MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Šimon Knoška

Konformně provázané prostoročasy

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Robert Švarc, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Obecná fyzika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 16.5.2019 Šimon Knoška

V prvom rade by som rád na tomto mieste poďakoval vedúcemu svojej bakalárskej práce RNDr. Robertovi Švarcovi, Ph.D. za jeho ústretový prístup, dôkladnosť, trefné postrehy a námety počas konzultácií. Som vďačný za početné návrhy a nápady, ktoré viedli k vyššej úrovni tohto textu.

Ďalej by som sa rád poďakoval pedagógom, ktorých prednášky som počas svojho doterajšieho štúdia navštevoval a bez ktorých by táto práca nemohla vzniknúť. Zvlášť musím vyzdvihnúť Proseminár teoretickej fyziky prof. RNDr. Jiřího Podolského, CSc., DSc., Geometrické metódy teoretickej fyziky, ktoré viedol prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D. a v neposlednom rade Obecnú teóriu relativity od doc. RNDr. Oldřicha Semeráka, DSc.

Prináleží mi poďakovať sa aj spolužiakom za plodné a inšpiratívne debaty týkajúce sa tohto textu, ktoré viedli k hlbšiemu porozumeniu a pochopeniu celej problematiky.

Názov práce: Konformně provázané prostoročasy

Autor: Šimon Knoška

Ústav: Ústav teoretické fyziky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Hlavným cieľom tejto práce je skúmať možnosť generovania Robinsonových–Trautmanových priestoročasov z Kundtovej triedy geometrií. V prvej kapitole tejto práce zhŕňame poznatky o Robinsonových–Trautmanových a Kundtových geometriách v ľubovoľnej dimenzii. Názorne zavádzame súradnice adaptované na nulovú foliáciu priestoročasu generovanú netwistujúcou bezshearovou afinne parametrizovanou nulovou geodetickou kongruenciou. Ďalej sumarizujeme poznatky o konformných transformáciách všeobecných geometrií a detailne ukazujeme konformný vzťah medzi Robinsonovou–Trautmanovou a Kundtovou triedou priestoročasov. V záverečnej kapitole sa s použitím tohto konformného vzťahu snažíme nájsť príklady riešenia rovníc gravitačného poľa v Einsteinovej všeobecnej relativite a štvorrozmernej kvadratickej gravitácii.

Kľúčové slová: Konformné transformácie, nulová geodetická kongruencia, Robinsonove–Trautmanove priestoročasy, Kundtove priestoročasy, Einsteinova teória relativity.

Title: Conformally related spacetimes

Author: Šimon Knoška

Institute: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: RNDr. Robert Švarc, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: The main objective of this thesis is to investigate the possibility of creating Robinson–Trautman spacetimes from Kundt class of geometries. In the first chapter, properties of the Robinson–Trautman and Kundt geometries in arbitrary dimension are summarised. Natural coordinates adapted to the null spacetime foliation generated by non-twisting shear-free affinely parametrized null geodetic congruence are introduced. In the following chapter, general conformal transformation and specific conformal relation between the Robinson–Trautman and Kundt classes of spacetimes is discussed. Finally, attempts to find solutions to the field equations by employing this conformal relation in Einstein's theory of gravity as well as in 4-dimensional quadratic gravity are shown in the last chapter.

Keywords: Conformal transformation, null geodesic congruence, Robinson–Trautman spacetimes, Kundt spacetimes, Einstein's theory of relativity.

Obsah

Úvod

Teória relativity nepochybne patrí medzi najslávnejšie fyzikálne teórie vôbec. Priniesla svojmu autorovi taký úspech, že neexistuje človek, ktorý by nepočul o Albertovi Einsteinovi. V roku 1905 Einstein publikoval článok, ktorý sa považuje za zrod špeciálnej teórie relativity. Táto teória doplnila klasickú mechaniku o princíp maximálnej rýchlosti šírenia informácií a ako svoj dôsledok priniesla novinku, že čas a priestor nie sú od seba nezávislé, ale sú navzájom previazané. Einstein neskôr svoju teóriu obohatil o princíp ekvivalencie, ktorý umožnil popis gravitácie. Táto teória vysvetlila javy, ktoré newtonovská gravitácia popísať nedokázala. Konkrétne stáčanie perihélia Merkúru nad rámec perturbácií iných planét a korekcie na nesférický tvar Slnka. Bezprostredne prišla s predpoveďami doteraz nepozorovaných javov ako napríklad ohyb svetelných lúčov v gravitačnom poli alebo existenciou gravitačných vĺn. Ďalším pilierom, na ktorom je všeobecná teória relativity vyskladaná, je princíp všeobecnej kovariancie, ktorý kladie dôraz na to, že vo vesmíre neexistujú súradnice ako také, ale sú zavedené dodatočne ako pomôcka na popis prírody, a teda fyzikálne zákony by mali byť nezávislé od voľby súradníc.

Teória relativity je teóriou nekvantovou. Napriek tomu dobre funguje na škálach väčších ako sú Plankove škály, ktorých rozmery sú rádovo $10^{-35}\,\mathrm{m}$, hustoty $10^{96}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a čas $10^{-44}\,\mathrm{s}$. Experimentálnych testov, ktoré svedčia v prospech teórie je mnoho. Napríklad, ako je vyššie spomenuté, stáčanie perihélia Merkúru (a podľa neskorších meraní aj planét [1], prípadne binárnych pulzarov [2]), gravitačný frekvenčný posun (o ktorom sa presvedčil aj prvý satelit GPS [3]) alebo ohyb svetelných lúčov. Ďalšími príkladmi sú existencie relativistických vesmírnych objektov ako kvazary, pulzary, aktívne galaktické jadrá. V neposlednom rade je treba spomenúť gravitačné vlny prvýkrát priamo pozorované 14. septembra 2015 detektormi LIGO [4].

V matematickej reči sú jadrom všeobecnej teórie relativity Einsteinove rovnice gravitačného poľa. Tieto rovnice spájajú zakrivenie priestoročasu (Ricciho tenzor R_{ab} a Ricciho skalár R), metriku (g_{ab} je metrický tenzor) so zdrojmi poľa (tenzor energie a hybnosti T_{ab})

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}\,.$$

Rovnice gravitačného poľa boli spočiatku formulované bez kozmologického členu Λ. Ten bol do Einsteinových rovníc doplnený dodatočne ako pokus o konštrukciu uzavreného statického kozmologického modelu. V tradičnom 4-rozmernom formalizme ide o 10 kvázilineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktoré sú navzájom silne previazané. Je jasné, že hľadanie riešení takýchto rovníc je mimoriadne obtiažne. Častokrát sa musí pri riešení využívať symetria problému alebo sa rovnice riešia približnými či numerickými metódami.

V prípade, že existuje presné riešenie a je známe, nastáva ďalší problém pri jeho fyzikálnych interpretáciách. Všeobecná teória relativity spĺňa princíp kovariancie, čo, ako sme zmienili, znamená, že výsledky nie sú závislé od voľby súradníc. Avšak použitie niektorých súradníc je vhodnejšie ako iných či už z dôvodu symetrie alebo pre prítomnosť súradnicových singularít. Novoobjavené riešenie môže byť teda už známe riešenie, len zapísané v iných súradniciach. Aj samotný význam súradníc nie je vždy zrejmý. Tie nemusia mať fyzikálnu interpretáciu, napríklad súradnicový čas nemusí merať žiadny pozorovateľ. Signatúra metrického tenzoru vo všeobecnej relativite je (1,3), čo má za následok, že nie je možné spoľahnúť sa na euklidovskú predstavu (intuíciu) vzdialenosti alebo kolmosti.

Možno ešte viac neintuitívne je, že topologické vlastnosti priestoročasu nie sú dané rovnicami poľa, ale dodatočnými predpokladmi. Z toho potom plynie, že niektoré presné riešenia majú viac fyzikálnych interpretácií, ale často sa tiež stáva, že nemusí mať žiadnu. Napriek tomu má zmysel skúmať takéto patologické prípady, pretože to vedie k hlbšiemu porozumeniu Einsteinovej teórie a jej veľmi bohatej štruktúry. Ako referenčnú knihu pri štúdiu presných priestoročasov uveďme najmä [5, 6].

Rovnako má zmysel skúmať aj modifikované gravitačné teórie. Napríklad rozšírením rovníc do vyšších dimenzií môže teória ponúknuť nové riešenia alebo naopak, niektoré klasické 4-rozmerné riešenia vo vyšších dimenziách nemusia vôbec existovať. Ďalšou možnosťou je vkladanie nových členov do rovníc poľa (v teórii formulovanej v reči princípu najmenšej akcie). Typickými príkladmi môžu byť tzv. $f(R)$ teórie, či teória kvadratickej gravitácie.

Významným poznatkom, o ktorý sa v práci opierame, sú Kundtove geometrie, prípadne Robinsonove–Trautmanove geometrie. V práci skúmame konformnú previazanosť R–T geometrii s Kundtovými geometriami, a to špeciálne Weylovho typu N. Skúmame, za akých podmienok na konformný faktor bude Robinsonova–Trautmanova geometria riešením rovníc poľa (či už Einsteinových alebo kvadratickej gravitácie), a či sa vôbec dá vyjsť z ľubovoľnej Kundtovej geometrie.

1. Robinsonove–Trautmanove a Kundtove priestoročasy

Táto kapitola je venovaná popisu tried geometrií, v ktorých existujú netwistujúce svetelné geodetické kongruencie. Konštrukcia je všeobecná a neobmedzuje sa na konkrétnu dimenziu. Neuvažujú sa ani konkrétne rovnice poľa, a teda je možné uplatnenie získaného tvaru metriky ako v Einsteinovej teórii, tak aj v teóriách modifikovaných.

Najprv nájdeme súradnice adaptované na nulovú foliáciu a z nich získame tvar konkrétnej metriky. Zavedieme optické skaláry – expanziu, shear a twist. Na základe hodnoty expanzie ďalej klasifikujeme netwistujúce bezshearové geometrie na Robinsonove–Trautmanove (s nenulovou expanziou) a Kundtove priestoročasy (s nulovou expanziou), pozri [5, 6].

1.1 Súradnice adaptované na nulovú foliáciu

Uvažujme D-rozmernú ($D \geq 4$) lorentzovskú varietu[1] so súradnicami x^a, kde $a \in \{0, \dots, D-1\}$, a metrikou $\boldsymbol{g}$. Ďalej predpokladajme existenciu svetelných nadplôch. Tie sú popísané a číslované implicitnou funkciou $u(x^a) = \text{konst.}$ Funkciu u zoberieme ako novú súradnicu na variete. Pomocou nej definujeme zložky formy

$$k_a = -u_{,a}\,, \tag{1.1}$$

a vektor k nej získame pomocou metriky $k^a = g^{ab}k_b$. Takéto vektory generujú afinne parametrizované geodetiky, totiž

$$\frac{\mathrm{d}k_a}{\mathrm{d}r} - \Gamma^b{}_{ac}k^c k_b = k_{a,c}k^c - \Gamma^b{}_{ac}k^c k_b = k_{c,a}k^c - \Gamma^b{}_{ca}k^c k_b = k_{c;a}k^c = \frac{1}{2}(k_c k^c)_{;a} = 0\,, \tag{1.2}$$

kde r je afinný parameter, ktorý bude ďalšou súradnicou na variete. Z nezávislosti súradníc plynie $k^a = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}r} = \delta^a_r$. Týmto postupom sme zaviedli nové súradnice (r, u, x^p), kde $p \in \{2, \dots, D-1\}$, teda x^p predstavuje zvyšných $D-2$ priestorových súradníc. Z konštrukcie vyplýva niekoľko požiadaviek na metriku. Tie sú najlepšie vidieť z rovnosti $\delta^b_r = k^b = g^{bc}k_c = -g^{bc}\delta^u_c$ po zúžení oboch strán rovnice s g_{ab}. To znamená

$$g_{ar} = -\delta^u_a\,. \tag{1.3}$$

Použitím tejto rovnosti metrika nadobudne tvar

$$\mathrm{d}s^2 = g_{pq}\,\mathrm{d}x^p\mathrm{d}x^q + 2g_{up}\,\mathrm{d}x^p\mathrm{d}u - 2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}r + g_{uu}\,\mathrm{d}u^2\,. \tag{1.4}$$

Tvar metriky so zdvihnutými indexami g^{ab} dostaneme z požiadavky, že matica g^{ab} je matica inverzná ku g_{ab}, teda $g^{-1}_{ab} = g^{ab}$, kde

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & g_{uu} & g_{uq} \\ 0 & g_{pu} & g_{pq} \end{bmatrix}\,, \tag{1.5}$$

[1] Nasledujúca konštrukcia je možná aj v $D = 4$, kde jediným netriviálnym optickým skalárom je len expanzia, pozri napríklad [7]

potom zjavne matica inverzná bude

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} -g_{uu} + g_{us}g^{rs} & -1 & g_{us}g^{sq} \\ -1 & 0 & 0 \\ g_{us}g^{ps} & 0 & g^{pq} \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

kde p, q značia riadok a stĺpec a s je sčítací index $s \in \{2 \dots D-1\}$. Z tejto matice okamžite vidíme

$$g^{uu} = 0\,, \qquad\qquad g^{up} = 0\,. \tag{1.7}$$

Takáto konštrukcia je abstraktná a na prvý pohľad sa zdá byť ťažko predstaviteľná. Preto sa ďalej pozrime na ilustrácie tejto konštrukcie v plochom Minkowského priestoročase s dvomi rôznymi nulovými foliáciami.

- *Budúce svetelné kužele*

Minkowského D-rozmerný priestoročas má diagonálny metrický tenzor

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\,\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)\,\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b\,. \tag{1.8}$$

Jedna z prirodzených volieb foliácie je foliácia svetelnými kužeľmi orientovanými do budúcnosti. Pre jednoduchosť predpokladajme, že pozorovateľ sedí v počiatku priestorových súradníc. Funkcia popisujúca svetelné kužele je

$$g(x^0, x^i) = -(x^0 - d)^2 + \sum_{i=1}^{D-1} (x^i)^2 = 0\,, \tag{1.9}$$

kde d čísluje dané nadplochy. Orientáciu kužeľa vyjadruje podmienka $x^0 - d > 0$. Vyjadrením parametra d z rovnice (1.9) dostávame funkciu

$$u(x^a) = x^0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{D-1} (x^i)^2} = d = \mathrm{konst}\,. \tag{1.10}$$

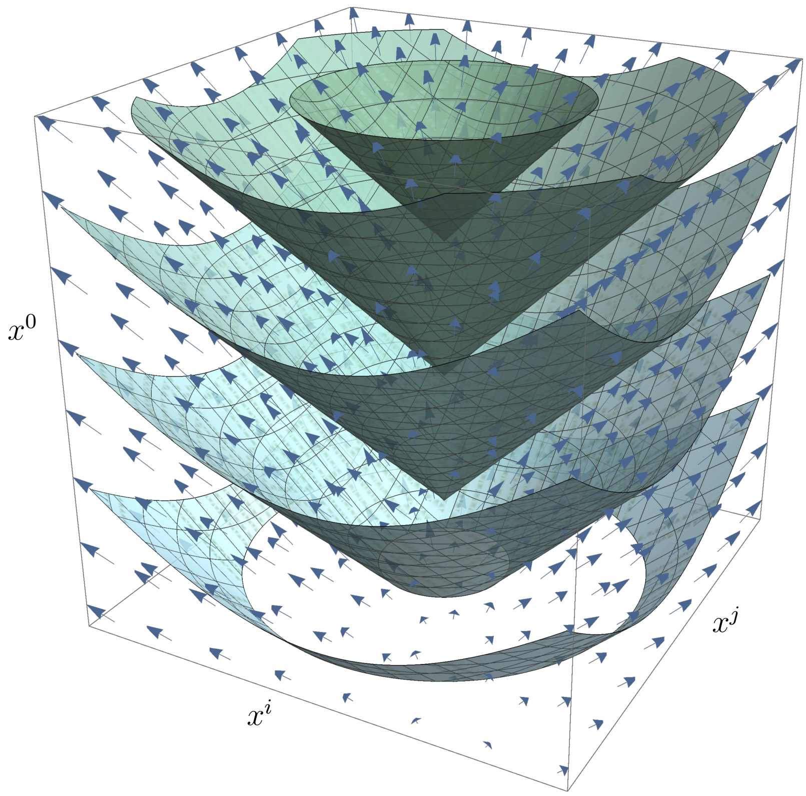
Zložky formy v pôvodných súradniciach sú z definície (1.1)

$$k_a = \begin{cases} -1 & a = 0\ , \\ \dfrac{x^a}{x^0 - u(x^b)} & a \neq 0\ . \end{cases}$$

A z definície Minkowského metriky (1.8) plynie

$$k^a = \begin{cases} 1 & a = 0\ , \\ \dfrac{x^a}{x^0 - u(x^b)} & a \neq 0\ . \end{cases}$$

Takto zostrojené vektory spolu s nulovými nadplochami sú vyznačené na obrázku 1.1.



Obr. 1.1: Foliácia Minkowského časopriestoru budúcimi svetelnými kužeľmi. Šípky znázorňujú vektorové pole $\boldsymbol{k}$.

