Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

Michal Ketner

Konstruktivní univerzum $\mathbb{L}$

The constructive universe $\mathbb{L}$

Bakalářská práce

Vedoucí práce:
Mgr. Radek Honzík, Ph.D.

2016

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 13. srpna 2016

Michal Ketner

Abstrakt

Tato práce zkoumá univerzum konstruktivních množin $\mathbb{L}$, jak ho definoval Gödel. Práce srovnává dva způsoby konstrukce $\mathbb{L}$: jeden přes formalizaci relace splňování, a druhý pomocí konečně mnoha tzv. rudimentárních funkcí, které $\mathbb{L}$ generují. Práce dále povede k ověření implikace $Con(ZF) \to Con(ZFC + CH)$. Práce má podat ucelený pohled na konstrukci $\mathbb{L}$ a ověření relativní konzistence CH

Klíčová slova: Konstruktivní univerzum L, vnitřní modely

Abstract

The theme explores the universe of constructive set $\mathbb{L}$ as it was defined by Gödel. The work compares two methods of construction $\mathbb{L}$ set: one through the formalization of satisfaction relationand the other one with several (finitely many) called rudimentary functions that generate $\mathbb{L}$. The work continues with verification of the implications $Con(ZF) \to Con(ZFC + CH)$. The goal is to give a comprehensive view of the construction $\mathbb{L}$ and verification of 's relative consistency CH.

Key words: Constructive universe L, inner models

Obsah

1 Úvod **4**

2 Konstrukce univerza **6**
2.1 Formalizace relace splňování 6
2.2 Funkce 17

3 Universum $\mathbb{L}$ **28**
3.1 Základní vlastnosti $\mathbb{L}$ 28
3.2 $\mathbb{L}$ je model ZF 41
3.3 Axiom konstruovatelnosti 44

4 $Con(ZF) \rightarrow Con(ZFC + GCH)$ **46**
4.1 Axiom výběru 46
4.2 Zobecněná hypotéza kontinua 49

Reference **62**

1 Úvod

Na počátku 20.století D. Hilbert vytvořil seznam nejdůležitějších matematických problémů. Na první místo seznamu zařadil otázku, zda-li existuje množina reálných čísel, která není ani spočetná a ani nemá mohutnost jako celá množina reálných čísel. Hypotéza, že taková množina neexistuje, se nazývá hypotéza kontinua (CH z contiuum hypothesis). Tuto otázku potažmo odpověd jde zobecnit pro každé $\aleph_\alpha$, pak se tento problém nazývá zobecněná hypotéza kontinua (GCH z general contiuum hypothesis).

Dalším problémem, co vrtal matematikům hlavou, byla dokazatelnost axiomu výběru (AC z axiom of choice) z axiomů teorie množin. Tyto problémy nebyl schopen nikdo z matematiků vyřešit. Až v roce 1940 Kurt Gödel ukázal, že pokud předpokládáme bezespornost axiomů teorie množin, tak z axiomů nejde dokázat ani negace axiomu výběru ani negaci zobecněné hypotézy kontinua, nebo-li že axiom výběru i zobecněnou hypotézu kontinua jde bezesporně přidat k axiomům teorie množin. Gödel pro tyto účely vytvořil konstruktivní universum $\mathbb{L}$. Toto universum se ukázalo jako důležité ve zkoumání vlastnostní v teorii množin a proto si tato bakalářská práce dala za cíl popsat vlastnosti $\mathbb{L}$.

Práce je rozdělena na tři sekce. První sekce se věnuje přístupům ke konstrukci univerza $\mathbb{L}$. Druhou sekci jsem věnoval univerzu $\mathbb{L}$ a jeho vlastnostem. Třetí část je věnována důkazu bezezpornosti přidání AC a GCH k ZF, právě pomocí $\mathbb{L}$.

V první podsekci první sekce se tato práce věnuje konstrukci universa za pomocí formalizace relace splňování. Celá tato podsekce je motivovaná knihou *K.Kunen, Set theory: An introduction to independence proofs.* V druhé podsekci první sekce vytváříme $\mathbb{L}$ pomocí uzávěru na rudimentární funkce. Tato kapitola čerpá primárně z knihy *T. Jech, Set theory*, až na definici uzávěru, která je motivována definicí z knihy *B.Balcar a P. Štěpánek, Teorie množin*, ale upravena na jiné Gödelovy operace.

V první podsekci druhé sekce se práce věnuje vlastnostem univerza $\mathbb{L}$ a připravuje prostor pro důkaz, že $\mathbb{L}$ je model ZF , kterému se věnuje podsekce následující. Tato sekce čerpám zejména z *K.Kunen, Set theory: An introduction to independence proofs.* Ve třetí podsekci se věnujeme *axiomu konstruovatelnosti* převážně podle K.Kunen, Set theory: An introduction to independence proofs.

Poslední sekce se zabývá nezávislými hypotézami vzhledem k axiomům ZF. Průběhu důkazů dokážeme mimojiné, že $\mathbb{L}$ je vnitřní model ZF.

