



DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

SECTION AUTOMATIQUE

Rapport Technique EP73-R-1  
Classification: Library of Congress no.....

ESPACES DE RESOLUTION HILBERTIENNE

ET THEORIE DE LA STABILITE

par  
Dr. Romano M. DeSantis  
professeur adjoint

22 février 1973

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ  
UP4  
73R01  
FRE  
ex.2

C.P. 501  
Snowdon  
Montréal 248





DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

SECTION AUTOMATIQUE

Rapport Technique EP73-R-1  
Classification: Library of Congress no.....

ESPACES DE RESOLUTION HILBERTIENNE

ET THEORIE DE LA STABILITE

par  
Dr. Romano M. DeSantis  
professeur adjoint

22 février 1973

Ecole Polytechnique de Montréal

CA2PQ  
UP4  
73R01  
FRE  
ex.2

C.P. 501  
Snowdon  
Montréal 248

ESPACES DE RESOLUTION HILBERTIENNE ET THEORIE DE LA STABILITE

par

Dr. Romano M. DeSantis  
Professeur adjoint,

71805

Département de Génie Electrique  
Section d' Automatique  
Ecole Polytechnique  
Montréal, Québec

Janvier 1973

## ESPACES DE RESOLUTION HILBERTIENNE ET THEORIE DE LA STABILITE (+)

Romano M. DeSantis \*

## SOMMAIRE

Ce rapport donne une présentation unifiée et auto-contenue d'un certain nombre de résultats qui sont à la base de la plupart des méthodes et des techniques couramment appliquées dans l'étude de la stabilité des systèmes nonlinéaires à chaîne fermée. Cette présentation utilise la structure mathématique des espaces de Résolution Hilbertienne, et contient, entre autre, les théorèmes fondamentaux concernant la stabilité de systèmes respectivement contractifs, fortement causals, et fortement positifs. Comme exemples d'application, ces théorèmes sont utilisés pour dériver le critère du cercle et la méthode de la Ligne de Popov.

---

\* Ecole Polytechnique, Montréal, Québec

(+) Cette recherche a été en partie subventionnée par le Conseil National de la Recherche du Canada, Octroi A-8244, et par le U.S.A. Office of Scientific Research, Grant No. 732427.



## ESPACES DE RESOLUTION HILBERTIENNE ET THEORIE DE LA STABILITE

### Table des Matières

#### 0. INTRODUCTION

#### 1. NOTIONS PRELIMINAIRES

##### 1.1 Espaces de Résolution Hilbertienne

##### 1.2 Causalité, Passivité, et Faible Additivité

#### 2. STRUCTURE DES SYSTEMES BOUCLES PAR RAPPORT A LA STABILITE

##### 2.1 Notion Axiomatique de Stabilité

##### 2.2 Systèmes Equivalents du Point de Vue de la Stabilité

#### 3. STABILITE, CONTRACTION, CAUSALITE ET PASSIVITE

#### 4. APPLICATIONS: METHODES DU CERCLE ET DE LA LIGNE DE POPOV

##### 4.1 Méthode du Cercle

##### 4.2 Méthode de la Ligne de Popov

#### REFERENCES

## 0. INTRODUCTION

Ce rapport commence avec l'introduction des concepts de contraction, causalité, causalité forte, passivité, passivité forte, et additivité faible, (chapitre 1). Ensuite, il présente quatre théorèmes mineurs, c'est-à-dire le théorème de l'équivalence, le théorème des multiplicateurs, le théorème du déplacement des pôles et le théorème du système perturbé (chapitre 2). Enfin, il familiarise le lecteur avec trois théorèmes fondamentaux appelés respectivement, théorème de la transformation contractive, théorème de la transformation fortement causale, et théorème de la transformation fortement passive, (chapitre 3). Pour rendre le développement unifié, auto-contenu, et simple autant que possible, nous adoptons la structure mathématique des espaces des résolution Hilbertienne telle que récemment proposée et utilisée par Porter [Po.2], Saeks[Sa.1], et l'auteur [Ds.1].

L'objectif principal est de fournir au lecteur, (étudiant gradué, instructeur, chercheur, ou ingénieur pratiquant), les ingrédients essentiels qui sont à la base de la théorie moderne de la stabilité telle que développée par Popov, [Pv.1], Sandberg [Sa.1], et Zames, [Za.1], et reprise plus récemment par Damborg, [Da.1], Holtzman, [Ho.1], Saeks[Sa.2], Willems, [Wi.1], et un nombre d'autres auteurs. En effet, une lecture attentive de tous ces travaux montrerait que les principaux résultats associés avec eux ont été obtenus en employant, d'une façon déterminante même si parfois plus ou moins directe, nos trois théorèmes fondamentaux. En particulier, une utilisation conjointe de ces théorèmes et des quatre théorèmes mineurs permet de dériver, sur le champ, la plupart de



ces résultats de la théorie de la stabilité qui intéressent l'ingénieur des systèmes. C'est le cas, par exemple, des résultats constituant la méthode de la ligne de Popov, et le critère du Cercle (chapitre 4).

## 1. NOTIONS PRELIMINAIRES

### 1.1 Espaces de Résolution Hilbertienne.

Nous supposons que le lecteur ait une certaine familiarité avec les espaces métriques, linéaires, normés, Banach, pré-Hilbertiens et Hilbertiens. Les notions d'applications linéaires et nonlinéaires dans ces espaces seront aussi supposées être connues (voir [Di.2], [Po.1]).

Si  $x$  est un élément d'un espace de Banach  $B$ , la norme de  $x$  est dénotée par le symbole  $|x|$ . Si  $T$  est une application définie sur  $B$ , alors  $T$  est appelée bornée si  $|T| = \sup_{0 \neq x \in B} \frac{|Tx|}{|x|} < \infty$ . Le nombre  $|T|$  est appelé la norme de  $T$ .  $T$  est continue si pour tout  $y \in B$  et tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que  $|x - y| \leq \delta$  implique  $|Tx - Ty| \leq \epsilon$ .  $T$  est continue dans le sens de Lipschitz si

$$\|T\| = \sup_{0 \neq x-y \in B} \frac{|Tx-Ty|}{|x-y|} < \infty .$$

Le nombre  $\|T\|$  prend le nom de norme de Lipschitz. Observez que quand  $T$  est linéaire, alors le concept d'application bornée, continue, et continue dans le sens de Lipschitz sont tous équivalents.

Nous procédons à la présentation de la structure des Espaces de Résolution Hilbertienne [Ds.1], [Pa.2], [Sa.1]. Pour ce faire, soient  $H$  un espace d'Hilbert, et  $\nu$  un ensemble ordonné avec élément minimum,  $t_0$ , et élément maximum,  $t_\infty$ . Une famille de projections orthogonales sur  $H$ ,  $\mathbb{R} = \{P^t\}$ ,  $t \in \nu$ , est une résolution de l'identité si  $\mathbb{R}$  jouit des deux propriétés suivantes :



Ri)  $P_0^t H = 0$ ,  $P_\infty^t H = H$ , et  $P^k H \geq P^e H$  pour  $k > e$ ;

Rii) si  $\{P^i\}$  est une suite de projections orthogonales appartenant à  $\mathbb{R}$  et s'il existe une projection orthogonale  $P$  telle que  $\lim \{P^i x\} = Px$ , pour tout  $x \in H$ , alors  $P \in \mathbb{R}$ .

Un espace Hilbertien,  $H$ , muni d'une résolution de l'identité,  $\mathbb{R} = \{P^t\}$ , est appelé un espace de Résolution Hilbertienne (en bref: ERH) et est dénoté par le symbole  $[H, P^t]$ .

Exemple 1. Soit  $H$  constitué par  $L_2[0, \infty)$ ,  $(L_2(-\infty, +\infty))$ ,

l'espace Hilbertien des fonctions réelles définies sur l'intervalle  $[0, \infty)$ ,  $((-\infty, +\infty))$ , et telles que leur carré est intégrable dans le sens de Lebesgue. Une famille de projections orthogonales

$\mathbb{R} = \{P^t\}$ ,  $t \in [0, \infty)$ , ( $t \in [-\infty, +\infty)$ ), peut être définie comme suit:

si  $x, y \in L_2[0, \infty)$ ,  $(L_2(-\infty, +\infty))$ , et  $y = P^t x$ , alors  $y(s) = x(s)$  pour  $s \in [0, t)$ , ( $s \in (-\infty, +t)$ ), et  $y(s) = 0$  pour  $s \in [t, +\infty)$ . Si  $t = \infty$  alors  $P^\infty x = x$ , (et si  $t = -\infty$ , alors  $P^{-\infty} x = 0$ ). Cette famille

$\mathbb{R} = \{P^t\}$  est une résolution de l'identité parce qu'elle jouit des propriétés Ri) et Rii). Dans la suite nous pourrons alors parler des espaces de résolution Hilbertienne  $[L_2[0, \infty), P^t]$ , et  $[L_2(-\infty, +\infty), P^t]$ .

Une autre notion fondamentale dont nous aurons besoin dans ce développement est la notion d'intégrale dans un espace de résolution Hilbertienne. Pour définir cette intégrale, soit  $T$  une application transformant  $[H, P^t]$  dans  $[H, P^t]$ . Considérons les opérations suivantes:

i) Choix d'une partition  $\Omega$  de  $\nu$ ,  $\Omega = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ , où  
 $\xi_0 = t_0$ ,  $\xi_n = t_\infty$ ,  $\{\xi_i\}$  est un ensemble fini d'éléments de  $\nu$   
 tel que  $\xi_j < \xi_{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ .

ii) Considération de la somme partielle

$$I^\Omega = \sum_{k=1}^n \Delta P(\xi_k) TP^{s_k}$$

où  $\Delta P(\xi_k) = P^{\xi_k} - P^{\xi_{k-1}}$  et  $s_k$  est un élément de  $\nu$  tel que

$$\xi_{k-1} \leq s_k \leq \xi_k.$$

iii) Définition d'un ordre partiel sur l'ensemble de toutes les  
 partitions  $\Omega$  de  $\nu$ :  $\Omega_1 \geq \Omega_2$  si tout élément de  $\Omega_2$  est contenu  
 dans  $\Omega_1$ .

iv) Supposition de l'existence d'une application  $\mathbb{T}$  telle que en correspondance  
 à tout  $\varepsilon > 0$  il y a une partition  $\Omega_\varepsilon$  de  $\nu$  telle que la norme de  
 l'application  $\mathbb{T} - I^\Omega$  est plus petite que  $\varepsilon$  pour tout  $\Omega \geq \Omega_\varepsilon$ .

L'opérateur  $\mathbb{T}$  obtenu en employant les opérations i-iv) est appelé  
l'intégrale de T et est dénoté par  $\mathbb{T} = \int dPTP^S$ .



Il nous sera utile de considérer des légères variations au concept d'intégrale ci-dessus présenté. A ce propos, les notations  $\int dP^S$  et  $\int dP^{TS}$  seront utilisées pour indiquer les intégrales qui sont obtenues en choisissant  $s_k$ , dans l'opération ii), respectivement comme suit:  $s_k = \xi_{k-1}$ , ou  $s_k = \xi_k$ . De façon similaire l'opérateur  $\int dP(s)dP$  dénotera l'intégrale obtenue en remplaçant (1), dans l'opération ii), par l'équation suivante:

$$I^\Omega = \sum_{k=1}^n \Delta P(\xi_k) T_{\Delta P}(\xi_k).$$

Exemple 2. En reprenant  $[L_2[0, \infty), P^t]$ , l'espace de Résolution Hilbertienne décrit dans l'Exemple 1, considérons l'application  $T: [L_2[0, \infty), P^t] \rightarrow [L_2[0, \infty), P^t]$  définie comme suit: si  $y = Tx$ , alors

$$y(t) = g(t)x(t) + \int_0^\infty K(t,s) x(s) ds,$$

où:  $g \in L_\infty[0, \infty)$ , et  $K(t,s)$  est une fonction telle que  $\int_0^\infty \int_0^\infty K(t,s)^2 dt ds < \infty$ .

