

## &lt;研究ノート&gt;

## 最適制御問題の経済学的解釈(2)

金 江 亮

## はじめに

加藤[2]4.9節の一般的定式化で、実用上のほとんどすべての問題に適用できる最適制御問題とその解法を扱っている。拙稿[5]では、この行間を補った上で、経済学の観点から解釈した。解法としては形式的にはこれで十分ではあるが、経済学の最適制御問題では特に、時間選好率を被積分関数に組み込むのが一般的である。もちろん、その場合も数理的には一般的定式化に含まれているが、明示的に別扱いとし、また経済学的解釈も考える方が自然であり、本稿で考察する。なお、拙稿[5]と部分的に重複があるが、本稿単独で見ても自己完結的に読めるように、あえてそのままにしてある。

## 時間選好率を伴う一般的定式化

時間選好率を被積分関数に組み込んだ一般的定式化を考える。元になるのは加藤[2]4.9節の式であり、これらに時間選好率を組み込んでいく。対応する式が分かりやすくなるように、加藤[2]の数式番号に'をつけて表すことにする。

時間選好率は定数とすることが多いが、もっと一般的に瞬時的時間選好率  $r(\tau)$  を用いることにする。例えば、時点  $t$  における効用  $U$  を時点 0 を基準として割り引くと、 $e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} U$  となる。 $r(\tau)$  が定数  $r$  のときは  $e^{-rt} U$  となり、通常定数の時間選好率の場合に一致する。なお、時間選好率の文字と

---

キーワード：最適制御, ハミルトニアン, ラグランジアン, 最大原理, 変分法

しては $\rho$ を用いることが多いが、加藤[2]では別のところで用いられているため、ここでは $r$ とした。

さて、以下、加藤[2]4.9節の定式化に時間選好率を組み込んでみる。

運動が微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.136)$$

および代数方程式の付帯条件

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0 \quad (4.137)$$

で記述される系があり、状態量の初期値と終端値は

$$\tilde{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.138)'$$

$$\tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.139)'$$

と拘束されているものとする。このとき評価関数

$$V = e^{-\int_{t_0}^{t_f} r(\tau) d\tau} \tilde{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0] + e^{-\int_{t_0}^{t_f} r(\tau) d\tau} \tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_{t_0}^{\tau} r(\tau) d\tau} \tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

を停留させる制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を見出せ。付帯条件や拘束条件は互いに矛盾しないことを仮定する。また、太字の文字は列ベクトルである。 $\mathbf{x}$ は状態変数で $\mathbf{u}$ は制御変数である。 $t_0$ は初期時点、 $t_f$ は終端時点で、初期時点・終端時点とも固定されておらず、それ自身が制御の対象であり、従って $t_0$ 、 $t_f$ はいずれも自由変数とする。ただし、拘束条件があり、それが(4.138)'(4.139)'である。なお、 $\tilde{\phantom{x}}$ はたんなる印で、微分などの意味はない。

時間選好率が無い場合の評価関数は、以下の式であった。

$$J = \eta[\mathbf{x}(t_0), t_0] + \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

$V$ 、 $J$ を比べると、以下の対応があることが分かる。

$$\begin{aligned} \eta[\mathbf{x}(t_0), t_0] &= e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \tilde{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0], \phi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f], \\ L[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] &= e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{aligned} \quad (1)$$

これを見て分かるように、時間選好率を組み込んだ場合も、加藤[2] 4.9節の一般的定式化に含まれていることが分かる。

$\tilde{\cdot}$  のある変数・定数は経済学的には時点  $t$  での効用を意味しており、それを時点 0 で評価するために割り引くと、元々の加藤[2]の一般的定式化と一致する<sup>1)</sup>。ちょうど、 $r=0$  の場合には割引がないので、 $V$ 、 $J$  は一致する。なお (4.136) (4.137) では  $\tilde{\cdot}$  はついていないが、これらは物量を表す式だからである。

### 一般的定式化の解法

ラグランジュ乗数  $\tilde{\lambda}(t)$ 、 $\tilde{\rho}(t)$ 、 $\tilde{\mu}$ 、 $\tilde{\nu}$  を用い、評価関数  $V$  を次のように拡張する。

$$\begin{aligned} V^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) &= \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \{ \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}(\mathbf{x}, t) \} \right]_{t=t_0} + \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \{ \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) \} \right]_{t=t_f} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}^* dt \end{aligned} \quad (4.141)'$$