- *Svetelné roviny*

Ďalší prirodzený spôsob foliácie Minkowského časopriestoru je foliácia svetelnými rovinami. Svetelné nadplochy sú popísané implicitne

$$u(x^a) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^0 + \sum_{i=1}^{D-1} n_i x^i = d = \text{konst}\,, \tag{1.11}$$

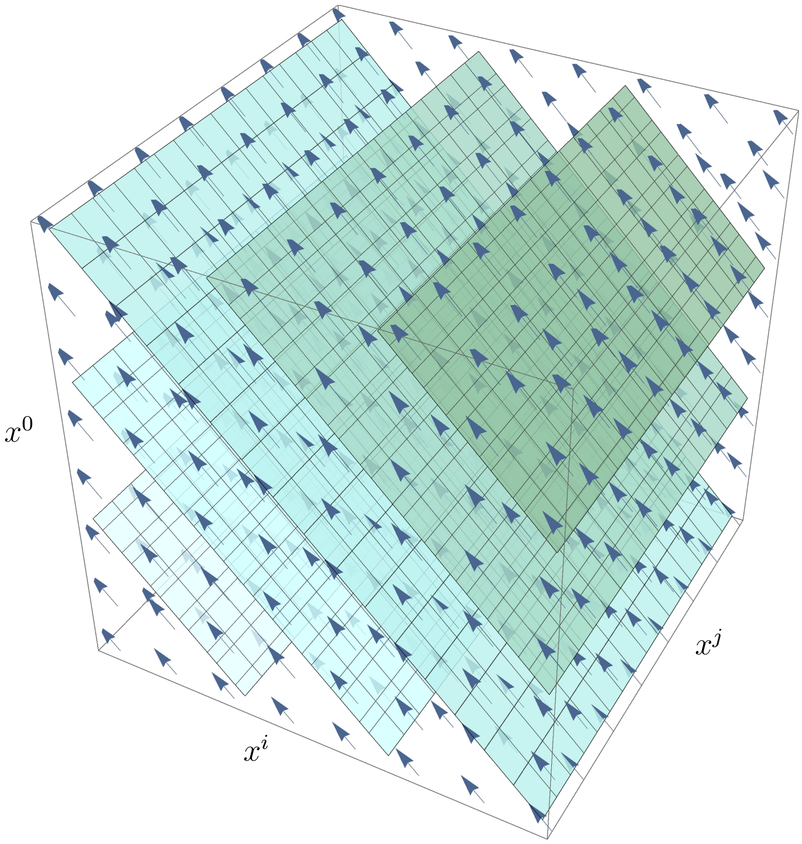
kde platí, že $\sum n_i^2 = 1/2$. Zložky formy vypočítané z (1.11) podľa definície (1.1) sú

$$k_a = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & a = 0\;, \\ -n_a & a \neq 0\;, \end{cases}$$

a k nim príslušné vektory sú

$$k^a = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & a = 0\;, \\ -n_a & a \neq 0\;. \end{cases}$$

Svetelné roviny s vyznačeným vektorovým poľom $\boldsymbol{k}$ sú na obrázku 1.2.



Obr. 1.2: Foliácia Minkovského časopriestoru svetelnými rovinami, kde šípky predstavujú vektorové pole $\boldsymbol{k}$.

1.2 Optické skaláry

V D dimenzionálnom priestoročase uvažujme pole bázových vektorov (frame) $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}_{(i)})$, ktoré spĺňa normalizačné vzťahy

$$g_{ab}k^a l^b = -1\,, \tag{1.12}$$

$$g_{ab}m^a_{(i)}m^b_{(j)} = \delta_{ij}\,, \tag{1.13}$$

$$g_{ab}k^a k^b = g_{ab}l^a l^b = 0\,, \tag{1.14}$$

$$g_{ab}k^a m^b_{(i)} = g_{ab}l^a m^b_{(i)} = 0\,. \tag{1.15}$$

Pretože pole bázových vektorov indukuje pole bázových foriem, je možné metriku g_{ab} prepísať pomocou členov $k_a, l_a, m^{(i)}_a$ ako ich lineárnu kombináciu. Tá je podmienkami (1.12) až (1.15) plne určená. Vyščítaním $g_{ab}k^a k^b = 0$ sa ukáže, že metrika nezávisí od členu $l_a l_b$ a analogicky z (1.15) plynie $g_{ab}l^a l^b = 0$, že nezávisí od $k_a k_b$. Podobne plynie neprítomnosť členov $k_a m^{(i)}_b$ a $l_a m^{(i)}_b$ z (1.15). Teda metrika musí mať všeobecný tvar

$$g_{ab} = a(k_a l_b + l_a k_b) + B_{ij}m^{(i)}_a m^{(j)}_b\,, \tag{1.16}$$

kde ostáva určiť člen a a maticu B_{ij}. Z normalizačnej podmienky na $\boldsymbol{k}$ a $\boldsymbol{l}$ (1.12) plynie $a = -1$ a podmienka na $\boldsymbol{m}_{(i)}$ (1.13) dáva

$$\delta_{ij} = g_{ab}m^a_{(i)}m^b_{(j)} = B_{kl}m^{(k)}_a m^{(l)}_b m^a_{(i)}m^b_{(j)} = B_{kl}\delta^k_i\delta^l_j = B_{ij}\,. \tag{1.17}$$

Výsledný tvar metriky je

$$g_{ab} = -k_a l_b - l_a k_b + \delta_{ij} m_a^{(i)} m_b^{(j)} \, . \tag{1.18}$$

Ďalším cieľom je nájsť a zadefinovať optickú maticu, pozri [8]. Na to potrebujeme rozložiť do bázy $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}_{(i)})$ kovariantnú deriváciu vektoru $\boldsymbol{k}$

$$k_{a;b} = K_{11} k_a k_b + K_{10} k_a l_b + K_{1i} k_a m_b^{(i)} + K_{i1} m_a^{(i)} k_b + K_{i0} m_a^{(i)} l_b + K_{ij} m_a^{(i)} m_b^{(j)} \, . \tag{1.19}$$

Inverzné vyjadrenie členov K_{ab} nájdeme podobným postupom ako pri hľadaní tvaru metriky vyššie, teda vynásobením vhodným vektorom a vysčítaním členov K_{ab} pomocou kovariantnej derivácie. Takýmto spôsobom dostaneme podmienku na členy K_{ij}

$$K_{ij} = k_{a;b} m_{(i)}^a m_{(j)}^b \, . \tag{1.20}$$

Ak požadujeme, aby vektorové pole $\boldsymbol{k}$ generovalo afinne parametrizované geodetiky (tzn. $k_{a;b} k^b = 0$), dostávame podmienku na členy $-K_{10} k_a - K_{i0} m_a^i = 0$. Vysčítaním tejto rovnosti s l^a dostávame podmienku $K_{10} = 0$ a vysčítaním s $m_{(i)}^a$, že musí platiť $K_{i0} = 0$.

Geometrické vlastnosti integrálnych kriviek vektorového poľa $\boldsymbol{k}$ sú dané členmi K_{ij}, ktoré reprezentujú takzvanú optickú maticu. Tie sú názorné pri rozklade na stopu danej matice, bezstopú symetrickú časť a antisymetrickú časť, teda

$$K_{ij} = \Theta \delta_{ij} + \sigma_{ij} + A_{ij} \, , \tag{1.21}$$

kde

$$\Theta = \frac{\mathrm{Tr} K_{ij}}{D-2}, \qquad \sigma_{ij} = K_{(ij)} - \frac{\mathrm{Tr} K_{ij}}{D-2} \delta_{ij}, \qquad A_{ij} = K_{[ij]} \, , \tag{1.22}$$

pričom Θ má význam expanzie geodetickej kongruencie, σ_{ij} je shearová matica a A_{ij} reprezentuje twist. Príslušné invarianty môžeme definovať[2]

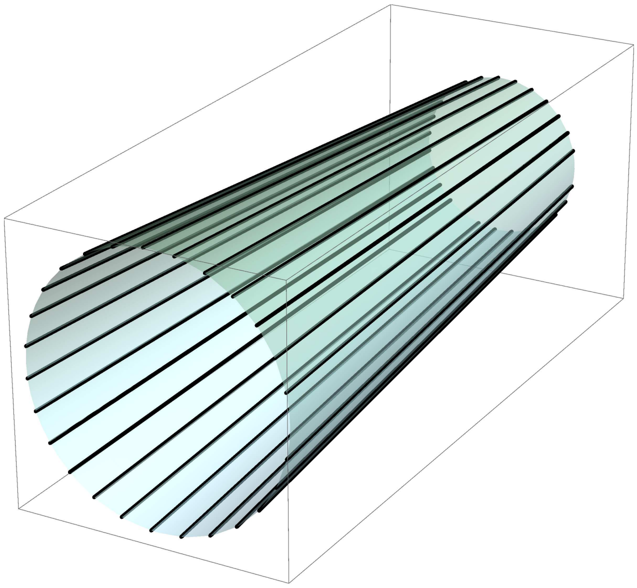
$$\sigma^2 = \sigma_{ij} \sigma^{ji} \qquad A^2 = A_{ij} A^{ji} \, , \tag{1.23}$$

ktoré spolu s Θ tvoria klasické optické skaláry. Tie je možné vyjadriť pomocou kovariantných derivácií vektorového poľa $\boldsymbol{k}$. Pre expanziu Θ sa rozpísaním členu K_{ij}, následným dosadením metriky z (1.18) a postupnými úpravami dostane

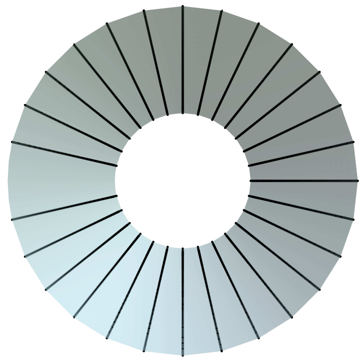
$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\mathrm{Tr} K_{ij}}{D-2} = \frac{1}{D-2} k_{a;b} \sum_{i=2}^{D-1} m_{(i)}^a m_{(i)}^b = \frac{1}{D-2} k^c{}_{;b} g_{ca} \sum_{i=2}^{D-1} m_{(i)}^a m_{(i)}^b = \\ &= \frac{1}{D-2} k^c{}_{;b} \delta_{pq} m_c^{(p)} m_a^{(q)} \sum_{i=2}^{D-1} m_{(i)}^a m_{(i)}^b = \frac{1}{D-2} k^c{}_{;b} \delta_{pq} m_c^{(p)} \sum_{i=2}^{D-1} \delta_i^q m_{(i)}^b = \\ &= \frac{1}{D-2} k^c{}_{;b} m_c^{(p)} m_{(p)}^b = \frac{1}{D-2} k^b{}_{;b} \, . \end{aligned} \tag{1.24}$$

Význam expanzie je znázornený na obrázku 1.3.

[2] Definícia je zavedená podľa [8]. Niekedy sa zvyknú optické skaláry definovať ako $\sigma^2 = \sigma_{ij} \sigma^{ij}$ a $\omega^2 = A_{ij} A^{ij}$, potom sa ako twist označuje $\omega^2 = -A^2$.



(a) Priestorový pohľad.



(b) Čelný podľad.

Obr. 1.3: Čisto expandujúca geodetická kongruencia.

Podobným postupom sa dajú ukázať rovnosti pre shear priamo z definície (1.23)

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 = \sigma_{ij}\sigma^{ji} &= (K_{(ij)} - \Theta\delta_{ij})(K^{(ij)} - \Theta\delta^{ij}) \\
&= K_{(ij)}K^{(ij)} - \Theta\delta_{ij}K^{(ij)} - \Theta\delta^{ij}K_{(ij)} + (D-2)\Theta^2 \\
&= K_{(ij)}K^{(ij)} - (D-2)\Theta^2 \\
&= \frac{1}{4}(k_{a;b}m^a_{(i)}m^b_{(j)} + k_{a;b}m^a_{(j)}m^b_{(i)})(k^{c;d}m^{(i)}_c m^{(j)}_d + k^{c;d}m^{(j)}_c m^{(i)}_d) - (D-2)\Theta^2 \\
&= \frac{1}{2}(k_{a;b}k^{c;d}\delta^a_c\delta^b_d + k_{a;b}k^{c;d}\delta^a_d\delta^b_c)(D-2)\Theta^2 \\
&= k_{(a;b)}k^{a;b} - (D-2)\Theta^2\,,
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

kde sa pri odvodení využila vlastnosť $\delta_{ij}K^{ij} = \delta^{ij}K_{ij} = \mathrm{Tr}K_{ij}$, čo podľa (1.24) dáva $(D-2)\Theta$. Shear má geometrický význam istej deformácie geodetickej kongruencie[3]. Tá je znázornená na obrázku 1.4.

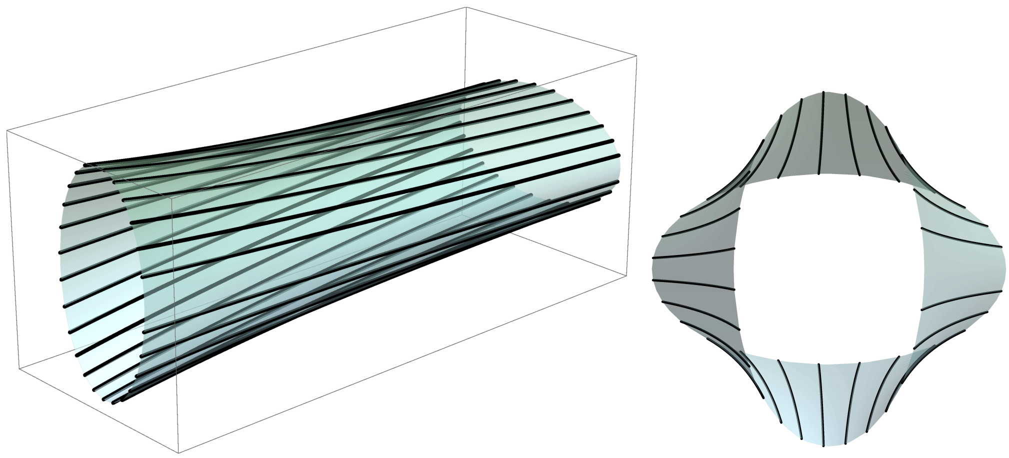
Analogickým výpočtom ako v prípade shearu sa dá ukázať vzťah pre twist

$$
\begin{aligned}
A^2 = A_{ij}A^{ji} &= \frac{1}{4}(k_{a;b}m^a_{(i)}m^b_{(j)} - k_{a;b}m^a_{(j)}m^b_{(i)})(k^{c;d}m^{(j)}_c m^{(i)}_d - k^{c;d}m^{(i)}_c m^{(j)}_d) \\
&= -\frac{1}{2}(k_{c;d}k^{c;d} - k_{d;c}k^{c;d}) = -k_{[a;b]}k^{a;b}\,.
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Ako napovedá názov, twist vyjadruje rotáciu geodetickej kongruencie. Príklad twistu je vykreslený na obrázku 1.5.

V texte sme sa vyslovene nezaoberali odvádzaním geometrických interpretácií optických skalárov. Tie možno chápať ako analógiu tenzorových členov v Raychaudhuriho rovnici, ktoré sú typicky značené rovnakými symbolmi ako zodpovedajúce optické skaláry. Podrobnú diskusiu Raychaudhuriho rovnice možno nájsť v klasickej knihe [9].

[3] Z angličtiny. Prekladá sa ako strihať alebo nožnice.



(a) Priestorový pohľad. (b) Čelný pohľad.

Obr. 1.4: Geodetická kongruencia obshaujúca len shear σ.

Špeciálne môžeme dopočítať optické skaláry pre vektorové pole k^a definované v predchádzajúcej kapitole 1.1. Postupne využijeme rozpis kovariantnej derivácie, vlastnosť $k^a = \delta^a_r$,

$$(D-2)\Theta = k^a{}_{;a} = k^a{}_{,a} + \Gamma^a{}_{ab}k^b = \frac{1}{2}g^{ad}\left(g_{da,r} + g_{rd,a} - g_{ar,d}\right) . \tag{1.27}$$

Posledným krokom je použiť explicitný tvar metrických funkcií (1.3) a neprítomnosť členov g^{uu} a g^{up} z (1.7), čím dostaneme

$$\Theta = \frac{1}{2(D-2)}g^{ij}g_{ij,r} . \tag{1.28}$$

Ďalej dopočítame skalár A^2. Pri jeho vysčítaní sa využije symetria kovariantnej derivácie v indexoch. Tá plynie zo symetrie Christoffelových symbolov,

$$k_{a;b} = k_{a,b} - \Gamma^c{}_{ab}k_c = -\delta^u_{a,b} - = -\Gamma^c{}_{ba}k_c = k_{b;a} , \tag{1.29}$$

z čoho plynie, že $k_{[a;b]} = 0$, a teda (pozri (1.26))

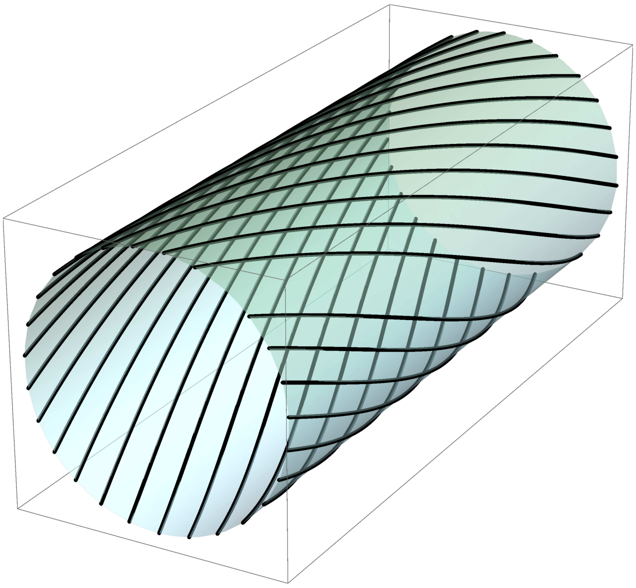
$$A^2 = 0 , \tag{1.30}$$

čo navyše zodpovedá, že všetky zložky matíc A_{ij} sú nulové. Podobne to platí aj so shearom, teda z $\sigma^2 = 0$ hneď vieme, že všetky členy $\sigma_{ij} = 0$.

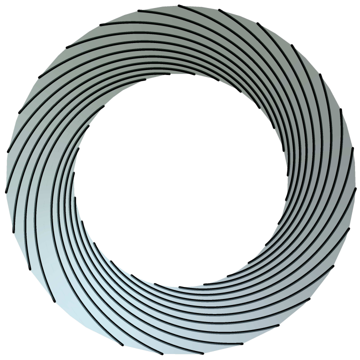
Toto je dôležitý výsledok, pretože sme práve overili, že kongruencia svetelných kriviek generovaná z našej nulovej foliácie je nutne netwistujúca. V skutočnosti platí aj opačná implikácia vďaka Frobéniovej vete [5].

