Analogi Mekanik Model Gangguan Jiwa Bipolar

Heni Sulastri*, Asifa Asri, Azrul Azwar

Prodi Fisika FMIPA Universitas Tanjungpura, Jl. Prof. Dr. Hadari Nawawi, Pontianak, Indonesia
*Email : henisulastri143@student.untan.ac.id
(Diterima 24 Februari 2021; Disetujui 25 Maret 2021; Dipublikasikan 1 April 2021)

Abstrak

Telah dilakukan studi pada model gangguan jiwa bipolar. Penelitian ini bertujuan menginterpretasikan tentang redaman negatif dalam model gangguan jiwa bipolar berdasarkan tinjauan mekanika, serta menentukan jenis kestabilan dan keberadaan fenomena *limit cycle* dari model tersebut. Perubahan kondisi suasana hati yang ekstrim dari pasien gangguan jiwa bipolar dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan model osilator harmonik yang teredam negatif. Terdapat dua keadaan penderita yaitu gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan dan dengan pengobatan. Selanjutnya, solusi persamaan gangguan jiwa bipolar yang dituliskan dalam bentuk sistem persamaan non-linear *autonomus* untuk mendapatkan nilai Eigen sehingga diperoleh hasil bahwa model gangguan bipolar tanpa pengobatan dan dengan pengobatan ditinjau dari sistem yang berosilasi yaitu $\alpha < 2\omega$ (dimana α dan ω merupakan parameter), menghasilkan nilai Eigen bagian riil positif dan menunjukkan bahwa titik tersebut merupakan titik tak stabil. Pada diagram fasa yang diselesaikan secara numerik menggunakan *Ordinary Differential Equation* 45 (ODE45) model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan memiliki sebuah *limit cycle* yang unik. Eksistensi *limit cycle* ini menyebabkan orbit pada bidang fase akan menuju ke suatu lingkaran tertentu. *Limit cycle* inilah diinterpretasikan sebagai keberhasilan proses pengobatan, karena keadaan emosional penderita berosilasi dalam batas yang ditentukan.

Kata Kunci : Gangguan jiwa bipolar, Kestabilan, *Limit cycle*

1. Latar Belakang

Gangguan Bipolar merupakan penyakit gangguan kejiwaan yang ditandai dengan perubahan suasana hati yang sangat ekstrim berupa kebahagiaan (manik) dan kesedihan (depresi). Pada kondisi manik, seseorang menjadi sangat antusias dan bersemangat, sebaliknya pada kondisi depresi orang tersebut menjadi murung, pesimis, putus asa bahkan memiliki keinginan untuk bunuh diri. Pergantian suasana hati ini dapat berlangsung secara tiba–tiba dengan perubahan yang sangat drastis. Penyakit gangguan jiwa ini pada umumnya bukan disebabkan oleh tekanan psikologis, melainkan karena terjadinya gangguan keseimbangan pada otak [1]. Gangguan ini memunculkan banyak masalah unik bagi praktisi klinis saat ini, seperti kesulitan dalam mendiagnosis gangguan, ketidak patuhan pasien terhadap pengobatan atau obat-obatan, dan fakta bahwa obat–obatan yang dikonsumsi dalam pengoabatan akan menyebabkan ketergantungan [2].

Perubahan kondisi suasana hati yang ekstrim dari pasien bipolar dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan model osilator harmonik yang teredam negatif [3]. Meskipun sederhana, model ini dapat menunjukkan bahwa penderita gangguan jiwa bipolar akan mengalami episode pertama dari kondisi manik dan depresi pada usia sekitar 22 tahun, yang sesuai dengan hasil temuan klinis. Hal lain yang menarik dari model ini adalah bahwa efek pengobatan dapat dianalisa secara langsung dengan menambahkan suku gaya kendali pada persamaan differensialnya. Model ini kemudian disempurnakan dengan meninjau berbagai kemungkinan bentuk gaya kendali yang diharapkan sesuai dalam menggambarkan efek pengobatan bagi pasien bipolar [4]. Keberhasilan model ini kemudian mendorong para ilmuwan untuk mengkaji dan mengembangkan model tersebut. Misalnya, Snyder [5] memperluasnya ke dalam model osilator Lienard. Selanjutnya, Nana [6] menambahkan suku gaya kendali yang bergantung waktu untuk menganalisis efek bifurkasi dari model tersebut. Sejalan itu, Frank [7] kemudian menurunkan sebuah model yang lebih realistik yang dibangun berdasarkan reaksi–reaksi biokimia di dalam sel.

Dari uraian di atas, tampak bahwa pengembangan model matematis gejala gangguan jiwa bipolar merupakan salah satu topik penelitian yang menarik. Dengan adanya berbagai model matematis ini diharapkan dapat memberikan pemahaman tentang gangguan bipolar dan penanganannya secara lebih baik. Karena itu dalam penelitian skripsi ini, akan dikaji model matematis gangguan jiwa bipolar yang telah dikembangkan oleh Daugherty *et al.,* [2,3] yang difokuskan pada interpretasi mekanik tentang redaman negatif, analisis kestabilan dan eksistensi fenomena *limit cycle* dari model tersebut. *Limit cycle* merupakan fenomena yang khas yang hanya terjadi dalam persamaan differensial non-linear [8]. Pada kondisi *limit cycle*, solusi dari persamaan differensial non-linear akan berosilasi secara periodik. Dalam kaitannya dengan model gangguan bipolar, keberadaan *limit cycle* terkait dengan kondisi kestabilan kondisi kejiwaan pasien. Artinya, jika solusi dari model matematis gangguan bipolar mencapai kondisi *limit cycle*, maka kondisi keadaan jiwa pasien bipolar akan berosilasi secara stabil yang mengindikasikan keberhasilan dari pengobatan yang dilakukan.