ただし

$$\tilde{L}^* = \tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \tilde{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \tilde{\rho}^T(t)\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.142)'$$

なお、太文字の右肩にある  $\mathbf{T}$  は転置を表す<sup>2)</sup>。

(4.141)' で、 $e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau}$  の項の中で、制約条件  $\chi[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0$ 、 $\psi[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$  にラグランジュ乗数  $\tilde{\mu}$ 、 $\tilde{\nu}$  をかけて加えられているのが気になるかもしれないが、以下のように分けて書いても同じである。

1) 本稿では、 $\tilde{\cdot}$  のついた変数・定数はすべてこの意味で用いられている。

2) なお、 $\rho$  は経済学では時間選好率を表すことが多いが、ここではそのような意味は無い。紛らわしいので本来なら別の文字にしたいが、加藤[2]のままにしてある。

$$\begin{aligned}
 & V^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}) \\
 & = \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\mu}^T \tilde{\chi}(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_0} + \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\nu}^T \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) \right]_{t=t_f} \\
 & \quad + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}^* dt \tag{4.141}
 \end{aligned}$$

これで,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \boldsymbol{\mu}, \tilde{\boldsymbol{\nu}} = e^{\int_0^t r(\tau) d\tau} \boldsymbol{\nu} \tag{2}$$

とおけば (4.141)'' は (4.141)' に帰着される。

経済学的には、 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}$  は時点  $t$  で測った価値で、 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}$  は時点 0 で測った価値である。その時点差  $t$  の分だけ、評価が割引率  $r$  で割り引かれることを意味している。なお  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t), \tilde{\boldsymbol{\nu}}(t)$  と時刻  $t$  の関数としていないのは、それぞれ時点  $t_0, t_f$  においてのみ制約条件が要求されているからである。

$V^*$  の第一変分を計算する。変分の影響を受ける独立の変数は  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}, t_0, t_f$  である。変分は  $\delta$  で表す。

一般に、関数  $y(x)$  の  $x = x_1$  における全微分と変分の関係は

$$dy(x_1) = \delta y(x_1) + y'(x_1) dx_1 \tag{2.26}$$

である。これは、全微分の  $d$  が、関数  $y$  そのものものと、 $x_1$  の両方の変化の影響があると思えば理解しやすい。これから

$$\delta y(x_1) = dy(x_1) - y'(x_1) dx_1 \tag{2.27}$$

が得られるが、この関係を初期時点・終端視点に適用すると以下を得る。

$$\delta \mathbf{x}(t_0) = d \mathbf{x}(t_0) - \dot{\mathbf{x}}(t_0) dt_0 \tag{4.143}$$

$$\delta \mathbf{x}(t_f) = d \mathbf{x}(t_f) - \dot{\mathbf{x}}(t_f) dt_f \tag{4.144}$$

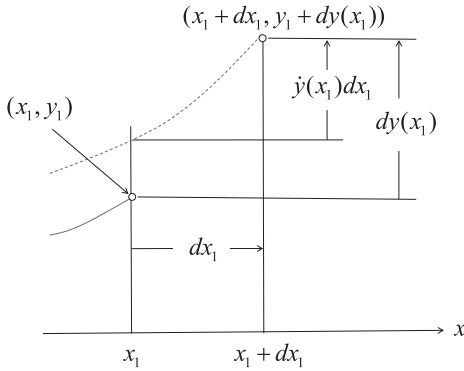


図 2.5  $dx_1, dy(x_1), \delta y(x_1)$  の関係  
(加藤[2]p. 29より作成)

