaque sommet. Ainsi, le symbole de Schläfli pour chacun des solides de Platon est

- $\{3, 3\}$ pour le tétraèdre ;
- $\{4, 3\}$ pour l'hexaèdre ;
- $\{3, 4\}$ pour l'octaèdre ;
- $\{5, 3\}$ pour le dodécaèdre ;
- $\{3, 5\}$ pour l'icosaèdre.

Démonstration (du Théorème 1.2).

Reprenons maintenant les arguments de la preuve précédente. Premièrement, on a toujours que $p \geq 3$ et $q \geq 3$ en raison de la définition donnée à p et q . Généralisons la méthode utilisée pour trouver la mesure des angles intérieurs d'un pentagone régulier. Soit un polygone régulier à p côtés. Si on divise son intérieur en p triangles isocèles et isométriques, on peut constater que les p angles au centre de la figure valent chacun $\frac{2\pi}{p}$ rad. Comme la somme des angles intérieurs d'un triangle égale toujours π rad, alors la somme des angles restants dans chacun des triangles vaut

$$\pi - \frac{2\pi}{p} = \frac{\pi(p-2)}{p} \text{ rad.}$$

Maintenant, comme chaque sommet est divisé également en deux triangles isocèles et isométriques, on peut « jumeler » les paires d'angles en chaque sommet, ce qui nous garantit que l'angle intérieur en un sommet donné d'un polygone à p côtés est de $\frac{\pi(p-2)}{p}$ rad. D'un autre côté, pour n'importe quel sommet d'un polyèdre convexe régulier, on sait que la somme des angles en ce sommet doit être strictement inférieure à 2π . Comme chaque angle vaut $\frac{\pi(p-2)}{p}$ rad et qu'il y a q faces se rejoignant à chaque sommet, alors on doit avoir

$$\frac{\pi(p-2)q}{p} < 2\pi.$$

Cette inéquation est équivalente à

$$pq - 2p - 2q < 0$$

et en ajoutant 4 de chaque côté de l'inégalité, on peut factoriser le polynôme à gauche

pour obtenir

$$(p - 2)(q - 2) < 4.$$

Il suffit maintenant de se rappeler que p et q sont entiers et que $p \geq 3$ et $q \geq 3$. On obtient ainsi les cinq mêmes solutions que précédemment, c'est-à-dire

- $\{p = 3, q = 3\}$ pour le tétraèdre ;
- $\{p = 4, q = 3\}$ pour l'hexaèdre ;
- $\{p = 3, q = 4\}$ pour l'octaèdre ;
- $\{p = 5, q = 3\}$ pour le dodécaèdre ;
- $\{p = 3, q = 5\}$ pour l'icosaèdre. ■

Avant de présenter la troisième approche, il convient de présenter un résultat célèbre en géométrie classique et qui est également important en topologie.

Théorème 1.3 (relation d'Euler). Pour tout polyèdre convexe, si S désigne le nombre de sommets du polyèdre, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces, alors

$$S - A + F = 2.$$

Il est bon de souligner que de manière plus générale, le Théorème 1.3 s'applique dans le cas de n'importe quel polyèdre dont la surface est homéomorphe à une boule [16]. Ensuite, si de nombreuses démonstrations de cet énoncé ont été publiées à travers les époques, celle qui sera présentée plus bas nous vient à l'origine de Cauchy, en 1813. Ce dernier a opté pour une stratégie ingénieuse consistant à déformer un polyèdre convexe donné de façon à ce qu'il soit réduit en un graphe planaire. Puis, en effectuant des opérations qui simplifient celui-ci tout en préservant la relation initiale, on obtient une figure géométrique simple pour laquelle l'équation est trivialement vraie – elle devait donc l'être pour le polyèdre également. On peut retrouver cette preuve notamment dans [36] et [16].

Démonstration.

Considérons n'importe quel polyèdre convexe. On choisit arbitrairement une face de ce dernier et on l'enlève (de manière à pouvoir regarder à l'intérieur). Ensuite, on tire vers l'extérieur sur les côtés de la face manquante pour déformer le polyèdre jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un graphe planaire constitué de ses sommets et arêtes déformées⁵, et dont

5. La convexité du polyèdre implique que celui-ci est homéomorphe à une boule, et c'est ce qui rend cette déformation possible [1].

la frontière correspond au périmètre de la face manquante. On constate que le graphe comporte autant de sommets et d'arêtes que le solide initial, mais le nombre de faces a diminué de 1 : conséquemment, démontrer la relation d'Euler pour le polyèdre initial revient à démontrer la relation $S - A + F = 1$ pour le graphe planaire.

Maintenant, on s'attarde aux polygones du graphe ayant plus de trois côtés et on trace à l'intérieur de ceux-ci des segments de droite reliant deux sommets non adjacents jusqu'à ce qu'il ne reste que des triangles. Remarquons qu'à chaque fois qu'on ajoute une diagonale de cette façon, on augmente le nombre d'arêtes ainsi que le nombre de faces du graphe de 1 : on a donc

$$S - (A + 1) + (F + 1) = S - A + F,$$

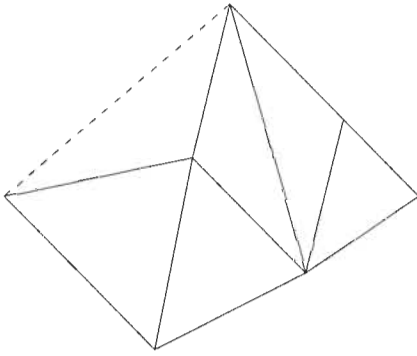
et on conclut que l'expression $S - A + F$ demeure inchangée. En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, on peut voir qu'à la fin, le graphe est constitué exclusivement de faces triangulaires.

L'objectif est désormais de retirer un à un les triangles qui composent le graphe. Tout d'abord, on retire les triangles qui partagent un seul de leurs côtés avec sa frontière extérieure (voir la Figure 1.2a). Remarquons qu'à chaque suppression, on enlève une arête et une face au graphe : la relation $S - A + F$ est donc préservée. Ensuite, on retire les triangles qui partagent précisément deux de leurs côtés avec la frontière extérieure (Figure 1.2b). Ce faisant, on enlève deux arêtes, un sommet et une face du graphe et on voit que l'expression $S - A + F$ n'a toujours pas changé. La clé est de constater qu'en répétant ces deux étapes suffisamment longtemps, le graphe finit par n'être composé que d'un seul triangle, pour lequel la relation $S - A + F = 1$ est certainement vraie. Puisque les opérations effectuées ont toujours préservé la valeur de $S - A + F$, on déduit que cette relation était vraie pour le graphe de départ, ce qui permet de conclure que la relation $S - A + F = 2$ était vraie pour le polyèdre initial. ■

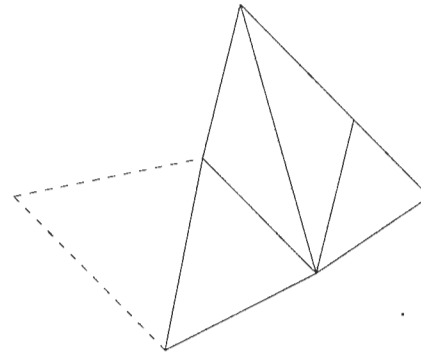
Grâce à ce résultat, on peut maintenant démontrer l'unicité des cinq solides de Platon d'une troisième façon.

Démonstration (du Théorème 1.2).

Premièrement, on sait que pour n'importe quel polyèdre convexe, on a la relation $S - A + F = 2$. Maintenant, dans le cas des polyèdres convexes réguliers, il est possible de déduire une



(a) Un seul côté du triangle enlevé est sur la frontière du graphe.



(b) Deux côtés du triangle enlevé sont sur la frontière du graphe.

FIGURE 1.2 - Les deux types de triangles qu'on retrouve à la frontière du graphe.

autre relation algébrique :

$$pF = 2A = qS.$$

En effet, si on compte les p côtés des F faces, on a compté chaque arête deux fois, puisque chaque côté appartient à deux faces. De manière similaire, compter les q faces en les S sommets revient à compter chaque arête deux fois, puisque chaque arête relie deux sommets. La dernière relation est donc vérifiée. En combinant ces deux équations et en substituant les valeurs de S et F dans la formule d'Euler, on obtient

$$\frac{2A}{q} - A + \frac{2A}{p} = 2.$$

Puis, en divisant par $2A$ (forcément une valeur positive), on trouve

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p} = \frac{1}{A},$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Or, $\frac{1}{A} > 0$ et donc

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}.$$

On sait que $p \geq 3$ et $q \geq 3$, puisque tout polygone régulier a au moins 3 côtés, et qu'au moins 3 faces se rejoignent en un sommet donné. Algébriquement parlant, cela limite grandement le nombre de possibilités puisque p et q doivent être entiers. À partir d'ici, on peut procéder systématiquement pour obtenir les cinq seules solutions entières possibles

pour p et q données sous forme de symbole de Schläfli :

- $\{p = 3, q = 3\}$ pour le tétraèdre ;
- $\{p = 4, q = 3\}$ pour l'hexaèdre ;
- $\{p = 3, q = 4\}$ pour l'octaèdre ;
- $\{p = 5, q = 3\}$ pour le dodécaèdre ;
- $\{p = 3, q = 5\}$ pour l'icosaèdre. ■

1.2 Dualité entre polyèdres

Le dernier concept abordé en lien avec les polyèdres est celui de la dualité (à ne pas confondre avec la notion plus large de dualité en géométrie projective). La définition présentée ci-bas provient de [1, 45].

Définition 1.8. Un polyèdre est le **dual** d'un autre lorsque chaque sommet de l'un peut être mis en correspondance avec une face de l'autre (et vice-versa), et si chaque arête reliant une paire de sommets de l'un correspond à l'arête le long de laquelle les deux faces correspondantes se rencontrent sur l'autre (la correspondance entre les arêtes doit donc respecter les propriétés d'adjacence du solide de départ).

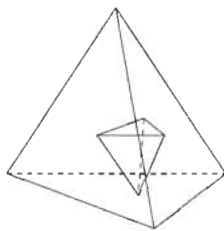
On peut d'ores et déjà conclure que le dual d'un polyèdre dual est le polyèdre initial. On déduit aussi de cette définition que le nombre de sommets d'un polyèdre doit égaler le nombre de faces de son dual, et vice-versa ; en outre, les deux solides doivent avoir le même nombre d'arêtes. Enfin, on peut aisément déterminer le dual de chaque polyèdre convexe régulier à l'aide de son symbole de Schläfli, et pour ce faire, il suffit d'invertir les paramètres p et q de celui-ci : le dual du polyèdre ayant pour symbole $\{p, q\}$ est donc celui correspondant à $\{q, p\}$. Le raisonnement est le suivant. Si les faces d'un solide platonicien sont des polygones à p côtés, alors elles ont toutes p sommets. Puisque chaque face est en correspondance avec un sommet du dual, on doit avoir p faces se rejoignant en chacun de ceux-ci. D'autre part, en chaque sommet du polyèdre se rejoignent q faces. Puisque chaque sommet est en correspondance avec une face du dual, alors chaque face de celui-ci doit avoir q sommets : en d'autres mots, le dual est composé de polygones à q côtés dont p d'entre eux se rejoignent en chaque sommet et son symbole de Schläfli est donc $\{q, p\}$.

Ainsi, en vertu de la Définition 1.7, le cube et l'octaèdre sont le dual l'un de l'autre, le dodécaèdre et l'icosaèdre le sont également, et le tétraèdre est son propre dual. Cette

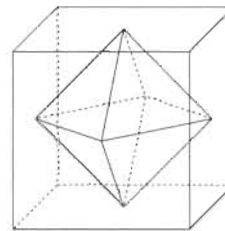
dernière propriété sera au centre de la section 4.1. Maintenant, notons qu'il existe de nombreuses méthodes plus ou moins générales permettant de déterminer le dual d'un polyèdre. Certaines d'entre elles s'appliquent uniquement dans le cas des solides de Platon, tandis qu'une autre fonctionne pour tout polyèdre convexe; enfin, la construction de Dorman-Luke s'applique pour n'importe quel polyèdre uniforme⁶, qu'il soit convexe ou non convexe, étoilé ou pas et est basée sur l'utilisation des figures de sommet [45].

Remarque 1.2. Il est important de remarquer que la taille du polyèdre initial n'a aucune incidence sur celle de son dual. Ce qui importe, c'est la correspondance bi-univoque entre les faces et sommets des solides, ainsi que celle entre leurs arêtes respectives. Néanmoins, on verra que certaines méthodes de détermination du dual discutées ci-dessous fixent les différentes mesures de celui-ci en fonction de celles du polyèdre de départ.

Premièrement, la définition de la dualité entre polyèdres induit elle-même une façon plutôt simple de déterminer un dual. Si à chaque face du solide initial correspond un sommet du dual et vice-versa, alors on peut sélectionner un point sur chaque face et relier par une arête toutes les paires de points situés sur des faces adjacentes [41]. Les points choisis deviennent alors les sommets du dual et ses faces sont délimitées par les arêtes joignant tous les points situés sur les faces du polyèdre de départ qui aboutissent en un sommet donné (la Figure 1.3 illustre cette construction pour certains polyèdres réguliers convexes).



(a) Le tétraèdre est son propre dual, à une réflexion près.



(b) Le cube et l'octaèdre sont le dual l'un de l'autre.

FIGURE 1.3 – Relation de dualité entre certains solides platoniciens

Pour que cette technique fonctionne, il faut cependant que les points choisis sur les

6. De [16] : polyèdre dont chaque face est un polygone régulier et qui est isogonal (son groupe de symétrie agit transitivement sur l'ensemble de ses sommets). Quelques classes remarquables de polyèdres uniformes seront mentionnées plus loin.

faces se rejoignant en un sommet donné soient tous coplanaires afin d'assurer que les arêtes le sont également, et que la nouvelle face en soit vraiment une. On peut donc l'utiliser avec tout polyèdre pour lequel aucun sommet n'appartient à plus de trois faces⁷, ou avec les solides de Platon en choisissant le centre⁸ de celles-ci [41]. En effet, dans le cas d'autres polyèdres convexes comme l'icosidodécaèdre (Figure 1.4), même les centres de faces en un sommet donné ne sont pas coplanaires ; on doit alors utiliser une autre méthode pour déterminer le polyèdre dual.



(a) L'icosidodécaèdre, l'un des solides archimédiens



(b) Le triacontaèdre rhombique, l'un des solides de Catalan

FIGURE 1.4 - Illustration de deux polyèdres duaux

Réciprocité polaire

Ceci nous amène donc au concept de réciprocité polaire (en anglais : *polar reciprocation*), qui permet de déterminer le dual de n'importe quel polyèdre convexe. Pour une présentation complète à ce sujet, le lecteur intéressé peut consulter [1, 14, 15, 45]. La procédure décrite dans les paragraphes suivants consiste en une transformation polaire qui est en fait l'analogue en trois dimensions de la polarisation dans le plan⁹. Dans ce dernier, chaque point (appelé *pôle*) est mis en correspondance avec une droite (appelée la *polaire*), et vice-versa. En comparaison, le phénomène de polarisation dans l'espace associe chaque point à un plan polaire, chaque plan à un pôle, tandis que les droites sont mises en correspondance entre elles.

7. De surcroît, en prenant le centre de chaque face on peut éviter de déformer le dual recherché [41].

8. De [3] : dans le cas des solides platoniciens, cela nous amène à considérer une approche équivalente pour déterminer leur dual : il s'agit de l'enveloppe convexe des centres de leurs faces (voir la Figure 1.3).

9. Le lecteur intéressé peut consulter [24] ou [1] pour retrouver l'ensemble des considérations théoriques en deux et trois dimensions.

Pour simplifier les choses, on suppose que le polyèdre convexe en question est centré à l'origine O . On considère maintenant une sphère de rayon r d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et donc également centrée à l'origine¹⁰. Notons que dans la construction qui suit, le rayon de la sphère influence directement la taille du polyèdre dual : dans la littérature¹¹, on choisit souvent le rayon de manière à ce que la sphère soit circonscrite au solide dans le cas d'un polyèdre uniforme (prismes, antiprismes, solides de Platon, solides archimédiens) ou inscrite à celui-ci dans le cas de l'une des classes duales des polyèdres précédents (bipyramides, antidiamentants, solides de Catalan). Dans les autres cas, on prend une sphère quelconque. Soulignons au passage que les solides platoniciens sont les seuls polyèdres pour lesquels il existe une sphère inscrite, une sphère médiane (*midsphere*)¹² et une sphère circonscrite, toutes concentriques [14]. La Figure 1.5 permet d'admirer cette propriété.

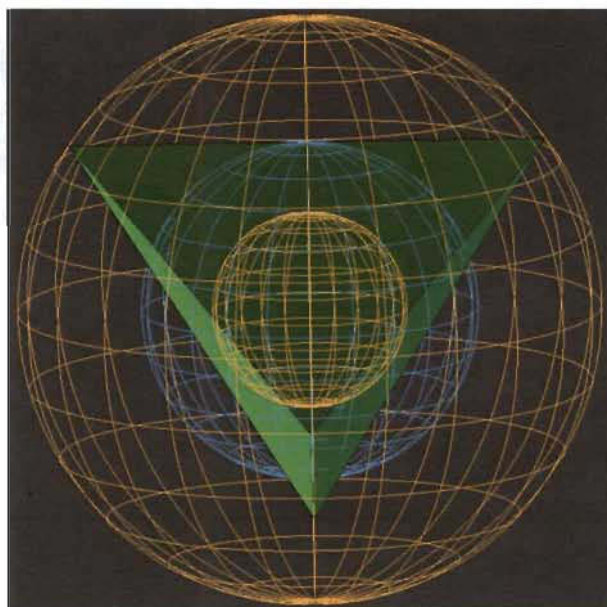


FIGURE 1.5 – Un tétraèdre régulier (l'une de ses faces a été enlevée) et ses trois sphères.

Pour établir une correspondance réversible entre le polyèdre de départ P et son dual P' conformément à la Définition 1.8, on considère les vecteurs issus de O passant chacun par l'un des sommets de P ou qui sont normaux à l'une de ses faces. On peut alors construire le dual P' dont chaque sommet se trouve le long de l'un des vecteurs normaux à une face de

10. Il n'est pas obligatoire de centrer la sphère à l'origine. Toutefois, si la sphère est centrée ailleurs, il faut adapter les calculs en fonction de son décalage. Qui plus est, advenant le cas qu'elle et le polyèdre ne soient pas concentriques, le dual de celui-ci s'en trouvera déformé par le processus de réciprocaton.

11. Voir par exemple [1] ou [45].

12. Il s'agit de la sphère passant par toutes les arêtes (leurs points milieux dans le cas des solides de Platon).

P , et dont chaque face est supportée par un plan qui est perpendiculaire à l'un des vecteurs passant par un sommet de P . L'intersection entre deux faces contigües de P' (c'est-à-dire entre leurs deux plans) constitue leur arête commune, et celle-ci est en correspondance avec l'arête reliant les deux sommets initiaux de P : les propriétés d'adjacence sont donc préservées, et on pourrait montrer que deux arêtes duales sont perpendiculaires [15].

Il reste à déterminer exactement l'emplacement des sommets, faces et arêtes du polyèdre dual afin qu'il en soit vraiment un. Il s'avère que la sphère de centre O combinée aux vecteurs rejoignant les sommets et les faces de P nous procurent un moyen naturel d'y arriver en faisant intervenir l'opération d'inversion géométrique [24].

Définition 1.9. Soit Π une sphère de rayon r et de centre O . Pour tout point $Q \in \mathbb{R}^3 \setminus O$, l'**inverse** de Q par rapport à Π est l'unique point Q' sur la demi-droite OQ tel que $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OQ'} = r^2$, où l'opération \cdot correspond au produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n .

Il découle directement trois propriétés avantageuses de la définition précédente :

- 1) $Q = Q' \Leftrightarrow Q \in \Pi$;
- 2) Si Q est situé à l'intérieur de la sphère, alors Q' est à l'extérieur de celle-ci et réciproquement ;
- 3) $(Q')' = Q$.

Par rapport à notre construction, l'inversion géométrique est l'opération permettant d'établir l'emplacement des composantes de P' . Plus précisément, à chaque sommet S du polyèdre P est associé le plan perpendiculaire au vecteur \overrightarrow{OS} qui contient le point S' , qui lui est obtenu via la Définition 1.9 appliquée à S avec la sphère de rayon r centrée à l'origine. Ainsi, en dénotant les coordonnées du sommet S en question par (s_1, s_2, s_3) , l'équation du plan comprenant la face correspondante de P' devient

$$s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3 = r^2. \quad (1.1)$$

De manière entièrement analogue, à chaque face de P est assigné le point F découlant de l'application de la Définition 1.9 au point d'intersection entre cette face et le vecteur issu de O qui lui est perpendiculaire. En d'autres termes, si la face de P considérée est décrite par l'équation cartésienne¹³

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 = r^2, \quad (1.2)$$

13. Si le terme de droite de l'équation du plan est différent de r^2 , il suffit de multiplier chaque côté par la constante appropriée pour que cela devienne le cas.

alors les coordonnées du sommet de P' correspondant seront (f_1, f_2, f_3) .

Attardons-nous maintenant à certains cas remarquables, en commençant par l'utilisation d'une sphère inscrite (Figure 1.6a). Par définition, une telle sphère est tangente à chacune des faces du polyèdre initial¹⁴ et y est donc entièrement contenue. En conséquence, les sommets de P' se trouveront également sur la sphère, et puisque les sommets de P étaient à l'extérieur de celle-ci, le processus d'inversion géométrique assure que les faces de P' se trouveront en son intérieur. On obtient donc un polyèdre dual plus petit que le solide de départ.

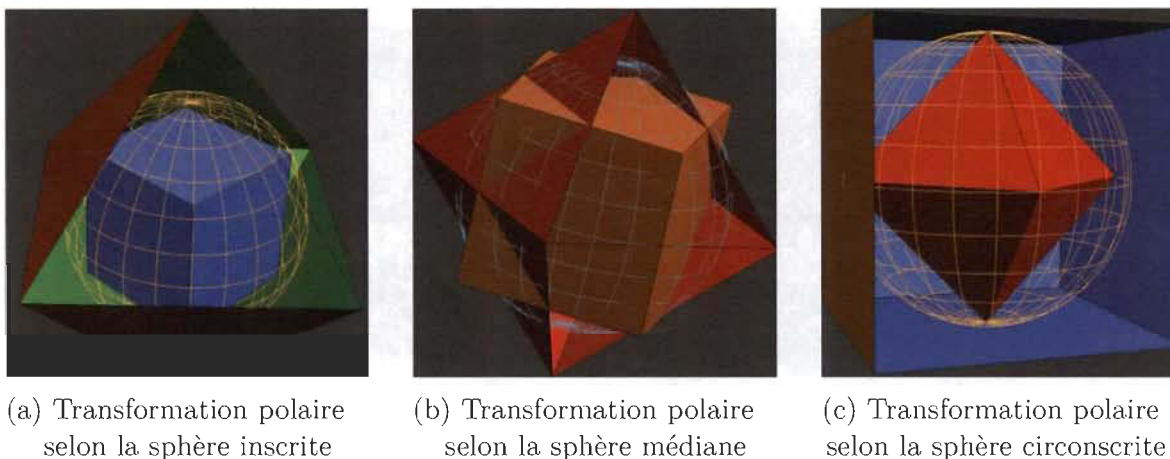


FIGURE 1.6 – Transformations polaires variées d'un octaèdre vers un cube

Inversement, choisir d'utiliser une sphère circonscrite au polyèdre de départ (voir la Figure 1.6c) donne un résultat opposé, à savoir que le dual découlant de la transformation englobera le polyèdre initial. Ceci est dû au fait que la sphère circonscrite passe par chaque sommet de P , ce qui implique nécessairement qu'elle contient ce dernier. Ainsi, les plans comprenant les faces de P' seront les plans tangents au sommets de P sur la sphère, et ses sommets se situeront à l'extérieur de celle-ci, puisque les faces de P se trouvent en son intérieur. De ces constats découle une question intéressante : quelle sphère doit-on choisir si l'on souhaite que le polyèdre et son dual soient de la même taille ? Une réponse commune à plusieurs auteurs¹⁵ consiste à utiliser la sphère médiane, lorsqu'elle existe¹⁶, plutôt que tout autre lors du processus de réciprocaton.

14. Dans le cas d'un solide platonicien, la sphère est tangente au centre de chaque face.

15. Consulter par exemple [14, 45] ou encore H.M. CUNDY : *Mathematical models*, 2nd ed. Oxford University Press, 1961. Dans ce dernier ouvrage, la sphère médiane est appelée *intersphere*.

16. C'est le cas notamment pour les polyèdres uniformes et leurs duals.

L'intérêt que revêt l'emploi d'une telle sphère s'explique par le fait qu'elle a la même relation avec le polyèdre de départ qu'avec son dual. Autrement dit, un solide et son dual ont la même sphère médiane (Figure 1.6b). Un argument intuitif justifiant cette propriété est le suivant : puisque la sphère médiane est tangente en chaque arête d'un polyèdre, alors les sommets de celui-ci se trouvent à l'extérieur de la sphère et ses faces (plus précisément, les points d'intersection entre chaque face et un vecteur issu de O leur étant perpendiculaire) se trouvent à l'intérieur. Après avoir réalisé l'inversion géométrique, la correspondance entre les faces et sommets des deux solides implique que les sommets et faces du polyèdre dual doivent également se trouver respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de cette même sphère, qui doit donc toucher à ses arêtes. Ainsi, un polyèdre et son dual seront bel et bien de dimensions comparables si on recourt à la sphère médiane comme outil de réciprocation.

Remarque 1.3. On peut constater à la Figure 1.6b que l'intersection entre le solide initial et son dual est non vide et que les arêtes de l'un sont concourantes aux arêtes correspondantes de l'autre lorsqu'on utilise la sphère médiane. Cette propriété devient un attrait particulièrement recherché lors de la création de divers composés polyédriques, et ceux-ci seront abordés plus loin à la section 4.1.

Du fait de sa mécanique sous-jacente relativement simple, on peut constater à quel point la notion de réciprocité polaire s'avère pratique en considérant tout ce qui a été dit à son sujet. Il reste pourtant une application en découlant qui mérite qu'on s'y attarde : on peut déterminer si deux solides sont le dual l'un de l'autre uniquement à partir des coordonnées de leurs sommets, et pour y parvenir, on procède comme suit¹⁷. Supposons que deux polyèdres convexes (ayant le même nombre d'arêtes et dont le nombre de sommets et de faces est interchangé) sont centrés à l'origine. À partir des coordonnées des sommets, on détermine les équations des plans supportant chaque face de chaque solide. Ensuite, on compare les coordonnées des sommets du premier polyèdre avec les coefficients des variables dans les équations cartésiennes décrivant les faces du deuxième (et inversement) dans l'optique de trouver une correspondance du type sommet \leftrightarrow face comme celle étayée aux équations (1.1) et (1.2) de la page 21. Si c'est possible, alors les polyèdres sont duals et le terme de droite commun à toutes les équations des faces doit être le carré du rayon de la sphère intervenant dans la transformation polaire entre ces solides.

17. Cette technique sera utilisée à la section 4.1.

1.3 Notions de convexité supplémentaires

Dans cette section, d'autres notions afférentes à la convexité (provenant de [1, 24, 43]) sont présentées. Celles-ci sont nécessaires afin d'énoncer certains résultats concernant les polyèdres convexes qui seront repris au chapitre 3 de ce mémoire. **Plus précisément, l'objectif terminal de cette section consiste à pouvoir assurer l'existence et l'unicité de tout polyèdre convexe uniquement à partir des coordonnées de ses sommets.** La première étape pour y arriver consiste à étudier certaines propriétés fondamentales des ensembles convexes.

Proposition 1.1. L'intersection d'une famille arbitraire d'ensembles convexes dans \mathbb{R}^n est convexe.

Démonstration.

Soit $\{W_i : i \in I\}$ une famille d'ensembles convexes de \mathbb{R}^n et $t \in [0, 1]$. Si $x, y \in \bigcap_{i \in I} W_i$, alors $x, y \in W_i, \forall i \in I$. Or, W_i est un ensemble convexe, et par la Définition 1.2, il vient que $(1-t)x + ty \in W_i, \forall i \in I$. Ainsi, $(1-t)x + ty \in \bigcap_{i \in I} W_i$ et la preuve est complète. ■

Il convient maintenant de modifier légèrement l'expression algébrique représentant le segment de droite joignant deux points x et y afin de l'arrimer à ce qui suit. Ainsi, plutôt que de le désigner par $(1-t)x + ty$ où $t \in [0, 1]$, on écrira $\lambda_1 x + \lambda_2 y$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Le lecteur se convaincra facilement de l'équivalence entre les deux notations. L'avantage de la dernière est qu'elle se généralise plus facilement à l'emploi de nombreux coefficients.

Définition 1.10. Soient $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison convexe** toute combinaison linéaire de points du type

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

lorsque $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ et telle que $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$.

Remarquons qu'en posant $m = 2$, on retrouve l'expression familière désignant le segment de droite entre x_1 et x_2 . Ensuite, il s'avère que la définition de convexité telle qu'énoncée précédemment (Définition 1.2) induit une propriété plus forte que celle initialement considérée.

Proposition 1.2. Tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.

Démonstration.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_m \in A \subset \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ une combinaison convexe de ces m points. Commençons par l'implication inverse. Celle-ci est immédiatement vérifiée, puisque la convexité de A correspond simplement au cas particulier où $m = 2$.

On suppose maintenant que A est convexe et on procède par induction sur m . Évidemment, le cas $m = 1$ est trivial, tandis que le cas $m = 2$ correspond exactement à la définition de convexité. Supposons que l'affirmation est vraie pour un certain entier positif $k > 2$ et posons

$$z = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

où les coefficients λ_i sont tous non négatifs et tels que $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Remarquons qu'au moins un λ_i doit être différent de un : prenons λ_{k+1} sans perte de généralité. Il vient que $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} \neq 0$ et alors

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ &= (1 - \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \end{aligned}$$

Maintenant, en posant

$$y = \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \right)$$

on peut voir que

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0, \forall i = 1, \dots, k \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = 1$$

et conséquemment, l'hypothèse d'induction sur k nous assure que $y \in A$. Or, $x_{k+1} \in A$ et comme A est convexe, on peut affirmer que $z = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1}x_{k+1} \in A$, puisque $(1 - \lambda_{k+1}) + \lambda_{k+1} = 1$. ■

La Proposition 1.2 signifie qu'un ensemble convexe contient toujours l'ensemble des combinaisons convexes de ses points. On introduit maintenant une notion importante qui, comme on le verra plus loin, est étroitement liée aux polyèdres convexes.

Définition 1.11. L'enveloppe convexe d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$, notée $\text{conv}(E)$, correspond à l'intersection de tous les ensembles convexes de \mathbb{R}^n contenant E . En d'autres termes,

$$\text{conv}(E) = \bigcap_{S \in I_E} S,$$

où $I_E = \{S \subseteq \mathbb{R}^n : S \text{ est convexe et } E \subseteq S\}$.

On voit immédiatement que $\forall S \in I_E, \text{conv}(E) \subseteq S$, ce qui fait de $\text{conv}(E)$ le plus *petit* ensemble convexe de \mathbb{R}^n contenant E . Il s'agit là d'un abus de langage qui est abondamment répandu dans la littérature¹⁸, probablement en raison du caractère intuitif qu'il confère à la Définition 1.11. Aussi, on peut d'emblée déduire certaines propriétés intéressantes :

- 1) $\text{conv}(E)$ est un convexe de \mathbb{R}^n par la Proposition 1.1 ;
- 2) E est convexe si et seulement si $E = \text{conv}(E)$;
- 3) $\text{conv}(\text{conv}(E)) = \text{conv}(E)$ grâce à 1) et 2) ;
- 4) Si E et F sont deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n , on a $E \subseteq F \Rightarrow \text{conv}(E) \subseteq \text{conv}(F)$.

En outre, la proposition suivante est intéressante parce qu'elle caractérise $\text{conv}(E)$ uniquement en fonction des points de E , et non pas à l'aide d'ensembles convexes arbitraires le contenant.

Proposition 1.3. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vide et A l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de E . Alors, $\text{conv}(E) = A$.

Démonstration.

De la Définition 1.11 on sait que $E \subseteq \text{conv}(E)$, alors en combinant la convexité de $\text{conv}(E)$ à la Proposition 1.2, il vient que les combinaisons convexes des éléments de E doivent également se trouver dans $\text{conv}(E)$. Ainsi, $A \subseteq \text{conv}(E)$.

18. Voir par exemple [1, 24, 43] ou encore R.T. ROCKAFELLAR : *Convex analysis*. Princeton Univ. Press, 1970.

Maintenant, remarquons que A est convexe. En effet, pour $x, y \in A$ on a

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m, \quad y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n$$

où $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in E$ avec λ_i, μ_j non négatifs $\forall i = 1, \dots, m$ et $\forall j = 1, \dots, n$ et tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 = \sum_{j=1}^n \mu_j$. En considérant maintenant $t \in [0, 1]$, il vient

$$(1-t)x + ty = (1-t)\lambda_1 x_1 + \dots + (1-t)\lambda_m x_m + t\mu_1 y_1 + \dots + t\mu_n y_n.$$

Or, on peut voir que

$$\begin{aligned} (1-t)\lambda_1 + \dots + (1-t)\lambda_m + t\mu_1 + \dots + t\mu_n &= (1-t)(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) + t(\mu_1 + \dots + \mu_n) \\ &= (1-t) + t \\ &= 1, \end{aligned}$$

ce qui signifie que l'expression $(1-t)x + ty$ s'exprime comme une combinaison convexe de $m+n$ points de l'ensemble E . Conséquemment, $(1-t)x + ty \in A$ et ce dernier est convexe tel qu'affirmé.

Finalement, puisque $E \subseteq A$ (tout point $x \in E$ s'écrit $x = 1 \cdot x$), on a que A est un ensemble convexe contenant E . Au regard de la Définition 1.11, on doit donc avoir $\text{conv}(E) \subseteq A$, ce qui établit l'égalité recherchée. ■

La grande force de la Proposition 1.3 est de pallier la principale lacune de la Définition 1.11 en nous procurant un moyen simple de déterminer $\text{conv}(E)$ pour n'importe quel $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Par exemple, il devient trivial de montrer que l'enveloppe convexe de deux points distincts est le segment de droite les joignant ; quant à elle, l'enveloppe convexe de trois points non colinéaires correspond au triangle ayant ces points comme sommets. Si on pouvait déjà s'en convaincre intuitivement à partir de la Définition 1.11, le démontrer formellement requiert désormais peu d'élaboration.

Proposition 1.4. Soit Δ_{ABC} un triangle ayant pour sommets les points A, B et C et $\text{conv}(A, B, C)$ l'enveloppe convexe de ces trois points. Alors, $\Delta_{ABC} = \text{conv}(A, B, C)$.

Démonstration.

Supposons que $P \in \text{conv}(A, B, C)$, c'est-à-dire que $P = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C$, où $\lambda_i \geq 0$ et

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Considérons le point

$$Q = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}B + \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}C.$$

Clairement, il s'agit d'une combinaison convexe des points B et C et le point Q doit donc se trouver sur le côté \overline{BC} du triangle. Or, $(\lambda_2 + \lambda_3)Q = \lambda_2B + \lambda_3C$ et alors

$$P = \lambda_1A + (\lambda_2 + \lambda_3)Q.$$

Cela signifie que P peut s'exprimer comme une combinaison convexe de A et Q , ce qui le situe quelque part sur le segment de droite \overline{AQ} . Par ce qui précède, le point P est donc à l'intérieur du triangle ABC et $\text{conv}(A, B, C) \subseteq \Delta_{ABC}$.

Maintenant, soit X un point quelconque du Δ_{ABC} . Pour montrer que $X \in \text{conv}(A, B, C)$, on considère le segment de droite issu de C (n'importe quel sommet ferait l'affaire) passant par X et dont l'autre extrémité, disons V , se trouve le long du segment \overline{AB} . Avec un choix convenable de $\lambda \in [0, 1]$, il vient que $X = (1 - \lambda)C + \lambda V$. Or, $V \in \overline{AB}$, ce qui signifie qu'il existe un scalaire $\mu \in [0, 1]$ pour lequel $V = (1 - \mu)A + \mu B$. Ainsi,

$$\begin{aligned} X &= (1 - \lambda)C + \lambda[(1 - \mu)A + \mu B] \\ &= (1 - \lambda)C + \lambda(1 - \mu)A + \lambda\mu B, \end{aligned}$$

où les coefficients $(1 - \lambda)$, $\lambda(1 - \mu)$ et $\lambda\mu$ sont non négatifs et tels que $(1 - \lambda) + \lambda(1 - \mu) + \lambda\mu = 1$. On conclut que X peut s'exprimer comme une combinaison convexe des points A , B et C , et ce faisant, on a $\Delta_{ABC} \subseteq \text{conv}(A, B, C)$. ■

De manière analogue, on pourrait démontrer que l'enveloppe convexe de quatre points non coplanaires correspond au tétraèdre ayant ces quatre points comme sommets, mais une telle preuve sera omise en raison de sa ressemblance marquée avec celle qui précède. Néanmoins, on énoncera plus loin un théorème de contenu similaire s'appliquant à tout polyèdre convexe après avoir introduit un concept clé le concernant.

Par ailleurs, il est important de souligner que puisque tout triangle est un ensemble convexe, la propriété 2 sous la Définition 1.11 implique directement que l'enveloppe convexe d'un triangle (donc de tous les points qui le composent) est ce même triangle. En revanche, la Proposition 1.4 affirme qu'il suffit de considérer l'enveloppe convexe de ses sommets pour

retrouver le triangle en entier. Ce raffinement important met en lumière le rôle particulier qu'occupent les sommets des polygones (et des polyèdres) convexes quand il s'agit de déterminer l'enveloppe convexe de ces derniers, et c'est précisément ce lien qu'on souhaite approfondir dans ce qui suit. À cet effet, la proposition précédente suggère un moyen de caractériser certains ensembles convexes à partir d'un sous-ensemble propre (fini ou infini) de leurs points, ce qui nous amène à introduire la définition suivante.

Définition 1.12. Soit $[x y]$ le segment de droite joignant les points x et y , c'est-à-dire $[x y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0, 1]\}$. Un **point extrémal** d'un ensemble convexe $E \subset \mathbb{R}^n$ est un point $z \in E$ tel que $\forall x, y \in E$,

$$z \in [x y] \implies z = x \text{ ou } z = y.$$

En d'autres termes, z est un point extrémal de E s'il ne se trouve à l'intérieur^a d'aucun segment de droite joignant deux points quelconques de E .

^a. On fait référence ici à l'intérieur au sens topologique : il s'agit donc du segment de droite, mais en excluant ses deux extrémités.

La notion de point extrémal est donc une généralisation du concept de sommet qui s'étend notamment aux ensembles convexes qui ne sont pas des polygones. On aurait d'ailleurs pu (voir [43]) définir les points extrémaux d'une autre façon équivalente à la première, à savoir qu'un point $z \in E$ est extrémal si et seulement si $E \setminus \{z\}$ est convexe.

Dans le cas des polygones et polyèdres convexes, leurs points extrémaux correspondent à leurs sommets [24], mais cette propriété leur est spécifique, comme le montre la Figure 1.7. D'autre part, il existe une infinité d'ensembles convexes ne comprenant aucun point

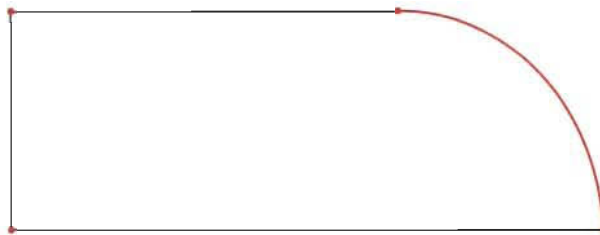


FIGURE 1.7 – Un ensemble convexe ayant une infinité de points extrémaux (en rouge)

extrémal : pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$$

qui se traduit dans le plan par une bande verticale infinie (et qui est convexe). Maintenant, le théorème qui suit établit clairement l'importance des points extrémaux par rapport à l'ensemble convexe dont ils font partie, mais leur existence nécessite qu'on impose une condition supplémentaire.

Théorème 1.4 (de Krein-Milman). Tout ensemble convexe compact de \mathbb{R}^n est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration.

Le lecteur intéressé pourra consulter [24] ou [43] pour deux approches différentes. ■

Mentionnons que puisqu'on précise se trouver dans \mathbb{R}^n , le théorème est énoncé ici dans un contexte plus spécifique que celui du résultat original. En outre, il est intéressant de noter qu'une bonne partie de la démonstration valable dans le cas général consiste à établir avec certitude l'existence de points extrémaux pour tout ensemble convexe compact. Enfin, puisque tout polygone ou polyèdre convexe conforme aux définitions 1.1 et 1.4 est compact, il s'ensuit le corollaire suivant qui est fort intéressant.

Corollaire 1.1. Tout polygone ou polyèdre convexe coïncide avec l'enveloppe convexe de ses sommets.

Démonstration.

Puisque les sommets d'un polygone convexe ou d'un polyèdre convexe correspondent à leurs points extrémaux, c'est une conséquence directe du théorème de Krein-Milman. ■

Puisque l'enveloppe convexe d'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^n$ est unique et qu'elle est entièrement déterminée par les points de E , le Corollaire 1.1 implique que tout polyèdre convexe est entièrement déterminé (de manière unique) par ses sommets. Il s'agit donc du résultat assurant l'unicité de tout polyèdre convexe dont on connaît l'emplacement des sommets. On verra qu'assurer l'existence d'un polyèdre en fonction de ses sommets nécessite un peu plus de travail, et à ce sujet, on commence par présenter le lemme suivant.

Lemme 1.1 (Lemme de séparation). Tout point A n'appartenant pas à un polyèdre convexe est séparé de celui-ci par le plan supportant l'une de ses faces. Autrement dit, l'intérieur géométrique du polyèdre est situé d'un côté du plan séparateur, tandis que le point A est situé de l'autre.

Démonstration.

La preuve est basée sur l'utilisation d'une autre définition de convexité pour les polyèdres que celle qui a été présentée. Pour cette raison, le lecteur est référé à [1] pour plus de détails. ■

Nous sommes désormais prêts à énoncer le résultat assurant l'existence des polyèdres convexes à partir de leurs sommets. La prochaine proposition et sa preuve proviennent aussi de [1].

Proposition 1.5. Dans \mathbb{R}^3 , l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points A_1, \dots, A_m non coplanaires est un polyèdre convexe dont chaque sommet correspond à l'un des points A_k . De plus, un point A_k est un sommet du polyèdre si et seulement s'il n'est pas contenu dans l'enveloppe convexe des autres points.

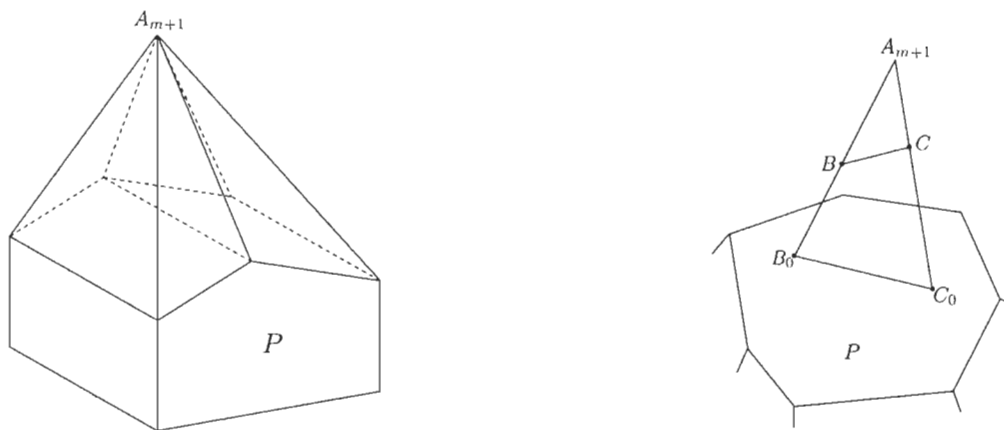
Démonstration.

On procède par induction sur m . Les cas $m = 1$ et $m = 2$ sont dégénérés tandis que le cas $m = 3$ est l'objet de la Proposition 1.4 (il ne s'agit toutefois pas d'un polyèdre). On suppose maintenant que le théorème est valide pour $m > 3$ points et que ceux-ci sont non coplanaires (et par le fait même non colinéaires) : on considère donc les points A_1, \dots, A_{m+1} .

Soit $P = \text{conv}(A_1, \dots, A_m)$. Par l'hypothèse d'induction, P doit être un polyèdre convexe dont les sommets sont certains des points A_k , pour $k = 1, \dots, m$. On cherche à montrer que $\text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1})$ est également un polyèdre convexe, et pour ce faire, il y a deux cas à considérer. Premièrement, si $A_{m+1} \in P$, alors $P = \text{conv}(A_1, \dots, A_m) = \text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1})$ et cette dernière expression est un polyèdre convexe ; de plus, on conclut que A_{m+1} ne peut être l'un de ses sommets, puisqu'autrement on aurait $A_{m+1} = A_k$ pour un certain $k \in \{1, \dots, m\}$.

On suppose maintenant que $A_{m+1} \notin P$. Dans ce cas, on relie A_{m+1} à tous les points

de P en traçant pour chacun d'eux un segment de droite les ayant comme deuxième extrémité. Ce faisant, on peut voir qu'on obtient un nouveau polyèdre : dénotons le P_1 (voir la Figure 1.8a). Notons qu'une telle construction assure que $P \subset P_1$ et que ce dernier peut être vu comme étant composé de pyramides (pas nécessairement disjointes) ayant toutes le même apex, A_{m+1} , et dont les bases sont les différentes faces de P .



(a) Construction de P_1 à l'aide de segments de droite.

(b) Le polyèdre P_1 est convexe.

FIGURE 1.8 - Illustrations du polyèdre P_1

Maintenant, comme $A_{m+1} \notin P$, on a $P = \text{conv}(A_1, \dots, A_m) \subset \text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1})$ par la propriété 4) sous la Définition 1.11. Aussi, la Proposition 1.3 assure que tous les segments de droite joignant A_{m+1} aux points de P se trouvent également dans $\text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1})$. Ainsi, on a $P_1 \subseteq \text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1})$.

D'autre part, on peut remarquer que le polyèdre P_1 est convexe. En effet, considérons deux points B et C quelconques de P_1 . Par construction, ceux-ci doivent respectivement se trouver sur les segments de droite $\overline{A_{m+1}B_0}$ et $\overline{A_{m+1}C_0}$, où B_0 et C_0 sont des points de P (Figure 1.8b). Or, P est convexe par l'hypothèse d'induction, ce qui implique que le segment $\overline{B_0C_0}$ est entièrement contenu dans P . Par construction, il en résulte que chaque point sur $\overline{B_0C_0}$ est également rejoint par un segment issu de A_{m+1} , ce qui signifie que P_1 doit contenir le $\Delta_{A_{m+1}B_0C_0}$, et dans ce cas, P_1 contient également le segment \overline{BC} puisque $\overline{BC} \subset \Delta_{A_{m+1}B_0C_0}$. Le polyèdre P_1 est donc convexe tel qu'affirmé. Ensuite, puisque $\{A_1, \dots, A_{m+1}\} \subset P_1$, il vient que P_1 est un ensemble convexe contenant les points A_1, \dots, A_{m+1} . La Définition 1.11 permet donc de déduire que $\text{conv}(A_1, \dots, A_{m+1}) \subseteq P_1$, ce qui établit l'égalité entre les deux ensembles.

Finalement, étant donné que $A_{m+1} \notin P$, le Lemme 1.1 implique qu'il existe un plan séparant A_{m+1} de P tel que tous les segments de droite issus de A_{m+1} et rejoignant les points de P y sont sécants. Conséquemment, le point A_{m+1} ne peut pas faire partie de l'intérieur géométrique de P_1 , ne peut être situé à l'intérieur de l'une de ses faces, ni à l'intérieur de l'une de ses arêtes : il doit donc s'agir de l'un de ses sommets. ■

En combinant le Corollaire 1.1 à la Proposition 1.5, on atteint finalement l'objectif terminal évoqué au début de cette section se traduisant par l'obtention du résultat suivant :

Théorème 1.5. Il existe un unique polyèdre convexe ayant pour sommets les points A_1, \dots, A_m si et seulement si les points A_i sont non coplanaires et aucun d'entre eux n'est contenu dans l'enveloppe convexe des $(m - 1)$ points restants.

Puisque ce théorème nous servira à établir le tétraèdre en dynamique tricomplexe, il est d'une importance singulière dans le cadre de ce mémoire. Malgré cela, il faut garder à l'esprit que le présent chapitre, dont l'objectif était de présenter diverses notions pertinentes de géométrie euclidienne et de convexité, renfermait d'autres points d'intérêt auxquels on fera appel ultérieurement. À titre d'exemples, mentionnons que la relation d'Euler (Théorème 1.3) sera utilisée de nouveau au chapitre 3, tandis que la réciprocité polaire et la sphère médiane interviendront au chapitre 4. Pour le moment, nous nous apprêtons à aborder certaines algèbres qui seront également au cœur de ces chapitres.

Nombres bicomplexes et tricomplexes

Ce chapitre est consacré à la présentation des nombres bicomplexes et tricomplexes, qui forment les algèbres utilisées dans les chapitres subséquents pour généraliser l'ensemble de Mandelbrot en plus de deux dimensions. En plus des opérations élémentaires et de quelques concepts importants, on présente sommairement deux sous-espaces propres aux propriétés remarquables qui jouent un rôle particulier au regard de la dynamique tricomplexe abordée au prochain chapitre. Enfin, soulignons que la section 2.3 contient de nouveaux résultats portant sur les éléments idempotents ainsi que sur l'expression algébrique explicite de l'inverse d'un nombre tricomplexe. La majorité des définitions et résultats déjà connus qui sont présentés ici proviennent des ouvrages [25, 35, 38] et des mémoires [19, 26, 33].

Tout d'abord, il est important de bien se situer par rapport à la théorie existante des algèbres hypercomplexes. Les nombres multicomplexes sont une généralisation des nombres complexes obtenus en introduisant de nouvelles unités imaginaires. Plus formellement, les nombres multicomplexes d'ordre n sont définis de manière récursive¹ comme l'ensemble

$$\mathbb{M}(n) := \{\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_n : \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{M}(n-1) \text{ et } \mathbf{i}_n^2 = -1\}$$

où $n \in \mathbb{N}$. Par convention, on pose $\mathbb{M}(0) = \mathbb{R}$, ce qui implique que $\mathbb{M}(1)$ correspond aux nombres complexes usuels : cela n'est pas sans rappeler la construction de Cayley-Dickson, permettant elle aussi de générer des algèbres hypercomplexes telles que les quaternions et les octonions à partir des nombres réels². À l'origine, les nombres multicomplexes ont

1. La définition proposée est celle que l'on retrouve dans [6] et [19].

2. En omettant les algèbres \mathbb{R} et \mathbb{C} communes aux deux méthodes, il existe à la fois des ressemblances ainsi que des disparités significatives entre les algèbres obtenues avec la construction de Cayley-Dickson et celles correspondant aux nombres multicomplexes, qui sont plutôt obtenues via un procédé de duplication. Pour plus de détails concernant le premier type, le lecteur est invité à consulter [23].