Il n'est pas difficile de reconnaître que les applications  $\int dPTdP$ ,  $\int dP^{TS}$ , et  $\int dP^{TPS}$  sont bien définies. En particulier ces applications ont la description suivante:

$$(\int dPTdPx)(t) = g(t)x(t)$$

$$(\int dP^{TS}x)(t) = \int_0^t K(t,s)x(s) ds$$

$$(\int dP^{TPS}x)(t) = g(t)x(t) + \int_0^t K(t,s)x(s) ds.$$

## 1.2 Causalité, Passivité et Faible Additivité.

Soit  $T$  une application bornée définie sur l'espace de résolution Hilbertienne  $[H, P^t]$ .  $T$  est appelée causale si pour tout  $y_1, y_2 \in H$  tels que  $P^t y_1 = P^t y_2$ , on a  $P^t T y_1 = P^t T y_2$ , (tout  $t \in \nu$ );  $T$  est anticausale si pour tout  $y_1, y_2 \in H$ , tels que  $(I - P^t) y_1 = (I - P^t) y_2$ , on a  $(I - P^t) T y_1 = (I - P^t) T y_2$ ;  $T$  est sans-mémoire si  $T$  est simultanément causale et anticausale;  $T$  est fortement causale si  $T$  est causale et  $\int dP T dP = 0$ . Finalement,  $T$  est dite e-fortement causale si pour tout  $t \in \nu$ ,  $t \neq t_\infty$ , on a que  $P^t T$  est fortement causale.

Assertion 1.  $T$  est causale si et seulement si  $T = \int dP T P^s$ , ou de façon équivalente, si et seulement si  $P^t T = P^t T P^t$  pour tout  $t \in \nu$ .

Assertion 2.  $T$  est sans mémoire si et seulement si  $T = \int dP T dP = 0$ .

Assertion 3. ([Ds.1], p.106). L'espace des applications bornées et causales (fortement causales, e-fortement causales, sans mémoire) est un algèbre de Banach.

Assertion 4. ([Ds.1], p.97) Si  $T'$  est bornée et fortement causale (e-fortement causale), et  $T''$  est bornée et causale, alors les applications  $T' T''$  et  $T'' T'$  sont elles aussi fortement causales (e-fortement causales).



Exemple 1. Soient les applications T et N définies sur  $[L_2[0, \infty), p^t]$  et décrites comme suit:

- si  $y = Nx$ , alors  $y(t) = f(x(t), t)$ , où  $f(\cdot, t)$  est une fonction réelle telle que  $f(0, t) = 0$ , et il existe un couple de nombre réel  $\alpha, \beta, \beta > \alpha, \beta > 0$ , tel que

$$\alpha \leq \frac{f(\sigma_2, t) - f(\sigma_1, t)}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq \beta ;$$

- si  $y = Tx$ , alors  $y(t) = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau$ , où  $g(\tau)$  est une fonction réelle telle que  $\int_0^\infty |g(\tau)|dt < \infty$ .

En vertu des définitions de causalité ci-dessus données, on a que T et N sont causales. En particulier, N est sans mémoire et T est e-fortement causale. De plus, de l'Assertion 3 on a que T+N, TN, et NT sont, elles aussi, causales, et l'Assertion 4 implique que les applications TN et NT sont e-fortement causales.

Une application T est appelée passive si  $\langle x, Tx \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in H$ : T est fortement passive s'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que  $\langle x, Tx \rangle \geq \epsilon |x|^2$ . T est passive dans le sens incrémental si  $\langle x-y, T(x-y) \rangle \geq 0$  pour tout  $x, y \in H$ .

Exemple 2. L'application T définie dans l'Exemple 1 est passive (e-fortement positive) si, et seulement si,  $G(j\omega)$ , la transformée de Fourier de la fonction  $g(\tau)$  est telle que la partie réelle de  $G(j\omega)(G(j\omega) - \epsilon)$ , est positive pour toute valeur de  $\omega$ . Cette condition est équivalente à la condition géométrique que tous les points du diagramme de Nyquist associés avec la réponse en fréquence de T,  $(T - \epsilon I)$ , sont localisés à la droite de l'axe des imaginaires. L'application N est passive (fortement passive) si et seulement si la fonction  $f(\cdot, t), (f(\cdot, t) - \epsilon)$ , est telle que  $f(\sigma, t) \sigma \geq 0$ , pour tout  $t \in [0, \infty)$  et tout nombre réel  $\sigma$ . Cette condition est équivalente à la condition géométrique que pour tout  $t \in [0, \infty)$ , le graphe de  $f(\cdot, t), (f(\cdot, t) - \epsilon)$ , soit contenu dans le premier et le troisième quadrants du plan cartésien.

Assertion 5. Si  $T'$  et  $T''$  sont passives (fortement passives) pour tout  $\alpha \geq 0$  on a que l'application  $T' + \alpha T''$  est passive (fortement passive).

Assertion 6. Si  $T$  est passive (fortement passive), et  $I + T$  est invertible, alors  $T(I + T)^{-1}$  est passive (fortement passive).

Démonstration. Si  $T$  est passive, alors  $(I + T)$  est aussi passive (Assertion 5), et pour tout  $x \in H$ , on a

$$\langle T(I + T)^{-1}x, x \rangle = \langle Ty, y + Ty \rangle \geq 0,$$

$$\text{où } y = (I + T)^{-1}x.$$

Assertion 7. Si  $T$  est passive (fortement passive), alors pour tout  $x \in H$ ,  $t \in \mathcal{V}$ , on a  $\langle P^t x, TP^t x \rangle \geq 0$  ( $\geq \epsilon |P^t x|^2$ ).

Démonstration. Si  $T$  est une application passive et causale, alors pour tout  $x \in H$ , et tout  $t \in \mathcal{V}$ , on a:

$$\langle P^t T x, P^t x \rangle = \langle P^t T P^t x, P^t x \rangle = \langle TP^t x, P^t x \rangle \geq 0.$$

L'application  $T$  est faiblement additive si pour tout  $t \in \mathcal{V}$  et  $x \in H$ ,  $T$  jouit de la propriété suivante:  $Tx = TP^t x + T(I - P^t)x$

Assertion 8. Les applications suivantes sont faiblement additives : toute application linéaire; toute combinaison linéaire d'applications faiblement additives; toute composition  $T'T''$ , où  $T''$  est faiblement additive et  $T'$  est linéaire; toute composition  $T''T'$  où  $T'$  est sans mémoire et  $T''$  est faiblement additive.

Assertion 9. Si  $T$  est faiblement additive et causale, alors pour tout couple  $P^1, P^2 \in \{P^t\}$  on a que

$$(P^2 - P^1) T = (P^2 - P^1) TP^1 + (P^2 - P^1) T (P^2 - P^1).$$



Démonstration. Puisque  $T$  est simultanément causale et faiblement additive, on a

$$(P^2 - P^1) T = (P^2 - P^1) TP^2$$

et

$$T = TP^1 + T(I - P^1).$$

En observant que  $P^2 P^1 = P^1$ , et  $P^2(I - P^1) = P^2 - P^1$ , il suit

$$(P^2 - P^1) T = (P^2 - P^1) TP^1 + (P^2 - P^1) T (P^2 - P^1).$$

Exemple 3. Les applications définies dans l'exemple 1 sont faiblement additives. De plus, en utilisant l'Assertion 8, on a que les applications  $TN$  et  $T + N$  sont, elles aussi, faiblement additives.

### Exercices

] Démontrez les Assertions 1 et 2 ([Ds.1], p. 94-95).

Démontrez que si  $F_1$  est passive et  $F_2$  est fortement passive, et si  $I + F_1 F_2$  est inversible, alors

$(I - F_1 F_2)^{-1}$  est fortement passive ([Wi.2], p. 39).

## 2. STRUCTURE DES SYSTEMES BOUCLES PAR RAPPORT A LA STABILITE

### 2.1 Notion Axiomatique de Stabilité.

Etant donnée une application bornée, continue et causale  $K: [H, P^t] \rightarrow [H, P^t]$ , nous dirons que le système bouclé représenté dans la Figure 1 est stable dans le sens entrée bornée - sortie bornée si ce système jouit de la propriété que, en correspondance à toute entrée  $y \in H$ , la sortie  $z$  est un élément bien défini de  $H$ , et l'application entrée - sortie est causale, bornée, et continue.

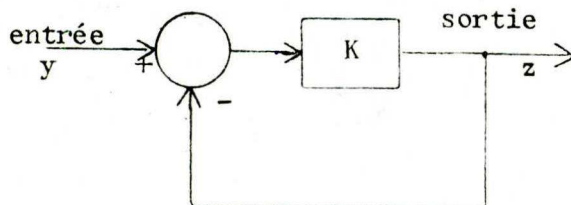


Figure 1: Système bouclé de base

Exemple 1. [W1.2]. Soit le système  $K: [L_2[0, \infty), P^t] \rightarrow [L_2[0, \infty), P^t]$  défini comme suit: si,  $x, y \in L_2[0, \infty)$  et  $x = Ky$ ,

alors

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau)y(\tau)d\tau + r \int_0^t y(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\infty} h_i y(t - t_i), \quad t \in [0, \infty)$$

où:  $r \geq 0$ , et  $\int_0^{\infty} |g(\tau)|d\tau < \infty$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} |h_i| < \infty$ .

Le système à chaîne fermée représenté dans la Figure 1 est un système stable dans le sens entrée bornée - sortie bornée si le diagramme de Nyquist associé avec  $K$  n'encercle pas le point  $-1$ .

Pendant que l'exemple 1 nous assure au moins en partie qu'une grande classe de systèmes considérés stables dans le sens traditionnel sont aussi stables selon le sens défini ci-dessus, le prochain exemple illustre l'importance de l'inclusion de la contrainte de causalité dans notre définition axiomatique. En effet si cette contrainte n'était pas incluse, nous pourrions être confrontés par des situations embarrassantes où des systèmes instables dans le sens traditionnel se trouveraient à être considérés stables dans le sens axiomatique.

Exemple 2. Considérons l'application  $K: [L_2(-\infty, +\infty), P^t] \rightarrow [L_2(-\infty, +\infty), P^t]$  définie comme suit: si  $x, y \in L_2(-\infty, +\infty)$  et  $x = Ky$ , alors  $x(t) = \dot{y}(t-1) - y(t)$ . Clairement  $K$  est bornée, causale, et continue.

Le système bouclé associé avec  $K$  est instable dans le sens traditionnel. En même temps, du point de vue mathématique, ce système peut être décrit par l'application bornée et continue  $S = K(I + K)^{-1}$ . En particulier  $S$  est telle que si  $z = Sy$ , alors  $z(t) = y(t) - y(t+1)$ . Puisque  $S$  n'est pas causale nous pouvons conclure que le système en considération est aussi instable dans le sens axiomatique. Notez toutefois que sans l'inclusion de la contrainte de causalité dans notre définition de stabilité, nous aurions un système stable du point de vue axiomatique.

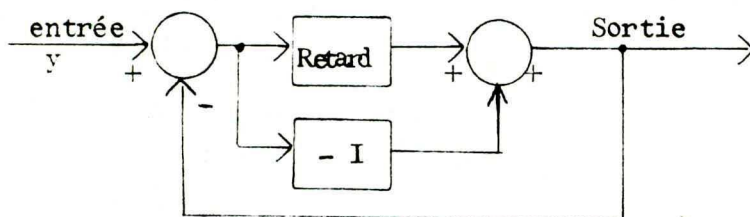


Figure 2: Le système considéré dans l'exemple 2.



Assertion 1. Le système bouclé représenté dans la Figure 1 est stable si et seulement si l'application  $(I + K)$  est invertible et  $(I + K)^{-1}$  est bornée causale et continue.

Démonstration. "Si". Si  $(I + K)$  est invertible et  $(I + K)^{-1}$  est bornée, causale et continue, alors en correspondance à toute entrée  $y \in H$  le système bouclé de la Figure 1 admet une sortie bien définie  $x \in H$  et déterminée par l'expression  $x = K(I + K)^{-1}y$ . Puisque l'application  $K(I + K)^{-1}$  est, elle aussi, causale et continue, on peut conclure que le système est stable. "Seulement si". Si le système est stable alors on a que en correspondance à tout  $y \in H$  il existe une sortie bien définie  $x \in H$  telle que  $x = Fy$  où  $F$  est une application causale, bornée et continue. D'ici il suit que pour tout  $y \in H$  il existe un élément  $z \in H$  tel que  $z = y - Fy$ , où  $(I - F)$  est encore bornée causale et continue. Puisque  $z$  est tel que  $z + Kz = y$ , nous pouvons conclure que  $(I + K)$  est invertible avec  $(I + K)^{-1}$  bornée causale et continue.

