DÉPARTEMENT DE GÉNIE INDUSTRIEL

Rapport Technique EP77-R-14
Classification: Library of Congress no.....

ANNEAUX ACHEVES D'ENSEMBLES ET PREORDRES

par

Maurice Queyranne

MARS 1977

Ecole Polytechnique de Montréal

Campus de l'Université
de Montréal
Case postale 6079
Succursale 'A'
Montréal, Québec
H3C 3A7

DON

ANNEAUX ACHEVES D'ENSEMBLES ET PREORDRES

par

Maurice Queyranne
Département de Génie Industriel
Ecole Polytechnique de Montréal

ANNEAUX ACHEVES D'ENSEMBLES ET PREORDRES

Résumé: Les liens entre anneaux achevés d'ensembles (contenant les parties vide et pleine) sur un ensemble donné E et relations binaires sur E sont étudiés en utilisant la notion d'hérédité d'une relation binaire. Il est montré que l'hérédité d'une relation binaire est un anneau achevé d'ensembles, qu'un anneau achevé d'ensembles induit une relation binaire, en fait un préordre, dont il est l'hérédité, et que cette construction permet d'obtenir la fermeture transitive d'une relation binaire donnée. La conséquence de ces résultats est qu'il existe une bijection entre anneaux d'ensembles achevés (contenant les parties vide et pleine) sur E et préordres sur E.

Abstract:

The relationships between complete rings of sets (including the trivial empty and full subsets) on E and binary relations on E are studied by using the notion of heredity of a binary relation. It is shown that the heredity of a binary relation is a complete ring of sets, that a complete ring of sets induces a binary relation, actually a preorder, of which it is the heredity, and that this construction yields the reflexive-transitive closure of a given binary relation. The consequence of these results is that there exists a one-to-one correspondance between complete rings of sets (including the empty and full subsets) on E and preorders on E.

INTRODUCTION

La théorie des treillis s'est intéressée aux liens entre treillis et relations d'ordre (partiel) ou relations d'équivalence (congruences), mais moins souvent aux liens entre treillis et certaines relations binaires plus générales. D'autre part, les anneaux d'ensembles jouent un rôle particulier dans la théorie des treillis, voir notamment le théorème de Birkhoff [1] ; les anneaux achevés d'ensemblespossèdent de plus la propriété d'être complètement distributifs ([3,p.76]). A partir de la notion d'ensemble héréditaire, introduite par Grätzer [2, p.72] pour un ordre partiel sur des éléments du treillis lui-même, il est possible de caractériser les anneaux achevés d'ensembles par des relations binaires, en fait des préordres, sur l'ensemble de base (dont les parties forment le treillis considéré).

Après une section 1 consacrée aux définitions, la section 2 établit le premier résultat: une famille de parties est un anneau achevé d'ensembles si et seulement si elle est l'hérédité d'une relation. Il est montré, dans la section 3, que la relation binaire construite à partir de l'hérédité d'une relation binaire donnée est, en fait, sa fermeture reflexive - transitive. En réunissant ces deux résultats, on obtient le résultat principal donné dans la section 4: il existe une bijection entre anneaux achevés d'ensembles (contenant les parties vide et pleine) et préordres sur l'ensemble de base. De plus, la construction présentée introduit un nouvel aspect de la notion de fermeture réflexive-transitive d'une relation binaire.

1. Définitions

Les définitions et notations ci-dessous correspondent en général à l'usage (voir par exemple [3]).

Soit E un ensemble considéré dans toute la suite comme l'ensemble de base.

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On dit qu'un ensemble $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E)$ est un anneau achevé d'ensembles si $\mathcal{A}$ contient les parties triviales ϕ et E, et si pour toute famille $(A_i,\ i \in I)$ d'ensembles $A_i \in \mathcal{A}$ on a:

(1) $\qquad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \qquad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

Remarque 1: C'est pour la simplicité que l'on suppose que ϕ et E sont dans $\mathcal{A}$; en effet on peut ajouter l'un ou l'autre de ces ensembles à un ensemble de parties vérifiant (1) sans autre modification. Le cas d'anneaux d'ensembles ne contenant pas ces parties triviales sera discuté dans la dernière partie.

