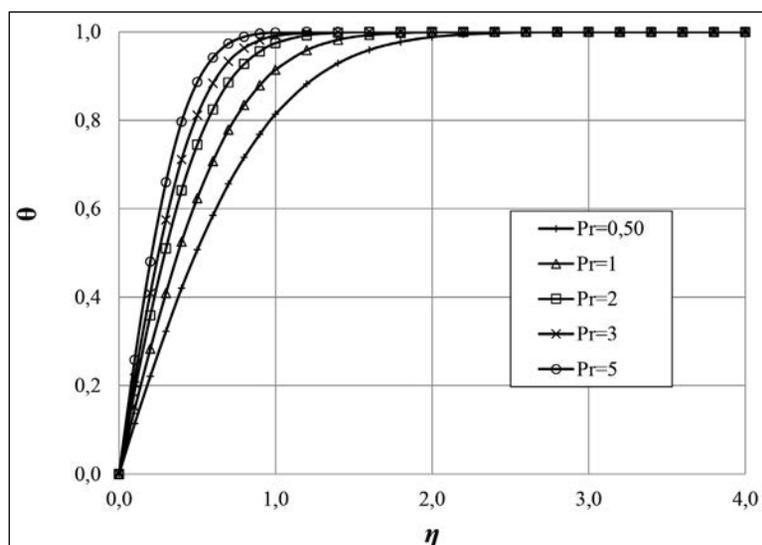


Estudio sobre la solución del problema de transferencia de calor por convección en un cuerpo tipo cuña

YAMID ALBERTO CARRANZA SÁNCHEZ*
 ELKIN GREGORIO FLÓREZ SERRANO*
 JOSÉ LUIS RAMÍREZ DUQUE*

Resumen

Este trabajo plantea y describe el modelamiento matemático, el algoritmo computacional y la solución numérica del problema de transferencia de calor por convección, en el caso de un flujo exterior sobre un cuerpo tipo cuña. La descripción de la solución permite, desde la didáctica, explicar la brecha que se tiene entre la formulación del problema y las correlaciones presentadas en la literatura a nivel de ingeniería, fomentando el conocimiento de las herramientas y el procedimiento para el desarrollo de modelos en un tema amplio y complejo como lo es la determinación del coeficiente de transferencia de calor por convección. A partir de las ecuaciones fundamentales del transporte de masa, cantidad de movimiento y energía, se incorporan las consideraciones particulares de la física del fenómeno, con el fin de simplificar el modelo matemático del problema. Seguidamente, se presenta el método numérico utilizado y el algoritmo computacional desarrollado para la solución de las ecuaciones simplificadas



* Ingeniero mecánico, M. Sc. Profesor titular, Facultad de Tecnología, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia. Correo electrónico: yamidc@utp.edu.co.

* Ingeniero mecánico, M. Sc., Ph. D. Profesor titular, Programa de Ingeniería Mecánica, Universidad de Pamplona, Pamplona, Colombia. Correo electrónico: eflorez@unipamplona.edu.co.

* Ingeniero mecánico, M. Sc. Estudiante de doctorado, Universidad de São Paulo, São Paulo, Brasil. Correo electrónico: jldr.im@gmail.com.

Fecha de recepción: 29/04/2014 • Fecha de aceptación: 04/07/2014.

de cantidad de movimiento y energía. La aplicación a un caso particular permite la obtención de las correlaciones entre los números adimensionales, la validación de la metodología de cálculo y la comparación de los resultados con las aproximaciones empleadas en la literatura clásica.

Palabras clave: transferencia de calor, convección, mecánica computacional, método de Runge-Kutta.

Abstract

This paper presents and describes the mathematical modeling, computational algorithm and the numerical solution of the problem of heat transfer by convection flow over a body outside wedge. The description of the solution allows, from the didactic, explain the gap you have between the formulation of the problem and the correlations presented in the literature at the engineering level, increasing knowledge of the tools and procedures for the development of models in a broad and complex subject such as the determination of the coefficient of convective heat transfer. From the fundamental equations of mass transport, momentum and energy, are incorporated the particular considerations of the physics of the phenomenon in order to simplify the mathematical model of the problem. Then the numerical method used is introduced and the computational algorithm developed for the solution of the simplified equations of momentum and energy. Applying to a particular case allows obtaining correlations between dimensionless numbers, validation of the method for calculating and comparing the accuracy and the approximations used in the classical literature.

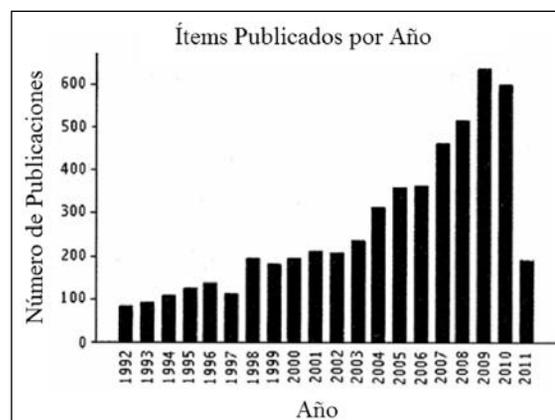
Keywords: heat transfer, convection, computational mechanics, Runge-Kutta method.

1I ntroducción

Los procesos de transferencia de calor son de gran interés para la industria y otros sectores de la economía, debido a sus diversas aplicaciones. Pueden mencionarse, por citar algunas, los procesos de ebullición en calderas, la evaporación de refrigerantes en equipos de refrigeración y aire acondicionado, la refrigeración de equipos

electrónicos, los procesos de secado de alimentos, el aire acondicionado y el confort térmico, los sistemas biológicos, entre otras. La transferencia de calor juega un papel muy importante en el mejoramiento del desempeño que tienen los procesos de conversión de energía. Los problemas energéticos y ambientales de la actualidad, así como la próxima implementación de la nueva norma de gestión de la energía ISO 50001 a nivel global, reafirman la aplicación del uso racional de la energía como una herramienta y cultura en todos los sistemas productivos. A raíz de esta problemática, los trabajos en el área de transferencia de calor vienen tomando fuerza en las últimas décadas, y con ello, el aumento de la literatura en este campo (ver Figura 1). Como consecuencia del interés científico global generado a partir de las múltiples aplicaciones y necesidades de perfeccionamiento de los sistemas de conversión de energía, se ha logrado conseguir intensificaciones de la transferencia de calor hasta en un 300 %, impactando el incremento del rendimiento energético y la reducción del tamaño y del costo de los equipos. El aumento exponencial de investigaciones en las diferentes ramas y alternativas de la transferencia de calor, tiene su cimiento en razones como el incremento de la competitividad empresarial (a causa del ahorro energético) y la reducción de las inversiones en infraestructura energética gubernamental (debido a los ahorros en energía a escala global); lo cual conlleva a reducir emisiones y a generar oportunidades para inversiones estratégicas en campos más prioritarios.