été introduits par Corrado Segre en 1892, puis repris et approfondis par G.B. Price dans [35]. Dans notre contexte plus spécifique, Garant-Pelletier les a étudiés dans le cadre de ses travaux [19, 20] et Brouillette [6, 7] a ensuite généralisé à l'espace $\mathbb{M}(n)$ de nombreux résultats précédemment établis dans un cadre plus restreint.

Toutefois, comme les nombres multicomplexes d'ordre n quelconque n'interviennent pas dans ce mémoire, on va définir les nombres bicomplexes $\mathbb{M}(2)$ et tricomplexes $\mathbb{M}(3)$ explicitement et à partir des nombres complexes en introduisant une nouvelle unité imaginaire à chaque fois, ce qui mettra l'accent sur le procédé de duplication utilisé³.

2.1 Nombres bicomplexes

De ce qui précède, on sait qu'il est possible de voir le corps des complexes comme l'espace des nombres multicomplexes d'ordre 1, soit

$$\mathbb{C} \simeq \mathbb{M}(1) = \{x + y\mathbf{i}_1 : x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{i}_1^2 = -1\}.$$

On procède de façon analogue pour obtenir les nombres multicomplexes d'ordre 2, mais en utilisant plutôt deux nombres complexes.

Définition 2.1. On définit l'ensemble des nombres bicomplexes par

$$\mathbb{M}(2) := \{w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 : z_1, z_2 \in \mathbb{M}(1) \text{ et } \mathbf{i}_2^2 = -1\}.$$

On constate que l'unité imaginaire de $\mathbb{M}(1)$ est \mathbf{i}_1 , tandis que celle de $\mathbb{M}(2)$ est \mathbf{i}_2 . Ainsi, le nombre entre parenthèses à droite du symbole \mathbb{M} correspond à l'indice de la nouvelle unité imaginaire introduite. Ensuite, étant donné l'importance relative des nombres complexes et bicomplexes vis-à-vis les nombres multicomplexes d'ordre supérieur à trois, on utilisera une notation particulière tout au long de ce travail. On dénotera les complexes $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ ou $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$, selon que cet espace est généré par \mathbf{i}_1 ou \mathbf{i}_2 ⁴, tandis qu'on utilisera la notation \mathbb{BC} pour parler des bicomplexes. Un argument similaire nous conduira à employer une notation particulière pour les nombres tricomplexes. Mentionnons aussi que les nombres complexes

3. Notons au passage que J. Cockle a introduit puis étudié en 1848 une algèbre isomorphe à celle des nombres bicomplexes appelée les *Tessarines*. Le lecteur intéressé peut consulter [10, 11, 12, 13].

4. Soulignons qu'il existe un isomorphisme évident entre les ensembles $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$. Celui-ci est démontré dans [33] et [6].

usuels peuvent être vus comme un sous-espace des nombres bicomplexes :

$$\mathbb{C}(\mathbf{i}_1) = \{w \in \mathbb{BC} : w = z_1 + 0\mathbf{i}_2\}.$$

Soit maintenant $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ un nombre bicomplexe quelconque. Afin d'obtenir une représentation de w selon ses composantes réelles, on développe chacune des composantes complexes pour lesquelles $z_1 = x_1 + x_2\mathbf{i}_1$ et $z_2 = x_3 + x_4\mathbf{i}_1$ et on voit que

$$w = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1, \text{ où } x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4.$$

L'unité \mathbf{j}_1 est définie comme étant le produit des deux unités imaginaires, soit $\mathbf{j}_1 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1$ ⁵ avec $\mathbf{j}_1^2 = 1$: on l'appelle unité hyperbolique.

Définition 2.2. Soient $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$, $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ deux nombres bicomplexes quelconques. L'égalité, l'opération d'addition et l'opération de multiplication entre deux nombres bicomplexes sont définies comme suit :

- 1) Égalité : $w_1 = w_2 \iff z_1 = z_3 \text{ et } z_2 = z_4$;
- 2) Addition : $w_1 + w_2 := (z_1 + z_3) + (z_2 + z_4)\mathbf{i}_2$;
- 3) Multiplication : $w_1 \cdot w_2 := (z_1z_3 - z_2z_4) + (z_1z_4 + z_2z_3)\mathbf{i}_2$.

Grâce aux propriétés des nombres complexes, on remarque quelques propriétés des nombres bicomplexes :

- 1) L'addition et la multiplication sont des opérations fermées, associatives et commutatives sur \mathbb{BC} ;
- 2) L'élément $0 + 0\mathbf{i}_2$ est le neutre de l'addition ;
- 3) L'élément $1 + 0\mathbf{i}_2$ est le neutre de la multiplication ;
- 4) La multiplication est distributive à gauche et à droite sur l'addition ;
- 5) L'inverse additif de $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ est l'élément $-w = -z_1 - z_2\mathbf{i}_2$.

Ces propriétés étant réunies, on déduit que $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$ forme un anneau commutatif avec unité. Cette structure algébrique renferme toutefois certains éléments non triviaux aux propriétés remarquables qui n'apparaissent ni dans \mathbb{R} , ni dans $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$.

Définition 2.3. Un élément $w \in \mathbb{BC}$ est dit **idempotent** si $w \cdot w = w$.

5. Notons que ces égalités impliquent que le produit des unités imaginaires est commutatif.

Considérons à cet effet deux nombres bicomplexes particuliers, soit

$$\gamma_1 = \frac{1 + \mathbf{j}_1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\gamma_1} = \frac{1 - \mathbf{j}_1}{2}.$$

Ces éléments sont idempotents puisque $\gamma_1^2 = \gamma_1$ et $\overline{\gamma_1}^2 = \overline{\gamma_1}$. De plus, $\gamma_1 \cdot \overline{\gamma_1} = 0$, ce qui signifie que contrairement à $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, \mathbb{BC} contient des diviseurs de zéro. Soulignons que la présence de tels éléments implique, entre autres, que la loi de simplification n'est pas valide dans le cas général.

Proposition 2.1. L'ensemble des nombres bicomplexes contient uniquement quatre éléments idempotents, soit

$$0, 1, \gamma_1 = \frac{1 + \mathbf{j}_1}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\gamma_1} = \frac{1 - \mathbf{j}_1}{2}.$$

Démonstration.

Le lecteur est référé à [26] pour une démonstration complète. ■

Maintenant, l'une des propriétés les plus importantes des éléments idempotents de \mathbb{BC} est exprimée dans le théorème ci-dessous.

Théorème 2.1. Considérons les bicomplexes $\gamma_1 = \frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$ et $\overline{\gamma_1} = \frac{1-\mathbf{j}_1}{2}$. Avec ces éléments particuliers, on peut exprimer de manière unique tout nombre bicomplexe sous sa **représentation idempotente** :

$$\forall w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}, \quad \text{on a } w = (z_1 - z_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (z_1 + z_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}.$$

Démonstration.

Voir [26]. ■

L'utilité principale d'une telle représentation réside dans le fait que sous la représentation idempotente, les opérations d'addition et de multiplication énoncées à la Définition 2.2 peuvent s'effectuer composantes à composantes, ce qui facilite grandement les calculs. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.2. $\forall p, q \in \mathbb{BC}$, on a

$$p \pm q = [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_1) \pm (q_1 - q_2 \mathbf{i}_1)] \gamma_1 + [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_1) \pm (q_1 + q_2 \mathbf{i}_1)] \overline{\gamma}_1 ;$$

$$p \cdot q = [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)(q_1 - q_2 \mathbf{i}_1)] \gamma_1 + [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)(q_1 + q_2 \mathbf{i}_1)] \overline{\gamma}_1 ;$$

$$p^n = (p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)^n \gamma_1 + (p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)^n \overline{\gamma}_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration.

La démonstration de ce théorème est disponible dans [26]. ■

2.1.1 Conjugaison d'un nombre bicomplexe

Dans [19, 20, 38], les différentes formes de conjugaison d'un nombre bicomplexe et leurs propriétés ont été étudiées en profondeur. Nous rappelons ici quelques unes de ces notions, sans toutefois entrer dans trop de détails. Pour commencer, rappelons qu'un nombre bicomplexe s'écrit habituellement sous la forme $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$, où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$. Afin d'étendre la notion de conjugué présente sur le corps des complexes à l'anneau des nombres bicomplexes, trois différents conjugués sont proposés.

Définition 2.4. Soit $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ et $\overline{z}_1, \overline{z}_2$ les conjugués complexes correspondants.

1. On définit le conjugué bicomplexe de w selon \mathbf{i}_1 de la manière suivante :

$$w^{\dagger 1} = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 1} := \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \mathbf{i}_2.$$

2. On définit le conjugué bicomplexe de w selon \mathbf{i}_2 de la manière suivante :

$$w^{\dagger 2} = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 2} := z_1 - z_2 \mathbf{i}_2.$$

3. On définit le conjugué bicomplexe de w selon \mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_2 de la manière suivante :

$$w^{\dagger 3} = (z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 3} := ((z_1 + z_2 \mathbf{i}_2)^{\dagger 2})^{\dagger 1} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2 \mathbf{i}_2.$$

Remarque 2.1. En écrivant plutôt le bicomplexe w selon ses quatre coefficients réels, on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} w^{\dagger_1} &= (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger_1} = x_1 - x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 - x_4\mathbf{j}_1 \\ w^{\dagger_2} &= (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger_2} = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 - x_3\mathbf{i}_2 - x_4\mathbf{j}_1 \\ w^{\dagger_3} &= (x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1)^{\dagger_3} = x_1 - x_2\mathbf{i}_1 - x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1. \end{aligned}$$

On énonce maintenant quelques propriétés importantes qui concernent notamment le caractère additif, involutif et multiplicatif des différentes opérations conjugaison sur \mathbb{BC} . Les démonstrations sont omises, mais sont disponibles dans [19].

Proposition 2.2. Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{BC}$. Alors pour $i = 1, 2, 3$ on a

- 1) $(w_1 \pm w_2)^{\dagger_i} = w_1^{\dagger_i} \pm w_2^{\dagger_i}$;
- 2) $(w_1^{\dagger_i})^{\dagger_i} = w_1$;
- 3) $(w_1 \cdot w_2)^{\dagger_i} = w_1^{\dagger_i} \cdot w_2^{\dagger_i}$.

Proposition 2.3. Soit $w^{\dagger_0} := w$ le conjugué identité sur l'anneau des bicomplexes et considérons $\dagger := \{\dagger_0, \dagger_1, \dagger_2, \dagger_3\}$. Si on munit cet ensemble de l'opération de composition \circ usuelle sur les fonctions, alors la paire (\dagger, \circ) forme un groupe commutatif. En outre, ce groupe est isomorphe au groupe du produit cartésien des entiers modulo 2 : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2) = (\mathbb{Z}_2^2, +_2)$, appelé groupe de Klein.

Nous nous contenterons d'une preuve visuelle, à savoir la comparaison entre les deux tables de Cayley respectives. Sans prétendre qu'une telle comparaison constitue une démonstration rigoureuse, elle permet à tout le moins de visualiser de quelle façon les éléments de ces ensembles seraient associés si on tentait d'élaborer un homomorphisme bijectif entre ces derniers.

(\dagger, \circ)	\dagger_0	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3
\dagger_0	\dagger_0	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3
\dagger_1	\dagger_1	\dagger_0	\dagger_3	\dagger_2
\dagger_2	\dagger_2	\dagger_3	\dagger_0	\dagger_1
\dagger_3	\dagger_3	\dagger_2	\dagger_1	\dagger_0

$(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)

FIGURE 2.1 – Tables de Cayley des groupes (\dagger, \circ) et $(\mathbb{Z}_2^2, +_2)$

Par ailleurs, dans le plan complexe, la conjugaison et le module sont des notions étroitement reliées puisqu'on sait que multiplier un nombre complexe par son conjugué donne le carré du module de ce nombre : $\forall z \in \mathbb{C}, z\bar{z} = |z|^2$. De surcroît, il s'avère que le module d'un nombre complexe correspond à la norme euclidienne sur cet espace. Naturellement, on souhaite adapter cette idée au cas bicomplexe en considérant trois types de modules, soit un pour chaque type de conjugaison, afin d'étudier leurs propriétés. On les définit donc comme suit pour $w \in \mathbb{BC}$:

$$\begin{aligned} |w|_{\mathbf{i}_2}^2 &:= w \cdot w^{\dagger 1}; \\ |w|_{\mathbf{i}_1}^2 &:= w \cdot w^{\dagger 2}; \\ |w|_{\mathbf{j}_1}^2 &:= w \cdot w^{\dagger 3}. \end{aligned}$$

Cependant, on s'aperçoit qu'aucun de ceux-ci ne constitue une norme, puisqu'ils prennent des valeurs dans $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$, $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et \mathbb{D} , respectivement⁶. Ils conservent néanmoins certaines propriétés intéressantes comme la multiplicativité (voir [25, 38]). On est donc amenés à définir directement la norme euclidienne sur \mathbb{BC} , indépendamment de la conjugaison.

Définition 2.5. La norme euclidienne sur \mathbb{BC} est définie comme

$$\|w\|_2 := \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 x_i^2}$$

où $w \in \mathbb{BC}$ et $|\cdot|$ désigne le module d'un nombre complexe.

Il s'agit donc d'une fonction à valeurs réelles non négatives, et comme on peut le voir, la norme $\|\cdot\|_2$ se calcule aussi bien à partir des deux composantes complexes de w qu'à partir de ses quatre composantes réelles⁷. En fait, cette norme peut être définie de manière récursive sur les espaces multicomplexes $\mathbb{M}(n)$ ⁸, et à titre d'exemple, on introduira plus loin la norme euclidienne définie sur l'espace des nombres tricomplexes et on verra que celle-ci se calcule en fonction de $\|\cdot\|_2$.

De plus, le caractère récursif de $\|\cdot\|_2$ sur l'anneau des bicomplexes implique que celle-ci

6. Le symbole \mathbb{D} désigne l'ensemble des nombres hyperboliques qui seront abordés un peu plus loin.

7. Il est également possible de calculer la norme d'un nombre bicomplexe à partir du module de ses deux composantes complexes sous la représentation idempotente (voir [6, 33]).

8. Le lecteur pourra retrouver une telle définition ainsi qu'une démonstration valide dans [6].

conserve certaines propriétés du module standard $|\cdot|$ sur \mathbb{C} ⁹. En effet, la norme de tout nombre bicomplexe est égale à celle de ses trois conjugués. Voici un exemple pour le conjugué de w selon \mathbf{i}_1 :

$$\|w^{\dagger_1}\|_2 = \sqrt{|\bar{z}_1|^2 + |\bar{z}_2|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} = \|w\|_2.$$

Il suffit d'effectuer un calcul similaire pour vérifier que c'est le cas pour les deux autres conjugués de w . Dans le contexte, il s'agit d'une propriété importante, puisque comme nous pourrons le constater au prochain chapitre, celle-ci a des répercussions sur la symétrie axiale de certaines fractales.

Il en resterait beaucoup à dire sur les nombres bicomplexes, notamment au niveau des éléments non inversibles, de leur représentation matricielle¹⁰ et des fonctions à valeurs bicomplexes. Le lecteur intéressé pourra consulter [25, 35] pour en savoir plus sur ces notions et la façon dont elles sont étendues à l'espace \mathbb{BC} . Dans notre cas, on s'attarde maintenant à un sous-espace propre important de l'anneau des bicomplexes.

2.2 Nombres hyperboliques

On sait que tout $w \in \mathbb{BC}$ peut s'exprimer selon ses quatre composantes réelles, c'est-à-dire $w = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1$. En considérant uniquement les nombres bicomplexes tels que $z_1 = x_1 + 0\mathbf{i}_1$ et $z_2 = 0 + x_4\mathbf{i}_1$, on remarque que ceux-ci peuvent s'exprimer comme $w = x_1 + x_4\mathbf{j}_1$; ils n'ont donc qu'une composante réelle et une hyperbolique. De plus, la multiplication de nombres bicomplexes ayant de telles propriétés semble être fermée. Ce n'est pas un hasard : il s'agit en fait de l'anneau des nombres hyperboliques. Le lecteur intéressé peut consulter [25, 28, 38, 42] pour une étude plus approfondie de cette structure algébrique¹¹.

Définition 2.6. L'ensemble des nombres hyperboliques est défini comme étant

$$\mathbb{D} := \{x + y\mathbf{j}_1 : x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \mathbf{j}_1^2 = 1\}.$$

9. Certaines propriétés sont toutefois perdues ou amoindries. Par exemple, la norme euclidienne n'est plus multiplicative : on a plutôt, pour $w, s \in \mathbb{BC}$, $\|ws\|_2 \leq \sqrt{2}\|w\|_2\|s\|_2$, où $\sqrt{2}$ est le plus petit coefficient vérifiant l'inégalité (voir [33] ou [6]).

10. Celle-ci sera abordée brièvement à l'annexe C.

11. Notons que dans son mémoire, Moreau [28] s'intéresse particulièrement aux nombres premiers hyperboliques et à leur représentation dans le plan.

On voit tout de suite que $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ constitue un sous-anneau des nombres bicomplexes, et en ce sens, les opérations élémentaires sur \mathbb{D} sont induites par celles sur \mathbb{BC} . On peut tout de même les définir *localement* d'une manière ressemblante à celles sur les nombres complexes. Soient $z, w \in \mathbb{D}$ tels que $z = a + b\mathbf{j}_1$ et $w = c + d\mathbf{j}_1$. Alors,

$$\begin{aligned} z = w &\iff a = c \text{ et } b = d; \\ z + w &:= (a + c) + (b + d)\mathbf{j}_1; \\ z \cdot w &:= (ac + bd) + (ad + bc)\mathbf{j}_1. \end{aligned}$$

Cela confirme que la structure $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ forme un anneau commutatif avec unité dans lequel le zéro de l'addition est $0 + 0\mathbf{j}_1$ et le neutre de la multiplication est $1 + 0\mathbf{j}_1$. On constate aussi que $\gamma_1, \overline{\gamma}_1 \in \mathbb{D}$, ce qui implique les nombres hyperboliques possèdent également des diviseurs de zéro ainsi qu'une représentation idempotente analogue à celle sur \mathbb{BC} :

$$\forall z = x + y\mathbf{j}_1, \text{ on a } z = (x + y)\gamma_1 + (x - y)\overline{\gamma}_1.$$

Ensuite, trois types de conjugués bicomplexes ont été définis à la sous-section 2.1.1. En regardant ce qui se produit quand on restreint notre intérêt au cas hyperbolique, un calcul direct pour $z = x + y\mathbf{j}_1$ donne $z^{\dagger 1} = z^{\dagger 2} = x - y\mathbf{j}_1$ ¹², tandis que $z^{\dagger 3} = z$: ceci est dû au fait que le troisième type de conjugaison correspond à la composition des deux autres types. Conséquemment, la conjugaison sur \mathbb{BC} induit un seul type de conjugué hyperbolique au sens usuel du terme : $\bar{z} = x - y\mathbf{j}_1$. Celui-ci admet la représentation idempotente suivante :

$$\bar{z} = (x - y)\gamma_1 + (x + y)\overline{\gamma}_1.$$

D'autre part, si on définit le module hyperbolique par $|z|_{\mathbb{D}}^2 := z\bar{z} = x^2 - y^2$, on peut voir que celui-ci prend uniquement des valeurs réelles, mais pas nécessairement non négatives, ce qui fait qu'il ne peut s'agir d'une norme. On préconise alors l'emploi de la norme euclidienne induite par celle sur \mathbb{BC} , parfois appelée le module réel d'un nombre hyperbolique [33, 38] :

$$\|z\|_2 = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Néanmoins, il ne faut pas exclure le module hyperbolique de nos considérations, puisqu'il nous procure un moyen simple de déterminer l'inverse multiplicatif d'un nombre hyperbolique lorsque celui-ci existe. En effet, $|z|_{\mathbb{D}}^2 \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui veut dire

12. On aurait pu déduire directement ce résultat en utilisant la Remarque 2.1.

que

$$1 = \frac{z\bar{z}}{|z|_{\mathbb{D}}^2} \iff z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{D}}^2} \quad (2.1)$$

pourvu que $|z|_{\mathbb{D}}^2 \neq 0$. En dénotant l'ensemble des nombres hyperboliques inversibles par \mathbb{D}^{-1} , on en conclut que

$$\begin{aligned} z = x + y\mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}^{-1} &\iff |z|_{\mathbb{D}}^2 \neq 0 \\ &\iff x^2 - y^2 \neq 0 \\ &\iff (x + y)(x - y) \neq 0. \end{aligned}$$

Remarquons qu'à la dernière ligne, on retrouve les deux composantes intervenant dans la représentation idempotente d'un nombre hyperbolique. On en déduit que $z \in \mathbb{D}$ possède un inverse si et seulement si les deux composantes de sa représentation idempotente sont non nulles. En outre, on peut caractériser l'ensemble des nombres hyperboliques inversibles comme suit :

$$\mathbb{D}^{-1} = \{x + y\mathbf{j}_1 : x \neq \pm y\}.$$

Finalement, l'expression de z^{-1} trouvée en (2.1) implique que lorsqu'il existe,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|_{\mathbb{D}}^2} = \frac{(x - y)\gamma_1 + (x + y)\bar{\gamma}_1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{x + y}\gamma_1 + \frac{1}{x - y}\bar{\gamma}_1.$$

Conformément aux propriétés de la représentation idempotente, un calcul trivial donne bien $zz^{-1} = 1$.

Pour terminer la présente section sur les nombres hyperboliques, soulignons que les différents aspects étudiés dans ce qui précède sont essentiellement un cas particulier de ce qui se produit dans l'anneau des nombres bicomplexes. Néanmoins, force est d'admettre qu'il découle de la restriction de $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$ au sous-anneau $(\mathbb{D}, +, \cdot)$ de remarquables simplifications en ce qui concerne ses principales propriétés. D'ailleurs, on verra au prochain chapitre que la dynamique du polynôme à la base de la fractale étudiée dans ce mémoire est elle aussi grandement simplifiée lorsqu'on considère uniquement une variable hyperbolique. Pour l'instant, on s'appête à accéder à la huitième dimension grâce à l'introduction des nombres tricomplexes.

2.3 Nombres tricomplexes

Après avoir étudié les nombres bicomplexes, on peut maintenant aborder l'algèbre des nombres multicomplexes d'ordre $n = 3$ en introduisant une troisième unité imaginaire dénotée \mathbf{i}_3 . Ce faisant, on obtient les nombres tricomplexes, qui correspondent à une duplication des nombres bicomplexes. On verra que par la nature de sa construction, l'espace des nombres tricomplexes est similaire à \mathbb{BC} , et ce, à plusieurs égards.

Définition 2.7. On définit l'ensemble des nombres tricomplexes par

$$\mathbb{TC} = \mathbb{M}(3) := \{\zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 : w_1, w_2 \in \mathbb{BC}, \mathbf{i}_3^2 = -1\}.$$

Comme pour les bicomplexes, on peut développer chaque composante bicomplexe d'un nombre tricomplexe et ainsi de suite pour obtenir différentes représentations :

$$\begin{aligned} \zeta \in \mathbb{TC} &\implies \zeta = w_1 + w_2\mathbf{i}_3 \\ &= z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \\ &= x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4 \end{aligned}$$

où $z_1, \dots, z_4 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et $x_1, \dots, x_8 \in \mathbb{R}$. Dans ce qui précède, $\mathbf{j}_3 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1$ et $\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$, donc les différentes unités imaginaires commutent entre elles. De plus, $\mathbf{j}_2^2 = 1 = \mathbf{j}_3^2$ avec $\mathbf{i}_4^2 = -1$: on considère donc \mathbf{j}_2 et \mathbf{j}_3 comme deux autres unités hyperboliques et \mathbf{i}_4 comme une quatrième unité imaginaire. L'ensemble des relations entre ces unités est synthétisé à la Figure 2.2. Le lecteur attentif aura peut-être remarqué, grâce

\cdot	1	\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_2	\mathbf{i}_3	\mathbf{i}_4	\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_3
1	1	\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_2	\mathbf{i}_3	\mathbf{i}_4	\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_3
\mathbf{i}_1	\mathbf{i}_1	-1	\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_2	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_3$	\mathbf{i}_4
\mathbf{i}_2	\mathbf{i}_2	\mathbf{j}_1	-1	\mathbf{j}_3	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{i}_1$	\mathbf{i}_4	$-\mathbf{i}_3$
\mathbf{i}_3	\mathbf{i}_3	\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_3	-1	$-\mathbf{j}_1$	\mathbf{i}_4	$-\mathbf{i}_1$	$-\mathbf{i}_2$
\mathbf{i}_4	\mathbf{i}_4	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	-1	\mathbf{i}_3	\mathbf{i}_2	\mathbf{i}_1
\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_1	$-\mathbf{i}_2$	$-\mathbf{i}_1$	\mathbf{i}_4	\mathbf{i}_3	1	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$
\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_2	$-\mathbf{i}_3$	\mathbf{i}_4	$-\mathbf{i}_1$	\mathbf{i}_2	$-\mathbf{j}_3$	1	$-\mathbf{j}_1$
\mathbf{j}_3	\mathbf{j}_3	\mathbf{i}_4	$-\mathbf{i}_3$	$-\mathbf{i}_2$	\mathbf{i}_1	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	1

FIGURE 2.2 – Produits des unités imaginaires tricomplexes

aux neuf éléments se trouvant à l'intersection des trois dernières lignes et colonnes, que

la multiplication entre les différentes unités hyperboliques est fermée et commutative. On élaborera sur ce sujet à la prochaine section. Pour l'instant, on définit les opérations élémentaires sur \mathbb{TC} de manière semblable à celles sur \mathbb{BC} .

Définition 2.8. Soient $\zeta_1 = w_1 + w_2\mathbf{i}_3$, $\zeta_2 = w_3 + w_4\mathbf{i}_3$ deux nombres tricomplexes quelconques. L'égalité et les opérations d'addition et de multiplication sont définies comme suit (respectivement) :

$$\begin{aligned}\zeta_1 = \zeta_2 &\iff w_1 = w_3 \text{ et } w_2 = w_4; \\ \zeta_1 + \zeta_2 &:= (w_1 + w_3) + (w_2 + w_4)\mathbf{i}_3; \\ \zeta_1 \cdot \zeta_2 &:= (w_1w_3 - w_2w_4) + (w_1w_4 + w_2w_3)\mathbf{i}_3.\end{aligned}$$

Notons que ces opérations peuvent s'effectuer en fonction des deux composantes bicomplexes, des quatre composantes complexes ou encore des huit composantes réelles de ζ_1 et ζ_2 . De plus, d'après les propriétés des nombres bicomplexes, on voit que $(\mathbb{TC}, +, \cdot)$ forme un anneau commutatif avec unité dans lequel le zéro de l'addition est le tricomplexe $0 + 0\mathbf{i}_3$ et le neutre de la multiplication est $1 + 0\mathbf{i}_3$. On remarque également qu'on peut voir $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$ comme un sous-anneau de $(\mathbb{TC}, +, \cdot)$, puisqu'on peut écrire

$$\mathbb{BC} = \{\zeta \in \mathbb{TC} : \zeta = \zeta_1 + 0\mathbf{i}_3\}.$$

On constate aussi la présence de plusieurs sous-espaces bidimensionnels similaires, notamment

$$\mathbb{C}(\mathbf{i}_k) = \{x + y\mathbf{i}_k : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}(\mathbf{j}_k) = \{x + y\mathbf{j}_k : x, y \in \mathbb{R}\}$$

où $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ et $\mathbf{j}_k \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$. Les premiers sont isomorphes entre eux ainsi qu'au plan complexe usuel, tandis que les seconds sont tous isomorphes à l'anneau des nombres hyperboliques¹³.

2.3.1 Représentations idempotentes

L'anneau des nombres tricomplexes pouvant être vu comme une duplication de l'anneau des nombres bicomplexes, on s'attend naturellement à ce qu'il contienne quelques occurrences

13. Une démonstration de ces isomorphismes est disponible dans [33].

supplémentaires d'éléments idempotents non triviaux. Considérons à cet égard les nombres

$$\gamma_3 = \frac{1 + \mathbf{j}_3}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\gamma}_3 = \frac{1 - \mathbf{j}_3}{2}.$$

Tout comme γ_1 et $\overline{\gamma}_1$, on a que $\gamma_3^2 = \gamma_3$ et $\overline{\gamma}_3^2 = \overline{\gamma}_3$. De plus, $\gamma_3 + \overline{\gamma}_3 = 1$, $\gamma_3 - \overline{\gamma}_3 = \mathbf{j}_3$ et $\gamma_3 \cdot \overline{\gamma}_3 = 0$. On déduit de ces dernières égalités que l'anneau des nombres tricomplexes contient de nouveaux éléments idempotents, mais aussi de nouveaux diviseurs de zéro. Puis, étant donné que $\gamma_1, \overline{\gamma}_1 \in \mathbb{BC} \subset \mathbb{TC}$, la commutativité des nombres tricomplexes implique que tout produit de $\gamma_1, \overline{\gamma}_1, \gamma_3, \overline{\gamma}_3$ ne faisant pas intervenir à la fois un élément et son conjugué (au sens hyperbolique) satisfera également la propriété d'idempotence :

$$(\gamma_1 \gamma_3)^2 = \gamma_1 \gamma_3, \quad (\gamma_1 \overline{\gamma}_3)^2 = \gamma_1 \overline{\gamma}_3, \quad (\overline{\gamma}_1 \gamma_3)^2 = \overline{\gamma}_1 \gamma_3, \quad (\overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_3)^2 = \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_3. \quad (2.2)$$

De plus, le produit de deux de ces éléments quelconques mais distincts donne 0 et un calcul direct montre que $\gamma_1 \gamma_3 + \overline{\gamma}_1 \gamma_3 + \gamma_1 \overline{\gamma}_3 + \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_3 = 1$. Ensuite, on peut utiliser γ_3 et $\overline{\gamma}_3$ pour exprimer tout nombre tricomplexe sous une représentation idempotente.

Théorème 2.3. Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ avec $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{BC}$. À l'aide des nombres tricomplexes $\gamma_3 = \frac{1 + \mathbf{j}_3}{2}$ et $\overline{\gamma}_3 = \frac{1 - \mathbf{j}_3}{2}$, on peut exprimer tout nombre tricomplexe sous sa **représentation idempotente** à deux composantes bicomplexes :

$$\eta = (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2) \overline{\gamma}_3.$$

Démonstration.

Une preuve est disponible dans [33]. ■

Cette représentation possède elle aussi quelques propriétés remarquables, comme permettre d'effectuer les calculs d'addition et de multiplication termes à termes.

Théorème 2.4. $\forall p, q \in \mathbb{TC}$ on a

$$p \pm q = [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_2) \pm (q_1 - q_2 \mathbf{i}_2)] \gamma_3 + [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_2) \pm (q_1 + q_2 \mathbf{i}_2)] \overline{\gamma}_3;$$

$$p \cdot q = [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_2)(q_1 - q_2 \mathbf{i}_2)] \gamma_3 + [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_2)(q_1 + q_2 \mathbf{i}_2)] \overline{\gamma}_3;$$

$$p^n = (p_1 - p_2 \mathbf{i}_2)^n \gamma_3 + (p_1 + p_2 \mathbf{i}_2)^n \overline{\gamma}_3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si le Théorème 2.3 et le Théorème 2.4 s'avèrent particulièrement utiles, le lecteur aura

peut-être remarqué que chaque composante de cette représentation idempotente est en fait un nombre bicomplexe, qui peut lui aussi s'exprimer sous sa représentation idempotente en vertu du Théorème 2.1. En combinant ces deux résultats, nous obtenons une nouvelle représentation idempotente à quatre composantes complexes pour un nombre tricomplexe quelconque employant les quatre éléments présentés en (2.2).

Théorème 2.5. Soit $\zeta \in \mathbb{TC}$ un nombre tricomplexe exprimé selon ses quatre composantes complexes, c'est-à-dire $\zeta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$. On a

$$\begin{aligned} \zeta = & [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\gamma_3 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ & + [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\overline{\gamma_3} + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Démonstration.

Si $w_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ et $w_2 = z_3 + z_4\mathbf{i}_2$ avec $w_1, w_2 \in \mathbb{BC}$, alors $\zeta = (z_1 + z_2\mathbf{i}_2) + (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3$. En considérant les deux composantes de la représentation idempotente de ζ , on voit que

$$w_1 - w_2\mathbf{i}_2 = (z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_2$$

et

$$w_1 + w_2\mathbf{i}_2 = (z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_2.$$

Utilisons la représentation idempotente des bicomplexes pour les deux dernières égalités. On obtient

$$w_1 - w_2\mathbf{i}_2 = ((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}$$

ainsi que

$$w_1 + w_2\mathbf{i}_2 = ((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}.$$

En remplaçant finalement les deux composantes de la représentation idempotente initiale de ζ par les dernières égalités, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta = & [((z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}]\gamma_3 \\ & + [((z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + ((z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}]\overline{\gamma_3} \\ = & [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\gamma_3 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ & + [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\overline{\gamma_3} + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

et nous avons l'identité recherchée. ■

Proposition 2.4. Soit $\zeta, \eta \in \mathbb{TC}$. Si on utilise le Théorème 2.5 et qu'on écrit $\zeta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ et $\eta = b_1\gamma_1\gamma_3 + b_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + b_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$, avec $a_i, b_i \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, alors

$$\begin{aligned}\zeta \pm \eta &= (a_1 \pm b_1)\gamma_1\gamma_3 + (a_2 \pm b_2)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (a_3 \pm b_3)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (a_4 \pm b_4)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}; \\ \zeta \cdot \eta &= (a_1 \cdot b_1)\gamma_1\gamma_3 + (a_2 \cdot b_2)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (a_3 \cdot b_3)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (a_4 \cdot b_4)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.\end{aligned}$$

Démonstration.

Pour montrer que l'addition et la soustraction s'effectuent termes à termes, il suffit de grouper les différents termes en fonction de l'élément idempotent leur étant affecté. Ensuite, on remarque qu'en multipliant ensemble deux nombres tricomplexes sous cette représentation et en distribuant à droite, de nombreux termes s'annulent en vertu du fait que les différents éléments idempotents concernés sont des diviseurs de zéro :

$$\begin{aligned}\zeta \cdot \eta &= (a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}) \cdot (b_1\gamma_1\gamma_3 + b_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + b_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}) \\ &= [(a_1 \cdot b_1)(\gamma_1\gamma_3)^2 + 0 + 0 + 0 \\ &\quad + 0 + (a_2 \cdot b_2)(\overline{\gamma_1}\gamma_3)^2 + 0 + 0 \\ &\quad + 0 + 0 + (a_3 \cdot b_3)(\gamma_1\overline{\gamma_3})^2 + 0 \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + (a_4 \cdot b_4)(\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3})^2] \\ &= (a_1 \cdot b_1)\gamma_1\gamma_3 + (a_2 \cdot b_2)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (a_3 \cdot b_3)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (a_4 \cdot b_4)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\end{aligned}$$

ce qui correspond à la formule recherchée. ■

Le dernier résultat signifie que la représentation idempotente à quatre composantes complexes d'un nombre tricomplexe permet également d'effectuer les opérations d'addition et de multiplication définies plus haut composantes à composantes. On se servira de ces propriétés à de nombreuses reprises tout au long de ce mémoire. Considérons maintenant les nombres tricomplexes

$$\gamma_2 = \frac{1 + \mathbf{j}_2}{2} \quad \text{et} \quad \overline{\gamma_2} = \frac{1 - \mathbf{j}_2}{2}.$$

Une vérification rapide permet de constater qu'il s'agit d'autres éléments idempotents de \mathbb{TC} . On pourrait penser qu'en appliquant le même raisonnement que précédemment, tout

produit du type $\gamma_2\gamma_i, \overline{\gamma_2}\gamma_i, \gamma_2\overline{\gamma_i}$ et $\overline{\gamma_2}\overline{\gamma_i}$ où $i \in \{1, 3\}$ est également idempotent. Malgré le fait que ceci soit assuré par la commutativité de la multiplication, il s'avère que ces éléments ne sont pas distincts des précédents. En effet, quelques calculs amènent aux identités suivantes :

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_3 &= \gamma_1\overline{\gamma_2} = \overline{\gamma_2}\gamma_3 \\ \overline{\gamma_1}\gamma_3 &= \overline{\gamma_1}\gamma_2 = \gamma_2\gamma_3 \\ \gamma_1\overline{\gamma_3} &= \gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\overline{\gamma_3} \\ \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} &= \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_2} = \overline{\gamma_2}\overline{\gamma_3}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Ensuite, en utilisant les relations ci-haut et en effectuant les calculs appropriés, on pourrait confirmer que tout produit du type $\gamma_i\gamma_j\gamma_k$ avec $\gamma_i \in \{\gamma_1, \overline{\gamma_1}\}$, $\gamma_j \in \{\gamma_2, \overline{\gamma_2}\}$ et $\gamma_k \in \{\gamma_3, \overline{\gamma_3}\}$ est un idempotent égal à $\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}$ ou $\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ ou est égal à zéro. Le problème avec une telle démarche, c'est qu'elle convient plus à un cadre exploratoire, et conséquemment, il est impossible de s'assurer que la liste des éléments idempotents ainsi trouvés soit exhaustive. On préconise donc une autre approche, soit celle d'explicitement rigoureusement les éléments idempotents présents dans \mathbb{TC} .

Théorème 2.6. L'anneau des nombres tricomplexes contient exactement **seize éléments** idempotents distincts qui sont les suivants :

$$0, 1, \gamma_k = \frac{1 + \mathbf{j}_k}{2}, \overline{\gamma_k} = \frac{1 - \mathbf{j}_k}{2}, \quad \text{où } k = 1, 2, 3,$$

les quatre produits

$$\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3} \text{ et } \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3},$$

ainsi que les quatre combinaisons linéaires

$$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \frac{1}{2}(\gamma_1 + \overline{\gamma_2} + \overline{\gamma_3}), \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \gamma_2 + \overline{\gamma_3}) \text{ et } \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2} + \gamma_3).$$

Démonstration.

La preuve consiste essentiellement à adapter celle élaborée pour le cas bicomplexe. Pour comparaison, cette dernière peut être retrouvée dans [26, 35]. On débute en posant $\eta = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$. Comme on sait que η est idempotent ssi $\eta^2 = \eta$, il faut trouver toutes les solutions à l'équation

$$(\eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3)^2 = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3 \Leftrightarrow (\eta_1^2 - \eta_2^2) + 2\eta_1\eta_2\mathbf{i}_3 = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta_1^2 - \eta_2^2 = \eta_1 & (1) \\ 2\eta_1\eta_2 = \eta_2. & (2) \end{cases}$$

En observant (2), on peut distinguer trois cas à considérer : si $\eta_2 = 0$, si $\eta_2 \neq 0$ est un élément inversible de \mathbb{BC} ou si $\eta_2 \neq 0$ n'est pas inversible. Dans le premier cas, l'égalité $\eta_2 = 0$ ramène l'équation (2) à la forme triviale $0 = 0$ tandis que (1) devient $\eta_1^2 = \eta_1$. Cela signifie que η_1 doit être un nombre bicomplexe idempotent. Par la Proposition 2.1, il y a donc quatre possibilités pour η_1 : $0, 1, \gamma_1 = \frac{1+\mathbf{j}_1}{2}$ et $\overline{\gamma_1} = \frac{1-\mathbf{j}_1}{2}$. Puisque $\eta = \eta_1 + 0\mathbf{i}_3$ par hypothèse, les quatre éléments précédents correspondent en fait aux quatre premières solutions recherchées.

En second lieu, si $\eta_2 \neq 0$ est un élément inversible de \mathbb{BC} , on peut multiplier chaque côté de (2) par η_2^{-1} pour obtenir $2\eta_1 = 1$, ce qui implique que $\eta_1 = \frac{1}{2}$. En substituant cette valeur dans (1), on arrive à l'équation

$$\eta_2^2 = (z_3 + z_4\mathbf{i}_2)^2 = z_3^2 - z_4^2 + 2z_3z_4\mathbf{i}_2 = -\frac{1}{4}$$

qui se traduit en fait par un sous-système déterminé par les équations

$$z_3^2 - z_4^2 = -\frac{1}{4} \quad (3)$$

et

$$2z_3z_4 = 0. \quad (4)$$

Comme z_3, z_4 ne peuvent être tous deux égaux à zéro (cela impliquerait que $\eta_2 = 0$), il ne reste que deux solutions à (4) : $z_3 = 0$ ou $z_4 = 0$.

1. Si $z_3 = 0$, l'équation (3) devient $z_4^2 = \frac{1}{4}$, ou encore $z_4 = \pm\frac{1}{2}$, ce qui signifie que $\eta_2 = \pm\frac{\mathbf{i}_2}{2}$.
2. Si $z_4 = 0$, alors (3) devient $z_3^2 = -\frac{1}{4}$. On en déduit que $z_3 = \pm\frac{\mathbf{i}_1}{2}$, et dans ce cas, $\eta_2 = \pm\frac{\mathbf{i}_1}{2}$.

Conséquemment, on obtient pour $\eta = \frac{1}{2} + \eta_2\mathbf{i}_3$ quatre nouvelles solutions : $\gamma_3 = \frac{1+\mathbf{j}_3}{2}, \overline{\gamma_3} = \frac{1-\mathbf{j}_3}{2}, \gamma_2 = \frac{1+\mathbf{j}_2}{2}$ et $\overline{\gamma_2} = \frac{1-\mathbf{j}_2}{2}$.

Supposons maintenant que $\eta_2 \neq 0$ n'ait pas d'inverse multiplicatif. Puisque l'ensemble des éléments non nuls et non inversibles sur \mathbb{BC} correspond exactement à l'ensemble des

diviseurs de zéro sur ce même espace¹⁴, cela revient à supposer que η_2 est un diviseur de zéro. Dans ce cas, de deux choses l'une : $\exists z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \{0\}$ tel que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)$, ou tel que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)$ ¹⁵.

Commençons par supposer que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) = z\mathbf{i}_1 + z\mathbf{i}_2$. On constate que les deux composantes complexes de η_2 sont $z_3 = z\mathbf{i}_1$ et $z_4 = z$, ce qui implique que sous sa représentation idempotente, le bicomplexe η_2 s'écrit

$$\begin{aligned}\eta_2 &= (z_3 - z_4\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (z_3 + z_4\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1 \\ &= (z\mathbf{i}_1 - z\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (z\mathbf{i}_1 + z\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1 \\ &= 2z\mathbf{i}_1\bar{\gamma}_1.\end{aligned}$$

En substituant η_2 par cette nouvelle expression dans (2), on obtient $2\eta_1(2z\mathbf{i}_1\bar{\gamma}_1) = 2z\mathbf{i}_1\bar{\gamma}_1$. Comme $z\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \{0\}$, on peut multiplier chaque côté par $-\frac{\mathbf{i}_1 z^{-1}}{2}$ pour obtenir

$$2\eta_1\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_1.$$

On cherche alors toutes les valeurs de $\eta_1 = z_1 + z_2\mathbf{i}_2$ qui satisfont cette équation. On a

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_1 &= \frac{1}{2} - \left(\frac{\mathbf{i}_1}{2}\right)\mathbf{i}_2 = 2\eta_1\bar{\gamma}_1 \\ &= 2(z_1 + z_2\mathbf{i}_2)\frac{1 - \mathbf{j}_1}{2} \\ &= z_1 + z_2\mathbf{i}_1 + (-z_1\mathbf{i}_1 + z_2)\mathbf{i}_2\end{aligned}$$

ce qui signifie que les équations $z_1 + z_2\mathbf{i}_1 = \frac{1}{2}$ et $-z_1\mathbf{i}_1 + z_2 = -\frac{\mathbf{i}_1}{2}$ doivent être satisfaites simultanément. Or, en isolant z_2 dans l'une ou l'autre de celles-ci, on trouve $z_2 = (z_1 - \frac{1}{2})\mathbf{i}_1$. On en déduit que

$$\begin{aligned}2\eta_1\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_1 &\iff \eta_1 = z_1 + \left(\left(z_1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{i}_1\right)\mathbf{i}_2 \\ &= z_1 + \left(z_1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j}_1.\end{aligned}$$

14. Il est bon de mentionner que de manière générale, l'ensemble des éléments non inversibles et l'ensemble des diviseurs de zéro sur un anneau donné sont distincts [25].

15. Voir [38].

Maintenant, comme

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= z_1 + \left(z_1 - \frac{1}{2}\right) \mathbf{j}_1 & \eta_1^2 &= \left(2z_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1\right)^2 \\
 &= z_1 + z_1\mathbf{j}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 & &= 4z_1^2\gamma_1 - 2z_1\left(\frac{1+\mathbf{j}_1}{2}\right)\mathbf{j}_1 + \frac{1}{4} \\
 &= z_1(1 + \mathbf{j}_1) - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 & \implies &= 4z_1^2\gamma_1 - 2z_1\gamma_1 + \frac{1}{4} \\
 &= 2z_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 & &= (4z_1^2 - 2z_1)\gamma_1 + \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

l'équation initiale (1) : $\eta_1^2 - \eta_2^2 = \eta_1$ devient

$$(4z_1^2 - 2z_1)\gamma_1 + \frac{1}{4} + 4z^2\overline{\gamma}_1 = 2z_1\gamma_1 - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1.$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{4}\mathbf{j}_1$, en regroupant ensuite les termes en γ_1 à gauche puis en envoyant le terme $4z^2\overline{\gamma}_1$ à droite, on obtient

$$\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right)\gamma_1 + \frac{1}{4}\mathbf{j}_1 = -4z^2\overline{\gamma}_1.$$

En développant les éléments idempotents γ_1 et $\overline{\gamma}_1$ et en mettant le tout sur le dénominateur commun 4, on arrive à

$$\frac{2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right) + 2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_1}{4} = \frac{-8z^2 + 8z^2\mathbf{j}_1}{4}$$

ce qui nous conduit au système de deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right) &= -8z^2 \\ 2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right) + 1 &= 8z^2, \end{cases}$$

et après quelques manipulations, ce système devient

$$\begin{cases} (2z_1 - 1)^2 &= \frac{1-8z^2}{2} \\ (2z_1 - 1)^2 &= 4z^2. \end{cases} \quad (5)$$

En posant $\frac{1-8z^2}{2} = 4z^2$, on vérifie aisément que l'égalité requise est atteinte uniquement si $z = \pm\frac{1}{4}$. Ainsi, pour $z = \frac{1}{4}$ on trouve $(2z_1 - 1)^2 = \frac{1}{4}$, ce qui implique que $z_1 = \frac{1}{4}$ ou $z_1 = \frac{3}{4}$. Il en est de même lorsque $z = -\frac{1}{4}$. Ensuite, comme $z_2 = (z_1 - \frac{1}{2})\mathbf{i}_1$, on obtient $z_2 = -\frac{\mathbf{i}_1}{4}$

si $z_1 = \frac{1}{4}$ et $z_2 = \frac{i_1}{4}$ si $z_1 = \frac{3}{4}$. Par conséquent, en se rappelant que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)$ par hypothèse, cela nous amène à quatre nouvelles solutions :

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{4} - \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)\right) \mathbf{i}_3 = \frac{1 - \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4} = \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\ \eta &= \frac{3}{4} + \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)\right) \mathbf{i}_3 = \frac{3 + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \\ \eta &= \frac{1}{4} - \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right) \mathbf{i}_2 - \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)\right) \mathbf{i}_3 = \frac{1 - \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4} = \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3} \\ \eta &= \frac{3}{4} + \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right) \mathbf{i}_2 - \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)\right) \mathbf{i}_3 = \frac{3 + \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \overline{\gamma_2} + \overline{\gamma_3}).\end{aligned}$$

On suppose maintenant que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)$. Dans ce cas, le bicomplexe η_2 s'écrit $\eta_2 = 2z\mathbf{i}_1\gamma_1$ sous sa représentation idempotente. En remplaçant η_2 par cette dernière dans (2) et en multipliant de chaque côté par $-\frac{\mathbf{i}_1 z^{-1}}{2}$, on trouve l'équation

$$2\eta_1\gamma_1 = \gamma_1.$$

Celle-ci se résout de façon tout à fait similaire au cas qui précède ($2\eta_1\overline{\gamma_1} = \overline{\gamma_1}$). Ce faisant, on arrive aux équations $z_1 - z_2\mathbf{i}_1 = \frac{1}{2}$ et $z_1\mathbf{i}_1 + z_2 = \frac{i_1}{2}$, desquelles on tire $z_2 = (-z_1 + \frac{1}{2})\mathbf{i}_1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}2\eta_1\gamma_1 = \gamma_1 &\iff \eta_1 = z_1 + \left(\left(-z_1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{i}_1\right) \mathbf{i}_2 \\ &= z_1 + \left(-z_1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{j}_1.\end{aligned}$$

En effectuant maintenant des manipulations semblables au cas précédent, on constate que

$$\eta_1 = z_1 + \left(-z_1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{j}_1 = 2z_1\overline{\gamma_1} + \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 \implies \eta_1^2 = (4z_1^2 - 2z_1)\overline{\gamma_1} + \frac{1}{4}$$

ce qui signifie que l'équation (1) : $\eta_1^2 - \eta_2^2 = \eta_1$ devient

$$(4z_1^2 - 2z_1)\overline{\gamma_1} + \frac{1}{4} + 4z_1^2\gamma_1 = 2z_1\overline{\gamma_1} + \frac{1}{2}\mathbf{j}_1.$$

Ensuite, comme $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mathbf{j}_1 = \frac{1}{2}\overline{\gamma_1} - \frac{1}{4}\mathbf{j}_1$, on peut réorganiser les termes comme précédemment et les mettre sur le dénominateur commun 4 pour obtenir

$$\frac{2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right) - 2\left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2}\right)\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_1}{4} = \frac{-8z_1^2 - 8z_1^2\mathbf{j}_1}{4}.$$

Il découle de cette dernière équation le système

$$\begin{cases} 2 \left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2} \right) & = -8z^2 \\ -2 \left(4z_1^2 - 4z_1 + \frac{1}{2} \right) - 1 & = -8z^2 \end{cases}$$

qui peut être simplifié en

$$\begin{cases} (2z_1 - 1)^2 & = \frac{1-8z^2}{2} \\ (2z_1 - 1)^2 & = 4z^2. \end{cases}$$

On constate qu'il s'agit des mêmes équations que celles en (5). Il admet donc les mêmes solutions, soit $z = \pm \frac{1}{4}$, auxquelles correspondent à chacune les valeurs $z_1 = \frac{1}{4}$ et $z_1 = \frac{3}{4}$. Puisque $z_2 = (-z_1 + \frac{1}{2})\mathbf{i}_1$, celles-ci permettent à leur tour de déterminer que $z_2 = \frac{\mathbf{i}_1}{4}$ et $z_2 = -\frac{\mathbf{i}_1}{4}$, respectivement. Par la suite, en se remémorant que $\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)$, cela nous amène aux quatre autres solutions :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{4} + \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right)\mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)\right)\mathbf{i}_3 = \frac{1 + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4} = \gamma_1 \overline{\gamma_3} \\ \eta &= \frac{3}{4} - \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right)\mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)\right)\mathbf{i}_3 = \frac{3 - \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_3}{4} = \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \gamma_2 + \overline{\gamma_3}) \\ \eta &= \frac{1}{4} + \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right)\mathbf{i}_2 - \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)\right)\mathbf{i}_3 = \frac{1 + \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4} = \gamma_1 \gamma_3 \\ \eta &= \frac{3}{4} - \left(\frac{\mathbf{i}_1}{4}\right)\mathbf{i}_2 - \left(\frac{1}{4}(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)\right)\mathbf{i}_3 = \frac{3 - \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 + \mathbf{j}_3}{4} = \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2} + \gamma_3). \end{aligned}$$

Finalement, puisque les trois cas investigués dans les dernières pages amènent toutes les solutions possibles, on conclut qu'il existe exactement seize éléments idempotents dans l'anneau des nombres tricomplexes. ■

En dépit des apparences, il s'avère qu'il existait en fin de compte quatre éléments idempotents supplémentaires dans TC. Soulignons que leur existence ainsi que la démonstration du Théorème 2.6 ne semble apparaître nulle part dans la littérature existante, ce qui confère à ce résultat un statut particulier. Remarquons également que les quatorze éléments idempotents non triviaux peuvent être jumelés deux à deux puisqu'on peut obtenir l'un en fonction de l'autre en les soustrayant de l'unité :

$$\begin{aligned} 1 - \gamma_k &= \overline{\gamma_k}, \quad \text{où } k = 1, 2, 3, \\ 1 - \gamma_1 \gamma_3 &= \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \gamma_2 + \overline{\gamma_3}), \end{aligned}$$

$$1 - \overline{\gamma_1}\gamma_3 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \overline{\gamma_2} + \overline{\gamma_3}),$$

$$1 - \gamma_1\overline{\gamma_3} = \frac{1}{2}(\overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_2} + \gamma_3),$$

$$1 - \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3).$$

On continue maintenant en énonçant un autre théorème important passé jusqu'ici inaperçu.