Po celou tuto práci počítejme pro zjednodušení, že:

1. Použité logické symboly jsou pouze konjunce $\wedge$, negace $\neg$ a existenční kvantifikátor $\exists$.
2. Formule neobsahuje predikát rovnosti $=$.
3. Výskyt predikátu náležení $\in$ je pouze ve formulích tvaru $u_i \in u_j$, kde $i \neq j$.
4. Výskyt omezeného existenčního kvantifikátoru $\exists$ je pouze ve formuli tvaru $\exists u_{m+1} \in u_i\ \psi(u_1, ..u_{m+1})$, kde $i \leq m$.

Teď ke každému bodu komentář, proč takové omezení můžem přijmout.

1. Si můžeme dovolit díky tomu, protože ostatní spojky a kvantifikátory se dají vyjádřit pomocí $\wedge$,$\neg$,$\exists$.

2. Si můžeme dovolit díky axiomu extenzionality, protože ten nám dává, že formuli x=y můžeme nahradit ekvivalentní formulí
$$((\forall u \in x)(u \in y)) \wedge ((\forall u \in y)(u \in x)).$$

3. To je v pořádku, protože formuli $x \in x$ můžeme nahradit ekvivalentní formulí
$$(\exists u \in x)(u = x).$$

4. Můžeme, protože můžeme všechny proměnné přejmenovat tak, že vázaná proměnná bude mít nejvyšší index.

2 Konstrukce univerza

2.1 Formalizace relace splňování

V této podsekci se budeme věnovat konstrukci univerza $\mathbb{L}$ uvnitř teorie množin. Konstruktivní universum zde bude vytvořeno pomocí formalizace logiky uvnitř teorie množin.

Nejdříve si nadefinujme ohodnocení, které použijeme v další definici.

Definice 2.1 ***Ohodnocení***
Pro každé n a pro každou n-tici $\langle x_0, .., x_{n-1}\rangle$ definujme $\mathtt{s}$ jako funkci s definičním oborem n a hodnotami

$$\mathtt{s}(i) = x_i.$$

Definujme si teď množiny n-tic, které splňují atomické formule a množinu uzávěru existenčního kvantifikátoru.

Definice 2.2
Nechť pro $n \in \omega$ a i,j $<$ n definujme:

- $Proj(A, R, n) = \{\mathtt{s} \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = \mathtt{s})\}$,
- $Diag_{\in}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) \in \mathtt{s}(j)\}$,
- $Diag_{=}(A, n, i, j) = \{\mathtt{s} \in A^n : \mathtt{s}(i) = \mathtt{s}(j)\}$.

Pomocí těchto definicí začnem rekurzivně uzavírat n-tice na průnik a doplněk a projekci a pak pomocí těchto množin nadefinujeme Df.

Definice 2.3
Rekurzí přes $k \in \omega$ definujeme $Df^+(k, A, n)$:

1.

$$Df^+(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup$$
$$\cup \{Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$$

2.

$$Df^+(k + 1, A, n) = Df^+(k, A, n) \cup \{A^n - R : R \in Df^+(k, A, n)\} \cup$$
$$\cup \{R \cap S : R, S \in Df^+(k, A, n)\} \cup$$
$$\cup \{Proj(A, R, n) : R \in Df^+(k, A, n + 1)\}$$

Pomocí $Df^+(k, A, n)$ pak definujme Df které je uzávěrem na průnik, doplněk a projekci.

Definice 2.4

$$Df(A, n) = \bigcup \{Df^+(k, A, n) : k \in \omega\}$$

Následující lemma je důkaz o tom, že Df je opravdu uzavřeno na průnik, doplněk a projekci.

Lemma 2.5
Pro relace R, S, množinu A a číslo n definujme:

a

$$R, S \in Df(A, n) \Rightarrow R \cap S \in Df(A, n)$$

b

$$R \in Df(A, n) \Rightarrow A^n - R \in Df(A, n)$$

c

$$R \in Df(A, n + 1) \Rightarrow Proj(A, R, n) \in Df(A, n)$$

Důkaz.

$R \cap S$

Nechť tedy mějme nějaké přirozené číslo n, nějakou množinu A a nějaké relace R, S takové, že

$$R, S \in Df(A, n).$$

Z definice $Df(A, n)$ plyne, že existuje k_1 a k_2, tak že

$$R \in Df^+(k_1, A, n)$$

$$S \in Df^+(k_2, A, n).$$

Nechť tedy zvolme y tak, že

$$y = max\{k_1, k_2\}.$$

Použitím definice $Df^+(x, A, n)$ dostaneme

$$R \cap S \in Df^*(y + 1, A, n).$$

Z toho tedy pak podle definice $Df(A, n)$ dostaneme

$$R \cap S \in Df(A, n).$$

R^C

Nechť tedy mějme nějaké přirozené číslo n, nějakou množinu A a relaci R takovou, že
$$R \in Df(A, n).$$
Z definice $Df(A, n)$ plyne, že existuje k takové, že
$$R \in Df^+(k, A, n).$$
Použitím definice $Df^+(x, A, n)$ dostáváme
$$A^n - R \in Df^+(k + 1, A, n).$$
Pak podle definice $Df(A, n)$
$$A^n - R \in Df(A, n).$$

Projekce

Nechť tedy mějme nějaké přirozené číslo n, nějakou množinu A a relaci R takovou, že
$$R \in Df(A, n).$$
Z definice $Df^+(A, n + 1)$ plyne, že existuje k takové, že
$$R \in Df^+(k, A, n + 1).$$
Použitím definice $Df^+(x, A, n)$ dostáváme
$$Proj(A, R, n) \in Df^*(k + 1, A, n).$$
Z toho pak podle definice $Df(A, n)$
$$Proj(A, R, n) \in Df(A, n).$$

□

Nyní si nadefinujeme relativizaci formulí ve třídě $\mathcal{M}$, která odpovídá platnosti formulí v $\mathcal{M}$.