Figura 1 Publicaciones en revistas científicas sobre intensificación de transferencia de calor



Fuente: Bergles (2011).

Los problemas de transferencia de calor y, especialmente, los de intensificación de calor para perfeccionar el desempeño de los equipos, son complejos e involucran geometrías variadas, flujos monofásicos o multifásicos, condiciones con variación temporal y espacial, entre otros aspectos. Para la solución de problemas de este tipo, ya sea desde el punto de vista analítico o numérico, se requiere de mayor investigación y la formación de personal con un alto nivel en programas de posgrado, que, además de comprender y estudiar los fenómenos, esté capacitado para la transferencia tecnológica de la gran cantidad de desarrollos de ingeniería que existen y están en proceso de desarrollo.

Como se ha mencionado, los problemas de la ingeniería en el campo de la transferencia de calor son diversos y, de igual manera, demandan modelos de solución diferentes. Diversos autores presentan las soluciones de distintos casos básicos y particularmente importantes desde un abordaje fenomenológico. Kays y Crawford (1993) exponen la teoría de la capa límite laminar incompresible y presentan las soluciones para una placa semi-infinita con velocidad variable y temperatura constante del fluido en la superficie. Las soluciones están dadas para algunos números de Prandtl y para algunos ángulos de cuña. Los resultados concluyen que para ángulos de cuña entre 0 y 90°, el coeficiente de convección empieza indefinidamente grande en el inicio de la placa y decrece a lo largo de la misma. White (1991) presenta el estudio de la transferencia de calor en el flujo de Falkner-Skan para el cuerpo tipo cuña, y plantea algunas relaciones para una futura programación en Fortran. Los resultados establecen que para un ángulo dado, la variación de la relación entre el número de Nusselt y el número de Reynolds asignado por $N_{NU}/N_{RE}^{1/2}$, es proporcional a la potencia m del número de Prandtl: N_{PR}^m . Bejan y Kraus (2003) exponen el desarrollo teórico de la transferencia de calor para un cuerpo tipo cuña. Su trabajo presenta las expresiones en el caso del flujo de calor y el número de Nusselt. La relación $N_{NU}/N_{RE}^{1/2}$ es presentada como una función del número de Prandtl y del ángulo de la cuña. Jiji (2006) desarrolla el análisis de la transferencia de calor y presenta la solución analítica de la temperatura adimensional y del número de Nusselt. Adicionalmente, se expone el gradiente de temperatura en la superficie, el cual es indispensable para la determinación analítica del flujo de calor. Sus resultados indican que el gradiente de temperatura y, por ende, el número de Nusselt y el flujo de calor,

incrementan a medida que el número de Prandtl es mayor en el caso en que se tiene un ángulo de cuña constante. También puede observarse que, para un número de Prandtl constante, conforme incrementa el ángulo de la cuña, el gradiente de temperatura es más elevado.

Otros autores han abordado el estudio de un flujo alrededor de un cuerpo tipo cuña, siguiendo un enfoque dirigido hacia la metodología de solución. Khan (2010) estudió el problema de Falkner-Skan, pero se centró en la solución de los perfiles de velocidad. En este estudio se desarrolló un esquema iterativo mediante el método de aproximación generalizado para la solución de las ecuaciones de la capa límite laminar. Para dicha solución fue empleado el programa Mathematica®, y sus resultados muestran que la solución del método converge rápidamente con la solución exacta del problema. Bararnia, Haghparast, Miansari y Barari (2012) aplicaron una técnica analítica denominada Homotopy Analysis Method (HAM) para resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía para el flujo, a través de un cuerpo tipo cuña. Su estudio concluyó que los resultados obtenidos tuvieron buena exactitud en comparación con la solución numérica.

Otros autores clásicos de literatura comúnmente usada a nivel de ingeniería, abordan la transferencia de calor con un enfoque hacia el planteamiento del fundamento teórico y la aplicación de los modelos desarrollados, y no se centran en la metodología de solución. Incropera y DeWitt (1996) y Çengel y Ghajar (2011) presentan el desarrollo teórico de una placa plana en un flujo paralelo; además, muestran algunos resultados de las funciones de la capa límite laminar y algunas relaciones para los números adimensionales de Nusselt, Reynolds y Prandtl, las cuales son útiles para determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección y el flujo de calor.

Algunos autores no examinan el tema desde una óptica didáctica de la descripción metodológica para la solución de las ecuaciones fundamentales y parten de la misma base conceptual, trascendiendo así, sin mayores detalles, hacia la solución de otras aplicaciones más complejas o específicas. Uno de los propósitos de este trabajo es presentar de una manera detallada el procedimiento de solución de las ecuaciones fundamentales de masa, cantidad de movimiento y energía, que se utilizan para caracterizar los procesos de transferencia de calor. En este sen-

tido, constituye una motivación académica y didáctica que, según el conocimiento detallado de este tipo de soluciones, la enseñanza en la ingeniería pueda afianzar de alguna manera la conceptualización a nivel fenomenológico, manteniendo el plano complementario y relevante de la aplicación de correlaciones ya desarrolladas en la literatura enfocada en la resolución de aplicaciones particulares de transferencia de calor. Dada la necesidad de introducir personas en esta área, y la limitada cantidad de material disponible con procedimientos pormenorizados sobre las soluciones, se pretende aportar un estudio detallado para mostrar los planteamientos analíticos y numéricos en materia de solución de problemas poco convencionales de transferencia de calor, como el caso que fue objeto de la presente investigación.

No es el propósito del presente trabajo demostrar las ecuaciones utilizadas, algunas de las cuales son generalmente abordadas en la literatura; no obstante, dentro de la motivación pedagógica de este artículo, se presenta la demostración de la transformación experimentada por la ecuación de cantidad de movimiento (desde su expresión en derivadas parciales hasta su expresión como ecuación diferencial ordinaria); procedimiento que comúnmente no es detallado en la literatura y que aunque parece sencillo, resulta dispendioso, y se considera pertinente para que el lector interesado pueda comprender mejor la procedencia de las ecuaciones desarrolladas en la literatura. Otro aspecto importante en este trabajo es resaltar la importancia que tiene involucrar los procedimientos de solución a través de métodos numéricos, así como incorporar la programación en la concepción y desarrollo de los modelos matemáticos que caracterizan la física de la transferencia de calor por convección; campo en el que un trabajo mancomunado de ingenieros y matemáticos permitiría mejores oportunidades de desarrollo y solución de modelos.