Théorème 2.7. Tout nombre $\eta = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ peut s'exprimer sous une deuxième représentation idempotente à composantes bicomplexes :

$$\eta = (\eta_1 - \eta_2\mathbf{i}_1)\gamma_2 + (\eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_2}.$$

Démonstration.

Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3$. On débute avec la représentation idempotente présumée :

$$\begin{aligned} (\eta_1 - \eta_2\mathbf{i}_1)\gamma_2 + (\eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_2} &= (\eta_1 - \eta_2\mathbf{i}_1)\frac{1}{2}(1 + \mathbf{j}_2) + (\eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_1)\frac{1}{2}(1 - \mathbf{j}_2) \\ &= \frac{(\eta_1 - \eta_2\mathbf{i}_1 + \eta_1\mathbf{j}_2 + \eta_2\mathbf{i}_3) + (\eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_1 - \eta_1\mathbf{j}_2 + \eta_2\mathbf{i}_3)}{2} \\ &= \frac{2\eta_1 + 2\eta_2\mathbf{i}_3}{2} \\ &= \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ainsi, le Théorème 2.7 illustre une différence notable entre les nombres bicomplexes et tricomplexes puisque ces derniers admettent deux représentations idempotentes à coefficients bicomplexes généralement distinctes. Cette propriété prendra toute son importance au prochain chapitre.

Il convient maintenant de modifier la nomenclature associée aux représentations idempotentes d'un nombre tricomplexe afin d'assurer facilement la distinction entre les deux. Lorsqu'un tricomplexe sera écrit sous la forme énoncée au Théorème 2.3, on parlera de représentation γ_3 -idempotente, tandis que dans le cas où son écriture coïncidera avec celle du Théorème 2.7, on parlera de représentation γ_2 -idempotente. D'ailleurs, on peut se demander dans quel cas celles-ci seront identiques. Pour répondre à cette question, il faut

étudier les composantes de chaque représentation et les poser comme étant égales. Ce faisant, pour $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$ on obtient les équations

$$\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1 = \eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2 \quad \text{et} \quad \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1 = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2$$

équivalentes à

$$-\eta_2 \mathbf{i}_1 = -\eta_2 \mathbf{i}_2 \quad \text{et} \quad \eta_2 \mathbf{i}_1 = \eta_2 \mathbf{i}_2.$$

On constate immédiatement que la composante η_1 n'intervient pas quand vient le temps de déterminer si les deux représentations idempotentes sont distinctes ou non. En fait, une seule équation doit être respectée : $\eta_2 \mathbf{i}_1 = \eta_2 \mathbf{i}_2$. En remplaçant η_2 par $z_3 + z_4 \mathbf{i}_2$, on obtient l'équation équivalente

$$(z_4 + z_3 \mathbf{i}_1) + (z_4 \mathbf{i}_1 - z_3) \mathbf{i}_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_4 + z_3 \mathbf{i}_1 = 0 \\ z_4 \mathbf{i}_1 - z_3 = 0. \end{cases}$$

On remarque que ce dernier système est satisfait dès que $z_4 = -z_3 \mathbf{i}_1$, ou de manière équivalente, dès que $z_3 = z_4 \mathbf{i}_1$. Autrement dit, on doit avoir

$$\eta_2 = z_4 \mathbf{i}_1 + z_4 \mathbf{i}_2 = z_4 (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)$$

ou encore

$$\eta_2 = z_3 + (-z_3 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 = z_3 (1 - \mathbf{j}_1).$$

Dans les deux cas, cela signifie que le bicomplexe η_2 doit être un diviseur de zéro d'un type particulier [25, 38]. Plus formellement, les développements précédents nous amènent au résultat suivant.

Proposition 2.5. Considérons le tricomplexe $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$. Ses représentations γ_3 -idempotente et γ_2 -idempotente sont identiques si et seulement si le bicomplexe η_2 est zéro ou est un diviseur de zéro de la forme

$$\eta_2 = z(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) = z \mathbf{i}_1 (1 - \mathbf{j}_1) = 2z \mathbf{i}_1 \overline{\gamma_1}$$

avec $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \setminus \{0\}$.

Maintenant, on considère à nouveau la représentation γ_2 -idempotente d'un nombre tricomplexe. Il s'avère que celle-ci détient également les propriétés rendant les représentations

γ_1 -idempotente sur \mathbb{BC} et γ_3 -idempotente sur \mathbb{TC} intéressantes.

Proposition 2.6. Considérons les nombres tricomplexes $p = p_1 + p_2\mathbf{i}_3$ et $q = q_1 + q_2\mathbf{i}_3$.
On a

$$\begin{aligned} p \pm q &= [(p_1 - p_2\mathbf{i}_1) \pm (q_1 - q_2\mathbf{i}_1)]\gamma_2 + [(p_1 + p_2\mathbf{i}_1) \pm (q_1 + q_2\mathbf{i}_1)]\overline{\gamma_2}; \\ p \cdot q &= [(p_1 - p_2\mathbf{i}_1)(q_1 - q_2\mathbf{i}_1)]\gamma_2 + [(p_1 + p_2\mathbf{i}_1)(q_1 + q_2\mathbf{i}_1)]\overline{\gamma_2}; \\ p^n &= (p_1 - p_2\mathbf{i}_1)^n\gamma_2 + (p_1 + p_2\mathbf{i}_1)^n\overline{\gamma_2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Démonstration.

Démontrons ces propriétés dans l'ordre. Premièrement, la définition de l'addition sur \mathbb{TC} indique que

$$p \pm q = (p_1 \pm q_1) + (p_2 \pm q_2)\mathbf{i}_3.$$

Sous la représentation γ_2 -idempotente, cela devient

$$\begin{aligned} p \pm q &= [(p_1 \pm q_1) - (p_2 \pm q_2)\mathbf{i}_1]\gamma_2 + [(p_1 \pm q_1) + (p_2 \pm q_2)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_2} \\ &= [(p_1 - p_2\mathbf{i}_1) \pm (q_1 - q_2\mathbf{i}_1)]\gamma_2 + [(p_1 + p_2\mathbf{i}_1) \pm (q_1 + q_2\mathbf{i}_1)]\overline{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Ensuite, par la définition de la multiplication, on peut voir que

$$p \cdot q = (p_1q_1 - p_2q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\mathbf{i}_3$$

ce qui devient, en utilisant la représentation γ_2 -idempotente,

$$p \cdot q = [(p_1q_1 - p_2q_2) - (p_1q_2 + p_2q_1)\mathbf{i}_1]\gamma_2 + [(p_1q_1 - p_2q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_2}.$$

Remarquons que sous cette forme, chaque composante idempotente est constituée des quatre mêmes termes (parfois à un signe près). Dans chacune d'elles, on peut donc mettre en évidence p_1 de deux d'entre eux, ainsi que $p_2\mathbf{i}_1$ des deux autres. Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned} p \cdot q &= [p_1(q_1 - q_2\mathbf{i}_1) - p_2\mathbf{i}_1(q_1 - q_2\mathbf{i}_1)]\gamma_2 + [p_1(q_1 + q_2\mathbf{i}_1) + p_2\mathbf{i}_1(q_1 + q_2\mathbf{i}_1)]\overline{\gamma_2} \\ &= [(p_1 - p_2\mathbf{i}_1)(q_1 - q_2\mathbf{i}_1)]\gamma_2 + [(p_1 + p_2\mathbf{i}_1)(q_1 + q_2\mathbf{i}_1)]\overline{\gamma_2}, \end{aligned}$$

tel qu'attendu. Finalement, la dernière propriété découle directement de la précédente et se démontre par induction. Le cas $n = 0$ renvoie à l'égalité triviale $1 = \gamma_2 + \overline{\gamma_2}$, tandis que le cas $n = 1$ correspond à la représentation γ_2 -idempotente. Supposons que la propriété est

vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle l'est aussi pour $k + 1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= p^k \cdot p \\ &= [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)^k \gamma_2 + (p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)^k \overline{\gamma_2}] \cdot [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + (p_1 + p_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2}], \end{aligned}$$

par l'hypothèse d'induction et la représentation γ_2 -idempotente. Ensuite, la multiplication termes à termes implique qu'on a

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)^k (p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)] \gamma_2 + [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)^k (p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)] \overline{\gamma_2} \\ &= (p_1 - p_2 \mathbf{i}_1)^{k+1} \gamma_2 + (p_1 + p_2 \mathbf{i}_1)^{k+1} \overline{\gamma_2} \end{aligned}$$

et la preuve est complète. ■

Dans le contexte, il serait naturel de vouloir exprimer chaque composante bicomplexe de la représentation γ_2 -idempotente sous sa représentation γ_1 -idempotente, comme nous l'avons fait au Théorème 2.5. On avait alors obtenu une représentation faisant intervenir quatre composantes complexes. Or, après avoir effectué les calculs nécessaires, on arrive à

$$\begin{aligned} \zeta &= [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) \mathbf{i}_1] \gamma_1 \gamma_2 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) \mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \gamma_2 \\ &\quad + [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) \mathbf{i}_1] \gamma_1 \overline{\gamma_2} + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) \mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_2}, \end{aligned}$$

et en utilisant les relations données en (2.4), cela devient

$$\begin{aligned} \zeta &= [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3) \mathbf{i}_1] \gamma_1 \overline{\gamma_3} + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3) \mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\ &\quad + [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3) \mathbf{i}_1] \gamma_1 \gamma_3 + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3) \mathbf{i}_1] \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

En comparant avec le Théorème 2.5, on constate que chaque élément idempotent est associé à la même composante complexe. On conclut qu'il s'agit de la même représentation et qu'il en existe donc une seule. Malgré cela, nous n'avons pas encore couvert en totalité les représentations idempotentes existantes.

Théorème 2.8. Tout nombre $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ peut s'exprimer sous une représentation idempotente à deux composantes tricomplexes :

$$\eta = (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4) \gamma_1 + (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4) \overline{\gamma}_1.$$

En outre, pour $p, q \in \mathbb{TC}$ avec $p = p_1 + p_2 \mathbf{i}_3$ et $q = q_1 + q_2 \mathbf{i}_3$, cette représentation permet aussi d'effectuer l'addition et la multiplication termes à termes :

$$\begin{aligned} p \pm q &= [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_4) \pm (q_1 + q_2 \mathbf{i}_4)] \gamma_1 + [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_4) \pm (q_1 - q_2 \mathbf{i}_4)] \overline{\gamma}_1; \\ p \cdot q &= [(p_1 + p_2 \mathbf{i}_4)(q_1 + q_2 \mathbf{i}_4)] \gamma_1 + [(p_1 - p_2 \mathbf{i}_4)(q_1 - q_2 \mathbf{i}_4)] \overline{\gamma}_1; \\ p^n &= (p_1 + p_2 \mathbf{i}_4)^n \gamma_1 + (p_1 - p_2 \mathbf{i}_4)^n \overline{\gamma}_1, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Démonstration.

Celle-ci est en tout point similaire, dans l'ordre, à celles du Théorème 2.7 puis de la Proposition 2.6. ■

On remarque plusieurs différences intéressantes entre cette représentation et les autres. Pour commencer, elle exprime un nombre tricomplexe en fonction de deux composantes également tricomplexes, puisque $\eta_2 \mathbf{i}_4 = (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_3$. De plus, dans chaque composante, le signe du monôme en η_2 est inversé par rapport aux représentations γ_3 et γ_2 -idempotentes. Ensuite, puisque les composantes sont toutes deux tricomplexes, on peut les exprimer sous leurs représentations γ_3 et γ_2 -idempotentes. Choisissons la première en considérant que $\eta_2 \mathbf{i}_4 = (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_3$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_1 + (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_3) \gamma_1 + (\eta_1 - (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_1 \\ &= [(\eta_1 - (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_2) \gamma_3 + (\eta_1 + (\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_2) \overline{\gamma}_3] \gamma_1 + [(\eta_1 - (-\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_2) \gamma_3 + (\eta_1 + (-\eta_2 \mathbf{j}_1) \mathbf{i}_2) \overline{\gamma}_3] \overline{\gamma}_1 \\ &= [(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_3 + (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_3] \gamma_1 + [(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_3] \overline{\gamma}_1 \\ &= (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) (\overline{\gamma}_1 \gamma_3 + \gamma_1 \overline{\gamma}_3) + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) (\gamma_1 \gamma_3 + \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_3) \\ &= (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_2, \end{aligned}$$

et on retrouve ainsi la représentation γ_2 -idempotente. De façon analogue, exprimer chaque composante tricomplexe selon cette dernière aboutira, après quelques manipulations, à la représentation γ_3 -idempotente.

2.3.2 Conjugaison et norme d'un nombre tricomplexe

Nous développons et présentons ici les conjugués d'un nombre tricomplexe d'une manière analogue à la sous-section 2.1.1, et le lecteur intéressé à en savoir plus pourra consulter [19, 20, 38]. En reprenant donc le processus utilisé pour définir les trois conjugués bicomplexes, on voit que pour $\eta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ on obtient

- $\eta^{\dagger 1} = w_1^{\dagger} + w_2^{\dagger} \mathbf{i}_3$;
- $\eta^{\dagger 2} = w_1 - w_2 \mathbf{i}_3$;
- $\eta^{\dagger 3} = w_1^{\dagger} - w_2^{\dagger} \mathbf{i}_3$,

où $w_1^{\dagger}, w_2^{\dagger}$ représentent les conjugués de $w_1, w_2 \in \mathbb{BC}$. Or, on sait qu'il existe trois conjugués bicomplexes distincts. En considérant tous les cas possibles, on obtient les sept conjugués tricomplexes suivants.

Définition 2.9. Soit $\eta = w_1 + w_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ et $\dagger_1, \dagger_2, \dagger_3$ les trois conjugués bicomplexes. Le tricomplexe η possède alors sept conjugués tricomplexes distincts :

- 1) $\eta^{\dagger 1} := w_1 - w_2 \mathbf{i}_3$,
- 2) $\eta^{\dagger 2} := w_1^{\dagger 1} + w_2^{\dagger 1} \mathbf{i}_3$,
- 3) $\eta^{\dagger 3} := w_1^{\dagger 2} + w_2^{\dagger 2} \mathbf{i}_3$,
- 4) $\eta^{\dagger 4} := w_1^{\dagger 3} + w_2^{\dagger 3} \mathbf{i}_3$,
- 5) $\eta^{\dagger 5} := w_1^{\dagger 1} - w_2^{\dagger 1} \mathbf{i}_3$,
- 6) $\eta^{\dagger 6} := w_1^{\dagger 2} - w_2^{\dagger 2} \mathbf{i}_3$,
- 7) $\eta^{\dagger 7} := w_1^{\dagger 3} - w_2^{\dagger 3} \mathbf{i}_3$.

Notons que le cinquième conjugué tricomplexe $\eta^{\dagger 5}$ jouera un rôle particulier plus loin dans ce travail. On énonce maintenant quelques propriétés importantes établissant le caractère additif, involutif et multiplicatif des sept conjugués non triviaux, ce qui permet de conclure que la conjugaison sur \mathbb{TC} s'opère de façon analogue à celle sur \mathbb{BC} . Les démonstrations sont omises, mais sont disponibles dans [19].

Proposition 2.7. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{TC}$. Alors pour $i = 1, \dots, 7$ on a

- 1) $(\eta_1 \pm \eta_2)^{\dagger_i} = \eta_1^{\dagger_i} \pm \eta_2^{\dagger_i}$;
- 2) $(\eta_1^{\dagger_i})^{\dagger_i} = \eta_1$;
- 3) $(\eta_1 \cdot \eta_2)^{\dagger_i} = \eta_1^{\dagger_i} \cdot \eta_2^{\dagger_i}$.

Proposition 2.8. Soit $\eta^{\dagger_0} := \eta$ le conjugué identité sur l'anneau des tricomplexes et considérons $\dagger := \{\dagger_0, \dagger_1, \dots, \dagger_7\}$. Si on munit cet ensemble de l'opération de composition \circ usuelle sur les fonctions, alors la paire (\dagger, \circ) forme un groupe commutatif. En outre, ce groupe est isomorphe au groupe du double produit cartésien des entiers modulo 2 : $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_2) = (\mathbb{Z}_2^3, +_2)$.

Encore une fois, la comparaison entre les tables de Cayley de ces deux groupes montre clairement la bijection à utiliser dans le cadre de la démonstration formelle.

(\dagger, \circ)	\dagger_0	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3	\dagger_4	\dagger_5	\dagger_6	\dagger_7
\dagger_0	\dagger_0	\dagger_1	\dagger_2	\dagger_3	\dagger_4	\dagger_5	\dagger_6	\dagger_7
\dagger_1	\dagger_1	\dagger_0	\dagger_5	\dagger_6	\dagger_7	\dagger_2	\dagger_3	\dagger_4
\dagger_2	\dagger_2	\dagger_5	\dagger_0	\dagger_4	\dagger_3	\dagger_1	\dagger_7	\dagger_6
\dagger_3	\dagger_3	\dagger_6	\dagger_4	\dagger_0	\dagger_2	\dagger_7	\dagger_1	\dagger_5
\dagger_4	\dagger_4	\dagger_7	\dagger_3	\dagger_2	\dagger_0	\dagger_6	\dagger_5	\dagger_1
\dagger_5	\dagger_5	\dagger_2	\dagger_1	\dagger_7	\dagger_6	\dagger_0	\dagger_4	\dagger_3
\dagger_6	\dagger_6	\dagger_3	\dagger_7	\dagger_1	\dagger_5	\dagger_4	\dagger_0	\dagger_2
\dagger_7	\dagger_7	\dagger_4	\dagger_6	\dagger_5	\dagger_1	\dagger_3	\dagger_2	\dagger_0

$(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)
(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)
(0, 0, 1)	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)
(1, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 0, 1)	(0, 0, 0)	(1, 1, 0)	(0, 1, 0)	(0, 0, 1)	(1, 1, 1)	(0, 1, 1)
(0, 1, 0)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 1, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(1, 1, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)
(1, 1, 0)	(1, 1, 0)	(1, 1, 1)	(0, 1, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 1)
(1, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 0, 0)	(0, 0, 1)	(1, 1, 1)	(0, 1, 1)	(0, 0, 0)	(1, 1, 0)	(0, 1, 0)
(0, 1, 1)	(0, 1, 1)	(0, 1, 0)	(1, 1, 1)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(1, 1, 0)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)
(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	(0, 1, 1)	(1, 0, 1)	(0, 0, 1)	(0, 1, 0)	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)

FIGURE 2.3 – Tables de Cayley des groupes (\dagger, \circ) et $(\mathbb{Z}_2^3, +_2)$

De plus, mentionnons que le cas général concernant la composition de conjugaisons sur les nombres n -complexes dans $\mathbb{M}(n)$ a lui aussi été élucidé. Le lecteur intéressé pourra aussi retrouver ce résultat dans [19]. On définit maintenant la norme euclidienne sur l'espace des nombres tricomplexes de manière similaire à ce qui a été fait pour les bicomplexes. Encore une fois, son caractère récursif permet de la calculer en fonction des composantes bicomplexes, complexes ou réelles du tricomplexe considéré.

Définition 2.10. Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$. La norme euclidienne sur TC est définie comme

$$\begin{aligned} \|\eta\|_3 &:= \sqrt{\|\eta_1\|_2^2 + \|\eta_2\|_2^2} \\ &= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^8 x_i^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que puisque la norme d'un bicomplexe et celle de ses trois conjugués sont égales, il vient que celle d'un nombre tricomplexe et de ses sept conjugués le sont également en vertu de la Définition 2.9. En outre, la proposition suivante établit un lien entre l'application $\|\cdot\|_3$ et les trois représentations idempotentes à deux composantes.

Proposition 2.9. Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$ un tricomplexe quelconque. On a

$$\|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2\|_2^2}{2}}, \quad \|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2}{2}}$$

ainsi que

$$\|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 + \|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2}{2}}.$$

La première égalité réfère aux composantes de la représentation γ_3 -idempotente. Parisé [33] l'a démontré dans le cas tricomplexe, tandis que Brouillette [6] et Price [35] l'ont démontré de façon générale dans $\mathbb{M}(n)$ ¹⁶. Toutefois, cette généralisation ne peut pas être étendue aux deux autres représentations, puisque ces dernières ne font pas partie de celles ayant été considérées. On démontre donc les deuxième et troisième formules de façon détaillée avec une approche similaire à celle de Parisé.

16. Notons qu'à cette fin, il faut employer une représentation γ_n -idempotente généralisant la représentation γ_3 -idempotente.

Démonstration.

Débutons en exprimant les bicomplexes η_1 et η_2 en fonction de leurs parties complexes :

$$\eta_1 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \quad \text{et} \quad \eta_2 = z_3 + z_4 \mathbf{i}_2.$$

Il vient que les composantes γ_2 -idempotentes du tricomplexe η sont

$$\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1 = (z_1 - z_3 \mathbf{i}_1) + (z_2 - z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2$$

ainsi que

$$\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1 = (z_1 + z_3 \mathbf{i}_1) + (z_2 + z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2.$$

Ensuite, par la définition de la norme euclidienne sur \mathbb{BC} , on a

$$\|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 = |z_1 - z_3 \mathbf{i}_1|^2 + |z_2 - z_4 \mathbf{i}_1|^2$$

et

$$\|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 = |z_1 + z_3 \mathbf{i}_1|^2 + |z_2 + z_4 \mathbf{i}_1|^2.$$

En utilisant la propriété $|z|^2 = z\bar{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 &= (z_1 - z_3 \mathbf{i}_1)(\bar{z}_1 - \overline{z_3 \mathbf{i}_1}) + (z_2 - z_4 \mathbf{i}_1)(\bar{z}_2 - \overline{z_4 \mathbf{i}_1}) + \\ &\quad (z_1 + z_3 \mathbf{i}_1)(\bar{z}_1 + \overline{z_3 \mathbf{i}_1}) + (z_2 + z_4 \mathbf{i}_1)(\bar{z}_2 + \overline{z_4 \mathbf{i}_1}). \end{aligned}$$

En développant ces produits, en simplifiant les termes semblables et en utilisant ensuite le fait que $\overline{z \mathbf{i}_1} = -\bar{z} \mathbf{i}_1$, l'équation devient

$$\begin{aligned} \|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) \\ &= 2\|\eta\|_3^2. \end{aligned}$$

Cela nous amène donc à la deuxième formule énoncée :

$$\|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2 + \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1\|_2^2}{2}}.$$

D'autre part, nous avons les égalités

$$\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 + (z_3 \mathbf{j}_1 - z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3$$

ainsi que

$$\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4 = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 + (-z_3 \mathbf{j}_1 + z_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3.$$

Par la définition de la norme euclidienne sur \mathbb{TC} , cela devient

$$\|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 = \|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|z_3 \mathbf{j}_1 - z_4 \mathbf{i}_1\|_2^2 = \|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|-z_4 + z_3 \mathbf{i}_2\|_2^2$$

et

$$\|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 = \|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|z_4 \mathbf{i}_1 - z_3 \mathbf{j}_1\|_2^2 = \|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|-z_4 + z_3 \mathbf{i}_2\|_2^2$$

où on a respectivement mis \mathbf{i}_1 et $-\mathbf{i}_1$ en évidence¹⁷. En utilisant maintenant la définition de la norme euclidienne sur \mathbb{BC} , on a

$$\|z_1 + z_2 \mathbf{i}_2\|_2^2 + \|-z_4 + z_3 \mathbf{i}_2\|_2^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |-z_4|^2 + |z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned} \|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 + \|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2) \\ &= 2\|\eta\|_3^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on arrive à la formule

$$\|\eta\|_3 = \sqrt{\frac{\|\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2 + \|\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4\|_3^2}{2}},$$

ce qui conclut la preuve. ■

Il serait également pertinent de définir les concepts analytiques afférents à la notion de suite sur les espaces \mathbb{BC} et \mathbb{TC} puisque certains d'entre eux interviennent au prochain chapitre. À ce sujet, il est conseillé de consulter le mémoire de Parisé [33] pour une présentation en bonne et due forme.

2.3.3 Inverse d'un nombre tricomplexe

Le but de cette sous-section est de formuler explicitement l'expression algébrique de l'inverse d'un nombre tricomplexe de manière à unifier les différents critères proposés

17. Notons que cette mise en évidence est valide puisque comme indiqué dans [35], pour tout $z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et $w \in \mathbb{BC}$, on a $\|zw\|_2 = |z|\|w\|_2$.

dans la littérature pour déterminer si celui-ci est inversible ou non. Conséquemment, nous commençons par effectuer un bref rappel des résultats qui sont pertinents. On peut retrouver les théorèmes qui suivent et leur démonstration dans [6, 19, 33, 35]. À noter que certains d'entre eux sont à l'origine énoncés de façon plus générale sur l'espace $M(n)$. De plus, on dénote par \mathbb{BC}^{-1} et \mathbb{TC}^{-1} l'ensemble des nombres bicomplexes et tricomplexes inversibles, respectivement.

Tout d'abord, en vertu de ses propriétés, la représentation γ_3 -idempotente amène au résultat suivant.

Théorème 2.9. Soit un nombre tricomplexe $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$ quelconque. On a $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ si et seulement si $\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2, \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}^{-1}$.

On conclut qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre tricomplexe soit inversible est que ses deux composantes bicomplexes sous sa représentation γ_3 -idempotente soient elles aussi inversibles. D'ailleurs, il est important de souligner que puisque la démonstration repose exclusivement sur la multiplication termes à termes possible sous la forme idempotente, la proposition suivante faisant intervenir les deux autres représentations idempotentes à deux composantes est également valide.

Proposition 2.10. Soit un nombre tricomplexe $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$ quelconque. Dans ce cas,

- 1) $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ si et seulement si $\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1, \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1 \in \mathbb{BC}^{-1}$;
- 2) $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ si et seulement si $\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4, \eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4 \in \mathbb{TC}^{-1}$.

La deuxième équivalence est intrigante en raison du fait qu'elle relie l'inversibilité d'un nombre tricomplexe à celle de deux autres nombres tricomplexes. Ensuite, la représentation idempotente à quatre composantes complexes fournit elle aussi un moyen pour déterminer si $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ puisqu'elle simplifie la multiplication tricomplexe de la même façon.

Théorème 2.10. Soit $\eta \in \mathbb{TC}$ exprimé sous la forme

$$\eta = a_1 \gamma_1 \gamma_3 + a_2 \overline{\gamma_1} \gamma_3 + a_3 \gamma_1 \overline{\gamma_3} + a_4 \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$$

où $a_i \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$. Alors, $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ si et seulement si les composantes complexes a_i sont toutes différentes de zéro.

Non seulement les derniers résultats fournissent des critères simples à appliquer pour déterminer l'inversibilité d'un nombre tricomplexe, mais le Théorème 2.10 conduit à un corollaire simple mais fort intéressant qui mérite d'être énoncé et démontré formellement.

Corollaire 2.1. Un nombre tricomplexe $\eta \in \mathbb{TC} \setminus \{0\}$ est non inversible si et seulement s'il est un diviseur de zéro.

Démonstration.

Soit $\eta \in \mathbb{TC} \setminus \{0\}$ avec $\eta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ et supposons pour commencer que $\eta \notin \mathbb{TC}^{-1}$. Dans ce cas, le théorème précédent implique qu'au moins l'une des composantes complexes de la représentation précédente est égale à zéro. Il suffit alors de considérer le tricomplexe $\zeta = b_1\gamma_1\gamma_3 + b_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + b_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ et de poser les bonnes composantes b_i égales à zéro ou différentes de zéro en fonction de celles de η pour obtenir $\eta \cdot \zeta = 0$, ce qui signifie que η est un diviseur de zéro.

Démontrons la contraposée de l'implication inverse. Si $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$, alors $a_i \neq 0$, pour $i = 1, \dots, 4$. Considérons le tricomplexe quelconque $\zeta = b_1\gamma_1\gamma_3 + b_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + b_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + b_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ où chaque $b_i \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$. Dans ce cas, l'équation

$$(a_1 \cdot b_1)\gamma_1\gamma_3 + (a_2 \cdot b_2)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (a_3 \cdot b_3)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (a_4 \cdot b_4)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} = 0$$

est satisfaite uniquement lorsque $b_i = 0$, pour $i = 1, \dots, 4$, puisque le plan complexe ne contient aucun diviseur de zéro. Ainsi, on conclut que η ne peut être un diviseur de zéro. ■

Il s'avère donc que l'espace des nombres tricomplexes possède la même propriété que celui des nombres bicomplexes, à savoir que l'ensemble des éléments non nuls et non inversibles est le même que celui des diviseurs de zéro. Plus loin, on se servira de ce corollaire pour déduire un autre résultat intéressant.

Une autre approche développée par Price [35] consiste à définir les *matrices de Cauchy-Riemann* puis d'exploiter judicieusement l'isomorphisme existant entre l'anneau des nombres tricomplexes et celui de ces matrices. En peu de mots, au nombre tricomplexe

$$\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$$

est associé la matrice de Cauchy-Riemann suivante :

$$M_{\mathbb{R}}(\eta) := \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 & -x_5 & x_6 & x_7 & -x_8 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 & -x_6 & -x_5 & x_8 & x_7 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 & -x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & -x_8 & -x_7 & -x_6 & -x_5 \\ x_5 & -x_6 & -x_7 & x_8 & x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_6 & x_5 & -x_8 & -x_7 & x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_7 & -x_8 & x_5 & -x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Si on dénote l'ensemble des matrices de Cauchy-Riemann à valeurs réelles par $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant ¹⁸.

Théorème 2.11. L'application $M_{\mathbb{R}} : \mathbb{TC} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) : \eta \mapsto M_{\mathbb{R}}(\eta)$ est un isomorphisme entre l'anneau des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients réels et l'anneau des nombres tricomplexes.

En sachant que les différents éléments qui composent la matrice $M_{\mathbb{R}}(\eta)$ correspondent aux coefficients dans les équations de la multiplication tricomplexe selon les huit composantes réelles du nombre $\eta \in \mathbb{TC}$, cela nous conduit à une autre façon de caractériser les éléments inversibles.

Théorème 2.12. Soit $\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$. On a $\eta \in \mathbb{TC}^{-1}$ si et seulement si $\det M_{\mathbb{R}}(\eta) \neq 0$.

Enfin, une troisième approche pour déterminer l'inversibilité d'un nombre dans $\mathbb{M}(n)$ est envisagée par Garant-Pelletier [19] et celle-ci fait intervenir les différents conjugués multicomplexes afin d'imiter ce qui se produit dans le plan complexe usuel. Par exemple, en se restreignant à \mathbb{TC} , cela consiste à choisir l'un des sept conjugués tricomplexes, disons $\eta^{\dagger 1} = \eta_1 - \eta_2\mathbf{i}_3$, et considérer le produit $\eta \cdot \eta^{\dagger 1} = \eta_1^2 + \eta_2^2$. Il en découle alors le nombre $\eta^{\dagger 1}/(\eta_1^2 + \eta_2^2)$, qui doit coïncider avec η^{-1} . Cela signifie que le nombre η est inversible si et seulement si $\eta_1^2 + \eta_2^2 \in \mathbb{BC}^{-1}$. Toutefois, comme Garant-Pelletier le mentionne, le choix d'un autre conjugué tricomplexe fournit une nouvelle expression pour η^{-1} , et par le fait

18. Bien que l'on doive celui-ci à Price [35], la notation est conforme à celle de Parisé [33]. De plus, il existe un isomorphisme similaire entre les nombres tricomplexes exprimés selon leurs quatre coefficients complexes et les matrices de Cauchy-Riemann à valeurs complexes de format 4×4 (voir [33, 35]).

même, un nouveau critère d'inversibilité pour η : le lien entre ceux-ci reste donc à éclaircir.

Pour récapituler, on distingue trois critères d'inversibilité pour $\eta \in \mathbb{TC}$: si η n'est pas un diviseur de zéro, si le déterminant de la matrice de Cauchy-Riemann $M_{\mathbb{R}}(\eta)$ est non nul et **si le produit du nombre η avec l'un de ses conjugués est lui-même inversible**. Qu'ont ces différentes conditions en commun ? Afin de répondre à cette question, analysons à nouveau ce qui se produit dans le plan complexe usuel.

On sait que le produit d'un nombre complexe z et de son conjugué \bar{z} donne toujours un nombre réel, et cette propriété est exploitée afin de donner une expression algébrique correspondant à z^{-1} . Si cette idée peut être utilisée dans le cas multicomplexe, il faut avouer que les résultats obtenus jusqu'à maintenant sont peu enrichissants et dépourvus du caractère universel habituellement recherché. La clé consiste à voir ce qui se produit dans $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe qu'un seul conjugué au sens traditionnel, comme un cas dégénéré. Qu'advient-il si on multiplie un nombre tricomplexe par **tous** ses conjugués ?

Proposition 2.11. Soit $\eta \in \mathbb{TC}$. Le produit du nombre η et de ses sept conjugués tricomplexes $\eta^{\dagger_1}, \dots, \eta^{\dagger_7}$ donne toujours un nombre réel positif ou nul. En d'autres termes,

$$\eta(\eta^{\dagger_1}\eta^{\dagger_2}\eta^{\dagger_3}\eta^{\dagger_4}\eta^{\dagger_5}\eta^{\dagger_6}\eta^{\dagger_7}) = \eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\dagger_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Démonstration.

Une approche directe mais fort laborieuse consiste à écrire $\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$ puis à employer la représentation matricielle découlant du Théorème 2.11 pour effectuer les calculs appropriés. On préconise cependant une stratégie plus élégante qui a également le mérite d'enrichir notre compréhension de certains concepts. L'idée est simple : après avoir étudié l'effet des sept types de conjugaison sur les quatre composantes complexes de la représentation idempotente énoncée au Théorème 2.5, on effectuera la multiplication évoquée dans l'énoncé sous cette forme. Pour ce faire, nous aurons besoin de développer les différents conjugués tricomplexes en fonction des quatre coefficients

complexes de $\eta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\eta^{\dagger 1} &= z_1 + z_2\mathbf{i}_2 - z_3\mathbf{i}_3 - z_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\mathbf{i}_2 + \bar{z}_3\mathbf{i}_3 + \bar{z}_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 3} &= z_1 - z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 - z_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 4} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2\mathbf{i}_2 + \bar{z}_3\mathbf{i}_3 - \bar{z}_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 5} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2\mathbf{i}_2 - \bar{z}_3\mathbf{i}_3 - \bar{z}_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 6} &= z_1 - z_2\mathbf{i}_2 - z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3 \\
\eta^{\dagger 7} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2\mathbf{i}_2 - \bar{z}_3\mathbf{i}_3 + \bar{z}_4\mathbf{j}_3.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

À noter que dans les équations qui précèdent et qui suivent, \bar{z}_k correspond au conjugué complexe usuel de $z_k \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$. On écrit maintenant

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_{\gamma_1\gamma_3}\gamma_1\gamma_3 + \eta_{\overline{\gamma_1\gamma_3}}\overline{\gamma_1\gamma_3} + \eta_{\gamma_1\overline{\gamma_3}}\gamma_1\overline{\gamma_3} + \eta_{\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}}\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}} \\
&= [(z_1 + z_4) - (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\gamma_3 + [(z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1\gamma_3} \\
&\quad + [(z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\gamma_1\overline{\gamma_3} + [(z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}
\end{aligned}$$

où $\eta_{\gamma_1\gamma_3}, \dots, \eta_{\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}}$ sont donc les quatre composantes complexes du nombre η dans la représentation idempotente (2.3) et on dénote $\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger i}$ la première composante du i -ème conjugué tricomplexe selon la même représentation, avec $i \in \{1, \dots, 7\}$. En utilisant judicieusement les équations en (2.5) et en les appliquant à l'expression correspondant à $\eta_{\gamma_1\gamma_3}$, on arrive à

$$\begin{aligned}
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 1} &= (z_1 - z_4) - (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1 = \eta_{\gamma_1\overline{\gamma_3}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 2} &= (\bar{z}_1 + \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)\mathbf{i}_1 = \overline{\eta_{\overline{\gamma_1\gamma_3}}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 3} &= (z_1 - z_4) + (z_2 + z_3)\mathbf{i}_1 = \eta_{\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 4} &= (\bar{z}_1 - \bar{z}_4) + (\bar{z}_2 + \bar{z}_3)\mathbf{i}_1 = \overline{\eta_{\gamma_1\overline{\gamma_3}}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 5} &= (\bar{z}_1 - \bar{z}_4) - (\bar{z}_2 + \bar{z}_3)\mathbf{i}_1 = \overline{\eta_{\gamma_1\gamma_3}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 6} &= (z_1 + z_4) + (z_2 - z_3)\mathbf{i}_1 = \eta_{\overline{\gamma_1\gamma_3}} \\
\eta_{\gamma_1\gamma_3}^{\dagger 7} &= (\bar{z}_1 + \bar{z}_4) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_3)\mathbf{i}_1 = \overline{\eta_{\gamma_1\gamma_3}}.
\end{aligned}$$

Ce qu'il faut remarquer, c'est que sous la représentation idempotente à quatre composantes **complexes**, les premières composantes du nombre η et de ses conjugués correspondent à $\eta_{\gamma_1\gamma_3}, \eta_{\overline{\gamma_1\gamma_3}}, \eta_{\gamma_1\overline{\gamma_3}}, \eta_{\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}}$ ainsi qu'à $\overline{\eta_{\gamma_1\overline{\gamma_3}}}, \overline{\eta_{\overline{\gamma_1\gamma_3}}}, \overline{\eta_{\gamma_1\gamma_3}}, \overline{\eta_{\overline{\gamma_1\overline{\gamma_3}}}}$. De même, on peut vérifier que

c'est également le cas pour les deuxième, troisième et quatrième composantes de ces huit nombres tricomplexes. Puisque la Proposition 2.4 permet d'effectuer la multiplication composantes à composantes, on a alors

$$\begin{aligned} \eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\ddagger i} &= (\eta_{\gamma_1 \gamma_3} \overline{\eta_{\gamma_1 \gamma_3}} \cdots \eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}} \overline{\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}}) \gamma_1 \gamma_3 + (\eta_{\gamma_1 \gamma_3} \overline{\eta_{\gamma_1 \gamma_3}} \cdots \eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}} \overline{\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}}) \overline{\gamma_1 \gamma_3} \\ &\quad + (\eta_{\gamma_1 \gamma_3} \overline{\eta_{\gamma_1 \gamma_3}} \cdots \eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}} \overline{\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}}) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + (\eta_{\gamma_1 \gamma_3} \overline{\eta_{\gamma_1 \gamma_3}} \cdots \eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}} \overline{\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}}) \overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}} \\ &= |\eta_{\gamma_1 \gamma_3}|^2 \cdot |\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}|^2 \cdot |\eta_{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}|^2 \cdot |\eta_{\overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}}|^2 \cdot (\gamma_1 \gamma_3 + \overline{\gamma_1 \gamma_3} + \gamma_1 \overline{\gamma_3} + \overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}) \\ &= |\eta_{\gamma_1 \gamma_3} \eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}} \eta_{\gamma_1 \overline{\gamma_3}} \eta_{\overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}}|^2, \end{aligned}$$

en raison du fait que $\gamma_1 \gamma_3 + \overline{\gamma_1 \gamma_3} + \gamma_1 \overline{\gamma_3} + \overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}} = 1$. Finalement, étant donné que le carré du module d'un nombre complexe est toujours positif ou nul, on a le résultat souhaité. ■

Dans la preuve précédente, on aurait également pu travailler avec les huit coefficients réels du nombre η . Ce faisant, la forme factorisée du produit en question serait

$$\eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\ddagger i} = p_1(x_1, \dots, x_8) \cdot p_2(x_1, \dots, x_8) \cdot p_3(x_1, \dots, x_8) \cdot p_4(x_1, \dots, x_8)$$

où

$$\begin{aligned} p_1(x_1, \dots, x_8) &:= \left((x_1 + x_4 - x_6 + x_7)^2 + (x_2 - x_3 + x_5 + x_8)^2 \right) = |\eta_{\gamma_1 \gamma_3}|^2, \\ p_2(x_1, \dots, x_8) &:= \left((x_1 - x_4 + x_6 + x_7)^2 + (x_2 + x_3 - x_5 + x_8)^2 \right) = |\eta_{\overline{\gamma_1 \gamma_3}}|^2, \\ p_3(x_1, \dots, x_8) &:= \left((x_1 + x_4 + x_6 - x_7)^2 + (x_2 - x_3 - x_5 - x_8)^2 \right) = |\eta_{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}|^2, \\ p_4(x_1, \dots, x_8) &:= \left((x_1 - x_4 - x_6 - x_7)^2 + (x_2 + x_3 + x_5 - x_8)^2 \right) = |\eta_{\overline{\gamma_1 \overline{\gamma_3}}}|^2. \end{aligned}$$

Ensuite, comme le lecteur l'aura deviné, cette surprenante propriété du produit d'un nombre tricomplexe et de ses sept conjugués nous conduit au théorème suivant.

Théorème 2.13. Le nombre tricomplexe η est inversible si et seulement si

$$\eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\ddagger i} \neq 0.$$

De plus, lorsqu'il existe, l'inverse multiplicatif de $\eta \in \mathbb{TC}$ est donné par la formule

$$\eta^{-1} = \frac{\eta^{\ddagger 1} \eta^{\ddagger 2} \eta^{\ddagger 3} \eta^{\ddagger 4} \eta^{\ddagger 5} \eta^{\ddagger 6} \eta^{\ddagger 7}}{\eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\ddagger i}}.$$

Démonstration.

Ce résultat découle directement de la Proposition 2.11 et de la discussion précédente. ■

Une conséquence immédiate du Théorème 2.13 est que les conjugués d'un nombre tricomplexe inversible sont également inversibles, et ne sont donc pas diviseurs de zéro, par le Corollaire 2.1. D'autre part, soulignons qu'étant donné que la multiplication tricomplexe est associative et commutative, on peut constater en regardant le dénominateur de η^{-1} (au Théorème 2.13) que les différents critères d'inversibilité avancés par Garant-Pelletier [19] dépendant chacun de l'un des conjugués tricomplexes doivent tous être satisfaits simultanément pour que le nombre η soit inversible. Ensuite, la prochaine proposition établit un lien avec un autre critère d'inversibilité, soit celui avancé par Price [35].

Proposition 2.12. Soit $\eta = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1 + x_5\mathbf{i}_3 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3 + x_8\mathbf{i}_4$ un nombre tricomplexe quelconque. On a

$$\det M_{\mathbb{R}}(\eta) = \eta \cdot \prod_{i=1}^7 \eta^{\dagger_i}.$$

Démonstration.

Il s'agit d'un calcul direct, mais fastidieux. En utilisant un logiciel de calcul pour calculer $\det M_{\mathbb{R}}(\eta)$, on arrive exactement à la même factorisation que celle exprimée sous la preuve de la Proposition 2.11. ■

On peut conclure des résultats qui précèdent que l'approche proposée, consistant à multiplier un tricomplexe par ses sept conjugués, permet d'unifier les différents critères d'inversibilité existant dans la littérature. En terminant, le Corollaire 2.1 ainsi que le Théorème 2.13 nous amènent au prochain corollaire.

Corollaire 2.2. Soit $\eta \in \mathbb{TC}$. Dans ce cas, le nombre η est un diviseur de zéro si et seulement si $\eta(\eta^{\dagger_1}\eta^{\dagger_2}\eta^{\dagger_3}\eta^{\dagger_4}\eta^{\dagger_5}\eta^{\dagger_6}\eta^{\dagger_7}) = 0$.

Il s'agit donc, en quelque sorte, d'une caractérisation des diviseurs de zéro sur l'anneau des nombres tricomplexes ne faisant pas intervenir directement le concept d'inversibilité. En effet, grâce à ce corollaire et à la commutativité de la multiplication, on sait désormais que tout diviseur de zéro s'annule avec l'un de ses conjugués ou un produit de ceux-ci. L'aspect nébuleux propre à ces nombres particuliers s'en trouve ainsi légèrement dissipé.

2.4 Nombres biduplexes

On a vu à la section 2.2 que les nombres hyperboliques constituaient un sous-anneau de celui des nombres bicomplexes et nous avons déjà souligné que \mathbb{TC} renfermait trois sous-espaces isomorphes à l'anneau des nombres hyperboliques. On s'intéresse maintenant à un sous-espace en quatre dimensions étroitement lié aux nombres hyperboliques, fermé sous la multiplication tricomplexe mais sans toutefois être isomorphe à $(\mathbb{BC}, +, \cdot)$, appelé les nombres biduplexes. Comme ceux-ci sont seulement mentionnés très succinctement dans [19, 33], l'objectif ici est d'approfondir, pour la première fois, certains concepts de base pertinents les concernant puisqu'ils interviendront au prochain chapitre.

Pour commencer, on considère un nombre tricomplexe exprimé en fonction de quatre nombres complexes : $\eta = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3 + z_4\mathbf{j}_3$. Dans le cas particulier où $z_1 = x_1, z_2 = x_4\mathbf{i}_1, z_3 = x_6\mathbf{i}_1$ et $z_4 = x_7$, on a

$$\eta = x_1 + x_4\mathbf{j}_1 + x_6\mathbf{j}_2 + x_7\mathbf{j}_3$$

et on voit que le nombre η possède une composante réelle et trois composantes hyperboliques. Cela nous amène à la définition suivante.

Définition 2.11. Les nombres biduplexes sont définis comme suit :

$$\mathbb{D}(2) := \{x + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3 : x, y, z, w \in \mathbb{R} \text{ avec } \mathbf{j}_1^2 = \mathbf{j}_2^2 = \mathbf{j}_3^2 = 1\}.$$

De cette façon, les nombres biduplexes sont définis indépendamment des nombres tricomplexes. Néanmoins, on les considérera comme un sous-espace de \mathbb{TC} dans ce qui suit par souci de cohésion. En prenant donc comme opérations élémentaires l'addition et la multiplication induites par celles définies sur \mathbb{TC} , on peut voir que pour $\eta = a_1 + a_2\mathbf{j}_1 + a_3\mathbf{j}_2 + a_4\mathbf{j}_3$ et $\zeta = b_1 + b_2\mathbf{j}_1 + b_3\mathbf{j}_2 + b_4\mathbf{j}_3$ on a

$$\begin{aligned} \eta = \zeta &\iff a_i = b_i \text{ pour } i \in \{1, \dots, 4\}; \\ \eta + \zeta &:= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\mathbf{j}_1 + (a_3 + b_3)\mathbf{j}_2 + (a_4 + b_4)\mathbf{j}_3; \\ \eta \cdot \zeta &:= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 - a_4b_3)\mathbf{j}_1 \\ &\quad + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2)\mathbf{j}_2 + (a_1b_4 - a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)\mathbf{j}_3, \end{aligned}$$

et ainsi $(\mathbb{D}(2), +, \cdot)$ forme un anneau commutatif avec unité dans lequel le neutre de

l'addition est $0+0\mathbf{j}_1+0\mathbf{j}_2+0\mathbf{j}_3$ tandis que le neutre de la multiplication est $1+0\mathbf{j}_1+0\mathbf{j}_2+0\mathbf{j}_3$. La Figure 2.4 permet d'ailleurs de remarquer que la multiplication est fermée sur $\mathbb{D}(2)$. Ensuite, la Définition 2.11 met en lumière le fait que $\mathbb{D}(\mathbf{j}_k) \subset \mathbb{D}(2)$, pour $k = 1, 2, 3$. En

\cdot	1	\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_3
1	1	\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_3
\mathbf{j}_1	\mathbf{j}_1	1	$-\mathbf{j}_3$	$-\mathbf{j}_2$
\mathbf{j}_2	\mathbf{j}_2	$-\mathbf{j}_3$	1	$-\mathbf{j}_1$
\mathbf{j}_3	\mathbf{j}_3	$-\mathbf{j}_2$	$-\mathbf{j}_1$	1

FIGURE 2.4 – Produits des unités hyperboliques tricomplexes

effet, on a par exemple $\mathbb{D}(\mathbf{j}_1) = \{\zeta \in \mathbb{D}(2) : z = w = 0\}$; en posant plutôt $y = w = 0$ et $y = z = 0$ on obtient plutôt $\mathbb{D}(\mathbf{j}_2)$ et $\mathbb{D}(\mathbf{j}_3)$, respectivement.

Par ailleurs, en examinant la forme développée de chaque élément idempotent identifié au Théorème 2.6, on constate que $\mathbb{D}(2)$ contient les seize idempotents présents dans l'anneau des nombres tricomplexes, ce qui fait qu'on peut considérer les diverses représentations idempotentes introduites à la sous-section 2.3.1. À ce sujet, prenons $\zeta \in \mathbb{D}(2)$. Ce nombre biduplexe peut être écrit sous la forme habituelle d'un nombre tricomplexe : $\zeta = (x + y\mathbf{j}_1) + (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3$. Dans ce cas, sa représentation γ_3 -idempotente est

$$\begin{aligned}\zeta &= [(x + y\mathbf{j}_1) - (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2]\gamma_3 + [(x + y\mathbf{j}_1) + (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2]\overline{\gamma}_3 \\ &= [(x + w) + (y - z)\mathbf{j}_1]\gamma_3 + [(x - w) + (y + z)\mathbf{j}_1]\overline{\gamma}_3\end{aligned}$$

tandis que sa représentation γ_2 -idempotente devient

$$\begin{aligned}\zeta &= [(x + y\mathbf{j}_1) - (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_1]\gamma_2 + [(x + y\mathbf{j}_1) + (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma}_2 \\ &= [(x + z) + (y - w)\mathbf{j}_1]\gamma_2 + [(x - z) + (y + w)\mathbf{j}_1]\overline{\gamma}_2.\end{aligned}$$

Quant à elles, les représentations idempotentes selon $\gamma_1, \overline{\gamma}_1$ et à quatre composantes complexes deviennent respectivement

$$\begin{aligned}\zeta &= [(x + y\mathbf{j}_1) + (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_4]\gamma_1 + [(x + y\mathbf{j}_1) - (z\mathbf{i}_1 + w\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_4]\overline{\gamma}_1 \\ &= [x + y\mathbf{j}_1 - w\mathbf{j}_2 - z\mathbf{j}_3]\gamma_1 + [x + y\mathbf{j}_1 + w\mathbf{j}_2 + z\mathbf{j}_3]\overline{\gamma}_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\zeta &= [(x + w) - (y\mathbf{i}_1 - z\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1]\gamma_1\gamma_3 + [(x + w) + (y\mathbf{i}_1 - z\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma}_1\gamma_3 \\ &\quad + [(x - w) - (y\mathbf{i}_1 + z\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1]\gamma_1\overline{\gamma}_3 + [(x - w) + (y\mathbf{i}_1 + z\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1]\overline{\gamma}_1\overline{\gamma}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x + y - z + w]\gamma_1\gamma_3 + [x - y + z + w]\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\
&\quad + [x + y + z - w]\gamma_1\overline{\gamma_3} + [x - y - z - w]\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

On remarque que les quatre composantes complexes sont en fait réelles, tout comme dans le cas de la représentation idempotente sur \mathbb{D} .