Ako zaujímavé cvičenie sa oplatí prepísať aj shear (twist je identicky rovný 0) v adaptovaných súradniciach po vzore (1.28). Tento výsledok totiž použijeme pri prepise metriky v rozloženom tvare $g_{ij} = p^{-2}\gamma_{ij}$, kde $\det\gamma_{ij} = 1$. Vďaka symetrii kovariantnej derivácie v dolných indexoch (1.29) a adaptovaným súradniciam ($k_a = -u_{,a} = -\delta^u_a$, $k^a = \frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}r} = \delta^a_r$) prežije iba člen Γ^2

$$\begin{aligned}\sigma^2 + (D-2)\Theta^2 &= g^{bd}\Gamma^c{}_{ab}\delta^u_c\Gamma^a{}_{de}\delta^e_r = g^{bd}\Gamma^u{}_{ab}\Gamma^a{}_{dr} \\ &= \frac{1}{4}g^{bd}g^{ue}(g_{ea,b} + g_{be,a} - g_{ab,e})g^{af}(g_{fd,r} + g_{rf,d} - g_{dr,f}) \\ &= \frac{1}{4}g^{bd}g_{ab,r}g^{af}g_{fd,r} = \frac{1}{4}g^{ik}g^{jl}g_{ij,r}g_{kl,r} .\end{aligned} \tag{1.31}$$



(a) Priestorový pohľad.



(b) Čelný pohľad.

Obr. 1.5: Čisto twistujúce geodetické kongruencie.

Spomínaný rozklad metriky $g_{ij} = p^{-2}\gamma_{ij}$ sa dá urobiť vždy bez straty obecnosti, ale rozklad je závislý od voľby bázy. Potom nenulové optické skaláry nadobudnú separovaný tvar

$$\Theta = -(\ln p)_{,r} \,, \tag{1.32}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}\gamma^{ik}\gamma^{jl}\gamma_{ij,r}\gamma_{kl,r} \,. \tag{1.33}$$

1.3 Robinsonova–Trautmanova trieda geometrií

V minulej kapitole sme sa venovali klasifikácii priestoročasov na základe optických skalárov. Robinsonova–Trautmanova trieda geometrií zahŕňa mnoho fyzikálne zaujímavých prípadov ako napríklad Schwarzschildovu alebo Reissneovu-Nordsrömovu čiernu dieru alebo urýchlené čierne diery (C-metrika) [10], či expandujúce gravitačné vlny.

Robinsonove–Truatmanove priestoročasy patria do kategórie netwistujúcich geometrií, v ktorých nedochádza k shearu, ale expanzia kongruencie svetelných geodetík je povolená. To zodpovedá

$$K_{ij} = \Theta\delta_{ij} = \Theta g_{pq} m^p_{(i)} m^q_{(j)} \,, \tag{1.34}$$

kde sme využili fakt, že normalizačnú podmienku (1.13) v adaptovaných súradniciach stačí sčítať cez priestorové indexy, pretože metrika (1.18) v priestorových indexoch nadobúda tvar

$$g_{pq} m^p_{(i)} m^q_{(j)} = \delta_{ij} \,. \tag{1.35}$$

Na druhej strane použijeme vyjadrenie K_{ij} z rozkladu do bázy (1.20)

$$k_{p;q} m^p_{(i)} m^q_{(j)} = \Theta g_{pq} m^p_{(i)} m^q_{(j)} \,, \tag{1.36}$$

kde opäť stačí sčítať cez priestorové indexy z dôvodu prechodu do adaptovaných súradníc. To je vidieť z prepisu $k_{p;q}$ pomocou (1.19) v adaptovaných súradniciach

$$k_{p;q} = K_{ij} m_p^{(i)} m_q^{(j)} , \tag{1.37}$$

a použitím normalizačnej podmienky (1.35)

$$K_{ij} = k_{p;q} m^a_{(i)} m^b_{(j)} . \tag{1.38}$$

Vzťah (1.36) ale platí pre ľubovoľnú ortonormálnu bázu v euklidovskom $(D-2)$ rozmernom priestore, a teda dostávame

$$k_{p;q} = \Theta g_{pq} . \tag{1.39}$$

Rozpisom kovariantnej derivácie a rozpisom Christoffelových symbolov pomocou metriky postupne dostaneme

$$k_{p;q} = k_{p,q} - \Gamma^a{}_{pq} k_a = k_{p,q} - \frac{1}{2} g^{ab} (g_{qb,p} + g_{bp,q} - g_{pq,b}) k_a . \tag{1.40}$$

Pracujeme v adaptovaných súradniciach, a teda $k_a = -\delta^u_a$ podľa (1.1). Z explicitného tvaru metrických funkcií (1.3) a podmienok na členy g^{uu} a g^{up} v (1.7) dostaneme vzťah

$$\frac{1}{2} g_{pq,r} = \Theta g_{pq} . \tag{1.41}$$

Preznačením

$$\Theta(r,u,x^p) = R_{,r}/R \tag{1.42}$$

a riešením sústavy diferenciálnych rovníc (1.41) dostaneme vyjadrenie metriky [11]

$$g_{pq} = R^2(r,u,x^s) h_{pq}(u,x^s) , \tag{1.43}$$

kde funkcie h_{pq} vyšli ako integračné faktory z riešenia sústavy diferenciálnych rovníc. Explicitné vyjadrenie funkcie $R(r,u,x^s)$ vyplýva z jej zavedenia (1.42)

$$R = e^{\int \Theta(r,u,x^s)\, \mathrm{d}r} . \tag{1.44}$$

Táto priestorová časť metriky teda závisí od súradnice r len skrz skalárny faktor priamo určený expanziou nulovej kongruencie.

1.4 Kundtova trieda geometrií

Táto trieda geometrií je špeciálnym prípadom Robinsonových–Trautmanových geometrií, kedy vymizne expanzia, $\Theta = 0$. Dosadením (1.44) do rovnice (1.43) dostaneme podmienku, že priestorová časť metriky g_{pq} nezávisí od súradnice r, a teda priečna metrika má tvar

$$g_{pq} = h_{pq}(u,x^s) . \tag{1.45}$$

Pre ďalšie výpočty bude kľúčová práve Kundtova trieda geometrií, preto budeme potrebovať objekty charakterizujúce krivosť. Napočítané komponenty Christoffelových symbolov pre takýto priestoročas preberieme z článku [11] a položíme $\Theta = 0$,

$$\Gamma^r{}_{rr} = 0\,, \tag{1.46}$$
$$\Gamma^r{}_{ru} = -\tfrac{1}{2}g_{uu,r} + \tfrac{1}{2}g^{rn}g_{un,r}\,, \tag{1.47}$$
$$\Gamma^r{}_{rp} = -\tfrac{1}{2}g_{up,r}\,, \tag{1.48}$$
$$\Gamma^r{}_{uu} = \tfrac{1}{2}\Big[-g^{rr}g_{uu,r} - g_{uu,u} + g^{rn}(2g_{un,u} - g_{uu,n})\Big]\,, \tag{1.49}$$
$$\Gamma^r{}_{up} = \tfrac{1}{2}\Big[-g^{rr}g_{up,r} - g_{uu,p} + g^{rn}(2g_{u[n,p]} + g_{np,u})\Big]\,, \tag{1.50}$$
$$\Gamma^r{}_{pq} = -g_{u(p||q)} + \tfrac{1}{2}g_{pq,u}\,, \tag{1.51}$$
$$\Gamma^u{}_{rr} = \Gamma^u{}_{ru} = \Gamma^u{}_{rp} = 0\,, \tag{1.52}$$
$$\Gamma^u{}_{uu} = \tfrac{1}{2}g_{uu,r}\,, \tag{1.53}$$
$$\Gamma^u{}_{up} = \tfrac{1}{2}g_{up,r}\,, \tag{1.54}$$
$$\Gamma^u{}_{pq} = 0\,, \tag{1.55}$$
$$\Gamma^m{}_{rr} = 0\,, \tag{1.56}$$
$$\Gamma^m{}_{ru} = \tfrac{1}{2}g^{mn}g_{un,r}\,, \tag{1.57}$$
$$\Gamma^m{}_{rp} = 0\,, \tag{1.58}$$
$$\Gamma^m{}_{uu} = \tfrac{1}{2}\Big[-g^{rm}g_{uu,r} + g^{mn}(2g_{un,u} - g_{uu,n})\Big]\,, \tag{1.59}$$
$$\Gamma^m{}_{up} = \tfrac{1}{2}\Big[-g^{rm}g_{up,r} + g^{mn}(2g_{u[n,p]} + g_{np,u})\Big]\,, \tag{1.60}$$
$$\Gamma^m{}_{pq} = {}^S\Gamma^m{}_{pq}\,. \tag{1.61}$$

Z Christoffelových symbolov bol v článku [11] napočítaný Riemannov tenzor

$$R_{rprq} = 0\,, \tag{1.62}$$
$$R_{rpru} = -\tfrac{1}{2}g_{up,rr}\,, \tag{1.63}$$
$$R_{rpmq} = 0\,, \tag{1.64}$$
$$R_{ruru} = -\tfrac{1}{2}g_{uu,rr} + \tfrac{1}{4}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r}\,, \tag{1.65}$$
$$R_{rpuq} = \tfrac{1}{2}g_{up,r||q} + \tfrac{1}{4}g_{up,r}g_{uq,r}\,, \tag{1.66}$$
$$R_{rupq} = g_{u[p,q],r}\,, \tag{1.67}$$
$$R_{mpnq} = {}^SR_{mpnq}\,, \tag{1.68}$$
$$R_{ruup} = \tfrac{1}{2}(g_{uu,rp} - g_{up,ru}) + \tfrac{1}{4}g^{rn}g_{un,r}g_{up,r} - \tfrac{1}{2}g^{mn}g_{um,r}E_{np}\,, \tag{1.69}$$
$$R_{upmq} = g_{p[m,u||q]} + g_{u[q,m]||p} + e_{p[m}g_{q]u,r}\,, \tag{1.70}$$
$$\begin{aligned}R_{upuq} = &-\tfrac{1}{2}(g_{uu})_{||p||q} + g_{u(p,u||q)} - \tfrac{1}{2}g_{pq,uu} + \tfrac{1}{4}g^{rr}g_{up,r}g_{uq,r}\\ &-\tfrac{1}{2}g_{uu,r}e_{pq} + \tfrac{1}{2}g_{uu,(p}g_{q)u,r} - g^{rn}E_{n(p}g_{q)u,r} + g^{mn}E_{mp}E_{nq}\,,\end{aligned} \tag{1.71}$$

a úžením Riemannovho tenzora vzniká Ricciho tenzor

$$R_{rr} = 0\,, \tag{1.72}$$
$$R_{rp} = -\tfrac{1}{2}g_{up,rr} \tag{1.73}$$
$$R_{ru} = -\tfrac{1}{2}g_{uu,rr} + \tfrac{1}{2}g^{rn}g_{un,rr} + \tfrac{1}{2}g^{mn}\Big(g_{um,r||n} + g_{um,r}g_{un,r}\Big)\,, \tag{1.74}$$
$$R_{pq} = {}^SR_{pq} - f_{pq}\,, \tag{1.75}$$
$$\begin{aligned}R_{up} = &-\tfrac{1}{2}g^{rr}g_{up,rr} - \tfrac{1}{2}g_{uu,rp} + \tfrac{1}{2}g_{up,ru} + g^{rn}g_{u[n,p],r} - \tfrac{1}{2}g^{rn}(g_{up,r||n} + g_{un,r}g_{up,r})\\ &+g^{mn}\Big(\tfrac{1}{2}g_{um,r}g_{un||p} + g_{m[p,u||n]} + g_{u[m,p]||n} - \tfrac{1}{2}e_{mn}g_{up,r}\Big)\end{aligned} \tag{1.76}$$

$$R_{uu} = -\tfrac{1}{2}g^{rr}g_{uu,rr} - g^{rn}g_{uu,rn} - \tfrac{1}{2}g^{mn}e_{mn}g_{uu,r} + g^{rn}g_{un,ru} - \tfrac{1}{2}g^{mn}g_{mn,uu}$$
$$+g^{mn}(g_{um,u||n} - \tfrac{1}{2}g_{uu||m||n}) + \tfrac{1}{2}(g^{rr}g^{mn} - g^{rm}g^{rn})g_{um,r}g_{un,r}$$
$$+2g^{mn}g^{rp}g_{um,r}g_{u[n,p]} + \tfrac{1}{2}g^{mn}g_{um,r}g_{uu,n} + g^{mn}g^{pq}E_{pm}E_{qn}\,, \tag{1.77}$$

a Ricciho skalár

$$R = {}^{S}R + g_{uu,rr} - 2g^{rn}g_{un,rr} - 2g^{mn}g_{um,r||n} - \tfrac{3}{2}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r}\,. \tag{1.78}$$

Z týchto vzťahov sa dajú dopočítať zložky Weylovho tenzoru, pozri [11],

$$C_{rprq} = 0\,, \tag{1.79}$$
$$C_{rpru} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{D-3}{D-2}g_{up,rr}\,, \tag{1.80}$$
$$C_{rpmq} = -\tfrac{1}{D-2}g_{p[m}g_{q]u,rr}\,, \tag{1.81}$$
$$C_{ruru} = -\tfrac{D-3}{D-1}\Big[\tfrac{1}{2}g_{uu,rr} + \tfrac{1}{(D-2)(D-3)}\,{}^{S}R$$
$$-\tfrac{1}{4}\tfrac{D-4}{D-2}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r} + \tfrac{1}{D-2}\Big(g^{rn}g_{un,rr} + g^{mn}g_{um,r||n}\Big)\Big]\,, \tag{1.82}$$
$$C_{rpuq} = \tfrac{1}{D-2}\Big[{}^{S}R_{pq} - \tfrac{1}{D-1}\,g_{pq}\,{}^{S}R + \tfrac{1}{2}(D-2)g_{u[p,r||q]} + \tfrac{1}{2}(D-4)f_{pq}$$
$$+\tfrac{1}{2}\tfrac{D-3}{D-1}g_{pq}g_{uu,rr} - \tfrac{1}{2}g_{up}g_{uq,rr} - \tfrac{1}{2}\tfrac{D-5}{D-1}g_{pq}g^{rn}g_{un,rr}$$
$$-\tfrac{1}{2}\tfrac{D-4}{D-1}g_{pq}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r} - \tfrac{1}{2}\tfrac{D-5}{D-1}g_{pq}g^{mn}g_{um,r||n}\,, \tag{1.83}$$
$$C_{rupq} = g_{u[p,q],r} - \tfrac{1}{D-2}g_{u[p}g_{q]u,rr}\,, \tag{1.84}$$
$$C_{mpnq} = {}^{S}C_{mpnq} + \tfrac{2}{(D-2)(D-4)}\Big(g_{mn}\,{}^{S}R_{pq} + g_{pq}\,{}^{S}R_{mn} - g_{mq}\,{}^{S}R_{pn} - g_{pn}\,{}^{S}R_{mq}\Big)$$
$$+\tfrac{1}{D-2}\Big(g_{mn}f_{pq} + g_{pq}f_{mn} - g_{mq}f_{pn} - g_{pn}f_{mq}\Big)$$
$$+\tfrac{1}{(D-1)(D-2)}\,(g_{mn}g_{pq} - g_{mq}g_{pn})\Big[g_{uu,rr} - 2g^{rs}g_{us,rr}$$
$$-2g^{os}f_{os} - \tfrac{1}{2}g^{os}g_{uo,r}g_{us,r} - \tfrac{2(2D-5)}{(D-3)(D-4)}\,{}^{S}R\Big]\,, \tag{1.85}$$
$$C_{ruup} = \tfrac{1}{2}\tfrac{D-3}{D-2}(g_{uu,rp} - g_{up,ru}) + \tfrac{1}{4}\tfrac{D-4}{D-2}g^{rn}g_{un,r}g_{up,r} - \tfrac{1}{2}\tfrac{D-3}{D-2}g^{mn}g_{um,r}E_{np}$$
$$+\tfrac{1}{D-2}\Big[g^{mn}e_{m[p}g_{n]u,r} + g^{mn}\Big(g_{m[p,u||n]} + g_{u[m,p]||n}\Big)\Big]$$
$$-\tfrac{1}{D-2}\Big[\tfrac{1}{2}g^{rn}g_{un}g_{up,rr} - g^{rn}g_{u[n,p],r} + \tfrac{1}{2}g^{rn}g_{up,r||n}\Big]$$
$$-\tfrac{1}{(D-1)(D-2)}g_{up}\Big[\,{}^{S}R - \tfrac{1}{2}(D-3)g_{uu,rr} + \tfrac{1}{2}(D-4)g^{mn}g_{um,r}g_{un,r}$$
$$+\tfrac{1}{2}(D-5)\Big(g^{rn}g_{un,rr} + g^{mn}g_{um,r||n}\Big)\Big]\,, \tag{1.86}$$
$$C_{upmq} = g_{p[m,u||q]} + g_{u[q,m]||p} + e_{p[m}g_{q]u,r} + \tfrac{2}{D-2}\Big(\,{}^{S}R_{p[m}g_{q]u} - f_{p[m}g_{q]u}\Big)$$
$$+\tfrac{1}{D-2}\Big[(g_{uu} - g^{rn}g_{un})g_{p[m}g_{q]u,rr} - g_{uu,r[q}g_{m]p} + g_{p[m}g_{q]u,ru}$$
$$+g^{rn}(g_{pm}g_{u[n,q],r} - g_{pq}g_{u[n,m],r}) - g^{rn}g_{un,r}g_{p[m}g_{q]u,r} - g^{rn}g_{p[m}g_{q]u,r||n}$$
$$+g^{ns}g_{un,r}g_{us||[q}g_{m]p} + g^{ns}(g_{pm}g_{n[q,u||s]} - g_{pq}g_{n[m,u||s]})$$
$$+g^{ns}(g_{pm}g_{u[n,q]||s} - g_{pq}g_{u[n,m]||s}) - g^{ns}e_{ns}g_{p[m}g_{q]u,r}\Big]$$
$$-\tfrac{2}{(D-1)(D-2)}\,g_{p[m}g_{q]u}\Big[\,{}^{S}R + g_{uu,rr} - 2g^{rn}g_{un,rr} - \tfrac{3}{2}g^{ns}g_{un,r}g_{us,r}$$
$$-2g^{ns}g_{un,r||s}\,, \tag{1.87}$$