Etant donné un anneau achevé d'ensembles $\mathcal{A}$, à toute partie B de E on peut associer deux éléments de $\mathcal{A}$ baptisés l'intérieur $\mathring{B}$ et l'extérieur $\hat{B}$ de B, définis par

(2) $\qquad \mathring{B} = \bigcup_{A \in B'} A \qquad$ où $\qquad B' = \{A : A \subset B,\ A \in \mathcal{A}\}$

(3) $\qquad \hat{B} = \bigcap_{A \in B''} A \qquad$ où $\qquad B'' = \{A : B \subset A,\ A \in \mathcal{A}\}$.

Remarque 2: Ces deux définitions ont un sens puisque $\phi \in B'$ et $E \in B''$.

Une relation binaire R sur E est une partie de E^2. Un préordre P est une relation binaire sur E qui vérifie les propriétés suivantes:

(4) $\qquad$ pour tout $x \in E$, $(x,x) \in R$ $\qquad$ (reflexivité)

(5) $\qquad$ pour tous $x,y,z \in E$, $(x,y) \in R$ et $(y,z) \in R$ impliquent $(x,z) \in R$ $\qquad$ (transitivité).

Il est clair, d'après les définitions ci-dessus, qu'une intersection quelconque de préordres est un préordre. La fermeture reflexive-transitive R^+ d'une relation binaire R sur E est le plus petit préordre contenant R:

(6) $\qquad R^+ = \bigcap_{P \in \mathcal{R}} P \quad$ où $\mathcal{R} = \{P : R \subset P,\ P \text{ préordre sur } E\}$.

2. Hérédité et anneaux achevés d'ensemble:

Etant donnée une relation binaire R sur E, une partie H de E est dite héréditaire [2, pages 52 et 72] pour R si:

(7) pour tous $x,y \in E$, $(x,y) \in R$ et $y \in H$ impliquent $x \in H$.

L'hérédité h(R) est l'ensemble des parties H de E héréditaires pour R.

Théorème 1: $\mathcal{A}$ est un anneau achevé d'ensembles si et seulement si $\mathcal{A}$ est l'hérédité d'une relation binaire sur E.

preuve: - Condition suffisante: l'hérédité h(R) d'une relation R est un anneau achevé d'ensembles; ceci découle immédiatement de la définition (7).

- Condition nécessaire: soit $\mathcal{A}$ un anneau achevé d'ensembles.

Soit la relation binaire R sur E définie par

(8) $(x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in \mathcal{A},\ y \in A \ \Rightarrow \ x \in A$

Il est immédiat que toute partie $A \in \mathcal{A}$ est héréditaire pour R.

Réciproquement, soit H une partie héréditaire pour R et supposons que $H \notin \mathcal{A}$. Soit donc $\mathring{H}$ l'intérieur de H relativement à $\mathcal{A}$: puisque $\mathring{H} \subset H$ et que $H \notin \mathcal{A}$, il existe $y \in H - \mathring{H}$. Soit alors $\{\hat{y}\}$ l'extérieur de $\{y\}$ et $G = \mathring{H} \cup \{\hat{y}\}$. Puisque $G \in \mathcal{A}$ et que $\mathring{H}$ est le plus grand élément de $\mathcal{A}$ contenu dans H, il existe $x \in G - H$. Donc $x \in \{\hat{y}\}$ et $x \notin H$. Puisque $x \in \{\hat{y}\}$ on a $\forall A \in \mathcal{A},\ y \in A \Rightarrow x \in A$

donc $(x,y) \in R$ et puisque $y \in H$ et $x \notin H$, H n'est pas héréditaire pour R d'où contradiction.

Donc, $H \in \mathcal{A}$ et, par suite, $\mathcal{A} = h(R)$. #

3. Hérédité et fermeture reflexive-transitive

Désignons par $r(\mathcal{A})$ la relation binaire associée à l'anneau achevé d'ensembles $\mathcal{A}$, définie par la relation (8). Les observations suivantes sont immédiates:

1 - pour tout anneau achevé de parties $\mathcal{A}$, la relation $r(\mathcal{A})$ est un préordre (trivial) ;

2 - pour toute relation binaire R, on a $R \subset r(h(R))$;

3 - si $R \subset R'$ alors $h(R') \subset h(R)$
(soit $H \in h(R')$, alors
$\forall\, x, y \in E \quad (x,y) \in R$ et $y \in H \Rightarrow (x,y) \in R'$ et $y \in H \Rightarrow x \in H)$;

4 - si $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ alors $r(\mathcal{A}') \subset r(\mathcal{A})$
(trivial);

Soit P un préordre sur E, et associons à toute partie A de E <u>son ascendant</u> a(A) défini par:

$$a(A) = \{ x \in E : \exists\, y \in A \quad (x,y) \in P \} \tag{9}$$

et définissons <u>l'ascendance</u> a(P) comme l'ensemble des ascendants de toutes les parties de E.