この式を使って、第一変分を計算する。

$$\begin{aligned} \delta V^* &= e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) \\ &+ e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(\tilde{\eta} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \tilde{\boldsymbol{\chi}}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\chi}}}{\partial t} \right) \right]_{t=t_0} dt_0 + e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} [\delta \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \tilde{\boldsymbol{\chi}}]_{t=t_0} \\ &+ e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\psi}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) \\ &+ e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(\tilde{\phi} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\psi}}}{\partial t} \right) \right]_{t=t_f} dt_f + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} [\delta \tilde{\boldsymbol{\nu}}^T \tilde{\boldsymbol{\psi}}]_{t=t_f} \\ &+ e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} [\tilde{L}^*]_{t=t_f} dt_f - e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} [\tilde{L}^*]_{t=t_0} dt_0 \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \left( \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}} \right] \delta \mathbf{x} \right. \\ &\left. + \left[ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} \right] \delta \mathbf{u} - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \delta \dot{\mathbf{x}} + \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T(t) \mathbf{C} \right) dt \end{aligned}$$

ここで

$$\tilde{H} = \tilde{L} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) \mathbf{f} + \tilde{\boldsymbol{\rho}}^T(t) \mathbf{C}$$

とおく。これを経常価値ハミルトニアンという<sup>3)</sup>。これを用いると、上記の

3) 通常ハミルトニアンは時点0で測られており、現在価値ハミルトニアンという。現在価値ハミルトニアン  $H$  と経常価値ハミルトニアン  $\tilde{H}$  とは  $H = e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{H}$  の関係がある。(1)(2)と同じ関係である。

積分記号の中の  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$  の直前の括弧の中はそれぞれ

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\lambda}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\rho}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{u}} + \tilde{\lambda}^T(t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} + \tilde{\rho}^T(t) \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}}$$

と表せる。

また、部分積分の公式から、積分記号の中にある  $\lambda^T(t) \delta \dot{\mathbf{x}}$  の項は計算できる。変分  $\delta$  と微分は交換できることに注意して

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \delta \dot{\mathbf{x}} dt \\ &= \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x} \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left( e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \right)' \delta \mathbf{x} dt \\ &= \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \right]_{t=t_f} \delta \mathbf{x}(t_f) - \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \right]_{t=t_0} \delta \mathbf{x}(t_0) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \left( e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \right)' \tilde{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \dot{\tilde{\lambda}}^T(t) \delta \mathbf{x} dt \\ &= \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) - \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \right]_{t=t_f} dt_f \\ &\quad - \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) + \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \right]_{t=t_0} dt_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} r(t) \tilde{\lambda}^T(t) \delta \mathbf{x} dt - \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \dot{\tilde{\lambda}}^T(t) \delta \mathbf{x} dt \end{aligned}$$

となるので、これらを用いて  $\delta V^*$  の式変形を進める。

$dt_0$  を含む項の係数は

$$\begin{aligned} & e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t_0) (\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) \right]_{t=t_0} \\ & - e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} [\tilde{L}^*]_{t=t_0} - e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t) \right]_{t=t_0} \\ &= e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t_0) (\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) \right. \\ & \quad \left. - \{ (\tilde{L} + \tilde{\lambda}^T(t) (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \tilde{\rho}^T(t) \mathbf{C}) \} - \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \\ &= e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t_0) (\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) - (\tilde{L} + \tilde{\lambda}^T(t) \mathbf{f} + \tilde{\rho}^T(t) \mathbf{C}) \right]_{t=t_0} \\ &= e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t_0) (\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) - \tilde{H} \right]_{t=t_0} \end{aligned}$$

$dt_f$  を含む項の係数は

$$\begin{aligned}
 & e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) \right]_{t=t_f} \\
 & + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} [\tilde{L}^*]_{t=t_f} + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} [\tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}}(t)]_{t=t_f} \\
 & = e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) + \tilde{L}^* + \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \\
 & = e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (\tilde{L} + \tilde{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \tilde{\rho}^T(t)\mathbf{C}) + \tilde{\lambda}^T(t) \dot{\mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \\
 & = e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) + (\tilde{L} + \tilde{\lambda}^T(t)\mathbf{f} + \tilde{\rho}^T(t)\mathbf{C}) \right]_{t=t_f} \\
 & = e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) + \tilde{H} \right]_{t=t_f}
 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
 \delta V^* & = e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) - \tilde{H} \right]_{t=t_0} dt_0 \\
 & + e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \left[ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\lambda}^T \right]_{t=t_0} d\mathbf{x}(t_0) \\
 & + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ -r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}) + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) + \tilde{H} \right]_{t=t_f} dt_f \\
 & + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \mathbf{x}} - \tilde{\lambda}^T \right]_{t=t_f} d\mathbf{x}(t_f) \\
 & + e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} [\delta \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}]_{t=t_0} + e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} [\delta \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}]_{t=t_f} \\
 & + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\tilde{\lambda}}^T - r \tilde{\lambda}^T \right) \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \delta \tilde{\lambda}^T (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \delta \tilde{\rho}^T \mathbf{C} \right] dt
 \end{aligned} \tag{4.145}$$