Este trabajo presenta un estudio del proceso de transferencia de calor por convección, en el caso de un flujo con gradiente de presión y temperatura de pared variable alrededor de un cuerpo en forma de cuña. Se consideró esta forma, ya que su algoritmo de solución puede llevar a soluciones más comunes, como la placa plana horizontal y la placa plana vertical. Una de las consideraciones más importantes en esta solución es que la temperatura del fluido lejano

a la pared es asumida constante. Se presenta la solución de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, donde se emplea un procedimiento de solución de ecuaciones diferenciales no lineales –basado en el método de Runge-Kutta–. El algoritmo de solución fue programado en el *software* Engineering Equation Solver EES[®]. Como resultado de este estudio, se determinó la relación de tres números adimensionales: Nusselt N_{NU} , Reynolds N_{RE} y Prandtl N_{PR} , la cual permite determinar el coeficiente de transferencia de calor por convección para la configuración estudiada.

2. Fundamento teórico y método de solución

2.1 Ecuaciones fundamentales

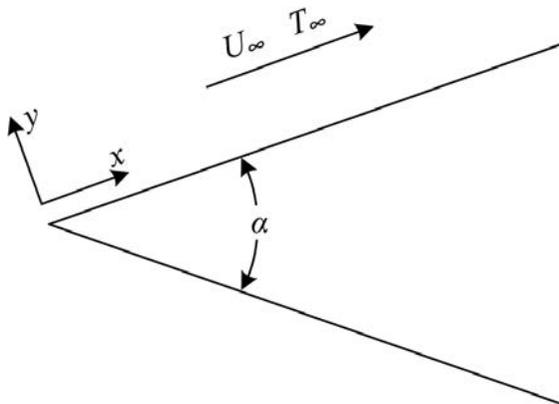
La solución al problema de transferencia de calor por convección entre un cuerpo y un fluido con movimiento laminar estable sobre el cuerpo en forma de cuña, se lleva a cabo bajo la consideración de la capa límite estacionaria, bidimensional e incompresible. También se considera la condición de similitud que posee la solución simultánea de las ecuaciones de conservación, lo que, en el sentido matemático, representa una ventaja, ya que permite reducir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La Figura 2 muestra el sistema coordinado y la geometría del cuerpo tipo cuña en función del ángulo α . Se considera también la posibilidad de que exista un gradiente de presión longitudinal en el flujo alrededor del cuerpo y una variación en su temperatura. Además, para la solución de esta aplicación, se consideran las siguientes condiciones:

- Régimen permanente.
- Propiedades constantes.
- Número de Eckert N_E pequeño.
- La temperatura del flujo T_∞ es constante.
- La velocidad libre del flujo U_∞ es constante.

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan las aplicaciones de transferencia de calor por convección, son: la ecuación de conservación de la masa, la ecuación de cantidad de movimiento y la ecuación de energía.

Figura 2. Representación geométrica de las variables y las coordenadas empleadas en el análisis del flujo en la geometría tipo cuña



Fuente: elaboración propia.

Para el caso de un flujo bidimensional en el plano xy y con la consideración de densidad constante, la ecuación de continuidad queda reducida a:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

donde u es la velocidad del flujo en la dirección x y v es la velocidad del flujo en la dirección y .

El flujo es estable en la superficie del cuerpo tipo cuña y su velocidad libre es U_∞ (ver Figura 2). La dimensión x es medida a lo largo de la superficie y es medida en la dirección normal a la superficie. Por el principio de adherencia, la velocidad del flujo en la superficie es cero, de manera que hay una región en la que la velocidad u cambia desde 0 hasta U_∞ . La región en la que la velocidad cambia desde 0 hasta $0,99 U_\infty$, es llamada *capa límite de velocidad*. Si se consideran las fuerzas y el flujo de momento que actúan en un volumen de control infinitesimal de esta capa límite laminar, se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

donde ρ es la densidad, μ es la viscosidad absoluta y p es la presión.

El flujo libre tiene una temperatura T_∞ , mientras que la superficie tiene una temperatura T_0

y puede variar a lo largo de esta; así mismo, se estima que ocurre un intercambio de calor entre el fluido y la superficie del cuerpo. La condición de equilibrio térmico implica que la temperatura del fluido en contacto con la superficie es T_0 ; por lo tanto, hay una variación de la temperatura del fluido desde T_0 hasta T_∞ , y, similar al comportamiento de la velocidad, la región en la que ocurre esta variación de temperatura es llamada *capa límite térmica*. Si se toman en cuenta los flujos de energía sobre un volumen de control infinitesimal en esta capa límite, se llega a la ecuación:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

donde α es la difusividad térmica. Las ecuaciones (1), (2) y (3) son las expresiones fundamentales que rigen el proceso de transferencia de calor. La ecuación de la energía despreciando la energía potencial, está dada por:

$$p + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = cte \tag{4}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 4 se obtiene que en caso de existir un gradiente de presión a lo largo de la superficie del cuerpo tipo cuña, estará dado por:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \tag{5}$$

Remplazando en (2) se obtiene:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{6}$$

donde ν es la viscosidad cinemática $\nu = \mu/\rho$. Se define la función de corriente ψ , cuya función es remplazar las funciones u y v por una función única. La función ψ es tal, que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}$$

Estas relaciones cumplen con la ecuación de continuidad 1. De manera similar, se emplea la

transformación de singularidad para reemplazar las dos variables independientes x y y por una variable simple $\eta_{(x,y)}$:

$$\eta_{(x,y)} = \frac{1}{2}y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \quad (8)$$

También se asume que las funciones de velocidad y de temperatura están relacionadas con las funciones definidas anteriormente, mediante:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{U_{\infty}\nu x}} \quad \text{y} \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_s}{T_{\infty} - T_s} \quad (9)$$

donde T_s es la temperatura de la superficie. Realizando una manipulación algebraica de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía, se obtienen las ecuaciones fundamentales en términos de las funciones previamente definidas. En el Anexo 1 se presentan los aspectos más relevantes para transformar la ecuación 6, la cual está expresada en derivadas parciales dentro de una ecuación diferencial ordinaria no lineal (ver ecuación 10).

La ecuación de cantidad de movimiento, transformada a una función de f , queda de la siguiente forma:

$$f''' + (1 + m) \cdot f \cdot f'' + (8 - 2 \cdot f'^2) \cdot m = 0 \quad (10)$$

De manera similar, la ecuación de energía se transforma en:

$$\theta'' + (1 + m) \cdot N_{PR} \cdot f \cdot \theta' - 2 \cdot N_{PR} \cdot f'(\theta - 1) \cdot n = 0 \quad (11)$$

donde el número de Prandtl es $N_{PR} = \nu/\alpha$ y las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : f' = 0, f = 0, \theta = 0 \\ \text{y} \\ \eta = \infty : f' = 2, \theta = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

El valor de m está relacionado con el ángulo de la cuña mediante la expresión:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{1 + m} [rad] \quad (13)$$

2.2 Algoritmo y programa computacional para la solución de las ecuaciones fundamentales

Fue empleado el método de Runge-Kutta para la solución de las ecuaciones de conservación, las cuales son a su vez ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Con base en los planteamientos de Collatz (1960), se implementaron dos esquemas del método de Runge-Kutta: uno para la solución de la ecuación diferencial de tercer orden (ecuación de cantidad de movimiento 10) y otro para la ecuación diferencial de segundo orden (ecuación de energía 11). Estas formulaciones son presentadas en las Tablas 1 y 2, respectivamente.