Par ailleurs, de manière analogue au cas hyperbolique, la conjugaison est également simplifiée sur $\mathbb{D}(2)$. En effet, en développant l'expression des sept conjugués tricomplexes selon leurs composantes réelles, on obtient les égalités suivantes pour $\zeta \in \mathbb{D}(2)$:

$$\zeta = \zeta^{\dagger 7}, \quad \zeta^{\dagger 1} = \zeta^{\dagger 4}, \quad \zeta^{\dagger 2} = \zeta^{\dagger 6}, \quad \zeta^{\dagger 3} = \zeta^{\dagger 5}. \tag{2.7}$$

Il y a donc seulement trois conjugués distincts sur $\mathbb{D}(2)$, mais ce n'est pas la seule façon d'arriver à ceux-ci. De la même manière que l'espace \mathbb{BC} est une duplication des nombres complexes, on peut voir les nombres biduplexes comme une duplication des nombres hyperboliques. Pour ce faire, posons $z_1 = x + y\mathbf{j}_1$, $z_2 = z + w\mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}$ et $\zeta \in \mathbb{D}(2)$. Il suffit alors de constater que

$$\zeta = x + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3 = x + y\mathbf{j}_1 + (z - w\mathbf{j}_1)\mathbf{j}_2 = z_1 + \overline{z_2}\mathbf{j}_2$$

pour obtenir une représentation qui nous est familière. Par la suite, on peut définir trois types de conjugués biduplexes de la même manière qu'à la sous-section 2.1.1 dans le cas bicomplexe. Cela donne

- 1) $\overline{\zeta}^{\mathbf{j}_1} = \overline{z_1 + \overline{z_2}\mathbf{j}_2}^{\mathbf{j}_1} := \overline{z_1} + \overline{\overline{z_2}\mathbf{j}_2} = \overline{z_1} + z_2\mathbf{j}_2$;
- 2) $\overline{\zeta}^{\mathbf{j}_2} = \overline{z_1 + \overline{z_2}\mathbf{j}_2}^{\mathbf{j}_2} := z_1 - \overline{z_2}\mathbf{j}_2$;
- 3) $\overline{\zeta}^{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2} = \overline{z_1 + \overline{z_2}\mathbf{j}_2}^{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2} := \overline{(z_1 + \overline{z_2}\mathbf{j}_2)^{\mathbf{j}_1}}^{\mathbf{j}_2} = \overline{z_1} - z_2\mathbf{j}_2$.

Tel qu'annoncé, en développant ces trois conjugués selon leurs coefficients réels, on arrive aux égalités

$$\zeta^{\dagger 1} = \overline{\zeta}^{\mathbf{j}_2}, \quad \zeta^{\dagger 2} = \overline{\zeta}^{\mathbf{j}_1\mathbf{j}_2}, \quad \zeta^{\dagger 3} = \overline{\zeta}^{\mathbf{j}_1}$$

et on peut donc concentrer notre étude sur les conjugués issus du cas tricomplexe.

Ensuite, le lecteur l'aura probablement anticipé : l'expression algébrique de l'inverse d'un nombre tricomplexe est remarquablement simplifiée quand on se restreint au sous-anneau des nombres biduplexes. À ce sujet, si on introduit le module biduplexe $\|\cdot\|_{\mathbb{D}(2)}$

dont on définit le carré par $\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^2 := \zeta\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3}$, on s'aperçoit que $\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^2 \in \mathbb{R}$ pour tout $\zeta = x + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3 \in \mathbb{D}(2)$ puisque

$$\begin{aligned}\zeta\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3} &= x^4 + y^4 + z^4 + w^4 - 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 + z^2w^2) - 8xyzw \\ &= (x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w).\end{aligned}$$

De surcroît, à la dernière ligne, on reconnaît immédiatement les quatre composantes réelles intervenant dans la représentation idempotente en (2.6). Ainsi, en plus d'obtenir une expression familière pour l'inverse d'un nombre biduplexe, soit

$$\zeta^{-1} = \frac{\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3}}{\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^2}, \quad (2.8)$$

on en déduit que $\zeta \in \mathbb{D}(2)$ possède un inverse si et seulement si les quatre composantes de sa représentation (2.6) sont non nulles (c'est-à-dire lorsque $\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^2 \neq 0$), conformément au Théorème 2.10. Conséquemment, pour $\zeta = x + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3$, on peut caractériser l'ensemble des nombres biduplexes inversibles comme suit :

$$\mathbb{D}(2)^{-1} = \{\zeta \in \mathbb{D}(2) : (x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w) \neq 0\}.$$

D'autre part, ce qui précède à propos des inverses multiplicatifs sur $\mathbb{D}(2)$ s'arrime parfaitement avec les résultats obtenus dans le cas tricomplexe qui est plus général. Remarquons premièrement que pour $\zeta \in \mathbb{D}(2)$, les égalités en (2.7) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\zeta \cdot \prod_{i=1}^7 \zeta^{\dagger_i} &= (\zeta\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3})^2 \\ &= \|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^4.\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 2.13 avec les égalités (2.7), on obtient bel et bien

$$\begin{aligned}\zeta^{-1} &= \frac{\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3}\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_3}\zeta^{\dagger_2}\zeta}{\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^4} \\ &= \frac{\zeta^{\dagger_1}\zeta^{\dagger_2}\zeta^{\dagger_3}}{\|\zeta\|_{\mathbb{D}(2)}^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, il s'avère que l'expression dans la base $\{1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ de ζ^{-1} est suffisamment simple pour être présentée explicitement, contrairement aux inverses multiplicatifs dans

TC. Si on considère le nombre biduplexe $\zeta = x + y\mathbf{j}_1 + z\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3$, son inverse multiplicatif dénoté $\zeta^{-1} = \zeta_1 + \zeta_2\mathbf{j}_1 + \zeta_3\mathbf{j}_2 + \zeta_4\mathbf{j}_3$ est tel que

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{x(x^2 - y^2 - z^2 - w^2) - 2yzw}{(x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w)}; \\ \zeta_2 &= \frac{y(y^2 - x^2 - z^2 - w^2) - 2xzw}{(x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w)}; \\ \zeta_3 &= \frac{z(z^2 - x^2 - y^2 - w^2) - 2xyw}{(x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w)}; \\ \zeta_4 &= \frac{w(w^2 - x^2 - y^2 - z^2) - 2xyz}{(x + y + z - w)(x + y - z + w)(x - y + z + w)(x - y - z - w)}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Finalement, on sait par (2.6) que la représentation idempotente à quatre composantes complexes de ζ^{-1} correspond à

$$\zeta^{-1} = [\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4]\gamma_1\gamma_3 + [\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4]\overline{\gamma_1}\gamma_3 + [\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \zeta_4]\gamma_1\overline{\gamma_3} + [\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 - \zeta_4]\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.$$

En substituant ζ_1, \dots, ζ_4 par leur expression en (2.9) et en simplifiant le résultat, on voit que

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{x + y - z + w}\gamma_1\gamma_3 + \frac{1}{x - y + z + w}\overline{\gamma_1}\gamma_3 + \frac{1}{x + y + z - w}\gamma_1\overline{\gamma_3} + \frac{1}{x - y - z - w}\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3},$$

et conséquemment, en écrivant également ζ comme en (2.6), la multiplication termes à termes possible sous cette forme assure qu'on a bel et bien $\zeta\zeta^{-1} = 1$. Ainsi, grâce à tout ce qui précède, force est de constater à quel point les propriétés de base sur l'anneau des nombres tricomplexes sont simplifiées si on considère uniquement le sous-anneau des nombres biduplexes.

Notre étude des algèbres BC et TC étant désormais complétée, on peut se consacrer à l'analyse des objets mathématiques au centre de ce mémoire, soit les ensembles de Mandelbrot généralisés sur ces espaces.

Ensembles de Mandelbrot généralisés

Nous sommes désormais en mesure d'entamer notre étude de la dynamique associée à l'ensemble de Mandelbrot généralisé aux nombres bicomplexes et tricomplexes. À cet effet, les sections 3.1 et 3.2 consistent essentiellement en une introduction à ce qui a déjà été fait. On commence par présenter, dans la première section, quelques définitions et propriétés fondamentales portant sur deux ensembles bidimensionnels classiques. Puis, les ensembles de Mandelbrot bicomplexe et tricomplexe sont introduits, de même que certains résultats connus les concernant. À la deuxième section, on démontre d'autres propriétés en lien avec les itérées du polynôme à valeurs tricomplexes $P_c(\eta)$, et certains nouveaux résultats en découlant sont établis. De plus, les coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe sont présentées. Quant à elles, les trois dernières sections sont consacrées aux caractérisations géométriques des diverses coupes tridimensionnelles principales et renferment la plupart des nouveaux résultats de ce chapitre.

3.1 Éléments de base

Dans cette section, on commence par introduire les deux ensembles classiques à la base de la théorie et quelques unes de leurs propriétés. On aborde ensuite deux généralisations du premier ensemble. Soulignons que l'essentiel de ce qui suit provient de [4, 9, 19, 33], mais de nombreuses autres références existent sur le sujet.

3.1.1 Ensembles classiques

Avant de se concentrer sur les fractales qui nous intéressent, il nous incombe de présenter d'abord leurs analogues bidimensionnels. Pour ce faire, on débute en introduisant le polynôme à partir duquel les fractales d'intérêt dans ce mémoire sont générées, soit

$P_c(z) := z^2 + c$, où $z, c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ ¹. On va s'intéresser aux itérations successives de P , c'est-à-dire au cas où on applique le polynôme P de manière répétée sur les nombres initiaux z et c et on dénotera par $P_c^n(z)$ l'énième itération de ce polynôme. On a donc

$$P_c^n(z) = P_c(P_c^{n-1}(z)) = P_c(P_c(P_c^{n-2}(z))) = \underbrace{P_c(P_c(P_c(\dots P_c(P_c(z)) \dots)))}_{n \text{ itérations}}.$$

L'ensemble de Mandelbrot fait probablement partie des fractales classiques les plus connues parmi celles qui sont basées sur l'itération de polynômes complexes.

Définition 3.1. L'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}_1 est constitué des points $c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ tels que la suite des itérées du polynôme $P_c^n(z)$ évalué en $z = 0$ reste bornée. En d'autres mots,

$$\mathcal{M}_1 := \left\{ c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

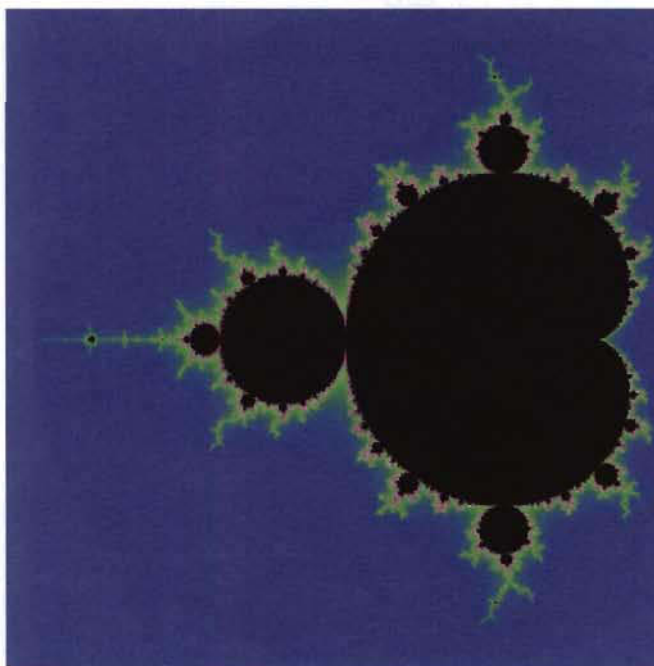


FIGURE 3.1 – L'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}_1 dans le plan complexe

Cet ensemble possède plusieurs propriétés remarquables. Celles qui suivent font partie des plus pertinentes et on peut les retrouver dans [9, 17, 33].

1. Dans leurs travaux, Parisé [33] et Brouillette [6] utilisent plutôt le polynôme $Q_{p,c}(z) = z^p + c$ où $p \geq 2$ afin de généraliser leurs résultats aux ensembles multibrots.

Théorème 3.1. L'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}_1 possède les propriétés suivantes :

- 1) $\mathcal{M}_1 \subset \overline{D}(0, 2)$;
- 2) \mathcal{M}_1 est un ensemble fermé ;
- 3) $c \in \mathcal{M}_1 \iff |P_c^n(0)| \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$;
- 4) \mathcal{M}_1 est un ensemble connexe ;
- 5) \mathcal{M}_1 est symétrique selon l'axe des réels ;
- 6) $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

Prises ensembles, les propriétés 1 et 2 impliquent que \mathcal{M}_1 est un ensemble compact, tandis que la propriété 4 est un résultat d'une grande importance qui fut démontré pour la première fois par Hubbard et Douady en 1982 (voir [17]). Quant à elle, la propriété 3 permet d'élaborer un algorithme simple permettant de visualiser l'ensemble de Mandelbrot à différents niveaux d'approximation, puisqu'elle caractérise les points qui en font partie en fonction d'un critère aisément vérifiable par ordinateur pour diverses valeurs de n fixées.

D'autre part, la propriété 5 découle directement des propriétés du conjugué d'un nombre complexe. En effet, la conjugaison étant additive et multiplicative sur $\mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on a $\overline{P_c^n(0)} = P_{\bar{c}}^n(0)$. Il s'ensuit que $|P_c^n(0)| = |P_{\bar{c}}^n(0)|$, et par la propriété 3, cela signifie que $c \in \mathcal{M}_1 \iff \bar{c} \in \mathcal{M}_1$. Finalement, la propriété 6 découle de la dynamique simplifiée des itérées $P_c^n(0)$ lorsque $c \in \mathbb{R}$ et elle sera utilisée plus loin dans le cadre de quelques démonstrations. Le lecteur intéressé peut retrouver cette dernière propriété dans [9, 33] ainsi qu'une preuve détaillée dans [33].

Maintenant, qu'advient-il si on itère plutôt un polynôme quadratique à valeurs hyperboliques plutôt qu'à valeurs complexes au regard de la Définition 3.1 ? C'est ce qu'a fait Senn [40] en 1990 en introduisant la définition suivante.

Définition 3.2. L'ensemble de Mandelbrot hyperbolique \mathcal{H} , appelé l'Hyperbrot, est constitué des points $c \in \mathbb{D}$ pour lesquels la suite des itérées du polynôme $P_c^n(z)$ évalué en $z = 0$ reste bornée :

$$\mathcal{H} := \left\{ c \in \mathbb{D} : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

La première chose qu'on remarque à la Figure 3.2, c'est que l'Hyperbrot semble être un carré, soit un polygone régulier convexe dépourvu de tout relief fractal, contrairement

à l'ensemble de Mandelbrot. D'ailleurs, en 1994, Metzler est parvenu à démontrer la caractérisation de \mathcal{H} suivante [27] :

$$\mathcal{H} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b| \leq \frac{9}{8} \right\}.$$

Cela démontre que l'Hyperbrot est effectivement un carré avec des côtés de longueur $\frac{9}{8}\sqrt{2}$. D'autre part, l'Hyperbrot peut être généralisé à l'aide de la même méthode que celle utilisée pour obtenir les ensembles Multibrots, c'est-à-dire en affectant à z un exposant $p \geq 2$ dans le polynôme $Q_c(z) = z^p + c$ où $c \in \mathbb{D}$. Dans les articles [30, 32], il est d'ailleurs démontré qu'on peut obtenir pour ces ensembles une caractérisation semblable à celle de \mathcal{H} , ce qui implique qu'ils sont également de forme carrée.



FIGURE 3.2 – L'ensemble de Mandelbrot hyperbolique \mathcal{H}

En comparant les ensembles \mathcal{M}_1 et \mathcal{H} , on conclut qu'en deux dimensions, l'espace dans lequel les itérées du polynôme $P_c^n(0)$ évoluent influence grandement l'allure de l'ensemble correspondant. De façon intéressante, on constatera plus loin que c'est aussi le cas en trois dimensions. On verra également qu'en dynamique tricomplexe, les ensembles \mathcal{M}_1 et \mathcal{H} sont les éléments de base intervenant dans la majorité des résultats afférents aux caractérisations géométriques présentées dans les trois dernières sections de ce chapitre.

3.1.2 Généralisations aux espaces multicomplexes

Le passage aux dimensions supérieures via les nombres bicomplexes et tricomplexes tel que présenté au chapitre 2 apporte son lot de nouveautés à l'étude des fractales issues de systèmes dynamiques, notamment grâce aux ensembles de Mandelbrot généralisés. On verra que ces objets, abstraits et mystérieux car impossibles à visualiser dans leur totalité, peuvent être représentés partiellement sous plusieurs angles en effectuant diverses projections tridimensionnelles. Avant d'en arriver là, il convient d'introduire d'abord quelques définitions et résultats.

Premièrement, on peut utiliser le support des nombres bicomplexes pour généraliser l'ensemble \mathcal{M}_1 . C'est ce qu'a fait Rochon [37] quand il a introduit l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe en quatre dimensions.

Définition 3.3. L'ensemble de Mandelbrot bicomplexe \mathcal{M}_2 est défini comme l'ensemble des points $c \in \mathbb{BC}$ tel que la suite des itérées du polynôme $P_c^n(\eta)$ évalué en $\eta = 0$ reste bornée. En d'autres mots,

$$\mathcal{M}_2 := \left\{ c \in \mathbb{BC} : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Il est bon de souligner que l'inclusion $\mathbb{D} \subset \mathbb{BC}$ implique que l'Hyperbrot (Définition 3.2) correspond en fait à la projection de \mathcal{M}_2 sur le plan hyperbolique². Cela signifie que la restriction des nombres bicomplexes aux nombres hyperboliques permet de cibler le sous-espace dans lequel se manifeste une simplification de la dynamique des itérées du polynôme $P_c(z)$ à l'égard de l'ensemble \mathcal{M}_2 . À ce sujet, la dernière section de ce chapitre présente le cas analogue pour l'ensemble en huit dimensions défini ci-bas, introduit par Garant-Pelletier et Rochon [19, 20] en employant les nombres tricomplexes.

Définition 3.4. L'ensemble de Mandelbrot tricomplexe \mathcal{M}_3 est défini comme l'ensemble des points $c \in \mathbb{TC}$ tel que la suite des itérées du polynôme $P_c^n(\eta)$ évalué en $\eta = 0$ reste bornée. Autrement dit,

$$\mathcal{M}_3 := \left\{ c \in \mathbb{TC} : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

2. Dans son article portant sur sa découverte de l'Hyperbrot, Senn [40] ne considérait toutefois pas les nombres hyperboliques comme un sous-anneau des nombres bicomplexes.

Tout comme une grande partie de ce qui suit, ces définitions peuvent être généralisées davantage en posant $c \in \mathbb{M}(n)$ avec $n \in \mathbb{N}$, auquel cas on obtient l'ensemble de Mandelbrot n -complexe \mathcal{M}_n introduit par Garant-Pelletier [19, 20]. On peut également employer le polynôme $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$ où $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$ afin d'obtenir les Multibrots tricomplexes \mathcal{M}_3^p étudiés par Parisé [30, 31, 32, 33]. Si on considère simultanément ces généralisations, on obtient les Multibrots multicomplexes \mathcal{M}_n^p , dont les résultats afférents proviennent de Brouillette [6, 7].

Maintenant, on introduit certains produits d'ensembles similaires au produit cartésien permettant de voir de quelle façon le processus de duplication utilisé pour engendrer les algèbres multicomplexes se manifeste au regard des ensembles de Mandelbrot généralisés.

Définition 3.5. Le produit \mathbb{BC} -cartésien déterminé par les ensembles $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ est défini comme

$$X_1 \times_{\gamma_1} X_2 := \{w \in \mathbb{BC} : w = w_1\gamma_1 + w_2\overline{\gamma_1}, (w_1, w_2) \in X_1 \times X_2\}$$

où \times correspond au produit cartésien usuel.

On remarque que le produit \mathbb{BC} -cartésien découle directement de la représentation idempotente d'un nombre bicomplexe et qu'il associe le produit cartésien de deux sous-ensembles complexes à un sous-ensemble bicomplexe. D'ailleurs, Rochon [37] a démontré une propriété fondamentale de l'ensemble \mathcal{M}_2 en conformité avec ce fait.

Théorème 3.2. L'ensemble de Mandelbrot bicomplexe correspond au produit \mathbb{BC} -cartésien de deux copies de l'ensemble de Mandelbrot classique : $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1$.

De plus, en constatant que l'application $\Gamma_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times_{\gamma_1} X_2$ telle que

$$\Gamma_1(w_1, w_2) \mapsto w_1\gamma_1 + w_2\overline{\gamma_1}$$

est un homéomorphisme, c'est-à-dire une application bijective et continue dont la bijection réciproque est également continue, les propriétés topologiques partagées par X_1 et X_2 seront également valides pour $X_1 \times_{\gamma_1} X_2$ et inversement. En particulier, les propriétés 1, 2 et 4 du Théorème 3.1 nous conduisent au résultat suivant.

Théorème 3.3. L'ensemble de Mandelbrot bicomplexe \mathcal{M}_2 est connexe et compact.

Comme on peut s'en douter, on peut aussi définir un produit cartésien analogue au précédent sur l'espace des nombres tricomplexes. Il en découle pour \mathcal{M}_3 une caractérisation semblable à celle de \mathcal{M}_2 ³.

Définition 3.6. Le produit TC-cartésien selon γ_3 déterminé par $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{BC}$ est l'ensemble

$$X_1 \times_{\gamma_3} X_2 := \{\eta \in \mathbb{TC} : \eta = \eta_1 \gamma_3 + \eta_2 \overline{\gamma_3}, (\eta_1, \eta_2) \in X_1 \times X_2\}$$

où \times dénote le produit cartésien usuel.

Théorème 3.4. $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_3} \mathcal{M}_2$. De plus, l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est connexe et compact.

En outre, on peut également combiner les théorèmes 3.2 et 3.4 pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. On a $\mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1) \times_{\gamma_3} (\mathcal{M}_1 \times_{\gamma_1} \mathcal{M}_1)$.

Qu'en est-il des autres représentations idempotentes nouvellement obtenues sur l'anneau des nombres tricomplexes ? Est-ce qu'elles admettent une représentation semblable de l'ensemble \mathcal{M}_3 ? Il s'agit là du premier point traité dans la prochaine section.

3.2 Dynamique des itérées et coupes tridimensionnelles

On présente maintenant quelques propriétés supplémentaires en lien avec les itérées du polynôme $P_c(\eta)$ où $\eta, c \in \mathbb{TC}$. Puis, après avoir énoncé certains résultats en découlant, nous aborderons les coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, leur classification ainsi que certains sous-espaces importants par rapport aux caractérisations géométriques présentées dans les sections subséquentes.

3. Notons que Brouillette l'énonce dans le cas plus général des Multibrots multicomplexes [6].

3.2.1 Itérées du polynôme $P_c(\eta)$

En premier lieu, les représentations γ_2 et γ_1 -idempotentes d'un nombre tricomplexe (théorèmes 2.7 et 2.8) et leurs propriétés amènent au résultat suivant.

Proposition 3.1. Soient $\eta, c \in \mathbb{TC}$. On a

$$P_c^n(\eta) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2}$$

ainsi que

$$P_c^n(\eta) = P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4) \gamma_1 + P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4) \overline{\gamma_1},$$

et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Commençons par la première égalité et procédons par induction. Si $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} P_c^1(\eta) &= \eta^2 + c \\ &= [(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1)^2 \gamma_2 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1)^2 \overline{\gamma_2}] + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2} \\ &= \left((\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1)^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \right) \gamma_2 + \left((\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1)^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \right) \overline{\gamma_2} \\ &= P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^1(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^1(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2}, \end{aligned}$$

tel que voulu. En supposant maintenant que

$$P_c^{n-1}(\eta) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} P_c^n(\eta) &= \left(P_c^{n-1}(\eta) \right)^2 + c \\ &= \left(P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2} \right)^2 + [(c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2}] \\ &= \left(P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \right)^2 \gamma_2 + \left(P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \right)^2 \overline{\gamma_2} + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2} \\ &= \left(\left(P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \right)^2 + (c_1 - c_2 \mathbf{i}_1) \right) \gamma_2 + \left(\left(P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^{n-1}(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \right)^2 + (c_1 + c_2 \mathbf{i}_1) \right) \overline{\gamma_2} \\ &= P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Par le principe d'induction, on arrive donc au résultat désiré. On peut procéder de manière tout à fait similaire pour la représentation γ_1 -idempotente. ■

Remarque 3.1. Il est bon de mentionner que la représentation γ_3 -idempotente énoncée au Théorème 2.3 possède une propriété similaire, à savoir [33]

$$P_c^n(\eta) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2) \gamma_3 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2) \overline{\gamma_3}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme conséquence directe, nous avons la proposition suivante.

Proposition 3.2. Soient $\eta, c \in \mathbb{TC}$. Les énoncés suivants s'équivalent :

- 1) La suite $\{P_c^n(\eta)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ;
- 2) Les suites $\{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées ;
- 3) Les suites $\{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées ;
- 4) Les suites $\{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Démonstration.

Dans le contexte, le plus simple serait de montrer que 1) \Leftrightarrow 2), 1) \Leftrightarrow 3) et 1) \Leftrightarrow 4). En effet, en combinant la Remarque 3.1 et la Proposition 3.1 à la Proposition 2.9, on peut voir que

$$\|P_c^n(\eta)\|_3 = \sqrt{\frac{\|P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2)\|_2^2 + \|P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_2}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2)\|_2^2}{2}},$$

$$\|P_c^n(\eta)\|_3 = \sqrt{\frac{\|P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_1)\|_2^2 + \|P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_1)\|_2^2}{2}}$$

et

$$\|P_c^n(\eta)\|_3 = \sqrt{\frac{\|P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4)\|_3^2 + \|P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_4}^n(\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4)\|_3^2}{2}}.$$

Comme les équivalences recherchées peuvent être immédiatement déduites des égalités précédentes, on a le résultat. ■

Remarque 3.2. En posant $\eta = a_1 \gamma_1 \gamma_3 + a_2 \overline{\gamma_1} \gamma_3 + a_3 \gamma_1 \overline{\gamma_3} + a_4 \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$ et $c = c_1 \gamma_1 \gamma_3 + c_2 \overline{\gamma_1} \gamma_3 + c_3 \gamma_1 \overline{\gamma_3} + c_4 \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$, on a également [33]

$$P_c^n(\eta) = P_{c_1}^n(a_1) \gamma_1 \gamma_3 + P_{c_2}^n(a_2) \overline{\gamma_1} \gamma_3 + P_{c_3}^n(a_3) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + P_{c_4}^n(a_4) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}$$

d'où

$$\{P_c^n(\eta)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée } \Leftrightarrow \{P_{c_i}^n(a_i)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée } \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

D'autre part, il devient possible de définir deux nouveaux types de produits TC-cartésiens.

Définition 3.7. Le produit TC-cartésien selon γ_2 déterminé par $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{BC}$ est l'ensemble

$$Y_1 \times_{\gamma_2} Y_2 := \{v \in \mathbb{TC} : v = v_1 \gamma_2 + v_2 \overline{\gamma_2}, (v_1, v_2) \in Y_1 \times Y_2\}$$

tandis que le produit TC-cartésien selon γ_1 des sous-ensembles $Z_1, Z_2 \subseteq \mathbb{TC}$ correspond à

$$Z_1 \times_{\gamma_1}^{\mathbb{TC}} Z_2 := \{\zeta \in \mathbb{TC} : \zeta = \zeta_1 \gamma_1 + \zeta_2 \overline{\gamma_1}, (\zeta_1, \zeta_2) \in Z_1 \times Z_2\}$$

où \times dénote le produit cartésien usuel.

Les propositions précédentes nous conduisent alors à de nouvelles caractérisations de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe.

Théorème 3.5. $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_3 \times_{\gamma_1}^{\mathbb{TC}} \mathcal{M}_3$.

Démonstration.

Posons $c \in \mathbb{TC}$. Pour commencer, remarquons que

$$P_c^n(0) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(0) \gamma_2 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(0) \overline{\gamma_2}$$

ainsi que

$$P_c^n(0) = P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_4}^n(0) \gamma_1 + P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_4}^n(0) \overline{\gamma_1}$$

par la Proposition 3.1. En utilisant ensuite la Proposition 3.2 et les définitions 3.4 et 3.7, on voit que

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{M}_3 &\iff \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\iff \{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \\ &\iff c_1 - c_2 \mathbf{i}_1, c_1 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_2 \\ &\iff c \in \mathcal{M}_2 \times_{\gamma_2} \mathcal{M}_2. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{M}_3 &\iff \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\iff \{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_4}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_4}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff c_1 + c_2 \mathbf{i}_4, c_1 - c_2 \mathbf{i}_4 \in \mathcal{M}_3 \\ &\iff c \in \mathcal{M}_3 \times_{\gamma_1}^{\mathbb{TC}} \mathcal{M}_3, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Ainsi, on peut répondre par l'affirmative à la question posée à la toute fin de la section 3.1. Soulignons que la seconde égalité dans l'énoncé du théorème précédent est intrigante puisqu'elle exprime l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe comme un produit \mathbb{TC} -cartésien de deux copies de lui-même. En ce sens, le produit \mathbb{TC} -cartésien selon γ_1 introduit à la Définition 3.7 mériterait d'être analysé de manière approfondie afin d'expliquer cette particularité.

3.2.2 Coupes tridimensionnelles de \mathcal{M}_3

Rappelons que l'objet au centre de notre étude, soit l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe, est en huit dimensions. Malgré le fait que notre perception sensorielle solidement encrée en trois dimensions ne nous permette pas de contempler cette fractale dans son intégralité, il est toutefois possible d'étudier ses déclinaisons variées à l'aide de **coupes tridimensionnelles**, qui correspondent aux diverses projections de \mathcal{M}_3 sur les sous-espaces vectoriels en trois dimensions de \mathbb{TC} . Afin d'uniformiser la présentation avec celle des mémoires [6, 19, 33], la notation suivante est introduite.

Définition 3.8. Considérons trois unités distinctes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$. L'ensemble

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) &:= \{c \in \mathbb{TC} : c = c_1 \mathbf{i}_k + c_2 \mathbf{i}_l + c_3 \mathbf{i}_m, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m\} \end{aligned}$$

correspond au sous-espace vectoriel de \mathbb{TC} engendré par les unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et \mathbf{i}_m .

En choisissant donc trois unités différentes parmi les huit possibles, on obtient un sous-espace vectoriel de \mathbb{TC} en trois dimensions dont il est possible de visualiser les points par ordinateur. Ainsi, une coupe tridimensionnelle de \mathcal{M}_3 est l'ensemble des points $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ pour lesquels la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ reste bornée. Plus formellement, nous avons la définition suivante.

Définition 3.9. Soit $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ un nombre tricomplexe ayant seulement les composantes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m$ et \mathbf{i}_l^a non nulles. Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

On appelle $\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l)$ la coupe tridimensionnelle de \mathcal{M}_3 associée aux unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l$.

a. Rappelons que celles-ci sont toujours distinctes en vertu de la Définition 3.8.

Soulignons que la définition précédente concerne le cas tricomplexe. Il serait possible d'en introduire une similaire pour décrire les coupes tridimensionnelles de l'ensemble \mathcal{M}_2 , mais ce n'est pas nécessaire. En effet, puisque l'espace des nombres tricomplexes est obtenu en dupliquant celui des nombres bicomplexes, toutes les combinaisons d'unités présentes dans \mathbb{BC} se retrouvent également dans \mathbb{TC} .

Remarque 3.3. Une manière équivalente de définir une coupe tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe est la suivante :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_m, \mathbf{i}_l) = \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \cap \mathcal{M}_3.$$

On souhaite maintenant étudier ces $\binom{8}{3} = 56$ coupes. Or, en explorant celles-ci à l'aide du logiciel expérimental MBE8D, on peut constater que plusieurs d'entre elles sont visuellement identiques. Afin de démystifier ce phénomène, V. Garant-Pelletier et D. Rochon [19, 20] ont introduit une relation d'équivalence permettant de les classer selon leur dynamique. L'intérêt d'une telle classification réside dans le fait que les coupes 3D appartenant à une même classe d'équivalence sont visuellement les mêmes, ce qui entraîne une réduction considérable du nombre de coupes à étudier : il suffit d'en choisir une par classe d'équivalence.

Ces résultats ont par la suite été repris puis généralisés de plusieurs façons, notamment par Parisé [30, 31, 32, 33] et Brouillette [6, 7]. Ce dernier propose d'ailleurs dans ses écrits une classification détaillée des coupes tridimensionnelles des Multibrots multicomplexes \mathcal{M}_n^p en fonction de la parité de l'exposant $p \geq 2$ dans le polynôme $Q_{p,c}(\eta)$.

En outre, un résultat important de Brouillette et Rochon permet d'établir l'optimalité de l'espace des nombres tricomplexes, en ce sens que toutes les dynamiques tridimensionnelles

principales existant dans $\mathbb{M}(n)$ se retrouvent dans $\mathbb{M}(3) = \mathbb{TC}$, à une transformation affine près. Cela signifie, pour le cas des coupes principales, qu'il est inutile de pousser l'exploration plus loin que les nombres tricomplexes puisqu'aucune nouvelle structure 3D ne se trouve dans les espaces $\mathbb{M}(n)$ pour $n \geq 4$. Pour plus de détails, le lecteur est référé à [6] ou [7].

Des 56 coupes initiales possibles, il n'en reste maintenant que huit visuellement distinctes : on les appelle les coupes tridimensionnelles principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe. Celles-ci sont

Le Tetrabrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$; L'Hourglassbrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$;
 L'Arrowheadbrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$; Le Metabrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$;
 Le Mousebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$; L'Airbrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$;
 Le Turtlebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$; Le Firebrot $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$.

Soulignons que le choix de ces coupes particulières en tant que représentantes de leur classe d'équivalence est arbitraire, sauf dans le cas du Firebrot qui est le seul élément de sa classe d'équivalence⁴. Une attention particulière a été portée à cette coupe en raison de ses propriétés remarquables.

Maintenant, le lecteur attentif aura remarqué que les sous-espaces vectoriels $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ ne sont pas fermés sous la multiplication tricomplexe. On en déduit que pour $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$, on a $P_c^n(0) \notin \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ dès que $n \geq 2$. En fait, à l'origine, le sous-espace dans lequel se retrouvent les valeurs de la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ permettait de séparer les huit coupes principales en deux groupes de quatre : celles dont les itérées restent dans un sous-espace de \mathbb{TC} à quatre dimensions, et celles dont les itérées évoluent directement dans \mathbb{TC} .

Remarque 3.4 (Erratum). Dans les ouvrages [19, 20, 33], la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ est erronément groupée avec les coupes dont les itérées évoluent dans \mathbb{TC} . Dans les faits, les itérées de la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour $c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ demeurent plutôt dans le sous-espace à quatre dimensions des nombres biduplexes $\mathbb{D}(2)$.

De surcroît, on verra dans les prochaines sections que le type de sous-espace dans lequel évoluent les itérées $P_c^n(0)$ de $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ détermine certaines propriétés géométriques

4. Il est possible de retrouver l'ensemble des coupes figurant dans chaque classe d'équivalence, aussi appelées les *symétries* des coupes tridimensionnelles principales, dans [19, 20, 33].

de la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ correspondante. Il apparaît donc légitime de scinder en deux le premier groupe évoqué précédemment en distinguant les coupes dont les itérées restent dans un sous-espace isomorphe à \mathbb{BC} de celles dont les itérées demeurent dans $\mathbb{D}(2)$. Dans cette optique, il convient d'introduire les sous-espaces suivants afin de formaliser cette nouvelle catégorisation.

Définition 3.10. Prenons trois unités distinctes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$.

L'espace

$$\text{It}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) := \text{span}_{\mathbb{R}}\{P_c^n(0) : c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$$

est appelé **espace des itérées** de $P_c^n(0)$ et correspond à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies d'itérées $P_c^n(0)$ pour $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$.

Soulignons que la dernière définition correspond à un cas particulier de celle formulée dans [6], tandis que celle qui suit provient de [19].

Définition 3.11. Soient deux unités distinctes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$. On désigne $\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l)$ le sous-espace vectoriel engendré par les unités $1, \mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l$ et $\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l$:

$$\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) := \{x_1 + x_2 \mathbf{i}_k + x_3 \mathbf{i}_l + x_4 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

On remarque que ces sous-espaces sont tous fermés sous l'addition et la multiplication. D'ailleurs, Garant-Pelletier [19] a démontré que $(\mathbb{M}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l), +, \cdot) \simeq (\mathbb{BC}, +, \cdot)$ aussitôt que $\mathbf{i}_k \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$ et $\mathbf{i}_l \in \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\} \setminus \{\mathbf{i}_k\}$. Toutefois, cela ne couvre pas tous les cas envisageables : l'autre possibilité pouvant survenir est celle où $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l \in \{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ avec $\mathbf{i}_k \neq \mathbf{i}_l$. Dans les trois cas sous-jacents, le sous-espace en quatre dimensions obtenu est isomorphe à celui des nombres biduplexes [19].

Maintenant, le résultat suivant caractérisant les espaces des itérées dans \mathbb{TC} se veut un cas particulier de la Proposition 4.1.7 énoncée dans [6].

Théorème 3.6. Soient trois unités distinctes $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m \in \{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$. Dans ce cas,

- 1) Si $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$, alors $\text{It}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \mathbb{M}(\mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$;
- 2) Si $\mathbf{i}_k \neq 1$ et $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \neq \pm \mathbf{i}_k$, alors $\text{It}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) = \mathbb{TC}$.

- a. Si l'une des unités parmi $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m$ est 1, on considère que $\mathbf{i}_k = 1$ sans perte de généralité.
- b. Si l'une des unités correspond au produit des deux autres à un signe près, on considère que $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$ sans perte de généralité.

Ainsi, en analysant les unités associées aux huit coupes tridimensionnelles principales, on constate que cinq d'entre elles sont telles que $\mathbf{i}_k = 1$ ou $\mathbf{i}_l \mathbf{i}_m = \pm \mathbf{i}_k$. De ce nombre, on compte trois coupes dont l'espace des itérés est isomorphe à \mathbb{BC} : le Tetrabrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, l'Arrowheadbrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ et le Mousebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$. Quant aux deux autres coupes dans cette situation, leur espace des itérées est isomorphe à $\mathbb{D}(2)$: il s'agit de l'Airbrot $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et du Firebrot $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. Finalement, on peut voir que les trois dernières coupes, soit le Turtlebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, l'Hourglassbrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et le Metabrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, ont un espace des itérées isomorphe à \mathbb{TC} .

Afin d'illustrer la signification du Théorème 3.6, chacune des trois prochaines sections est consacrée à l'étude des coupes tridimensionnelles principales correspondant à l'une des trois situations décrites dans le paragraphe précédent. Plus spécifiquement, on établira pour chaque coupe une caractérisation géométrique faisant ressortir le lien entre celle-ci et un certain nombre d'ensembles bidimensionnels. Cela permettra de clarifier l'incidence de l'espace des itérées propre à une coupe principale sur les propriétés de celle-ci.

D'ailleurs, il est intéressant de remarquer que c'est la structure des nombres bicomplexes et tricomplexes qui induit une telle relation entre des fractales 2D et 3D, puisque la représentation idempotente sur \mathbb{BC} ainsi que celles sur \mathbb{TC} sont à la base de l'approche préconisée plus bas. Cette dernière est donc possible directement en raison du procédé de duplication utilisé pour générer les algèbres multicomplexes.

Conséquemment, on peut interpréter cela comme une manifestation du fait que les propriétés des nombres multicomplexes apportent une richesse nouvelle au monde des fractales, richesse qui ne saurait être reproduite dans d'autres algèbres plus classiques comme les quaternions ou encore par les nombres paraboliques (*dual numbers*)⁵.

5. Pour plus d'informations sur ces structures algébriques, le lecteur intéressé peut consulter [23].

3.3 Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à \mathbb{BC}

En guise d'introduction à cette section, il convient d'arrimer les résultats précédents avec le cas bicomplexe correspondant à l'ensemble \mathcal{M}_2 . Nous avons déjà mentionné qu'il n'était pas nécessaire d'étudier les coupes tridimensionnelles de l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe, puisque celles-ci existent également dans l'ensemble \mathcal{M}_3 en raison de la présence dans \mathbb{TC} des unités associées à chacune de ces coupes. Supposons tout de même qu'on s'y intéresse en dépit de cela.

Puisqu'on doit choisir trois unités $\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m$ parmi $\{1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1\}$, on dénombre $\binom{4}{3} = 4$ coupes tridimensionnelles de \mathcal{M}_2 . En les énumérant, on voit que la coupe $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ correspond au Tetrabrot, tandis que les coupes $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ correspondent respectivement à l'Arrowheadbrot et au Mousebrot. Quant à la dernière coupe $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$, on pourrait montrer qu'elle possède la même dynamique tridimensionnelle que $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ [19, 33]. Ainsi, on déduit qu'il existe trois coupes principales de l'ensemble $\mathcal{M}_2 \subset \mathbb{BC}$ et qu'elles ont une dynamique tridimensionnelle identique à celle d'une coupe principale de \mathcal{M}_3 dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} . La caractérisation suivante est une conséquence directe de ce constat.

Théorème 3.7. Toute coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m) \subset \mathcal{M}_3$ est visuellement identique à une coupe tridimensionnelle principale de \mathcal{M}_2 si et seulement si $(\text{It}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), +, \cdot) \simeq (\mathbb{BC}, +, \cdot)$.



(a) Le Tetrabrot

(b) L'Arrowheadbrot

(c) Le Mousebrot

FIGURE 3.3 - Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$

Cela signifie qu'étudier les coupes principales de \mathcal{M}_3 dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} revient à étudier les coupes 3D de l'ensemble \mathcal{M}_2 . En fait, à l'origine (voir par exemple [37]), le Tetrabrot (Figure 3.3a) était défini comme tel :

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \left\{ c = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC} : \text{Im}(z_2) = 0 \text{ et } \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

De manière équivalente, une définition conforme à la Définition 3.9 donne

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Historiquement, il s'agit de la première coupe tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot bicomplexe (et tricomplexe) à avoir été étudiée. Dans l'article [37], l'auteur a d'ailleurs émis la conjecture que le Tetrabrot est non connexe. Bien que fortement appuyée par des calculs faits sur ordinateur, celle-ci demeure ouverte encore à ce jour. Afin d'investiguer sa plausibilité, une caractérisation géométrique a été établie, mais avant de l'aborder elle et sa preuve, il faut démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.1. Soient $w, c \in \mathbb{BC}$. On a

$$P_c^n(w) = P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 - w_2 \mathbf{i}_1) \gamma_1 + P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 + w_2 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1}.$$

De plus, $\{P_c^n(w)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 - w_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 + w_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.

Démonstration.

On peut démontrer l'identité polynomiale par induction en suivant exactement les mêmes étapes que celles étayées à la Proposition 3.1. En ce qui concerne l'équivalence du caractère borné de la suite $\{P_c^n(w)\}_{n \in \mathbb{N}}$ vis-à-vis celui des suites $\{P_{c_1 - c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 - w_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{c_1 + c_2 \mathbf{i}_1}^n(w_1 + w_2 \mathbf{i}_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$, le lecteur est référé à [37]. ■

Comme le lecteur l'aura remarqué, il s'agit de propriétés sur l'espace des nombres bicomplexes analogues à celles présentées à la section précédente sur l'espace des nombres tricomplexes. Puisque les itérées des trois coupes principales à l'étude dans cette section demeurent directement dans \mathbb{BC} par le Théorème 3.6, la représentation idempotente sur \mathbb{BC} énoncée au Théorème 2.1 et les propriétés qui précèdent seront suffisantes pour démontrer la caractérisation évoquée plus haut provenant de [37] ainsi que les deux qui suivront.

Théorème 3.8. Le Tetrabrot peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}$$

où

$$m := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p + q\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}.$$

Démonstration.

Soit $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$. Comme $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$, la représentation idempotente énoncée au Théorème 2.1 permet d'écrire

$$c = (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1.$$

où $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1, c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$. Par le Lemme 3.1 ainsi que les définitions 3.9 et 3.1, on a donc

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\Leftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow \{P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \\ &\Leftrightarrow c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \text{ et } c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1. \end{aligned}$$

En remarquant maintenant que $\mathcal{M}_1 - z = \{c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : \{P_{c+z}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ et ce $\forall z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on constate que $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$ et $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$ si et seulement si $c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)$. Par la suite, en réécrivant en conséquence la définition du Tetrabrot, on obtient

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) = \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ = \{c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 : c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\} \quad (3.1)$$

$$= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}. \quad (3.2)$$

Puis, par définition de m , on peut constater que $\mathcal{M}_1 \subset \{z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : |\text{Im}(z)| \leq m\}$ (voir la Figure 3.1). Cela implique que $(\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1) = \emptyset$ dès que $y \in [-m, m]^c$. Ainsi, on peut réécrire (3.2) comme étant

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}.$$

De plus, $(\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1) \neq \emptyset$, $\forall y \in [-m, m]$. En effet, définissons l'ensemble

$$E_y := \left\{ c = c_1 + 0\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

avec $y \in [-m, m]$. On peut interpréter E_y comme l'ensemble des points de la forme $c_1 + y\mathbf{i}_2$ (le y est fixé) qui font partie de l'ensemble de Mandelbrot bidimensionnel situé dans le plan $\mathbb{C}(\mathbf{i}_2)$. Dès lors, si $y = m$, alors par la compacité de \mathcal{M}_1 il doit exister un nombre $x_m \in \mathbb{R}$ pour lequel on a $x_m + m\mathbf{i}_2 \in E_m$. De plus, la symétrie de \mathcal{M}_1 en fonction de l'axe réel nous assure que $x_m - m\mathbf{i}_2 \in E_{-m}$: ainsi, les ensembles E_m et E_{-m} sont non vides. Or, \mathcal{M}_1 est un ensemble connexe, ce qui implique que $E_y \neq \emptyset$, $\forall y \in [-m, m]$. Conséquemment, $\forall y \in [-m, m]$ on a

$$\begin{aligned} E_y &= \left\{ c = c_1 + 0\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\} \\ &\subset \left\{ c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\} \\ &= \{c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 : c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\} \end{aligned}$$

par (3.1). Ainsi, on peut conclure que $(\mathcal{M}_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - y\mathbf{i}_1) \neq \emptyset$, $\forall y \in [-m, m]$. ■

Le théorème qui précède dévoile donc le lien existant entre le Tetrabrot et l'ensemble de Mandelbrot classique. En effet, chaque coupe transversale de $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ perpendiculaire à l'axe \mathbf{i}_2 correspond à l'intersection de deux copies de \mathcal{M}_1 décalées en sens opposé le long de l'axe imaginaire associé à \mathbf{i}_1 pour une certaine valeur de $y \in [-m, m]$. La coupe tridimensionnelle est donc engendrée en considérant l'union de ces intersections, lesquelles sont disposées de manière continue selon l'axe \mathbf{i}_2 .

Maintenant, on se demande naturellement de quelle façon les autres coupes principales sont reliées à \mathcal{M}_1 . À ce sujet, la coupe

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

appelée l'Arrowheadbrot (Figure 3.3b), est l'objet du prochain théorème.

Théorème 3.9. La coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ admet la caractérisation suivante :

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) = \bigcup_{y \in \left[-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right]} \{[(\mathcal{M}_1 - y) \cap (\mathcal{M}_1 + y)] + y\mathbf{j}_1\}.$$

Démonstration.

Soit $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 \in \mathbb{B}\mathbb{C}$. Si on suppose que $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$, alors $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $c_3 = 0$ et donc $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1$. Sous sa représentation idempotente (Théorème 2.1), ce nombre bicomplexe s'écrit

$$\begin{aligned} c &= c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + (c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 \\ &= (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - (c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + (c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1 \\ &= (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_4)\gamma_1 + (c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_4)\overline{\gamma}_1, \end{aligned}$$

et en posant $d = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on obtient

$$c = (d + c_4)\gamma_1 + (d - c_4)\overline{\gamma}_1.$$

Puisque $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{d+c_4}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{d-c_4}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées par le Lemme 3.1, on a $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ si et seulement si $d + c_4, d - c_4 \in \mathcal{M}_1$. Ensuite, comme $\mathcal{M}_1 - z = \{c \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) : \{P_{c+z}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, et ce $\forall z \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on a également $d + c_4, d - c_4 \in \mathcal{M}_1$ ssi $d \in (\mathcal{M}_1 - c_4) \cap (\mathcal{M}_1 + c_4)$. Ainsi, en reprenant la définition initiale de la coupe $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ et en substituant d par $c_1 + c_2\mathbf{i}_1$, il vient que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) &= \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 : c_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 - c_4) \cap (\mathcal{M}_1 + c_4)\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}_1 - y) \cap (\mathcal{M}_1 + y)] + y\mathbf{j}_1\}. \end{aligned}$$

Ensuite, par la propriété 6 du Théorème 3.1, $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$. Dans ce cas, il est clair que $(\mathcal{M}_1 - y) \cap (\mathcal{M}_1 + y) = \emptyset$ dès que $y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]^c$. On peut donc écrire

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) = \bigcup_{y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]} \{[(\mathcal{M}_1 - y) \cap (\mathcal{M}_1 + y)] + y\mathbf{j}_1\}.$$

Signalons en terminant que le fait que $(\mathcal{M}_1 - y) \cap (\mathcal{M}_1 + y) \neq \emptyset$ pour tout $\forall y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]$ est assuré par la connexité de l'ensemble $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}$. ■

On déduit du théorème précédent que chaque coupe transversale de l'Arrowheadbrot qui est perpendiculaire à l'axe \mathbf{j}_1 correspond également à l'intersection de deux copies décalées de \mathcal{M}_1 . Toutefois, la translation se fait cette fois-ci selon l'axe réel pour $y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]$. On

retrouve tout de même la coupe tridimensionnelle dans son entièreté en prenant l'union de toutes ces intersections continument réparties selon l'axe \mathbf{j}_1 .

En outre, on remarque que tout comme celle du Tetrabrot, la caractérisation géométrique de la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{1}, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ fait intervenir deux copies de l'ensemble de Mandelbrot classique. Le prochain résultat, concernant la coupe

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

dénommée Mousebrot (Figure 3.3c), permet d'identifier la particularité des coupes principales dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} .