2. Metodologi

Penelitian ini merupakan studi pustaka dengan mengkaji model matematis dari gejala gangguan jiwa bipolar yang merujuk pada model Daugherty *et al.,* [3]. Secara spesifik, penelitian ini diarahkan pada analisis kestabilan dan eksistensi *limit cycle* dari model tersebut, dengan tahap-tahapan penelitian sebagai berikut:

1. Membangun sebuah *toy-model* yang memberikan gambaran mekanik tentang model gangguan jiwa bipolar
2. Menyelesaikan persamaan differensial yang diperoleh pada persamaan gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan berikut

   $$\ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2.1)$$

   notasi dot adalah turunan terhadap waktu dengan x adalah keadaan emosi pasien, $\dot{x}$ adalah laju perubahan suasana hati antara hipomania dan depresi berat. Sedangkan α dan ω_0 masing-masing merupakan parameter model yang nilainya selalu positif. Parameter α berpengaruh pada seberapa cepat seorang pasien bipolar berada dalam kondisi manik atau depresi, sedangkan parameter ω_0 menggambarkan seberapa sering perubahan dari kondisi manik ke depresi manik atau sebaliknya terjadi.
3. Menuliskan Persamaan (2.1) dan persamaan

   $$\ddot{x} - 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \beta x^2\dot{x} \qquad (2.2)$$

   ke dalam bentuk sistem persamaan non-linear *autonomus*. Dimana suku gaya kendali yang diberikan oleh $\beta x^2\dot{x}$ dengan β merupakan suatu parameter, mewakili perawatan secara keseluruhan yang mencakup kombinasi anti-depresan, penstabil mood, psikoterapi, dan antipsikotik atau penenang, untuk mengendalikan variasi mood pasien bipolar.
4. Menentukan titik-titik kesetimbangan sistem dengan menyelesaikan persaman berikut

   $$f_i(\bar{x}_i) = 0$$

   serta mencari nilai Eigen dari matrikss Jacobi untuk sistem tersebut. Berdasarkan nilai Eigen ini akan diklasifikasikan tipe – tipe titik kesetimbangan sistem
5. Menyelesaikan Persamaan (2.1) dan (2.2) secara numerik menggunakan *Ordinary Differential Equation* 45 (ODE45) pada Matlab dan melakukan simulasi untuk berbagai nilai parameter
6. Menggambarkan solusi dari (2.1) dan (2.2) pada bidang fase
7. Membuktikan eksistensi *limit cycle* pada model Daugherty *et al.,* [3].

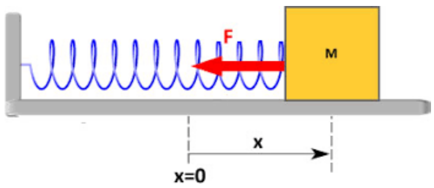
3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Analogi Mekanik Model Gangguan Bipolar tanpa Pengobatan

Model gejala gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan yang diusulkan oleh Daugherty *et al.*, [3] didasarkan pada model osilator harmonik teredam negatif. Permasalahan yang muncul kemudian adalah interpretasi fisis dari redaman negatif ini. Karena itu dalam skripsi ini diujikan sebuah *toy-model* sebagai analogi mekanis dari model gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan.

3.2. Osilator Harmonik Sederhana dengan Massa Berubah

Sebuah osilator harmonik sederhana dapat dibuat dengan menghubungkan sebuah benda bermassa M dengan pegas yang memiliki konstanta k yang salah satu ujungnya terikat pada dinding tetap seperti tampak dalam Gambar 4.1. Untuk memudahkan persoalan, gesekan antara benda dengan lantai dapat diabaikan.



Gambar 4.1 Model osilator harmonik sederhana

Secara umum, massa benda M dan konstanta pegas k dapat digeneralisasi sebagai besaran yang nilainya bergantung pada waktu t, dengan kata lain m dan k merupakan fungsi waktu sehingga dapat dituliskan sebagai $M(t)$ dan $k(t)$. Bentuk eksplisit dari $M(t)$ dan $k(t)$ akan ditentukan kemudian. Apabila benda ditarik sejauh $\mathbf{x}$ maka menurut hukum Hooke akan bekerja gaya sebesar $\mathbf{F} = -k(t)\mathbf{x}$, sehingga dengan menggunakan hukum II Newton untuk sistem dengan massa berubah, persamaan gerak dari sistem dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{4.1}$$

dengan $\mathbf{p} = M(t)\mathbf{v}$ adalah momentum benda dan $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ adalah kecepatan benda, sehingga