となる。ここから、最適化の必要条件が以下のように得られる。

$$\delta \mathbf{x} = 0 \text{ より, 随伴変数の微分方程式} \quad r \tilde{\lambda}^T = \dot{\tilde{\lambda}}^T + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} \tag{4.147}'$$

$$\delta \mathbf{u} = 0 \text{ より, 制御入力最適性の条件} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \tag{4.148}'$$

$$\delta \tilde{\lambda}^T = 0 \text{ より, 運動方程式} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (4.149)$$

$$\delta \tilde{\rho}^T = 0 \text{ より, 等式拘束条件} \quad \mathbf{C} = 0 \quad (4.150)$$

$$\delta \tilde{\mu}^T = 0 \text{ より, 初期拘束条件} \quad \tilde{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.151)'$$

$$\delta \tilde{\nu}^T = 0 \text{ より, 終端拘束条件} \quad \tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.152)'$$

$$d\mathbf{x}(t_0) = 0 \text{ より, 随伴変数初期条件} \quad \tilde{\lambda}^T(t_0) = \left[ -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} - \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \quad (4.153)'$$

$$d\mathbf{x}(t_f) = 0 \text{ より, 随伴変数終端条件} \quad \tilde{\lambda}^T(t_f) = \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \quad (4.154)'$$

$dt_0 = 0$  より, 未知量  $t_0$  に対する条件

$$[r(t)(\tilde{\eta} + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi})]_{t=t_0} = \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \right) - \tilde{H} \right]_{t=t_0} \quad (4.155)'$$

$dt_f = 0$  より, 未知量  $t_f$  に対する条件

$$[r(t)(\tilde{\phi} + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi})]_{t=t_f} = \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} \right) + \tilde{H} \right]_{t=t_f} \quad (4.156)'$$

がそれぞれ導かれる。なお, (4.149)~(4.152)' はもとの制約条件であり計算しなくても分かるが, 元々の制約条件下での最適化問題をラグランジュ乗数を用いて(4.141)' と書き直すことにより, 制約条件無し最適化問題に直されていることが分かる。

## 経済学的解釈

では, 経済学の観点からはこれらの式はどのように解釈できるだろうか。拙稿[5]に習って解釈してみる。状態変数  $\mathbf{x}$  を資本, 制御変数  $\mathbf{u}$  を各部門への労働の配分と考える。 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  を資本財の生産関数とする。ここの  $\mathbf{f}$  は, 減価償却部分も入っていると考える。一国で考えてみる。資本主義の成立時点を初期時点  $t_0$ , 次世代の経済体制, 例えば全面的AI化や社会主義など, 資本主義と質的に異なる経済体制が来る時点, すなわち資本主義の終端時点を  $t_f$  とし, 評価関数  $V$  はその間の国民純生産  $\tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  の合計と思え



ばよい。また  $\bar{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0]$ ,  $\bar{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  はそれぞれ初期時点・終端時点における国の資産や負債をその時点基準で測った評価と思えばよい。これを時点0基準で測ると割引かれて  $e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \bar{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0]$ ,  $e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \bar{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  となる。本稿では、一国として考えることを標準としている。