Théorème 3.10. Considérons la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$. On a l'égalité

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}$$

où

$$\mathcal{M}'_1 := \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$$

et

$$m := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p\mathbf{j}_1 + q\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}'_1\}.$$

Démonstration.

Soit $c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1$ avec $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ et donc tel que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On utilise la même stratégie que dans les cas précédents, qui consiste à exprimer le nombre c sous sa représentation idempotente pour obtenir deux composantes complexes :

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + (c_3 + c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 - (c_3 + c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (c_2\mathbf{i}_1 + (c_3 + c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1 \\ &= (c_4 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (-c_4 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1. \end{aligned}$$

Si on pose $d = c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, alors $-\bar{d} = -c_4 + c_2\mathbf{i}_1$. On obtient donc

$$c = (d - c_3\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (-\bar{d} + c_3\mathbf{i}_1)\overline{\gamma}_1.$$

Par le Lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}
c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &\Leftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\
&\Leftrightarrow \{P_{d-c_3\mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{-\bar{d}+c_3\mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \\
&\Leftrightarrow d - c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \text{ et } -\bar{d} + c_3\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \\
&\Leftrightarrow d \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \text{ et } -\bar{d} \in (\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1),
\end{aligned}$$

où on a employé un argument identique à celui des théorèmes 3.8 et 3.9. Or,

$$\begin{aligned}
-\bar{d} \in (\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1) &\Leftrightarrow d \in \overline{-(\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)} \\
&\Leftrightarrow d \in (-\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1),
\end{aligned}$$

par la propriété 5 du Théorème 3.1. Ainsi, $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si on a $d \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)$. En reprenant la définition initiale du Mousebrot, il vient que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\
&= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\}.
\end{aligned}$$

On voit apparaître un problème qui sera également rencontré dans la caractérisation d'autres coupes, à savoir que nous ne nous situons pas dans le même système d'axes que celui dans lequel se trouve le Mousebrot. En effet, $c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$. Pour contourner cette difficulté, on définit l'ensemble

$$\mathcal{M}'_1 := \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}.$$

Il s'agit de l'ensemble de Mandelbrot, mais dans un plan engendré par un axe imaginaire et un axe hyperbolique. En outre, il est immédiat que $c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}'_1$. On obtient ainsi les égalités

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3\mathbf{i}_1)\} \\
&= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 : c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}'_1 + c_3\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - c_3\mathbf{i}_1)\} \\
&= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que $\mathcal{M}'_1 \subset \{z \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_1\} : |\text{Im}(z)| \leq m\}$ par définition de m .

En conséquence, $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{i}_1) = \emptyset$ dès que $y \in [-m, m]^c$, et on peut écrire

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}.$$

De plus, mentionnons qu'un argument similaire à celui élaboré au Théorème 3.8 permet d'établir que $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{i}_1) \neq \emptyset$ dès que $y \in [-m, m]$. ■

Ainsi, chaque coupe transversale de $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ perpendiculaire à l'axe \mathbf{i}_2 s'exprime également comme l'intersection de deux ensembles similaires à \mathcal{M}_1 décalés sur l'axe \mathbf{i}_1 . Ce qui distingue cette caractérisation des deux précédentes, c'est surtout le fait qu'une réflexion selon ce même axe est effectuée sur l'un des ensembles \mathcal{M}'_1 . Sinon, cette coupe 3D est elle aussi engendrée par l'union de ces intersections disposées de manière continue selon l'axe \mathbf{i}_2 .

En outre, plus généralement, on conclut que la particularité géométrique des coupes tridimensionnelles principales dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} est qu'elles s'expriment comme l'union d'intersections de **deux** copies de l'ensemble de Mandelbrot, conformément au Théorème 3.2.

3.4 Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à \mathbb{TC}

Dans cette section, nous allons formuler une caractérisation géométrique se rapportant aux trois coupes principales pour lesquelles $(\text{It}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m), +, \cdot) \simeq (\mathbb{TC}, +, \cdot)$ en vertu du Théorème 3.6. En considérant que tout nombre tricomplexe admet généralement quatre composantes complexes, soit deux par composante bicomplexe, on peut déjà deviner quelle propriété géométrique sera partagée par les coupes 3D dans cette situation : celles-ci pourront probablement s'exprimer en fonction de quatre copies de l'ensemble de Mandelbrot, comme le laissait présager le Corollaire 3.1 .

Toutefois, tel que vu au chapitre 2, tout nombre $c \in \mathbb{TC}$ possède de multiples représentations idempotentes. Cela signifie qu'il existe généralement plus d'une façon de décomposer ce nombre, et donc plus d'une façon d'exprimer une coupe tridimensionnelle principale en fonction d'ensembles bidimensionnels. Puisque le Théorème 2.5 combiné à la Remarque 3.2 permet d'obtenir des résultats plus intuitifs et prévisibles, on privilégiera l'utilisation de



(a) Le Turtlebrot

(b) L'Hourglassbrot

(c) Le Metabrot

FIGURE 3.4 – Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$

ces propriétés. À ce sujet, la caractérisation géométrique de la coupe principale

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

appelée le Turtlebrot (Figure 3.4a), est un bon exemple de cas où l'utilisation de la représentation γ_3 -idempotente apparaît peu pratique.

Théorème 3.11. Le Turtlebrot peut être caractérisé de la manière suivante :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}_1^* \pm y\mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* \pm y\mathbf{i}_1)] + y\mathbf{i}_2\}$$

où

$$\mathcal{M}_1^* := \{c_6\mathbf{j}_2 + c_2\mathbf{i}_1 : c_6 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$$

et

$$m := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p\mathbf{j}_2 + q\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1^*\}.$$

Démonstration.

Soit $c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2$ avec $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Sous sa représentation γ_3 -idempotente, ce nombre s'écrit

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= ((c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2) - (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2)\gamma_3 + ((c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2) + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3} \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_6\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

On remarque que chaque composante bicomplexe se situe dans un sous-espace vectoriel à trois dimensions. Cela signifie qu'il n'est pas possible d'exprimer le Turtlebrot en fonction d'ensembles bidimensionnels en utilisant la Proposition 3.2⁶. Tel qu'évoqué précédemment, on adapte notre stratégie en employant plutôt le Théorème 2.5, puisqu'il nous permet de décomposer le nombre c en quatre composantes complexes :

$$\begin{aligned}
c &= c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3) \mathbf{i}_2 + (c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3 \\
&= (c_2 \mathbf{i}_1 - (c_3 - c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1) \gamma_1 \gamma_3 + (c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3 - c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\
&\quad + (c_2 \mathbf{i}_1 - (c_3 + c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + (c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3 + c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3} \\
&= (-c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \gamma_1 \gamma_3 + (c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\
&\quad + (c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + (-c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3} \\
&= (-\bar{d} - c_3 \mathbf{i}_1) \gamma_1 \gamma_3 + (d + c_3 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\
&\quad + (d - c_3 \mathbf{i}_1) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + (-\bar{d} + c_3 \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3},
\end{aligned}$$

où on a posé $d = c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1) \Rightarrow -\bar{d} = -c_6 + c_2 \mathbf{i}_1$. Par la Remarque 3.2, la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi les suites $\{P_{-\bar{d}-c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{P_{d+c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{P_{d-c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-\bar{d}+c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Or, ces quatre suites d'itérées sont en tous points semblables à celles intervenant dans la construction du Tetrabrot et du Mousebrot. Par conséquent, de manière analogue au Tetrabrot, on déduit que les suites $\{P_{d+c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{d-c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées si et seulement si $d \in (\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1)$, tandis que de façon similaire au Mousebrot, le caractère borné des suites $\{P_{-\bar{d}-c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-\bar{d}+c_3 \mathbf{i}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalent à ce que

$$-\bar{d} \in (\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \Leftrightarrow d \in (-\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1).$$

Ces conditions devant être satisfaites simultanément, on déduit des inclusions précédentes qu'on doit avoir $d \in (\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\
&= \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 + c_6 \mathbf{j}_2 : \\
&\quad c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1)\}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Pour pallier ce problème, on définit l'ensemble

6. Notons qu'un problème similaire est rencontré en utilisant la représentation γ_2 -idempotente.

$\mathcal{M}_1^* := \{c_6 \mathbf{j}_2 + c_2 \mathbf{i}_1 : c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$, ce qui a pour effet de ramener la caractérisation dans le bon sous-espace vectoriel, puisque $c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow c_6 \mathbf{j}_2 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1^*$. De cette façon,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &= \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 + c_6 \mathbf{j}_2 : \\ &\quad c_6 + c_2 \mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_3 \mathbf{i}_1)\} \\ &= \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 + c_6 \mathbf{j}_2 : \\ &\quad c_6 \mathbf{j}_2 + c_2 \mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1^* + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1^* - c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* + c_3 \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* - c_3 \mathbf{i}_1)\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}_1^* + y \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1^* - y \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* + y \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* - y \mathbf{i}_1)] + y \mathbf{i}_2\}. \end{aligned}$$

De plus, on peut restreindre l'intervalle réel dans lequel le paramètre y varie à un intervalle de la forme $[-m, m]$ de la même manière qu'aux théorèmes 3.8 et 3.10 étant donné que $\mathcal{M}_1^* \subset \{z \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}_2, \mathbf{i}_1\} : |\text{Im}(z)| \leq m\}$. Ce faisant, on arrive à

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) = \bigcup_{y \in [-m, m]} \{[(\mathcal{M}_1^* + y \mathbf{i}_1) \cap (\mathcal{M}_1^* - y \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* + y \mathbf{i}_1) \cap (-\mathcal{M}_1^* - y \mathbf{i}_1)] + y \mathbf{i}_2\},$$

ce qui conclut la preuve. ■

Tel qu'attendu, dans le cas du Turtlebrot, chaque coupe transversale étant perpendiculaire à l'axe \mathbf{i}_2 correspond à l'intersection de quatre copies de l'ensemble \mathcal{M}_1 transposé dans le sous-espace vectoriel $\text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}_2, \mathbf{i}_1\}$. Il est d'ailleurs important de souligner que la translation appliquée à ces ensembles s'effectue selon l'axe imaginaire \mathbf{i}_1 , puisque dans le cas de la coupe principale

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

prénommée Hourglassbrot (Figure 3.41), le décalage en question s'effectue autrement.

Théorème 3.12. La coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ possède la caractérisation suivante :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \bigcup_{y \in [-r, r]} \{[(\pm \mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\pm \mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\}$$

où, du Théorème 3.10,

$$\mathcal{M}'_1 := \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$$

et

$$r := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } q\mathbf{j}_1 + p\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}'_1\}.$$

Démonstration.

Soit $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) \subset \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$. Par le Théorème 2.5, on a

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + (c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 - (c_4\mathbf{i}_1 - c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1\gamma_3 + (c_2\mathbf{i}_1 + (c_4\mathbf{i}_1 - c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ &\quad + (c_2\mathbf{i}_1 - (c_4\mathbf{i}_1 + c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (c_2\mathbf{i}_1 + (c_4\mathbf{i}_1 + c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} \\ &= (c_4 + c_2\mathbf{i}_1 - c_6)\gamma_1\gamma_3 + (-c_4 + c_2\mathbf{i}_1 + c_6)\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ &\quad + (c_4 + c_2\mathbf{i}_1 + c_6)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (-c_4 + c_2\mathbf{i}_1 - c_6)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} \\ &= (d - c_6)\gamma_1\gamma_3 + (-\bar{d} + c_6)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (d + c_6)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (-\bar{d} - c_6)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

où $d = c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \Rightarrow -\bar{d} = -c_4 + c_2\mathbf{i}_1$. Par la Remarque 3.2, il s'ensuit que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{d-c_6}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{P_{-\bar{d}+c_6}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{P_{d+c_6}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-\bar{d}-c_6}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, et par des arguments semblables à ceux invoqués au Théorème 3.11, cela est équivalent à $d \in (\mathcal{M}_1 + c_6) \cap (-\mathcal{M}_1 + c_6) \cap (\mathcal{M}_1 - c_6) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_6)$.

Ensuite, comme $d = c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, on doit avoir recours une nouvelle fois à l'ensemble $\mathcal{M}'_1 = \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$ introduit au Théorème 3.10. Puisque $\mathcal{M}'_1 + c_6\mathbf{j}_1 = \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_6)\}$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : \\ &\quad c_4 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}_1 + c_6) \cap (-\mathcal{M}_1 + c_6) \cap (\mathcal{M}_1 - c_6) \cap (-\mathcal{M}_1 - c_6)\} \\ &= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : \\ &\quad c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 \in (\mathcal{M}'_1 + c_6\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + c_6\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - c_6\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - c_6\mathbf{j}_1)\} \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\}.$$

En analysant les propriétés géométriques des ensembles intervenant à la ligne précédente, on remarque qu'il est possible de restreindre les valeurs que prend le paramètre y à un intervalle fermé similaire à celui des théorèmes qui précèdent. En effet, commençons par l'expression $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1)$. En omettant l'ajout du monôme $y\mathbf{j}_1$ se traduisant par une translation sur l'axe \mathbf{j}_1 , il reste $\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$. Comme, dans notre contexte, le signe négatif devant \mathcal{M}'_1 s'apparente à effectuer sur cet ensemble une réflexion selon l'axe \mathbf{i}_1 , il est immédiat que l'ensemble $\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$ (illustré à la Figure 3.5) est symétrique selon ce même axe. Ainsi, $(\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1) \subset \{c_4\mathbf{j}_1 + c_2\mathbf{i}_1 : |c_4| \leq r\}$.

En constatant ensuite que $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) = (\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1) + y\mathbf{j}_1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on déduit que l'expression $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1)$ est égale à $[(\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1) + y\mathbf{j}_1] \cap [(\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1) - y\mathbf{j}_1]$, soit l'intersection de deux copies de l'ensemble $\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$ décalées en sens inverse sur l'axe \mathbf{j}_1 . Ainsi, il apparaît clair que $(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) = \emptyset$ dès que $y \in [-r, r]^c$. Conséquemment,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\} \\ &= \bigcup_{y \in [-r, r]} \{[(\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 + y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{M}'_1 - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

De façon intéressante, la représentation γ_3 -idempotente peut être employée pour arriver à un résultat équivalent, mais ne faisant intervenir que deux ensembles bidimensionnels. En effet, comme $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, on a

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 - c_6\mathbf{j}_1)\gamma_3 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_1)\overline{\gamma_3} \\ &= (d - c_6\mathbf{j}_1)\gamma_3 + (d + c_6\mathbf{j}_1)\overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

où $d = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1$. Dans ce cas, la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{d-c_6\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{d+c_6\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. En définissant alors l'ensemble $B := \{b \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1\} : \{P_b^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, on constate que $\{P_{d-c_6\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et

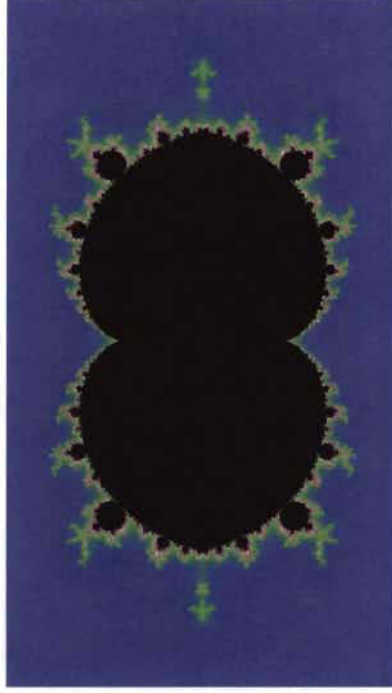


FIGURE 3.5 – L'ensemble $(\mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1) \subset \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{j}_1, \mathbf{i}_1\}$. Les axes horizontal et vertical sont respectivement associés à \mathbf{j}_1 et \mathbf{i}_1 .

$\{P_{d+c_6\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées si et seulement si on a $d \in (B + c_6\mathbf{j}_1) \cap (B - c_6\mathbf{j}_1)$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \{c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 \in (B + c_6\mathbf{j}_1) \cap (B - c_6\mathbf{j}_1)\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{(B + y\mathbf{j}_1) \cap (B - y\mathbf{j}_1)\} + y\mathbf{j}_2 \\ &= \bigcup_{y \in [-\beta, \beta]} \{(B + y\mathbf{j}_1) \cap (B - y\mathbf{j}_1)\} + y\mathbf{j}_2, \end{aligned}$$

où $\beta := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p\mathbf{i}_1 + q\mathbf{j}_1 \in B\}$, et on a le résultat souhaité.

Cependant, pour que le passage de $y \in \mathbb{R}$ à l'intervalle $y \in [-\beta, \beta]$ soit valide, il faudrait que l'ensemble B soit symétrique selon l'axe hyperbolique \mathbf{j}_1 , ce qui n'a pas encore été démontré formellement. Qui plus est, on est en droit de s'interroger sur le lien entre les deux caractérisations de la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$. Il s'avère que ces questions admettent une réponse commune, puisque $B = \mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$. En effet, si on pose $c = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 \in B$, on a $c = (c_4 + c_2\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (-c_4 + c_2\mathbf{i}_1)\bar{\gamma}_1$. En posant $d = c_4 + c_2\mathbf{i}_1$, on obtient $-\bar{d} = -c_4 + c_2\mathbf{i}_1$ et il s'ensuit que

$$c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 \in B \Leftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{-\bar{d}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \\
&\Leftrightarrow d \in \mathcal{M}_1 \text{ et } -\bar{d} \in \mathcal{M}_1 \\
&\Leftrightarrow d \in \mathcal{M}_1 \cap -\mathcal{M}_1 \\
&\Leftrightarrow c_4 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \cap -\mathcal{M}_1 \\
&\Leftrightarrow c_4 \mathbf{j}_1 + c_2 \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1.
\end{aligned}$$

On conclut donc que $B = \mathcal{M}'_1 \cap -\mathcal{M}'_1$ et que $\beta = r$. De surcroît, cela confirme qu'une pluralité de représentations idempotentes induit une pluralité de décompositions en fonctions d'ensembles bidimensionnels, même si ceux-ci sont interreliés.

En outre, il est bon de mentionner que les représentations idempotentes inutilisées dans cette section seront abordées de manière approfondie à la section 4.2, puisque leur étude au regard des trois coupes principales en cours d'analyse requiert l'introduction d'une certaine classe d'applications linéaires sur les sous-espaces vectoriels $\mathbb{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$. Maintenant, la coupe principale

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

intitulée le Metabrot (Figure 3.4c) admet elle aussi deux caractérisations qui expliquent bien pourquoi le Metabrot semble être un octaèdre dont la frontière comporte un aspect fractal. Notons que le résultat qui suit est un cas particulier de celui énoncé dans [6].

Théorème 3.13. Considérons la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. On a l'égalité

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) = \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 + c_5 \mathbf{i}_3 : (\pm c_2 \pm c_3 \pm c_5) \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}.$$

Démonstration.

Soit $c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ tel que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. La représentation idempotente à quatre composantes complexes du nombre tricomplexe c est

$$\begin{aligned}
c &= (c_2 \mathbf{i}_1) + (c_3) \mathbf{i}_2 + (c_5) \mathbf{i}_3 \\
&= (c_2 \mathbf{i}_1 - (c_3 - c_5) \mathbf{i}_1) \gamma_1 \gamma_3 + (c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3 - c_5) \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \gamma_3 \\
&\quad + (c_2 \mathbf{i}_1 - (c_3 + c_5) \mathbf{i}_1) \gamma_1 \overline{\gamma_3} + (c_2 \mathbf{i}_1 + (c_3 + c_5) \mathbf{i}_1) \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (c_2 - c_3 + c_5)\mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3 + (c_2 + c_3 - c_5)\mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\
&\quad + (c_2 - c_3 - c_5)\mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3} + (c_2 + c_3 + c_5)\mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.
\end{aligned}$$

Par la Remarque 3.2, on déduit que la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(c_2 \pm c_3 \pm c_5)\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$. Puisque la propriété 5 du Théorème 3.1 signifie que $x\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$ ssi $-x\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) &\Leftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\
&\Leftrightarrow (c_2 \pm c_3 \pm c_5)\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \\
&\Leftrightarrow (\pm c_2 \pm c_3 \pm c_5)\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1
\end{aligned}$$

et la preuve est complète. ■

Afin de comprendre comment ce résultat explique l'allure du Metabrot, considérons ce qui suit. Dans \mathbb{R}^3 , l'inéquation associée à un octaèdre régulier est $|x| + |y| + |z| \leq a$, où $a \geq 0$ et $x, y, z \in \mathbb{R}$ [15, 43]. Or, il s'agit en fait d'une manière abrégée d'écrire les huit inéquations décrivant chacune une face de l'octaèdre, puisque de façon plus explicite, on pourrait aussi écrire $(\pm x \pm y \pm z) \leq a$. Ceci explique donc pourquoi globalement, le Metabrot est de forme octaédrique.

En ce qui concerne son aspect fractal, comme les points $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ sont ceux pour lesquels on a l'inclusion $(\pm c_2 \pm c_3 \pm c_5)\mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$, l'allure de cette coupe dépend aussi directement de la dynamique de l'ensemble \mathcal{M}_1 le long de l'axe imaginaire \mathbf{i}_1 . En particulier, on remarque que l'intersection $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}\mathbf{i}_1$ correspond à l'union de plusieurs intervalles de $\mathbb{R}\mathbf{i}_1$ disjoints, ce qui fait qu'il ne s'agit pas d'un intervalle connexe. Le relief fractal du Metabrot est donc une conséquence de ce phénomène.

D'autre part, la représentation γ_3 -idempotente permet d'établir pour la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ une caractérisation géométrique analogue à celles des autres coupes principales. En effet, pour $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ on a

$$\begin{aligned}
c &= c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_5\mathbf{i}_3 \\
&= (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_5\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_5\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3} \\
&= (d - c_5\mathbf{i}_2)\gamma_3 + (d + c_5\mathbf{i}_2)\overline{\gamma_3},
\end{aligned}$$

où on a posé $d = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2$. En introduisant maintenant l'ensemble bidimensionnel

$A := \{a \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\} : \{P_a^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, on voit que la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $d \in (A + c_5 \mathbf{i}_2) \cap (A - c_5 \mathbf{i}_2)$. Conséquemment,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) &= \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 + c_5 \mathbf{i}_3 : c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 \in (A + c_5 \mathbf{i}_2) \cap (A - c_5 \mathbf{i}_2)\} \\ &= \bigcup_{y \in [-m, m]} \{(A + y \mathbf{i}_2) \cap (A - y \mathbf{i}_2)\} + y \mathbf{i}_3, \end{aligned}$$

où $m := \sup\{q \in \mathbb{R} : \exists p \in \mathbb{R} \text{ tel que } p + q \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1\}$. En effet, si $a = a_2 \mathbf{i}_1 + a_3 \mathbf{i}_2 \in A$, alors le Théorème 2.1 implique que $a = (a_2 - a_3) \mathbf{i}_1 \gamma_1 + (a_2 + a_3) \mathbf{i}_1 \bar{\gamma}_1$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} a \in A &\Leftrightarrow \{P_a^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow (a_2 \pm a_3) \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1 \\ &\Leftrightarrow (\pm a_2 \pm a_3) \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1, \end{aligned}$$

par la symétrie de \mathcal{M}_1 selon l'axe réel. Ainsi, $a \in A \Leftrightarrow (\pm a_2 \pm a_3) \mathbf{i}_1 \in \mathcal{M}_1$. Puisque l'inéquation $|x| + |y| \leq \alpha$, qui est équivalente à $(\pm x \pm y) \leq \alpha$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$, correspond à un carré dans le plan [43], on déduit par un raisonnement similaire à celui de la preuve précédente que l'ensemble A est en fait un carré dont la frontière possède un aspect fractal, tel qu'illustré à la Figure 3.6. Par conséquent, en raison de la définition de m , on a $A \subset \{c_2 \mathbf{i}_1 + c_3 \mathbf{i}_2 : |c_3| \leq m\}$, ce qui implique bel et bien que $(A + y \mathbf{i}_2) \cap (A - y \mathbf{i}_2) = \emptyset$ dès que $y \in [-m, m]^c$.

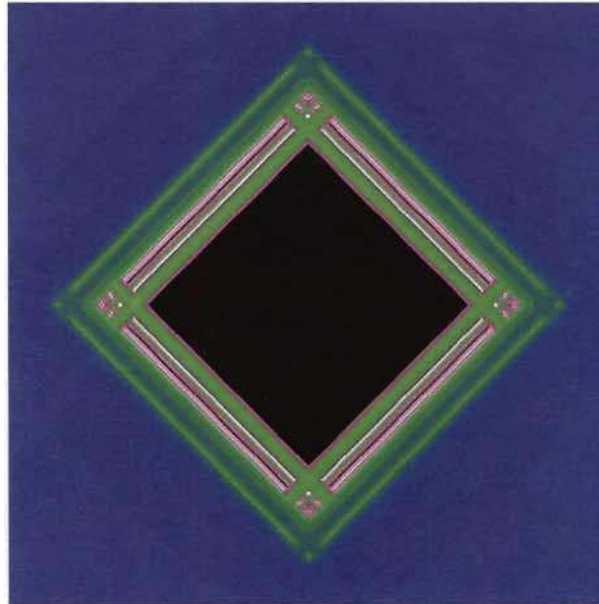
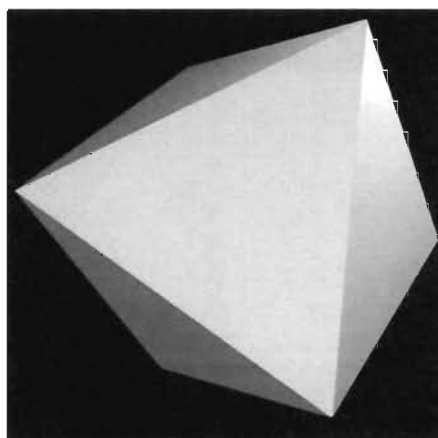


FIGURE 3.6 – Visualisation de l'ensemble fractal 2D correspondant à A

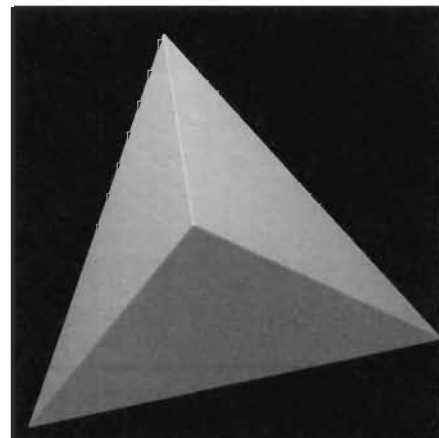
3.5 Coupes 3D avec espace des itérées isomorphe à $\mathbb{D}(2)$

Les deux coupes tridimensionnelles principales qui restent à investiguer sont probablement celles qui étonnent le plus à première vue étant donné qu'elles sont totalement dépourvues de relief fractal et qu'elles présentent un haut degré de symétrie. En fait, au chapitre 1, nous avons mentionné un autre nom pour de tels objets : il s'agit de polyèdres convexes réguliers, aussi appelés des solides de Platon. D'ailleurs, puisque ce dernier associe l'air à l'octaèdre régulier et le feu au tétraèdre régulier dans son dialogue *Timée* [34], les coupes principales $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ ont été appelées *Airbrot* (Figure 3.7a) et *Firebrot* (Figure 3.7b) en conséquence. La présente section comporte donc deux objectifs : fournir pour ces coupes une caractérisation géométrique, et démontrer formellement qu'elles correspondent respectivement à un octaèdre régulier et à un tétraèdre régulier.

D'autre part, bien que l'espace des itérées de ces coupes principales soit isomorphe à $\mathbb{D}(2)$, un sous-espace de \mathbb{TC} en quatre dimensions différent des nombres bicomplexes, il est important de noter qu'elles se décomposent tout de même en fonction de quatre ensembles bidimensionnels, contrairement aux coupes présentées à la section 3.3. De plus, la régularité propre à ces coupes n'est pas un hasard : elle découle directement des propriétés des nombres biduplexes, et plus spécifiquement de la nature des composantes des représentations idempotentes sur $\mathbb{D}(2)$.



(a) L'Airbrot



(b) Le Firebrot

FIGURE 3.7 - Les coupes 3D principales $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$

En effet, nous avons pu constater grâce à l'équation (2.6) que dans le sous-espace des nombres biduplexes, les quatre coefficients de la représentation idempotente à quatre composantes complexes sont réels. En combinant cette propriété à la Remarque 3.2, on peut voir que le caractère borné de la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ propre aux points $c \in \mathbb{D}(2)$ tels que $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ ou $c \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ dépend entièrement de la présence des quatre composantes réelles de c dans \mathcal{M}_1 , et conséquemment, de la dynamique de l'ensemble de Mandelbrot le long de l'axe réel. Or, la propriété 6 du Théorème 3.1 indique que $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R}$ est un intervalle connexe, d'où la régularité de l'Airbrot et du Firebrot.

La représentation idempotente à quatre composantes constituera donc l'élément clé pour démontrer directement que les coupes tridimensionnelles $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ sont des polyèdres convexes réguliers. En ce qui concerne la représentation γ_3 -idempotente, elle sera utilisée afin d'établir pour chaque coupe une caractérisation géométrique en fonction d'ensembles bidimensionnels⁷. Dès lors, comme tout nombre $c \in \mathbb{D}(2)$ admet deux composantes hyperboliques sous cette représentation, on peut déduire que les ensembles 2D en question s'apparenteront à l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique \mathcal{H} (Figure 3.2) plutôt qu'à \mathcal{M}_1 .

Comme premier cas, attardons-nous à la coupe principale

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) := \left\{ c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

soit l'Airbrot. Notons qu'il s'agit de la première et dernière coupe 3D après le Tetrabrot pour laquelle une caractérisation géométrique a été développée antérieurement à ce mémoire. De façon intéressante, Garant-Pelletier et Rochon [20] l'ont formulée dans le but de confirmer sa forme octaédrique. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, on peut parvenir à cette fin de façon moins indirecte en employant une autre représentation idempotente.

Théorème 3.14. L'Airbrot peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \bigcup_{y \in \left[-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}\right]} \{[(\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\}.$$

Démonstration.

Soit $c = c_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$. Grâce à la représentation γ_3 -idempotente, on a les

7. On arriverait à un résultat équivalent par le biais de la représentation γ_2 -idempotente.

égalités

$$\begin{aligned} c &= c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 + (c_6 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3 \\ &= (c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_3 + (c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_1) \overline{\gamma_3} \\ &= (d - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_3 + (d + c_6 \mathbf{j}_1) \overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

où $d = c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}$. Par la Proposition 3.2, la $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{d-c_6 \mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{d+c_6 \mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, ce qui est équivalent à ce que $d \in (\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 : c_1 + c_4 \mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1)\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{H} - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + y \mathbf{j}_1)] + y \mathbf{j}_2\}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\mathcal{H} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : |a + \frac{7}{8}| + |b| \leq \frac{9}{8}\}$ par la caractérisation de Metzler [27], on déduit que $(\mathcal{H} - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + y \mathbf{j}_1) = \emptyset$ dès que $y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]^c$. Ce faisant, on peut écrire

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \bigcup_{y \in [-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]} \{[(\mathcal{H} - y \mathbf{j}_1) \cap (\mathcal{H} + y \mathbf{j}_1)] + y \mathbf{j}_2\},$$

ce qui conclut la preuve. ■

Ainsi, la particularité des coupes tridimensionnelles dont l'espace des itérées est isomorphe à $\mathbb{D}(2)$ est qu'elles peuvent s'exprimer comme l'union de coupes transversales correspondant à l'intersection de deux copies de l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique sur lesquelles on effectue une translation. Dans le cas de l'Airbrot, cette dernière s'effectue le long de l'axe \mathbf{j}_1 .

Par ailleurs, en tenant compte du déplacement effectué le long de l'axe \mathbf{j}_2 , on déduit de la caractérisation qui précède que la coupe $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ doit correspondre à un octaèdre régulier (la Figure 3.8 permet de mieux saisir la façon dont l'octaèdre est généré). Toutefois, il serait davantage satisfaisant de pouvoir le démontrer directement, sans utiliser d'arguments implicites. Tel que mentionné précédemment, une méthode pour arriver à cette fin consiste à employer la représentation idempotente à quatre composantes complexes.

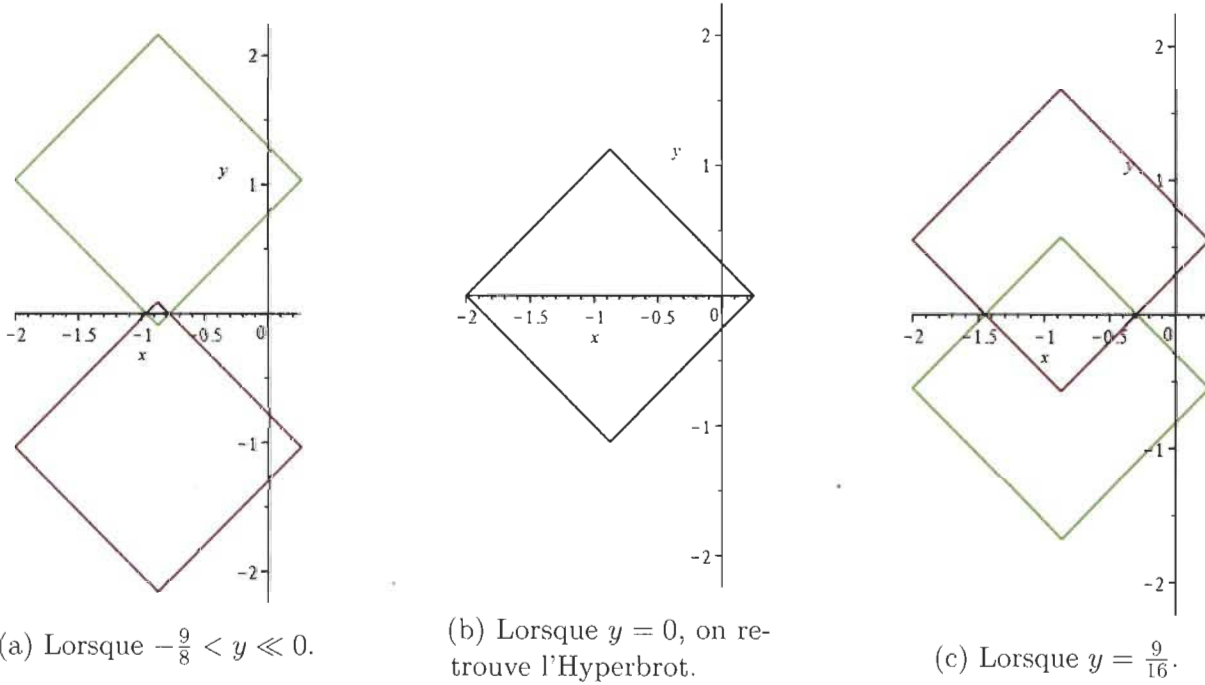


FIGURE 3.8 – Quelques intersections entre $\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1$ (en rouge) et $\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1$ (en vert) en fixant le paramètre y à différentes valeurs dans l'intervalle $[-\frac{9}{8}, \frac{9}{8}]$.

Théorème 3.15. Considérons de nouveau la coupe tridimensionnelle $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$.

Alors,

$$\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \left\{ c_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : \left| c_1 + \frac{7}{8} \right| + |c_4| + |c_6| \leq \frac{9}{8} \right\}$$

c'est-à-dire que l'Airbrot est un octaèdre régulier de centre $(-\frac{7}{8}, 0, 0)$ avec des arêtes de longueur $\frac{9}{8}\sqrt{2}$.

Démonstration.

Reprenons $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$. En réécrivant le nombre c en fonction du Théorème 2.5, nous obtenons

$$\begin{aligned} c &= c_1 + (c_4\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= (c_1 - (c_4\mathbf{i}_1 - c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1\gamma_3 + (c_1 + (c_4\mathbf{i}_1 - c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ &\quad + (c_1 - (c_4\mathbf{i}_1 + c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (c_1 + (c_4\mathbf{i}_1 + c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} \\ &= (c_1 + c_4 - c_6)\gamma_1\gamma_3 + (c_1 - c_4 + c_6)\overline{\gamma_1}\gamma_3 \\ &\quad + (c_1 + c_4 + c_6)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (c_1 - c_4 - c_6)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

Par la Remarque 3.2, $c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ ssi $(c_1 \pm c_4 \pm c_7) \in \mathcal{M}_1$. Or, $(c_1 \pm c_4 \pm c_7) \in \mathbb{R}$ et comme $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R} = \left[-2, \frac{1}{4}\right]$ on a

$$\begin{aligned}
c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq c_1 + c_4 - c_6 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq c_1 - c_4 + c_6 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq c_1 + c_4 + c_6 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq c_1 - c_4 - c_6 \leq \frac{1}{4} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{8} \leq \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\frac{9}{8} \leq \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\frac{9}{8} \leq \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\frac{9}{8} \leq \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \\ -\left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \\ \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) + c_4 + c_6 \leq \frac{9}{8} \\ \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) - c_4 - c_6 \leq \frac{9}{8} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \pm \left(c_1 + \frac{7}{8}\right) \pm c_4 \pm c_6 \leq \frac{9}{8},
\end{aligned}$$

ce qui correspond à l'inéquation $\left|c_1 + \frac{7}{8}\right| + |c_4| + |c_6| \leq \frac{9}{8}$. On a donc le résultat. \blacksquare

Il ne reste désormais qu'une seule coupe tridimensionnelle principale à traiter dans ce chapitre. Il s'agit du Firebrot, correspondant à la coupe

$$\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) := \left\{c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

D'ailleurs, contrairement à la coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, il est intéressant de noter que le Théorème 2.5 et la Remarque 3.2 ne permettent pas, à eux seuls, de démontrer la forme tétraédrique de la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. Comme nous pourrons le constater plus loin, il sera

nécessaire de raffiner le résultat obtenu de cette façon pour arriver à la conclusion désirée. Néanmoins, il est aussi possible de prouver que le Firebrot est un tétraèdre régulier à l'aide de sa caractérisation en fonction d'ensembles bidimensionnels et en invoquant par la suite divers arguments de nature géométrique. On présentera cette approche en premier, puis on abordera en second lieu celle préconisant l'utilisation la représentation idempotente à quatre composantes complexes.

Théorème 3.16. Le Firebrot peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\mathcal{F} = \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = \bigcup_{y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \{[(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\},$$

où $\mathcal{H}' := \{c_7\mathbf{j}_3 + c_4\mathbf{j}_1 : c_7 + c_4\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}\}$.

Avant de d'amorcer la démonstration, il convient d'étudier les propriétés des ensembles $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ et $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$, étroitement reliés à ceux dans l'énoncé du théorème ci-dessus. En effet, nous en aurons besoin pour restreindre les valeurs prises par $y \in \mathbb{R}$ à l'intervalle spécifié ci-haut. De plus, ces mêmes propriétés nous serviront au moment où nous voudrions confirmer que la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ est un tétraèdre régulier. Par conséquent, nous allons commencer par établir la convexité des ensembles $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ et $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$, puis on s'intéressera ensuite aux ensembles $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ variant selon le paramètre y . Les prochains résultats servent précisément cet objectif.

Proposition 3.3. Les ensembles $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ et $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ sont convexes $\forall y \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et considérons l'ensemble $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ pour commencer. On sait que

$$\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1 = \{c \in \mathbb{D} : \{P_{c-y\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\},$$

ce qui signifie que l'effet du paramètre y sur $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ se traduit par une translation selon l'axe \mathbf{j}_1 . En combinant cette observation à la caractérisation de Metzler pour \mathcal{H} , on obtient

$$\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \leq \frac{9}{8} \right\}.$$

Posons $x, w \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ avec $x = a + b\mathbf{j}_1$, $w = c + d\mathbf{j}_1$ et soit $t \in [0, 1]$. Par hypothèse, les

deux inégalités suivantes sont respectées :

$$\begin{cases} \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \leq \frac{9}{8} \\ \left| c + \frac{7}{8} \right| + |d - y| \leq \frac{9}{8}. \end{cases}$$

On cherche à montrer que le point $z = (1 - t)x + tw \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$. Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} z &= (1 - t)x + tw \\ &= (1 - t)(a + b\mathbf{j}_1) + t(c + d\mathbf{j}_1) \\ &= [(1 - t)a + tc] + [(1 - t)b + td]\mathbf{j}_1, \end{aligned}$$

ce qui signifie que montrer que $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ est convexe revient à montrer que

$$\left| [(1 - t)a + tc] + \frac{7}{8} \right| + |[(1 - t)b + td] - y| \leq \frac{9}{8}.$$

Puisqu'on peut écrire $\frac{7}{8} = (1 - t)\frac{7}{8} + t\frac{7}{8}$ et $y = (1 - t)y + ty$, on a

$$\begin{aligned} \left| [(1 - t)a + tc] + \frac{7}{8} \right| + |[(1 - t)b + td] - y| &= \left| (1 - t) \left(a + \frac{7}{8} \right) + t \left(c + \frac{7}{8} \right) \right| \\ &\quad + |(1 - t)(b - y) + t(d - y)| \\ &\leq \left| (1 - t) \left(a + \frac{7}{8} \right) \right| + \left| t \left(c + \frac{7}{8} \right) \right| \\ &\quad + |(1 - t)(b - y)| + |t(d - y)| \\ &= (1 - t) \left| a + \frac{7}{8} \right| + t \left| c + \frac{7}{8} \right| \\ &\quad + (1 - t) |b - y| + t |d - y| \\ &= (1 - t) \left(\left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \right) \\ &\quad + t \left(\left| c + \frac{7}{8} \right| + |d - y| \right) \\ &\leq (1 - t) \frac{9}{8} + t \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{8}.$$

Ainsi, $z \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ et $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ est un ensemble convexe $\forall y \in \mathbb{R}$ puisque y est arbitraire. Considérons maintenant $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$. Puisque $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = -(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$, montrer qu'un ensemble $A \subset \mathbb{D}$ est convexe si et seulement si $-A = \{-x : x \in A\}$ est convexe permettrait du même coup d'assurer la convexité de $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$.

Soit $A \subset \mathbb{D}$ et supposons qu'il s'agit d'un ensemble convexe. Alors, $\forall x, y \in A$ et $\forall t \in [0, 1]$ on a $(1-t)x + ty \in A$. Montrons que $-A$ est convexe. On sait que $-x, -y \in -A$: on veut montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $(1-t)(-x) + t(-y) \in -A$. Or,

$$\begin{aligned} (1-t)(-x) + t(-y) &= -(1-t)x - ty \\ &= -[(1-t)x + ty] \in -A, \end{aligned}$$

puisque $(1-t)x + ty \in A$ par hypothèse : $-A$ est donc un ensemble convexe. On procède de manière similaire pour l'implication inverse et on conclut que $A \subset \mathbb{D}$ est convexe $\Leftrightarrow -A$ est convexe. Ainsi, $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = -(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ est convexe. ■

Remarque 3.5. On aurait pu démontrer la convexité de l'ensemble $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = -(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ de la même façon que pour $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ puisqu'on peut écrire

$$-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1 = \{c \in \mathbb{D} : \{P_{-c+y\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

L'effet du paramètre y se traduit donc sur $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ par une translation sur l'axe \mathbf{j}_1 de sens opposé à celui de $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$. En combinant cela à la caractérisation usuelle de Metzler pour $-\mathcal{H}$, on voit que

$$\begin{aligned} -\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1 &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| -a + \frac{7}{8} \right| + |b + y| \leq \frac{9}{8} \right\} \\ &= \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a - \frac{7}{8} \right| + |b + y| \leq \frac{9}{8} \right\}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.2. Les ensembles \mathcal{H} et $-\mathcal{H}$ sont convexes. De plus, $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ est un ensemble convexe $\forall y \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

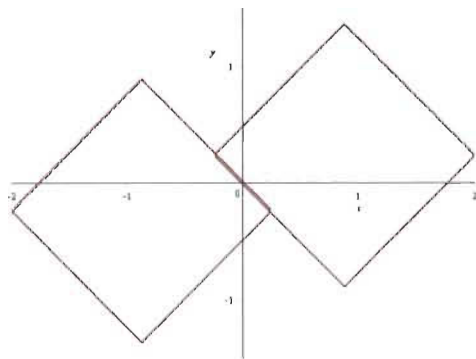
Il suffit de poser $y = 0$ dans l'énoncé de la Proposition 3.3 pour arriver au résultat souhaité.

D'autre part, la Proposition 1.1 affirme que l'intersection d'ensembles convexes est toujours convexe. En terminant, dans l'éventualité où $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = \emptyset$, on sait par convention que l'ensemble vide est convexe. ■

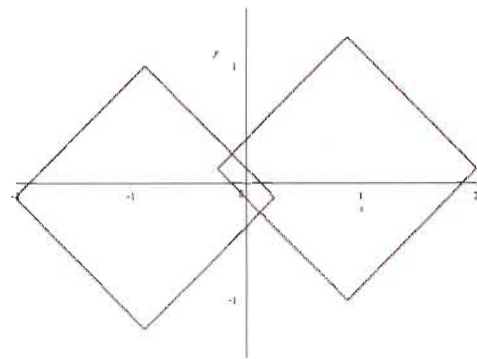
Attardons-nous maintenant aux ensembles de la forme $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$, qui varient en fonction d'un paramètre $y \in \mathbb{R}$. La prochaine démonstration répond à deux objectifs. On cherche : 1) à caractériser les points faisant partie de ces ensembles dans le but de démontrer que ces derniers sont tous de forme rectangulaire, et 2) à déduire certaines propriétés de l'intersection $\mathcal{H} \cap -\mathcal{H}$, qui nous seront utiles lors de la démonstration du Théorème 3.16.

Proposition 3.4. Soit $y \in \mathbb{R}$. On a l'égalité

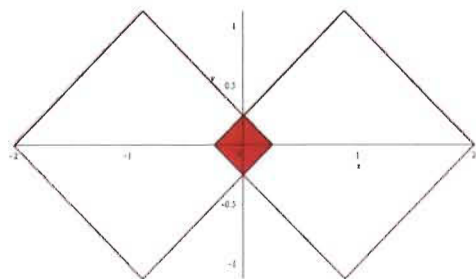
$$(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = \begin{cases} (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (|a + b| \leq \frac{1}{4} + y) \wedge (|a - b| \leq \frac{1}{4} - y) \text{ si } |y| \leq \frac{1}{4}, \\ \emptyset \text{ sinon.} \end{cases}$$



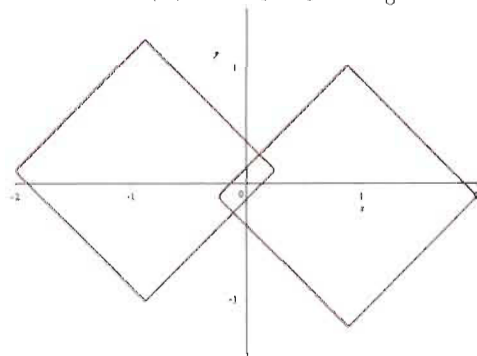
(a) Lorsque $-\frac{1}{4} < y \ll 0$.



(b) Lorsque $y = -\frac{1}{8}$.



(c) Lorsque $y = 0$.



(d) Lorsque $y = \frac{1}{8}$.

FIGURE 3.9 – Quelques intersections du type $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ en fixant le paramètre y à différentes valeurs dans l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Démonstration.

Nous avons vu au bas de la Remarque 3.5 que

$$\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \leq \frac{9}{8} \right\}$$

et

$$-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1 = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left| a - \frac{7}{8} \right| + |b + y| \leq \frac{9}{8} \right\}.$$

Posons $x = a + b\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$. Les deux inégalités suivantes sont alors respectées de manière simultanée :

$$\begin{cases} \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \leq \frac{9}{8} \\ \left| a - \frac{7}{8} \right| + |b + y| \leq \frac{9}{8}. \end{cases}$$

Enlevons les valeurs absolues tout en tenant compte des contraintes ajoutées à chaque fois. Après quelques utilisations des propriétés de la valeur absolue, nous devrions être en mesure d'avoir une expression en a et b d'un côté, séparés du reste :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b - y| \leq \frac{9}{8} \\ \left| a - \frac{7}{8} \right| + |b + y| \leq \frac{9}{8} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| a + \frac{7}{8} \right| \leq \frac{9}{8} - |b - y| \\ \left| a - \frac{7}{8} \right| \leq \frac{9}{8} - |b + y| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{8} + |b - y| \leq a + \frac{7}{8} \leq \frac{9}{8} - |b - y| \\ -\frac{9}{8} + |b + y| \leq a - \frac{7}{8} \leq \frac{9}{8} - |b + y| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-a - \frac{7}{8} + |b - y| \leq \frac{9}{8} \right) \wedge \left(a + \frac{7}{8} + |b - y| \leq \frac{9}{8} \right) \\ \left(-a + \frac{7}{8} + |b + y| \leq \frac{9}{8} \right) \wedge \left(a - \frac{7}{8} + |b + y| \leq \frac{9}{8} \right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (|b - y| \leq 2 + a) \wedge (|b - y| \leq \frac{1}{4} - a) \\ (|b + y| \leq \frac{1}{4} + a) \wedge (|b + y| \leq 2 - a) \end{cases} \end{aligned}$$

On enlève maintenant les autres valeurs absolues et on continue :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-2 - a \leq b - y \leq 2 + a) \wedge \left(-\frac{1}{4} + a \leq b - y \leq \frac{1}{4} - a \right) \\ \left(-\frac{1}{4} - a \leq b + y \leq \frac{1}{4} + a \right) \wedge (-2 + a \leq b + y \leq 2 - a) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [(-2 - a \leq b - y) \wedge (b - y \leq 2 + a)] \wedge [(-\frac{1}{4} + a \leq b - y) \wedge (b - y \leq \frac{1}{4} - a)] \\ [(-\frac{1}{4} - a \leq b + y) \wedge (b + y \leq \frac{1}{4} + a)] \wedge [(-2 + a \leq b + y) \wedge (b + y \leq 2 - a)] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-a - b \leq 2 - y) \wedge (-a + b \leq 2 + y) \wedge (a - b \leq \frac{1}{4} - y) \wedge (a + b \leq \frac{1}{4} + y) \\ (-a - b \leq \frac{1}{4} + y) \wedge (-a + b \leq \frac{1}{4} - y) \wedge (a - b \leq 2 + y) \wedge (a + b \leq 2 - y). \end{cases}$$

Dans la dernière équivalence se trouvent huit inégalités devant être respectées simultanément. Réécrivons-les et modifions certaines d'entre elles :

$$\begin{cases} 1) -a - b \leq 2 - y \Leftrightarrow -(a + b) \leq 2 - y \\ 2) -a + b \leq 2 + y \Leftrightarrow -(a - b) \leq 2 + y \\ 3) a - b \leq \frac{1}{4} - y \\ 4) a + b \leq \frac{1}{4} + y \\ 5) -a - b \leq \frac{1}{4} + y \Leftrightarrow -(a + b) \leq \frac{1}{4} + y \\ 6) -a + b \leq \frac{1}{4} - y \Leftrightarrow -(a - b) \leq \frac{1}{4} - y \\ 7) a - b \leq 2 + y \\ 8) a + b \leq 2 - y \end{cases}$$

On distingue deux groupes d'inégalités. Prises ensemble, les inégalités 1), 2), 7) et 8) donnent

$$\begin{cases} -(2 - y) \leq a + b \leq 2 - y \\ -(2 + y) \leq a - b \leq 2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + b| \leq 2 - y \\ |a - b| \leq 2 + y \end{cases} \text{ lorsque } |y| \leq 2,$$

tandis que les inégalités 3), 4), 5) et 6) donnent

$$\begin{cases} -(\frac{1}{4} + y) \leq a + b \leq \frac{1}{4} + y \\ -(\frac{1}{4} - y) \leq a - b \leq \frac{1}{4} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + b| \leq \frac{1}{4} + y \\ |a - b| \leq \frac{1}{4} - y \end{cases} \text{ lorsque } |y| \leq \frac{1}{4}.$$

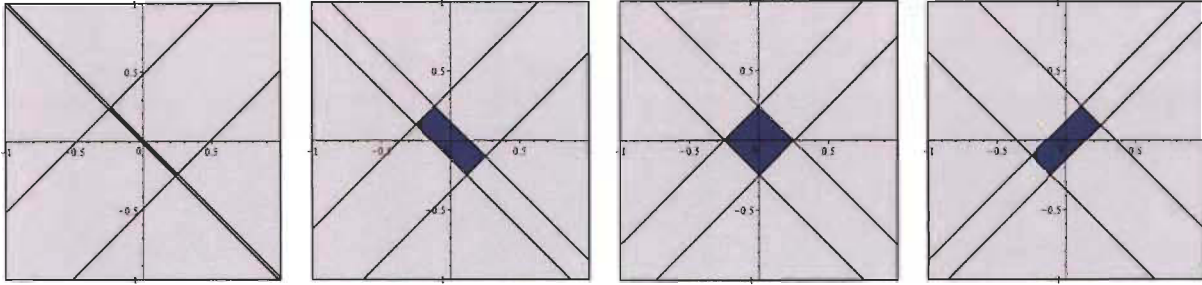
On remarque que pour $|y| \leq \frac{1}{4}$, on a $\frac{1}{4} + y \leq 2 - y$ et $\frac{1}{4} - y \leq 2 + y$. Par conséquent, les inégalités 1), 2), 7) et 8) sont respectées si 3), 4), 5) et 6) le sont, ce qui signifie qu'elles sont superflues. Nous avons donc montré que

$$x = a + b\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) \Rightarrow \begin{cases} |a + b| \leq \frac{1}{4} + y \\ |a - b| \leq \frac{1}{4} - y, \end{cases} \text{ lorsque } |y| \leq \frac{1}{4}.$$

De plus, lorsque $|y| > \frac{1}{4}$, une des inégalités est impossible, ce qui implique qu'il n'y a

aucune solution dans ce cas. On peut alors écrire

$$(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) = \begin{cases} (a, b) \in \mathbb{R}^2 : (|a + b| \leq \frac{1}{4} + y) \wedge (|a - b| \leq \frac{1}{4} - y) \text{ si } |y| \leq \frac{1}{4}, \\ \emptyset \text{ sinon. } \blacksquare \end{cases}$$



(a) Si $-\frac{1}{4} < y < 0$.