$$-k(t)\,\mathbf{x} = \frac{d}{dt}[M(t)\mathbf{v}]$$

$$-k(t)\,\mathbf{x} = \frac{d}{dt}[M(t)\dot{\mathbf{x}}]$$

$$-k(t)\,\mathbf{x} = \frac{dM(t)}{dt}\dot{\mathbf{x}} + M(t)\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt}$$

$$-k(t)\,\mathbf{x} = \frac{dM(t)}{dt}\dot{\mathbf{x}} + M(t)\ddot{\mathbf{x}}$$

$$M(t)\ddot{\mathbf{x}} + \frac{dM(t)}{dt}\dot{\mathbf{x}} + k(t)\,\mathbf{x} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{x}} + \left[\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt}\right]\dot{\mathbf{x}} + \frac{k(t)}{M(t)}\,\mathbf{x} = 0 \tag{4.2}$$

Untuk gerak osilasi harmonik dalam satu dimensi, vektor perpindahan $\mathbf{x}$ dapat digantikan dengan besaran skalar x, sehingga Persamaan (4.2) dapat dituliskan sebagai

$$\ddot{x} + \left[\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt}\right]\dot{x} + \frac{k(t)}{M(t)}\,x = 0 \tag{4.3}$$

persamaan

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \omega^2\,x = 0 \tag{4.4}$$

Artinya, dengan membandingkan Persamaan (4.3) dan (4.4) dapat diperoleh hubungan

$$\alpha = -\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt}, \tag{4.5}$$

$$\omega^2 = \frac{k(t)}{M(t)} \tag{4.6}$$

Karena α dan ω^2 dalam model Daugherty *et al.*, (3) merupakan suatu parameter konstan, maka

$$\alpha = -\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt},$$

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = -\alpha\,dt$$

$$\int_{M_0}^{M(t)}\frac{dM(t)}{M(t)} = -\int_0^t \alpha\,dt$$

$$\ln\left[\frac{M(t)}{M_0}\right] = -\alpha\,t$$

$$\frac{M(t)}{M_0} = e^{-\alpha\,t}$$

$$M(t) = M_0e^{-\alpha\,t}. \tag{4.7}$$

Substitusi Persamaan (4.7) ke Persamaan (4.6) akan menghasilkan

$$k(t) = \omega^2M_0e^{-\alpha\,t} \tag{4.8}$$

Jika pada saat awal ($t = 0$) nilai konstanta pegas adalah k_0, maka dengan menggunkan Persamaan (4.8) akan diperoleh hubungan

$$k_0 = \omega^2M_0, \tag{4.9}$$

sehingga

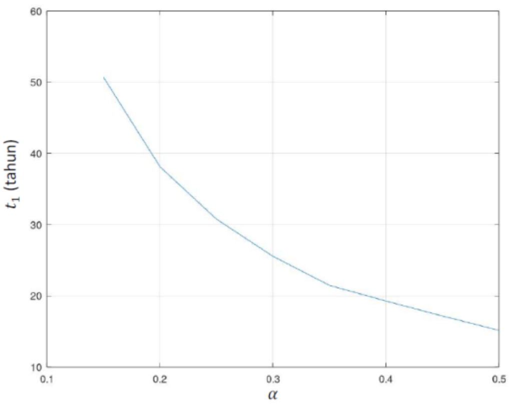
$$\omega^2 = \frac{k_0}{M_0}, \tag{4.10}$$

Jadi, dengan memilih $M(t) = M_0e^{-\alpha\,t}$ dan $k(t) = \omega^2M_0e^{-\alpha\,t}$ serta $k_0 = \omega^2M_0$, maka model osilator harmonik dengan massa berubah akan menghasilkan persamaan gerak yang sama dengan model matematis gejala gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan yang diusulkan oleh Daugherty *et al.*, (3). Ini berarti bahwa terdapat analogi antara model gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan dan gerak osilasi harmonik dengan massa berubah.

3.3. Interpretasi

Dengan menggunakan Persamaan (4.5) dapat dilihat bahwa redaman negatif terkait dengan laju pengurangan massa benda. Dalam kasus α bernilai konstan, redaman negatif ini dibangkitkan oleh massa yang berkurang secara eksponensial terhadap waktu seperti ditunjukkan dalam Persamaan (4.7). Selanjutnya untuk menjaga agar sistem tetap berosilasi dengan frekuensi sudut maka nilai konstanta pegas juga harus menurun secara eksponensial terhadap waktu sebagaimana diberikan oleh Persamaan (4.8). Dalam konteks gangguan jiwa bipolar, Daugherty *et al.*,(3) memberikan interpretasi bahwa x adalah *emotional state* (keadaam emosional seseorang), karena itu dengan menggunakan analogi mekanik, dalam skripsi ini diusulkan bahwa $M(t)$ adalah *emotional inertia* yang menggambarkan seberapa mudah keadaan emosional seseorang itu berubah sedangkan $k(t)$ dapat dipandang sebagai *emotional stiffness* yang terkait dengan elastisitas emosional seseorang. Mengingat bahwa $M(t)$ merupakan parameter internal sistem, maka faktor redaman α menjadi parameter internal yang tidak bergantung pada pengaruh luar, hal ini tampaknya relevan dengan fakta bahwa seorang penderita bipolar dapat mengalami fluktuasi emosional secara cepat dengan tiba-tiba tanpa penyebab yang jelas (bukan karena faktor eksternal).