Con estas formulaciones del método de Runge-Kutta, fue elaborado un procedimiento computacional en el *software* Engineering Equation Solver EES[®] (Klein, 2014). El procedimiento es presentado en el Anexo 2. En este algoritmo, lo primero que se realiza es una iteración manual para satisfacer las condiciones de contorno que posee la ecuación de cantidad de movimiento; así, una vez determinado el valor de $f''(0)$ que satisface $f'(\infty)$, se procede a iterar $\theta'(0)$ para satisfacer las condiciones de contorno de la ecuación de energía. Se seleccionó un paso $h=0,003$, de modo que el error total acumulado tiene el orden $O(h4) = 1 \times 10^{-10}$, que es la exactitud numérica para esta aplicación del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Este paso también fue suficiente para dar convergencia. Para la elaboración y la solución de las tablas paramétricas en EES, fue seleccionado un rango para η de [0-5], con 1001 corridas, lo que equivale a intervalos de η de 0,005, dando una adecuada definición a la hora de graficar las respuestas en función de esta variable. En este trabajo fueron aceptadas soluciones para $f''(0)$ y para $\theta'(0)$, con un orden de diezmilésimas. Lo anterior, debido a que, como la estimación y la iteración de los valores de $f''(0)$ y $\theta'(0)$ se realiza manualmente, el proceso de cálculo se torna más dispendioso. El ajuste e iteración de los datos estimados puede hacerse basándose en el comportamiento de las respuestas, según las condiciones de contorno y con algún criterio de convergencia como el del método de bisección. Es posible desarrollar procedimientos con programación en este u otros programas computacionales, con el propósito de mejorar el proceso de solución; sin embargo, esto está fuera del alcance del presente trabajo.

Tabla 1 Esquema de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales de tercer orden (Collatz, 1960)

$y''' = f(x, y, y', y'')$				
x	y	$h \cdot y' = v_1$	$\frac{h^2}{2} \cdot y'' = v_2$	$k_v = \frac{h^3}{6} f\left(x, y, \frac{v_1}{h}, \frac{2v_2}{h^2}\right)$
x_0	y_0	v_{10}	v_{20}	k_1
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}v_{20} + \frac{1}{8}k_1$	$v_{10} + v_{20} + \frac{3}{4}k_1$	$v_{20} + \frac{3}{2}k_1$	k_2
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}v_{20} + \frac{1}{8}k_1$	$v_{10} + v_{20} + \frac{3}{4}k_1$	$v_{20} + \frac{3}{2}k_2$	k_3
$x_0 + h$	$y_0 + v_{10} + v_{20} + k_3$	$v_{10} + 2v_{20} + 3k_3$	$v_{20} + 3k_3$	k_4
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + v_{10} + v_{20} + k$	$v_{11} = v_{10} + 2v_{20} + k'$	$v_{21} = v_{20} + k''$	

$k = \frac{1}{20}(9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4)$
 $k' = k_1 + k_2 + k_3$
 $k'' = \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Esquema de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales de segundo orden (Collatz, 1960)

$y'' = f(x, y, y')$				
x	y	$h \cdot y' = v_1$	$k_v = \frac{h^2}{2} f\left(x, y, \frac{v_1}{h}\right)$	
x_0	y_0	v_{10}	k_1	$k = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$ $k' = \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}k_1$	$v_{10} + k_1$	k_2	
$x_0 + \frac{1}{2}h$	$y_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}k_1$	$v_{10} + k_2$	k_3	
$x_0 + h$	$y_0 + v_{10} + k_3$	$v_{10} + 2k_3$	k_4	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + v_{10} + k$	$v_{11} = v_{10} + k'$		

Fuente: elaboración propia.

Estas formulaciones fueron adaptadas para las variables que se tienen en la aplicación del flujo en un cuerpo tipo cuña, de manera que las Tablas 3 y 4 presentan las expresiones del método de Runge-Kutta, que constituyen la base para la

elaboración del algoritmo computacional. Los términos m , n y N_{PR} se mantienen constantes en cada corrida, para satisfacer las condiciones de contorno requeridas.

Tabla 3 Esquema de Runge-Kutta para la ecuación de cantidad de movimiento

$$f''' = g(\eta, f, f', f'') = -(1 + m) \cdot f \cdot f'' - (8 - 2 \cdot f'^2) \cdot m$$

η	f	$h \cdot f' = v_1$	$\frac{h^2}{2} \cdot f'' = v_2$	$k_v = \frac{h^3}{6} g\left(\eta, f, \frac{v_1}{h}, \frac{2v_2}{h^2}\right)$
η_0	f_0	v_{10}	v_{20}	k_1
$\eta_0 + \frac{1}{2}h$	$f_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}v_{20} + \frac{1}{8}k_1$	$v_{10} + v_{20} + \frac{3}{4}k_1$	$v_{20} + \frac{3}{2}k_1$	k_2
$\eta_0 + \frac{1}{2}h$	$f_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}v_{20} + \frac{1}{8}k_1$	$v_{10} + v_{20} + \frac{3}{4}k_1$	$v_{20} + \frac{3}{2}k_2$	k_3
$\eta_0 + h$	$f_0 + v_{10} + v_{20} + k_3$	$v_{10} + 2v_{20} + 3k_3$	$v_{20} + 3k_3$	k_4
$\eta_1 = \eta_0 + h$	$f_1 = f_0 + v_{10} + v_{20} + k$	$v_{11} = v_{10} + 2v_{20} + k'$	$v_{21} = v_{20} + k''$	

$$k = \frac{1}{20}(9k_1 + 6k_2 + 6k_3 - k_4)$$

$$k' = k_1 + k_2 + k_3$$

$$k'' = \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4 Esquema de Runge-Kutta para la ecuación de energía

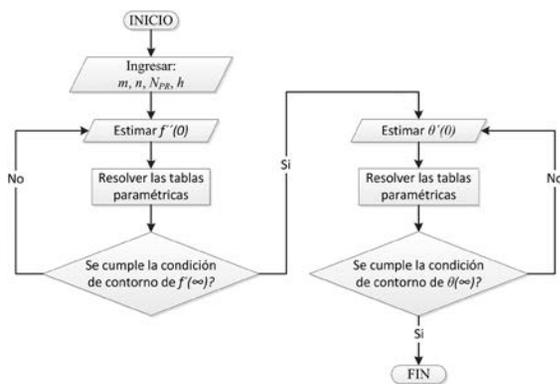
$$\theta'' = g(\eta, \theta, \theta') = -(1 + m) \cdot N_{PR} \cdot f \cdot \theta' + 2 \cdot N_{PR} \cdot f'(\theta - 1) \cdot n$$

η	θ	$h \cdot \theta' = v_1$	$k_v = \frac{h^2}{2} g\left(\eta, \theta, \frac{v_1}{h}\right)$	
η_0	θ_0	v_{10}	k_1	$k = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$ $k' = \frac{1}{3}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$\eta_0 + \frac{1}{2}h$	$\theta_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}k_1$	$v_{10} + k_1$	k_2	
$\eta_0 + \frac{1}{2}h$	$\theta_0 + \frac{1}{2}v_{10} + \frac{1}{4}k_1$	$v_{10} + k_2$	k_3	
$\eta_0 + h$	$\theta_0 + v_{10} + k_3$	$v_{10} + 2k_3$	k_4	
$\eta_1 = \eta_0 + h$	$\theta_1 = \theta_0 + v_{10} + k$	$v_{11} = v_{10} + k'$		

Fuente: elaboración propia.