$$
\begin{aligned}
C_{upuq} = &-\tfrac{1}{2}g_{uu||p||q} - \tfrac{1}{2}g_{pq,uu} + g_{u(p,u||q)} - \tfrac{1}{2}g_{uu,r}e_{pq} + \tfrac{1}{2}g_{uu,(p}g_{q)u,r} + g^{os}E_{op}E_{sq} \\
&-\tfrac{1}{D-2}\, g_{pq}g^{mn}\Big(- \tfrac{1}{2}g_{uu||m||n} - \tfrac{1}{2}g_{mn,uu} + g_{um,u||n} \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}g_{uu,r}e_{mn} + \tfrac{1}{2}g_{uu,m}g_{un,r} + g^{os}E_{om}E_{sn}\Big) \\
&+\tfrac{1}{(D-1)(D-2)}\,(g_{uu}g_{pq} - g_{up}g_{uq})\Big({}^{S}R + g_{uu,rr} - 2g^{rn}g_{un,rr} \\
&\qquad -\tfrac{3}{2}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r} - 2g^{mn}g_{um,r||n}\Big) \\
&-\tfrac{1}{2(D-2)}\, g_{uu}g_{pq}\Big(g_{uu,rr} - g^{mn}g_{um,r}g_{un,r}\Big) - \tfrac{1}{D-2}\, g_{uu}\, {}^{S}R_{pq} \\
&-\tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{D-4}{D-2}g_{uu} - g^{rn}g_{un}\Big)g_{up,r}g_{uq,r} + \tfrac{1}{D-2}\, g_{uu}g_{u(p,r||q)} - g^{rn}E_{n(p}g_{q)u,r} \\
&+\tfrac{1}{D-2}\, g_{pq}g^{rn}\Big[\tfrac{1}{2}g_{un}g_{uu,rr} + g_{uu,rn} - g_{un,ru} \\
&\qquad -\tfrac{1}{2}g_{uo,r}\Big(g^{os}g_{us,r}g_{un} - g^{ro}g_{un,r} - 4g^{os}g_{u[n,s]}\Big)\Big] \\
&+\tfrac{1}{D-2}\Big[(g_{uu} - g^{rn}g_{un})g_{u(q}g_{p)u,rr} - g_{uu,r(p}g_{q)u} + g_{u(q}g_{p)u,ru} \\
&\qquad +g^{rn}g_{un,r||(p}g_{q)u} - 2g^{rn}g_{u(q}g_{p)u,r||n} - g^{rn}g_{un,r}g_{u(q}g_{p)u,r}\Big] \\
&+\tfrac{1}{D-2}\, g^{mn}\Big[g_{um,r}g_{un||(p}g_{q)u} - e_{mn}g_{u(q}g_{p)u,r} + g_{u(q}g_{p)m,u||n} - g_{mn,u||(p}g_{q)u} \\
&\qquad +\tfrac{1}{2}\Big(g_{uq}g_{um||p||n} + g_{up}g_{um||q||n}\Big) - g_{u(q}g_{p)u||m||n}\Big]\,. \qquad (1.88)
\end{aligned}
$$

Pri vyjadrení zložiek tenzorov sa použilo zjednodušené značenie. Členy ${}^{S}\Gamma^{m}_{pq}$ sú Christoffelove symboly v priečnom priestore, teda ${}^{S}\Gamma^{m}_{pq} \equiv \frac{1}{2}g^{mn}(2g_{n(p,q)} - g_{pq,n})$. S ich pomocou je zavedený symbol $_{||}$ označujúci kovariantnú deriváciu vzhľadom na g_{pq}. Analogicky vieme na priečnom priestore zaviesť Riemannov tenzor ${}^{S}R_{mpnq}$, Weylov tenzor ${}^{S}C_{mpnq}$, Ricciho tenzor ${}^{S}R_{pq}$ a Ricciho skalár ${}^{S}R$. Použité značenie v článku [11] je zhrnuté v týchto vzťahoch

$$
\begin{aligned}
g_{up||q} &\equiv g_{up,q} - g_{um}\, {}^{S}\Gamma^{m}_{\ pq}\,, && (1.89)\\
g_{up,r||q} &\equiv g_{up,rq} - g_{um,r}\, {}^{S}\Gamma^{m}_{\ pq}\,, && (1.90)\\
g_{u[p,r||q]} &= g_{u[p||q],r}\,, && (1.91)\\
g_{p[m,u||q]} &\equiv g_{p[m,q],u} + \tfrac{1}{2}\big({}^{S}\Gamma^{n}_{\ pm}\, g_{nq,u} - {}^{S}\Gamma^{n}_{\ pq}\, g_{nm,u}\big)\,, && (1.92)\\
g_{u[q,m]||p} &\equiv g_{u[q,m],p} - {}^{S}\Gamma^{n}_{\ pq}\, g_{u[n,m]} - {}^{S}\Gamma^{n}_{\ pm}\, g_{u[q,n]}\,, && (1.93)\\
\big(g_{uu}\big)_{||p||q} &\equiv g_{uu,pq} - g_{uu,n}\, {}^{S}\Gamma^{n}_{\ pq}\,, && (1.94)\\
g_{up,u||q} &\equiv g_{up,uq} - g_{um,u}\, {}^{S}\Gamma^{m}_{\ pq}\,, && (1.95)\\
e_{pq} &\equiv g_{u(p||q)} - \tfrac{1}{2}g_{pq,u}\,, && (1.96)\\
E_{pq} &\equiv g_{u[p,q]} + \tfrac{1}{2}g_{pq,u}\,, && (1.97)\\
f_{pq} &\equiv g_{u(p,r||q)} + \tfrac{1}{2}g_{up,r}g_{uq,r}\,, && (1.98)
\end{aligned}
$$

kde prirodzene platí $g_{u[p,q]} = g_{u[p||q]}$.

1.5 Algebraická štruktúra Weylovho tenzoru

Na základe Weylovho tenzoru je možná invariantná algebraická klasifikácia priestoročasu v ľubovoľnej dimenzii ($D \geq 4$) [8]. Ako sa ukáže v kapitole 2.2, klasifikácia je nezávislá od konformnej transformácie, čo bude kľúčové pre ďalšie výpočty. Klasifikácia bola navrhnutá pôvodne Petrovom [12] a Penrosom [13], a to v 4-rozmernom formalizme. Neskôr bolo potrebné rozšíriť túto klasifikáciu do ľubovoľnej dimenzie ($D \geq 4$), pre úplný prehľad pozri [8]. To je možné urobiť premietnutím Weylovho tenzoru na vhodný nulový frame. Použitie takej klasifikácie bolo explicitne spočítané pre Robinsonove–Trautmanove priestoročasy (netwistujúce, bez shearu) a špeciálne pre $\Theta = 0$ pre Kundtove priestoročasy (neexpandujúce), pozri [11].

Metrika všeobecného Robinsonovho–Trautmanovho priestoročasu v adaptovaných súradniciach je daná (1.4) spolu s (1.43). Prirodzená voľba prvého nulového vektoru frameu $\mathbf{k}$ je stotožnenie s nulovým vektorom adaptovaných súradníc $\boldsymbol{k}$

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\partial}_r \,. \tag{1.99}$$

Voľba ďalšieho vektoru je daná normalizačnými vzťahmi (1.12) až (1.15). Konkrétne prvá podmienka dá normalizáciu $\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -1$

$$-1 = g_{ab} l^a l^b = g_{rb} l^b = -l^u \,. \tag{1.100}$$

A z normalizačnej podmienky $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 0$ plynie

$$0 = g_{ab} l^a l^b = -2 l^u l^r + g_{uu} l^u l^u = -2 l^r + g_{uu} \,, \tag{1.101}$$

kde členy l^p nie sú presne určené, tak sme ich položili rovné nule, $l^p = 0$. Zložky vektorov $\mathbf{m}_{(i)}$ potom plynú z podmienok už jednoznačne (1.15)

$$0 = g_{ab} m^a_{(i)} k^b = g_{ra} m^a_{(i)} = -m^u_{(i)} \,, \tag{1.102}$$

$$0 = g_{ab} m^a_{(i)} l^b = g_{ar} m^a_{(i)} l^r + g_{au} m^a_{(i)} l^u = -m^r_{(i)} + g_{pu} m^p_{(i)} \,. \tag{1.103}$$

Teda s týmito výsledkami máme podmienky na frame, ktorý sa dá zapísať v tvare (porovnaj [11])

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\partial}_r \,, \qquad \mathbf{l} = \frac{1}{2} g_{uu} \boldsymbol{\partial}_r + \boldsymbol{\partial}_u \,, \qquad \mathbf{m}_{(i)} = m^p_{(i)} (g_{up} \boldsymbol{\partial}_r + \boldsymbol{\partial}_p) \,. \tag{1.104}$$

Tento frame samozrejme nie je jednoznačne určený a je možné vykonávať rôzne Lorentzove transformácie s poľom bázových vektorov. Konkrétne nulové rotácie s fixným vektorovým poľom $\mathbf{k}$ prípadne $\mathbf{l}$, boosty v rovine $\mathbf{k}$-$\mathbf{l}$ a rotácie v priestore napnutom na vektoroch $\mathbf{m}_{(i)}$ [14]. Pre klasifikáciu Weylovho tenzoru však využijeme boost, ktorý transformuje vektory nasledovne

$$\mathbf{k} \longrightarrow \lambda \mathbf{k} \,, \qquad \mathbf{l} \longrightarrow \lambda^{-1} \mathbf{l} \,, \qquad \mathbf{m}_{(i)} \longrightarrow \mathbf{m}_{(i)} \,. \tag{1.105}$$

Zjavne takáto transformácia zachováva normalizačné vzťahy (1.12) až (1.15). Pri takejto transformácii budeme skúmať transformáciu veličín. Ak sa ľubovoľná veličina $\mathbf{q}$ transformuje nasledovne

$$\mathbf{q} \longrightarrow \lambda^w \mathbf{q} \,, \tag{1.106}$$

tak hovoríme, že veličina má boostovú váhu w [15].

Takto vybavený už môžeme robiť priemety Weylovho tenzoru C_{abcd} na nulový frame $(\mathbf{k},\mathbf{l},\mathbf{m}_{(i)})$. Priemety zoradíme podľa boostovej váhy w a budeme značiť v analógii s pôvodnými prácami Petrovova a Penrosa Ψ_{w+2}, pozri [14] pre značenie $D > 4$,

$$\begin{aligned}
&\Psi_{0^{ij}} = C_{abcd}\, k^a\, m^b_{(i)}\, k^c\, m^d_{(j)}\,, && \\
&\Psi_{1^{ijk}} = C_{abcd}\, k^a\, m^b_{(i)}\, m^c_{(j)}\, m^d_{(k)}\,, && \Psi_{1T^i} = C_{abcd}\, k^a\, l^b\, k^c\, m^d_{(i)} \\
&\Psi_{2^{ijkl}} = C_{abcd}\, m^a_{(i)}\, m^b_{(j)}\, m^c_{(k)}\, m^d_{(l)}\,, && \Psi_{2S} = C_{abcd}\, k^a\, l^b\, l^c\, k^d\,, \\
&\Psi_{2^{ij}} = C_{abcd}\, k^a\, l^b\, m^c_{(i)}\, m^d_{(j)}\,, && \Psi_{2T^{ij}} = C_{abcd}\, k^a\, m^b_{(i)}\, l^c\, m^d_{(j)}\,, \\
&\Psi_{3^{ijk}} = C_{abcd}\, l^a\, m^b_{(i)}\, m^c_{(j)}\, m^d_{(k)}\,, && \Psi_{3T^i} = C_{abcd}\, l^a\, k^b\, l^c\, m^d_{(i)}\,, \\
&\Psi_{4^{ij}} = C_{abcd}\, l^a\, m^b_{(i)}\, l^c\, m^d_{(j)}\,. &&
\end{aligned} \tag{1.107}$$

Značenie a klasifikácia bola prevzatá z [11] respektíve [14]. Pravý stĺpec nepredstavuje nezávislé priemety, ale je možné ich dosiahnuť kontrakciami v ľavom stĺpci, teda $\Psi_{1T^i} = \Psi_{1^k{}^k{}_i}$, $\Psi_{2S} = \Psi_{2T^k{}^k}$, $\Psi_{2T^{(ij)}} = \frac{1}{2}\Psi_{2^{ikj}{}^k}$, $\Psi_{2T^{[ij]}} = \frac{1}{2}\Psi_{2^{ij}}$, $\Psi_{3T^i} = \Psi_{3^k{}^k{}_i}$.

Pre úplnú invariantnú klasifikáciu je nuntné zaviesť irreducibilné zložky Weylových skalárov Ψ [8, 11]

$$\tilde{\Psi}_{1^{ijk}} \equiv \Psi_{1^{ijk}} - \tfrac{1}{D-3}\Big(\delta_{ij}\Psi_{1T^k} - \delta_{ik}\Psi_{1T^j}\Big)\,, \tag{1.108}$$

$$\tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} \equiv \Psi_{2T^{(ij)}} - \tfrac{1}{D-2}\delta_{ij}\Psi_{2S}\,, \tag{1.109}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{2^{ijkl}} \equiv \Psi_{2^{ijkl}} &- \tfrac{2}{D-4}\Big(\delta_{ik}\tilde{\Psi}_{2T^{(jl)}} + \delta_{jl}\tilde{\Psi}_{2T^{(ik)}} - \delta_{il}\tilde{\Psi}_{2T^{(jk)}} - \delta_{jk}\tilde{\Psi}_{2T^{(il)}}\Big) \\
&- \tfrac{2}{(D-2)(D-3)}\Big(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\Big)\Psi_{2S}\,,
\end{aligned} \tag{1.110}$$

$$\tilde{\Psi}_{3^{ijk}} \equiv \Psi_{3^{ijk}} - \tfrac{1}{D-3}\Big(\delta_{ij}\Psi_{3T^k} - \delta_{ik}\Psi_{3T^j}\Big)\,. \tag{1.111}$$

Potom príslušné Weylove skaláry sú

$$\Psi_{0^{ij}} = 0\,, \tag{1.112}$$

$$\Psi_{1T^i} = m^p_i\, \tfrac{D-3}{D-2}\Big[(-\tfrac{1}{2}g_{up,r} + \Theta g_{up})_{,r} + \Theta_{,p}\Big]\,, \tag{1.113}$$

$$\tilde{\Psi}_{1^{ijk}} = 0\,, \tag{1.114}$$

$$\Psi_{2S} = \tfrac{D-3}{D-1}\, P\,, \tag{1.115}$$

$$\tilde{\Psi}_{2T^{(ij)}} = m^p_i m^q_j\, \tfrac{1}{D-2}\Big(Q_{pq} - \tfrac{1}{D-2}\, g_{pq}\, Q\Big)\,, \tag{1.116}$$

$$\tilde{\Psi}_{2^{ijkl}} = m^m_i m^p_j m^n_k m^q_l\; {}^S C_{mpnq}\,, \tag{1.117}$$

$$\Psi_{2^{ij}} = m^p_i m^q_j\, F_{pq}\,, \tag{1.118}$$

$$\Psi_{3T^i} = m^p_i\, \tfrac{D-3}{D-2}\, V_p\,, \tag{1.119}$$

$$\tilde{\Psi}_{3^{ijk}} = m^p_i m^m_j m^q_k\Big(X_{pmq} - \tfrac{2}{D-3}\, g_{p[m}X_{q]}\Big)\,, \tag{1.120}$$

$$\Psi_{4^{ij}} = m^p_i m^q_j\Big(W_{pq} - \tfrac{1}{D-2}\, g_{pq} W\Big)\,, \tag{1.121}$$