Dalam model Daughety *et al.*, (3), parameter α menunjukkan pada usia berapa pertama kali seseorang akan mengalami gangguan jiwa bipolar. Hal ini tampak jelas dari hasil simulasi numerik pengaruh variasi α pada keadaan emosional seseorang sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 4.2



Gambar 4.2 Kebergantungan usia pertama kali terjadinya gangguan bipolar (t_1) pada variasi parameter model (α) untuk nilai $\omega = 20$

Terlihat dari Gambar 4.1, bahwa semakin besar nilai parameter α, semakin muda usia seseorang menunjukkan gejala gangguan jiwa bipolar untuk pertama kalinya. Sebagai contoh untuk parameter α = 0,20, ganguan bipolar pertama kali terjadi pada usia sekitar 38 tahun sedangkan untuk nilai α = 0,40, gangguan bipolar pertama kali terjadi di usia sekitar 19 tahun. Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (4.5) parameter α berbanding terbalik dengan *emotional inertia*. Semakin kecil *emotional inertia* semakin mudah keadaan emosi (*emotional state*) seseorang berubah dan nilai parameter α menjadi semakin kecil sehingga orang tersebut akan memiliki potensi mengalami gangguan jiwa bipolar di usia tua. Selain itu dari Persamaan (4.5) juga terlihat bahwa α sebanding dengan laju perubahan *emotional inertia*, ini menunjukkan semakin cepat emosional inertia berubah maka nilai α akan semakin besar sehingga semakin muda pula usia gejala gangguan jiwa bipolar dialami oleh orang tersebut. Meskipun analogi ini hanyalah sebuah *toy-model*, namun ia memberikan sedikit insight tentang gangguan jiwa bipolar. Lebih jauh, dengan analogi ini, model gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan yang diusulkan oleh Daugherty *et al.,* [3] dapat digeneralisasi dengan memilih α dan ω sebagai parameter yang bergantung $x, \dot{x}$ dan atau t sehingga memiliki fleksibilitas yang lebih tinggi pada saat melakukan pencocokan (*fitting*) dengan data observasi.

3.4. Batasan Parameter dan Analisis Kestabilan

Solusi dari Persamaan (4.4) dapat diperoleh dengan substitusi persamaan bantu

$$x = e^{rt}, \tag{4.11}$$

$$\dot{x} = re^{rt}, \tag{4.12}$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}, \tag{4.13}$$

ke Persamaan (4.4) yang menghasilkan

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$r^2 e^{rt} - \alpha r e^{rt} + \omega^2 e^{rt} = 0,$$

$$e^{rt}(r^2 - \alpha r + \omega^2) = 0,$$

$$r^2 - \alpha r + \omega^2 = 0 \tag{4.14}$$

yang merupakan sebuah persamaan kuadrat dalam r dan solusinya dapat diperoleh dengan menerapkan rumus abc yang sudah dikenal, yaitu

$$r_{1,2} = \frac{\alpha}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)^2}\right) \tag{4.15}$$

Karena solusi yang diinginkan adalah solusi yang berosilasi maka r_1 dan r_2 sehingga Persmaan

(4.15) memberikan batasan parameter yang boleh digunakan dalam model, yaitu

$$1-\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)^2<0$$

$$\left(1+\frac{2\omega}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2\omega}{\alpha}\right)<0$$

yang dipenuhi jika $\frac{2\omega}{\alpha}<1$ atau $\frac{2\omega}{\alpha}>1$. Mengingat bahwa α dan ω adalah parameter-parameter yang bernilai positif maka, syarat yang harus dipenuhi agar dipeorleh solusi yang berosilasi adalah

$$\frac{2\omega}{\alpha}>1 \;\Rightarrow\; \alpha<2\omega \tag{4.16}$$

Selanjutnya, untuk menganalisis titik-titik kesetimbangan dari model gangguan jiwa bipolar tanpa pengobatan dapat dilakukan dengan menuliskan kembali persamaan (4.4) dalam bentuk

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)=\alpha x_1-\omega^2 x_2 \tag{4.17}$$

$$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)=x_1 \tag{4.18}$$

dengan

$$x_1=\dot{x}$$

$$\dot{x}_1=\ddot{x}$$

$$x_2=x$$

$$\dot{x}_2=\dot{x}$$

Syarat kestabilan dari sistem persamaan differensial (4.17) dan (4.18) di atas diberikan oleh

$$f_1(x_1,x_2)=0 \tag{4.19}$$

$$f_2(x_1,x_2)=0 \tag{4.20}$$

yang akan menghasilkan persamaan terkopel berikut

$$\alpha x_1-\omega^2 x_2=0 \tag{4.21}$$

$$x_1=0 \tag{4.22}$$

Dari persamaan (4.21) dan (4.22) di atas, dengan jelas dilihat bahwa titik kestabilan dari sistem persamaan differensial (4.17) dan (4.18) adalah di titik $(x_1,x_2)=(0,0)$. Untuk mengetahui jenis dari titik kestabilan tersebut, dapat dibangun sebuah matriks Jacobian (J) melalui definisi berikut

$$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\omega^2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