## 2.2 Systèmes Equivalents du Point de vue de la Stabilité

Les résultats qui suivent sont extrêmement utiles pour ramener l'étude de la stabilité d'une grande classe de systèmes de commande à l'étude de la stabilité de systèmes avec une structure particulièrement simple. En particulier le premier théorème montre, par exemple, que les développements de Popov [Pv.1] et Zames [Za.1], adressés à l'analyse d'un système à chaîne ouverte constitué par un système linéaire précédé par une nonlinéarité sans mémoire, sont automatiquement valables pour un système où la nonlinéarité suit le système linéaire.

Théorème 1. (Equivalence) Si  $T$  et  $N$  sont deux applications bornées, causales et continues, et si  $T$  est linéaire, alors la stabilité du système représenté dans la Figure 1a) implique la stabilité du système représenté dans la Figure 1b).

Démonstration. Il suffira de montrer que la stabilité du système de la Figure 1a) implique la stabilité du système de la Figure 1b). Pour ce faire notez que, en vertu de l'Assertion 1.1, si le système de la Figure 1a) est stable, alors l'application  $(I + TN)$  est invertible et  $(I + TN)^{-1}$  est bornée, causale et continue.

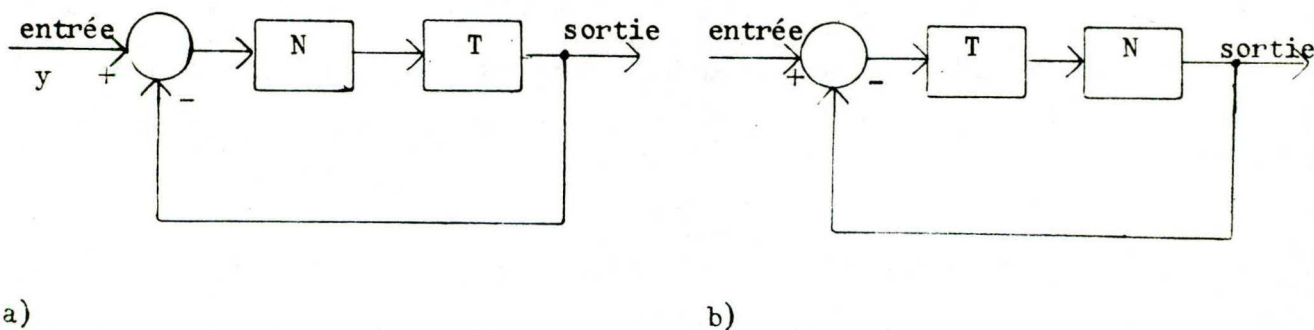


Figure 1: Du point de vue de la stabilité ces deux systèmes sont équivalents.

Il suit que l'application  $N(I + TN)^{-1}T$ , qui décrit le comportement entrée-sortie du système de la Figure 2, est, elle aussi, bornée, causale et continue. Par conséquent ce dernier système est stable. Nous pouvons alors compléter notre démonstration en vérifiant que les systèmes des Figures 1b) et 2) sont équivalents. En effet pour toute entrée  $y$  du système de la Figure 1b), la sortie  $x$  est déterminée par les équations suivantes :

$$y - x = y - NT(y - x) \quad (1)$$

$$x = NT(y - x). \quad (2)$$

En appliquant T aux deux membres de (1) on obtient

$$T(y - x) = Ty - TNT(y - x)$$

c'est-à-dire

$$T(y - x) = (I + TN)^{-1}Ty,$$

et en utilisant cette dernière équation dans (2) on trouve

$$x = N(I + TN)^{-1}Ty.$$

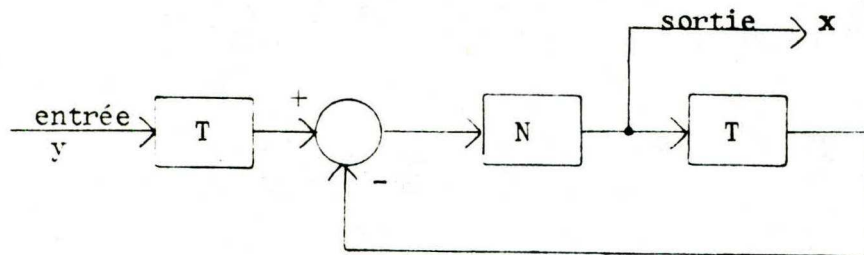


Figure 2: Si T est linéaire ce système est équivalent au système de la Figure 1a)

Le prochain théorème est à la base de la "Technique des multiplificateurs", et, sous conditions appropriées, est souvent utilisé pour établir la stabilité d'un certain système bouclé en termes du système à chaîne ouverte convenablement modifié.



Théorème 2. (Théorème des Multiplicateurs). Si  $N$  et  $F$  sont deux applications bornées causales et continues, et  $F$  est linéaire et invertible avec  $F^{-1}$  bornée causale et continue, alors du point de vue stabilité les systèmes représentés dans la Figure 4 sont équivalents.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'Assertion 1,

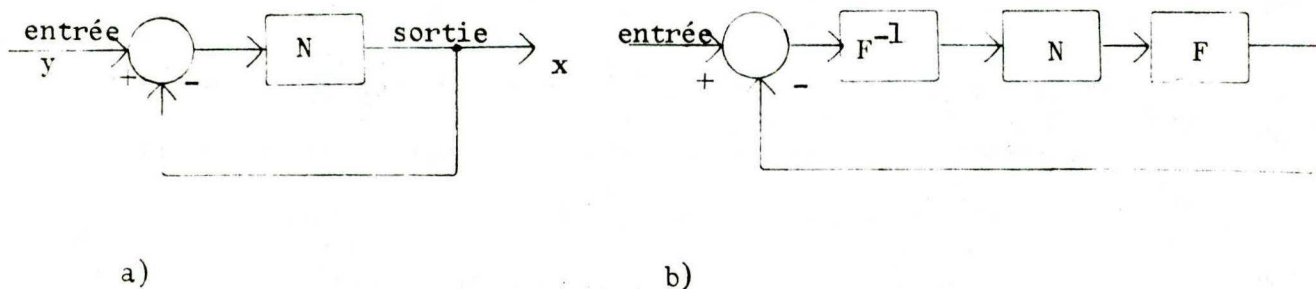


Figure 3. Du point de vue stabilité ces deux systèmes sont équivalents.

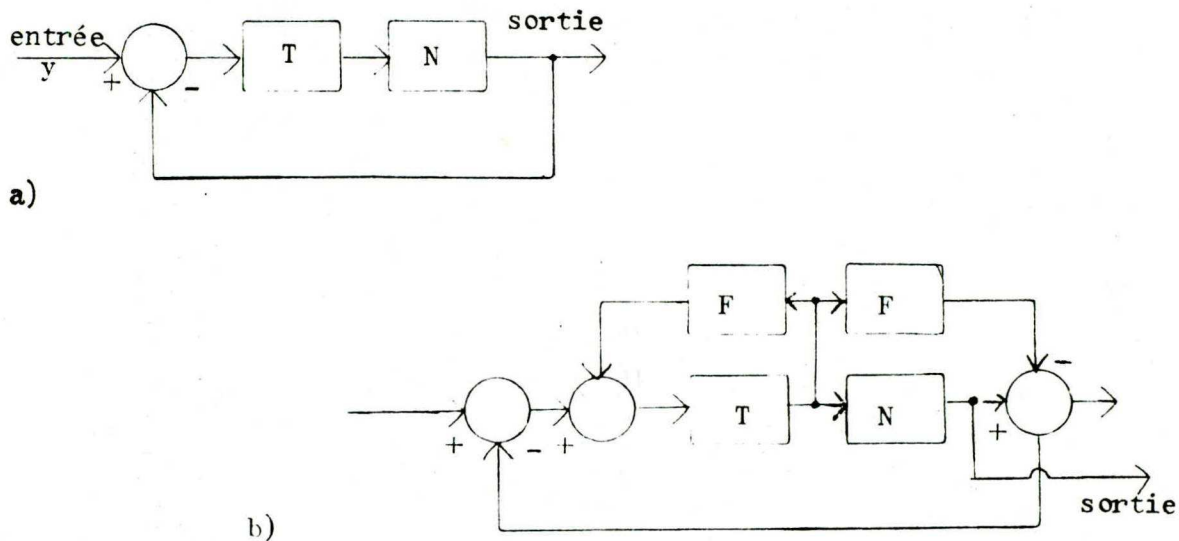


Figure 4. Du point de vue de la stabilité ces deux systèmes sont équivalents.

Le théorème 3 est à la base de "la technique du déplacement des pôles" et a un champ d'application similaire à celui du théorème précédent.

Théorème 3. (Théorème du Déplacement des pôles). Du point de vue de la stabilité les deux systèmes bouclés représentés dans la Figure 3 sont équivalents.

Démonstration. La démonstration est une conséquence immédiate du fait que pour toute entrée,  $y \in H$ , les sorties des systèmes de la Figure 3 sont toutes les deux déterminées par l'équation

$$x = N(y - Tx + Fx - Fx).$$

Théorème 4. (Stabilité du Système Perturbé). Du point de vue de la stabilité, les deux systèmes représentés dans la Figure 5 sont équivalents.

Démonstration. Triviale.

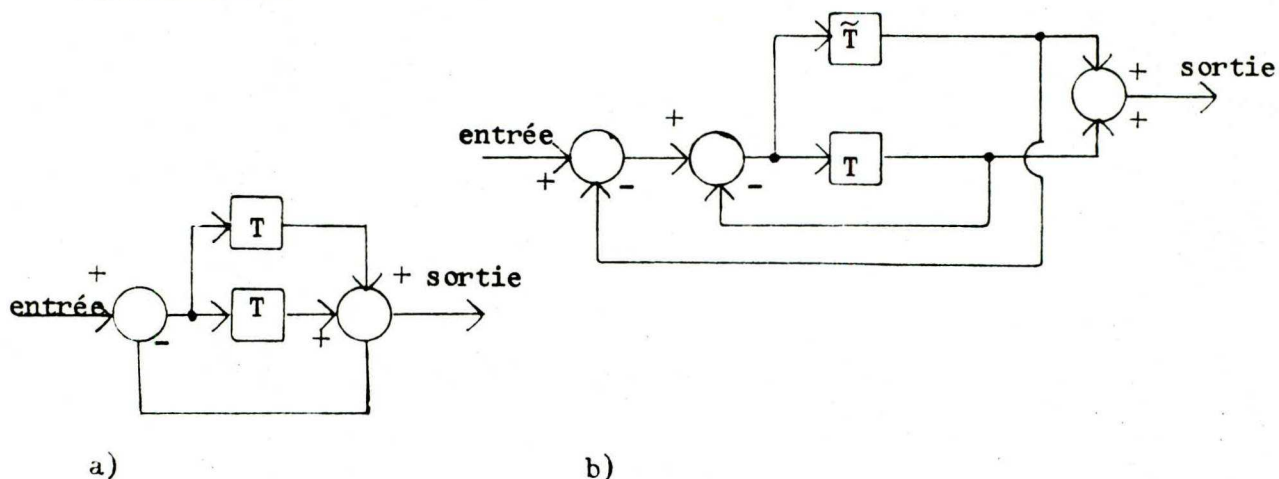


Figure 5. Du point de vue de la stabilité ces deux systèmes sont équivalents

### 3. STABILITE, CONTRACTION, CAUSALITE, ET PASSIVITE

Dans ce qui suit nous énonçons et démontrons le théorème de la transformation contractive, le théorème de la transformation fortement causale, et le théorème de la transformation passive. Dans le contexte de la théorie de la stabilité, l'importance de ces résultats est similaire à celle que procurent le théorème des Multiplicateurs de Lagrange et le théorème de Banach dans le contexte de la théorie de la commande optimale. En particulier, dans la même mesure où ces derniers théorèmes sont à la base de la plupart des techniques de la commande optimale, aussi presque toutes les méthodes importantes de la théorie de la stabilité sont fondées sur le théorème de la transformation contractive, et le théorème de la transformation fortement causale.

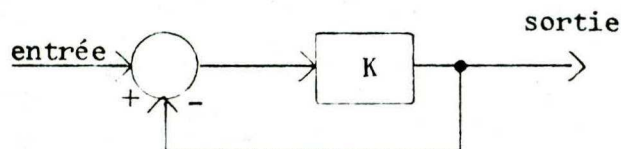


Figure 1: Système bouclé de base

Théorème 1. (Théorème de la Transformation Contractive) Si l'application  $K$  est bornée, causale et continue dans le sens de Lipschitz, et  $\|K\| = \gamma < 1$ , alors le système de la Figure 1 est stable.