kde jednotlivé symboly označujú

$$\begin{aligned}
P = \Big(\tfrac{1}{2}g_{uu,r} - \Theta g_{uu}\Big)_{,r} &+ \tfrac{1}{(D-2)(D-3)}\, {}^S R - \tfrac{1}{4}\tfrac{D-4}{D-2}\, g^{mn} g_{um,r} g_{un,r} \\
&+ \tfrac{1}{D-2}\Big(g^{rn} g_{un,rr} + g^{mn} g_{um,r||n}\Big) - \tfrac{2}{D-2}\, g^{rn} g_{un}\Theta_{,r} - 2\Theta_{,u} - \tfrac{4}{D-2}\, g^{rn}\Theta_{,n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\Theta^2\tfrac{D-4}{D-2}\,g^{rn}g_{un}+\Theta\Big(\tfrac{D-6}{D-2}\,g^{rn}g_{un,r}-\tfrac{2}{D-2}\,g^{mn}g_{um||n}\Big)\,, && (1.122)\\
Q_{pq} &= {}^{S}R_{pq}+(D-4)\Big[\tfrac{1}{2}\Big(f_{pq}+g_{u(p}g_{q)u,rr}\Big)-\Big(\Theta_{,r}-\Theta^2\Big)g_{up}g_{uq}\\
&\quad-2g_{u(p}\Theta_{,q)}-\Theta\Big(g_{u(p||q)}+2g_{u(p}g_{q)u,r}\Big)\Big], && (1.123)\\
F_{pq} &= g_{u[p,q],r}-g_{u[p}g_{q]u,rr}+2\Theta(g_{u[p}g_{q]u,r}-g_{u[p,q]})\,, && (1.124)\\
V_p &= \tfrac{1}{2}\Big[\tfrac{1}{2}g_{uu}g_{up,rr}-g_{uu,rp}+g_{up,ru}-\tfrac{1}{2}g^{rn}g_{un,r}g_{up,r}\\
&\quad+g^{mn}g_{um,r}E_{np}-g_{up}\Big(g_{uu,rr}-\tfrac{1}{2}g^{mn}g_{um,r}g_{un,r}\Big)\Big]\\
&\quad+\tfrac{1}{D-3}\Big[\tfrac{1}{2}g^{rn}g_{un}g_{up,rr}+g^{mn}e_{m[n}g_{p]u,r}-g^{rn}g_{u[n,p],r}+\tfrac{1}{2}g^{rn}\Big(g_{u[p,r||n]}+f_{pn}\Big)\\
&\quad-g^{mn}\Big(g_{m[p,u||n]}+g_{u[m,p]||n}\Big)-\tfrac{1}{2}g_{up}\Big(g^{rn}g_{un,rr}+g^{mn}f_{mn}\Big)\Big]\\
&\quad+\tfrac{1}{2}g_{up}g_{uu}\Theta_{,r}+g_{up}\Theta_{,u}+\tfrac{1}{2}g_{uu}\Theta_{,p}\\
&\quad-\Theta\Big[\tfrac{1}{2}g_{uu}g_{up,r}-g_{uu,p}+g_{up,u}-g^{rn}g_{u[n}g_{p]u,r}+g^{rn}E_{np}-g_{up}g_{uu,r}\\
&\quad+\tfrac{1}{D-3}(3g^{rn}g_{u[n}g_{p]u,r}-3g^{rn}g_{u[n,p]}-\tfrac{1}{2}g_{up}g^{mn}g_{mn,u}+\tfrac{1}{2}g^{rn}g_{np,u})\Big]\,, && (1.125)\\
X_{pmq} &= g_{p[m,u||q]}+g_{u[q,m]||p}+g_{up}g_{u[m}g_{q]u,rr}+e_{p[m}g_{q]u,r}\\
&\quad-g_{u[q}g_{m]u,r||p}-g_{up}g_{u[m,r||q]}-\tfrac{1}{2}g_{u[q}g_{m]u,r}g_{up,r}\\
&\quad+\Theta\Big(3g_{u[q}g_{m]u,r}g_{up}+g_{u[q}g_{m]p,u}+g_{u[q}g_{m]u||p}-g_{up||[m}g_{q]u}-2g_{u[q,m]}g_{up}\Big)\,,\\
& && (1.126)\\
W_{pq} &= -\tfrac{1}{2}g_{uu||p||q}-\tfrac{1}{2}g_{pq,uu}+g_{(p,u||q)}-\tfrac{1}{2}g_{uu,r}e_{pq}+\tfrac{1}{2}g_{uu,(p}g_{q)u,r}-g_{uu,r(p}g_{q)u}\\
&\quad+\tfrac{1}{2}g_{uu}g_{u(p,r||q)}+\tfrac{1}{2}g_{uu}g_{u(q}g_{p)u,rr}-\tfrac{1}{2}g_{uu,rr}g_{up}g_{uq}+g_{u(q}g_{p)u,ru}\\
&\quad+\tfrac{1}{4}g^{mn}\Big(g_{um}g_{un}g_{up,r}g_{uq,r}+g_{um,r}g_{un,r}g_{up}g_{uq}\Big)-\tfrac{1}{2}g^{mn}g_{um}g_{un,r}g_{u(q}g_{p)u,r}\\
&\quad+g^{mn}\Big(E_{mp}E_{nq}+g_{um,r}E_{n(p}g_{q)u}-g_{um}E_{n(p}g_{q)u,r}\Big)\\
&\quad+\Theta\Big(g_{up}g_{uq}g_{uu,r}+g_{uu,(p}g_{q)u}-g_{uu}g_{u(p}g_{q)u,r}-2g_{u(p}g_{q)u,u}-\tfrac{1}{2}g_{uu}g_{pq,u}\Big)\,,\\
& && (1.127)
\end{aligned}
$$

a ich kontrakcie sú definované $Q \equiv g^{pq}Q_{pq}$, $W \equiv g^{pq}W_{pq}$ and $X_q \equiv g^{pm}X_{pmq}$.

Keďže platí $\Psi_{0^{ij}} = 0$, tak vieme, že $\mathbf{k} = \boldsymbol{\partial}_r$ je privilegovaný nulový smer. Ten v prípade algebraického typu N, jeho konkrétnu realizáciu v R–T triede budeme skúmať v tretej kapitole, musí byť štvornásobne degenerovaný. To efektívne prináša podmienky na nulovosť aj ostatných projekcií Ψ s výnimkou $\Psi_{4^{ij}}$, ktoré jediné ostáva nenulové a fyzikálne nesie informáciu o gravitačnom šírení. Toto prirodzene vedie k obmedzení tvaru Kundtovej metriky, čo v tretej kapitole využijeme.

2. Konformná transformácia

V tejto kapitole zhrnieme vlastnosti konformnej transformácie na lorentzovských varietách. Konformné transformácie sú významným nástrojom všeobecnej teórie relativity. Pomáhajú ukázať veľa dôležitých vlastností ukrytých v pôvodnej metrike vďaka tomu, že sú za istých podmienok napríklad schopné zobraziť nekonečný priestoročas na kompaktnú množinu. V tejto kapitole si ukážeme dôležité vlastnosti konformných transformácií, vplyv na kauzálnu štruktúru, geodetiky, Riemannov a Weylov tenzor. Základné vlastnosti konformnej transformácie sú spracované podľa referenčnej knihy všeobecnej relativity [16].

2.1 Vlastnosti konformnej transformácie

Uvažujeme kladnú hladkú funkciu Ω (konformný faktor) a metriku g_{ab} na lorentzovskej variete[1] dimenzie D, potom

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \tag{2.1}$$

je tiež metrika, ktorá vznikla pomocou konformnej transformácie z metriky g_{ab}. Metrika vygenerovaná konformnou transformáciou zachováva na lorentzovskej variete kauzálnu štruktúru pôvodnej metriky. To znamená, že ak ľubovoľný vektor $\boldsymbol{v}$ je časupodobný, svetelný alebo priestorupodobný vzhľadom na g_{ab}, tak sa charakter vektoru zachová aj vzhľadom na $\tilde{g}_{ab}$, teda ak

$$g_{ab} v^a v^b \lesseqgtr 0\,, \tag{2.2}$$

tak potom

$$\tilde{g}_{ab} v^a v^b = \Omega^2 g_{ab} v^a v^b \lesseqgtr 0\,. \tag{2.3}$$

Toto tvrdenie platí aj naopak. Ak máme na lorentzovskej variete dve metriky, ktoré majú rovnakú kauzálnu štruktúru, tak nutne metriky musia byť previazané konformnou transformáciou. Táto implikácia sa dá nahliadnuť intuitívne. Ak v každom bode variety platia tieto vzťahy zároveň

$$g_{ab} v^a v^b \lesseqgtr 0\,, \qquad \tilde{g}_{ab} v^a v^b \lesseqgtr 0\,, \tag{2.4}$$

tak v každom bode si musia byť metriky úmerné kladnou konštantou, ale táto konštanta môže byť v každom bode variety rôzna, čo dáva vzťah (2.1).

Inverzný tvar metriky $\tilde{g}^{ab}$ plynie z požiadavky $\delta^a_c = \tilde{g}^{ab}\tilde{g}_{bc} = \Omega^2 \tilde{g}^{ab} g_{bc}$, a teda

$$\tilde{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}\,, \tag{2.5}$$

a je vidieť, že $\tilde{g}^{ab}$ nevzniká zdvíhaním indexov pomocou g^{ab}

$$g^{ac} g^{bd} \tilde{g}_{cd} = \Omega^2 g^{ac} g^{bd} g_{cd} = \Omega^2 g^{ab} \neq \tilde{g}^{ab}\,. \tag{2.6}$$

[1] Konformná transformácia sa dá zaviesť na varietách ľubovoľnej signatúry, ale v relativite skúmame vplyv transformácie práve na lorentzovské variety, preto od začiatku predpokladáme transformácie na lorentzovských varietách.

Keďže na variete máme zavedené dve metriky, môžu nastať nejasnosti, voči ktorej metrike sa vzťahuje kovariantná derivácia, preto budeme písať operátor ∇_a pre metriku g_{ab} a $\tilde{\nabla}_a$ pre metriku $\tilde{g}_{ab}$.

Ďalším cieľom je ukázať, aký je vzťah medzi geodetikami voči g_{ab} a $\tilde{g}_{ab}$. Na to potrebujeme odvodiť, ako pôsobí derivácia ∇_a na $\tilde{g}_{ab}$, a vzájomný vzťah medzi kovariantými deriváciami. Vieme, že metriky síce sú kompatibilné so svojimi kovariantnými deriváciami $\nabla_a g_{bc} = 0$ a $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = 0$, to už ale neplatí pre kovariantnú deriváciu a k nej konformne previazanú metriku, teda

$$\nabla_a \tilde{g}_{bc} = \nabla_a(\Omega^2 g_{bc}) = 2\Omega g_{bc} \nabla_a \Omega \,. \tag{2.7}$$

Vzťah medzi kovariantnými deriváciami plynie z voľnosti vo voľbe kovariantnej derivácie. Tá je v relativite eliminovaná voľbou Levi-Civitovej konexie, ale jej voľba je daná konkrétnou metrikou a z výsledku (2.7) vidíme, že skutočne ide o dve rôzne derivácie, teda musia byť previazané konexiou $\Gamma_m = \tilde{\nabla}_m - \nabla_m$. Afinná konexia je pseudoderivácia, to znamená, že je plne určená akciou na vektoroch

$$\tilde{\nabla}_a v^b = \nabla_a v^b + \Gamma^b{}_{ac} v^c \,, \tag{2.8}$$

a pre formy tak plynie

$$\tilde{\nabla}_a \omega_b = \nabla_a \omega_b - \Gamma^c{}_{ab} \omega_c \,. \tag{2.9}$$

Z podmienky $\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = 0$ získame explicitné vyjadrenie afinnej konexie pomocou derivácií metriky ako

$$0 = \tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = \nabla_a \tilde{g}_{bc} - \Gamma^d{}_{ab} \tilde{g}_{dc} - \Gamma^d{}_{ac} \tilde{g}_{bd} \,. \tag{2.10}$$

Z čoho sa vyjadrí derivácia metriky

$$\nabla_a \tilde{g}_{bc} = \Gamma^d{}_{ab} \tilde{g}_{dc} + \Gamma^d{}_{ac} \tilde{g}_{bd} \,. \tag{2.11}$$

Cyklickým vysčítaním (s netriviálnym mínusom pred tretím členom) dostaneme vyjadrenie afinnej konexie pomocou derivácií metriky,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \left(\nabla_a \tilde{g}_{bd} + \nabla_b \tilde{g}_{ad} - \nabla_d \tilde{g}_{ab} \right) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{cd} \left(\Gamma^m{}_{ab} \tilde{g}_{md} + \Gamma^m{}_{ad} \tilde{g}_{bm} + \Gamma^m{}_{ba} \tilde{g}_{md} + \Gamma^m{}_{bd} \tilde{g}_{bm} - \Gamma^m{}_{da} \tilde{g}_{mb} - \Gamma^m{}_{db} \tilde{g}_{bm} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\Gamma^c{}_{ab} + \Gamma^c{}_{ba} \right) = \Gamma^c{}_{ab} \,, \end{aligned} \tag{2.12}$$

kde sa v prvej rovnosti využil vzťah (2.11) a v druhej rovnosti sa využila symetria metriky a symetria afinnej konexie v dolných indexoch. Dosadením (2.5) a (2.7) do (2.12) dostaneme vzťah pre afinnú konexiu vyjadrenú pomocou pôvodnej metriky g_{ab}, napríklad [16],

$$\Gamma^c{}_{ab} = \Omega^{-1} g^{cd} \left(g_{bd} \nabla_a \Omega + g_{ad} \nabla_b \Omega - g_{ab} \nabla_d \Omega \right) = 2\delta^c_{(a} \nabla_{b)} \ln \Omega - g_{ab} g^{cd} \nabla_d \ln \Omega \,. \tag{2.13}$$

Ešte dodajme, že pre niektoré rovnosti nižšie sa oplatí zaviesť kompaktnejší zápis,

$$\Upsilon_a \equiv \nabla_a \ln \Omega \,, \qquad \Upsilon^a \equiv g^{ab} \nabla_b \ln \Omega \,. \tag{2.14}$$

Vyjadrenie (2.13) nám pomôže porovnať geodetiky voči derivácii $\tilde{\nabla}_a$ a ∇_a. Uvažujme afinne parametrizované geodetiky pre ∇_a. Z postupu v rovnici (1.2) vyplýva ekvivalentná podmienka afinnej parametrizácie $v^a\nabla_a v^b = 0$. Ďalej skúmame vzťah voči $\tilde{\nabla}_a$

$$v^a\tilde{\nabla}_a v^b = v^a\nabla_a v^b + v^a\Gamma^b{}_{ac}v^c = 2v^b v^c \Upsilon_c - (g_{ac}v^a v^c)\Upsilon^b \,. \tag{2.15}$$

Tvar neafinne parametrizovaných kriviek sa dá nájsť zo substitúcie afinného parametra p na $q(p)$

$$\begin{aligned} v^a\tilde{\nabla}_a v^b &= \frac{\mathrm{d}^2 x^b}{\mathrm{d}q^2} + \Gamma^b{}_{ac}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}^2 x^b}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2} + \Gamma^b{}_{ac}\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}\right)^2 \\ &= \frac{\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2} = \alpha v^b \,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Porovnaním rovnice (2.15) a (2.16) zistíme, že vo všeobecnosti konformný faktor nezachováva geodetiky, ale v prípade, že platí $g_{ab}v^a v^b = 0$, teda geodetiky sú nulové, tak geodetiky voči ∇_a prejdú na neafinne parametrizované geodetiky s parametrom α daným podmienkou $\alpha = 2v^c\Upsilon_c$.

2.2 Konformná transformácia Weylovho tenzora

Dôležitou vlastnosťou konformných transformácií je, že zachovávajú Weylov tenzor (pri špecifickom usporiadaní indexov). To ukážeme z toho, ako konformné transformácie pôsobia na Riemannov tenzor. Vyjdeme z vlastnosti pôsobenia Riemannovho tenzoru s nulovou torziou na formy a využijeme vlastnosť (2.9)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^d\omega_d &= \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\omega_c - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a\omega_c \\ &= \tilde{\nabla}_a\left(\nabla_b\omega_c - \Gamma^d{}_{bc}\omega_d\right) - \tilde{\nabla}_b\left(\nabla_a\omega_c - \Gamma^d{}_{ac}\omega_d\right) \\ &= \nabla_a\nabla_b\omega_c - \nabla_b\nabla_a\omega_c - \Gamma^m{}_{ba}\nabla_m\omega_c + \Gamma^m{}_{ab}\nabla_m\omega_c - \tilde{\nabla}_a\Gamma^d{}_{bc}\omega_d + \tilde{\nabla}_b\Gamma^d{}_{ac}\omega_d \\ &= R_{abc}{}^d\omega_d - \nabla_a\Gamma^d{}_{bc}\omega_d + \nabla_b\Gamma^d{}_{ac}\omega_d + \Gamma^m{}_{ba}\Gamma^d{}_{mc}\omega_d + \Gamma^m{}_{ac}\Gamma^d{}_{bm}\omega_d \\ &\qquad\qquad - \Gamma^m{}_{ab}\Gamma^d{}_{mc}\omega_d - \Gamma^m{}_{bc}\Gamma^d{}_{am}\omega_d \\ &= R_{abc}{}^d\omega_d - 2\nabla_{[a}\Gamma^d{}_{b]c}\omega_d + 2\Gamma^m{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]m}\omega_d \,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Do tohto výsledku dosadíme explicitné vyjadrenie $\Gamma^c{}_{ab}$ z (2.13)

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^d &= R_{abc}{}^d + \left(-\delta^d_c\nabla_a\nabla_b + \delta^d_c\nabla_b\nabla_a - \delta^d_b\nabla_a\nabla_c + \delta^d_a\nabla_b\nabla_c\right)\ln\Omega \\ &\quad + \left(g_{bc}g^{dm}\nabla_a\nabla_m - g_{ac}g^{dm}\nabla_b\nabla_m\right)\ln\Omega + 2\Gamma^m{}_{c[a}\Gamma^d{}_{b]m} \,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Vďaka nulovej torzii sú druhé kovariantné derivácie na funkciu zámenné, a teda sa odčítajú. V ostatných členoch sa použije kompaktný zápis pomocou antisymetrických zátvoriek a ostáva rozpísať člen Γ^2, ktorý obsahuje ďalších 18 členov,

$$
\begin{aligned}
&2\Gamma^{m}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]m} = \\
&+ \delta_c^m \delta_b^d (\nabla_a \ln\Omega)(\nabla_m \ln\Omega) + \delta_c^m \delta_m^d (\nabla_a \ln\Omega)(\nabla_b \ln\Omega) + \delta_a^m \delta_b^d (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_m \ln\Omega) \\
&+ \delta_a^m \delta_m^d (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_b \ln\Omega) - \delta_c^m \delta_a^d (\nabla_b \ln\Omega)(\nabla_m \ln\Omega) - \delta_c^m \delta_m^d (\nabla_b \ln\Omega)(\nabla_a \ln\Omega) \\
&- \delta_b^m \delta_a^d (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_m \ln\Omega) - \delta_b^m \delta_m^d (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_a \ln\Omega) \\
&- \delta_c^m g_{bm} g^{dn} (\nabla_a \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) - \delta_a^m g_{bm} g^{dn} (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) \\
&- \delta_b^d g_{ca} g^{mn} (\nabla_m \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) - \delta_m^d g_{ca} g^{mn} (\nabla_b \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) \\
&+ \delta_c^m g_{am} g^{dn} (\nabla_b \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) + \delta_b^m g_{am} g^{dn} (\nabla_c \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) \\
&+ \delta_a^d g_{cb} g^{mn} (\nabla_m \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) + \delta_m^d g_{cb} g^{mn} (\nabla_a \ln\Omega)(\nabla_n \ln\Omega) \\
&+ g_{ca} g_{bm} g^{mn} g^{dp} (\nabla_n \ln\Omega)(\nabla_p \ln\Omega) - g_{cb} g_{am} g^{mn} g^{dp} (\nabla_n \ln\Omega)(\nabla_p \ln\Omega)\,, \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

kde je vidieť výhoda kompaktného zápisu (2.14), pretože výpočet sa redukuje na

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^{m}{}_{c[a}\Gamma^{d}{}_{b]m} = \\
&+ \delta_c^m \delta_b^d \Upsilon_a \Upsilon_m + \delta_c^m \delta_m^d \Upsilon_a \Upsilon_b + \delta_a^m \delta_b^d \Upsilon_c \Upsilon_m + \delta_a^m \delta_m^d \Upsilon_c \Upsilon_b \\
&- \delta_c^m \delta_a^d \Upsilon_b \Upsilon_m - \delta_c^m \delta_m^d \Upsilon_b \Upsilon_a - \delta_b^m \delta_a^d \Upsilon_c \Upsilon_m - \delta_b^m \delta_m^d \Upsilon_c \Upsilon_a \\
&- \delta_c^m g_{bm} \Upsilon_a \Upsilon^d - \delta_a^m g_{bm} \Upsilon_c \Upsilon^d - \delta_b^d g_{ca} \Upsilon_m \Upsilon^m - \delta_m^d g_{ca} \Upsilon_b \Upsilon^m + \delta_c^m g_{am} \Upsilon_b \Upsilon^d \\
&+ \delta_b^m g_{am} \Upsilon_c \Upsilon^d + \delta_a^d g_{cb} \Upsilon_m \Upsilon^m + \delta_m^d g_{cb} \Upsilon_a \Upsilon^m + g_{ca} g_{bm} \Upsilon^m \Upsilon^d - g_{cb} g_{am} \Upsilon^m \Upsilon^d \\
= -2\delta^d_{[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon_c + 2g^{dn} g_{c[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon_n + 2\delta^d_{[a} g_{b]c}\Upsilon_m \Upsilon^m\,, \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