Jenis titik kestabilan dapat ditentukan dari nilai Eigen matriks Jacobian. Nilai-nilai Eigen tersebut dapat dihitung dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & -\omega^2\\ 1 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{4.24}$$

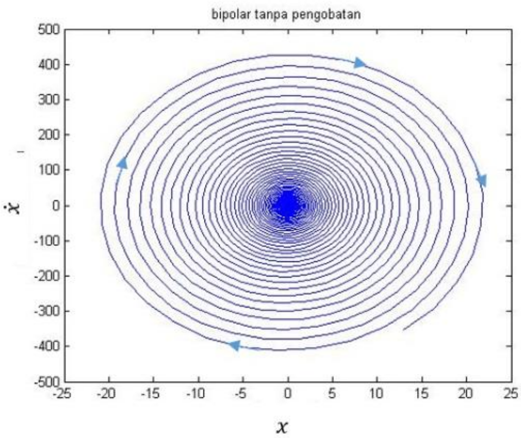
Garis sejajar pada persamaan (4.24) merupakan notasi determinan matriks sehingga persamaan tersebut akan dipenuhi oleh hubungan

$$\lambda^2-\alpha\lambda+\omega^2=0 \tag{4.25}$$

Persamaan (4.25) merupakan sebuah persamaan kuadrat yang solusinya diberikan oleh

$$\lambda_{1,2}=\frac{\alpha\pm\alpha\sqrt{1-\left(\frac{2\omega}{\alpha}\right)^2}}{2} \tag{4.25}$$

Dari syarat yang diberikan oleh Persamaan (4.16) agar sistem yang ditinjau adalah sistem yang berosilasi, yaitu $\alpha<2\omega$, maka persamaan (4.25) di atas merupakan bilangan kompleks dengan α bernilai positif sehingga titik (0,0) merupakan titik sumber tak stabil. Eksistensi sumber tak stabil dititik (0,0) akan menyebabkan diagram fase dari sistem ini berupa spiral yang mengarah keluar sebagaimana diperlihatkan oleh Gambar 4.2.



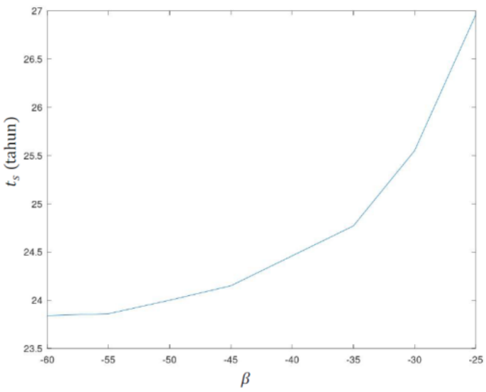
Gambar 4.3 Diagram fase model bipolar tanpa pengobatan

3.5 Analisis Kestabilan Model Gangguan Jiwa Bipolar dengan Pengobatan

Daugherty *et al*,. [3] mengajukan model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan melalui model matematis

$$\ddot{x} - \alpha\dot{x} + \omega^2 x = \beta x^2 \dot{x} \qquad (4.26)$$

Suku pada ruas kanan dari Persamaan (4.26) menunjukkan fungsi matematis dari perawatan secara keseluruhan yang mencakup kombinasi anti-depresan, penstabil *mood*, psikoterapi, dan antipsikotik atau penenang, untuk mengendalikan variasi mood pasien Bipolar. Berdasarkan hasil simulisi numerik, parameter β menggambarkan efektivitas pengobatan yang terkait dengan usia kesembuhan pasien bipolar setelah diberi pengobatan. Hal ini terlihat jelas dalam Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Kebergantungan usia kesembuhan pasien bipolar (t_s) pada parameter β

Untuk mendapatkan gambaran analogis dengan moedel mekanik, Persamaan (4.26) ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ddot{x} - (\alpha + \beta x^2)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (4.27)$$

Selanjutnya Dengan membandingkan Persamaan (4.27) dengan Persamaan (4.3) dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{1}{M(t)}\frac{dM(t)}{dt} = -(\alpha + \beta x^2) \qquad (4.28)$$

Persamaan (4.28) hanya dapat diselesaikan apabila terdapat satu lagi persamaan yang menggambarkan kebergantungan x terhadap t atau M terhadap x. Dalam skripsi ini, hal tersebut tidak dilakukan karena keterbatasan informasi mengenai hal tersebut. Akan tetapi, dari Persamaan (4.28) di atas, dapat diperoleh informasi bahwa kombinasi pengobatan akan mengubah kebergantungan *emotional inertia* terhadap waktu.

