



Prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc.  
Proděkan pro studijní záležitosti

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Ke Karlovu 3  
121 16 Praha 2

**Vyjádření školitele k disertační práci  
Martina Lanzendörfera  
“Proudění nestlačitelných tekutin s viskozitou závislou na tlaku  
(a jejich aplikace při modelování proudění v ložisku)”**

Doktorská práce M. Lanzendörfera je zaměřena na studium zobecněných Stokesových rovnic (popisujících ustálená proudění, pro která lze zanedbat vliv konvekce), přičemž zobecnění je dáno vazkostí měnící se s tlakem. U klasických Stokesových rovnic pro nestlačitelnou tekutinu je vazkost konstantní. Toto zobecnění, které je nutno uvažovat v mnoha inženýrských aplikacích - předložená práce se zaměřuje na proudění v ložisku - je fundamentálního charakteru z mnoha pohledů:

- (1) Nazvdory Stokesovým hypotézám (1845) a dávným experimentálním pozorováním Baruse (1890), Andradeho a Bridgmana (1925-1931) a v současné době skupinou kolem S. Baira a mnoha dalších, klasická mechanika kontinua nepřipouštěla u nestlačitelných tekutin závislost vazkosti na tlaku. Navíc chybí jasná interpretace, co tlak u nestlačitelných tekutin vlastně je: průměr normálových napětí, termodynamický tlak, lagrangeovský multiplikátor, hydrostatický tlak? Rovněž není zodpovězena otázka zda je tlak jednoznačně určen daty, a pokud ne, jak je možné jej jednoznačně určit. Zatímco u klasických modelů mechaniky nestlačitelných tekutin, kdy je vazkost konstantní a v rovnicích se vyskytuje pouze gradient tlaku, lze v mnoha případech neurčitost tlaku zcela vynechat, pro modely s vazkostí závislou na tlaku je specifikace tlaku klíčová.
- (2) Experimenty jasně prokazují, že vazkost výrazně roste s rostoucím tlakem (často je vztah vazkost vrs. tlak popsán exponenciální funkcí), což má podstatný vliv na charakter rovnic. Zatímco klasické Stokesovy rovnice tvoří eliptický systém, komplikovaný a zajímavě provázaný systém studovaný v práci M. Lanzendörfera mění charakter z eliptického na hyperbolický. Za jistých

Prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

**Matematický ústav UK**

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

telefon: 22232 3394

fax: 22232 3394

e-mail: malek@karlin.mff.cuni.cz

podmínek může danému rychlostnímu poli odpovídat více polí tlakových. To má samozřejmě vliv na numerické výpočty, kdy kódy pečlivě navržené pro simulace proudění popsaných Navier-Stokesovými rovnicemi selhávají.

- (3) Jak ukazují naměřená data a výpočty proudění v jednoduchých geometriích prokazující charakteristiky výrazně odlišné od Stokesova proudění, závislost vazkosti na tlaku nelze v mnoha důležitých oblastech a procesech (geofyzika, proudění v ložiscích, dynamické zatěžování kloubů) zanedbat.

Doktorská práce M. Lanzendörfra se zabývá aktuálním obtížným tématem se spoustou otevřených problémů. Uvažovaný konstitutivní vztah je příkladem implicitního vztahu mezi tensorem napětím a symetrickým gradientem rychlosti, tlak – jakožto průměr normálových napětí – se zde objevuje přirozeně v roli prvního invariantu tenzoru napětí.

Hlavními cíli doktorské práce byly: (i) rozšířit matematickou teorii pro realističtější okrajové podmínky – tlak zadáný na hranici, a případně pro širší třídu viskozit závislých na tlaku a rychlosti smyku, (ii) rozhodnout, zda mohou být experimentální data zachycena modely, kdy vazkost závisí speciálním způsobem na tlaku i na rychlosti smyku, (iii) provést pečlivé numerické simulace pro proudění takovýchto tekutin v geometrii ložiska a identifikovat, kdy a proč sofistikované metody selhávají.

Předložená pečlivě a přehledně napsaná studie dává jasné odpovědi na výše uvedené otázky (na první pozitivní, na druhou zápornou), důkaz existenční věty je adaptován tak, aby výsledek platil i pro konečně-prvkové aproximace. Práce ukazuje, že dosavadní nedávno vyvinutá teorie volá po podstatném rozšíření, které by mohlo dát i návod na návrh jiných numerických postupů.

Práce se velmi dobře čte, je takřka bez chyb a zachycuje vyváženým způsobem navzájem provázané široké spektrum aspektů spojených s tématem – modelování, experimentální měření, matematická a numerická analýza, vědecké výpočty, souvislost mezi konvergencí numerických metod a předpoklady nutné v teorii.

S potěšením doporučuji práci Martina Lanzendörfera k obhajobě.

V Praze, 25. července 2011

Josef Málek

Prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

**Matematický ústav UK**

Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

telefon: 22232 3394

fax: 22232 3394

e-mail: malek@karlin.mff.cuni.cz