Démonstration. En vertu de l'Assertion 2.1.1, il sera suffisant de montrer que l'application  $(I + K)$  est invertible et que  $(I + K)^{-1}$  est bornée, causale, et continue. " $(I + K)$  est invertible". Il faut montrer que pour tout  $y \in H$ , il existe un  $x \in H$  tel que

$$y = x + Kx. \quad (1)$$



A ce propos, considérez la suite d'éléments  $\{x_i\}$  définis par les relations itératives suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= y \\
 x_1 &= y - Kx_0 \\
 x_2 &= y - Kx_1 \\
 &\text{-----} \\
 x_n &= y - Kx_{n-1}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Observez que cette suite est une suite de Cauchy. En effet, pour chaque couple de nombres entiers  $n$  et  $p$  on a :

$$\begin{aligned}
 d(x_{n+p}, x_n) &= \|x_{n+p} - x_n\| = \|Kx_{n-1} - Kx_{n+p-1}\| \\
 &\leq \gamma \|x_{n-1} - x_{n+p-1}\| \leq \gamma^2 \|x_{n-2} - x_{n+p-2}\| \leq \dots \leq \gamma^n \|x_0 - x_p\| \\
 &\leq \gamma^n \left[ \|x_p - x_{p-1}\| + \|x_{p-1} - x_{p-2}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \right] \\
 &\leq \gamma^n \left[ \gamma^p \|x_1 - x_0\| + \gamma^{p-1} \|x_1 - x_0\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \right] \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} \|x_1 - x_0\|. \tag{3}
 \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (3), il suit que pour chaque  $\epsilon > 0$  on a  $d(x_m, x_n) < \epsilon$  pourvu que  $n, m \geq N(\epsilon)$ , où  $N$  est tel que

$$\frac{\gamma^N}{(1-\gamma)} \|x_1 - x_0\| < \epsilon.$$

On peut alors conclure que  $\{x_i\} \rightarrow x_0$ . En utilisant l'équation (2) on s'aperçoit que  $x_0$  satisfait l'équation (1).

ii)  $(I + K)^{-1}$  est bornée et continue. Clairement,  $(I + K)[0] = 0$ , donc  $(I + K)^{-1}[0] = 0$ , et il sera suffisant de montrer que  $(I + K)^{-1}$  est continue dans le sens de Lipschitz. A cette fin observez que pour tout couple  $x_1, x_2 \in H$  on a

$$\begin{aligned} \|x_1 + Kx_1 - (x_2 + Kx_2)\| &= \|x_1 - x_2 - Kx_2 + Kx_1\| \\ &\geq \|x_1 - x_2\| - \|Kx_2 - Kx_1\| \geq \|x_1 - x_2\| (1 - \gamma). \end{aligned} \quad (4)$$

Posez maintenant:

$$\begin{aligned} y_1 &= (I + K) x_1 \\ y_2 &= (I + K) x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Des équations (4), et (5), et le fait que  $(I + K)$  est invertible, il suit que pour tout  $y_1, y_2 \in H$  on a

$$\|y_1 - y_2\| \geq (1 - \gamma) \|(I + K)^{-1}y_1 - (I + K)^{-1}y_2\|. \quad (6)$$

L'équation (6) implique

$$\frac{\|(I + K)^{-1}y_1 - (I + K)^{-1}y_2\|}{\|y_1 - y_2\|} \leq \frac{1}{(1 - \gamma)}$$

c'est-à-dire:  $(I + K)^{-1}$  est continue dans le sens de Lipschitz.

" $(I + K)^{-1}$  est causale". L'équation (2) implique que  $(I + K)^{-1}$  peut être vue comme la limite d'une suite d'applications causales. La causalité de  $(I + K)^{-1}$  devient alors une conséquence immédiate de l'Assertion 1.2.3.

Theorème 2. (Stabilité des Transformations Fortement Causales).

Si l'application  $N$  est causale, continue dans le sens de Lipschitz, faiblement additive, et telle que  $N[0] = 0$ , et  $T$  est linéaire, bornée et fortement causale, alors le système de la Figure 2 est stable.

Démonstration. En utilisant l'Assertion 2.2.1, il sera suffisant de montrer que l'application  $(I + TN)$  est invertible et que  $(I + TN)^{-1}$  est bornée, causale, et continue.

i)  $(I + TN)$  est invertible. Il faut montrer que pour tout  $y \in H$  il existe un, et seulement un,  $x \in H$  tel que

$$y = x + TNx. \quad (7)$$

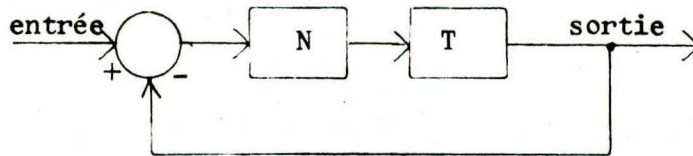


Figure 2: Si  $N$  est faiblement additive et  $T$  est fortement causale, ce système est stable.

De la causalité forte de  $T$  nous avons  $\int dPTdP = 0$ . Ceci implique l'existence d'une partition  $\Omega = \{t_0 = \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = t_\infty\} \in \mathcal{V}$  telle que

$$\|\sum \Delta P(\xi_i) T \Delta P(\xi_i)\| < \frac{1}{\|N\|},$$

c'est-à-dire,

$$\|\Delta P(\xi_i) T \Delta P(\xi_i)\| < \frac{1}{\|N\|},$$



pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ . De l'hypothèse que  $N$  est causale et faiblement additive et les Assertions 1.2.8, et 1.2.9, il suit que

$$\|\Delta P(\xi_i)TN\Delta P(\xi_i)\| = \|\Delta P(\xi_i)T\Delta P(\xi_i)N\Delta P(\xi_i)\| < 1 \quad (8)$$

pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Observez maintenant que résoudre l'Equation (7) est équivalent à déterminer un  $x \in H$  tel que

$$\Delta P(\xi_i)y = \Delta P(\xi_i)x + \Delta P(\xi_i)TNP^{\xi_i}x \quad (9)$$

où:  $i = 1, 2, \dots, n$ . Or, si  $x \in H$  satisfait l'Equation(7) alors de la causalité de  $TN$ , il faut que  $\Delta P(\xi_i)x$  satisfasse l'Equation(9).

Réciproquement, supposez qu'il existe un  $x \in H$  tel que  $\Delta P(\xi_i)x$  satisfasse l'équation (9). Alors on aurait:

$$\sum_{i=1}^n \Delta P(\xi_i)y = \sum_{i=1}^n \Delta P(\xi_i)x + \sum_{i=1}^n \Delta P(\xi_i)TNP^{\xi_i}x,$$

où cette équation est identique à l'Equation (7).

Pour  $i = 1$ , l'équation (9) devient

$$\Delta P(\xi_1)y = \Delta P(\xi_1)x + \Delta P(\xi_1)TN\Delta P(\xi_1)x. \quad (10)$$

Mais, de l'équation (8) on a que  $\Delta P(\xi_1)TN\Delta P(\xi_1)$ , la restriction de  $T$  à l'espace Hilbertien  $\Delta P(\xi_1)H$ , est continue dans le sens de Lipschitz et a une norme de Lipschitz plus petite que 1. En appliquant l'Assertion 1, il existe alors une application causale  $K_1$  telle que l'élément

$$\Delta P(\xi_1)x = K_1\Delta P(\xi_1)y \quad (11)$$

est la solution unique de l'équation (10).

Pour  $i = 2$ , l'équation (9) devient

$$\Delta P(\xi_2)y = \Delta P(\xi_2)x + \Delta P(\xi_2)TN^{\xi_2}x. \quad (12)$$

En observant que TN est faiblement additive (voir l'Assertion 1.2.8), cette dernière équation peut-être réécrite comme suit:

$$\Delta P(\xi_2)y - \Delta P(\xi_2)TN\Delta P(\xi_1)x = \Delta P(\xi_2)x + \Delta P(\xi_2)TN\Delta P(\xi_2)x,$$

dans laquelle, encore une fois, l'application  $\Delta P(\xi_2)TN\Delta P(\xi_2)$  est continue au sens de Lipschitz et possède une norme de Lipschitz inférieure à l'unité.

L'Assertion 1 peut alors être appliquée de nouveau et il existe une application causale  $K_2$  qui donne la solution suivante et unique de l'équation (12)

$$\Delta P(\xi_2)x = K_2[\Delta P(\xi_2)y - TN\Delta P(\xi_1)x],$$

où  $\Delta P(\xi_1)x$  est définie par l'équation (11). Par induction ayant obtenu  $\Delta P(\xi_1)x, \Delta P(\xi_2)x, \dots, \Delta P(\xi_{i-1})x$ , l'unique solution de l'équation (9),  $\Delta P(\xi_i)x$ , peut être calculée comme suit:

$$\Delta P(\xi_i)x = K_i[\Delta P(\xi_i)(y - TN \sum_{j=1}^{i-1} \Delta P(\xi_j)x)] \quad (13)$$

où  $K_i$  est une application causale.

Ces relations récursives définissent l'élément  $x = \sum_{i=1}^n \Delta P(\xi_i)x$  et cet élément constitue l'unique solution de l'équation (7).

On peut alors conclure que  $I+TN$  est effectivement invertible.

ii)  $(I + TN)^{-1}$  est causale. Il sera suffisant de montrer que pour tout  $t \in \nu$  et chaque  $y \in H$ , nous avons (Voir Assertion 1.2.1)

$$P^t(I + TN)^{-1}y = P^t(I + TN)^{-1}P^t y. \quad (14)$$

A ce propos considérons la partition  $\Omega$  de  $\nu$  définie par

$$\Omega' = \{t_0 = \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i-1}, t, \xi_i, \dots, \xi_n = t_\infty\},$$

où  $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N\}$  est la partition  $\Omega$  considérée dans la première partie de la démonstration et il a été supposé, sans aucune perte de généralité, que  $\xi_{i-1} < t < \xi_i$ ; utilisons les notations suivantes:

$$x^1 = (I + TN)^{-1}y^1, \quad x^2 = (I + TN)^{-1}y^2,$$

où  $y^1 = y$  et  $y^2 = P^t y$ . De l'équation (13) nous obtenons

$$\begin{aligned} x^q &= (I + TN)^{-1}y^q = \sum_{j=1, j \neq i}^n K_j [\Delta P(\xi_j)(y^q - TNP^{\xi_{j-1}} x^q)] \\ &+ K_t [(P^t - P^{\xi_{i-1}})(y^q - TNP^{\xi_{i-1}} x^q)] \\ &+ K_{\xi_i} [P^{\xi_i} - P^t)(y^q - TNP^t x^q)] \end{aligned}$$

où  $q = 1, 2$ . Par inspection, de cette équation il suit que



$$\begin{bmatrix} \Delta_1^y \\ \Delta_2^y \\ \Delta_3^y \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_n^y \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1^{(I+TN)} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \Delta_2^{TN} & \Delta_2^{(I+TN)} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_3^{TN} & \Delta_3^{TN} & \Delta_3^{(I+TN)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_n^{TN} & \Delta_n^{TN} & \Delta_n^{TN} & \cdot & \cdot & \Delta_n^{(+TN)} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1^x \\ \Delta_2^x \\ \Delta_3^x \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta_n^x \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Figure 3. Si  $y$  et  $x$  sont tels que:  $y = x + TNx$ , et dans le cas où  $N$  est causale et faiblement additive et  $T$  est linéaire et fortement causale, les équations ci-dessus donnent les relations qui lient  $\Delta P(\xi_j)y$  à  $\Delta P(\xi_i)x$ ,

$$P^{\xi_1}_x^1 = P^{\xi_1}_x^2, P^{\xi_2}_x^1 = P^{\xi_2}_x^2, \dots, P^{\xi_{i-1}}_x^1 = P^{\xi_{i-1}}_x^2, P^t_x^1 = P^t_x^2.$$

Ceci implique la validité de l'équation (14). La démonstration concernant le fait que  $(I + TN)^{-1}$  est bornée et continue peut être obtenue en utilisant une méthode similaire (Voir [Ds.1] p. 130).