Untuk menganalisis titik kesetimbangan dari model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan dapat dilakukan dengan menuliskan kembali persamaan (4.26) dalam bentuk

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = (\alpha + \beta x_2^2)x_1 - \omega^2 x_2 \quad (4.29)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = x_1 \qquad (4.30)$$

dengan

$$x_1 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = \ddot{x}$$

$$x_2 = x$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}$$

Syarat kestabilan dari sistem persamaan differensial (4.29) dan (4.30) di atas diberikan oleh

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \qquad (4.31)$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \qquad (4.32)$$

yang akan menghasilkan persamaan terkopel berikut

$$(\alpha + \beta x_2^2)x_1 - \omega^2 x_2 = 0 \qquad (4.33)$$

$$x_1 = 0 \qquad (4.34)$$

Dari persamaan (4.33) dan (4.34) di atas, dengan jelas dilihat bahwa titik kestabilan dari sistem persamaan differensial (4.29) dan (4.30) adalah di titik $(x_1, x_2) = (0,0)$. Untuk mengetahui jenis dari titik kestabilan tersebut, dapat dibangun sebuah matriks Jacobian (J) melalui definisi berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + \beta x_2^2 & 2\beta x_1 x_2 - \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.35)$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.36)$$

Jenis titik kestabilan dari sistem di atas dapat ditentukan dari nilai Eigen matriks Jacobian. Nilai-nilai Eigen tersebut dapat dihitung dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -\omega^2 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.37)$$

Garis sejajar pada persamaan (4.38) merupakan notasi determinan matriks sehingga persamaan tersebut akan dipenuhi oleh hubungan

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \omega^2 = 0 \qquad (4.39)$$

Persamaan (4.39) merupakan sebuah persamaan kuadrat yang solusinya diberikan oleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}\sqrt{1 - (\frac{2\omega}{\alpha})^2} \qquad (4.40)$$

Karena sistem yang ditinjau adalah sistem yang berosilasi ($\alpha < 2\omega$), maka persamaan (4.40) di atas merupakan bilangan kompleks dengan α bernilai positif sehingga titik (0,0) merupakan titik sumber tak stabil.

3.6. *Limit Cycle* pada Model Gangguan Jiwa Bipolar dengan Pengobatan

Salah satu hal yang menarik dari model yang gangguan jiwa bipolar dengn pengobatan sebagaimana diberikan oleh Persamaan (4.26) adalah adanya fenomena *limit cycle* (siklus terbatas) atau *self-oscillation* (osilasi diri). Suatu sistem non-linear dikatakan memiliki *limit cycle* apabila dinamika dari variabel-variabel keadaannya mengalami pengulangan dalam selang waktu tertentu, sehingga jika digambarkan dalam diagram fase akan membentuk suatu siklus (osilasi). Pada umumnya, penentuan eksistensi *limit cycle* dari sistem suatu persaman differensial merupakan persoalan yang sulit. Hanya pada kasus-kasus tertentu saja eksistensi dari *limit cycle* itu dapat dibuktikan dengan mudah. Salah satu sistem yang dapat ditunjukkan memiliki *limit cycle* yang unik adalah sistem Lienard (9). Sistem Lienard memiliki bentuk umum yang dinyatakan oleh

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \qquad (4.41)$$

Menurut teorema Lienard, apabila memenuhi syarat-syarat berikut

1. $f(x)$ dan $g(x)$ bersifat kontinyu dan differensiabel (memiliki turunan) untuk semua x
2. $g(x)$ merupakan fungsi ganjil, yaitu memiliki sifat $g(-x) = -g(x)$
3. $g(x) > 0$ untuk $x > 0$
4. $f(x)$ merupakan fungsi genap, yaitu memiliki sifat $f(-x) = f(x)$
5. Dapat didefinisikan fungsi $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$ yang:
   (i) memiliki sebuah pembuat nol positif pada $x = a$,
   (ii) bernilai negatif dalam rentang $0 < x < a$
   (iii) bernilai positif dan monoton naik untuk $x > a$
   (iv) $F(x) \to \infty$ jika $x \to \infty$

maka Persamaan (4.41) akan memiliki sebuah *limit cycle* stabil yang mengelilingi titik asal (0,0) pada bidang fase. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan yang diberikan oleh Persamaan (4.26) memenuhi teorema Lienard, yang berarti bahwa model tersebut memiliki *limit cycle* stabil yang unik. Untuk membuktikan tersebut langkah pertama yang harus dilakukan adalah membandingkan Persamaan (4.27) dengan (4.41) yang menghasilkan hubungan

$$f(x) = -(\alpha + \beta x^2) \qquad (4.42)$$
$$g(x) = \omega^2 x \qquad (4.43)$$

Persamaan (4.42) dan (4.43) masing-masing merupakan fungsi kuadrat dan fungsi linear yang bersifat kontinyu dan dapat diturunkan untuk semua x, sehingga syarat 1 dari teorema Lienard dipenuhi. Selanjutnya $g(x) = \omega^2 x$ merupakan fungsi linear dengan $\omega^2 > 0$, hal ini berarti bahwa $g(x)$ merupakan fungsi ganjil karena

$\omega^2(-x) = -\omega^2 x$ dan $g(x) > 0$ untuk $x > 0$, artinya syarat 2 dan 3 dari teora Lienard dipenuhi. Kemudian, $f(x) = -(\alpha + \beta x^2)$ adalah fungsi kuadrat yang merupakan fungsi genap karena $-(\alpha + \beta x^2) = -(\alpha + \beta[-x]^2)$, ini berarti bahwa syarat nomor 4 dari teorema Lienard juga dipenuhi. Tinggal menunjukkan secara rinci apakah syarat nomor 5 juga dipenuhi. Berikut akan diberikan pembuktian syarat nomor 5 dari teorema Lienard.