La Figura 3 presenta el diagrama el flujo para el procedimiento computacional de solución que se realiza en el programa EES.

Figura 3 Diagrama el flujo para el procedimiento computacional



Fuente: elaboración propia.

3R resultados y análisis

Se ha aplicado un procedimiento computacional para el caso de $m=0,5$, que equivale a un ángulo α de $2\pi/3$ radianes o 120° (ver Figura 2). La solución se llevó a cabo para un rango del número de Prandtl N_{PR} entre 0,5 y 5,0. Teniendo en cuenta que se ha definido la condición de contorno arbitraria de $f'(\infty)=2$ (ver ecuación 12), se iteran diferentes valores de $f''(0)$ hasta obtener la convergencia de la condición establecida. Este proceso es un poco dispendioso y depende en gran medida del número de decimales incluidos en la iteración. También es importante aclarar que la condición de ∞ fue alcanzada alrededor de $\eta=3,5$. En este caso, $f''(0)\approx 3,599$ y los resultados de convergencia para $f(\eta)$, $f'(\eta)$ y $f''(\eta)$ en función de η , se presentan en la Tabla 5.

Tabla 5. Datos de $f(\eta)$, $f'(\eta)$ y $f''(\eta)$ en función de η . Se muestran los datos de algunos valores seleccionados de η

η	f	f'	f''	η	f	f'	f''	η	f	f'	f''
0,0	0,000	0,000	3,599	1,2	1,562	1,927	0,287	3,4	5,950	2,000	0,000
0,1	0,018	0,346	3,192	1,4	1,954	1,968	0,139	3,6	6,346	2,000	0,000
0,2	0,067	0,643	2,804	1,6	2,352	1,987	0,061	3,8	6,748	2,000	0,000
0,3	0,144	0,902	2,428	1,8	2,746	1,995	0,025	4,0	7,150	2,000	0,000
0,4	0,248	1,131	2,060	2,0	3,148	1,999	0,009	4,2	7,546	2,000	0,000
0,5	0,370	1,318	1,728	2,2	3,549	2,000	0,003	4,4	7,948	2,000	0,000
0,6	0,508	1,474	1,424	2,4	3,945	2,000	0,001	4,6	8,350	2,000	0,000
0,8	0,829	1,705	0,907	2,8	4,750	2,000	0,000	4,8	8,746	2,000	0,000
1,0	1,188	1,848	0,531	3,0	5,146	2,000	0,000	5,0	9,148	2,000	0,000

Fuente: elaboración propia.

Seguidamente, se determinaron las respuestas de temperatura para los diferentes N_{PR} . Fue iterado el valor de $\theta'(0)$ para cumplir la condición de que la respuesta de temperatura sea $\theta'(\infty)=1$. El

valor del coeficiente n es 1,0. La Tabla 6 presenta un resumen de los valores de θ en función del número de Prandtl.

Tabla 6 Resultados de la función de temperatura θ para diferentes N_{PR} . $n=1,0$. Se muestran los datos de algunos valores seleccionados de η

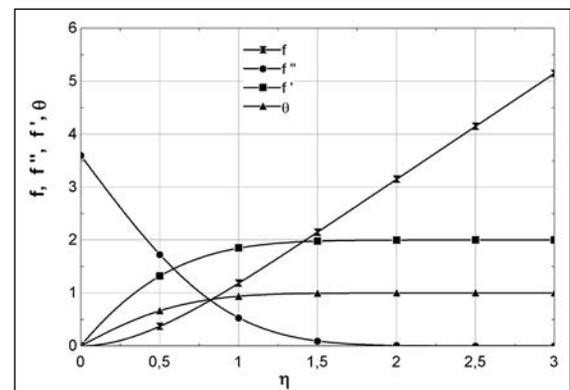
$\theta'(\theta)$	1,1215	1,4518	1,6831	1,8672	2,0226	2,1584	2,2797	2,3900	2,4914	2,5856
N_{PR}	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
η	θ									
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,2	0,221	0,283	0,326	0,359	0,386	0,409	0,430	0,448	0,465	0,480
0,4	0,421	0,526	0,593	0,642	0,680	0,711	0,738	0,760	0,780	0,797
0,6	0,585	0,708	0,778	0,825	0,858	0,884	0,903	0,919	0,931	0,942
0,8	0,716	0,835	0,893	0,927	0,949	0,963	0,973	0,980	0,985	0,989
1,0	0,814	0,914	0,955	0,975	0,985	0,991	0,995	0,997	0,998	0,999
1,2	0,882	0,959	0,983	0,992	0,997	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000
1,4	0,929	0,982	0,995	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,6	0,959	0,993	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,8	0,977	0,997	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2,0	0,988	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2,6	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
4,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000
5,0	1,000	1,000	1,000	0,999	1,000	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000

Fuente: elaboración propia.

La Figura 4 presenta las respuestas $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$ y θ para $N_{PR}=1,0$. Los comportamientos para otros N_{PR} son similares. Estos son los comportamientos típicos de las respuestas que satisfacen el análisis de la convergencia del problema y la obtención de la solución, según las condiciones de contorno establecidas en la ecuación 12. Para el caso de la ecuación de cantidad de movimiento, la curva de $f(\eta)$ muestra la solución de la misma. La curva de $f'(\eta)$ parte de cero y tiende a 2 en el infinito, de acuerdo con lo establecido en las condiciones de contorno; tendencia que es alcanzada para un valor del parámetro η (de 1,5 aproximadamente). La curva de $f''(\eta)$ presenta el valor del gradiente de la velocidad en la superficie, el cual tiende a cero en el infinito debido a la estabilización de $f'(\eta)$ en la condición de contorno. Su valor en $\eta=0$ es el valor iterado manualmente, que garantiza el cumplimiento de las condiciones de contorno. Para el caso de la ecuación de la energía, la

curva de θ representa el comportamiento de la temperatura adimensional y su estabilización en la condición de contorno definida.