Théorème 3. (Stabilité des Transformations e-Fortement Causales et Fortement  $\mathcal{P}$ assives). Si  $N$  est une application bornée, causale, continue dans le sens de Lipschitz, faiblement additive, et passive, dans le sens incrémental et  $T$  est linéaire, bornée, e-fortement causale et fortement passive, alors le système de la Figure 2 est stable.

Démonstration. Encore une fois, en utilisant l'Assertion 2.2.1, il sera suffisant de montrer que l'application  $(I + TN)$  est invertible et que  $(I + TN)^{-1}$  est bornée causale et continue. Pour ce faire observez que pour tout  $t \in \mathcal{V}$  les restrictions de  $N$  et  $T$  sur  $P^t H$  satisfont les hypothèses du Théorème 2 et par conséquent, pour chaque  $y \in H$  et tout  $t \in \mathcal{V}$  il existe un unique élément  $P^t x \in P^t H$  tel que

$$P^t x = P^t y - P^t T N P^t x. \quad (15)$$

De plus cette transformation de  $P^t y$  dans  $P^t x$  est causale. D'ici, tout ce qu'il faut démontrer est alors que

$$|x| = \lim_{t \rightarrow t_\infty} |P^t x| < \infty, \text{ et que la transformation de } y \text{ dans } x \text{ est bornée,}$$

et continue.

La démonstration que  $|x|$ , et la transformation  $y \rightarrow x$  sont bornées est basée sur les deux inégalités suivantes (démontrées dans la remarque donnée plus loin):

$$|P^t x| \leq |y| + |P^{t_{TP} t_{NP} t_x}| \quad (16)$$

et

$$\langle P^t y, P^{t_{NP} t_x} \rangle \geq \delta |P^{t_{NP} t_x}|^2 \quad (17)$$

où  $\delta$  est un nombre réel positif tel que pour tout  $z \in H$  on a  $\langle Tz, z \rangle \geq \delta |z|^2$ . En effet, de l'inégalité (17) on obtient

$$|P^t y| |P^{t_{NP} t_x}| \geq \delta |P^{t_{NP} t_x}|^2$$

d'où

$$|P^{t_{NP} t_x}| \geq \delta^{-1} |P^t y| \geq \delta^{-1} |y|, \quad (18)$$

et en utilisant cette inégalité dans (16) on a

$$|P^t x| \leq |y| + |T| |y| \delta^{-1},$$

c'est-à-dire

$$|P^t x| < (1 + \delta^{-1} |T|) |y|.$$

Cette dernière inégalité implique que

$\lim_{t \rightarrow \infty} |P^t x| = |x| < (1 + \delta^{-1} |T|) |y|$ . Donc  $(I + TN)$  est effectivement invertible et  $(I + TN)^{-1}$  est bornée.

Pour démontrer que  $(I + TN)^{-1}$  est continue, il faut montrer que pour tout  $y \in H$ , et  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que:

si  $|y - y_0| < \delta(\epsilon)$ , alors on a  $|(I + TN)^{-1} y_0| \leq \epsilon$ . Pour ce faire posez  $x_0 = (I + TN)^{-1} y_0$ , et  $x = (I + TN)^{-1} y$ , et notez que



$$P^t_{x_0} = P^t_{y_0} - P^{tTN} P^t_{x_0} \quad (19)$$

$$P^t_x = P^t_y - P^{tTN} P^t_x. \quad (20)$$

Cela implique,

$$P^t_{x_0} - P^t_x = P^t_{y_0} - P^{tTN} P^t_{x_0} - P^t_y + P^{tTN} P^t_x \quad (21)$$

donc :

$$\begin{aligned} \|P^t_{x_0} - P^t_x\| &\leq \|P^t_{y_0} - P^t_y\| + \|P^{tTN} P^t_x - P^{tTN} P^t_{x_0}\| \\ &\leq \|y_0 - y\| + \|P^{tTN} P^t_x - P^{tTN} P^t_{x_0}\|. \end{aligned} \quad (22)$$

Observez maintenant que de (19) et (20) on a

$$\begin{aligned} \langle P^t_y - P^t_{y_0}, P^{tNP} P^t_x - P^{tNP} P^t_{x_0} \rangle &= \langle P^t_x - P^t_{x_0}, P^{tNP} P^t_x - P^{tNP} P^t_{x_0} \rangle \\ &+ \langle P^t_T (P^{tNP} P^t_{x_0} - P^{tNP} P^t_x), (P^{tNP} P^t_x - P^{tNP} P^t_{x_0}) \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

En utilisant la passivité forte de T et la validité (démontrée dans la remarque) de l'équation suivante

$$|P^{tNP} P^t_x - P^{tNP} P^t_{x_0}| \geq \delta^{-1} |P^t_y - P^t_{y_0}| \geq \delta^{-1} |y - y_0|, \quad (24)$$

on trouve que l'équation (23) implique qu'il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$\langle P^t_y - P^t_{y_0}, P^{tNP} P^t_x - P^{tNP} P^t_{x_0} \rangle \geq \delta^{-1} \|y - y_0\|. \quad (25)$$

En utilisant (25) dans (22), on obtient

$$\begin{aligned} \|P^t_{x_0} - P^t_x\| &\leq (1 + \delta^{-1}) \|y - y_0\| \\ &< (1 + \delta^{-1}) \|y - y_0\|. \end{aligned}$$

Cette dernière équation implique

$$\|x_0 - x\| \leq (1 + \delta^{-1}) \|y - y_0\|. \quad (26)$$

Donc pour chaque  $\varepsilon > 0$ , et pour  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(1+\delta)^{-1}}$  on a que:  $\|y - y_0\| \leq \delta(\varepsilon)$

implique  $\|x - x_0\| \leq (1 + \delta^{-1}) \frac{\varepsilon}{(1+\delta)^{-1}} = \varepsilon$ .

Remarque. Pour terminer, il reste à vérifier la validité de (16) et (17). La première inégalité est une conséquence directe de l'équation (15). Pour obtenir l'inégalité (17), notez que de l'équation (15) on a

$$\begin{aligned} \langle P^t y, P^{t_{NP}} x \rangle &= \langle P^t x + P^{t_{TNP}} x, P^{t_{NP}} x \rangle. \\ &= \langle P^{t_{TNP}} x, P^{t_{NP}} x \rangle + \langle P^t x, P^{t_{NP}} x \rangle. \end{aligned}$$

D'ici en utilisant la positivité de N et la positivité forte de T on obtient

$$\langle P^t y, P^{t_{NP}} x \rangle \geq \langle P^{t_{TP}} x, P^{t_{NP}} x \rangle \geq \delta |P^{t_{NP}} x|^2.$$

La validité de (24) peut être démontrée comme suit.

De (19) et (20) on a:

$$P^t x - P^t x_0 = P^t y - P^t y_0 - P^{t_{TNP}} x + P^{t_{TNP}} x_0.$$

D'ici on obtient

$$\begin{aligned} \langle P^t y - P^t y_0, P^{t_{NP}} x - P^{t_{NP}} x_0 \rangle &= \\ &\langle P^t x - P^t x_0 + P^{t_{TNP}} x - P^{t_{TNP}} x_0, P^{t_{NP}} x - P^{t_{NP}} x_0 \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle P^t_x - P^t_{x_0}, P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0} \rangle + \langle P^{tTNP^t}_x - P^{tTNP^t}_{x_0}, P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0} \rangle$$

En vertu de la passivité incrémentale de N, et de la passivité forte de T, il suit

$$\langle P^t_y - P^t_{y_0}, P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0} \rangle \geq \delta |P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0}|^2$$

donc

$$|P^t_y - P^t_{y_0}| \cdot |P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0}| \geq \delta |P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0}|^2$$

et d'ici nous obtenons finalement

$$|P^{tNP^t}_x - P^{tNP^t}_{x_0}| \leq \delta^{-1} |y - y_0|.$$



## 4. APPLICATIONS: METHODES DU CERCLE ET DE LA LIGNE DE POPOV

4.1 Méthode du CercleSystème considéré dans le Théorème du Cercle.

Le théorème du Cercle concerne le système de base représenté dans la Figure 1, où N et T sont deux applications définies sur l'espace  $[L_2[0, \infty), P^t]$ . En particulier, N et T sont définies comme suit:

- si  $w, z \in L_2[0, \infty)$  et  $w = Nz$ , alors  $w(t) = f(z(t), t)$ , où:  $f(., t)$  est une fonction réelle telle que:  $f(0, t) = 0$ , et pour un couple de nombres réels  $\alpha, \beta$ , avec  $\beta > 0$  et  $\beta > \alpha$ , on a que

$$\alpha \leq \frac{f(\sigma_2, t) - f(\sigma_1, t)}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq \beta;$$

- si  $z, x \in L_2[0, \infty)$ , et  $z = Tx$ , alors  $z(t) = \int_0^t g(t - \tau)x(\tau)d\tau$ , où  $g(\tau)$  est une fonction réelle telle que

$$\int_0^\infty |g(\tau)|d\tau < \infty.$$

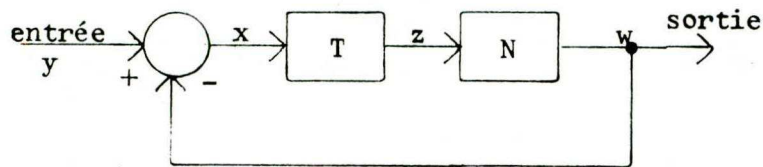


Figure 1. Système de base considéré dans la méthode du cercle

Theorème du Cercle. Si le système linéaire représenté dans la Figure 2 est stable, alors une condition suffisante pour la stabilité du système de la Figure 1 est que:

$$\sup_{\omega \in [0, \infty)} \left| \frac{G(j\omega)}{1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)G(j\omega)} \right| \frac{1}{2} (\beta - \alpha) < 1, \quad (1)$$

où  $G(j\omega)$  est la transformée de Fourier de  $g(\tau)$ .

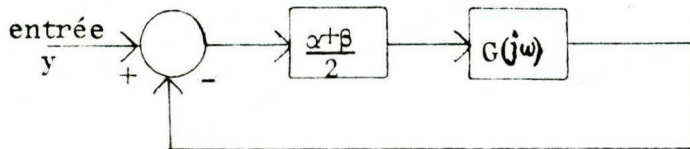


Figure 2: Système associé au système de la Figure 1.

Démonstration. En utilisant la notation  $F = \frac{(\alpha + \beta)}{2} I$ , et en vertu de l'Assertion 2.2.3, on a que la stabilité du système de la Figure 1 est équivalente à la stabilité du système représenté dans la Figure 3. De plus, de l'hypothèse que le système de la Figure 2 est stable, et du théorème 3.1 on a que le système de la Figure 3 est stable si

$$\| [I + \frac{(\alpha + \beta)}{2} T]^{-1} T [N - \frac{(\alpha + \beta)}{2} I] \| \leq \| [I + \frac{(\alpha + \beta)}{2} T]^{-1} T \| \cdot \| N - \frac{(\alpha + \beta)}{2} I \| < 1. \quad (2)$$

Mais puisque

$$\|I + \frac{(\alpha + \beta)}{2} T^{-1} T\| = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \left| \frac{G(j\omega)}{1 + \frac{(\alpha + \beta)}{2} G(j\omega)} \right|$$

et

$$\|N - \frac{(\alpha + \beta)}{2} I\| \leq \frac{(\beta - \alpha)}{2} \quad (i)$$

alors l'inégalité (2) est sûrement satisfaite si l'inégalité (1) l'est.

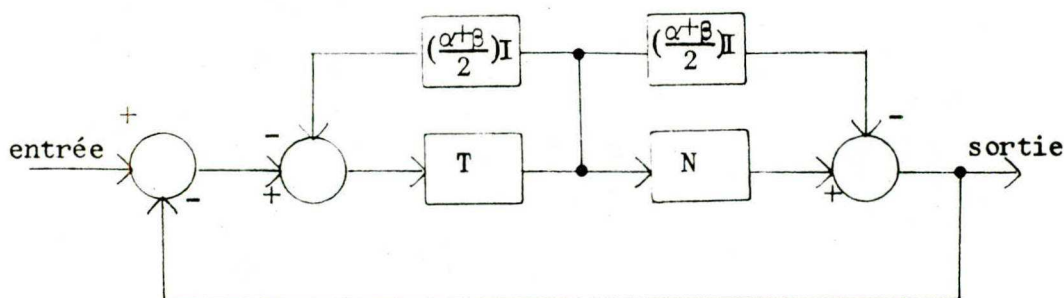


Figure 3: Système Equivalent au système de la Figure 1.