Didefinisikan

$$F(x) = \int_0^x f(u)\, du$$

$$F(x) = \int_0^x -(\alpha + \beta u^2)\, du$$

$$F(x) = -\int_0^x (\alpha + \beta u^2)\, du$$

$$F(x) = -\left[\alpha u + \frac{\beta u^3}{3}\right]_0^x$$

$$F(x) = -\left(\alpha x + \frac{\beta x^3}{3}\right)$$

$$F(x) = -x\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right)$$

- Syarat 5 (i), agar $F(x)$ memiliki sebuah pembuat nol maka

$$x\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right) = 0$$

$$x = 0$$

atau

$$\alpha + \frac{\beta x^2}{3} = 0$$

$$\frac{\beta x^2}{3} = -\alpha$$

$$x^2 = -\frac{3\alpha}{\beta}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{3\alpha}{\beta}} \qquad (4.44)$$

Tampak dari Persamaan (4.44), agar model ini memiliki *limit cycle* maka parameter β harus bernilai negatif sehingga nilai dibawah tanda akar akan positif (memiliki akar riil). Jadi 5(i) akan terpenuhi jika $\beta < 0$, dengan pembuat nol positif adalah $x = \sqrt{-3\alpha/\beta}$.

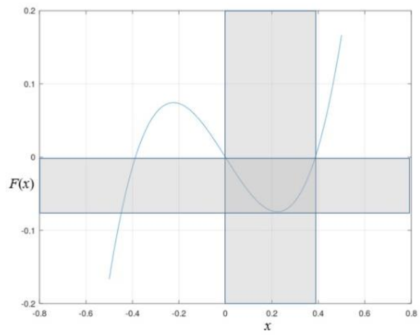
- Syarat 5(ii), akan ditunjukkan bahwa dalam rentang $0 < x < \sqrt{-3\alpha/\beta}$, fungsi $F(x) < 0$

$$0 < x < \sqrt{-3\alpha/\beta}$$
$$0 < x^2 < -3\alpha/\beta$$

karena β merupakan bilangan negatif, maka

$$0 > \beta x^2 > -3\alpha$$
$$-3\alpha < \beta x^2 < 0$$
$$-\alpha < \frac{\beta x^2}{3} < 0$$
$$\alpha - \alpha < \alpha + \frac{\beta x^2}{3} < \alpha$$
$$0 < \left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right) < \alpha$$
$$-\alpha < -\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right) < 0$$

ini berarti bahwa $-\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right)$ bernilai negatif, sehingga untuk $x > 0$, nilai $F(x) = -x\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right)$ akan bernili negatif. Dengan demikian syarat 5(ii) dipenuhi. Untuk memudahkan visualisasi, bukti ini juga dapat dilihat dari Gambar 4.4 yang merupakan grafik $F(x)$ untuk nilai $\alpha = 0{,}5$ dan $\beta = -10$, sehingga $\sqrt{-3\alpha/\beta}$ = $\sqrt{-3 \times 0{,}5/(-10)} = \sqrt{0{,}15} = 0{,}3873$ dalam rentang $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$. Tampak jelas bahwa dalam rentang $0 < x < 0{,}3783$ fungsi $F(x)$ bernilai negatif, sehingga syarat 5(ii) dalam teorema Lienard dipenuhi



Gambar 4.5 Grafik $F(x)$

- Syarat 5(iii), akan dibuktikan bahwa untuk $> \sqrt{-3\alpha/\beta}$, $F(x)$ bernilai positif.

$$x > \sqrt{-3\alpha/\beta}$$
$$x^2 > -3\alpha/\beta$$

karena β merupakan bilangan negatif, maka

$$\beta x^2 < -3\alpha$$
$$\alpha + \frac{\beta x^2}{3} < 0$$
$$-\left(\alpha + \frac{cx^2}{3}\right) > 0$$

karena x bernilai positif dan $-\left(\alpha + \frac{cx^2}{3}\right)$ juga positif maka $F(x)$ bernilai positif. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa dalam rentang ini $F(x)$ monoton naik. Fungsi $F(x)$ akan monoton naik jika kemiringannya selalu positif artinya turunan dari $F(x)$ harus bernilai positif dalam rentang tersebut

$$F(x) = -x\left(\alpha + \frac{\beta x^2}{3}\right)$$
$$F(x) = -\alpha x - \frac{\beta x^3}{3}$$
$$\frac{dF}{dx} = -\alpha - \beta x^2$$