(b) Si $y = -\frac{1}{8}$.

(c) Si $y = 0$.

(d) Si $y = \frac{1}{8}$.

FIGURE 3.10 – Visualisations variées des inégalités $(|a + b| \leq \frac{1}{4} + y) \wedge (|a - b| \leq \frac{1}{4} - y)$ lorsque $|y| \leq \frac{1}{4}$

Corollaire 3.3. Lorsque $|y| \leq \frac{1}{4}$, les ensembles de la forme $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ sont des rectangles.

L'énoncé de ce corollaire peut sembler anodin, mais il est d'une grande importance. En effet, il nous faudra recourir à ce résultat pour établir la forme tétraédrique de la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ en fonction de ses coupes transversales perpendiculaires à l'axe \mathbf{j}_2 . Or, jusqu'à maintenant, rien ne nous permettait formellement d'affirmer que les intersections entre $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1)$ et $(-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ avaient une forme géométrique particulière. L'utilité de ce corollaire réside donc dans cet accomplissement.

Démonstration.

Soit y tel que $|y| \leq \frac{1}{4}$ (arbitraire mais fixé). La proposition précédente nous assure que

$$x = a + b\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1) \Rightarrow \left(|a + b| \leq \frac{1}{4} + y \right) \wedge \left(|a - b| \leq \frac{1}{4} - y \right).$$

En utilisant les propriétés de la valeur absolue, il vient

$$\begin{cases} |a + b| \leq \frac{1}{4} + y \\ |a - b| \leq \frac{1}{4} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} - y \leq a + b \leq \frac{1}{4} + y \\ -\frac{1}{4} + y \leq a - b \leq \frac{1}{4} - y. \end{cases}$$

On réécrit maintenant ces inégalités afin de faire ressortir certaines caractéristiques :

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} - y \leq a + b \leq \frac{1}{4} + y \\ -\frac{1}{4} + y \leq a - b \leq \frac{1}{4} - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - \left(\frac{1}{4} + y\right) \leq b \leq -a + \left(\frac{1}{4} + y\right) \\ a - \left(\frac{1}{4} - y\right) \leq b \leq a + \left(\frac{1}{4} - y\right) \end{cases}.$$

Considérons dans ce qui suit que a est la variable indépendante et b la variable dépendante. Puisque y est fixé, on remarque que chacune des quatre inégalités se traduit par une droite distincte scindant le plan en deux demi-plans dont un seul satisfait l'inégalité en question. Qui plus est, les droites associées à la première paire d'inégalités ont une pente égale à -1 (puisque nous avons $-a$) et celles des deux autres ont une pente égale à 1. Conséquemment, les deux droites correspondant à l'une ou l'autre des paires d'inégalités sont parallèles entre elles, tandis qu'elles sont perpendiculaires aux deux droites de l'autre paire d'inégalités. Ces propriétés sont illustrées à la Figure 3.10.

De ces observations, on déduit que pour y fixé, les ensembles $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ correspondent à l'intersection de quatre demi-plans, et plus précisément, à des quadrilatères possédant deux paires de côtés parallèles et comportant quatre angles droits. Il s'agit donc de rectangles. ■

Corollaire 3.4. Considérons l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique \mathcal{H} . On a

$$\mathcal{H} \cap -\mathcal{H} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : |a| + |b| \leq \frac{1}{4} \right\},$$

ce qui signifie que $\mathcal{H} \cap -\mathcal{H}$ est un carré centré à l'origine dont les coordonnées de ses quatre sommets sont $(0, \pm\frac{1}{4})$ et $(\pm\frac{1}{4}, 0)$, et avec des diagonales de longueur $\frac{1}{2}$.

Démonstration.

Commençons par démontrer la caractérisation proposée. Pour ce faire, posons $y = 0$ dans l'expression $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$ et utilisons le résultat de la Proposition 3.4 :

$$\mathcal{H} \cap -\mathcal{H} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \left(|a + b| \leq \frac{1}{4} \right) \wedge \left(|a - b| \leq \frac{1}{4} \right) \right\}.$$

Grâce à l'inégalité du triangle, on sait que $|a| + |b| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(|a + b| \leq \frac{1}{4} \right) \wedge \left(|a - b| \leq \frac{1}{4} \right)$.

Nous allons démontrer l'implication réciproque. Par hypothèse,

$$\begin{cases} |a + b| \leq \frac{1}{4} \\ |a - b| \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq a + b \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \leq a - b \leq \frac{1}{4}, \end{cases}$$

et en considérant donc les quatre cas possibles pour a et b , on voit que

$$\begin{aligned} a \geq 0, b \geq 0 &\Rightarrow |a| + |b| = a + b \leq \frac{1}{4}; \\ a \geq 0, b < 0 &\Rightarrow |a| + |b| = a - b \leq \frac{1}{4}; \\ a < 0, b \geq 0 &\Rightarrow |a| + |b| = -a + b = -(a - b) \leq \frac{1}{4}; \\ a < 0, b < 0 &\Rightarrow |a| + |b| = -a - b = -(a + b) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, $(|a + b| \leq \frac{1}{4}) \wedge (|a - b| \leq \frac{1}{4}) \Rightarrow |a| + |b| \leq \frac{1}{4}$ et alors

$$\mathcal{H} \cap -\mathcal{H} = \left\{ (a, b) \in \mathbb{R}^2 : |a| + |b| \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Maintenant, on déduit de la ligne précédente que l'ensemble $\mathcal{H} \cap -\mathcal{H}$ est un carré centré à l'origine [43]. On peut alors déterminer les coordonnées des quatre sommets en considérant les quatre cas extrêmes, soit $a = \pm\frac{1}{4}$ et $b = \pm\frac{1}{4}$. Dans chacun de ceux-ci, poser l'une des composantes égale à $\pm\frac{1}{4}$ force l'autre à être égale à zéro afin de respecter l'inégalité. Ce faisant, on obtient les coordonnées attendues et la longueur des diagonales en découle immédiatement. ■

Les derniers résultats fournissent un aperçu pertinent des propriétés de l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique et des intersections du type $(\mathcal{H} + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - y\mathbf{j}_1)$. Grâce à celles-ci, nous sommes désormais en mesure de démontrer le Théorème 3.16 établissant la caractérisation géométrique de la huitième et dernière coupe tridimensionnelle principale de \mathcal{M}_3 ainsi que d'assurer par la suite sa forme tétraédrique.

Théorème 3.16. Le Firebrot peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\mathcal{F} = \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = \bigcup_{y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \{[(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\},$$

où $\mathcal{H}' := \{c_7\mathbf{j}_3 + c_4\mathbf{j}_1 : c_7 + c_4\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}\}$.

Démonstration.

On procède comme pour les autres coupes principales. Soit $c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ tel que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Comme $c = c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 + c_7 \mathbf{j}_3$, sa représentation γ_3 -idempotente est

$$\begin{aligned} c &= (c_4 \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_2 + (c_6 \mathbf{i}_1 + c_7 \mathbf{i}_2) \mathbf{i}_3 \\ &= (c_4 \mathbf{j}_1 - c_6 \mathbf{j}_1 + c_7) \gamma_3 + (c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_1 - c_7) \overline{\gamma_3} \\ &= (c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_3 + (-c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_1) \overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

On pose maintenant $d = c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}$, et en se rappelant que tout nombre hyperbolique $z = a + b \mathbf{j}_1$ admet un seul conjugué de la forme $\bar{z} = a - b \mathbf{j}_1$, on arrive à l'égalité $c = (d - c_6 \mathbf{j}_1) \gamma_3 + (-\bar{d} + c_6 \mathbf{j}_1) \overline{\gamma_3}$. Par la Proposition 3.2, on sait que la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites $\{P_{d - c_6 \mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-\bar{d} + c_6 \mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées, ce qui est équivalent à ce que $d \in (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1)$ et $-\bar{d} \in (\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1)$. Or, la caractérisation de \mathcal{H} [27] implique que l'Hyperbrot est un carré symétrique selon l'axe réel. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} -\bar{d} \in (\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1) &\Leftrightarrow d \in -\overline{(\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1)} \\ &\Leftrightarrow d \in (-\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1), \end{aligned}$$

et on doit donc avoir $d \in (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 + c_7 \mathbf{j}_3 : c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1)\}. \end{aligned}$$

On remarque cependant que $c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, ce qui fait qu'on introduit l'ensemble $\mathcal{H}' := \{c_7 \mathbf{j}_3 + c_4 \mathbf{j}_1 : c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}\}$ pour ramener la caractérisation dans le bon sous-espace vectoriel. Ce faisant, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) &= \{c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 + c_7 \mathbf{j}_3 : c_7 + c_4 \mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1)\} \\ &= \{c_4 \mathbf{j}_1 + c_6 \mathbf{j}_2 + c_7 \mathbf{j}_3 : c_7 \mathbf{j}_3 + c_4 \mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H}' + c_6 \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - c_6 \mathbf{j}_1)\} \\ &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{H}' + y \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y \mathbf{j}_1)] + y \mathbf{j}_2\}. \end{aligned}$$

Pour arriver à restreindre les valeurs prises par le paramètre y à un intervalle, il faut se rappeler que $(\mathcal{H} + c_6 \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H} - c_6 \mathbf{j}_1) = \emptyset$ dès que $|y| > \frac{1}{4}$, par la Proposition 3.4. Par conséquent, la définition de l'ensemble \mathcal{H}' implique que $(\mathcal{H}' + y \mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y \mathbf{j}_1) = \emptyset$ à la

même condition, ce qui nous conduit à l'égalité

$$\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = \bigcup_{y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \{[(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\}.$$

De plus, remarquons que le Corollaire 3.3 assure que $(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1) \neq \emptyset$ pour tout $y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. ■

Tout comme pour la coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, le théorème qui précède permet d'établir indirectement que la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ correspond à un tétraèdre régulier. Toutefois, pour arriver formellement à cette conclusion, il faut d'abord démontrer les propositions qui suivent puisque celles-ci visent à assurer que les hypothèses du Théorème 1.5 sont satisfaites. La prochaine étape consiste donc à déterminer les coordonnées des quatre points associés aux sommets du polyèdre correspondant à la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ et à vérifier certaines de leurs propriétés.

Proposition 3.5. Les coordonnées en \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 et \mathbf{j}_3 des sommets du Firebrot sont

$$A = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \text{ et } D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Démonstration.

Commençons par déterminer les coordonnées des sommets A et B . Le Théorème 3.16 indique que les coupes transversales du Firebrot sont réparties de manière continue le long de l'axe \mathbf{j}_2 pour $y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Par conséquent, la composante \mathbf{j}_2 des sommets A et B sera certainement égale à $-\frac{1}{4}$, puisque c'est en cette valeur de y qu'est générée la première intersection non vide sous forme d'un segment de droite. Nous avons donc $A = (a_1, -\frac{1}{4}, a_3)$ et $B = (b_1, -\frac{1}{4}, b_3)$.

Maintenant, fixons $y = -\frac{1}{4}$. Dans ce cas, nous savons grâce à la Proposition 3.4 adaptée pour \mathcal{H}' que les points $A, B \in (\mathcal{H}' - \frac{1}{4}\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + \frac{1}{4}\mathbf{j}_1) - \frac{1}{4}\mathbf{j}_2$ satisfont les inégalités

$$\begin{cases} |a_1 + a_3| \leq 0 \\ |a_1 - a_3| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} |b_1 + b_3| \leq 0 \\ |b_1 - b_3| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Or, $|a_1 + a_3| \leq 0 \Leftrightarrow |a_1 + a_3| = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -a_3$. De même, on trouve $b_1 = -b_3$. En substituant ces valeurs dans la deuxième inégalité, on voit que $|a_3| \leq \frac{1}{4}$ et

$|b_3| \leq \frac{1}{4}$. Comme, par définition, les sommets A et B correspondent aux extrémités du segment correspondant à $(\mathcal{H}' - \frac{1}{4}\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + \frac{1}{4}\mathbf{j}_1)$, on choisit (sans perte de généralité) que le point A est obtenu en posant $a_3 = \frac{1}{4}$, tandis que le point B correspond à l'autre extrémité du segment, soit $b_3 = -\frac{1}{4}$. Il s'ensuit que $a_1 = -\frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{1}{4}$, et ce faisant, nous obtenons les points $A = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

On procède de manière similaire pour les points C et D . Cependant, on pose $y = \frac{1}{4}$ dans la Proposition 3.4 et on voit, grâce à la seconde inégalité, qu'on doit avoir $c_1 = c_3$ et $d_1 = d_3$. Il suffit alors de substituer ces valeurs dans la première inégalité pour voir que $|c_3| \leq \frac{1}{4}$ et $|d_3| \leq \frac{1}{4}$. Par un raisonnement similaire à celui employé dans le cas des sommets A et B , on pose $c_3 = -\frac{1}{4}$ et $d_3 = \frac{1}{4}$ pour obtenir $c_1 = -\frac{1}{4}$ et $d_1 = \frac{1}{4}$. Ainsi, les coordonnées des points C et D sont donc $C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ et $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. ■

À partir des coordonnées en $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ et \mathbf{j}_3 des sommets du Firebrot, il est possible de déduire d'autres propriétés pertinentes à leur sujet, comme en témoignent les résultats suivants.

Proposition 3.6. Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Démonstration.

Soit P le plan engendré par les points A, B et C et considérons le point $A \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et les vecteurs $\vec{AB} = \left[\frac{1}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2}\right]$ et $\vec{AC} = \left[0 \ \frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}\right]$. Ceux-ci sont clairement linéairement indépendants. Déterminons l'équation cartésienne de ce plan à l'aide d'un vecteur normal \vec{n} . On a $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \left[\frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4}\right] = \vec{n}$. L'équation cartésienne de P est donc

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = d.$$

En remplaçant x, y et z par les coordonnées du point A , on obtient $d = -\frac{1}{16}$ et l'équation devient

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = -\frac{1}{16}.$$

Maintenant, si A, B, C et D sont coplanaires, alors ce dernier point doit également satisfaire l'équation cartésienne de P . Or,

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} \neq -\frac{1}{16}.$$

On conclut donc que A, B, C et D ne sont pas coplanaires. ■

Corollaire 3.5. Si on choisit au hasard trois points parmi les points A, B, C et D , ils sont toujours non colinéaires.

Démonstration.

En effet, supposons que trois points parmi A, B, C et D sont colinéaires (le cas où les quatre points le sont donne une contradiction triviale avec la Proposition 3.6). Dans ce cas, il existe une droite passant par ces trois points, et conséquemment, il existe un plan contenant cette droite ainsi que le quatrième point, peu importe où il se trouve : il s'agit également d'une contradiction avec la Proposition 3.6. ■

Proposition 3.7. Aucun point parmi A, B, C et D n'est contenu dans l'enveloppe convexe engendrée par les trois autres.

Démonstration.

Prenons trois points au hasard parmi A, B, C et D . Premièrement, la Proposition 1.4 affirme que leur enveloppe convexe est un triangle les ayant pour sommets. Puisque ce triangle est nécessairement contenu dans un plan, alors la Proposition 3.6 assure que le quatrième point est en dehors de ce plan, ce qui implique qu'il est également en dehors du triangle, et ainsi en dehors de l'enveloppe convexe des trois autres points. ■

Nous arrivons maintenant au résultat évoqué à maintes reprises dans ce qui précède, à savoir un deuxième théorème reliant une fractale issue de la dynamique tricomplexe à un solide platonicien issu de la géométrie euclidienne.

Théorème 3.17 (Conjecture 4.1 dans [19]). La coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ correspond à un tétraèdre régulier dont les côtés sont de longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Démonstration.

Commençons par rappeler l'énoncé du Théorème 1.5 :

Il existe un unique polyèdre convexe ayant pour sommets les points A_1, \dots, A_m

\iff

Les points $A_i, i \in \{1, \dots, m\}$ sont non coplanaires et aucun d'entre eux n'est contenu dans l'enveloppe convexe des $(m - 1)$ points restants.

Nous allons utiliser l'implication \Leftarrow). Des propositions 3.6 et 3.7, nous savons que les

points A, B, C et D sont non coplanaires et qu'aucun d'entre eux n'est contenu dans l'enveloppe convexe des trois autres. En conséquence, il existe un polyèdre convexe P ayant A, B, C et D comme sommets. Montrons que P ne peut être qu'un tétraèdre (pas forcément régulier)⁸. Nous allons procéder de manière déductive en considérant tous les cas possibles : éventuellement, il deviendra clair qu'un tétraèdre est la seule possibilité.

Premièrement, le fait que P ait seulement quatre sommets limite grandement le type de faces qu'il possède. En effet, il est impossible que celles-ci soit des polygones à quatre côtés (et sommets) ou plus, puisque nous n'avons que quatre points non coplanaires. En conséquence, les faces de P doivent être des triangles. Pour déterminer combien de faces et d'arêtes P possède, on utilise le fait que P est un polyèdre convexe par le Théorème 1.5, et qu'il satisfait donc la formule d'Euler $S - A + F = 2$, où S dénote le nombre de sommets, A correspond au nombre d'arêtes et F au nombre de faces de P (Théorème 1.3).

Puisque $S = 4$, l'équation devient $4 + F = 2 + A$. On remplace alors A par différentes valeurs afin d'étudier tous les cas possibles. Or, avec quatre points, le nombre d'arêtes distinctes qu'il est possible d'avoir est très limité : il y en a exactement au plus $\binom{4}{2} = 6$. Procédons de manière systématique. Si $A = 6$, alors $F = 4$, et il n'y a aucune contradiction à cela. En posant plutôt $A = 5$, on doit avoir $F = 3$, ce qui signifie que P possède seulement trois faces triangulaires. C'est cependant impossible, puisque peu importe comment on dispose les faces, il faut toujours un minimum de 6 arêtes pour les construire. En effet, il en faut 3 pour construire la première face, il faut ensuite en rajouter (au moins) deux pour construire la deuxième face, et il faut obligatoirement (au moins) une sixième arête pour placer la troisième, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $A = 5$.

Si $A \leq 4$, les problèmes se multiplient puisque P aurait au plus deux faces, ce qui est clairement impossible. La seule solution valide respectant les contraintes et la formule d'Euler est donc obtenue lorsque $S = 4$, $A = 6$ et $F = 4$, ce qui correspond aux caractéristiques d'un tétraèdre. Pour montrer que le polyèdre P est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire qu'il est constitué exclusivement de triangles équilatéraux, on vérifie que la distance entre chaque paire de sommets est la même :

$$d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. En fait, il s'agit d'un résultat que le lecteur pourra retrouver dans [24, 43] et dont la preuve s'apparente à celle de la Proposition 1.1. On propose ici une autre approche.

$$\begin{aligned}
d(A, C) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
d(A, D) &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
d(B, C) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
d(B, D) &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
d(C, D) &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, les quatre points sont équidistants et on conclut que P est bel et bien un tétraèdre régulier dont chaque côté est de longueur $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il faut maintenant s'assurer que P correspond à l'ensemble issu de la caractérisation de \mathcal{F} (Théorème 3.16).

Posons $|y| \leq \frac{1}{4}$. Par la Proposition 3.3 et le Corollaire 3.3, nous savons que les intersections de la forme $(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1)$ sont des ensembles convexes de forme rectangulaire dans le plan engendré par les axes \mathbf{j}_1 et \mathbf{j}_3 . Quant à lui, le Théorème 3.16 affirme que la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ est constituée d'une collection non dénombrable de ces ensembles répartis de manière continue selon l'axe \mathbf{j}_2 . Notons que chacun de ces rectangles peut être partitionné en deux ensembles : sa frontière (qui n'est nulle autre que le périmètre du rectangle correspondant à l'intersection en question) et son intérieur géométrique, constitué de tous les points qui ne sont pas situés sur ce même périmètre.

Si on considère la réunion non dénombrable des frontières de chaque intersection rectangulaire, on constate que celle-ci génère les faces d'un polyèdre convexe à partir des périmètres rectangulaires successifs disposés continuellement le long de l'axe \mathbf{j}_2 . De surcroît, la réunion non dénombrable de l'intérieur géométrique de tous les rectangles engendre quant à elle l'intérieur géométrique de ce même polyèdre. Or, en fixant $y = -\frac{1}{4}$, on obtient la première intersection non vide, qui coïncide forcément avec le segment de droite reliant les points A et B . De façon similaire, en fixant $y = \frac{1}{4}$, on obtient la dernière intersection non vide, qui doit correspondre au segment de droite reliant les points C et D . On déduit que les points A, B, C et D sont les sommets du polyèdre correspondant à la caractérisation géométrique énoncée au Théorème 3.16.

En conclusion, nous avons démontré d'une part que l'unique polyèdre convexe P ayant A, B, C et D pour sommets était un tétraèdre régulier, et d'autre part, nous avons illustré

que le solide 3D associé à la caractérisation de \mathcal{F} consistait en un polyèdre convexe ayant également A, B, C et D comme sommets. Conséquemment, nous pouvons affirmer que

$$\mathcal{F} = \bigcup_{y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \{[(\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\} = P,$$

c'est-à-dire que le Firebrot correspond à un tétraèdre régulier dont les côtés ont une longueur de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Dans ce qui précède, l'approche préconisée possède l'avantage de présenter en profondeur l'ensemble des considérations géométriques permettant de démontrer le Théorème 3.17. Néanmoins, il est possible de procéder autrement en adoptant plutôt un point de vue strictement analytique afin d'arriver au résultat de manière plus directe. À l'instar de la coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, la stratégie en question consiste à utiliser la représentation idempotente à quatre composantes réelles d'un nombre biduplexe. Néanmoins, on verra que la démonstration en question comporte une étape supplémentaire, par rapport à celle concernant l'Airbrot. En effet, il faudra identifier puis enlever les inéquations redondantes obtenues afin d'en dégager un système ne comprenant que les inéquations essentielles à la description du Firebrot.

Proposition 3.8. On a $c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ si et seulement si les coefficients c_4 , c_6 et c_7 satisfont le système d'inéquations

$$\begin{aligned} c_4 - c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ -c_4 + c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ c_4 + c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ -c_4 - c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit $c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. Sous sa représentation idempotente à quatre composantes, ce nombre s'écrit

$$c = (c_4 - c_6 + c_7)\gamma_1\gamma_3 + (-c_4 + c_6 + c_7)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (c_4 + c_6 - c_7)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (-c_4 - c_6 - c_7)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.$$

Si on dénote les quatre composantes réelles ci-haut par a_1, \dots, a_4 , alors par des arguments similaires à ceux invoqués au Théorème 3.15, on constate que la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $a_1, \dots, a_4 \in \mathcal{M}_1$. Par conséquent, puisque $\mathcal{M}_1 \cap \mathbb{R} = [-2, \frac{1}{4}]$, cela est équivalent à ce que les inéquations suivantes soient respectées :

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{M}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq c_4 - c_6 + c_7 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq -c_4 + c_6 + c_7 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq c_4 + c_6 - c_7 \leq \frac{1}{4} \\ -2 \leq -c_4 - c_6 - c_7 \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_4 - c_6 + c_7 \leq \frac{1}{4} \\ -c_4 + c_6 - c_7 \leq 2 \\ -c_4 + c_6 + c_7 \leq \frac{1}{4} \\ c_4 - c_6 - c_7 \leq 2 \\ c_4 + c_6 - c_7 \leq \frac{1}{4} \\ -c_4 - c_6 + c_7 \leq 2 \\ -c_4 - c_6 - c_7 \leq \frac{1}{4} \\ c_4 + c_6 + c_7 \leq 2. \end{cases}$$

On remarque cependant que certaines inéquations sont superflues, en ce sens que les enlever du système précédent ne change pas l'ensemble solution de ce dernier (la Figure 3.11 illustre ce phénomène). Afin de démontrer formellement cette affirmation, fixons la valeur

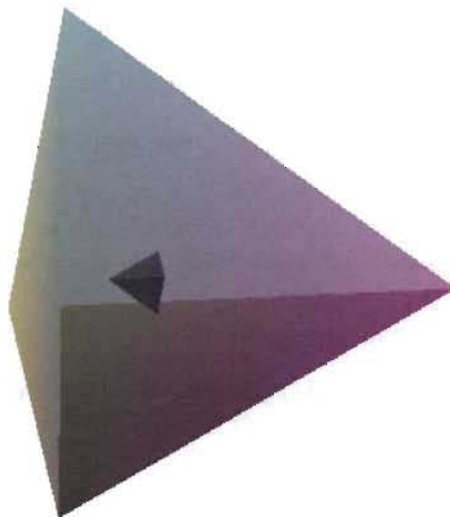


FIGURE 3.11 - Illustration des huit inéquations associées à la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$

de l'inconnue c_6 . Celle-ci étant désormais une constante réelle, on la traite comme tel en la regroupant avec les constantes 2 et $\frac{1}{4}$ dans chaque inéquation, puis on groupe ces dernières en quatre paires en fonction du membre de gauche :

$$\begin{cases} c_4 + c_7 \leq \frac{1}{4} + c_6 \\ c_4 + c_7 \leq 2 - c_6 \end{cases} \quad \begin{cases} -c_4 + c_7 \leq \frac{1}{4} - c_6 \\ -c_4 + c_7 \leq 2 + c_6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_4 - c_7 \leq \frac{1}{4} - c_6 \\ c_4 - c_7 \leq 2 + c_6 \end{cases} \quad \begin{cases} -c_4 - c_7 \leq \frac{1}{4} + c_6 \\ -c_4 - c_7 \leq 2 - c_6. \end{cases}$$

La clé pour identifier les inéquations superflues consiste à remarquer que pour tout nombre $c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, on a $|c_6| \leq \frac{1}{4}$. On s'en convainc aisément grâce au Théorème 3.16, puisque dans son énoncé, le déplacement le long de l'axe \mathbf{j}_2 associé à c_6 est effectué en fonction du paramètre y , et celui-ci prend des valeurs dans l'intervalle $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Cependant, comme nous souhaitons établir la forme tétraédrique de la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ sans avoir recours à sa caractérisation géométrique, il n'est pas souhaitable d'utiliser un tel argument. À la place, on peut employer la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin [39] pour arriver au même résultat, à savoir que tout point $c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3$ faisant partie du Firebrot est tel que $|c_6| \leq \frac{1}{4}$ ⁹.

L'avantage que nous procure cette propriété est qu'on peut facilement déduire de chaque paire d'inéquations plus haut que celles comprenant la constante « 2 » sont satisfaites dès que l'autre l'est. Plus explicitement, on peut voir que $|c_6| \leq \frac{1}{4}$ implique que $\frac{1}{4} + c_6 < 2 - c_6$ et $\frac{1}{4} - c_6 < 2 + c_6$. Ce faisant, puisque le membre de gauche dans chaque paire d'inéquations est identique, on conclut qu'on peut effectivement enlever les inéquations dont le membre de droite contient la constante « 2 » puisqu'elles sont redondantes. Par conséquent, on obtient l'équivalence recherchée. ■

Pour valider de nouveau l'assertion selon laquelle la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ est un tétraèdre régulier, il ne reste qu'à montrer que les points qui en font partie, soit ceux satisfaisant le

9. Cette approche est détaillée à l'annexe A.

système d'inéquations

$$\begin{aligned}
 c_4 - c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 -c_4 + c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 c_4 + c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 -c_4 - c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

correspondent à un ensemble de points dans \mathbb{R}^3 se traduisant par un polyèdre doté de quatre sommets équidistants. Comme l'ensemble solution de ces types de système d'inéquations est un polyèdre convexe¹⁰, nous aurons donc seulement à déterminer les coordonnées en \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 , \mathbf{j}_3 des sommets du solide correspondant à l'ensemble solution du système (3.3).

Il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de choisir trois contraintes parmi quatre. En considérant que chaque inéquation est associée à un plan, cela implique que la région correspondant à l'ensemble solution de (3.3) est délimitée en ses extrêmes par quatre points distincts, qui sont d'ailleurs visibles au centre de la Figure 3.11. Pour déterminer les coordonnées de ceux-ci, on remplace chaque contrainte par une équation en imposant l'égalité pour chacune d'entre elles :

$$\begin{aligned}
 c_4 - c_6 + c_7 &= \frac{1}{4} \\
 -c_4 + c_6 + c_7 &= \frac{1}{4} \\
 c_4 + c_6 - c_7 &= \frac{1}{4} \\
 -c_4 - c_6 - c_7 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On vérifie facilement qu'aucun des quatre plans associés à une équation donnée n'est parallèle à un autre grâce aux différents signes devant les paramètres c_4 , c_6 et c_7 . Par conséquent, on peut trouver les coordonnées des quatre points recherchés en résolvant les quatre systèmes de trois équations issues de (3.1). La méthode d'élimination gaussienne est l'approche privilégiée.

10. L'annexe A renferme toutes les considérations algébriques justifiant l'approche exposée ici.

Proposition 3.9. Les coordonnées en \mathbf{j}_1 , \mathbf{j}_2 et \mathbf{j}_3 des quatre points situés aux extrêmes de la région correspondant au système (3.3) sont

$$A = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \text{ et } D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Démonstration.

En prenant les trois premières équations du système (3.4), on arrive à

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & -1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

On déduit que $c_7 = \frac{1}{4}$, $c_6 = \frac{1}{4}$ et $c_4 = \frac{1}{4}$, ce qui donne le point $D = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. On procède de manière entièrement similaire pour les trois autres systèmes, ce qui permet d'obtenir les points $A = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ et $C = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$. ■

Ces points correspondent donc aux quatre sommets de la forme géométrique associée à \mathcal{F} via le système d'inéquations (3.3). En utilisant maintenant la première partie de la preuve du Théorème 3.17 qui établit que tout polyèdre convexe formé par quatre sommets est un tétraèdre et en calculant ensuite la distance entre chaque paire de sommets, on arrive au résultat recherché.

Théorème 3.17. La coupe tridimensionnelle principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ correspond à un tétraèdre régulier dont les côtés ont une longueur de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, puisque nous avons élaboré des caractérisations géométriques pour les huit coupes tridimensionnelles principales, le théorème précédent conclut l'étude approfondie de ces dernières. Pour sa part, le quatrième et ultime chapitre de ce mémoire permettra d'élargir les horizons de recherche en dynamique tricomplexe, et ce, dans plusieurs directions.

Coupes non principales et coupes idempotentes

Au chapitre 3, et plus particulièrement aux sections 3.3 à 3.5, nous avons introduit l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe et établi pour chacune de ses coupes tridimensionnelles principales une caractérisation géométrique en fonction d'ensembles bidimensionnels. Cela nous a permis, entre autres, de comprendre de quelle façon l'espace des itérées d'une coupe influait sur sa caractérisation, et de déduire certaines symétries intéressantes propres à chaque coupe principale.

Quant à lui, le présent chapitre comporte deux objectifs : investiguer davantage les propriétés géométriques de deux des huit coupes principales à l'aide des représentations γ_3 et γ_2 -idempotentes, des conjugués tricomplexes et de coupes 3D dites *non principales*, et fournir une introduction convenable aux coupes tridimensionnelles idempotentes, obtenues en employant une base vectorielle différente dans le processus de création des sous-espaces de \mathbb{TC} en trois dimensions.

Concernant le premier objectif, la section 4.1 est consacrée à une exploration localisée d'un domaine très vaste, soit celui des composés polyédriques. Même si on se limitera à l'étude d'un phénomène intéressant en lien avec la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, les notions défrichées à cet effet permettront de fournir une interprétation géométrique aux résultats présentés à la section 4.2. Finalement, la section 4.3 sera vouée à l'étude des coupes idempotentes, et plus spécifiquement à une coupe remarquable appelée l'*Earthbrot*.

4.1 Le Starbrot

La section 3.5 nous a permis de constater la présence d'au moins deux solides platoniciens à travers la dynamique tricomplexe, à savoir le tétraèdre (Firebrot) et l'octaèdre (Airbrot).

Quant à elle, la présente section est consacrée à une autre manifestation très particulière de régularité géométrique, mais qui ne se traduit pas par l'apparition d'un solide de Platon.

Comme mentionné à la section 1.2, les cinq solides platoniciens admettent un polyèdre dual qui est lui aussi un solide platonicien. De plus, on peut remarquer que le cas du tétraèdre est particulier, puisqu'il est son propre dual. Dans ce qui suit, un polyèdre particulier sera présenté et étudié en relation avec la dynamique tricomplexe. Néanmoins, il convient de présenter d'abord quelques concepts supplémentaires issus de l'étude des polyèdres. Le lecteur intéressé à en savoir plus pourra consulter [15, 16, 44, 45].

Définition 4.1. On appelle **composé polyédrique** tout polyèdre lui-même formé par la réunion d'un ensemble (fini) de polyèdres disposés de telle sorte que l'intersection de tous leurs intérieurs géométriques soit non vide^a. Autrement dit, si P est un composé polyédrique formé des polyèdres P_1, P_2, \dots, P_n et que $\text{int}_g(P)$ désigne l'intérieur géométrique du polyèdre P , alors

$$P = \bigcup_{i=1}^n P_i, \text{ avec } \bigcap_{i=1}^n \text{int}_g(P_i) \neq \emptyset.$$

^a. De plus, les polyèdres sont habituellement arrangés de manière à être concentriques [16, 44].

Ainsi, en choisissant judicieusement la taille relative des polyèdres qui forment le composé, on est assuré que les faces de l'un de ceux-ci traverseront les faces d'un autre, et vice versa. Si on peut utiliser n'importe quel polyèdre pour former un composé polyédrique, ceux engendrés par des polyèdres réguliers présentent un attrait indéniable, grâce à leur grand niveau de symétrie. En outre, vu les relations de dualité présentes entre certains de ces solides, il devient possible de créer un type particulier de composé.

Définition 4.2. On appelle **composé dual-régulier** (en anglais *regular dual compound*) tout composé polyédrique formé par un polyèdre régulier et son dual régulier.

De cette dernière définition, on déduit que seuls les neuf polyèdres réguliers (cinq solides platoniciens et quatre solides de Kepler-Poinsot) permettent de former un composé dual-régulier. Ces derniers sont donc au nombre de cinq, puisque ces neuf polyèdres se séparent en quatre paires duales et une autoduale. C'est précisément cette dernière possibilité qui nous intéresse dans ce qui suit. Pour plus de détails au sujet de ce composé autodual, le lecteur peut consulter [44].

Le composé dual-régulier formé par deux tétraèdres autoduaux¹ est probablement celui qui présente le plus de symétrie parmi les cinq, étant donné la nature semblable des deux solides impliqués. Sa simplicité et sa beauté expliquent sans doute sa découverte relativement hâtive par différents géomètres : Luca Pacioli en donne vraisemblablement la première illustration dans son ouvrage *De Divina Proportione* en 1509 et l'appelle *octaedron elevatum*. Il est redécouvert par Johannes Kepler aux alentours de 1609, qui le mentionne dans son écrit *Strena seu de Nive Sexangula* paru en 1619, et il choisit alors de l'appeler **Stella Octangula** (octaèdre étoilé). À ce jour, c'est probablement la dénomination la plus répandue de ce composé. Il est également connu sous un autre nom dans la culture



FIGURE 4.1 – Le Stella Octangula ou Merkabah

populaire : dans certains pans du mysticisme juif, on l'appelle *Merkabah*. De plus, à une certaine époque, ce solide semble avoir été intégré à l'architecture des édifices de certaines régions en Europe [8].

L'intérêt qui lui est prêté dans cette section résulte du fait que le Firebrot \mathcal{F} est un tétraèdre régulier. Il vient donc naturel de se demander s'il serait possible de générer son dual \mathcal{F}' dans le même sous-espace vectoriel tridimensionnel $\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, ce qui permettrait en théorie de faire apparaître le Stella Octangula via la dynamique tricomplexe combinée à la réunion de deux coupes 3D. Il s'agirait alors du premier composé dual-régulier obtenu par le biais de l'ensemble de Mandelbrot généralisé. Pour arriver à cette fin, deux approches sont proposées.

1. Précision importante : les tétraèdres en question doivent être de même taille. Il faut donc impérativement utiliser la sphère médiane, conformément à ce qui précède la Remarque 1.3.

4.1.1 Première approche : caractérisation géométrique

Il faut tout d'abord déterminer comment il faudrait définir \mathcal{F}' . Puisque le Firebrot est généré le long de l'axe hyperbolique \mathbf{j}_2 , inverser le sens de ce dernier permettrait vraisemblablement d'inverser \mathcal{F} et d'obtenir son dual. On pourrait donc définir celui-ci comme étant l'objet associé à la coupe non principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ comme suit :

$$\mathcal{F}' = \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) := \left\{ c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6(-\mathbf{j}_2) + c_7\mathbf{j}_3 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

La principale lacune de cette définition réside dans le fait qu'elle ne situe pas \mathcal{F}' dans le même système d'axes que \mathcal{F} . Il est cependant possible de remédier à ce problème en considérant, pour ces deux coupes, la correspondance biunivoque

$$c_6(-\mathbf{j}_2) \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \longleftrightarrow (-c_6)\mathbf{j}_2 \in \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3),$$

ce qui permet d'obtenir pour \mathcal{F}' un résultat similaire au Théorème 3.16.

Théorème 4.1. La coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ peut être caractérisée de la façon suivante :

$$\mathcal{F}' = \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) = \bigcup_{y \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]} \{[(\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\},$$

où, du Théorème 3.16,

$$\mathcal{H}' := \{c_7\mathbf{j}_3 + c_4\mathbf{j}_1 : c_7 + c_4\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}\}.$$

Démonstration.

Soit le point $c = (c_4, c_6, c_7)$ dans le système d'axes $(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, où chaque composante de c correspond à une coordonnée selon un axe donné. Puisque l'axe \mathbf{j}_2 est inversé, le point c doit correspondre au point $(c_4, -c_6, c_7)$ dans le système d'axes $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. Comme il s'agit là du système d'axes correspondant au Firebrot, il devient possible de redéfinir \mathcal{F}' en conséquence et d'utiliser ensuite le Théorème 3.16 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &:= \{c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6(-\mathbf{j}_2) + c_7\mathbf{j}_3 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c = c_4\mathbf{j}_1 + (-c_6)\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_4\mathbf{j}_1 + (-c_6)\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 : c_7\mathbf{j}_3 + c_4\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H}' + (-c_6)\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' - (-c_6)\mathbf{j}_1)\} \\ &= \{c_4\mathbf{j}_1 + (-c_6)\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 : c_7\mathbf{j}_3 + c_4\mathbf{j}_1 \in (\mathcal{H}' - c_6\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + c_6\mathbf{j}_1)\}. \end{aligned}$$

Maintenant, par rapport au système d'axes $(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ de départ, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}' &= \bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{[(\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1)] + (-y)(-\mathbf{j}_2)\} \\ &= \bigcup_{y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]} \{[(\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1)] + y\mathbf{j}_2\},\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la Proposition 3.4 combinée à la définition de \mathcal{H}' . ■

Le théorème précédent met en évidence la ressemblance entre \mathcal{F} et \mathcal{F}' au niveau de leur caractérisation géométrique. Plus spécifiquement, on constate que la seule différence entre les coupes transversales perpendiculaires à l'axe \mathbf{j}_2 de ces solides est que la translation de $\pm\mathcal{H}'$ (effectuée par le paramètre y) est inversée sur l'axe \mathbf{j}_1 . La Figure 4.2 illustre ce phénomène en affichant simultanément les intersections de \mathcal{F} et \mathcal{F}' pour certaines valeurs de y . On y remarque d'ailleurs que l'union des intersections propres à chaque coupe semble correspondre à une coupe transversale du Stella Octagula.

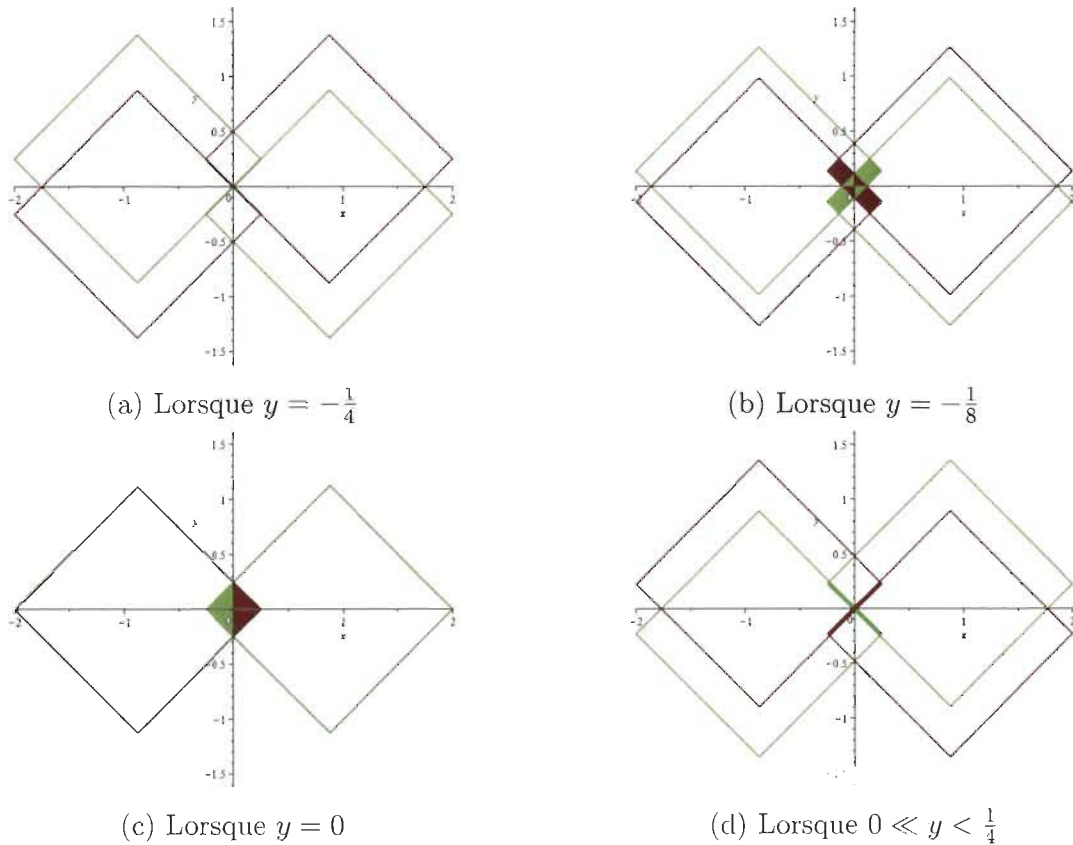


FIGURE 4.2 – Génération simultanée des coupes \mathcal{F} (en rouge) et \mathcal{F}' (en vert) pour certaines valeurs de $y \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$

Ensuite, il serait possible de démontrer pour \mathcal{F}' un résultat analogue au Théorème 3.17, à savoir que cette coupe correspond à un tétraèdre régulier aux mêmes dimensions que \mathcal{F} . Vu les similarités prononcées entre les démonstrations, celles-ci seront omises et ce résultat sera pris pour acquis dans le reste de cette section.

En outre, il existe pour \mathcal{F}' une variante de la Proposition 3.8. En effet, si on pose $c = c_4\mathbf{j}_1 + (-c_6)\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3$, on peut utiliser le Théorème 2.5 pour écrire

$$c = (c_4 + c_6 + c_7)\gamma_1\gamma_3 + (-c_4 - c_6 + c_7)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (c_4 - c_6 - c_7)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (-c_4 + c_6 - c_7)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}.$$

En employant ensuite les mêmes raisonnements que précédemment, on arrive au système d'inéquations

$$\begin{aligned} c_4 + c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ -c_4 - c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ c_4 - c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4} \\ -c_4 + c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{4.1}$$

d'où on déduit la forme tétraédrique de \mathcal{F}' . De façon intéressante, chaque inéquation du système (4.1) comporte un nombre pair (zéro ou deux) de signes négatifs devant les paramètres c_4, c_6 et c_7 alors que celles du système (3.3) associé au Firebrot en avaient un nombre impair (un ou trois). Il s'agit là d'une autre conséquence découlant de l'inversion de l'axe hyperbolique \mathbf{j}_2 .

Par ailleurs, nous aurons également besoin des coordonnées des sommets du solide 3D correspondant à la coupe non principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ pour établir formellement la relation de dualité entre cette dernière et \mathcal{F} .

Proposition 4.1. Les coordonnées en $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ et \mathbf{j}_3 des sommets de \mathcal{F}' sont

$$A' = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), B' = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), C' = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \text{ et } D' = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Démonstration.

Tout comme dans le cas de la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, il y a deux approches possibles.

On pourrait procéder comme à la Proposition 3.5 en tirant parti du fait que les ensembles de la forme $(\mathcal{H}' - y\mathbf{j}_1) \cap (-\mathcal{H}' + y\mathbf{j}_1)$ intervenant dans la caractérisation géométrique de la coupe non principale $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ admettent une propriété analogue à celle présentée à la Proposition 3.4. On pourrait également se servir du système (4.1) pour déduire algébriquement les coordonnées recherchées via la méthode d'élimination gaussienne. Dans tous les cas, la démonstration serait en tous points similaires à celles mentionnées, et conséquemment, elle sera omise. ■

Les coordonnées des sommets de \mathcal{F} et \mathcal{F}' ayant été établies aux propositions 3.5 et 4.1, il devient possible d'utiliser la technique évoquée à la fin de la sous-section portant sur la réciprocité polaire (à la page 23) afin de confirmer rigoureusement la dualité de ces deux coupes. La première étape consistant à déterminer les équations de leurs faces est déjà complétée puisque celles-ci sont induites respectivement par les systèmes (3.3) et (4.1) qui ont été obtenus via l'approche analytique. Après les avoir multipliées par $\frac{1}{4}$, les équations des plans de \mathcal{F} et \mathcal{F}' deviennent donc

$$\mathcal{F} \begin{cases} \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{4}c_6 + \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (1) \\ -\frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_6 + \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (2) \\ \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_6 - \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (3) \\ -\frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{4}c_6 - \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (4) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' \begin{cases} -\frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_6 - \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (5) \\ \frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{4}c_6 - \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (6) \\ -\frac{1}{4}c_4 - \frac{1}{4}c_6 + \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (7) \\ \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{4}c_6 + \frac{1}{4}c_7 = \frac{1}{16} & (8) \end{cases}$$

Remarquons que le terme de droite de chaque équation est égal à $\frac{1}{16}$. Il ne reste plus qu'à trouver une correspondance entre les coordonnées des sommets A, B, C, D de \mathcal{F} et les coefficients des équations des plans délimitant \mathcal{F}' , ainsi qu'entre les coordonnées des sommets A', B', C', D' de \mathcal{F}' et les coefficients des équations des plans délimitant \mathcal{F} . Les correspondances recherchées sont les suivantes :

$$\begin{aligned} B' &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (1) & C &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (5) \\ C' &= \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (2) & B &= \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (6) \\ D' &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (3) & A &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (7) \\ A' &= \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (4) & D &= \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \leftrightarrow (8). \end{aligned}$$

On conclut donc qu'il est possible de voir la coupe \mathcal{F}' comme le polyèdre dual obtenu par le procédé de réciprocité polaire appliqué à la coupe \mathcal{F} en faisant intervenir une sphère de rayon $r = \frac{1}{4}$. En déterminant maintenant les coordonnées des points milieux des six arêtes

de \mathcal{F} (à l'aide de calculs élémentaires), on obtient

$$\text{Point milieu de } \overline{AB} : \left(0, -\frac{1}{4}, 0\right)$$

$$\text{Point milieu de } \overline{AC} : \left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$\text{Point milieu de } \overline{AD} : \left(0, 0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Point milieu de } \overline{BC} : \left(0, 0, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\text{Point milieu de } \overline{BD} : \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

$$\text{Point milieu de } \overline{CD} : \left(0, \frac{1}{4}, 0\right)$$

et il vient immédiatement que la distance les séparant de l'origine est égale à $\frac{1}{4}$ unité. La sphère impliquée dans le processus de réciprocity est donc tangente à \mathcal{F} en chacun de ces points, ce qui signifie qu'il s'agit précisément de la sphère médiane. La dualité des coupes \mathcal{F} et \mathcal{F}' est donc rigoureusement établie, et on sait également que ces deux polyèdres sont de taille similaire.