別な考え方としては、一個人を考えればよい。 $t_0$ ,  $t_f$  は、個人の生まれた時点と死ぬ時点とし、評価関数  $V$  はある一個人の生涯効用とする。時点  $t$  基準で測った瞬時的効用が  $\tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  で、資本財や労働によって生産された消費財から得られる効用と思えばよい。これを時点0基準で測ると割引かれて  $e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  となり、生まれた時点から死ぬ時点までのその総和が  $\int_0^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$  である。ただし、生まれた時点  $t_0$  基準で測った親からの相続  $\bar{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0]$  と、亡くなった時間  $t_f$  基準で測った子への遺産  $\bar{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  もそれぞれ割引いて  $e^{-\int_0^{t_0} r(\tau) d\tau} \bar{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0]$ ,  $e^{-\int_0^{t_f} r(\tau) d\tau} \bar{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  として生涯効用  $V$  には含まれる。さらに、これらは税引き後と思ってよい。 $t_0$ ,  $t_f$  は制御変数なので、生まれる時点と死ぬ時点を選択するのは不自然ではあるが、たとえば親・子・孫がいて自分が子として、親から子への、あるいは子から孫への生前贈与や遺産相続をどの時点で行うか、子が選ぶと思えばよい。

他の考え方として一企業と思うこともできる。一企業の場合は、企業の設立を初期時点  $t_0$ 、企業の廃業・清算を終端時点  $t_f$  とし、評価関数  $V$  は会社の設立から清算までの総企業価値と思えばよい。また  $\bar{\eta}[\mathbf{x}(t_0), t_0]$ ,  $\bar{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f]$  はそれぞれ初期時点・終端時点における各種税引き後の資産と思えばよい。

また代数方程式の付帯条件  $\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0$  は、ストックでなく中間財（フロー）の資源制約式と思えばよい。

状態量の初期値と終端値はそれぞれ  $\bar{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0$ ,  $\bar{\boldsymbol{\phi}}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0$  で拘束されるが、これらはそれぞれ、初期時点での資本量  $\mathbf{x}(t_0)$ 、終端時点での資本量  $\mathbf{x}(t_f)$  生産のためのそれぞれの時点基準の効用単位で測った中間財量と思うことにする。これは分かりにくいですが、資本主義の誕生は無傷でなく、

資本の原始蓄積  $\mathbf{x}(t_0)$  のために必要なコスト (囲い込み) のようなものをイメージすればよい。終端時点では、次世代の経済体制のための、やはり囲い込みのようなコスト、革命のコストのようなものと思ってもよい。あるいは逆にそれぞれ、コストでなく便益と思ってもよい。資本の原始蓄積を初期時点の臨時収入のようなものとみなしたり、資本主義から次世代の経済体制への移行期にもそのようなことがあると思えば、それぞれ便益とみなせる。資本主義という時代の始まりには特別なコストないし便益があるということである。ここでは単純に、資本主義の成立と終焉には中間財に相当するものがある、と考えることにする。

ある時点において、瞬時的効用  $\bar{L}$  だけを最大化するために資本財を過剰に使うと、その時点だけ効用が高くても、将来時点において資本財が過小になり、消費財の生産量が減って効用が下がり、生涯効用はむしろ減少してしまう。かといって、資本財の蓄積ばかり優先して消費財の消費が低いと、やはり生涯効用は低くなってしまふ。ちょうどよいバランスを取らなければならない。そのためには単にその時点の瞬時的効用だけでなく、将来時点の資本のことも考えなければならない。資本財はそれ自身、食べて効用を得られるわけではないが、それによって将来の消費財生産を増やす効果がある。よって、価値があるわけで、価格がつくはずである。

現時点の消費財から得られる効用や、資本財からの将来の消費財生産から得られる効用の増分を一元化して測るために、いわば効用単位で書くために換算したものが経常価値ハミルトニアン  $\bar{H} = \bar{L} + \tilde{\lambda}^T(t)\mathbf{f} + \tilde{\rho}^T(t)\mathbf{C}$  である。経常価値とは時点  $t$  基準の効用単位で測っているという意味で、一国というならば、 $\bar{H}$  は経常国民純所得で、 $\tilde{\lambda}(t)$ 、 $\tilde{\rho}(t)$  はそれぞれ資本財 (ストック) と中間財 (フロー) の価格である。

$$\begin{aligned}
 & V^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \\
 & = \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \{ \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mu}^T \tilde{\chi}(\mathbf{x}, t) \} \right]_{t=t_0} + \left[ e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \{ \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) + \tilde{\nu}^T \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) \} \right]_{t=t_f} \\
 & \quad + \int_{t_0}^{t_f} e^{-\int_0^t r(\tau) d\tau} \tilde{L}^* dt \tag{4.141}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{L}^* = \tilde{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \tilde{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) + \tilde{\rho}^T(t)\mathbf{C}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (4.142)'$$