Karena $x > \sqrt{-3\alpha/\beta}$, maka

$$x > \sqrt{-3\alpha/\beta}$$
$$x^2 > -3\alpha/\beta$$

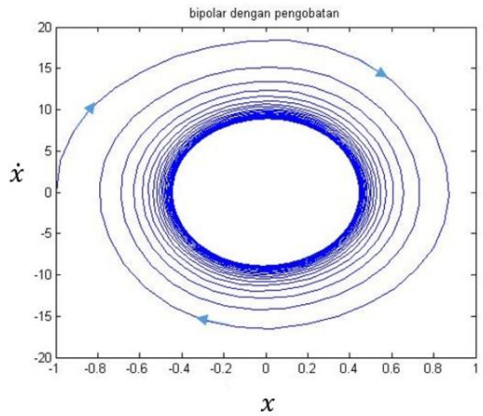
karena β merupakan bilangan negatif, maka

$$\beta x^2 < -3\alpha$$
$$-\beta x^2 > 3\alpha$$
$$-\alpha - \beta x^2 > -\alpha + 3\alpha$$
$$-\alpha - \beta x^2 > 2\alpha$$
$$\frac{dF}{dx} > 2\alpha$$

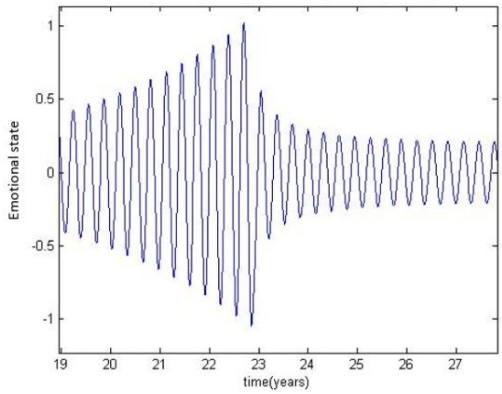
Hasil terakhir ini menunjukkan bahwa turunan dari $F(x)$ selalu positif yang artinya $F(x)$ monoton naik, sehingga syarat 5(iii) terpenuhi. Hal ini juga dapat dilihat secara grafik, sebagaimana ditunjukkan dalam Gambar 4.5

- Syarat 5(iv) otomatis terpenuhi, karena $F(x)$ monoton naik, hal ini terlihat jelas dari Gambar 4.5.

Karena semua syarat dari teorema Lienard terpenuhi maka dapat disimpulkan bahwa model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan yang diajukan oleh Daugherty *et al* (3) memiliki sebuah *limit cycle* yang unik. Eksistensi limit cycle ini menyebabkan orbit pada bidang fase akan menuju ke suatu lingkaran tertentu seperti ditunjukkan dalam Gambar 4.6. Dalam kaitannya dengan model gangguan jiwa bipolar, eksistensi limit cycle diinterpretasikan sebagai keberhasilan proses pengobatan, karena keadaan emosional penderita berosilasi dalam bataas yang ditentukan seperti tampak dalam Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Diagram fase model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan



Gambar 4.8 Keadaan emosional setelah dilakukan pengobatan

4. Kesimpulan

Model gangguan bipolar tanpa pengobatan dan dengan pengobatan sistem yang ditinjau adalah sistem yang berosilasi yaitu $\alpha < 2\omega$, dengan α bernilai positif sehingga titik (0,0) merupakan titik sumber tak stabil yang menyebabkan diagram fase dari sistem ini berupa spiral yang mengarah keluar. Pada model gangguan jiwa bipolar dengan pengobatan yang diajukan oleh Daugherty *et al* (2003) memiliki sebuah *limit cycle* yang unik. Eksistensi *limit cycle* ini menyebabkan orbit pada bidang fase akan menuju ke suatu lingkaran tertentu. *Limit cycle* inilah diinterpretasikan sebagai keberhasilan proses pengobatan, karena keadaan emosional penderita berosilasi dalam batas yang ditentukan.

Daftar Pustaka

[1] Barbara, D. I., & Goldstain, S. *Attention Deficit Disorder.* Amerika Serikat: Main street books, 1993.

[2] Maslim, R. *Diagnosis Gangguan Jiwa, Rujukan Ringkas PPDGJ III.* Jakarta: Bagian Ilmu Kedokteran Jiwa FK Unika Atma Jaya, 2003.

[3] Daugherty, D., Urea, J., Roque, T., & Wirkus, S. *Models Of Negatively Damped Harmonic Oscillators: The Case Bipolar Disoeder*. Biometrics Unit Technical Reports: Number BU-1613-M, 2003.

[4] Daugherty, D., Urea, J., Urrea T. R., Roque, J. U., Troyer, J., Wirkus, S., & Porter, M. A. *Mathematical Models of Bipolar Disorder.* Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14: 2897-2908, 2009.

[5] Snyder, J. *Lienard Oscillator Modeling of Bipolar Disorder*. Georgia: Institut Teknologi Georgia, 2003.

[6] Nana, L. *Bifurcation Analysis of Parametrically Excited Bipolar Disorder Model*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14: 351–360, 2009.

[7] Frank, T. D. *A Limit Cycle Oscillator Model for Cycling Mood Variations of Bipolar Disorder Patients Derived from Cellular Biochemical Reaction Equations*. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18: 2107-2119, 2013.

[8] Hellevik, K., & Gudmestad, O. T. *Limit Cycle Oscillations at Resonances for Systems Subjected to Nonlinear Damping or External Forces*. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 276: 012020, 2017.

[9] Strogatz, Steven H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Canada: Perseus Books Publishing, 1994.