<u>Lemme 1</u>: Si P est un préordre $h(P) = a(P)$

<u>preuve</u>: Pour toute partie A, a(A) est un ensemble héréditaire pour P: en effet
$(x,y) \in P$ et $y \in a(A) \Rightarrow \exists\, z \in A \ (y,z) \in P$
et par transitivité de P, $x \in a(A)$.
Pour toute partie héréditaire H pour P, on a $a(H) = H$;
en effet $H \subset a(H)$ (réflexivité de P)
et $\forall x \in a(H)\ \exists\, y \in H \ (x,y) \in P$
donc $x \in H$ puisque H est héréditaire. #

<u>Lemme 2:</u> Si P est un préordre, $P = r(P))$.

<u>preuve:</u> D'après l'observation 2 et le lemme précédent, il suffit de montrer que $r(a(P)) \subset P$. Soit $x,y \in E$ tels que $(x,y) \in r(a(P))$, alors $(\forall A \subset E,\ y \in a(A) \Rightarrow x \in a(A))$. En particulier $x \in a(\{y\})$, donc $(x,y) \in P$. #

<u>Corollaire:</u> Pour toute relation binaire R, on a:
$r(h(r(h(R)))) = r(h(R))$.

<u>Théorème 2:</u> Pour toute relation binaire R, on a:
$r(h(R)) = R^+$

<u>preuve:</u> D'après les observations 1 et 2 et la définition de R^+ on a $R \subset R^+ \subset r(h(R))$

d'après l'observation 3:

$$h(R) \supset h(R^+) \supset h(r(h(R)))$$

d'après l'observation 4:

$$r(h(R)) \subset r(h(R^+)) \subset r(h(r(h(R))))$$

d'après le lemme 2 et son corollaire:

$$r(h(R)) \subset R^+ \subset r(h(R)).$$ #

4. <u>Anneaux achevés d'ensembles et préordres:</u>

Les résultats du théorème 1 et du Lemme 2 permettent d'exhiber une relation entre anneaux achevés d'ensembles sur E et préordres sur E.

<u>Théorème 3:</u> Il existe une bijection entre l'ensemble des anneaux achevés d'ensembles sur E et l'ensemble des préordres sur E.

<u>preuve:</u> Les applications r et h définissent cette bijection et son inverse: en effet d'après la démonstration du théorème 1, pour tout anneau achevé d'ensemble $\mathcal{A}$ sur E,

$$\mathcal{A} = h(r(\mathcal{A}))$$

et d'après le lemme 2,

$$P = r(h(P)) \text{ pour tout préordre } P \text{ sur } E.$$

#

Tous les résultats précédents ont été obtenus en considérant uniquement des anneaux achevés d'ensembles contenant la partie vide ϕ et la partie pleine E. L'extension des théorèmes 1 et 3 à des anneaux achevés d'ensembles plus généraux peut se faire de la manière suivante: si l'on définit:

(10) $$E'' = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A, \quad E' = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A - E'' \quad \text{et} \quad E''' = E - (E' \cup E''),$$

l'anneau $\mathcal{A}$ induit une famille de parties $\mathcal{A}'$ de E', par la relation

(11) $$A' \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow A' \cup E'' \in \mathcal{A}$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{A}'$ est un anneau achevé d'ensembles contenant les parties triviales ϕ et E' et les résultats précédents, valables pour $\mathcal{A}'$, s'appliquent aussi à $\mathcal{A}$ en effectuant les changements nécessaires.

REFERENCES

[1] G. Birkhoff "On the combination of subalgebras" Proc. Cambridge Philos.Soc. 29, 441-464 (1933).

[2] G. Grätzer "Lattice theory: first concepts and distributive lattices" W.H. Freeman and Comp., San Francisco, (1971).

[3] G. Szász "Théorie des treillis" Dunod, Paris (1971).