čo spolu s (2.18) dá

$$
\tilde{R}_{abc}{}^{d} = R_{abc}{}^{d} + 2\delta^d_{[a}\nabla_{b]}\Upsilon_c - 2g_{c[a}\nabla_{b]}\Upsilon^d - 2\delta^d_{[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon_c + 2g_{c[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon^d + 2\delta^d_{[a}g_{b]c}\Upsilon_m\Upsilon^n\,. \qquad (2.21)
$$

Pre výpočet Weylovho tenzoru potrebujeme ešte Ricciho tenzor

$$
\tilde{R}_{ac} = R_{ac} - (D-2)\nabla_a\Upsilon_c - g_{ac}\nabla_b\Upsilon^b + (D-2)\Upsilon_a\Upsilon_c - (D-2)g_{ac}\Upsilon_b\Upsilon^b \qquad (2.22)
$$

a Ricciho skalár

$$
\Omega^2\tilde{R} = \tilde{g}^{ab}\tilde{R}_{ab} = R - 2(D-1)\nabla_a\Upsilon^a - (D-1)(D-2)\Upsilon_a\Upsilon^a\,, \qquad (2.23)
$$

ktoré vzniknú úžením Riemannovho tenzoru. Pri výpočte sme využili prepis metriky $\tilde{g}^{ab}$ podľa vzťahu (2.5). S týmito výsledkami sme už schopní dosadiť do definície Weylovho tenzoru

$$
C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{D-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + \frac{2}{(D-1)(D-2)}R g_{a[c}g_{d]b}\,. \qquad (2.24)
$$

Podľa tejto definície rozpíšeme tenzor $\tilde{C}_{abcd}$

$$\begin{aligned}
\Omega^{-2}\tilde{C}_{abcd} = {} & C_{abcd} + 2g_{d[a}\nabla_{b]}\Upsilon_c - 2g_{c[a}\nabla_{b]}\Upsilon_d - 2g_{d[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon_c + 2g_{c[a}\Upsilon_{b]}\Upsilon_d + 2g_{d[a}g_{b]c}\Upsilon_m\Upsilon^m \\
& - 2g_{a[c}\Big(- \nabla_{d]}\Upsilon_b - \frac{1}{D-2}g_{d]b}\nabla_m\Upsilon^m + \Upsilon_{d]}\Upsilon_b - g_{d]b}\Upsilon_m\Upsilon^m\Big) \\
& + 2g_{b[c}\Big(- \nabla_{d]}\Upsilon_a - \frac{1}{D-2}g_{d]a}\nabla_m\Upsilon^m + \Upsilon_{d]}\Upsilon_a - g_{d]a}\Upsilon_m\Upsilon^m\Big) \\
& - \frac{4}{D-2}g_{a[c}g_{d]b}\nabla_m\Upsilon^m - 2g_{a[c}g_{d]b}\Upsilon_m\Upsilon^m \\
= {} & C_{abcd} - \frac{2}{D-2}\Big(g_{b[c}g_{d]a} + g_{a[c}g_{d]b}\Big)\nabla_m\Upsilon^m \\
= {} & C_{abcd}\,.
\end{aligned}$$

Špeciálne v tvare s jedným zdvihnutým indexom nadobúda Weylov tenzor tvar nezmenený konformnou transformáciou

$$\tilde{C}_{abc}{}^{d} = C_{abc}{}^{d}\,. \tag{2.25}$$

Preto je aj algebraická klasifikácia priestoročasov založená na Weylovom tenzore invariantnom vzhľadom na konformné transformácie.

Naskytá sa otázka, či okrem Weylovho tenzoru existujú aj iné konformne invariantné veličiny a ukazuje sa, že mnoho rovníc poľa má konformne invarianté riešenie. Konformne invariantné riešenie (s konformnou váhou poľa $s \in \mathbb{R}$) ľubovoľných rovníc poľa Ψ s metrikou g_{ab} znamená, že $\tilde{\psi} = \Omega^s\psi$ rieši tieto rovnice s transformovanou metrikou $\tilde{g}_{ab}$, pozri opäť [16].

2.3 Konformný vzťah medzi R–T a Kundtovými geometriami

Kundtov priestoročas patrí medzi významnú triedu analyticky riešiteľných geometrií, či už v Einsteinovej teórii gravitácie, ale aj v teórii kvadratickej gravitácie. Dokonca zástupcovia Kundtovej triedy geometrie patria medzi takzvané univerzálne priestoročasy [17]. Jeho význam je o to väčší, že s mnohými ďalšími presnými riešeniami je previazaným konformným faktorom, pozri [18].

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \Omega^2(r,u,x)\mathrm{d}s^2_{\mathrm{Kundt}}\,. \tag{2.26}$$

Z predchádzajúcej kapitoly vieme, že Weylov tenzor konformná transformácia zachováva, prípadne je úmerný mocnine konformného faktoru. To znamená, že Weylov typ priestoročasu sa podľa kapitoly 1.5 zachováva.

Bližšie sa pozrieme, aké triedy geometrií sa dajú pomocou konformného faktoru z Kundtovej geometrie nagenerovať. Pre klasifikáciu nového priestoročasu potrebujeme vedieť transformované optické skaláry. Tie napočítame špeciálne v súradniciach adaptovaných na nulovú foliáciu. Je potreba rozhodnúť, ktorú štruktúru na variete berieme ako primárnu. Teda či zachováme vektory $\tilde{k}^a = k^a$ a s nimi stotožníme formy pomocou konformne transformovanej metriky $\tilde{k}_a = \tilde{g}_{ab}\tilde{k}^b = \tilde{g}_{ab}k^b$. Alebo zachováme formy $\tilde{k}_a = k_a$ a k nim vektory $\tilde{k}^a = \tilde{g}^{ab}\tilde{k}_b = \tilde{g}^{ab}k_b$. Naskytá sa možnosť určiť expanziu Θ z rovnice (1.28), kde explicitne členy k_a,

k^a nevystupujú, ale po prvé, po transformácii člen $\frac{1}{2(D-2)}\tilde{g}^{ij}\tilde{g}_{ij,r}$ už nemusí mať význam expanzie, pretože sme pri odvádzaní danej rovnice využili fakt, že členy g_{ra} sú konštanty nezávislé od súradnice r, čo ale pre transformovanú súradnicu $\tilde{g}_{ra}$ neplatí. Po druhé, z postupu v (1.28) vyplýva, že sme ako primárnu štruktúru zvolili vektory. Avšak budeme postupovať opačne a k formám budeme konformnou transformáciou hľadať vektory, pretože touto voľbou dostaneme optické skaláry nezávislé od dimenzie priestoru, v ktorom pracujeme. Expanzia je podľa (1.24) daná vzťahom

$$(D-2)\tilde{\Theta} = \tilde{\nabla}_b \tilde{k}^b = \tilde{\nabla}_b(\tilde{g}^{bc}k_c) = \Omega^{-2}g^{bc}\tilde{\nabla}_b k_c. \tag{2.27}$$

Využili sme kompatibilitu metriky s kovariantnou deriváciou a následný prepis konformne transformovanej metriky pomocou pôvodnej (2.5). Ďalej pomocou afinnej konexie podľa (2.9) prejdeme od transformovanej kovariantnej derivácie k pôvodnej derivácii

$$(D-2)\Omega^2\tilde{\Theta} = g^{bc}\nabla_b k_c - g^{bc}\Gamma^a{}_{bc}k_a\,, \tag{2.28}$$

kde zložky affinej konexie sú dané pomocou konformného faktoru (2.13), ktorý v adaptovaných súradniciach $k_a = -u_{,a} = -\delta^u_a$ má tvar[2]

$$\Gamma^a{}_{bc}k_a = -\Omega^{-1}(\delta^u_b\nabla_c\Omega + \delta^u_c\nabla_b\Omega - g_{bc}g^{ue}\nabla_e\Omega)\,. \tag{2.29}$$

Dosadením tohto vzťahu do (2.28) a využitím metricky (1.5), (1.6) dostaneme

$$\Omega^2\tilde{\Theta} = \Theta + \frac{1}{\Omega(D-2)}(-\nabla_r\Omega - \nabla_r\Omega + D\nabla_r\Omega) = \Theta + \frac{\Omega_{,r}}{\Omega}\,. \tag{2.30}$$

Takáto konformná transformácia zachováva afinnú parametrizáciu

$$\tilde{\nabla}_a(k_c\tilde{k}^c) = \Omega^{-2}g^{cb}\tilde{\nabla}_a(k_c k_b)\,, \tag{2.31}$$

kde člen $\tilde{\nabla}_a(k_c k_b)$ sa dá rozpísať pomocou (2.9)

$$\tilde{\nabla}_a(k_c k_b) = \nabla_a(k_c k_b) - \Gamma^d{}_{ac}k_d k_b - \Gamma^d{}_{ab}k_c k_d\,. \tag{2.32}$$

Afinná konexia je daná pomocou (2.13)

$$\begin{aligned}\Omega\Gamma^d{}_{ac}k_d k_b(\delta^d_a\nabla_c\Omega + \delta^d_c\nabla_a\Omega - g_{ac}g^{de}\nabla_e\Omega)k_d k_b = \\ = \delta^u_a\delta^u_b\nabla_c\Omega + \delta^u_b\delta^u_c\nabla_a\Omega + g_{ac}\delta^u_b\nabla_r\Omega\,,\end{aligned} \tag{2.33}$$

kde sme využili adaptované súradnice $k_a = -u_{,a} = -\delta^u_a$ a tvar metriky (1.5), (1.6). Dosadením tohto vzťahu do (2.31) dostaneme

$$\begin{aligned}\Omega^3\tilde{\nabla}_a(k_c\tilde{k}^c) &= \Omega g^{cb}\nabla_a(k_c k_b) - g^{cb}(\delta^u_a\delta^u_b\nabla_c\Omega + \delta^u_b\delta^u_c\nabla_a\Omega + g_{ac}\delta^u_b\nabla_r\Omega) \\ &\quad - g^{cb}(\delta^u_a\delta^u_c\nabla_b\Omega + \delta^u_b\delta^u_c\nabla_a\Omega - g_{ac}\delta^u_b\nabla_r\Omega) \\ &= \delta^u_a\nabla_r\Omega - \delta^u_a\nabla_r\Omega + \delta^u_a\nabla_r\Omega - \delta^u_a\nabla_r\Omega = 0\,,\end{aligned} \tag{2.34}$$

teda podľa podmienky (1.2) sú geodetiky afinne parametrizované.

[2] Možno ukázať, že voľbou $\tilde{k}^a = k^a$, $\tilde{k}_a = \tilde{g}_{ab}k^b$ by sme dostali expanziu závislú od dimenzie $\tilde{\Theta} = \Theta + \frac{D}{D-2}\Upsilon_r$.

Podobným postupom ako v prípade expanzie Θ nájdeme vzťah pre konformne transformovaný shear $\tilde{\sigma}$. V definícii shearu (1.25) potrebujeme transformovať člen $(\tilde{\nabla}_{(b}k_{a)})(\tilde{\nabla}^b\tilde{k}^a)$ v adaptovaných súradniciach, teda

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{(b}k_{a)})(\tilde{\nabla}^b\tilde{k}^a) &= \Omega^{-4}g^{bc}g^{ad}(\tilde{\nabla}_{(b}k_{a)})(\tilde{\nabla}_c k_d) \\
&= \Omega^{-4}g^{bc}g^{ad}(\nabla_b k_a + \Omega^{-1}(\delta^u_b\nabla_a\Omega + \delta^u_a\nabla_b\Omega + g_{ba}\nabla_r\Omega)) \\
&\qquad\qquad (\nabla_c k_d + \Omega^{-1}(\delta^u_c\nabla_d\Omega + \delta^u_d\nabla_c\Omega + g_{cd}\nabla_r\Omega)) \\
&= \Omega^{-4}(\nabla_{(b}k_{a)})(\nabla^b k^a) + \Omega^{-5}(g_{ar,r}g^{ad}\nabla_d\Omega + g_{rb,r}g^{bc}\nabla_c\Omega + g_{ab,r}g^{ab}\nabla_r\Omega) \\
&\qquad\qquad + (D-2)\Omega^{-6}(\nabla_r\Omega)^2\,,
\end{aligned} \tag{2.35}$$

kde sme využili symetriu kovariantnej derivácie vektoru $\nabla_b k_a = \nabla_a k_b$, ktorá je ukázaná v (1.29) a explicitný prepis $\nabla_b k_a = \frac{1}{2}g_{ab,r}$ (1.41), z ktorého je tiež vidieť symetria v indexoch a a b. Navyše z tvaru metriky (1.5) a z (1.41) plynie

$$\frac{1}{2}g_{ab,r}g^{ab} = \frac{1}{2}g_{pq,r}g^{pq} = \Theta g_{pq}g^{pq} = (D-2)\Theta\,. \tag{2.36}$$

Potom využitím tohto vzťahu, konformne transformovaný shear je

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}^2 &= (\tilde{\nabla}_{(b}k_{a)})(\tilde{\nabla}^b\tilde{k}^a) - (D-2)\tilde{\Theta}^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\Omega^4} + (D-2)\left(\Theta - \frac{\Omega_{,r}}{\Omega}\right)^2 - (D-2)\tilde{\Theta}^2 = \frac{\sigma^2}{\Omega^4}\,.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Pri výpočte twistu nemôžeme použiť adaptované súradnice, pretože v nich je twist identicky nulový $A \equiv 0$, respektíve nemožno popísať twistujúcu geometriu súradnicami adaptovanými na nulovú foliáciu. O to jednoduchšie bude odvodenie konformne transformovaného twistu, stačí si uvedomiť, že zložky afinnej konexie sú v dolných indexoch symetrické. Potom

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^2 &= -(\tilde{\nabla}_{[b}k_{a]})(\tilde{\nabla}^b\tilde{k}^a) = -\Omega^{-4}(\nabla_{[b}k_{a]} - \Gamma^c{}_{[ab]}k^c)g^{bc}g^{ad}(\nabla_c k_d - \Gamma^e{}_{dc}k_e) \\
&= -\Omega^{-4}(\nabla_{[b}k_{a]})(\nabla^b k^a) + \Omega^{-4}\nabla^{[c}k^{d]}\Gamma^e{}_{dc}k_e = \frac{A^2}{\Omega^4}\,.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Z týchto rovníc (2.30), (2.37) a (2.38) (porovnaj s [18])

$$\tilde{\Theta} = \frac{\Theta}{\Omega^2} + \frac{\Omega_{,r}}{\Omega^3}\,, \qquad \tilde{\sigma}^2 = \frac{\sigma}{\Omega^4}\,, \qquad \tilde{A}^2 = \frac{A^2}{\Omega^4}\,, \tag{2.39}$$

plynie, že z Kundtovej geometrie pomocou konformnej transformácie nagenerujeme len Robinsonovu–Trautmanovu triedu priestoročasov v prípade, že konformný faktor Ω je funkciou súradnice r a zostávame v Kundtovej triede, ak konformný faktor nie je funkciou súradníc $\Omega \equiv \Omega(u,x)$.

3. Rovnice gravitačného poľa

V tejto kapitole sa zameriame na geometrie Weylovho typu N. Naším cieľom je vyjsť zo špeciálneho Kundtovho tvaru metriky typu N, nájsť veličiny popisujúce krivosť (Ricciho tenzor a Ricciho skalár) a konformne ich transformovať. Potom takto nagenerovaný priestor budeme skúmať v rôznych teóriách gravitácie, či v Einsteinovej alebo kvadratickej.