4.1.2 Deuxième approche : réflexions et conjugués tricomplexes

Bien que les arguments géométriques précédents soient solides et relativement simples, une autre approche permettant d'arriver à la même conclusion mérite qu'on s'y attarde, puisque celle-ci fait intervenir la notion de conjugué tricomplexe et donne donc un nouveau sens géométrique à ce concept. Pour arriver à ce but, on débute en posant la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{TC} &\rightarrow \mathbb{TC} \\ c &\mapsto \varphi(c) = -(c^{\ddagger 5}), \end{aligned}$$

où $c^{\ddagger 5}$ correspond au cinquième conjugué tricomplexe de $c \in \mathbb{TC}$ (abordé à la sous-section 2.3.2). Plus précisément, si $c = c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 + c_5\mathbf{i}_3 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 + c_8\mathbf{i}_4$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= -(c^{\ddagger 5}) \\ &= -(c_1 + c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 + c_5\mathbf{i}_3 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 + c_8\mathbf{i}_4)^{\ddagger 5} \\ &= -(c_1 - c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_4\mathbf{j}_1 - c_5\mathbf{i}_3 + c_6\mathbf{j}_2 - c_7\mathbf{j}_3 + c_8\mathbf{i}_4) \\ &= -c_1 + c_2\mathbf{i}_1 - c_3\mathbf{i}_2 + c_4\mathbf{j}_1 + c_5\mathbf{i}_3 - c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 - c_8\mathbf{i}_4. \end{aligned}$$

En se restreignant maintenant au sous-espace $\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ généré par $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ et \mathbf{j}_3 , on a

$$c = c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3 \Leftrightarrow -(c^{\dagger 5}) = c_4\mathbf{j}_1 - c_6\mathbf{j}_2 + c_7\mathbf{j}_3,$$

ce qui permettrait un passage direct entre les points appartenant aux coupes $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ et $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. On pourrait donc redéfinir \mathcal{F}' comme suit :

$$\mathcal{F}' := \{\varphi|_{\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)}(c) = -(c^{\dagger 5}) \mid c \in \mathcal{F}\}. \quad (4.2)$$

De cette manière, les points appartenant à \mathcal{F}' dépendent de ceux appartenant à \mathcal{F} , ce qui reflète beaucoup mieux le lien géométrique étroit entre ces deux objets. Maintenant, comment démontrer que \mathcal{F}' est le dual de \mathcal{F} ? Remarquons que pour obtenir le dual de n'importe quel tétraèdre régulier, il suffit d'effectuer une réflexion sur celui-ci en fonction du bon plan de référence. Comme nous pourrons le constater, cela garantit au passage que le dual obtenu sera de même taille.

Puisque \mathcal{F} est généré sur l'axe \mathbf{j}_2 avec $|y| \leq \frac{1}{4}$, la réflexion doit s'effectuer en fonction du plan coupant cet axe en $y = 0$. En outre, ce même axe \mathbf{j}_2 doit correspondre à un vecteur normal de ce plan (c'est-à-dire y être perpendiculaire) pour préserver la symétrie de \mathcal{F} (la Figure 4.3 illustre bien ces propriétés). Ainsi, prouver formellement que \mathcal{F}' et \mathcal{F} sont duaux revient à démontrer que la fonction $\varphi|_{\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)}$ correspond à la réflexion souhaitée.

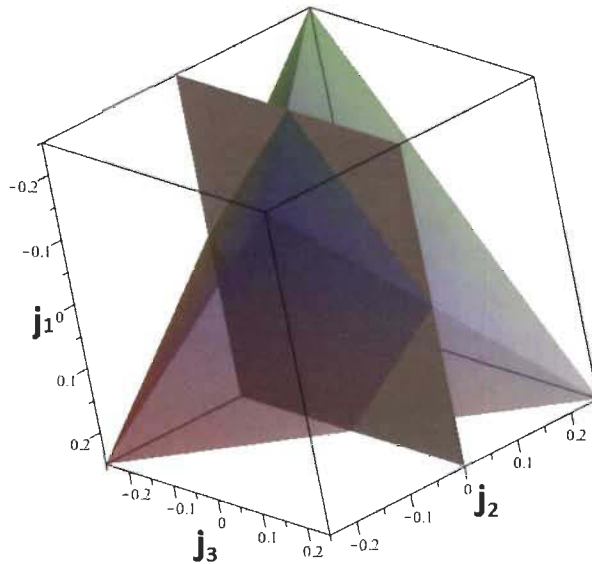


FIGURE 4.3 – Illustration du plan $y\mathbf{j}_2 = 0$ perpendiculaire à l'axe \mathbf{j}_2 . On distingue bien l'effet éventuel d'une réflexion sur \mathcal{F} selon ce plan.

De manière générale, si on dénote un plan $\Pi \subset \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ par $x\mathbf{j}_1 + y\mathbf{j}_2 + z\mathbf{j}_3 = d$, on voit aisément qu'il faut poser $x = z = d = 0$ pour obtenir le plan P correspondant à $y\mathbf{j}_2 = 0$ et possédant les mêmes propriétés que celles énoncées plus haut. C'est donc en fonction de ce plan qu'il faut effectuer une réflexion sur \mathcal{F} pour obtenir son dual.

Dans ce qui suit, la méthode générale pour déterminer une matrice de réflexion selon un plan quelconque passant par l'origine dans un espace tridimensionnel est exposée, mais elle pourrait très bien être généralisée à un espace comprenant n dimensions. Cette méthode fait intervenir une matrice de réflexion appelée *matrice de Householder*, et nous nous en servons ensuite pour déterminer la matrice nécessaire à notre réflexion. Notons que cette section est essentiellement issue de [21] et de [15]. En premier lieu, présentons une définition classique.

Définition 4.3. Dans un espace euclidien tridimensionnel, une **réflexion** est une transformation symétrique et isométrique de l'espace vers lui-même selon un ensemble de points fixes qui constituent le plan de réflexion. Le mot isométrique signifie qu'une réflexion préserve les mesures des figures concernées, notamment les angles et les longueurs.

Remarque 4.1. Une même réflexion appliquée deux fois de suite retourne chaque point à son emplacement initial, ce qui en fait un cas particulier d'*involution*, soit une application bijective qui est sa propre inverse.

Remarque 4.2. Puisqu'il s'agit d'une transformation isométrique, toute réflexion préserve également l'aire et le volume des objets concernés.

Abordons maintenant le problème avec l'approche de Householder [22]. Commençons en posant $\vec{n} = [a \ b \ c]^\top$ comme étant le vecteur normal **unitaire** au plan $P : ax + by + cz = 0$ passant par l'origine (la composante d à droite de l'équation du plan est posée égale à zéro). Formons maintenant la matrice de Householder suivante :

$$\begin{aligned} H_{\vec{n}} &= I - 2\vec{n}\vec{n}^\top \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

On souhaite montrer que $H_{\vec{n}}$ est la matrice de Householder permettant d'effectuer une réflexion selon le plan P .

Proposition 4.2. La matrice $H_{\vec{n}}$ possède les propriétés suivantes :

- 1) $(H_{\vec{n}})\vec{n} = -\vec{n}$;
- 2) $(H_{\vec{n}})\vec{x} = \vec{x}, \forall \vec{x} \perp \vec{n}$;
- 3) $H_{\vec{n}} = H_{\vec{n}}^{\top}$ ($H_{\vec{n}}$ est une matrice symétrique) ;
- 4) $H_{\vec{n}}^{\top} = H_{\vec{n}}^{-1}$ ($H_{\vec{n}}$ est une matrice orthogonale).

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1) \text{ On a } (H_{\vec{n}})\vec{n} &= \vec{n} - 2\vec{n}(\vec{n}^{\top}\vec{n}) \\ &= \vec{n} - 2\vec{n}1 && \text{(Puisque } \vec{n} \text{ est unitaire)} \\ &= -\vec{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Si } \vec{x} \perp \vec{n}, \text{ alors } (H_{\vec{n}})\vec{x} &= \vec{x} - 2\vec{n}(\vec{n}^{\top}\vec{x}) \\ &= \vec{x} - 2\vec{n}0 && \text{(Puisque } \vec{n} \perp \vec{x}) \\ &= \vec{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ On a } H_{\vec{n}}^{\top} &= (I - 2\vec{n}\vec{n}^{\top})^{\top} \\ &= I - 2(\vec{n}\vec{n}^{\top})^{\top} \\ &= I - 2\vec{n}\vec{n}^{\top}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ On a } H_{\vec{n}}H_{\vec{n}}^{\top} &= H_{\vec{n}}H_{\vec{n}} && \text{(Par la propriété 3)} \\ &= (I - 2\vec{n}\vec{n}^{\top})(I - 2\vec{n}\vec{n}^{\top}) \\ &= I - 4\vec{n}\vec{n}^{\top} + 4\vec{n}\vec{n}^{\top}\vec{n}\vec{n}^{\top} \\ &= I - 4\vec{n}\vec{n}^{\top} + 4\vec{n}\vec{n}^{\top} && \text{(Puisque } \vec{n}^{\top}\vec{n} = 1) \\ &= I. \end{aligned}$$

Ceci complète la démonstration. ■

En conclusion, la propriété 2 de la Proposition 4.2 indique que la matrice $H_{\vec{n}}$ correspond à une transformation laissant tout point du plan P invariant, la propriété 1 de cette même proposition assure qu'un vecteur normal au plan est envoyé sur son opposé, la propriété 4 montre que la transformation effectuée à l'aide de $H_{\vec{n}}$ est orthogonale, tandis qu'en combinant les propriétés 3 et 4, on déduit que cette même transformation est une involution. Ensuite, puisque toute transformation orthogonale préserve les normes et les angles de vecteurs [21], il vient que la transformation effectuée à l'aide de $H_{\vec{n}}$ est une transformation isométrique. On conclut donc, en se basant sur la Définition 4.3 et la Remarque 4.1, que la matrice $H_{\vec{n}}$ induit véritablement une réflexion selon le plan P .

Revenons à notre cas particulier. Grâce à l'équation du plan $P : y\mathbf{j}_2 = 0$, on détermine facilement un vecteur unitaire qui y est normal. Prenons $\vec{n} = [0 \ 1 \ 0]^\top$ et construisons la matrice de Householder correspondante :

$$H_{\vec{n}} = I - 2\vec{n}\vec{n}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $\vec{c} = [c_4 \ c_6 \ c_7]^\top$ un vecteur quelconque dans $\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ et définissons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) &\rightarrow \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3) \\ \vec{c} &\mapsto f(\vec{c}) = (H_{\vec{n}})\vec{c}. \end{aligned}$$

On sait, grâce à ce qui précède, que la fonction f correspond à une réflexion dans $\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ selon le plan $P : y\mathbf{j}_2 = 0$. On remarque alors que

$$f(\vec{c}) = (H_{\vec{n}})\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_4 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_4 \\ -c_6 \\ c_7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le domaine des fonctions f et $\varphi|_{\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)}$ est le même (en omettant la transposition), et chaque élément de celui-ci est envoyé sur la même image. Par conséquent,

$$f(c) = \varphi|_{\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)}(c) = -(c^{\dagger 5}), \quad \forall c \in \mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$$

et on conclut que la fonction $\varphi|_{\mathbb{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)}(c) = -(c^{\dagger 5})$ correspond à la réflexion souhaitée. En conséquence, \mathcal{F}' est le dual de \mathcal{F} , par (4.2). Notons que la Remarque 4.2 nous assure en

plus que la forme et les dimensions du solide \mathcal{F}' ainsi généré correspondent parfaitement à celles de \mathcal{F} .

Le polyèdre $\mathcal{S} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ aurait donc huit sommets situés en $(\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{4})$ et serait formé par l'union de deux tétraèdres réguliers duaux de dimensions identiques, ce qui concorde avec la définition du composé dual-régulier associé au Stella Octangula. La Figure 4.4 illustre justement le Starbrot \mathcal{S} généré par la dynamique tricomplexe dans le *MetatronBrot Explorer* (MBE8D). Il s'agit, entre autres choses, du tout premier polyèdre régulier non convexe et du premier composé polyédrique obtenu à partir de la généralisation de l'ensemble de Mandelbrot aux nombres tricomplexes.

Soulignons en terminant cette section que le Stella Octangula est lié aussi bien au tétraèdre qu'à l'octaèdre et au cube. En effet, en plus de sa représentation en tant que composé dual-régulier étudiée ici, ce polyèdre s'obtient également en appliquant le procédé de *stellation* à un octaèdre, qui consiste à étendre les faces de ce dernier jusqu'à ce qu'elles se rejoignent de nouveau. De surcroît, l'octaèdre étoilé correspond au cas limite du *facettage* d'un cube, qui consiste à enlever certaines parties de celui-ci en évitant de créer de nouveaux sommets. Alors que la stellation et le facettage sont des procédés réciproques, le fait que l'on puisse se servir aussi bien d'un octaèdre que d'un cube comme point de départ apparaît comme tout à fait cohérent si on se rappelle que ces deux solides platoniciens sont le dual l'un de l'autre. Néanmoins, une question subsiste : on sait désormais que le tétraèdre et l'octaèdre se manifestent dans la dynamique tricomplexe. Qu'en est-il du cube ? La réponse à cette question se trouve à la section 4.3.

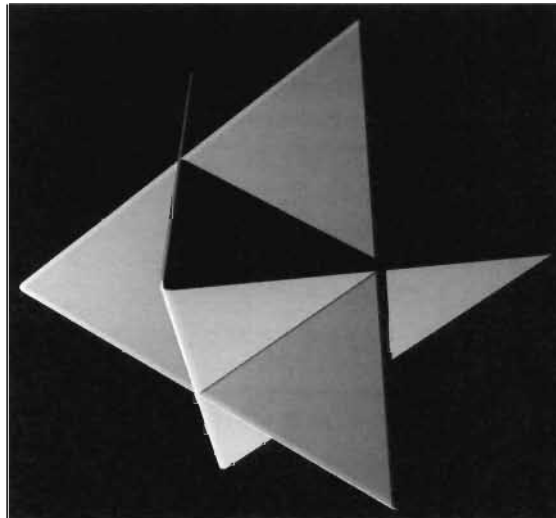


FIGURE 4.4 - Le Starbrot \mathcal{S} généré par l'union des coupes \mathcal{F} et \mathcal{F}'

4.2 Coupes non principales

Les sections 3.4 et 3.5 ont bien illustré, pour une coupe principale donnée, l'incidence du choix de la représentation idempotente sur la forme de la caractérisation géométrique en découlant. Toutefois, dans le cas du Turtlebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, on a vu que l'emploi des représentations γ_3 et γ_2 -idempotentes ne permettait pas d'élaborer une caractérisation en fonction d'ensembles bidimensionnels. De plus, c'est aussi le cas pour l'Hourglassbrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ si on tente d'utiliser la représentation γ_2 -idempotente. Dans cette section, on verra que pour ces deux coupes principales spécifiques, les représentations concernées permettent en fait de développer une caractérisation géométrique en fonction d'ensembles tridimensionnels, ce qui s'avère révélateur au regard de la relation entre ces coupes et celles présentées à la section 3.3.

Commençons par investiguer les propriétés de la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Puisqu'on cherche à établir pour celle-ci une caractérisation géométrique où interviennent des ensembles 3D, l'approche sera similaire à celle illustrée au début de la preuve du Théorème 3.11. Aussi, comme les conjugués tricomplexes interviendront à plusieurs reprises dans les prochaines preuves, la Figure 4.5 est fournie à titre de référence pour déterminer facilement leur effet sur le signe des huit coefficients réels d'un nombre tricomplexe.

\dagger_i	x_1	$x_2\mathbf{i}_1$	$x_3\mathbf{i}_2$	$x_4\mathbf{j}_1$	$x_5\mathbf{i}_3$	$x_6\mathbf{j}_2$	$x_7\mathbf{j}_3$	$x_8\mathbf{i}_4$
\dagger_0	+	+	+	+	+	+	+	+
\dagger_1	+	+	+	+	-	-	-	-
\dagger_2	+	-	+	-	+	-	+	-
\dagger_3	+	+	-	-	+	+	-	-
\dagger_4	+	-	-	+	+	-	-	+
\dagger_5	+	-	+	-	-	+	-	+
\dagger_6	+	+	-	-	-	-	+	+
\dagger_7	+	-	-	+	-	+	+	-

FIGURE 4.5 – Effet de la conjugaison tricomplexe sur les huit coefficients réels de $\eta \in \mathbb{TC}$

Théorème 4.2. Considérons la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Alors,

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) = \mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$$

où

$$\mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_1 \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)\}.$$

Démonstration.

Posons $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) \subset \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Sa représentation γ_3 -idempotente est donc

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_6\mathbf{j}_1)\gamma_3 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_1)\overline{\gamma_3} \\ &= (-d^{\dagger 4})\gamma_3 + (d)\overline{\gamma_3}, \end{aligned}$$

où on a posé $d = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_1 \Rightarrow -d^{\dagger 4} = -d^{\dagger 7} = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_6\mathbf{j}_1$. Par la Proposition 3.2, on voit que la suite $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi les suites $\{P_{-d^{\dagger 4}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Comme le triplet de coordonnées $(c_2, c_3, -c_6) \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ correspond au point $(c_2, c_3, c_6) \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1)$, on voit que la suite $\{P_{-d^{\dagger 4}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $-d^{\dagger 4} \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ est bornée si et seulement si la suite $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $d \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1)$ est bornée. Cela signifie que $-d^{\dagger 4} \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ ssi $d \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1)$, et alors

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &\Leftrightarrow d \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) \text{ et } d \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \\ &\Leftrightarrow d \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1). \end{aligned}$$

On remarque cependant que $c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 \pm c_6\mathbf{j}_1 \notin \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Par conséquent, on définit l'ensemble

$$\mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_1 \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)\}$$

afin de ramener les coupes 3D obtenues dans le sous-espace à l'intérieur duquel se trouve le Turtlebrot. Ce faisant, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_1 \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)\} \\ &= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c \in \mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}^*(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)\}, \end{aligned}$$

et on a le résultat souhaité. ■

On déduit du Théorème 4.2 que la coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ correspond à l'intersection de deux autres coupes tridimensionnelles. Bien que celles-ci doivent se situer dans le sous-espace vectoriel $\mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, elles sont en fait des copies de coupes 3D évoluant dans le sous-espace $\mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$. Plus précisément, sans tenir compte de la transposition dans le bon système d'axes, on peut voir le Turtlebrot comme l'intersection du Mousebrot (Figure 3.3c) et de la coupe non principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1)$. En outre, on peut donner une interprétation géométrique à cette dernière de la même façon qu'à la coupe non principale $\mathcal{F}' = \mathcal{T}(\mathbf{j}_1, -\mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ en utilisant cette fois-ci le quatrième (ou septième) conjugué tricomplexe. En effet, en définissant

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1) := \{-c^{\ddagger 4} : c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)\}$$

de manière analogue à (1.2) et en effectuant ensuite le même cheminement, on constate que l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) &\rightarrow \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1) \\ c &\mapsto \phi(c) = -c^{\ddagger 4} \end{aligned}$$

constitue une réflexion selon le plan $P \subset \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_1)$ d'équation cartésienne $z_{\mathbf{j}_1} = 0$. Ainsi, la coupe non principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, -\mathbf{j}_1)$ correspond à la réflexion du Mousebrot selon ce même plan, et leur intersection, dans le bon sous-espace, donne le Turtlebrot.

Théorème 4.3. La coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ s'écrit également

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) = \mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \cap \mathcal{T}^*(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$$

où

$$\mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)\}.$$

Démonstration.

Posons à nouveau $c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2$ avec $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Sous sa représentation γ_2 -idempotente, ce nombre s'écrit

$$c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3$$

$$\begin{aligned}
&= (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6)\gamma_2 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_6)\overline{\gamma_2} \\
&= (d)\gamma_2 + (-d^{\dagger 4})\overline{\gamma_2},
\end{aligned}$$

où on a posé $d = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6 \Rightarrow -d^{\dagger 4} = -d^{\dagger 7} = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 - c_6$. On suit maintenant les mêmes étapes qu'au Théorème 4.2. Par hypothèse, $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, et on sait de la Proposition 3.2 que c'est le cas si et seulement si les suites $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-d^{\dagger 4}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Comme le point $(-c_6, c_2, c_3) \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ correspond au point $(c_6, c_2, c_3) \in \mathbb{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, la suite $\{P_{-d^{\dagger 4}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $-d^{\dagger 4} \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ est bornée ssi la suite $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ avec $d \in \mathbb{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ est bornée. Ainsi, $-d^{\dagger 4} \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ssi $d \in \mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, et dans ce cas, le caractère borné des suites $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-d^{\dagger 4}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalent à ce que $d \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \cap \mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$. Par conséquent, en définissant l'ensemble $\mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)\}$ permettant de ramener la caractérisation dans le bon sous-espace vectoriel, on peut voir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\
&= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \cap \mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)\} \\
&= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_3\mathbf{i}_2 + c_6\mathbf{j}_2 : c \in \mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \cap \mathcal{T}^*(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)\},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Ainsi, on peut également obtenir le Turtlebrot (Figure 3.4a) en considérant l'intersection du Tetrabrot (Figure 3.3a) et de la coupe non principale $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, toutes deux transposées dans le sous-espace $\mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$. Qui plus est, l'interprétation géométrique propre à la coupe $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ ressemble à celles des autres coupes non principales abordées jusqu'à maintenant. En la redéfinissant comme $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) := \{-c^{\dagger 4} : c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)\}$ et en constatant, par des arguments semblables à ceux des cas précédents, que l'application

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) &\rightarrow \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2) \\
c &\mapsto \psi(c) = -c^{\dagger 4}
\end{aligned}$$

correspond à une réflexion selon le plan $P \subset \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ décrit par l'équation $x = 0$, on déduit que la coupe non principale $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ équivaut à la réflexion du Tetrabrot en fonction de P , ce qui revient à inverser cette coupe selon l'axe réel. D'ailleurs, la Figure 4.6 nous procure un autre point de vue faisant ressortir les motifs du Tetrabrot qui sont similaires à ceux de la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$, ce qui permet de mieux comprendre comment

l'intersection des deux coupes évoquées au Théorème 4.3 coïncide avec le Turtlebrot.

Le lecteur aura sans doute remarqué que les coupes principales intervenant dans les caractérisations qui précèdent, soit le Tetrabrot et le Mousebrot, font partie de celles dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} . La seule autre coupe principale présentée à la section 3.3, l'Arrowheadbrot, est quant à elle étroitement liée à l'Hourglassbrot.

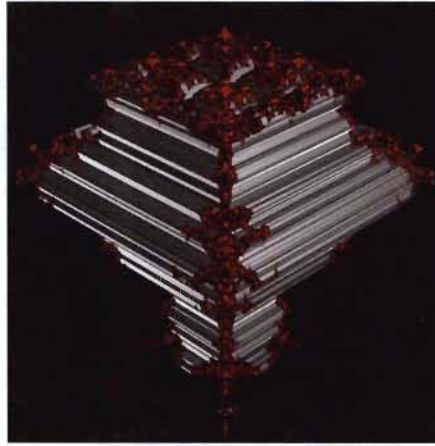


FIGURE 4.6 – Vue alternative de la coupe principale $\mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$

Théorème 4.4. La coupe principale $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ possède la caractérisation suivante :

$$\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) = \mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}^*(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$$

où

$$\mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)\}.$$

Démonstration.

Posons $c = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2$ tel que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Sous sa représentation γ_2 -idempotente, ce nombre s'écrit

$$\begin{aligned} c &= c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + (c_6\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 \\ &= (c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6)\gamma_2 + (c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 - c_6)\overline{\gamma_2} \\ &= (d)\gamma_2 + (-d^{\dagger 2})\overline{\gamma_2}, \end{aligned}$$

où on a posé $d = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6 \Rightarrow -d^{\dagger 2} = -d^{\dagger 5} = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 - c_6$. On voit donc que $c \in \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$ ssi $\{P_d^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{P_{-d^{\dagger 2}}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Ensuite, puisque le point

$(-c_6, c_2, c_4) \in \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ correspond au point $(c_6, c_2, c_4) \in \mathbb{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$, on déduit à l'aide d'un raisonnement similaire à ceux des résultats précédents que le caractère borné de ces suites est équivalent à ce que $d \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$. Dans ce cas, en introduisant l'ensemble $\mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \{c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)\}$, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) &= \{c \in \mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6 \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)\} \\ &= \{c = c_2\mathbf{i}_1 + c_4\mathbf{j}_1 + c_6\mathbf{j}_2 : c \in \mathcal{T}^*(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \cap \mathcal{T}^*(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)\}, \end{aligned}$$

et la preuve est complète. ■

La caractérisation qui précède établit que l'Hourglassbrot (Figure 3.4b) correspond en fait, en omettant la transposition dans le sous-espace $\mathbb{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, à l'intersection de l'Arrowheadbrot (Figure 3.3b) et de la coupe non principale $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$. De surcroît, en écrivant $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) := \{-c^{\dagger 2} : c \in \mathcal{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)\}$ et en remarquant que l'application

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) &\rightarrow \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1) \\ c &\mapsto \xi(c) = -c^{\dagger 2} \end{aligned}$$

se traduit par une réflexion selon le plan $P \subset \mathbb{T}(1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ d'équation cartésienne $x = 0$, on déduit que la coupe $\mathcal{T}(-1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1)$ équivaut à l'Arrowheadbrot sur lequel une réflexion en fonction du plan P a été effectuée, ce qui revient également à inverser cette coupe le long de l'axe réel.

Les théorèmes 4.2, 4.3 et 4.4 indiquent que le Turtlebrot et l'Hourglassbrot s'expriment comme l'intersection de deux ensembles tridimensionnels, et plus spécifiquement, comme l'intersection de deux coupes 3D dont l'espace des itérées est isomorphe à $\mathbb{B}\mathbb{C}$. On comprend donc mieux la relation entre les coupes principales présentées à la section 3.3 et celles introduites à la section 3.4. En outre, l'association de certains conjugués tricomplexes à des réflexions dans les sous-espaces considérés confère un sens géométrique aux coupes non principales, ce qui clarifie le rôle des conjugués au regard de la dynamique tricomplexe et enrichit au passage notre compréhension globale.

Des résultats qui précèdent et de ceux établis à la section 3.4, il découle aussi que les coupes principales dont l'espace des itérées est isomorphe à $\mathbb{T}\mathbb{C}$ comportent plus de

symétries (au sens géométrique du terme) que celles étudiées à la section 3.3. En effet, contrairement à ces dernières, les coupes principales présentées à la section 3.4 de la forme $\mathcal{T}(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l, \mathbf{i}_m)$ sont symétriques selon les plans $P_1 : x\mathbf{i}_k = 0$, $P_2 : y\mathbf{i}_l = 0$ et $P_3 : z\mathbf{i}_m = 0^2$.

4.3 Coupes idempotentes

Dans cette dernière section, nous abordons un autre type de coupe tridimensionnelle de \mathcal{M}_3 qui sont appelées les coupes idempotentes. Cependant, on ne réalisera pas une analyse exhaustive de celles-ci, puisqu'elles sont présentées ici uniquement dans le but de répertorier tous les solides platoniciens pouvant être générés par l'intermédiaire de la dynamique tricomplexe. Comme nous le verrons plus loin, une seule coupe idempotente revêt un intérêt particulier au regard de cet objectif : l'Earthbrot. On débute donc avec une introduction au concept de coupe idempotente, ce qui jettera les bases nécessaires à l'étude de cette coupe particulière.

Reprenons la représentation idempotente du Théorème 2.5. On sait, grâce à celle-ci, qu'on peut écrire tout nombre $\zeta \in \mathbb{TC}$ sous la forme

$$\zeta = z_1\gamma_1\gamma_3 + z_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + z_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + z_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3},$$

où $z_i \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, $i = 1, \dots, 4$. Si on pose maintenant $z_i = a_i + b_i\mathbf{i}_1$ pour $i = 1, \dots, 4$ il vient

$$\begin{aligned} \zeta &= (a_1 + b_1\mathbf{i}_1)\gamma_1\gamma_3 + (a_2 + b_2\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (a_3 + b_3\mathbf{i}_1)\gamma_1\overline{\gamma_3} + (a_4 + b_4\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} \\ &= a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} + (b_1)\mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3 + (b_2)\mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\gamma_3 + (b_3)\mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3} + (b_4)\mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

À partir de cette représentation, on peut définir un type de sous-espace vectoriel semblable à ceux de la Définition 3.8, ce qui permet ensuite d'introduire le concept de coupe idempotente.

2. Conformément aux théorèmes 3.15 et 3.17, c'est aussi le cas de l'Airbrot (pour lequel on a plutôt $P_1 : x = -\frac{7}{8}$), mais pas du Firebrot. Pour ce dernier, les équations des plans de symétrie sont moins triviales [15].

Définition 4.4. Considérons trois éléments α, β, δ distincts deux à deux pris dans $\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\gamma_3, \mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$. Dans ce cas, l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\alpha, \beta, \delta) &:= \{c \in \mathbb{TC} : c = c_1\alpha + c_2\beta + c_3\delta, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha, \beta, \delta\} \end{aligned}$$

est le sous-espace vectoriel de \mathbb{TC} engendré par les éléments α, β et δ .

Définition 4.5. Soit $\alpha, \beta, \delta \in \{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\gamma_3, \mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$. L'ensemble

$$\mathcal{T}_e(\alpha, \beta, \delta) := \{c \in \mathbb{T}(\alpha, \beta, \delta) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

est appelé une coupe tridimensionnelle idempotente de \mathcal{M}_3 . De manière équivalente,

$$\mathcal{T}_e(\alpha, \beta, \delta) = \mathbb{T}(\alpha, \beta, \delta) \cap \mathcal{M}_3.$$

Dans notre contexte, on s'intéresse surtout au cas spécifique où aucun des éléments α, β, δ choisis parmi $\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\gamma_1\gamma_3, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\gamma_3, \mathbf{i}_1\gamma_1\overline{\gamma_3}, \mathbf{i}_1\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$ ne contient l'unité imaginaire \mathbf{i}_1 . Les coupes idempotentes dans cette situation sont donc des sous-ensembles de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) := \{\zeta = a_1\gamma_1\gamma_3 + a_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + a_3\gamma_1\overline{\gamma_3} + a_4\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3} \in \mathbb{TC} : a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}\}$, qui n'est nul autre que le sous-espace des nombres biduplexes $\mathbb{D}(2)$. En effet, on vérifie facilement que tout nombre $\zeta \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ est un nombre biduplexe en développant chacun des termes, et réciproquement, l'équation (2.6) implique que tout nombre biduplexe s'écrit comme un élément de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Ce constat montre plus clairement que les sous-espaces $\mathbb{T}(\alpha, \beta, \delta)$, et par extension les coupes idempotentes, sont obtenus en considérant une base vectorielle différente de la base canonique usuelle. Ainsi, les ensembles $\{1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3\}$ et $\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$ sont deux bases différentes de $\mathbb{D}(2)$ permettant de générer des coupes tridimensionnelles distinctes.

À ce sujet, on remarque que dans la base $\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$, on dénombre $\binom{4}{3} = 4$ coupes idempotentes pour lesquelles on pourrait analyser la dynamique induite par le polynôme $P_c^n(0)$. En réalité, il suffit d'étudier une seule de ces coupes, puisqu'il n'est pas difficile de se convaincre que la dynamique de chacun des quatre axes associés à $\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}$ et $\overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ est la même que celle de la droite réelle en raison des coefficients

$a_i \in \mathbb{R}$. On introduit donc la coupe idempotente

$$\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) := \left\{ c \in \mathbb{T}(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

dénommée l'Earthbrot (Figure 4.7), pour désigner celle qui nous intéresse. On remarque tout de suite le caractère régulier de cette coupe, ce qui rappelle l'Airbrot et le Firebrot. En fait, à l'instar de ceux-ci, l'Earthbrot est un solide platonicien, nommément l'hexaèdre régulier. Pour prouver cette assertion, nous aurons besoin du lemme suivant, qui caractérise les points faisant partie d'un cube dans \mathbb{R}^3 .

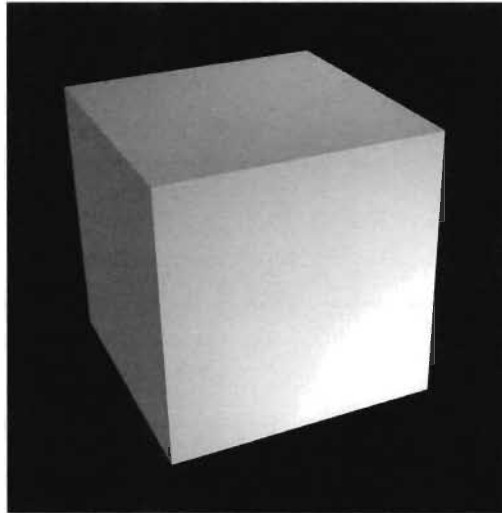


FIGURE 4.7 - La coupe idempotente $\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3})$ - Earthbrot

Lemme 4.1. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ un cube centré en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et dont les arêtes sont de longueur L . Le lieu géométrique des points (x, y, z) satisfaisant l'inégalité

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} \leq \frac{L}{2}$$

correspond exactement aux points situés sur la surface du cube ainsi qu'en son intérieur géométrique. Autrement dit,

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} \leq \frac{L}{2} \right\}.$$

De plus, l'égalité $\max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} = \frac{L}{2}$ est atteinte pour tous les points situés à la surface du cube.

Démonstration.

Premièrement, si L désigne la longueur de chaque arête de C , alors $\frac{L}{2}$ correspond à la longueur du segment de droite reliant le point milieu de n'importe quelle arête à un sommet adjacent. Ainsi,

$$C = \left[x_0 - \frac{L}{2}, x_0 + \frac{L}{2} \right] \times \left[y_0 - \frac{L}{2}, y_0 + \frac{L}{2} \right] \times \left[z_0 - \frac{L}{2}, z_0 + \frac{L}{2} \right].$$

Considérons maintenant la fonction à valeurs réelles suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = \frac{L}{2} - \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\}$$

Étudions le comportement de cette fonction selon la position relative d'un point quelconque de l'espace $P(x, y, z)$ par rapport à C . Premièrement, si $P \notin C$, alors au moins l'une de ses trois coordonnées, disons x (sans perte de généralité) ne se trouve pas dans l'intervalle qui lui correspond dans le triple produit cartésien plus haut : $x \notin \left[x_0 - \frac{L}{2}, x_0 + \frac{L}{2} \right]$. Par conséquent,

$$|x - x_0| > \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} > \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f(P) < 0.$$

Si $P \in C$, alors de deux choses l'une : soit P appartient à la surface de C , ou P appartient à son intérieur géométrique. Dans le premier cas, au moins l'une des trois coordonnées de P (prenons x encore une fois) doit coïncider avec la borne inférieure (ou supérieure) de l'intervalle correspondant : on a donc $x = x_0 - \frac{L}{2}$ ou $x = x_0 + \frac{L}{2}$. Il vient donc que

$$|x - x_0| = \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} = \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad f(P) = 0.$$

Finalement, si $P \in \text{int}_g(C)$, alors

$$P \in \left(x_0 - \frac{L}{2}, x_0 + \frac{L}{2} \right) \times \left(y_0 - \frac{L}{2}, y_0 + \frac{L}{2} \right) \times \left(z_0 - \frac{L}{2}, z_0 + \frac{L}{2} \right).$$

Ainsi, on peut voir que

$$\left. \begin{array}{l} |x - x_0| < \frac{L}{2} \\ |y - y_0| < \frac{L}{2} \\ |z - z_0| < \frac{L}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} < \frac{L}{2} \Leftrightarrow f(P) > 0.$$

De ce qui précède, on constate la chose suivante :

$$\begin{aligned} P \in C &\Leftrightarrow f(P) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{L}{2} - \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} \leq \frac{L}{2}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que l'Earthbrot est bel et bien un hexaèdre régulier, ce qui porte à trois le nombre de solides platoniciens pouvant être générés par l'intermédiaire de la dynamique tricomplexe.

Théorème 4.5. La coupe idempotente $\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3})$ correspond à un cube avec des côtés de longueur $\frac{9}{4}$.

Démonstration.

Soit $c = c_1\gamma_1\gamma_3 + c_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + c_3\gamma_1\overline{\gamma_3}$ tel que $\{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors, directement de la Remarque 3.2, on déduit que $c \in \mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3})$ si et seulement si $\{P_{c_i}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées. Dans ce cas, en utilisant la propriété 6 du Théorème 3.1, on obtient les équivalences

$$\begin{aligned} \{P_{c_i}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} &\Leftrightarrow c_i \in \mathcal{M}_1 \\ &\Leftrightarrow -2 \leq c_i \leq \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{9}{8} \leq c_i + \frac{7}{8} \leq \frac{9}{8} \\ &\Leftrightarrow \left| c_i + \frac{7}{8} \right| \leq \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\{P_{c_i}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée $\forall i = 1, 2, 3$ si et seulement si $\max_{i=1,2,3} \left\{ \left| c_i + \frac{7}{8} \right| \right\} \leq \frac{9}{8}$. Par

conséquent, le Lemme 4.1 assure que cela correspond à l'équation d'un cube centré en $(-\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{7}{8})$, par rapport à la base $\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}$, avec des côtés de longueur $\frac{9}{4}$. ■

Même si le résultat précédent détermine complètement les propriétés géométriques de l'Earthbrot, il serait intéressant de caractériser cette coupe en fonction d'ensembles bidimensionnels, comme cela a été fait pour les huit coupes principales présentées aux sections 3.3 à 3.5. C'est précisément l'objectif du prochain résultat. Toutefois, contrairement aux coupes précédentes, les ensembles 2D en question ne correspondent pas directement à un ensemble usuel comme \mathcal{M}_1 ou \mathcal{H} , mais plutôt à ce dernier à une transformation affine près. Aussi, l'aspect géométrique de la caractérisation ci-dessous est plus évident que celui des autres coupes, puisqu'il s'agit d'une simple translation continue de carrés le long de l'axe $\gamma_1\overline{\gamma_3}$.

Théorème 4.6. L'Earthbrot peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) = \bigcup_{y \in [-2, \frac{1}{4}]} \{E + y\gamma_1\overline{\gamma_3}\},$$

où $E := [-2, \frac{1}{4}] \times [-2, \frac{1}{4}]$, dans la base $(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3)$.

Démonstration.

Posons de nouveau $c = c_1\gamma_1\gamma_3 + c_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + c_3\gamma_1\overline{\gamma_3}$. On commence par ramener le nombre c sous sa représentation γ_3 -idempotente :

$$\begin{aligned} c &= c_1\gamma_1\gamma_3 + c_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + c_3\gamma_1\overline{\gamma_3} \\ &= (c_1\gamma_1 + c_2\overline{\gamma_1})\gamma_3 + (c_3\gamma_1)\overline{\gamma_3} \\ &= \left(\frac{c_1 + c_2}{2} + \left(\frac{c_1 - c_2}{2} \right) \mathbf{j}_1 \right) \gamma_3 + (c_3\gamma_1)\overline{\gamma_3}. \end{aligned}$$

Afin de simplifier la notation dans ce qui suit, on pose $a = \frac{c_1 + c_2}{2}$ et $b = \frac{c_1 - c_2}{2}$, ce qui fait que $c = (a + b\mathbf{j}_1)\gamma_3 + (c_3\gamma_1)\overline{\gamma_3}$. Par la Définition 4.5 ainsi que par les propriétés de la représentation γ_3 -idempotente,

$$\begin{aligned} c \in \mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) &\Leftrightarrow \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow \{P_{a+b\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{c_3\gamma_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées} \\ &\Leftrightarrow \{P_{a+b\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \{P_{c_3}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont bornées,} \end{aligned}$$

où, à la dernière ligne, on a utilisé le Lemme 3.1 de concert avec l'égalité $c_3\gamma_1 = c_3\gamma_1 + 0\overline{\gamma_1}$. Or, $a + b\mathbf{j}_1 \in \mathbb{D}$, ce qui signifie que $\{P_{a+b\mathbf{j}_1}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $a + b\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H}$. Afin d'exprimer cette inclusion en fonction de c_1 et c_2 , on fait appel à la caractérisation de Metzler [27] et on remplace a et b par leur expression en c_1 et c_2 , ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} a + b\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow \left| a + \frac{7}{8} \right| + |b| \leq \frac{9}{8} \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{7}{8} \right| + \left| \frac{c_1 - c_2}{2} \right| \leq \frac{9}{8} \\ &\Leftrightarrow \pm \left(\frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{7}{8} \right) \pm \left(\frac{c_1 - c_2}{2} \right) \leq \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

En considérant la dernière ligne comme quatre inégalités distinctes et en simplifiant celles-ci, on obtient deux conditions pour c_1 et autant pour c_2 . De manière explicite, ces conditions sont les suivantes :

$$a + b\mathbf{j}_1 \in \mathcal{H} \iff -2 \leq c_1 \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad -2 \leq c_2 \leq \frac{1}{4}.$$

En outre, puisque $c_3 \in \mathbb{R}$, alors par définition de \mathcal{M}_1 nous avons

$$\{P_{c_3}^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \iff -2 \leq c_3 \leq \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, en posant $E := \left[-2, \frac{1}{4}\right] \times \left[-2, \frac{1}{4}\right] \subset \text{span}_{\mathbb{R}}\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3\}$, il ne reste plus qu'à reprendre la définition initiale :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) &= \{c \in \mathbb{T}(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) : \{P_c^n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \\ &= \{c_1\gamma_1\gamma_3 + c_2\overline{\gamma_1}\gamma_3 + c_3\gamma_1\overline{\gamma_3} : (c_1, c_2) \in E, -2 \leq c_3 \leq \frac{1}{4}\} \\ &= \bigcup_{y \in \left[-2, \frac{1}{4}\right]} \{E + y\gamma_1\overline{\gamma_3}\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque 4.3. Du théorème précédent, il est immédiat que

$$\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}) = \left[-2, \frac{1}{4}\right] \times \left[-2, \frac{1}{4}\right] \times \left[-2, \frac{1}{4}\right] \text{ dans la base } (\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}),$$

c'est-à-dire le double produit cartésien de l'intervalle réel $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

CONCLUSION

Au départ, le volet recherche intégré au parcours académique de l'auteur de ce mémoire était censé se traduire par de nouveaux résultats au sujet de l'une des deux coupes principales de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe affichant un aspect régulier, nommément la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. L'objectif initial était donc, à l'époque, d'élaborer une démonstration visant à valider l'assertion selon laquelle le Firebrot était un tétraèdre régulier, conformément à une conjecture émise en 2009 [19]. À cela devait s'ajouter la clarification des liens existant entre la dynamique tricomplexe tridimensionnelle et la géométrie euclidienne, en répertoriant notamment les solides platoniciens se manifestant dans la première. Évidemment, ces objectifs se sont diversifiés au gré des découvertes intéressantes qui ont jalonné la rédaction de ce mémoire, tandis que la portée des résultats en découlant s'est étendue.

Dans un premier temps, bien que dépourvu de résultats nouveaux, le chapitre 1 nous a procuré les outils nécessaires en vue de concilier la géométrie euclidienne dans \mathbb{R}^3 et les coupes tridimensionnelles qui ont été étudiées ultérieurement. Soulignons d'ailleurs que l'isomorphisme entre les espaces $\mathbb{M}(n)$ et \mathbb{R}^{2^n} [6, 35] est précisément ce qui a rendu ce rapprochement possible. Par la suite, au chapitre 2, l'algèbre des nombres bicomplexes et celle des nombres tricomplexes ont été introduites, de même que de nombreux résultats inédits concernant la seconde. Plus spécifiquement, une démonstration établissant l'existence d'exactly seize éléments idempotents dans l'anneau des nombres tricomplexes a été fournie. Aussi, deux nouvelles représentations idempotentes sur \mathbb{TC} , non traitées jusqu'à maintenant, ont été découvertes et leurs propriétés fondamentales ont été investiguées¹. En outre, le Théorème 2.13, la Proposition 2.12 et le Corollaire 2.2 sont autant de résultats inédits unifiant la théorie entourant les éléments inversibles de \mathbb{TC} et conférant une importance et un sens nouveaux aux sept conjugués tricomplexes, tandis que la section 2.4 a permis d'amorcer l'exploration des nombres biduplexes, qui constituent une structure algébrique aux propriétés peu communes.

1. À cet égard, mentionnons que l'annexe B renferme les preuves certifiant l'unicité des représentations dans les bases $\{\gamma_3, \overline{\gamma_3}\}$, $\{\gamma_2, \overline{\gamma_2}\}$ et $\{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1\gamma_3}, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$. Le cas de la représentation dans la base $\{\gamma_1, \overline{\gamma_1}\}$ sur \mathbb{TC} , plus particulier, est également abordé et décortiqué.

Ensuite, au chapitre 3, deux nouveaux types de produits cartésiens ont été introduits, donnant suite à la découverte des représentations γ_2 et γ_1 -idempotentes sur \mathbb{TC} . De leur usage naquit le Théorème 3.5, dont la seconde égalité peut sembler insolite. Puis, les sections 3.3, 3.4 et 3.5 ont été consacrées aux diverses caractérisations géométriques des huit coupes principales, ce qui a permis d'illustrer l'incidence de l'espace des itérées d'une coupe donnée sur sa relation avec des ensembles 2D classiques tels que l'ensemble de Mandelbrot \mathcal{M}_1 ou \mathcal{H} . Plus précisément, nous avons vu que les coupes principales de \mathcal{M}_3 dont l'espace des itérées était isomorphe à \mathbb{BC} s'apparentaient à une coupe principale de \mathcal{M}_2 , et pouvaient s'exprimer via l'intersection de deux copies de \mathcal{M}_1 . Quant à elles, les cinq autres coupes peuvent s'exprimer à l'aide de l'intersection de quatre copies de \mathcal{M}_1 , mais aussi, le cas échéant, en fonction de l'intersection de deux copies des ensembles 2D illustrés aux figures 3.5 et 3.6 ou de deux copies de \mathcal{H} , qui sont tous associés à une projection de \mathcal{M}_2 sur un plan spécifique de \mathbb{BC} . En combinant ces résultats à l'étude de l'espace des itérées des coupes principales de \mathcal{M}_n ainsi qu'à une preuve de l'optimalité de l'espace tricomplexe, toutes deux réalisées dans [6], on déduit que les caractérisations élaborées dans ce travail mettent un terme à l'exploration des coupes principales de \mathcal{M}_n qui fut entamée en 2008, puisque l'optimalité de l'espace tricomplexe implique qu'aucun autre résultat à ce sujet n'existe dans $\mathbb{M}(n)$ pour $n \geq 4$.

Finalement, au chapitre 4, les propriétés géométriques de certaines coupes principales ont été approfondies. En particulier, un premier composé polyédrique a été formellement introduit et analysé en lien avec la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$. Aussi, les représentations γ_2 et γ_3 -idempotentes ont été utilisées afin de formuler, pour le Turtlebrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2)$ et l'Hourglassbrot $\mathcal{T}(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2)$, des caractérisations les exprimant comme l'intersection de deux autres coupes tridimensionnelles dont l'espace des itérées est isomorphe à \mathbb{BC} . Qui plus est, ces réalisations ont permis de mettre en exergue le lien entre certaines réflexions dans les sous-espaces considérés et les conjugués tricomplexes, d'où on a déduit leur sens géométrique. En dernier lieu, les coupes idempotentes de l'ensemble de Mandelbrot tricomplexe ont été introduites, et on a montré que l'une d'entre elles, soit l'Earthbrot $\mathcal{T}_e(\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3})$, correspond à un hexaèdre régulier.

En dépit de tout ce qui a été accompli, il est clair qu'à l'heure actuelle, les algèbres multicomplexes, et par conséquent les ensembles de Mandelbrot généralisés sur celles-ci, n'ont pas terminé de révéler leurs secrets. Par exemple, il serait intéressant de déterminer le nombre exact d'éléments idempotents existant dans $\mathbb{M}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, ce qui généraliserait

le Théorème 2.6. Cependant, une démarche semblable à celle de ce théorème s'annonce presque impraticable dans le cas général, puisqu'il serait assez difficile d'anticiper et de traiter la multitude de sous-cas qui surviendraient tout au long de la preuve, sans compter que certaines notions auxquelles on doit faire appel sont bien comprises dans \mathbb{BC} , mais ne le sont pas autant, sinon pas du tout, dans $\mathbb{M}(n)$. Une autre avenue plus adaptée à la complexité de ces algèbres consisterait à mettre en bijection l'ensemble des éléments idempotents de $\mathbb{M}(n)$ avec un autre ensemble connu et déjà dénombré. Quoiqu'il en soit, les cas complexe, bicomplexe et tricomplexe nous renseignent suffisamment pour qu'on soit en mesure d'émettre une conjecture plausible.

Conjecture 1. Soit $n \geq 1$. L'algèbre multicomplexe $\mathbb{M}(n)$ contient exactement $2^{2^n - 1}$ éléments idempotents distincts.

D'autre part, il serait également pertinent d'expliciter l'ensemble des représentations idempotentes existant dans $\mathbb{M}(n)$, puisqu'elles sont au cœur des algèbres multicomplexes. En fait, à ce jour, il n'existe aucune démonstration nous assurant que la liste des représentations idempotentes découvertes sur \mathbb{TC} soit elle-même exhaustive. D'ailleurs, en considérant que douze des seize éléments idempotents de \mathbb{TC} interviennent dans celles-ci, il serait étonnant que les quatre derniers éléments idempotents n'engendrent aucune représentation remarquable. À ce propos, mentionnons que chaque paire du type $\alpha, (1 - \alpha)$ où on choisit $\alpha \in \{\gamma_1\gamma_3, \overline{\gamma_1}\gamma_3, \gamma_1\overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}\}$ détient les propriétés qui rendent les représentations idempotentes intéressantes, c'est-à-dire que $\alpha(1 - \alpha) = 0$ et que $\alpha + (1 - \alpha) = 1$. Il s'agit donc d'une piste prometteuse pouvant potentiellement élucider le mystère entourant le rôle des éléments $1 - \gamma_1\gamma_3, \dots, 1 - \overline{\gamma_1}\overline{\gamma_3}$ dans l'anneau des nombres tricomplexes. De plus, les résultats de la sous-section 2.3.3 portant sur les éléments inversibles, les conjugués tricomplexes et les diviseurs de zéro ouvrent la voie à la formulation d'un théorème d'inversibilité généralisé aux espaces $\mathbb{M}(n)$ exprimant l'inverse multiplicatif de tout nombre multicomplexe en fonction du produit des $2^n - 1$ conjugués existant sur le même espace.

Conjecture 2. Soit $n \geq 1, \eta \in \mathbb{M}(n)$ et $M_{\mathbb{R}}(\eta)$ la matrice de Cauchy-Riemann à coefficients réels associée au nombre η . On a

$$\begin{aligned} \eta(\eta^{\dagger 1} \dots \eta^{\dagger 2^n - 1}) &= \eta \cdot \prod_{k=1}^{2^n - 1} \eta^{\dagger k} \\ &= \det M_{\mathbb{R}}(\eta) \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Conjecture 3. Soit $n \geq 1$ et $\eta \in \mathbb{M}(n)$. Alors, $\eta \in \mathbb{M}(n)^{-1}$ si et seulement si

$$\eta \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \eta^{\dagger k} \neq 0,$$

et lorsqu'il existe, l'inverse multiplicatif de $\eta \in \mathbb{M}(n)$ est donné par la formule

$$\eta^{-1} = \frac{\eta^{\dagger 1} \dots \eta^{\dagger 2^n-1}}{\eta \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \eta^{\dagger k}}.$$

De plus, le nombre multicomplexe η est un diviseur de zéro si et seulement s'il s'annule avec l'un de ses $2^n - 1$ conjugués ou un produit de ceux-ci.