も同じように解釈できる。時点  $t$  基準の効用単位で測って、 $\tilde{\mu}$  は、初期時点の中間財  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_0), t_0)$  の価格、 $\tilde{\nu}$  は、終端時点の中間財  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  の価格である。 $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}$  は生産超過分である。(4.142)' は、資本財や中間財の生産超過・未使用部分がある場合は、それを市場価格  $\tilde{\lambda}(t)$ 、 $\tilde{\rho}(t)$  で売却し、それによる収益で効用が得られるとし、逆に生産不足分がある場合は購入し効用が失われることを意味している。(4.141)' は、それを初期時点、終端時点の中間財の生産超過・未使用部分や生産不足分を考慮し、その間のすべての時点において総計したものである。ただし、時点0基準にそろえて割引いて評価されている。なお、実際は最適な状態では資源は使い切るため、未使用な部分も生産不足分もない。

このとき、最適化の必要条件 (4.147)' ~ (4.156)' の経済学的意味は、それぞれ以下ようになる。

$$\text{随伴変数の微分方程式} \quad r\dot{\tilde{\lambda}}^T = \dot{\tilde{\lambda}}^T + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.147)'$$

この式の左辺は、資本財1単位に相当する価値を利率  $r$  で運用して得られる収益(トータルリターン)であり、右辺の  $\dot{\tilde{\lambda}}^T$  は資本財のキャピタルゲインであり、 $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{x}}$  は資本財1単位当たりの収益(インカムゲイン)を意味している。ただしすべて時点  $t$  基準の効用で評価したものである。一国の総資本において、効用のレベルで、トータルリターン = キャピタルゲイン + インカムゲインが成立していることを意味する。

$$\text{制御入力 of 最適性の条件} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (4.148)'$$

この式は、最適な状態では、労働配分を微量量変えても変化がないことを意味している。山頂付近では山の高さが変わらない、水平である、ということ想像すればよい。

$$\text{運動方程式} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (4.149)$$

(4.145)' では  $\delta \bar{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})$  となっているが、 $\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}$  は生産超過分であった。 $\mathbf{f}$  は資本財の生産量で、 $\dot{\mathbf{x}}$  はそのうち、資本蓄積に回る分である。仮に一部未使用の部分を残すならば  $\mathbf{f} > \dot{\mathbf{x}}$  となり、逆に不足分があるならば  $\mathbf{f} < \dot{\mathbf{x}}$  となる。どちらにせよ、時点  $t$  基準の効用で測った資本財価格が  $\delta \bar{\lambda}(t)$  だけ変化した場合、効用は  $\delta \bar{\lambda}^T(t)(\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}})$  だけ変化する、ということの意味している<sup>4)</sup>。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、資本財生産分をすべて資本蓄積に回すのが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.149) である。

$$\text{等式拘束条件} \quad \mathbf{C} = 0 \quad (4.150)$$

(4.145)' では  $\delta \bar{\rho}^T \mathbf{C}$  となっているが、 $\mathbf{C}$  は中間財の生産量である。仮に一部未使用部分を残すならば  $\mathbf{C} > 0$  となる。逆に不足分があるならば  $\mathbf{C} < 0$  となる。どちらにせよそれらの場合、時点  $t$  基準の効用で測った中間財価格が  $\delta \bar{\rho}$  だけ変化した場合、効用は  $\delta \bar{\rho}^T \mathbf{C}$  だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では変化がないはずである。また、中間財生産分に過不足がないことが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.150) である。

$$\text{初期拘束条件} \quad \bar{\mathbf{x}}[\mathbf{x}(t_0), t_0] = 0 \quad (4.151)'$$

(4.145)' では  $[\delta \bar{\mu}^T \bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0}$  となっているが、 $[\bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0}$  は初期時点の中間財量である。仮に一部未使用部分を残すならば  $[\bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0} > 0$  となる。不足分があるならば  $[\bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0} < 0$  となる。どちらにせよその場合、中間財価格が  $\delta \bar{\mu}$  だけ変化した場合、効用は  $[\delta \bar{\mu}^T \bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0}$  だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、中間財は過不足がないことが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.151)' である。