### Interprétation Géométrique du Théorème du Cercle (CRITERE DU CERCLE)

Le critère du cercle est constitué par l'interprétation géométrique des conditions imposées par l'énoncé du théorème du Cercle. Pour présenter cette interprétation, il est convenable de considérer séparément les deux cas:  $\alpha \geq 0$ , et  $\alpha < 0$ .

(i) Cette inégalité est une conséquence du fait que pour tout nombre réel

$\lambda$  on a  $\|N - \lambda I\| \leq \max \{ |\beta - \lambda|, |\lambda - \alpha| \}$ ; notez que pour  $\lambda = \frac{\alpha + \beta}{2}$

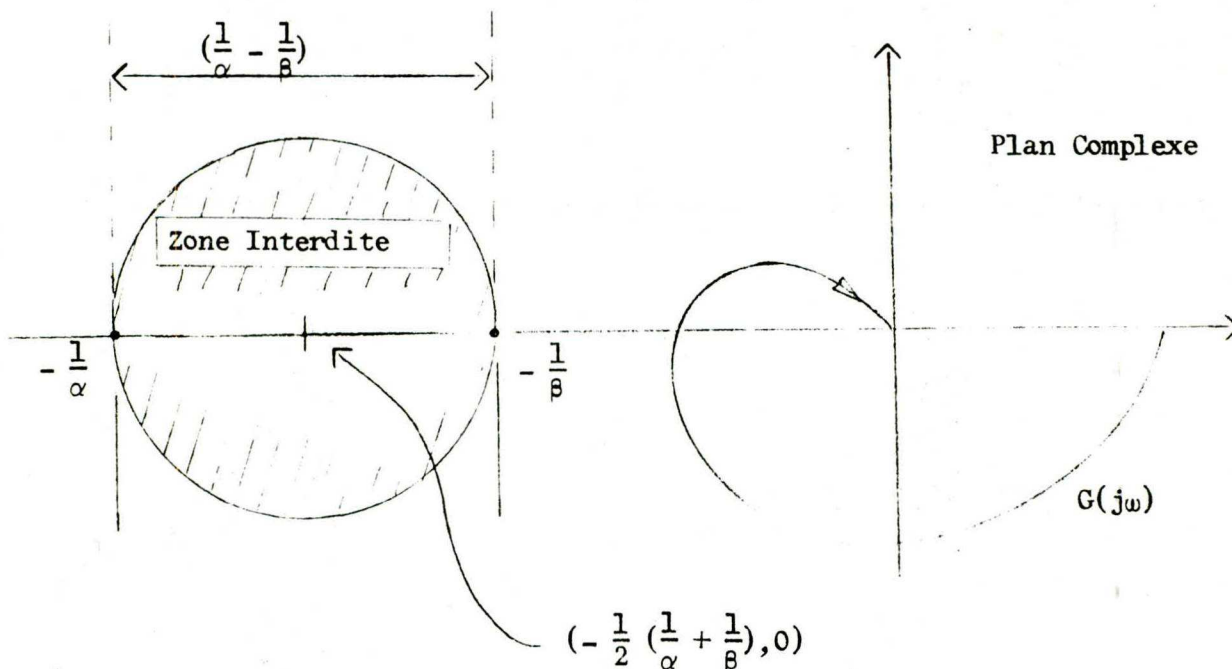
$$|\beta - \lambda| = |\lambda - \alpha| = \frac{1}{2}(\beta - \alpha).$$



**cas  $\alpha \geq 0$ .** L'équation 1 est équivalente à la condition que le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  n'a aucun point en commun avec la région intérieure au cercle de centre  $(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}), 0)$  et rayon  $r = \frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})$ . De plus, si cette région n'est pas encerclée par  $G(j\omega)$ , alors le système de la Figure 2 est stable.

**Démonstration.** Si les conditions du cercle sont satisfaites clairement le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  ne peut pas encercler le point  $(-\frac{1}{\lambda}, 0) = (-\frac{2}{\beta+\alpha}, 0)$  parce que ce point est intérieur au cercle (Notez que  $-\frac{1}{\alpha} < -\frac{2}{\beta+\alpha} < -\frac{1}{\beta}$ ).

De la méthode de Nyquist il suit alors que le système de la Figure 2 est stable, et il reste à montrer que l'équation (1) est satisfaite.



**Figure 4:** Critère du Cercle dans le cas  $\alpha \geq 0$ .

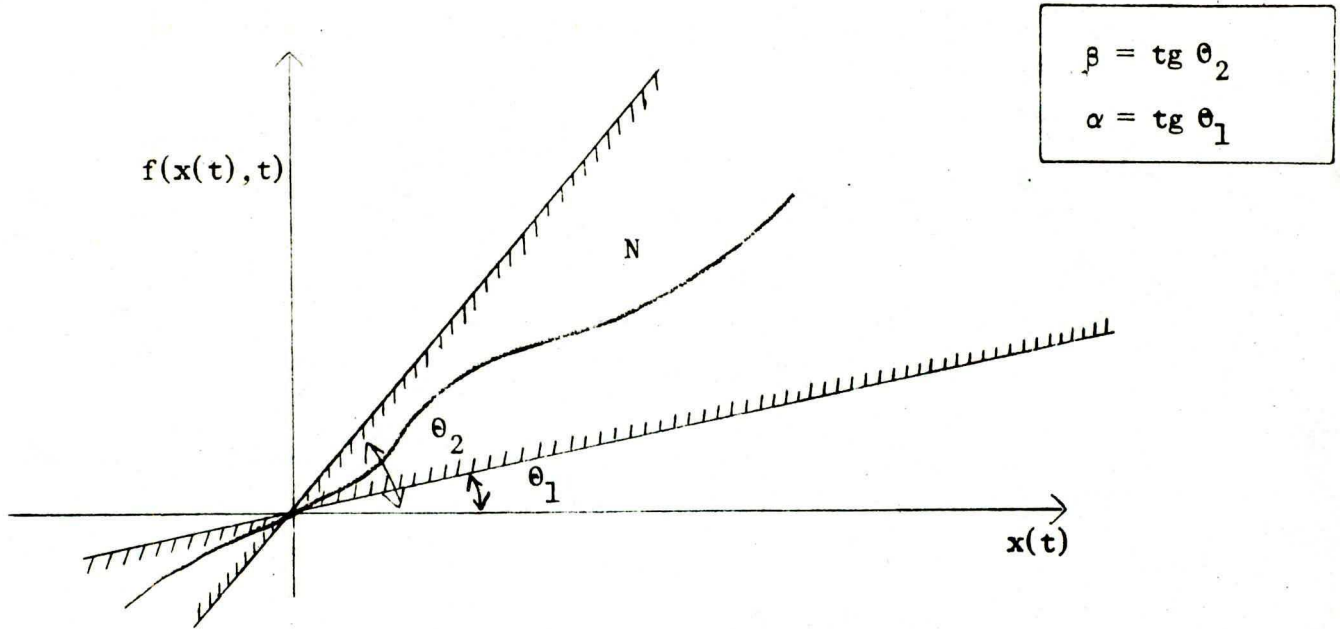


Figure 5: Signification de  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour ce faire, posez

$$G_R = \text{Re}[G(j\omega)], \quad G_I = \text{Im}[G(j\omega)].$$

Si la condition du cercle est vérifiée, on a :

$$\left[ G_R + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} \right) \right]^2 + G_I^2 > \frac{1}{4} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^2 \beta^2},$$

c'est-à-dire,

$$G_R^2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} G_R + G_I^2 > \frac{1}{4} \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2}$$

et, finalement,

$$\alpha \beta (G_R^2 + G_I^2) > -1 - (\alpha + \beta) G_R. \quad (4)$$

Evidemment la démonstration sera complète si on montre que l'inégalité (3) est bien équivalente à l'inégalité (4). A ce propos, notez que l'inégalité (3) est équivalente à l'expression suivante:

$$\frac{G_R^2 + G_I^2}{[1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)G_R]^2 + [\frac{1}{2}(\alpha + \beta)G_I]^2} < [\frac{2}{\beta - \alpha}]^2$$

c'est-à-dire,

$$G_R^2 + G_I^2 < [\frac{2}{\beta - \alpha}]^2 \{ [1 + \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 G_R^2 + (\alpha + \beta)G_R + \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 G_I^2] \}.$$

Il suit

$$[G_R^2 + G_I^2][\frac{\beta - \alpha}{2}]^2 < 1 + \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 G_R^2 + (\alpha + \beta)G_R + \frac{1}{4}(\alpha + \beta)^2 G_I^2,$$

c'est-à-dire,

$$[G_R^2 + G_I^2] (\frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{4}) < 1 + (\frac{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta}{4})(G_R^2 + G_I^2) + (\alpha + \beta)G_R.$$

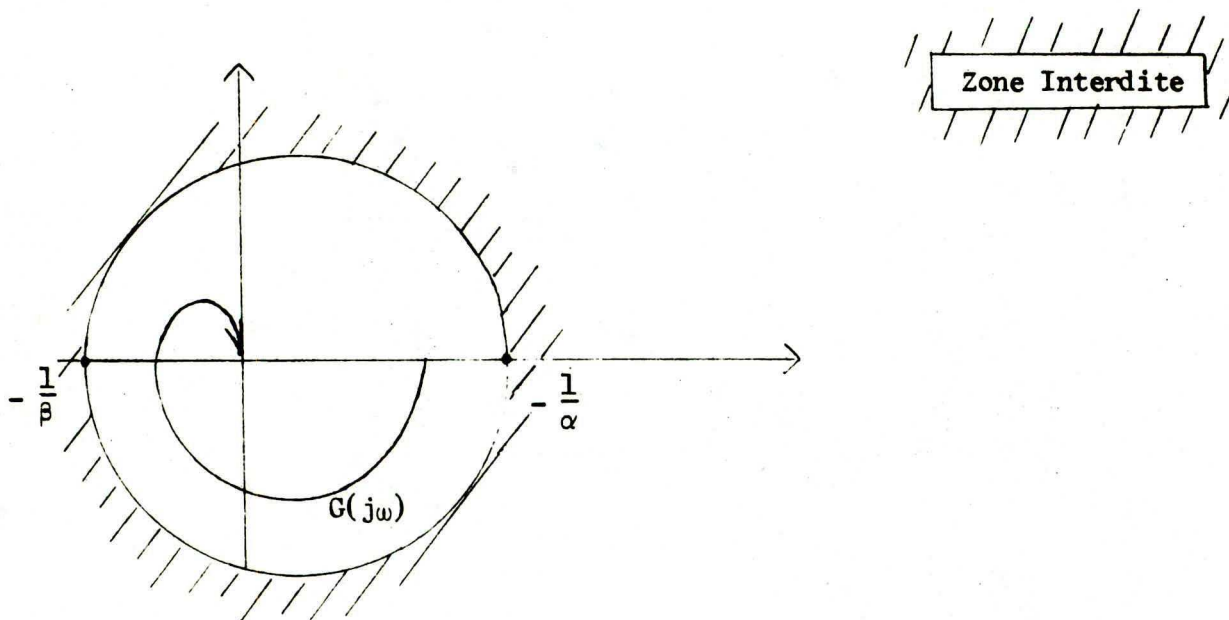
Cette dernière inégalité est équivalente à l'inégalité (4)

Cas  $\alpha < 0$ . Si le diagramme de Nyquist de  $G(j\omega)$  n'a aucun point en commun avec la région extérieure au cercle de centre  $(-\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}), 0)$  et rayon  $\frac{1}{2}(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta})$ , alors les conditions du théorème du cercle sont satisfaites.