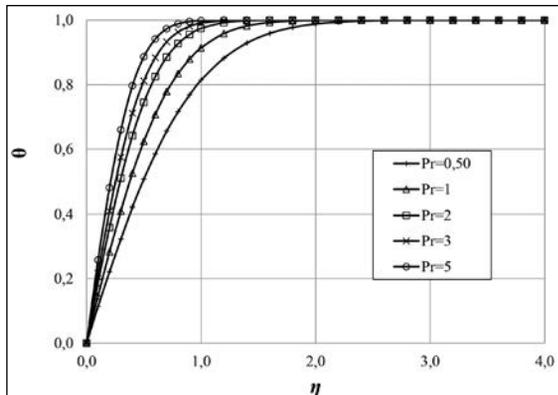
Figura 4. Comportamiento de las respuestas $f(\eta)$, $f'(\eta)$, $f''(\eta)$, y θ para $N_{PR}=1,0$



Fuente: elaboración propia.

La Figura 5 presenta algunos perfiles de la temperatura adimensional. Puede observarse que para el rango de número de Prandtl N_{PR} entre 0,5 y 5 y para los valores de $m=0,5$ y $n=1$, los perfiles de temperatura adimensional convergen en un valor de η próximo a 3,0. También es posible notar que a mayor número de Prandtl N_{PR} , el perfil de temperatura adimensional es más alto.

Figura 5 Perfiles de temperatura ($m=0,5$ e $n=1$)



Fuente: elaboración propia.

En la Tabla 7 se presentan los valores de temperatura en la superficie $\theta'_{(0)}$, que permiten cumplir con la condición de contorno $\theta_{(\infty)}=1$ para diferentes números de Prandtl. Estos datos constituyen la información relevante para la correlación de los números adimensionales en esta aplicación de transferencia de calor. Su procesamiento se lleva a cabo con algunas consideraciones de la transferencia de calor.

Tabla 7 Resultados del gradiente de temperatura en la superficie $\theta'_{(0)}$ para diferentes N_{PR}

$f'_{(0)}=3,5989$			
N_{Pr}	$\theta'_{(0)}$	N_{Pr}	$\theta'_{(0)}$
0,50	1,1215	3,00	2,1584
0,75	1,3054	3,25	2,2206
1,00	1,4518	3,50	2,2797
1,25	1,5753	3,75	2,3361
1,50	1,6831	4,00	2,3900
1,75	1,7796	4,25	2,4417
2,00	1,8672	4,50	2,4914
2,25	1,9478	4,75	2,5393
2,50	2,0226	5,00	2,5856

Fuente: elaboración propia.

A continuación se presenta el soporte teórico para obtener la relación de los números adimensionales: N_{NU} , N_{RE} y N_{PR} . El calor que fluye por conducción en la capa de fluido adherida a la superficie, es transferido por convección a las capas adyacentes. Por lo tanto, las ecuaciones de transferencia de calor por conducción y por convección, expresadas por unidad de área, son:

$$q''_{cond} = -k \frac{\partial T_{(x,0)}}{\partial y} \quad y \quad q''_{conv} = h(T_s - T_\infty) \tag{14}$$

Se igualan las ecuaciones previas y se obtiene la expresión del coeficiente de transferencia de calor por convección h :

$$h(T_s - T_\infty) = -k \frac{\partial T_{(x,0)}}{\partial y} \quad y \quad h = -k \frac{\frac{\partial T_{(x,0)}}{\partial y}}{(T_s - T_\infty)} \tag{15}$$

El gradiente de temperatura se expresa en términos de las variables θ y η mediante:

$$\frac{\partial T_{(x,0)}}{\partial y} = \frac{dT}{d\theta} \frac{d\theta_{(0)}}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \tag{16}$$

donde θ está definida como:

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} \quad y \quad T = \theta(T_\infty - T_s) + T_s \tag{17}$$

Las derivadas requeridas en la ecuación 16 se obtienen de las ecuaciones 8 y 17:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \tag{18}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = (T_\infty - T_s) \tag{19}$$

Sustituyendo las expresiones 18 y 19 en la ecuación 16 se obtiene:

$$\frac{\partial T_{(x,0)}}{\partial y} = (T_{\infty} - T_s) \frac{d\theta_{(0)}}{d\eta} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty(x)}}{\nu x}} \quad (20)$$

Al reemplazar la ecuación 20 en 15 se obtiene la siguiente expresión del coeficiente de transferencia de calor por convección:

$$h = k \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty(x)}}{\nu x}} \cdot \frac{d\theta_{(0)}}{d\eta} \quad (21)$$

Reorganizando las variables, y recordando que para una placa de longitud x $Nu_x = h \cdot x / k$ y $Re_x = U_{\infty(x)} \cdot x / \nu$:

$$Nu_x = \sqrt{Re_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta_{(0)}}{d\eta} \quad \text{o} \quad Nu_x = \sqrt{Re_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \theta'_{(0)} \quad (22)$$

Los datos de la Tabla 7 son presentados en la Figura 6. Se ha realizado la correlación de los valores de $\theta'_{(0)}$ versus los valores de N_{PR} , para ser introducida en la ecuación 22. La regresión potencial es presentada en la figura y el coeficiente R^2 próximo a 1 garantiza una buena correlación entre la línea de tendencia y los resultados obtenidos. Entonces, se tiene una relación entre $\theta'_{(0)}$ y N_{PR} dada por:

$$\theta'_{(0)} = 1,45 \cdot N_{PR}^{0,36} \quad (23)$$

Sustituyendo la regresión potencial de $\theta'_{(0)}$ en la ecuación 22 se obtiene la ecuación 24

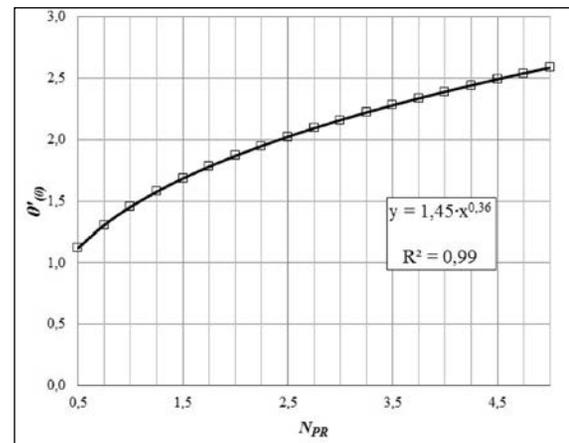
$$N_{Nu_x} = \sqrt{N_{Re_x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot [1,45 \cdot N_{PR}^{0,36}] \quad (24)$$

De manera que la relación entre los números adimensionales de N_{NU} , N_{RE} y N_{PR} para una superficie inclinada con $m=0,5$ y $n=1$ para un rango de N_{PR} entre $0,5$ y 5 , e s:

$$N_{Nu_x} = 0,725 \cdot N_{Re_x}^{0,5} \cdot N_{PR}^{0,36} \quad (25)$$

La ecuación 25 es la expresión para calcular el coeficiente de transferencia de calor por convección para una superficie inclinada con las características mencionadas. Correlaciones de la forma $N_{Nu_x} = cte \cdot N_{Re_x}^m \cdot N_{PR}^n$ suelen encontrarse en literatura de transferencia de calor para la determinación del coeficiente de transferencia de calor por convección.