3.1 Naivný pokus o R–T riešenie typu N v Einsteinovej gravitácii

V tejto podkapitole vyjdeme naivným spôsobom z najjednoduchších Kundtových geometrií typu N a pozrieme sa, či generujú R–T riešenie v Einsteinovej teórii.

pp-vlny

Uvažujme špeciálny prípad kundtovskej geometrie, a to takzvané *pp*-vlny bez gyratonových členov (t.j. $g_{up} = 0$)

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}r + g_{uu}(u,x^s)\,\mathrm{d}u^2\,. \tag{3.1}$$

To znamená, že metrika a k nej inverzná metrika je daná maticou (porovnaj s (1.5) a (1.6))

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & g_{uu}(u,x^s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pq} \end{bmatrix}, \qquad g^{ab} = \begin{bmatrix} -g_{uu}(u,x^s) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pq} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

V kapitole 1.4 sme si uviedli komponenty Ricciho tenzoru a skaláru pre všeobecný Kundtov priestoročas. My využijeme tieto výsledky a dosadíme do nich metriku *pp*-vĺn (3.2). V kapitole 1.4 sa uvažuje aj všeobecný (nenulový) člen g_{up} s možným rozkladom $g_{up}(r,u,x^p) = e_p(u,x^p) + f_p(u,x^p)r$, my vzhľadom na našu metriku, položíme tieto členy rovné nule

$$e_p = 0\,, \qquad f_p = 0\,. \tag{3.3}$$

Z toho plynie, že sa zjednodušia členy obsahujúce e_p a f_p, a to e_{pq} a f_{pq}, ktoré sú tvorené kombináciou e_p, f_p a $g_{pq,u}$ podľa (1.96) a (1.98), teda sú tiež nulové

$$e_{pq} = 0\,, \qquad f_{pq} = 0\,. \tag{3.4}$$

Pri zjednodušení budeme potrebovať ešte Christoffelove symboly na priečnom priestore ${}^S\Gamma^p{}_{mn}$

$${}^S\Gamma^p{}_{mn} = \frac{1}{2}g^{pq}(2g_{q(m,n)} - g_{mn,q})\,, \tag{3.5}$$

čo je ale vzhľadom na metriku (3.2) rovné nula, ${}^S\Gamma^p{}_{mn} = 0$, čo nie je prekvapivý výsledok, keďže metrika je v priestorových indexoch euklidovská, čo automaticky implikuje ${}^S R_{pq} = 0$ a ${}^S R = 0$. V rovniciach sa vyskytujú aj kovariantné derivácie metriky podľa priestorových indexov. Prepisom $g_{uu||m||n}$ podľa (1.94) sa dá potom ukázať, že kovariantná priečna derivácia metriky prejde na parciálne derivovanie

$$g_{uu||m||n} = g_{uu,mn} - g_{uu,p} \, {}^S\Gamma^p{}_{mn} = g_{uu,mn} \,. \tag{3.6}$$

Ďalší zavedený člen je E_{pm} podľa (1.97), ktorý je vzhľadom na metriku *pp*-vĺn (3.2) tiež nulový,

$$E_{pm} = g_{u[p,m]} + \frac{1}{2} g_{pm,u} = 0 \,. \tag{3.7}$$

Posledný člen, ktorý je potrebný vyjadriť, je $g_{m[p,u||n]}$, ten sa podľa (1.92) dá prepísať

$$g_{m[p,u||n]} = g_{m[p,n],u} + \frac{1}{2}\left({}^S\Gamma^q{}_{mp} g_{qn,u} - {}^S\Gamma^q{}_{mn} g_{qp,u} \right) = 0 \,, \tag{3.8}$$

kde neprítomnosť členov ${}^S\Gamma$ priamo plynie z (3.5) a tvaru metriky (3.2). Metrika je v priestorových indexoch jednotková matica a jej derivácia dá prirodzene nulu.

S týmito výsledkami, (3.2) až (3.8), sme schopní dopočítať komponenty Ricciho tenzoru (1.72) až (1.77)

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{ru} & R_{rq} \\ R_{ur} & R_{uu} & R_{uq} \\ R_{pr} & R_{pu} & R_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\delta^{mn} g_{uu,mn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{3.9}$$

Všeobecný Ricciho skalár je napočítaný podľa (1.78) a s vyššie odvodenými vzťahmi okamžite dostávame

$$R = 0 \,. \tag{3.10}$$

To sa dá ale ukázať aj priamo z definície vďaka (3.9)

$$\begin{aligned} R = R_a{}^a = g^{ab} R_{ab} &= \mathrm{Tr} \begin{bmatrix} -g_{uu}(u,x^s) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\delta^{mn} g_{uu,mn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{Tr} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\delta^{mn} g_{uu,mn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Teraz sa pokúsime konformne transformovať geometriu *pp*-vĺn a nájsť podmienky na konformný faktor Ω tak, aby výsledný priestoročas bol riešením Einsteinových rovníc poľa. V kapitole o konformných transformáciách sme si odvodili konformne transformovaný Ricciho tenzor (2.22). Spolu s metrikou (3.2) to dá

$$\tilde{R}_{rr} = (D-2)(-\nabla_r \Upsilon_r + \Upsilon_r \Upsilon_r) \,, \tag{3.12}$$

$$\tilde{R}_{ru} = (D-2)(-\nabla_r \Upsilon_u + \Upsilon_r \Upsilon_u + \Upsilon_b \Upsilon^b) + \nabla_b \Upsilon^b \,, \tag{3.13}$$

$$\tilde{R}_{rp} = (D-2)(-\nabla_r \Upsilon_p + \Upsilon_r \Upsilon_p) \,, \tag{3.14}$$

$$\tilde{R}_{uu} = -\frac{1}{2}\delta^{mn} g_{uu,mn} + (D-2)(-\nabla_u \Upsilon_u + \Upsilon_u \Upsilon_u - g_{uu} \Upsilon_b \Upsilon^b) - g_{uu} \nabla_b \Upsilon^b \,, \tag{3.15}$$

$$\tilde{R}_{up} = (D-2)(-\nabla_u \Upsilon_p + \Upsilon_u \Upsilon_p) \,, \tag{3.16}$$

$$\tilde{R}_{pq} = (D-2)(-\nabla_p \Upsilon_q + \Upsilon_p \Upsilon_q - \delta_{pq} \Upsilon_b \Upsilon^b) - \delta_{pq} \nabla_b \Upsilon^b \,. \tag{3.17}$$

A z toho transformovaný Ricciho skalár

$$\tilde{R} = -2\frac{D-1}{\Omega^2}\nabla_b\Upsilon^b - \frac{(D-1)(D-2)}{\Omega^2}\Upsilon_b\Upsilon^b\,. \tag{3.18}$$

Dosadením zložiek Ricciho tenzoru (3.13) až (3.17) a Ricciho skaláru (3.18) do Einsteinových rovníc pre vákuum, teda

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 0\,, \tag{3.19}$$

dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc

$$(D-2)(-\nabla_r\Upsilon_r + \Upsilon_r\Upsilon_r) = 0\,, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}(D-2)(-\nabla_r\Upsilon_u + \Upsilon_r\Upsilon_u + \Upsilon_b\Upsilon^b) + \nabla_b\Upsilon^b \\ -\frac{1}{2}\frac{D-1}{\Omega^2}\nabla_b\Upsilon^b + \frac{(D-1)(D-2)}{\Omega^2}\Upsilon_b\Upsilon^b - \Lambda = 0\,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$(D-2)(-\nabla_r\Upsilon_p + \Upsilon_r\Upsilon_p) = 0\,, \tag{3.22}$$

$$(D-2)(-\nabla_u\Upsilon_p + \Upsilon_u\Upsilon_p) = 0\,, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}(D-2)(-\nabla_p\Upsilon_q + \Upsilon_p\Upsilon_q - \delta_{pq}\Upsilon_b\Upsilon^b) - \delta_{pq}\nabla_b\Upsilon^b \\ -\frac{1}{2}(-2\frac{D-1}{\Omega^2}\nabla_b\Upsilon^b - \frac{(D-1)(D-2)}{\Omega^2}\Upsilon_b\Upsilon^b)\delta_{pq} + \Lambda\delta_{pq} = 0\,.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Rovnica pre indexy uu tu nie je explicitne vyjadrená. Po prvé preto, že jej vyjadrenie je komplikované a po druhé, ani ho (ako sa neskôr ukáže) nepotrebujeme.

Vidíme, že rovnice (3.20), (3.22) a (3.23) sa na seba podobajú. Pre ich riešenie potrebujeme rozpísať člen $\nabla_a\Upsilon_b$

$$\begin{aligned}\nabla_a\Upsilon_b &= \Upsilon_{b,a} - \Gamma^c{}_{ba}\Upsilon_c = (\ln\Omega)_{,ab} - \frac{1}{2}g^{cd}(g_{ad,b} + g_{db,a} - g_{ba,d})(\ln\Omega)_{,c} \\ &= (\ln\Omega)_{,ab} - \frac{1}{2}[g^{ru}(g_{au,b} + g_{ub,a} - g_{ba,u})(\ln\Omega)_{,r} - g^{pq}g_{ba,q}(\ln\Omega)_{,p}] \\ &= (\ln\Omega)_{,ab} - \frac{1}{2\Omega}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{uu,u}\Omega_{,r} - \delta^{mn}g_{uu,m}\Omega_{,n} & -g_{uu,q}\Omega_{,r} \\ 0 & -g_{uu,p}\Omega_{,r} & 0\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

- *Rovnica pre členy rr*

Predpokladáme, že priestor, v ktorom pracujeme, je aspoň 4-rozmerný, $D \geq 4$, a teda člen $D-2$ z rovníc vykrátime. Použitými úpravami vyššie sme dostali diferenciálnu rovnicu druhého rádu

$$(\ln\Omega)_{,rr} = ((\ln\Omega)_{,r})^2\,. \tag{3.26}$$

Preznačením

$$(\ln\Omega)_{,r} = \eta \tag{3.27}$$

dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorej riešením je

$$\eta(r,u,x^s) = -\frac{1}{r - r_0(u,x^s)}\,, \tag{3.28}$$

a preintegrovaním rovnice (3.27) dostaneme

$$\ln \Omega = -\ln(r - r_0(u,x^s)) + C(u,x^s)\,. \tag{3.29}$$

Teda radiálna závislosť Ω je[1]

$$\Omega(r,u,x^s) = \frac{\zeta(u,x^s)}{r - r_0(u,x^s)}\,. \tag{3.30}$$

- *Rovnica pre členy rp*

Rozpísaním rovnice (3.22) v členoch Υ pomocou (3.25) a dosadením riešenia (3.30) dostaneme

$$\begin{aligned}(\ln\Omega)_{,rp} &= (\ln\Omega)_{,r}(\ln\Omega)_{,p}\,,\\ \eta_{,p} &= \eta(r_{0,p}\eta + z)\,,\end{aligned} \tag{3.31}$$

kde z značí $(\ln\zeta)_{,p}$. Pre riešenie použijeme substitúciu $\eta = \xi^{-1}$ a následným prenásobením rovnice ξ^2 sa z kvadratickej diferenciálnej rovnice stane lineárna diferenciálna rovnica s pravou stranou $r_{0,p}$

$$\xi_{,p}(r,u,x^s) = z(u,x^s)\xi + r_{0,p}(u,x)\,. \tag{3.32}$$

Takúto rovnicu riešime variáciou konštanty, teda najpv vyriešime homogénny tvar rovnice (3.32)

$$\int \frac{\xi_{,p}}{\xi}\,\mathrm{d}x^p = \int z(u,x^s)\,\mathrm{d}x^p = \int (\ln\zeta)_{,p}\,\mathrm{d}x^p = \ln\zeta(u,x^s) + \ln F(r,u,x^s)\,, \tag{3.33}$$

kde $\ln F(r,u,x^s)$ je variovaná konštanta. Potom zjavne riešenie homogénnej rovnice je

$$\xi(r,u,x^s) = F(r,u,x^s)\zeta(u,x^s)\,. \tag{3.34}$$

Dosadíme do nehomogénnej diferenciálnej rovnice (3.27)

$$F_{,p}(r,u,x^s)\zeta(u,x^s) + F(r,u,x^s)\zeta_{,p}(u,x^s) = \frac{\zeta_{,p}}{\zeta}F(r,u,x^s)\zeta + r_{0,p}(u,x^s)\,, \tag{3.35}$$

teda

$$F(r,u,x^s) = \int \frac{r_{0,p}}{\zeta}\,\mathrm{d}x^p\,. \tag{3.36}$$

Tento výsledok porovnáme s rovnicou (3.28), čo by nám malo dať podmienky na členy ζ a r_0

$$\begin{aligned}-\frac{1}{r - r_0} &= \frac{1}{\zeta\int\frac{r_{0,p}}{\zeta}}\,,\\ \frac{r_{0,p}\zeta - (r - r_0)\zeta_{,p}}{\zeta^2} &= -\frac{r_{0,p}}{\zeta}\,,\\ 2\frac{r_{0,p}(u,x^s)}{r - r_0(u,x^s)} &= \frac{\zeta_{,p}}{\zeta}(u,x^s)\,.\end{aligned} \tag{3.37}$$

[1] Neuvažujeme triviálne riešenie $\Omega \equiv \Omega(u,x^s)$, ktoré je tiež riešením diferenciálnej rovnice (3.26), ale takýto konformný faktor vedie na Kundtov priestoročas a my sa primárne zaujímame o R–T riešenie.

Ľavá strana rovnice závisí od súradnice r, zatiaľ čo pravá strana nie, a to vedie k sporu, pretože kandidátom na riešenie je

$$(r - r_0(u,x^s))^2 = \zeta(u,x^s)\,, \tag{3.38}$$

ale takúto rovnosť nie je možné splniť vzhľadom na to, že ani r_0, ani ζ nezávisí od súradnice r. To znamená, že jediný spôsob, ako splniť diferenciálnu rovnicu (3.37) je, že r_0 a ζ nezávisí ani od priestorových súradníc, teda ani konformný faktor nezávisí od priestorových súradníc

$$\Omega(r,u) = \frac{\zeta(u)}{r - r_0(u)}\,. \tag{3.39}$$

- *Rovnica pre členy up*

Konformný faktor nezávisí od priestorových súradníc x^p, a teda sa diferenciálna rovnica (3.16) redukuje na

$$\nabla_u \Upsilon_p = 0\,, \tag{3.40}$$

kde využijeme prepis kovariantnej derivácia pomocou parciálnej derivácia a metriky (3.25) a zámennosť parciálnych derivácií. Takto dostávame

$$g_{uu,p}\Omega_{,r} = 0\,. \tag{3.41}$$

Tu narážame na spor, pretože závislosť $\Omega \equiv \Omega(r)$ je daná diferenciálnou rovnicou pre členy rr, ktorej riešenie sme našli (3.30). Z toho teda plynie, že $g_{uu,p} = 0$, ale to je podmienka na samotný pôvodný priestoročas, ktorý je typu N, a ten predpokladá ľubovoľnú priestorovú závislosť metriky v $g_{uu} \equiv g_{uu}(u,x^p)$.

Ostatné diferenciálne rovnice už netreba brať do úvahy, pretože zjavne nie je možné konformne previazať kundtovskú geometriu *pp*-vĺn s netriviálnym Robinsonovým–Trautmanovým priestoročasom v Einsteinovej teórii gravitácie. Môžeme sa pokúsiť o komplikovanejšiu geometriu, keď pripustíme závislosť členu metriky g_{uu} aj od radiálnej súradnice.

VSI priestoročas

V tomto prípade pripustíme závislosť od súradnice r v člene g_{uu}

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j - 2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}r + g_{uu}(r,u,x^s)\,\mathrm{d}u^2\,, \tag{3.42}$$

kde $g_{uu}(r,u,x) = rc(u,x^s) + d(u,x^s)$. Metrika a inverzná metrika nadobudne tvar

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & g_{uu}(r,u,x^s) & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pq} \end{bmatrix} \qquad g^{ab} = \begin{bmatrix} -g_{uu}(r,u,x^s) & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{pq} \end{bmatrix}. \tag{3.43}$$

Opäť potrebujeme napočítať Ricciho tenzor a Ricciho skalár. Ricciho tenzor sa od predchádzajúceho prípadu líši tým, že v metrike nám pribudla lineárna závislosť od radiálnej súradnice v člene $g_{uu}(r,u,x^s) = rc(u,x^s) + d(u,x^s)$. Vďaka linearite vymiznú členy $g_{uu,rr}$, ale ostanú prítomné členy $g_{uu,rp} = c(u,x^s)_{,p}$, teda Ricciho tenzor nadobúda tvar

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} R_{rr} & R_{ru} & R_{rq} \\ R_{ur} & R_{uu} & R_{uq} \\ R_{pr} & R_{pu} & R_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\delta^{mn}g_{uu,mn} & -\frac{1}{2}c_{,q} \\ 0 & -\frac{1}{2}c_{,p} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

Ricciho skalár stále ostáva nulový

$$R = 0\,. \tag{3.45}$$

Dosadením do Einsteinových rovníc poľa dostaneme podobne ako v predchádzajúcom prípade podmienky na konformný faktor Ω. Vidíme, že metrika si zachovala nenulové členy a do Ricciho tenzoru pribudol nenulový člen R_{up}, teda až na rovnicu pre up dopadli diferenciálne rovnice rovnako ako v prípade pp-vĺn,

$$(D-2)(-\nabla_r \Upsilon_r + \Upsilon_r \Upsilon_r) = 0\,, \tag{3.46}$$

$$(D-2)(-\nabla_r \Upsilon_u + \Upsilon_r \Upsilon_u + \Upsilon_b \Upsilon^b) + \nabla_b \Upsilon^b - \frac{1}{2}\frac{D-1}{\Omega^2}\nabla_b \Upsilon^b + \frac{(D-1)(D-2)}{\Omega^2}\Upsilon_b \Upsilon^b - \Lambda = 0\,, \tag{3.47}$$

$$(D-2)(-\nabla_r \Upsilon_p + \Upsilon_r \Upsilon_p) = 0\,, \tag{3.48}$$

$$R_{up} - (D-2)(-\nabla_u \Upsilon_p + \Upsilon_u \Upsilon_p) = 0\,, \tag{3.49}$$

$$(D-2)(-\nabla_p \Upsilon_q + \Upsilon_p \Upsilon_q - \delta_{pq}\Upsilon_b \Upsilon^b) - \delta_{pq}\nabla_b \Upsilon^b - \frac{1}{2}(-2\frac{D-1}{\Omega^2}\nabla_b \Upsilon^b - \frac{(D-1)(D-2)}{\Omega^2}\Upsilon_b \Upsilon^b)\delta_{pq} + \Lambda\delta_{pq} = 0\,. \tag{3.50}$$

Pri riešení rovníc využijeme rozpis členu $\nabla_a \Upsilon_b$ analogický (3.25),

$$\begin{aligned}\nabla_a \Upsilon_b &= \Upsilon_{b,a} - \Gamma^c{}_{ba}\Upsilon_c = (\ln\Omega)_{,ab} - \frac{1}{2}g^{cd}(g_{ad,b} + g_{db,a} - g_{ba,d})(\ln\Omega)_{,c} \\ &= (\ln\Omega)_{,ab} + \frac{1}{2\Omega}\begin{bmatrix} 0 & c\Omega_{,r} & 0 \\ c\Omega_{,r} & g_{uu,u}\Omega_{,r} + cg^{cr}\Omega_{,c} + \delta^{mn}g_{uu,m}\Omega_{,n} & g_{uu,q}\Omega_{,r} \\ 0 & g_{uu,p}\Omega_{,r} & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Môžeme si všimnúť, že položením členu $c = 0$ sa nám vzťah (3.51) skutočne redukuje na prípad pp-vĺn. Rovnice (3.46) a (3.47) nám z (3.51) dávajú rovnaké diferenciálne rovnice ako v prípade pp-vĺn, teda budú mať rovnaké riešenie (3.39),

$$\Omega(r,u) = \frac{\zeta(u)}{r - r_0(u)}\,. \tag{3.52}$$

Rozdiel nastane až v ďalšej diferenciálnej rovnici.