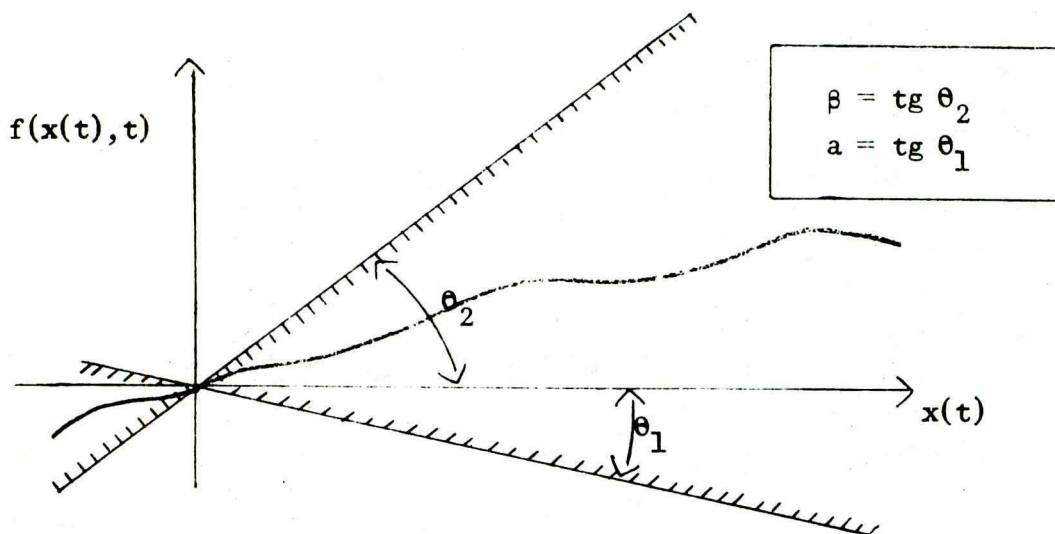
Démonstration. Notez que si la condition du cercle est vérifiée, alors  $G(j\omega)$  ne peut pas encercler le point  $(-\frac{1}{\lambda}, 0) = (-\frac{2}{\alpha + \beta}, 0)$ , parce que ce point est extérieur au cercle. (En effet, si  $\alpha < 0, \beta > 0$ , alors on a

$$\text{ou bien } -\frac{2}{\alpha + \beta} < -\frac{1}{\beta}, \text{ ou bien } \frac{2}{\alpha + \beta} > -\frac{1}{\alpha}.$$





**Figure 6:** Condition du cercle dans le cas  $\alpha < 0$ .



**Figure 7:** Signification de  $\alpha$  et  $\beta$

En appliquant encore une fois la méthode de Nyquist, on peut alors conclure que la condition i) est satisfaite. Pour montrer que l'équation (1) est aussi satisfaite, notez que l'inégalité (3) est équivalente à l'inégalité (4). D'autre part, la condition du cercle est équivalente à l'inégalité suivante

$$\left[ G_R + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} \right) \right]^2 + G_I^2 < \frac{1}{4} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^2 \beta^2},$$

c'est-à-dire,

$$G_R^2 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} G_R + G_I^2 < \frac{1}{4} \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 \beta^2}$$

et finalement (notez que  $\alpha\beta < 0$  !)

$$\alpha \beta (G_R^2 + G_I^2) > -1 - (\alpha + \beta) G_R.$$

## 2. Méthode de la Ligne de Popov

### Système considéré dans le Théorème de Popov

Le théorème de Popov concerne le système de base représenté dans la Figure 1, où  $N$  et  $T$  sont définies sur l'espace  $[L_2[0, \infty), P^t]$ .

En particulier la description de  $N$  et  $T$  est la suivante:

- si  $z, x \in L_2[0, \infty)$  et  $z = Nx$ , alors  $z(t) = f(x(t))$ , où  $f(\cdot)$  est une fonction telle que pour un nombre réel  $\beta > 0$  on a que

$$0 \leq \frac{f(\sigma_2) - f(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq \beta ;$$

- si  $w, z \in L_2[0, \infty)$ . et  $w = Tz$  alors  $w(t) = \int_0^t g(t - \tau)z(\tau)dt$ , où  $g(t)$  est une fonction réelle telle que

$$\int_0^\infty |g(\tau)|dt < \infty.$$

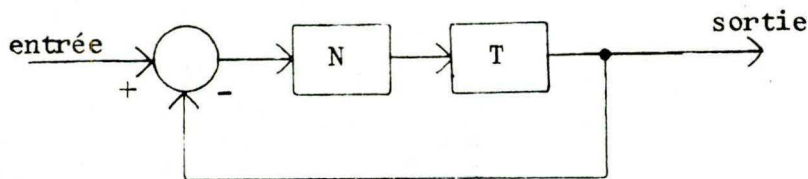


Figure 1: Le système considéré dans la méthode de Popov.

Théorème de Popov. Une condition suffisante pour la stabilité du système de la Figure 1 est l'existence d'un nombre réel positif  $q > 0$  tel que

$$R_e[(1 + jq\omega)G(j\omega)] + \beta^{-1} \geq \delta > 0 \quad \text{tout } \omega \in [0, \infty), \quad (1)$$

où  $G(j\omega)$  est la transformée de Fourier de  $g(\tau)$ .



Démonstration. En dénotant par  $F$  l'application linéaire et causale représentée par la réponse en fréquence  $(1 + j\omega q)$ , et en utilisant l'Assertion 2.2.2, on a que le système de la Figure 1 est stable si le système de la Figure 2 est stable. En appliquant l'Assertion 2.2.3, la stabilité, de ce dernier système est équivalente à la stabilité du système de la Figure 3. Dans ce système on a que l'application  $\frac{\beta^{-1} N}{1 + j\omega q}$  est passive, et, en appliquant l'Assertion 1.2.6, on obtient que l'application  $[I + \frac{\beta^{-1}}{1+j\omega q} N] \frac{1}{(1+j\omega q)} N$  est, elle aussi, passive; de plus, l'inégalité (1) garantit la passivité forte de l'application  $(1 + j\omega q)G(j\omega) + \beta^{-1}$ . La stabilité du système de la Figure 3 peut alors être obtenue comme conséquence immédiate du Théorème 3.3.

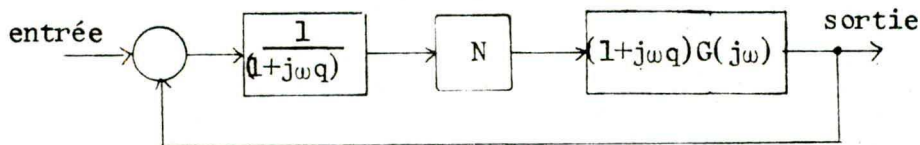


Figure 2: Application de la technique des multiplicateurs.

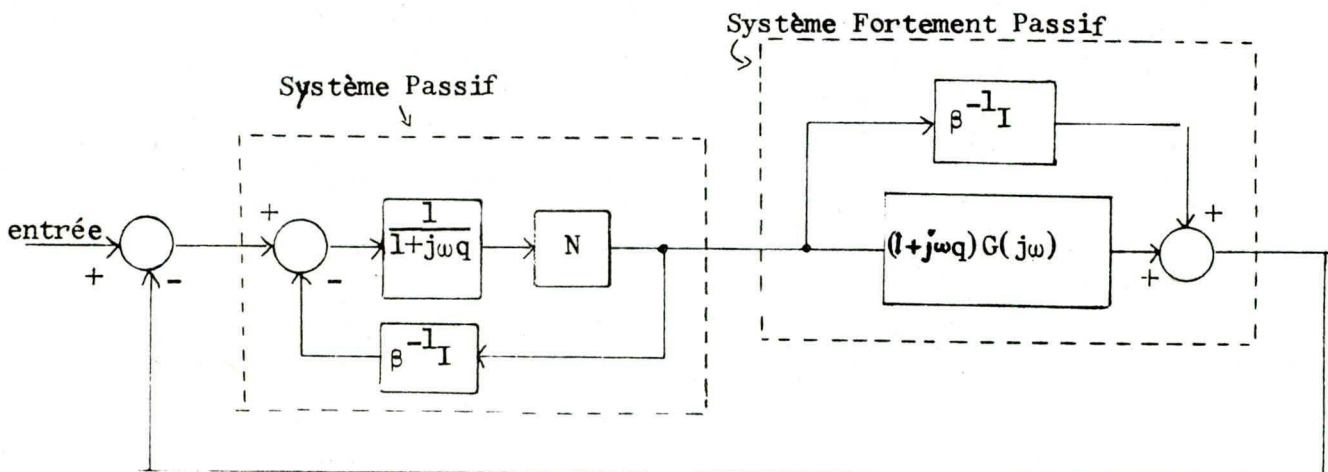


Figure 3: Application de la technique du déplacement des pôles.

Remarque. La démonstration donnée ci-dessus n'est pas rigoureuse puisque l'on suppose que l'application  $(1 + j\omega q)$  est bien définie dans  $L_2[0, \infty)$ . Cette démonstration peut être rendue rigoureuse en considérant au lieu de  $L_2[0, \infty)$  l'espace  $L_2[0, \infty) \cap L_{2s}[0, \infty)$ , défini comme suit:  $y \in L_2[0, \infty) \cap L_{2s}[0, \infty)$

$$\text{-si } \int_0^{\infty} y^2(\tau) dt < \infty, \text{ et } \int_0^{\infty} [\dot{y}(\tau)]^2 dt < \infty.$$

Une autre observation importante concerne l'application du Théorème 3.3 pour obtenir la stabilité du système de la Figure 3. Cette application n'est pas complètement justifiée puisque le système en considération ne satisfait pas l'hypothèse sur la faible additivité de la nonlinéarité. Cette difficulté peut-être aisément surmontée en augmentant l'envergure du Théorème 3.3.

#### Interprétation géométrique du théorème de Popov (METHODE DE LA LIGNE DE POPOV)

Supposez que  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels positifs, et que  $G(j\omega)$  est la réponse en fréquence d'un système linéaire invariant dans le temps. Alors la condition

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)G(j\omega)] + \frac{1}{\beta} \geq 0, \text{ chaque } \omega \geq 0,$$

est équivalente aux deux conditions suivantes:

i) pour chaque  $\omega$ , le point  $G(j\omega)$  de la courbe de Nyquist est à droite de la ligne qui passe par le point  $(-\frac{1}{\beta}, 0)$  et a un coefficient angulaire  $\frac{1}{\omega q}$  (figure 2).

ii) la courbe de Nyquist de  $G^*(j\omega)$ ,

$$G^*(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\omega \operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

est à droite de la ligne qui passe par le point  $(-\frac{1}{\beta}, 0)$  et a un coefficient angulaire  $\frac{1}{q}$  (figure 5).

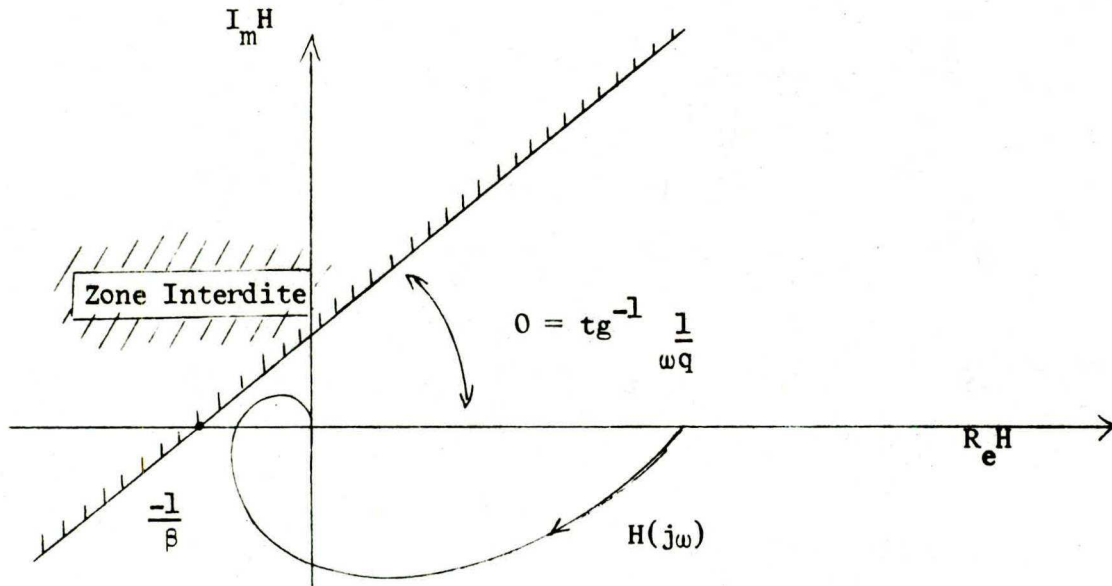


Figure 4: Condition de Popov en termes du diagramme de Nyquist.