Maintenant, au niveau des ensembles de Mandelbrot généralisés, il reste également quelques avenues à explorer. Par exemple, il reste la possibilité d'étendre les caractérisations géométriques des coupes de \mathcal{M}_3 à l'utilisation du polynôme $Q_{p,c}(\eta) = \eta^p + c$, en effectuant une analyse de celles-ci en fonction de la parité de l'exposant $p \geq 2$. Aussi, comme on a seulement étudié une coupe idempotente en particulier, il reste à classifier celles-ci selon leur dynamique et à déterminer lesquelles correspondent aux coupes idempotentes principales de \mathcal{M}_3 .

Sinon, un domaine inexploré jusqu'à présent est celui des coupes en quatre dimensions de l'ensemble \mathcal{M}_3 , ou plus généralement, de l'ensemble \mathcal{M}_n . Si celles-ci peuvent sembler inintéressantes en raison du fait qu'il est impossible de les visualiser, on serait tout de même en mesure d'élaborer pour elles des caractérisations géométriques à l'aide de techniques similaires à celles employées dans ce mémoire. En particulier, il serait possible de répertorier les polytopes convexes réguliers présents parmi ces coupes 4D, qui sont les analogues en quatre dimensions des solides de Platon. À titre d'exemple, la projection de \mathcal{M}_3 sur $\mathbb{D}(2)$ correspond à la coupe 4D $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$, mais aussi à la coupe 4D idempotente $\mathcal{T}_e(\gamma_1 \gamma_3, \overline{\gamma_1} \gamma_3, \gamma_1 \overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3})$. Alors, en alliant le Théorème 4.5 à la Remarque 4.3 et en généralisant celle-ci à l'espace \mathbb{R}^1 , on peut arriver au résultat suivant.

Théorème. La coupe quadridimensionnelle idempotente $\mathcal{T}_e(\gamma_1 \gamma_3, \overline{\gamma_1} \gamma_3, \gamma_1 \overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3})$ correspond à un *tesseract*, c'est-à-dire un hypercube de dimension quatre, dont le centre est situé en $\left(-\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}, -\frac{7}{8}\right)$ dans la base $\{\gamma_1 \gamma_3, \overline{\gamma_1} \gamma_3, \gamma_1 \overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}\}$.

De surcroît, si on considère plutôt les coupes 4D de l'ensemble $\mathcal{M}_4 \subset \mathbb{M}(4)$, on pourra probablement obtenir un autre type de polytope convexe régulier.

Conjecture 4. Soit \mathbf{i}_4 l'unité imaginaire introduite pour engendrer l'espace $\mathbb{M}(4)$ et posons $\mathbf{j}_4 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_4$. Alors, la coupe 4D $\mathcal{T}(1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4)$ correspond à un *hexadécachore*, ou hyperoctaèdre de dimension 4, centré en $(-\frac{7}{8}, 0, 0, 0)$.

De façon plutôt commode, le tesseract et l'hexadécachore sont le dual l'un de l'autre [14], tout comme le cube et l'octaèdre le sont, tandis que le tétraèdre est autodual. Autrement dit, si la conjecture précédente s'avérait vraie, cela signifierait que les polyèdres ou polytopes réguliers convexes répertoriés jusqu'à maintenant au travers de la dynamique multicomplexe s'y trouvent en paires duales. S'agit-il d'une simple coïncidence, ou de la manifestation d'une propriété fondamentale des ensembles de Mandelbrot généralisés ?

En résumé, ce mémoire aura illustré la nécessité de comprendre, dans sa globalité mais également dans ses moindres détails, la théorie des algèbres multicomplexes si l'on souhaite pouvoir découvrir et apprécier tous les raffinements subtils qui créent la richesse de la dynamique propre aux ensembles de Mandelbrot généralisés. En fait, on pourrait dire qu'au final, ce mémoire apporte autant de réponses que de questions. Nous laissons toutefois à d'autres le soin de répondre à ces dernières, et pourquoi pas, d'en formuler de nouvelles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aleksandr D. ALEKSANDROV : *Convex Polyhedra*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [2] Aleksandr D. ALEKSANDROV : *Intrinsic Geometry of Convex Surfaces*. Taylor & Francis Group, New-York, 2006.
- [3] Michèle AUDIN : *Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [4] Alan F. BEARDON : *Iteration of Rational Functions : Complex Analytic Dynamical Systems*, volume 132 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [5] Stephen BEDDING et Keith BRIGGS : Iteration of quaternion maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(3):877–881, 1995.
- [6] Guillaume BROUILLETTE : Classification des coupes tridimensionnelles principales des multibrots multicomplexes. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2019.
- [7] Guillaume BROUILLETTE et Dominic ROCHON : Characterization of the principal 3D slices related to the multicomplex Mandelbrot set. *Advances in applied Clifford algebras*, 29(39), 2019.
- [8] Henry CALHIOL : *Les octaèdres étoilés : rareté, beauté et mystère*. Publication indépendante, 2013.
- [9] Lennart CARLESON et Theodore W. GAMELIN : *Complex Dynamics*. Springer-Verlag New York, 1993.
- [10] James COCKLE : On certain functions resembling quaternions, and on a new imaginary in algebra. *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33:435–439, 1848.
- [11] James COCKLE : On a new imaginary in algebra. *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34:37–47, 1849.

- [12] James COCKLE : On the symbols of algebra, and on the theory of tessarines. *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 34:406–410, 1849.
- [13] James COCKLE : On impossible equations, on impossible quantities, and on tessarines. *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 37:281–283, 1850.
- [14] Harold S.M. COXETER : *Regular Polytopes*. Dover, 1973.
- [15] Harold S.M. COXETER : *Introduction to Geometry - second edition*. John Wiley & sons, 1989.
- [16] Peter R. CROMWELL : *Polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [17] Adrien DOUADY et John H. HUBBARD : Itération des polynômes quadratiques complexes. *C. R. Acad. Sci.*, 294:123–126, 1982.
- [18] Jean FRESNEL : *Méthodes modernes en géométrie*. Hermann, Paris, 1998.
- [19] Vincent GARANT-PELLETIER : Ensemble de Mandelbrot et de Julia remplis classiques généralisés aux espaces multicomplexes et théorème de Fatou-Julia généralisé. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2011.
- [20] Vincent GARANT-PELLETIER et Dominic ROCHON : On a generalized Fatou-Julia theorem in multicomplex spaces. *Fractals*, 17(3):241–255, 2009.
- [21] James E. GENTLE : *Matrix Algebra : Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer, New-York, 2007.
- [22] Alston S. HOUSEHOLDER : Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. *Journal of the A.C.M.*, 5(4):339–342, 1958.
- [23] Isaiah L. KANTOR et Aleksandr S. SOLODOVNIKOV : *Hypercomplex Numbers*. Springer-Verlag, New-York, 1989.
- [24] Yves LADEGAILLERIE : *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*. Éditions Ellipses, Paris, 2003.
- [25] M. Elena LUNA-ELIZARRARAS, Michael SHAPIRO, Daniele C. STRUPPA et Adrian VAJIAC : *Bicomplex holomorphic functions : the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*. Springer, Suisse, 2015.

- [26] Claudia MATTEAU : La méthode d'itération inverse pour les ensembles de Julia du plan et de l'espace tridimensionnel. Mémoire de maîtrise. Université du Québec à Trois-Rivières, 2014.
- [27] Wolfgang METZLER : The "mystery" of the quadratic Mandelbrot set. *American Journal of Physics*, 62(9):813-814, 1994.
- [28] Hugues MOREAU : La représentation des nombres premiers hyperboliques dans le plan. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2017.
- [29] Alan NORTON : Generation and display of geometric fractals in 3-d. *Computer Graphics*, 16(3):61-67, 1982.
- [30] Pierre-Olivier PARISÉ, Thomas RANSFORD et Dominic ROCHON : Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of even degree. *Chaotic Modeling and Simulation*, 1:37-48, 2017.
- [31] Pierre-Olivier PARISÉ et Dominic ROCHON : A study of dynamics of the tricomplex polynomial $\eta^p + c$. *Nonlinear Dynamics*, 82(1-2):157-171, octobre 2015.
- [32] Pierre-Olivier PARISÉ et Dominic ROCHON : Tricomplex dynamical systems generated by polynomials of odd degree. *Fractals*, 25(3):1-11, 2017.
- [33] Pierre-Olivier PARISÉ : Les ensembles de Mandelbrot tricomplexes généralisés aux polynômes $\eta^p + c$. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Trois-Rivières, 2017.
- [34] PLATON : *Timée*. \approx 358 av. J.-C. (*Timée/Critias* - 3^e éd., Garnier-Flammarion, 1996).
- [35] Griffith B. PRICE : *An introduction to multicomplex spaces and functions*. Marcel Dekker Inc., New-York, 1991.
- [36] Anant R. RAJWADE : *Convex polyhedra with regularity conditions and Hilbert's third problem*. Hindustan Book Agency, India, 2001.
- [37] Dominic ROCHON : A generalized Mandelbrot set for bicomplex numbers. *Fractals*, 8(4):355-368, 2000.
- [38] Dominic ROCHON et Michael SHAPIRO : On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. *Anal. Univ. Oradea*, 11:71-110, 2004.
- [39] Alexander SCHRIJVER : *Theory of Linear and Integer programming*. John Wiley & sons, New-York, 1998.

- [40] Peter SENN : The mandelbrot set for binary numbers. *Am. J. Phys.*, 58(10):1018–1018, 1990.
- [41] James T. SMITH : *Methods of geometry*. John Wiley & sons, New-York, 2000.
- [42] Garret SOBCZYK : The hyperbolic number plane. *Coll. Math. J.*, 26(4):268–280, 1995.
- [43] Roger WEBSTER : *Convexity*. Oxford University Press, Oxford, 1994.
- [44] Magnus WENNINGER : *Polyhedron Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [45] Magnus WENNINGER : *Dual Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin

L'objectif de cette annexe est de présenter une méthode générale, appelée méthode d'élimination de Fourier-Motzkin, pouvant résoudre n'importe quel système d'inéquations linéaires et permettant au passage d'identifier celles qui sont superflues. Dans notre contexte, son attrait principal est sa simplicité d'utilisation, puisque cette technique ne requiert l'emprunt d'aucun résultat du domaine de l'optimisation ou de la programmation linéaire, où il est courant d'avoir à identifier des contraintes redondantes.

En guise de rappel, mentionnons que l'utilisation de la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin était nécessaire dans la démonstration de la Proposition 3.8 pour être en mesure d'assurer que $|c_6| \leq \frac{1}{4}$, ce qui nous a permis d'identifier et d'écartier les inéquations inutiles alors obtenues. Cette étape, prise pour acquis dans la preuve concernée, sera explicitée en détail à la section A.2.

A.1 Polyèdres convexes et demi-espaces

En premier lieu, il convient de présenter une autre approche pour définir les polyèdres convexes dans le but d'étayer sur des arguments solides les déductions qui ont été faites concernant les systèmes (3.3) et (4.1). Le lecteur peut retrouver cette approche dans [43], et elle est également abordée brièvement dans [24].

Définition A.1. Soient $C \in \mathbb{R}$ et $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. On appelle **demi-espace** (en anglais *halfspace*) l'ensemble

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \leq C\}.$$

En fait, puisque le plan $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = C\}$ scinde l'espace en deux parties, on voit immédiatement que chacune d'elles correspond à un demi-espace, selon qu'il s'agisse du symbole \leq ou \geq dans la Définition A.1. On dira que le demi-espace est ouvert si l'inégalité est stricte, et fermé autrement. De plus, comme la multiplication par un scalaire non nul de chaque côté de l'inégalité ne change pas le plan délimitant le demi-espace, ce dernier est entièrement déterminé par l'équation du plan qui y est associé.

Proposition A.1. Tout demi-espace est convexe.

Démonstration.

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq A\}$$

un demi-espace¹. Posons $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}$ avec $t \in [0, 1]$. Dans ce cas, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \leq A$ et $\mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \leq A$, et

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot [(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}] &= (1-t)\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + t\mathbf{a} \cdot \mathbf{y} \\ &\leq (1-t)A + tA \\ &= A. \end{aligned}$$

On conclut que $(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \in \mathcal{A}$, d'où le résultat. ■

Ainsi, les demi-espaces sont des exemples d'ensembles convexes non bornés ne contenant aucun point extrémal. Par la Proposition 1.1 assurant que l'intersection d'un nombre arbitraire de demi-espaces est convexe et en considérant que chaque demi-espace correspond à l'ensemble solution d'une inéquation, on déduit que l'ensemble solution de n'importe quel système d'inéquations linéaires, qu'il soit borné ou pas, est un convexe de $\mathbb{R}^{3,2}$. Ce constat nous amène à la définition alternative suivante [43].

Définition A.2. Dans \mathbb{R}^3 , on appelle **polyèdre convexe** l'intersection (d'intérieur non vide) d'un nombre fini de demi-espaces fermés.

1. L'opération (\cdot) désigne le produit scalaire usuel.

2. Cette affirmation est présentée dans \mathbb{R}^3 , mais elle (ainsi que l'ensemble de la théorie de cette annexe) se généralise aisément à \mathbb{R}^n . De surcroît, on est assurés par la Proposition 1.2 que toute combinaison convexe de points faisant partie de l'ensemble solution est également une solution du système. C'est là une propriété remarquable reliant la convexité à la résolution de systèmes d'inéquations.

Ainsi, les points appartenant à un polyèdre convexe quelconque sont ceux qui se trouvent dans la partie commune à chacun des demi-espaces concernés, et par le fait même, ceux qui satisfont toutes leurs inéquations simultanément. En conséquence, tout polyèdre convexe peut être vu comme l'ensemble solution à un système d'inéquations (admettant des solutions) et réciproquement pour un système utilisant des inéquations du type de celles utilisées pour la définition des demi-espaces. Soulignons que cette définition nous procure au passage un argument expliquant pourquoi on a assumé que les systèmes d'inéquations (3.3) et (4.1) correspondaient à des polyèdres convexes.

Par ailleurs, il est possible de dégager de cette définition ce qui distingue les différentes composantes des polyèdres convexes. Dans le cas de leurs faces, on savait déjà qu'elles étaient supportées par un plan. La Définition A.2 implique que le plan en question doit être celui associé à l'un des demi-espaces considérés. On en déduit que les points appartenant à une face donnée peuvent être obtenus en résolvant le système d'inéquations du solide dans lequel on a imposé l'égalité pour l'une d'entre elles. En poursuivant ce raisonnement, on peut s'apercevoir que les points sur une arête donnée sont ceux qui satisfont le système d'inéquations dans lequel on a imposé l'égalité pour les deux inéquations associées aux plans qui se rencontrent selon cette arête. De manière analogue, un sommet du polyèdre est un point satisfaisant le système d'inéquations dans lequel au moins trois inégalités ont été changées en égalités³. Quant à eux, les points situés dans l'intérieur géométrique du polyèdre sont obtenus en remplaçant chaque inégalité large par une inégalité stricte.

En outre, il est même possible d'utiliser la notion de demi-espace pour donner une définition alternative mais équivalente de polyèdre dual, ainsi qu'exprimer la transformation polaire étudiée à la section 1.2 en fonction de ceux-ci. Pour en apprendre davantage sur ces notions, il est conseillé de consulter [43].

A.2 Application de la méthode à la coupe $\mathcal{T}(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$

La méthode d'élimination de Fourier-Motzkin, découverte indépendamment par Joseph Fourier et Theodore Motzkin, consiste en un procédé simple permettant de retirer une à une les variables d'un système d'inéquations afin d'en simplifier la résolution. L'un des atouts d'un tel algorithme réside dans sa polyvalence : on peut s'en servir pour vérifier

3. C'est précisément ce qu'on a fait pour déterminer les coordonnées en $(\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3)$ des sommets du Firebrot à l'aide du système (3.4).

l'existence de solutions, et le cas échéant, pour en déterminer explicitement, mais aussi pour identifier les inéquations redondantes dans un système. Ce dernier usage est celui qui nous intéresse, et on applique ici la méthode au système de huit inéquations obtenu et simplifié à la Proposition 3.8. Le lecteur intéressé pourra toutefois retrouver une présentation plus théorique dans [39].

On débute en rappelant le système d'inéquations de la Proposition 3.8 et en l'écrivant différemment :

$$\begin{aligned}
 -2 &\leq c_4 - c_6 + c_7 \\
 -2 &\leq -c_4 + c_6 + c_7 \\
 -2 &\leq c_4 + c_6 - c_7 \\
 -2 &\leq -c_4 - c_6 - c_7 \\
 c_4 - c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 -c_4 + c_6 + c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 c_4 + c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4} \\
 -c_4 - c_6 - c_7 &\leq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ensuite, on choisit une variable, disons c_7 , et on l'isole dans chaque inéquation. Pour l'instant, il ne s'agit donc que d'une réécriture :

$$\begin{aligned}
 -2 - c_4 + c_6 &\leq c_7 \\
 -2 + c_4 - c_6 &\leq c_7 \\
 c_7 &\leq 2 + c_4 + c_6 \\
 c_7 &\leq 2 - c_4 - c_6 \\
 c_7 &\leq \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\
 c_7 &\leq \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \\
 -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 &\leq c_7 \\
 -\frac{1}{4} - c_4 - c_6 &\leq c_7
 \end{aligned}$$

Maintenant, on peut condenser ces inégalités en deux groupes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \max \left(-2 - c_4 + c_6, -2 + c_4 - c_6, -\frac{1}{4} + c_4 + c_6, -\frac{1}{4} - c_4 - c_6 \right) &\leq c_7 \\ \text{et} \quad c_7 &\leq \min \left(2 + c_4 + c_6, 2 - c_4 - c_6, \frac{1}{4} - c_4 + c_6, \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

La clé de la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin consiste à remarquer qu'il existe des solutions en (c_4, c_6, c_7) au système (A.1) si et seulement s'il existe des solutions en (c_4, c_6) au système suivant :

$$\max \begin{pmatrix} -2 - c_4 + c_6 \\ -2 + c_4 - c_6 \\ -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 \\ -\frac{1}{4} - c_4 - c_6 \end{pmatrix} \leq \min \begin{pmatrix} 2 + c_4 + c_6 \\ 2 - c_4 - c_6 \\ \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\ \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

En associant chacune des quatre expressions du $\max(\dots)$ à chacune des quatre expressions du $\min(\dots)$, on obtient un nouveau système formé de seize inéquations, mais en deux variables :

$$\begin{aligned} -2 - c_4 + c_6 &\leq 2 + c_4 + c_6 \\ -2 - c_4 + c_6 &\leq 2 - c_4 - c_6 \\ -2 - c_4 + c_6 &\leq \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\ -2 - c_4 + c_6 &\leq \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \\ -2 + c_4 - c_6 &\leq 2 + c_4 + c_6 \\ -2 + c_4 - c_6 &\leq 2 - c_4 - c_6 \\ -2 + c_4 - c_6 &\leq \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\ -2 + c_4 - c_6 &\leq \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \\ -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 &\leq 2 + c_4 + c_6 \\ -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 &\leq 2 - c_4 - c_6 \\ -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 &\leq \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\ -\frac{1}{4} + c_4 + c_6 &\leq \frac{1}{4} + c_4 - c_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} - c_4 - c_6 &\leq 2 + c_4 + c_6 \\
-\frac{1}{4} - c_4 - c_6 &\leq 2 - c_4 - c_6 \\
-\frac{1}{4} - c_4 - c_6 &\leq \frac{1}{4} - c_4 + c_6 \\
-\frac{1}{4} - c_4 - c_6 &\leq \frac{1}{4} + c_4 - c_6
\end{aligned}$$

Après maintes simplifications, on peut voir que certaines inéquations, comme la troisième à partir du bas, sont inutiles puisqu'elles sont équivalentes à une inégalité triviale ne faisant pas intervenir d'inconnues. Le système, une fois réduit au minimum, est donc le suivant :

$$\begin{aligned}
-2 &\leq c_4 \\
c_6 &\leq 2 \\
-\frac{9}{8} &\leq c_4 - c_6 \\
-2 &\leq c_6 \\
c_4 &\leq 2 \\
c_4 - c_6 &\leq \frac{9}{8} \\
c_4 + c_6 &\leq \frac{9}{8} \\
c_4 &\leq \frac{1}{4} \\
c_6 &\leq \frac{1}{4} \\
-\frac{9}{8} &\leq c_4 + c_6 \\
-\frac{1}{4} &\leq c_6 \\
-\frac{1}{4} &\leq c_4
\end{aligned}$$

On va maintenant procéder comme au départ et isoler la variable c_4 dans chaque inéquation. En ce qui concerne les quatre inéquations n'ayant aucun terme en c_4 , elles sont temporairement mises de côté (on y reviendra un peu plus loin). On obtient alors le système

$$\begin{aligned}
-2 &\leq c_4 \\
-\frac{1}{4} &\leq c_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{8} + c_6 &\leq c_4 \\
-\frac{9}{8} - c_6 &\leq c_4 \\
c_4 &\leq \frac{9}{8} + c_6 \\
c_4 &\leq \frac{9}{8} - c_6 \\
c_4 &\leq \frac{1}{4} \\
c_4 &\leq 2
\end{aligned}$$

qui peut se condenser en

$$\max\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8} + c_6, -\frac{9}{8} - c_6\right) \leq c_4 \leq \min\left(\frac{9}{8} + c_6, \frac{9}{8} - c_6, \frac{1}{4}\right). \quad (\text{A.3})$$

Remarquons que dans le $\max(\dots)$ et dans le $\min(\dots)$ ci-dessus, on a omis d'écrire les valeurs -2 et 2 respectivement, puisque $\max(-2, -\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$ et $\min(2, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Ensuite, on constate de nouveau qu'il existe des solutions en (c_4, c_6) au système (A.3) si et seulement s'il existe des solutions en c_6 au système réduit

$$\max\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{8} + c_6, -\frac{9}{8} - c_6\right) \leq \min\left(\frac{9}{8} + c_6, \frac{9}{8} - c_6, \frac{1}{4}\right). \quad (\text{A.4})$$

On redéveloppe (A.4) pour obtenir un système en une seule variable comprenant neuf inéquations :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} &\leq \frac{9}{8} + c_6 \\
-\frac{1}{4} &\leq \frac{9}{8} - c_6 \\
-\frac{1}{4} &\leq \frac{1}{4} \\
-\frac{9}{8} + c_6 &\leq \frac{9}{8} + c_6 \\
-\frac{9}{8} + c_6 &\leq \frac{9}{8} - c_6 \\
-\frac{9}{8} + c_6 &\leq \frac{1}{4} \\
-\frac{9}{8} - c_6 &\leq \frac{9}{8} + c_6 \\
-\frac{9}{8} - c_6 &\leq \frac{9}{8} - c_6
\end{aligned}$$

$$-\frac{9}{8} - c_6 \leq \frac{1}{4}$$

On voit immédiatement que les troisième, quatrième et huitième inéquations sont inutiles. Après les avoir retirées et avoir simplifié celles qui restaient, on arrive à un système plus simple auquel il faut ajouter les quatre inéquations en c_6 qui avaient été écartées avant d'arriver au système (A.3). Ce faisant, on obtient finalement

$$\begin{aligned} -\frac{11}{8} &\leq c_6 \\ c_6 &\leq \frac{11}{8} \\ c_6 &\leq \frac{9}{8} \\ c_6 &\leq \frac{11}{8} \\ -\frac{9}{8} &\leq c_6 \\ -\frac{11}{8} &\leq c_6 \\ -2 &\leq c_6 \\ -\frac{1}{4} &\leq c_6 \\ c_6 &\leq \frac{1}{4} \\ c_6 &\leq 2 \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\max\left(-\frac{11}{8}, -\frac{9}{8}, -2, -\frac{1}{4}\right) \leq c_6 \leq \min\left(\frac{11}{8}, \frac{9}{8}, 2, \frac{1}{4}\right)$$

ou en simplifiant,

$$-\frac{1}{4} \leq c_6 \leq \frac{1}{4}.$$

On conclut donc que le système d'inéquations de départ était compatible et que ses solutions en c_6 correspondent à l'intervalle $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, conformément à ce qui avait été établi au Théorème 3.16.

Unicité des représentations idempotentes sur \mathbb{TC}

Au chapitre 2, nous avons analysé les remarquables propriétés des nombreuses représentations idempotentes introduites aux théorèmes 2.1, 2.3, 2.5, 2.7 et 2.8. Ensuite, au chapitre 3, nous avons pu constater à quel point ces représentations s'avéraient pratiques, aussi bien sur le plan du calcul qu'en tant qu'instrument servant à décomposer les ensembles de Mandelbrot généralisés en fonction de leurs analogues en dimensions inférieures. En ce sens, il apparaît donc important d'assurer l'unicité des composantes intervenant dans ces représentations, ce qui est l'objectif principal de cette annexe¹.

Pour établir l'unicité d'une représentation idempotente, il faut construire le système d'équations propre à celle-ci, puis s'assurer qu'il admet une solution unique. Soulignons que le cas échéant, il ne sera pas nécessaire de déterminer explicitement la solution en question, puisque les théorèmes cités précédemment en renferment chacun une. Dans ce cas, si le système d'équations admet une solution unique, on pourra conclure en toute rigueur qu'il s'agit de la seule solution possible.

Théorème B.1. Tout nombre tricomplexe admet une unique représentation à composantes bicomplexes dans la base $\{\gamma_3, \overline{\gamma_3}\}$.

Démonstration.

Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ et posons $a = a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ ainsi que $b = b_1 + b_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$. Alors,

$$a\gamma_3 + b\overline{\gamma_3} = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \Leftrightarrow a \left(\frac{1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}{2} \right) + b \left(\frac{1 - \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3}{2} \right) = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3$$

1. Soulignons que le Théorème 2.1 affirme déjà que la représentation γ_1 -idempotente d'un nombre bicomplexe est unique [26, 35].

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}\right) \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} &= \eta_1 \\ \left(\frac{a-b}{2}\right) \mathbf{i}_2 &= \eta_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Afin de transformer ce système en un autre dans lequel interviennent seulement des coefficients complexes, on écrit $\eta_1 = \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2$ et $\eta_2 = \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2$. Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned} a\gamma_3 + b\overline{\gamma_3} = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} &= \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 \\ \left(\frac{a-b}{2}\right) \mathbf{i}_2 &= \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + b_1 + b_2 \mathbf{i}_2}{2} &= \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 \\ \left(\frac{a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 - b_1 - b_2 \mathbf{i}_2}{2}\right) \mathbf{i}_2 &= \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + b_1}{2} &= \eta_{11} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} &= \eta_{12} \\ \frac{-a_2 + b_2}{2} &= \eta_{21} \\ \frac{a_1 - b_1}{2} &= \eta_{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme le déterminant de la matrice des coefficients complexes associée à ce système est non nul, on déduit qu'il admet bel et bien une solution unique. ■

Ainsi, on conclut que les composantes $\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_2$ et $\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_2$ présentées au Théorème 2.3 sont les seules vérifiant l'égalité en question. Il s'ensuit également le corollaire suivant.

Corollaire B.1. Tout nombre tricomplexe admet une unique représentation idempotente à quatre composantes complexes dans la base $\{\gamma_1 \gamma_3, \overline{\gamma_1} \gamma_3, \gamma_1 \overline{\gamma_3}, \overline{\gamma_1} \overline{\gamma_3}\}$.

Démonstration.

On peut vérifier cette assertion en constatant simplement que la représentation idempotente

à quatre composantes complexes (Théorème 2.5) d'un nombre $\eta \in \mathbb{TC}$ peut s'obtenir en exprimant sous leur représentation γ_1 -idempotente chacune des deux composantes bicomplexes de sa représentation γ_3 -idempotente. Dès lors, l'unicité des représentations impliquées (découlant respectivement des théorèmes 2.1 et B.1) amène directement au résultat souhaité. ■

Théorème B.2. Tout nombre tricomplexe admet une unique représentation à composantes bicomplexes dans la base $\{\gamma_2, \overline{\gamma_2}\}$.

Démonstration.

On procède de manière tout à fait similaire qu'au Théorème B.1. Soit $\eta = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \in \mathbb{TC}$ et posons $a = a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$ ainsi que $b = b_1 + b_2 \mathbf{i}_2 \in \mathbb{BC}$. On a

$$\begin{aligned} a\gamma_2 + b\overline{\gamma_2} = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 &\Leftrightarrow a \left(\frac{1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3}{2} \right) + b \left(\frac{1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3}{2} \right) = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a + b}{2} & = \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 \\ \left(\frac{a - b}{2} \right) \mathbf{i}_1 & = \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2, \end{cases} \end{aligned}$$

où on a posé $\eta_1 = \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2$ et $\eta_2 = \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2$. En l'exprimant en fonction de coefficients complexes, ce système devient

$$\begin{aligned} a\gamma_3 + b\overline{\gamma_3} = \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 + b_1 + b_2 \mathbf{i}_2}{2} & = \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 \\ \left(\frac{a_1 + a_2 \mathbf{i}_2 - b_1 - b_2 \mathbf{i}_2}{2} \right) \mathbf{i}_1 & = \eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + b_1}{2} & = \eta_{11} \\ \frac{a_2 + b_2}{2} & = \eta_{12} \\ \left(\frac{a_1 - b_1}{2} \right) \mathbf{i}_1 & = \eta_{21} \\ \left(\frac{a_2 - b_2}{2} \right) \mathbf{i}_1 & = \eta_{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque le déterminant de la matrice des coefficients représentant ce système est non nul, on conclut qu'il admet lui aussi une solution unique. ■

Comme les résultats précédents sont étayés sur des démonstrations rigoureuses, nous sommes assurés de l'unicité des composantes des trois représentations concernées, ce qui confirme ce qui était déjà présumé à leur sujet. Pour cette raison, le théorème ci-dessous peut sembler contraire à l'intuition.

Théorème B.3. Tout nombre tricomplexe admet une infinité de représentations idempotentes à composantes tricomplexes dans la base $\{\gamma_1, \overline{\gamma_1}\}$.

Démonstration.

Commençons par poser $\eta, a, b \in \mathbb{TC}$ et exprimons les à partir de leurs quatre coefficients complexes :

$$\begin{aligned}\eta &= \eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3 = \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 + \eta_{21} \mathbf{i}_3 + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \\ a &= a_1 + a_2 \mathbf{i}_3 = a_{11} + a_{12} \mathbf{i}_2 + a_{21} \mathbf{i}_3 + a_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \\ b &= b_1 + b_2 \mathbf{i}_3 = b_{11} + b_{12} \mathbf{i}_2 + b_{21} \mathbf{i}_3 + b_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}a\gamma_1 + b\overline{\gamma_1} = \eta &\Leftrightarrow (a_{11} + a_{12} \mathbf{i}_2 + a_{21} \mathbf{i}_3 + a_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3) \left(\frac{1 + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2} \right) \\ &\quad + (b_{11} + b_{12} \mathbf{i}_2 + b_{21} \mathbf{i}_3 + b_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3) \left(\frac{1 - \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2}{2} \right) \\ &= \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 + \eta_{21} \mathbf{i}_3 + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12} \mathbf{i}_2 + a_{21} \mathbf{i}_3 + a_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + a_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 - a_{12} \mathbf{i}_1 + a_{21} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 - a_{22} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3) \\ &\quad + \frac{1}{2} (b_{11} + b_{12} \mathbf{i}_2 + b_{21} \mathbf{i}_3 + b_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 - b_{11} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 + b_{12} \mathbf{i}_1 - b_{21} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 + b_{22} \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3) \\ &= \eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_2 + \eta_{21} \mathbf{i}_3 + \eta_{22} \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_{11} - a_{12} \mathbf{i}_1 + b_{11} + b_{12} \mathbf{i}_1}{2} = \eta_{11} \\ \frac{a_{11} \mathbf{i}_1 + a_{12} - b_{11} \mathbf{i}_1 + b_{12}}{2} = \eta_{12} \\ \frac{a_{21} - a_{22} \mathbf{i}_1 + b_{21} + b_{22} \mathbf{i}_1}{2} = \eta_{21} \\ \frac{a_{21} \mathbf{i}_1 + a_{22} - b_{21} \mathbf{i}_1 + b_{22}}{2} = \eta_{22}. \end{cases}\end{aligned}$$

Ce système comporte quatre équations et huit inconnues. Alors, de deux choses l'une : soit il est incompatible, soit il admet une infinité de solutions. Pour déterminer lequel de ces deux cas s'applique, il suffit de ramener la matrice des coefficients sous sa forme échelonnée réduite, qui est

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\mathbf{i}_1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathbf{i}_1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{i}_1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{i}_1}{2} & \frac{\mathbf{i}_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\mathbf{i}_1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\mathbf{i}_1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{i}_1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{i}_1}{2} & \frac{\mathbf{i}_1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 \end{bmatrix}.$$

Comme on constate la présence de quatre pivots et de quatre variables libres, le système admet une infinité de solutions. ■

Comme mentionné à la suite du Théorème 2.8, la représentation γ_1 -idempotente sur \mathbb{TC} se distingue des autres à cause de ses composantes qui sont tricomplexes, ce qui provient du fait que $\gamma_1, \overline{\gamma_1} \in \mathbb{BC}$. En effet, on déduit que pour avoir $a\gamma_1 + b\overline{\gamma_1} = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3$, il faut que $a, b \in \mathbb{TC}$, puisqu'autrement, l'unité imaginaire \mathbf{i}_3 n'apparaît nulle part dans le membre de gauche, ce qui rend impossible l'égalité recherchée. De plus, on peut supposer que cette particularité est ce qui explique l'existence d'une infinité de représentations dans la base $\{\gamma_1, \overline{\gamma_1}\}$, puisque le nombre de composantes complexes à considérer – et donc d'inconnues dans le système d'équations – est multiplié par deux tandis que le nombre d'équations reste inchangé.

On souhaite maintenant déterminer la forme générale de la solution correspondant au système examiné dans la preuve précédente. Sa matrice augmentée, ramenée sous forme échelonnée réduite, est

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 & 0 & 0 & \eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathbf{i}_1 & \eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1 \end{array} \right]$$

d'où on tire

$$a_{11} = \eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 + a_{12}\mathbf{i}_1$$

$$a_{21} = \eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1 + a_{22}\mathbf{i}_1$$

$$b_{11} = \eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 - b_{12}\mathbf{i}_1$$

$$b_{21} = \eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1 - b_{22}\mathbf{i}_1$$

et où $a_{12}, a_{22}, b_{12}, b_{22} \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ sont des variables libres. En considérant maintenant que $a = a_1 + a_2\mathbf{i}_3 = a_{11} + a_{12}\mathbf{i}_2 + (a_{21} + a_{22}\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3$ et $b = b_1 + b_2\mathbf{i}_3 = b_{11} + b_{12}\mathbf{i}_2 + (b_{21} + b_{22}\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_3$, la solution générale des termes a et b devient

$$a = \eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 + (a_{12} + a_{22}\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)$$

ainsi que

$$b = \eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 - (b_{12} + b_{22}\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2).$$

On constate que sous cette forme, toute solution en a et b possède une partie fixe découlant du nombre $\eta \in \mathbb{TC}$ et une partie variant au gré des paramètres libres qui y interviennent. Ce qu'il faut remarquer, c'est que les parties variables sont toutes deux multipliées par un diviseur de zéro, nommément les facteurs $(\mathbf{i}_1 \pm \mathbf{i}_2)$. En effet, on vérifie aisément que $(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)(1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) = 0$ et que $(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)(1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} a\gamma_1 + b\overline{\gamma_1} &= a \left(\frac{1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) + b \left(\frac{1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} [\eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 + (a_{12} + a_{22}\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)](1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3 - (b_{12} + b_{22}\mathbf{i}_3)(\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2)](1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) \\ &= \frac{1}{2} [\eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3](1 + \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) + 0 \\ &\quad + \frac{1}{2} [\eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3](1 - \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2) + 0 \\ &= [\eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3]\gamma_1 + [\eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1 + (\eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_3]\overline{\gamma_1}. \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Étonnamment, on conclut qu'il existe une façon alternative d'écrire la solution générale de l'équation $a\gamma_1 + b\overline{\gamma_1} = \eta_1 + \eta_2\mathbf{i}_3$ dans laquelle les paramètres libres n'apparaissent pas. En ce sens, la seule véritable solution à considérer est donc celle présentée à la dernière égalité ci-haut, puisqu'en définitive, les variables libres n'auront aucun impact sur sa forme. En outre, le lecteur attentif aura remarqué qu'elle peut être décomposée en quatre termes, correspondant eux-mêmes aux composantes complexes de la représentation γ_1 -idempotente sur \mathbb{BC} des nombres bicomplexes $\eta_1 = \eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_2$ et $\eta_2 = \eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_2$, puisque

$$\eta_1 = (\eta_{11} - \eta_{12}\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (\eta_{11} + \eta_{12}\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1} \quad \text{et} \quad \eta_2 = (\eta_{21} - \eta_{22}\mathbf{i}_1)\gamma_1 + (\eta_{21} + \eta_{22}\mathbf{i}_1)\overline{\gamma_1}.$$

L'auteur de ce mémoire soupçonne qu'il s'agit de l'une des clés permettant d'élucider les nombreuses propriétés intrigantes de la représentation γ_1 -idempotente sur \mathbb{TC} . Néanmoins, il reste à arrimer la solution obtenue en (B.1) à celle présentée au Théorème 2.8, qui est $\eta = (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4) \gamma_1 + (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4) \overline{\gamma}_1$. Pour ce faire, on se sert à nouveau de la représentation idempotente sur \mathbb{BC} et du fait que $\gamma_1 \overline{\gamma}_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_4) \gamma_1 + (\eta_1 - \eta_2 \mathbf{i}_4) \overline{\gamma}_1 \\ &= [(\eta_{11} - \eta_{12} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (\eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1 + ((\eta_{21} - \eta_{22} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (\eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1) \mathbf{i}_4] \gamma_1 \\ &\quad + [(\eta_{11} - \eta_{12} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (\eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1 - ((\eta_{21} - \eta_{22} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (\eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1) \mathbf{i}_4] \overline{\gamma}_1 \\ &= [(\eta_{11} - \eta_{12} \mathbf{i}_1) \gamma_1 + (\eta_{21} - \eta_{22} \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_4 \gamma_1] + [(\eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_1) \overline{\gamma}_1 - (\eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_4 \overline{\gamma}_1], \end{aligned}$$

et en combinant le fait que $\mathbf{i}_4 = \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3$ avec les identités $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \gamma_1 = \gamma_1$ et $-\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \overline{\gamma}_1 = \overline{\gamma}_1$, on obtient

$$\eta = [\eta_{11} - \eta_{12} \mathbf{i}_1 + (\eta_{21} - \eta_{22} \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3] \gamma_1 + [\eta_{11} + \eta_{12} \mathbf{i}_1 + (\eta_{21} + \eta_{22} \mathbf{i}_1) \mathbf{i}_3] \overline{\gamma}_1,$$

ce qui correspond parfaitement à la solution (B.1).

Par ailleurs, avant de clore la présente section, il semble important de mentionner le fait que toutes les bases idempotentes considérées aux théorèmes précédents admettent également une représentation triviale dans laquelle chaque composante est égale au nombre tricomplexe en question. Cette particularité est due au fait que pour une base idempotente donnée, la somme de ses éléments est égale à 1 :

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \cdot 1 \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \cdot (\gamma_3 + \overline{\gamma}_3) \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_3 ; \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \gamma_1 \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_1 \gamma_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \gamma_1 \overline{\gamma}_3 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_1 \overline{\gamma}_3 ; \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \gamma_2 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_2 ; \\ &= (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \gamma_1 + (\eta_1 + \eta_2 \mathbf{i}_3) \overline{\gamma}_1. \end{aligned}$$

Notons que comme les hypothèses des théorèmes B.1 et B.2 ainsi que celles du Corollaire B.1 spécifient que les composantes sont bicomplexes ou complexes, les représentations triviales ci-haut ne contredisent pas ces résultats.

Visualisation de fractales 2D dans Maple 18

Au chapitre 3, nous avons pu apprécier plusieurs illustrations de fractales bidimensionnelles et tridimensionnelles. Si les images des différentes coupes principales de \mathcal{M}_3 proviennent du logiciel expérimental MBE8D, les ensembles 2D présentés aux figures 3.1, 3.2, 3.5 et 3.6 ont été générés par l'auteur de ce mémoire à l'aide du logiciel de calcul symbolique Maple 18. Dans cette annexe, le lecteur retrouvera les procédures élaborées dans Maple 18 permettant de les visualiser. Notons toutefois qu'à l'exception de l'ensemble de Mandelbrot classique, les itérées propres aux sous-espaces où se situent ces ensembles 2D n'évoluent pas dans le plan complexe. Comme la structure des nombres bicomplexes n'est pas supportée par le logiciel Maple 18, il faut l'implémenter à l'aide de leur représentation matricielle, ce qui permettra de calculer les itérées successives de chaque point en conformité avec les définitions de l'addition et de la multiplication bicomplexe. On commence donc par introduire cette représentation que le lecteur pourra retrouver dans [25, 35].

Posons $w \in \mathbb{BC}$ tel que $w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$ et $w = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1$ avec $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4$. On peut associer au nombre bicomplexe w deux matrices de Cauchy-Riemann $M_{\mathbb{C}}(w)$ et $M_{\mathbb{R}}(w)$, lesquelles correspondent respectivement aux représentations de w à coefficients complexes et réels :

$$M_{\mathbb{C}}(w) = \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathbb{R}}(w) = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Les théorèmes qui suivent permettent de formaliser cette correspondance, qui s'avère être un isomorphisme d'anneaux.

Théorème C.1. L'application $M_{\mathbb{C}} : \mathbb{BC} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{C}) : w = z_1 + z_2 \mathbf{i}_2 \mapsto M_{\mathbb{C}}(w)$ est un isomorphisme entre l'anneau des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients complexes et l'anneau des nombres bicomplexes.

Théorème C.2. L'application $M_{\mathbb{R}} : \mathbb{BC} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}) : w = x_1 + x_2 \mathbf{i}_1 + x_3 \mathbf{i}_2 + x_4 \mathbf{j}_1 \mapsto M_{\mathbb{R}}(w)$ est un isomorphisme entre l'anneau des matrices de Cauchy-Riemann à coefficients réels et l'anneau des nombres bicomplexes.

Ainsi, il y a deux façons de représenter un nombre bicomplexe dans Maple 18 : à l'aide d'une matrice de format 4×4 à coefficients réels, ou à l'aide d'une matrice de format 2×2 à coefficients complexes, pour laquelle a opté l'auteur de ce mémoire. Aussi, en analysant les procédures exposées dans les prochaines pages, le lecteur pourra constater qu'elles sont très semblables et qu'elles suivent les mêmes étapes : seuls les éléments des matrices employées changent en fonction du sous-espace de \mathbb{BC} où s'effectue l'initialisation des itérées.

La structure des programmes élaborés est la suivante. On invoque d'abord les bibliothèques (*packages*) requises, soit `plots` (pour les commandes et options graphiques) et `LinearAlgebra` (pour les opérations sur les matrices). On définit ensuite une procédure qui se chargera de calculer les itérées en chaque point du plan. Dans celle-ci, on choisit le nombre d'itérations maximales par point en fixant la valeur de N , puis on initialise la matrice de Cauchy-Riemann associée au point c dans le bon sous-espace en fonction des coefficients de c . Plus explicitement, en se basant sur la forme de $M_{\mathbb{C}}(w)$ à l'équation (C.1), nous avons les cas suivants :

$$\begin{aligned}
 c \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, \mathbf{j}_1\} &\iff c = x + (y\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 \implies c \mapsto \begin{pmatrix} x & -y\mathbf{i}_1 \\ y\mathbf{i}_1 & x \end{pmatrix}; \\
 c \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\} &\iff c = x\mathbf{i}_1 + (y)\mathbf{i}_2 \implies c \mapsto \begin{pmatrix} x\mathbf{i}_1 & -y \\ y & x\mathbf{i}_1 \end{pmatrix}; \\
 c \in \text{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1\} &\iff c = x\mathbf{i}_1 + (y\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_2 \implies c \mapsto \begin{pmatrix} x\mathbf{i}_1 & -y\mathbf{i}_1 \\ y\mathbf{i}_1 & x\mathbf{i}_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pour ce qui est du cas où $c = x + y\mathbf{i}_1 \in \mathbb{C}(\mathbf{i}_1)$, on utilise la correspondance classique $c \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Après avoir initialisé la matrice associée au point c , on utilise le fait que $c \in \mathcal{M}_2 \iff \|P_c^n(0)\|_2 \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ [6, 33] pour déterminer combien d'itérées ont

pu être calculées avant d'avoir $\|P_c^n(0)\|_2 > 2$, et ce nombre est renvoyé via la commande `return i`. En fait, cette condition barrière a été modifiée afin d'éviter l'extraction de la racine carrée nécessaire à l'obtention de la norme euclidienne, ce qui a eu pour effet de diminuer le nombre de calculs requis à chaque étape du processus itératif. Plus précisément, en posant $w = z_1 + z_2\mathbf{i}_2 = x_1 + x_2\mathbf{i}_1 + x_3\mathbf{i}_2 + x_4\mathbf{j}_1$, on a fait usage des équivalences

$$\begin{aligned}\|w\|_2 \leq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow \Re(z_1)^2 + \Im(z_1)^2 + \Re(z_2)^2 + \Im(z_2)^2 \leq 4.\end{aligned}$$

Par la suite, la commande `plotsetup` permet de spécifier certaines propriétés de l'image qui sera générée par la suite, telles que sa hauteur et sa largeur, ainsi qu'une option permettant de l'enregistrer directement au lieu de la visualiser. On préconise cette approche puisqu'une image contenant au bas mot $4000 \times 4000 = 16$ millions de pixels n'est pas visualisable dans Maple 18 sans que celui-ci ne cesse subitement de s'exécuter. Finalement, la commande `densityplot` permet de générer l'ensemble fractal 2D obtenu en produisant, pour la procédure définie au préalable, une image dont chaque point est coloré en fonction d'un dégradé de couleurs spécifié par l'utilisateur via l'option `colorscheme=[type, [liste de couleurs]]`, et qui varie en fonction du nombre d'itérations `i` effectué en ce point. Ainsi, l'utilisateur peut changer les paramètres suivants à sa guise :

- 1) Le nombre d'itérations maximales en chaque point (valeur du paramètre N) ;
- 2) Le nombre de points dans le plan à traiter, spécifié par l'option `grid=[largeur, hauteur]` ;
- 3) Le sous-espace de départ, en modifiant les éléments de la matrice associée à c ;
- 4) Les propriétés de l'image de sortie, telles que sa taille (en pixels) et le format de sauvegarde, s'il y a lieu ;
- 5) Le dégradé de couleurs souhaité.

À noter que les deux premiers points ci-haut sont ceux qui influent directement sur le niveau d'approximation de la fractale obtenue. En terminant, soulignons que les meilleurs résultats sont obtenus lorsque les paramètres `height` et `width` de la commande `plotsetup` sont respectivement égaux aux paramètres `hauteur` et `largeur` de l'option `grid` sous la commande `densityplot`.

```

*****
Algorithme permettant de visualiser l'ensemble de Mandelbrot
*****
> restart :
  with(plots) :
  Mandelbrot := proc(x, y)

    local N : # (Nombre d'itérations maximales par point)
    local z, i, c :

    # Initialisation
    N := 125 :
    c := Matrix( [[x, -y], [y, x]] ) :
    z := c :

    # Itérations du polynôme
    for i from 1 to N while (evalf( (z[1, 1])2 + (z[2, 1])2 ) ≤ 4) do;
      z := z2 + c :
    end do;
    return i :
  end proc;

> plotsetup(png, plotoutput = "Mandelbrot.png", plotoptions
  = "noborder,height=4500,width=4500") :
> P := densityplot('Mandelbrot'(x, y), x = -2.1 ..0.5, y = -1.3 ..1.3, grid = [4500, 4500],
  axes = none, style = patchnogrid, scaling = constrained, restricttoranges,
  colorscheme = ["zgradient", ["Blue", "Lime", "Magenta", "White", "Black"]]
  ) :
> P;

```

```

*****
Algorithme permettant de visualiser l'ensemble de Mandelbrot hyperbolique
*****
> restart :
  with(plots) :
  with(LinearAlgebra) :
  Hyp := proc(x, y)

    local N : # (Nombre d'itérations maximales par point)
    local z, i, c :

      # Initialisation
      N := 125 :
      c := Matrix( [[x, -y·I], [y·I, x]] ) :
      z := c :

      # Itérations du polynôme
      for i from 1 to N while ( evalf( (Re(z[1, 1]))2 + (Im(z[1, 1]))2 + (Re(z[2, 1]))2
        + (Im(z[2, 1]))2 ) ≤ 4 ) do;
        z := z2 + c :
      end do;
      return i :
    end proc;
> plotsetup(png, plotoutput = "Hyperbrot.png", plotoptions
  = "noborder,height=4000,width=4000") :
> P := densityplot('Hyp'(x, y), x = -2.1 ..1.1, y = -1.6 ..1.6, grid = [4000, 4000],
  axes = none, style = patchnogrid, scaling = constrained, restrictoranges,
  colorscheme = ["zgradient", ["Blue", "Lime", "Magenta", "White", "Black"]]
  ) :
> P;

```

```

*****
Algorithme permettant de visualiser les fractales dans les plans hypercomplexes
*****

1) Avec deux axes imaginaires :

• > restart :
  with(plots) :
  with(LinearAlgebra) :
  M2im := proc(x, y)

    local N : # (Nombre d'itérations maximales par point)
    local z, i, c :

    # Initialisation
    N := 125 :
    c := Matrix([ [x·I, -y], [y, x·I] ]) :
    z := c :

    # Itérations du polynôme
    for i from 1 to N while (evalf((Re(z[1, 1]))2 + (Im(z[1, 1]))2 + (Re(z[2, 1]))2
      + (Im(z[2, 1]))2) ≤ 4) do;
      z := z2 + c :
    end do;
    return i :
  end proc;

> plotsetup(png, plotoutput = "M2im.png", plotoptions
  = "noborder,height=4450,width=4450");
> P := densityplot('M2im'(x, y), x = -1.2..1.2, y = -1.2..1.2, grid = [4450, 4450],
  axes = none, style = patchnogrid, scaling = constrained, restrictoranges,
  colorscheme = ["zgradient", ["Blue", "Lime", "Magenta", "White", "Black"]]
  ) :
> P;

```


2) Avec un axe imaginaire et un axe hyperbolique :

```

> restart :
  with(plots) :
  with(LinearAlgebra) :
  Mimhyp := proc(x, y)

    local N : # (Nombre d'itérations maximales par point)
    local z, i, c :

    # Initialisation
    N := 125 :
    c := Matrix( [[x·I, -y·I], [y·I, x·I]] ) :
    z := c :

    # Itérations du polynôme
    for i from 1 to N while ( evalf( (Re(z[1, 1]))2 + (Im(z[1, 1]))2 + (Re(z[2, 1]))2
      + (Im(z[2, 1]))2 ) ≤ 4 ) do;
      z := z2 + c :
    end do;
    return i :
  end proc;

> plotsetup(png, plotoutput = "Mimhyp.png", plotoptions
  = "noborder,height=3200,width=5600");

> P := densityplot('Mimhyp'(x, y), x = -1.05 ..1.05, y = -0.6 ..0.6,
  grid = [5600, 3200], axes = none, style = patchnogrid, scaling = constrained,
  restrictranges,
  colorscheme = ["zgradient", ["Blue", "Lime", "Magenta", "White", "Black"]]
  ) :

> P;

```