- *Rovnica pre členy up*

Redukovaním kovariantnej derivácie $\nabla_u \Upsilon_p$ podľa (3.51), využitím zámennosti parciálnych derivácií a tvaru konformného faktoru z predchádzajúcich diferenciálnych rovníc (3.52) dostávame diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{1}{2}c_{,p} - (D-2)\frac{\Omega_{,r}}{2\Omega}(rc_{,p} + d_{,p}) = 0\,. \tag{3.53}$$

Táto rovnica zlyháva podobne ako v prípade pp-vĺn, pretože dáva podmienku na r_0, ktorá sa dá splniť len v prípade $D = 3$ alebo s triviálnym konformným faktorom $\Omega_{,r} \neq 0$,

$$r_0 = -r(D-3) - \frac{d_{,p}}{c_{,p}}(D-2)\,. \tag{3.54}$$

A navyše táto rovnica kladie podmienky na $c(u,x^s)$ a $d(u,x^s)$, pretože r_0 je nezávislé od priestorových súradníc.

3.2 Všeobecné riešenie typu N v Einsteinovej teórii gravitácie

V D-dimenzionálnom priestore s Einsteinovými rovnicami poľa sa nám nepodarilo z Kundtovho priestoročasu vygenerovať časopriestor s expanziou, ktorý by spĺňal poľné rovnice. Môžeme sa však pokúsiť o opačný prístup, a to pozrieť sa na metriku známeho Robinsonovho–Truatmanovho riešenia typu N v $D = 4$ a transformáciami nájsť konformný faktor, ktorý by po vykrátení zanechal metriku Kundtovho priestoročasu[2].

Všeobecné Robinsonove–Trautmanove riešenie typu N má tvar [6]

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = -2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\tilde{r} - \left(\epsilon - 2\tilde{r}(\ln P)_{,u} - \frac{1}{3}\Lambda\tilde{r}^2\right)\,\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\tilde{r}^2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}\,, \tag{3.55}$$

kde P chápeme ako funkciu $P \equiv P(u,\zeta,\bar{\zeta})$, ktorá spĺňa $2P^2(\ln P)_{,\zeta\bar{\zeta}} = \epsilon$, kde $\epsilon = -1{,}0{,}1$. Všeobecným riešením tejto rovnice je

$$P = \left(1 + \frac{1}{2}\epsilon F\bar{F}\right)(F_{,\zeta}\bar{F}_{,\bar{\zeta}})^{-1/2}\,, \tag{3.56}$$

kde $F \equiv F(u,\zeta)$ je ľubovoľná, v ζ holomorfná, funkcia. Teraz sa pokúsime o prepis metriky do tvaru (2.26), v ktorom priestorová časť metriky nebude závisieť od radiálnej súradnice r

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \tilde{r}^2\left(-\frac{2}{\tilde{r}^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}\tilde{r} - \left(\frac{\epsilon}{\tilde{r}^2} - \frac{2}{\tilde{r}}(\ln P)_{,u} - \frac{1}{3}\Lambda\right)\,\mathrm{d}u^2 + \frac{2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}\right). \tag{3.57}$$

Transformáciou $\tilde{r} = -r^{-1}$ dostaneme

$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{r^2}\left(-2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \left(\epsilon r^2 + 2r(\ln P)_{,u} - \frac{1}{3}\Lambda\right)\,\mathrm{d}u^2 + \frac{2}{P^2}\,\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta}\right) = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}s^2_{\mathrm{Kundt}}\,. \tag{3.58}$$

Z tohto tvaru metriky sa pokúsime nájsť podmienky na Kundtov priestoročas, z ktorého sa dá vygenerovať pomocou konformnej transformácie netriviálny Robinsonov–Trautmanov priestoročas. Rozpísaním komplexnej súradnice

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy) \tag{3.59}$$

zistíme, že metrika je v priestorových indexoch diagonálna

$$\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\bar{\zeta} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)(\mathrm{d}x - i\mathrm{d}y) = \frac{1}{2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,. \tag{3.60}$$

Ďalšie podmienky sú kladené na člen g_{uu} z rovnice (3.56), kde $\epsilon = -1{,}0{,}1$.

Špeciálne môžeme diskutovať podmienku (3.56) v prípade generovania R–T priestoročasu v kapitole 3.1. Porovnaním metriky (3.2) a (3.43) s metrikou (3.58) vidíme, že $\epsilon = 0$ a $P^2 = 1$. Z toho už plynie, že $g_{uu} = \frac{1}{3}\Lambda$, čo sme v oboch prípadoch zamietli (3.41), pretože sme podľa explicitného tvaru Weylových skalárov v kapitole 1.5 očakávali všeobecnejšiu závislosť $g_{uu}(u,x^s)$.

[2]Bolo ukázané v [19], že R-T vákuové riešenia typu N v $D > 4$ neexistujú.

3.3 R–T priestoročasy v kvadratickej gravitácii

Podobne ako v Einsteinovej gravitácii, tak aj v kvadratickej gravitácii sa dá vyjsť z princípu najmenšej akcie. Tá je ale od Einsteinovej bohatšia (ako už názov napovedá) o kvadratické invarianty krivosti. K dispozícii máme kvadrát Ricciho skaláru R^2, kvadrát Ricciho tenzoru $R_{ab}R^{ab}$ a kvadrát Riemannovho tenzoru $R_{abcd}R^{abcd}$, vďaka Gaussovmu–Bonnetovmu členu nie sú ale v 4-dimenziách všetky nezávislé, pozri napríklad [18]. Z toho plynie, že všeobecná akcia kvadratickej gravitácie v 4 dimenziách má tvar,

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, \Big[\gamma\,(R - 2\Lambda) + \beta\, R^2 - \alpha\, C_{abcd}\, C^{abcd}\Big]\,. \tag{3.61}$$

Variáciou akcie $\delta S = 0$ dostaneme rovnice gravitačného poľa kvadratickej gravitácie v tvare

$$\begin{aligned} &\gamma\left(R_{ab} - \tfrac{1}{2}R\, g_{ab} + \Lambda\, g_{ab}\right) - 4\alpha\, B_{ab} \\ &\quad + 2\beta\left(R_{ab} - \tfrac{1}{4}R\, g_{ab} + g_{ab}\,\Box - \nabla_b\nabla_a\right) R = 0\,, \end{aligned} \tag{3.62}$$

kde B_{ab} je Bachov tenzor definovaný

$$B_{ab} \equiv \left(\nabla^c\nabla^d + \tfrac{1}{2}R^{cd}\right) C_{acbd}\,. \tag{3.63}$$

Z tejto definície vidíme, že Bachov tenzor preberá niektoré vlastnosti Weylovho tenzora. Konkrétne, Bachov tenzor je bezstopý, symetrický a s nulovou divergenciou

$$g^{ab}B_{ab} = 0\,, \qquad B_{ab} = B_{ba}\,, \qquad \nabla^b B_{ab} = 0\,. \tag{3.64}$$

Ďalej sa budeme zaoberať priestoročasmi s konštantnou skalárnou krivosťou $R =$ konst. Dosadením tejto podmienky do rovníc poľa (3.62) dostávame

$$R = 4\Lambda\,. \tag{3.65}$$

S touto podmienkou tak rovnice poľa (3.62) nadobudnú tvar

$$R_{ab} - \Lambda\, g_{ab} = 4k\, B_{ab}\,, \qquad \text{kde} \qquad k \equiv \frac{\alpha}{\gamma + 8\beta\Lambda}\,. \tag{3.66}$$

Vrátime sa späť k Bachovmu tenzoru, tak z výsledkov z kapitoly 2.2 sa dá ukázať, že pri konformnej transformácii metriky $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$ sa Bachov tenzor transformuje nasledovne

$$\tilde{B}_{ab} = \Omega^{-2} B_{ab}\,, \tag{3.67}$$

preto môže byť vhodné hľadať R–T riešenia kvadratickej gravitácie práve v konformnom tvare, kde základný priestoročas patrí do jednoduchšej Kundtovej triedy.

Motivovaní tvarom R–T metriky v Einsteinovej teórii (3.55) sa teraz pokúsime nájsť zodpovedajúce riešenie či jeho zovšeobecnenie v kvadratickej gravitácii. Uvažujeme teda metriku tvaru

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = \Omega(r,u,x,y)^2\bigg(-2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}r - \Big(ar^2 + br - c\Big)\,\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{P^2}\,(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\bigg)\,, \tag{3.68}$$

kde koeficienty a, b a c sú funkcie súradnice u a priestorových súradníc x, y,

$$a \equiv a(u,x,y)\,, \qquad b \equiv b(u,x,y)\,, \qquad c \equiv c(u,x,y)\,. \tag{3.69}$$

Pomocou programu Maple sme z tohto tvaru metriky napočítali Christoffelove symboly, Ricciho tenzor, Ricciho skalár a Bachov tenzor. Z týchto veličín sme zostavili rovnice poľa kvadratickej gravitácie (3.66).

Rovnice pre členy s indexmi rr, rx a ry, pre ktoré príslušné komponenty Bachovho tenzoru vymiznú, dopadnú podobne ako v prípade *pp*-vĺn alebo VSI priestoročasov, teda jediný netriviálny konformný faktor musí mať tvar

$$\Omega = \frac{1}{r} \,. \tag{3.70}$$

Členy úmerné špecifickým mocninám súradnice r v zložke ru rovníc poľa ďalej vedú na podmienky na členy b a c, teda

$$b = -\frac{2P_{,u}}{P} \,, \qquad c = \frac{1}{3}\Lambda \,. \tag{3.71}$$

Pracujeme v priestore s konštantnou skalárnou krivosťou, ktorá je fixovaná rovnicami poľa ako (3.65), zároveň ale máme krivosť určenú metrikou (3.68), čo nám kladie podmienku na koeficient a, ktorý sa dá vyjadriť pomocou derivácií funkcie P,

$$a = -(P_{,xx} + P_{,yy})P + P_{,x}^2 + P_{,y}^2 \,. \tag{3.72}$$

S použitím doteraz odvodených obmedzení zistíme, že komponenta ru Bachovho tenzoru musí vymiznúť identicky. Táto podmienka však tiež vedie k nulovosti celého Bachovho tenzoru. Získané riešenie tak zodpovedá metrike Einsteinovej teórie relativity. Zdá sa, že kvadratická gravitácia nepripúšťa riešenie zobecnené za rámec Einsteinovej teórie relativity ako je to v prípade *pp*-vĺn [20].

Záver

V prehľadovej časti práce sme sa venovali konštrukcii súradníc adaptovaných na nulovú foliáciu priestoročasu. Zaviedli sme optické skaláry – expanziu, shear a twist. S ich použitím sme ukázali, že v geometriách vybavených nulovou foliáciou je twist špecifickej geodetickej nulovej afinne paramterizovanej kongurencie identicky nulový. Ďalej sme sa venovali Robinsonovým–Trautmanovým priestoročasom, v ktorých je nulový aj shear a špeciálne Kundtovým priestoročasom, kde je nulová aj expanzia. V skonštruovaných adaptovaných súradniciach skúmame vlastnosti Robinsonovej–Trautmanovej a Kundtovej metriky a vzťah k expanzii. Špeciálne pre Kundtovu triedu geometrie uvádzame Christoffelove symboly a z nich plynúce veličiny krivosti ako Riemannov tenzor, Ricciho tenzor a Ricciho skalár. Pre úplnosť je uvedený aj Weylov tenzor a jeho projekcie, na základe ktorých je zavedená klasifikácia takýchto priestoročasov v ľubovoľnej dimenzii.

V ďalšej časti práce sumarizujeme poznatky o konformných transformáciách od ich zavedenia, cez základné vlastnosti, až po explicitné transformácie významných tenzorových veličín na variete. Ako priamy dôsledok z týchto výsledkov plynie invariantnosť klasifikácie priestoročasov na základe Weylovho tenzoru. Ďalej sa venujeme konformnej transformácii optických skalárov. Overili sme, že Kundtove a Robinsonove–Trautmanove geometrie sú konformne previazané, ale že sa nedá prejsť ďalej do geometrie so shearom, prípadne twistom.

Z doterajších znalostí teda plynie, že z Trautmanovej geometrie možno konformnou transformáciou vytvoriť Robinsonovu–Trautmanovu (či Kundtovu) geometriu, a to rovnakého Weylovho typu. Ďalej sa špecializujeme na algebraický typ N – fyzikálne interpretovaný ako gravitačné vlny. Skúmame tvar konformného faktoru, aby z jednoduchšieho Kundtovho vzoru vygenerovaná R–T geometria spĺňala rovnice poľa.

Najprv sme sa venovali Einsteinovej teórii v $D \geq 4$. V prvom prípade Kundtovej geometrie sa venujeme najjednoduchšej triede priestoročasu typu N, a to *pp*-vlnám. Zistili sme, že Einsteinove rovnice poľa obmedzujú ako aj konformný faktor, tak kládli podmienky aj na samotnú vzorovú Kundtovu geometriu. Tieto podmienky nesľubne viedli k opusteniu typu N. Ukázali sme teda, že *pp*-vlny nie sú vhodným generátorom R–T žiarivých priestoročasov. Ďalej sme pokračovali s komplikovanejšou geometriou, v ktorej sme povolili všeobecnejšiu súradnicovú závislosť metriky, ale kvalitatívne výsledky boli podobné, preto sme ďalej skúmali, aký Kundtov priestoročas treba použiť, aby sme dostali známy Robinsonov–Trautamnov priestoročas, a to práve v $D = 4$. Skúmali sme teda všeobecné Robinsonove–Trautmanove riešenie typu N v Einsteinovej teórii a identifikovali sme v ňom konformný faktor tak, aby po jeho vykrátení ostala metrika Kundtova. Z tejto Kundtovej metriky už plynuli podmienky na pôvodný priestoročas.

V kvadratickej gravitácii sme od začiatku predpokladali 4-rozmerný priestoročas a ansatz metriky vedúce k algebraickému typu N. Ukázalo sa však, že rovnice gravitačného poľa sú v tomto prípade natoľko restriktívne, že ich riešenia musia zodpovedať len riešeniam Einsteinovej gravitácie.

V budúcnosti je možné pozrieť sa na previazanosť R–T a Kundtových priestoročasov vo viacrozmernej teórii kvadratickej gravitácie, či študovať vplyv mimodiagonálnych metrických členov, ktoré sme neuvažovali.

Zoznam použitej literatúry

[1] P. Kenneth Seidelmann. *Explanatory Supplement to The Astronomical Almanac.* Mill Valley, Calif. : University Science Books (1992).

[2] J. H. Taylor a J. M. Weisberg. *A new test of general relativity - gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16.* The Astrophysical Journal 253 908 (1982).

[3] N. Ashby. *Relativity in the global positioning system.* Living Reviews in Relativity 6 1 (2003).

[4] B. P. Abbott a kol. *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger.* Physical Review Letters 116 (2016).

[5] H. Stephani, D. Kramer a M. MacCallum. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations.* Cambridge University Press. ISBN 0521467020 (2015).

[6] J. B. Griffiths a J. Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity.* Cambridge University Press. ISBN 0521889278 (2012).

[7] J. Podolský, R. Švarc a H. Maeda. *All solutions of Einstein's equations in* $2+1$ *dimensions:* Λ*-vacuum, pure radiation, or gyratons.* Classical and Quantum Gravity 36 015009 (2018).

[8] M. Ortaggio, V. Pravda a A. Pravdová. *Algebraic classification of higher dimensional spacetimes based on null alignment.* Classical and Quantum Gravity 30 013001 (2012).

[9] I. Ciufolini a J. A. Wheeler. *Gravitation and Inertia.* Princeton University Press. ISBN 0691033234 (1995).

[10] P. T. Chrusciel. *On the global structure of Robinson-Trautman space-times.* Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 436 299 (1992).

[11] J. Podolský a R. Švarc. *Algebraic structure of Robinson–Trautman and Kundt geometries in arbitrary dimension.* Classical and Quantum Gravity 32 015001 (2014).

[12] A. Z. Petrov. *The classification of spaces defining gravitational fields.* General Relativity and Gravitation 32 1665 (2000).

[13] R. Penrose. *A spinor approach to general relativity.* Annals of Physics 10 171 (1960).

[14] P. Krtouš a J. Podolský. *Asymptotic structure of radiation in higher dimensions.* Classical and Quantum Gravity 23 1603 (2006).

[15] A. Pravdová. *Algebraic classification of the Weyl tensor.* Príspevok v rámci konferencie Applications of Mathematics 2012, Institute of Mathematics AS CR, Prague (2012).

[16] R. M. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press. ISBN 9780226870373 (1984).

[17] S. Hervik, V. Pravda a A. Pravdová. *Type III and N universal spacetimes.* Classical and Quantum Gravity 31 215005 (2014).

[18] V. Pravda, A. Pravdová, J. Podolský a R. Švarc. *Exact solutions to quadratic gravity.* Phys. Rev. D 95 084025 (2017).

[19] J. Podolský a M. Ortaggio. *Robinson–Trautman spacetimes in higher dimensions.* Classical and Quantum Gravity 23 5785 (2006).

[20] M. S. Madsen. *The plane gravitational wave in quadratic gravity.* Classical and Quantum Gravity 7 87 (1990).