Figura 6. Representación y correlación de $\theta'_{(0)}$ versus N_{PR}



Fuente: elaboración propia.

Con el propósito de establecer una comparación de los resultados obtenidos con esta metodología y los encontrados en la literatura, se ha hallado la solución para una placa horizontal ($\alpha=0^\circ$) y para una placa vertical ($\alpha=90^\circ$). La Tabla 8 presenta la comparación en función de la relación $N_{Nu_x} / N_{Re_x}^{0,5}$. Puede observarse que el error porcentual entre la solución de la literatura y la del artículo varía según el número de Prandtl. En el caso de la placa horizontal, puede notarse que el error se incrementa a medida que crece el número de Prandtl, mientras que en la placa vertical la tendencia inicial es a que el error disminuya a medida que aumenta el número de Prandtl.

Tabla 8 Comparación entre los resultados del presente trabajo y la literatura (White, 1991) en función de $N_{Nu_x}/N_{Re_x}^{0,5}$

N_{PR}	Placa horizontal $\frac{N_{Nu_x}}{N_{Re_x}^{0,5}}$			Placa vertical $\frac{N_{Nu_x}}{N_{Re_x}^{0,5}}$		
	Literatura $0,332 \cdot N_{PR}^{1/3}$	Artículo $0,335 \cdot N_{PR}^{0,351}$	Error [%]	Literatura $0,57 \cdot N_{PR}^{0,40}$	Artículo $0,579 \cdot N_{PR}^{0,39}$	Error [%]
0,5	0,264	0,262	0,4	0,432	0,442	2,3
1,0	0,332	0,335	0,8	0,570	0,579	1,5
1,5	0,380	0,386	1,5	0,670	0,678	1,1
2,0	0,418	0,427	2,0	0,752	0,758	0,8
2,5	0,451	0,462	2,4	0,822	0,827	0,5
3,0	0,479	0,492	2,8	0,885	0,887	0,3
3,5	0,504	0,519	3,0	0,941	0,942	0,1
4,0	0,527	0,544	3,3	0,992	0,992	0,0
4,5	0,548	0,567	3,5	1,040	1,039	0,2
5,0	0,568	0,589	3,7	1,085	1,082	0,3

Fuente: elaboración propia.

3C conclusiones

Se desarrolló un modelo de cálculo del fenómeno de transferencia de calor por convección de un fluido –a través de las superficies de un cuerpo tipo cuña–, considerando gradientes de presión y temperatura variables. Para su solución numérica se elaboró un código computacional basado en el método de Runge-Kutta, el cual fue implementado utilizando herramientas computacionales del *software* EES.

Se elaboró, desde una perspectiva didáctica, un procedimiento para la determinación de las correlaciones de transferencia de calor en términos de números adimensionales, con el fin de que la metodología pueda ser fácilmente adaptada para el abordaje de aplicaciones similares.

La metodología presentada en este artículo mostró ser una herramienta adecuada para la solución de las ecuaciones fundamentales de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, dado que los errores obtenidos entre la solución propuesta y la solución encontrada en la literatura (White, 1991) reportaron valores inferiores al 4%.

La metodología y el algoritmo desarrollados pueden adaptarse para estudiar detalladamente la influencia del ángulo de la cuña y del número de Prandtl en problemas similares, así como para la inclusión de otras condiciones del flujo, como la temperatura variable o condiciones de deslizamiento.

Referencias

Bararnia, H., Haghparast, N., Miansari, M. & Barari, A. (2012). Flow analysis for the Falkner–Skan wedge flow. *Current Science*, 103, 2, 169 -177.

Bejan, A. & Kraus, A. D. (2003). *Heat transfer handbook*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Bergles, A. E. (2011). Recent developments in enhanced heat transfer. *Heat and Mass Transfer*, 47, 8, 1001 - 1008.

Çengel, Y. A. & Ghajar, A. J. (2011). *Transferencia de calor y masa: Fundamentos y aplicaciones*. 4.ª ed. México: McGraw-Hill.

Collatz, L. (1960). *Thermische Strömungslehre*. 3. ed. Berlin: Springer-Verlag.

Incropera, F. P. & DeWitt, D. P. (1996). *Fundamentos de transferencia de calor*. 4 ed. México: Pearson Educación.

Jiji, L. M. (2006). *Heat Convection*. Netherlands: Springer.

Kays, W. & Crawford, M. (1993). *Convective heat and mass transfer*. 3 ed. New York: McGraw-Hill, Inc.

Khan, R. (2010). Iterative Scheme for Solution to the Falkner-Skan Boundary Layer Wedge Flow Problem. *General Mathematics Notes*, 1, 2, 1 - 10.

Klein, S. A. (2014). *Egnerig Eqs in Solver (EES)*. F-Chart Software. Academic Professional V9. Retrieved from <http://www.fchart.com/assets/downloads/eesmanual.pdf>.

White, F. (1991). *Viscous fluid flow*. 2 ed. New York McGraw-Hill, Inc.

Anexo 1 Procedimiento algebraico para expresar la ecuación diferencial parcial de cantidad de movimiento como una ecuación diferencial ordinaria

Ecuación de cantidad de movimiento:	$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	(1)
Considerando la ecuación de Bernoulli:	$p + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = cte \quad \text{entonces} \quad \frac{dp}{dx} = -\rho U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx}$	(2)
Reemplazando (2) en (1):	$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	(3)
Se emplea la función adimensional $f(\eta)$ y la variable $\eta(x,y)$:	$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{U_{\infty} \nu x}} \quad , \quad \eta(x,y) = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}}$	(4)
También se considera la función de corriente ψ :	$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$	(5)
De la función (3) se obtiene: Para reducir la notación se simplifica $f'(\eta)$ por f' y $f(\eta)$ por f	$\begin{aligned} \psi &= f(\eta) U_{\infty}^{1/2} \nu^{1/2} x^{1/2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= f' U_{\infty}^{1/2} \nu^{1/2} x^{1/2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= f U_{\infty}^{1/2} \nu^{1/2} \left(\frac{1}{2} x^{-1/2} \right) + f' \nu^{1/2} x^{1/2} \left(\frac{1}{2} U_{\infty}^{-1/2} \frac{dU_{\infty}}{dx} \right) \end{aligned}$	(6)
De la variable (3) se obtiene:	$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{y}{\sqrt{\nu x}} \left(\frac{1}{2} U_{\infty}^{-1/2} \frac{dU_{\infty}}{dx} \right) - \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu}} \left(\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) \end{aligned}$	(7)
Las relación u (4) puede expresarse mediante (5) y (6) como:	$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = (f' U_{\infty}^{1/2} \nu^{1/2} x^{1/2}) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}} \right) = \frac{1}{2} U_{\infty} f'$ Con: $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} U_{\infty} f'' \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial U_{\infty}} = \frac{1}{2} f'$	(8)
Y la relación $\frac{\partial u}{\partial x}$ es:	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial U_{\infty}} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x}$	(9)