4) 不足分がある場合は、負値になる。他から買い取るための費用と思える。

$$\text{終端拘束条件} \quad \tilde{\phi}[\mathbf{x}(t_f), t_f] = 0 \quad (4.152)'$$

(4.145)' では  $[\delta \nu^T \tilde{\phi}]_{t=t_f}$  となっているが、 $[\tilde{\phi}]_{t=t_f}$  は終端時点の中間財量である。仮に一部未使用部分を残すならば  $[\tilde{\phi}]_{t=t_f} > 0$  となる。逆に不足分があるならば  $[\tilde{\phi}]_{t=t_f} < 0$  となる。その場合、中間財価格が  $\delta \nu$  だけ変化した場合、効用は  $[\delta \nu^T \tilde{\phi}]_{t=t_f}$  だけ変化する、ということの意味している。ただし、最適な状態では、変化がないはずである。また、中間財に過不足がないことが合理的なので、等式で成り立つ。それが、(4.152)' である。

$$\text{随伴変数初期条件} \quad \tilde{\lambda}^T(t_0) = \left[ -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} - \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} \quad (4.153)'$$

初期時点  $t_0$  において、資本財価格  $\tilde{\lambda}^T(t_0)$  は、資本量が限界1単位増加した場合の資産の増分  $\left[ -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$  と、中間財の増分  $\left[ -\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$  の価格換算  $\left[ -\tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$  との合計と等しくなる。

これは意味が分かりにくいので、一般には負値でなくてもよいが、例として負値の場合に説明してみる。資本量が限界1単位増加した場合の資産の減少が  $\left[ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} < 0$  であり、中間財の減少が  $\left[ \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} < 0$  で、価格換算で  $\left[ \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} < 0$  で、その合計が  $\left[ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} + \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} < 0$  であり、減少分  $\left[ -\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} - \tilde{\mu}^T \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} > 0$  が資本財価格  $\tilde{\lambda}^T(t_0)$  が等しくなると考えればよい。初期では資本財や中間財が過少で価格が高いが、初期資本量が多いほど、希少性が薄れて価格は下がると思えば  $\left[ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$ 、 $\left[ \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0} < 0$  となる。

あるいはこう思ってもよい。 $\left[ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$  や  $\left[ \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_0}$  は負値でそれは初期時点、つまり資本主義が成立するのに要求される資本量(最低必要資本量)が大きくなればなるほど、資本主義成立にコストがかかることを意味している。資本の原始蓄積がより強力に要求されるほど、よりコストがかかる、と思えばイメージしやすい。

$$\text{随伴変数終端条件} \quad \tilde{\lambda}^T(t_f) = \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{x}} + \nu^T \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t=t_f} \quad (4.154)'$$

終端時点において、資本量が限界1単位増加した場合の資産の増分が  $\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  であり、中間財の増分が  $\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  で、価格換算では  $\left[\bar{\nu}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f}$  で、その合計が資本財価格  $\bar{\lambda}^T(t_f)$  と等しい。

これは意味が分かりにくいので、一般には正值でなくてもよいが、例として正值の場合に説明してみる。資本量が限界1単位増加した場合の資産の増加が  $\left[\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f} > 0$  であり、中間財の増加が  $\left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f} > 0$  で、価格換算で  $\left[\bar{\nu}^T \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f} > 0$  で、その合計が  $\left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{x}} + \bar{\nu}^T \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_f} > 0$  であり、増加分が資本財価格  $\bar{\lambda}^T(t_f)$  が等しくなると考えればよい。終端時点において、最適状態では、資産として残しても、生産に回した場合の限界生産性を考えても同じ価値になる、ということの意味している。

$$\text{未知量 } t_0 \text{ に対する条件 } [r(t)(\bar{\eta} + \bar{\mu}^T \bar{\mathbf{x}})]_{t=t_0} = \left[ \left( \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \bar{\mu}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \right) - \bar{H} \right]_{t=t_0} \quad (4.155)'$$