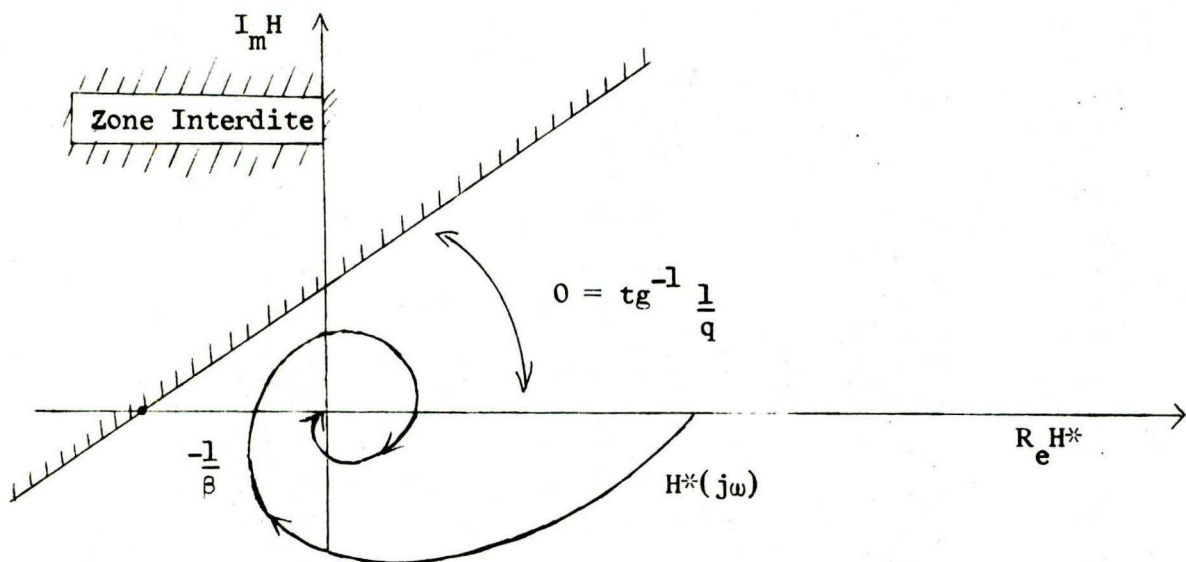


Figure 5: Condition de Popov en termes du diagramme de Nyquist modifié.



Démonstration. i) Observez que

$$\operatorname{Re} [(1 + qj\omega)G(j\omega)] = \operatorname{Re}[G(j\omega) - q\omega \operatorname{Im} G(j\omega)]$$

Par inspection directe, on a :

$$G(\omega_1) \in \ell \rightarrow R_e G = q\omega_1 I_m G - \beta^{-1}$$

$$G(\omega_1) \in \ell^+ \rightarrow R_e G \geq q\omega_1 I_m G - \beta^{-1}$$

$$G(\omega_1) \in \ell^- \rightarrow R_e G \leq q\omega_1 I_m G - \beta^{-1}$$

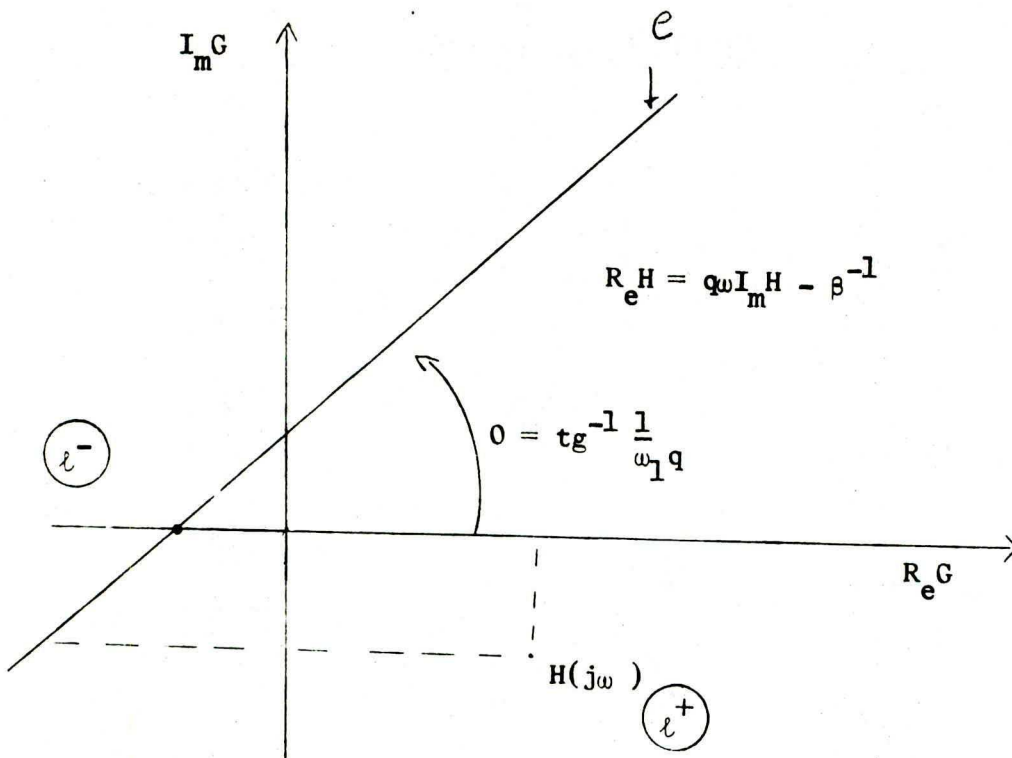


Figure 6: Interprétation géométrique de la condition de Popov (diagramme de Nyquist).

ii)

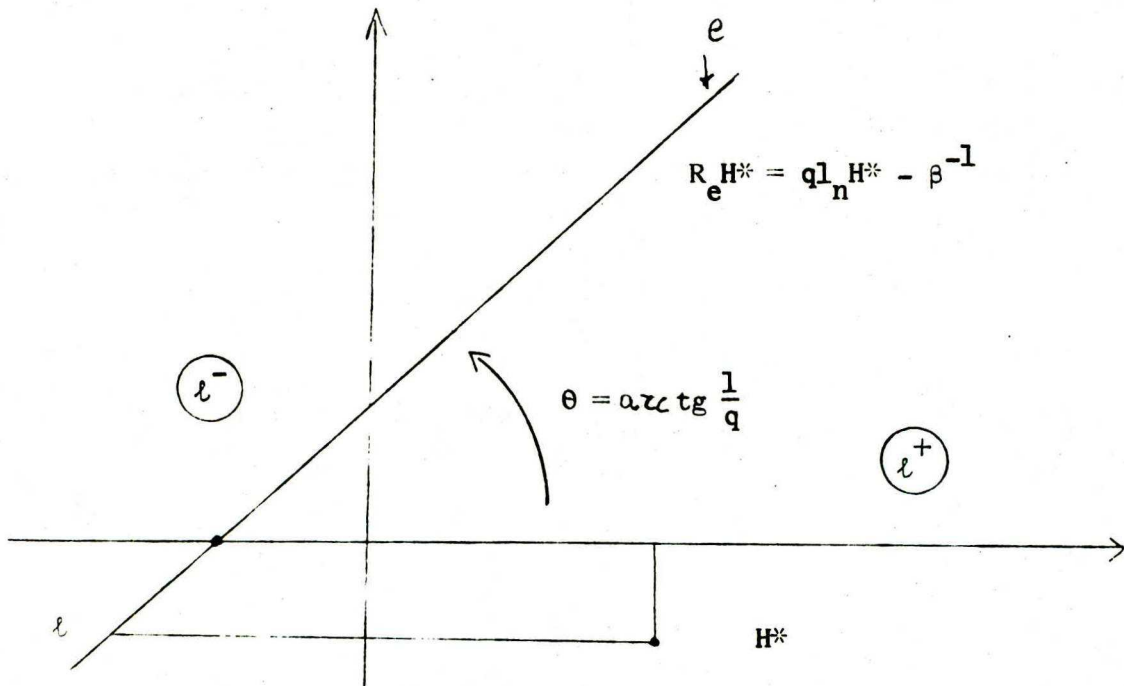
Observez que  $R_e G^* = qI_m H^* - \beta^{-1} \rightarrow R_e G = q\omega I_m G - \beta^{-1}$

Par inspection directe, on a :

$$G^*(j\omega) \in \ell \rightarrow R_e G(j\omega) = q\omega I_m G - \beta^{-1}$$

$$G^*(j\omega) \in \ell^+ \rightarrow R_e G(j\omega) \geq q\omega I_m G - \beta^{-1}$$

$$G^*(j\omega) \in \ell^- \rightarrow R_e G(j\omega) \leq q\omega I_m G - \beta^{-1}$$



**Figure 7:** Interprétation géométrique de la condition de Popov  
(Diagramme de Nyquist modifié).

References

- An.1 Anderson, B.D.O., The Small - Gain Theorem, the Passivity Theorem and their Equivalence, Journal of the Franklin Institute, Vol. 293, No.2, February 1972.
- Da.1 Damborg, M., Stability of the Basic Nonlinear Operator Feedback System, Technical Report SEL 37, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, 1969.
- Da.2 Damborg, M., et Naylor, A.W., The Fundamental Structure of Input-Output Stability for Feedback Systems, IEEE Trans. on Systems Science and Cybernetics, Avril 1970.
- Di.1 Dieudonné, J., Eléments d'Analyse, Gauthier-Villars Paris 1968.
- Ds1. DeSantis, R.M., Causality Structure of Engineering Systems, Technical Report SEL 67, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, Septembre 1972.
- Ds2. DeSantis, R.M., Causality Strict Causality and Invertibility for Systems in Hilbert Resolution Spaces, Soumis à SIAM Journal on Control (à paraître)
- Ds3. DeSantis, R.M., Causality for Nonlinear Systems in Hilbert Spaces, Soumis à Math Systems Theory Journal (à paraître)
- GO.1 Gohberg, I.Z, et Krein, M.G, Theory of Volterra Operators in Hilbert Space and Applications. American Mathematical Society Vol.24, Providence, Rhode Island, 1970.
- Ho.1 Holtzman, J.M., Nonlinear System Theory, Network Series, Prentice Hall, 1970.
- Lu.1 Luenberger, D.G., Optimization by Vector Space Methods. New York: Wiley, 1969.
- Po.1 Porter, W.A., Modern Foundations of Systems Engineering. MacMillan, New York 1965.
- Po.2 Porter, W.A., et Zahm, C.L., Basic Concepts in Systems Theory, Technical Report No.44, Systems Engineering Laboratory, The University of Michigan, 1969.
- Pv.1 Popov, V.M., Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control, Automation and Remote Control, Vol.21, pp. 961-979, 1961.
- Sa.1 Saeks, R., Causality in Hilbert Space. SIAM Review, Vol. 12, No. 3, juillet 1970.
- Sa.2 Saeks, R., Resolution Space - A Function Analytic Setting for Control Theory, Preprints 9th Allerton Conference on Circuit and Systems Theory, Octobre 1971.



- Sa.3 Saeks, R., Resolution Space, Operators and Systems, June 1972 (Monographie en cours de publication)
- Sn.1 Sandberg, I.W., On the  $L_2$ -Boundedness of Solutions of Nonlinear Functional Equations, Bell Systems Techn. Journal, Vol. 43, pp. 1581-1599, 1964.
- Sn.2 Sandberg, I.W., Some Results on the Theory of Physical Systems Governed by Nonlinear Functional Equations, Bell Systems Tech. Journal, Vol. 44, pp. 871-898, 1965.
- We.1 Willems, J.L., Stability Theory of Dynamical Systems, Wiley, New York, 1970.
- Wi.1 Willems, J.C., Stability, Instability, Invertibility and Causality. SIAM Journal on Control, Vol.7, No.4, Novembre 1969.
- Wi.2 Willems, J.C., The Analysis of Feedback Systems, M.I.T. Press, Cambridge 1971.
- Za.1 Zames, G., On the Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems.  
Part 1: Conditions Derived Using Concepts of Loop Gain, Conicity, and Positivity.  
Part 2: Conditions Involving Circles in the Frequency Plane and Sector Nonlinearities. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-11, pp. 228-238 et 465-476, 1966.
- Za.2 Zames, G., and Falb, P.L., Stability Conditions for Systems with Montone and Slope Restricted Nonlinearities, SIAM J. Control, Vol.6, No.1, 1968.



ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL



3 9334 00288574 5