Sustituyendo en (8) las correspondientes expresiones de (6) y (7) y simplificando:	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4}\eta f'' \frac{dU_\infty}{dx} - \frac{1}{4}\eta f'' \frac{U_\infty}{x} + \frac{1}{2}f' \frac{dU_\infty}{dx}$	(10)
Reemplazando las correspondientes expresiones de (8) y (10), se obtiene el primer término de la ecuación (3):	$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_\infty}{8}\eta f' f'' \left[\frac{dU_\infty}{dx} - \frac{1}{x} \right] + \frac{1}{4}f'^2 U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$	(11)
La función de corriente puede ser expresada como:	$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} \right]$	(12)
Sustituyendo las correspondientes expresiones de (6) (7) en (12) y simplificando se obtiene:	$v = -\frac{1}{4}y f' \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{1}{4}y \frac{U_\infty}{x} f' - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{vU_\infty}{x}} f - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{xU_\infty}} f \frac{dU_\infty}{dx}$	(13)
La relación $\frac{\partial u}{\partial y}$ es:	$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$	(14)
Sustituyendo en (14) las correspondientes expresiones de (7) y (8) y simplificando:	$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} \frac{U_\infty^{3/2}}{\sqrt{vx}} f''$	(15)
Reemplazando las correspondientes expresiones de (13) y (15), se obtiene el segundo término de la ecuación (3):	$v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{8}\eta f' f'' U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{1}{8} \frac{\eta U_\infty^2}{x} f' f'' - \frac{1}{8} \frac{U_\infty^2}{x} f f'' - \frac{1}{8} U_\infty f f'' \frac{dU_\infty}{dx}$	(16)
El último término de la ecuación (3) se obtiene de la siguiente manera:	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{1}{4} \frac{U_\infty^{3/2}}{\sqrt{vx}} f''' \right) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{vx}} = \frac{1}{8} \frac{U_\infty^2}{vx} f'''$	(17)
Finalmente, sustituyendo (11) (16) (17) en la ecuación (3) y simplificando se obtiene:	<p>Donde:</p> $f''' + (1 + m)ff'' + (8 - 2f'^2)m = 0$ $m = \frac{x}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx}$	(18)

Anexo 2. Algoritmo de Runge-Kutta desarrollado en EES®

```

"DECLARACION DEL PROCEDIMIENTO DE RUNGE-KUTTA"
PROCEDURE RUNGEKUTTA(h;eta_max;eta_0;f0;f_prime0;f_dprime0;theta_0;theta|_0;m;n;Pr:f_prime;f_dprime;theta)

"INICIALIZACION DE LAS VARIABLES"
eta:= eta_0
f:= f0
f_prime:=f_prime0
f_dprime:=f_dprime0;
theta:= theta_0
theta| :=theta|_0
m:=m: n:=n: Pr:=Pr

"CONDICIONES DE CONVERGENCIA"
Tol:= 0,1*h :
10: IF (eta>eta_max-Tol) THEN GOTO 20

"ROUTINA DE RUNGE-KUTTA PARA LA ECUACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO"
k1:= (h^3/6)*((-1+m))*(f*f_dprime)-(8-2*f_prime^2)*m
k2:= (h^3/6)*((-1+m))*(f+1/2*h*f_prime+1/4*(h^2/2)*f_dprime +1/8*k1) * ((f_dprime+(3/h^2)*k1) ) -(8-2* ((h*f_prime+h^2/2
*f_dprime+3/4*k1)/h)^2)*m)
k3:= (h^3/6)*((-1+m))*(f+(1/2)*h*f_prime)+(1/4)*(h^2/2)*f_dprime + (1/8)*k1) * ( (f_dprime+(3/h^2)*k2) ) - (8-2* ((h*f_prime
+(h^2/2)*f_dprime+(3/4)*k1)/h)^2)*m)
k4:= (h^3/6)*((-1+m))*(f+(h*f_prime)+(h^2/2)*f_dprime +k3) * ( (f_dprime+6/h^2*k3) ) - (8-2* ((f_prime+h*f_dprime+3/h*k3)
^2)*m)
k=1/20*(9*k1+6*k2+6*k3-k4)
kp=(k1+k2+k3)
ks=1/2*(k1+2*k2+2*k3+k4)

"INCREMENTO DEL PROCESO ITERATIVO DE LA ROUTINA DE LA ECUACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO"
eta:=eta+h
f:= f+h*f_prime+(h^2/2)*f_dprime+k
f_prime:=(h*f_prime+2*(h^2/2)*f_dprime+kp)/h
f_dprime:=((h^2/2)*f_dprime+ks)/(h^2/2)

"ROUTINA DE RUNGE-KUTTA PARA LA ECUACION DE ENERGIA"
L1:= (h^2/2)*(-(1+m)*Pr*f*theta|+2*Pr*f_prime*(theta-1)*n)
L2:= (h^2/2)*(-(1+m)*Pr*f*((h*theta| +L1)/h)+2*Pr*f_prime*((theta+(1/2)*h*theta| +(1/4)*L1-1)*n)
L3:= (h^2/2)*(-(1+m)*Pr*f*((h*theta| +L2)/h)+2*Pr*f_prime*((theta+(1/2)*h*theta| +(1/4)*L1-1)*n)
L4:= (h^2/2)*(-(1+m)*Pr*f*((h*theta| +2*L3)/h)+2*Pr*f_prime*((theta+h*theta| +L3-1)*n)
L=1/3*(L1+L2+L3)
Lp=1/3*(L1+2*L2+2*L3+L4)

"INCREMENTO DEL PROCESO ITERATIVO DE LA ROUTINA DE LA ECUACION DE LA ENERGIA"
theta:= theta+h*theta| +L
theta| :=(h*theta| +Lp)/h
GOTO 10:
20: end "FINALIZA EL PROCEDIMIENTO"

"LLAMADO DEL PROCEDIMIENTO"
CALL RUNGEKUTTA (0,003;eta_maximo;0;0;0;f|l;0;theta|;m;n;Pr:f_prime;f_dprime;theta)
"DATOS DE ENTRADA"
f|l=3,5989
theta|=1,1215
{eta_maximo=3}
"CONTANTES DEL METODO:"
m=0,5: n=1: Pr=0,5

```