初期時点が  $dt_0$  だけ遅くなると、その間は生産が行われないため、生涯効用から国民純所得生産  $[\bar{H}]_{t=t_0}$  だけ失われる。負のインカムゲイン（インカムロス）と思ってよい。一方でその  $dt_0$  の微小時間の間に、初期時点の資産・中間財の価値は  $\left[\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \bar{\mu}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t}\right]_{t=t_0}$  だけ変化する。一般に、初期時点で資本財や中間財は過少で価格は高く、初期時点が遅れるほど希少性が増し、ますます高騰するとして正值と思えばよい。一種のキャピタルゲインと思ってよい。これが右辺である。一方、同額の資産  $[\bar{\eta} + \bar{\mu}^T \bar{\mathbf{x}}]_{t=t_0}$  を金利  $r(t_0)$  で運用したものが左辺である。トータルリターンと思ってよい。 $t_0$  という時点自体も制御変数であり、最適状態ならば、その両方が裁定により等しくなり、トータルリターン＝キャピタルゲイン＋インカムゲインが成り立つことを意味している。

$$\text{未知量 } t_f \text{ に対する条件 } [r(t)(\bar{\phi} + \bar{\nu}^T \bar{\phi})]_{t=t_f} = \left[ \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \bar{\nu}^T \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right) + \bar{H} \right]_{t=t_f} \quad (4.156)'$$

終端時点が  $dt_f$  だけ遅くなると、その間の分だけ生産が行われることになり、生涯効用に国民純所得  $[\bar{H}]_{t=t_f}$  だけ追加される。インカムゲインと思っ

てもよい。一方でその  $dt_f$  の微小時間の中に、終端時点の資産・中間財の価値は  $\left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{v}^T \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{t=t_f}$  だけ変化する。一般に、時間が経つにつれ資本財や中間財は豊富になり、財の価格は下落するとして負値と思えばよい。一種の負のキャピタルゲイン（キャピタルロス）と思ってもよい。これが右辺である。一方、同額の資産  $[\bar{\phi} + \bar{v}^T \bar{\phi}]_{t=t_f}$  を金利  $r(t_f)$  で運用したものが左辺である。トータルリターンと思ってもよい。 $t_f$  という時点自体も制御変数であり、最適状態ならば、その両方が裁定により等しくなり、トータルリターン = キャピタルゲイン + インカムゲインが成り立つことを意味している。

## まとめ

時間選好率を伴う一般的定式化の下で、最適化条件と経済学的解釈を考察した。数学的には、拙稿[5]に含まれているが、時間選好率を別扱いにする定式化の方が、経済学的には自然である。

その結果、最適化の一階条件のすべてに極めて分かりやすい経済学的な意味があることが分かる。

ベルマンの最適性の原理からハミルトニアンを導出でき、その経済学的解釈も考察する必要がある。これは特に、確率制御を考える上では必要となる。これらは、次の機会としたい。

## 参考文献

- [1] 『マルクス経済学[第2版]』(大西広, 慶應義塾大学出版会, 2015年)。
- [2] 『工学的最適制御』(加藤寛一郎, 東京大学出版会, 1988年)。
- [3] 『マルクス派最適成長論』(金江亮, 京都大学学術出版会, 2013年)。
- [4] 離散的動学的最適化問題の経済学的意味, 桃山学院大学経済経営論集第60巻第2号, pp.79-85, 2018年。
- [5] 最適制御問題の経済学的解釈(1), 桃山学院大学経済経営論集第62巻第2号, pp.47-59, 2020年。
- [6] 『内生的経済成長論Ⅱ[第2版]』(R.J. バロー/X. サラ-イ-マーティン, 大住圭介訳, 九州大学出版会, 2006年)。

[7] 『経済学のための最適化理論入門』（西村清彦，東京大学出版会，1990年）。

（かなえ・りょう／経済学部准教授／2020年12月1日受理）



## Economic Interpretation of Solution of Optical Growth Model(2)

KANAE Ryo

In my previous articles[5], I introduced the general formulation in section 4.9 of Kato[2] and interpreted it from the economic viewpoint. However, this formulation does not contain time preference. In most of optimal growth models, instantaneous utility function has time preference.

Hence, this article shall generalize the general formulation in section 4.9 of Kato[2] to include time preference and be interpreted from the perspective of economics.