Definice 2.6 ***Relativizace***
Nechť $\mathcal{M}$ je třída, pak pro ϕ definujme indukcí podle složitosti formule $\phi^{\mathcal{M}}$ jako relativizaci ϕ v $\mathcal{M}$

1. $(x = y)^{\mathcal{M}}$ *jako* $x = y$,
2. $(x \in y)^{\mathcal{M}}$ *jako* $x \in y$,
3. $(\psi \wedge \lambda)^{\mathcal{M}}$ *jako* $\psi^{\mathcal{M}} \wedge \lambda^{\mathcal{M}}$,
4. $(\neg\psi)^{\mathcal{M}}$ *jako* $\neg(\psi)^{\mathcal{M}}$
5. $(\exists\psi)^{\mathcal{M}}$ *jako* $\exists x(x \in \mathcal{M} \wedge (\psi)^{\mathcal{M}})$,

Teď si ukážeme že, v $Df(A, n)$ je každá n-tice platící v $\mathcal{A}$.

Lemma 2.7
Nechť $\phi(x_0, .., x_{n-1})$ je formule s volnými proměný $x_0, ..., x_{n-1}$, pak

$$\forall A[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Důkaz.
Indukcí podle složitosti formule s fixovaným A.

$x_i \in x_j$
Nechť ϕ je atomická formule $x_i \in x_j$ pak z definice $Df(A, n)$

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n),$$

z čehož plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Stejně tak pro $x_i = x_j$ z

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n)$$

plyne

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Nechť ϕ je $\psi \wedge \chi$ a víme z indukčního předpokladu, že platí

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)],$$

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)],$$

podle předchozího lemma platí

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \chi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \cap$$

$$\cap \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)],$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\chi \wedge \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Nechť ϕ je $\neg\psi$ a víme z indukčního předpokladu, že platí

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Podle předchozího lemma tedy platí

$$[A - \{\mathtt{s} \in A^n : \psi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)],$$

což je přesně

$$[\{\mathtt{s} \in A^n : (\neg\psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Konečně nechť ϕ je $\exists y\ \psi$.
Nechť y není ani jedna z proměnných $x_0, .., x_{n-1}$.
Z indukčního předpokladu

$$\{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\} \in Df(A, n+1).$$

Tedy podle předchozího lemma platí

$$Proj(A, \{t \in A^{n-1} : \psi^{\mathrm{A}}(t(0), ...t(n))\}, n) \in Df(A, n),$$

což je přesně

$$\{\mathtt{s} \in A^n : (\exists y\ \psi)^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\}.$$

$\square$

Teď si nadefinujeme kódování $En(m, A, n)$, které v budoucnu využijeme a proto si pro něj dokážeme i pár vlastností.

Definice 2.8
Rekurzí přes $m \in \omega$.
$En(m, A, n)$ je definována nasledujícími klauzulemi.:

- *Když $m = 2^i * 3^j$ a $i, j < n$, tak $En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j)$.*
- *Když $m = 2^i * 3^j * 5$ a $i, j < n$, tak $En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j)$.*
- *Když $m = 2^i * 3^j * 5^2$, tak $En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n)$.*
- *Když $m = 2^i * 3^j * 5^3$, tak $En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n)$.*
- *Když $m = 2^i * 3^j * 5^4$, tak $En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n + 1), n)$.*
- *Když m není dělitelné 6 nebo je dělitenlné 5^5, tak $En(m, A, n) = \emptyset$.*

Ukážeme si, že pro každý prvek $Df(A, n)$ máme kodování $En(m, A, n)$.

Lemma 2.9
Pro libovolné n a A,

$$Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}.$$

Důkaz.
Mějme A a n fixované. Budeme dokazovat

$$\forall m(En(m, A, n) \in Df(A, n)).$$

Použijeme faktorizaci čísla m.

$m = 2^i * 3^j$ a $i, j < n$:
Z definice $En(m, A, n)$

$$En(m, A, n) = Diag_{\in}(A, n, i, j).$$

Z definice $Df(A, n)$ plyne

$$Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A, n).$$

Z čehož dostaneme

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

$m = 2^i * 3^j$ a $i, j < n$:

Z definice $En(m, A, n)$ plyne

$$En(m, A, n) = Diag_{=}(A, n, i, j).$$

Z definice $Df(A, n)$ máme

$$Diag_{=}(A, n, i, j) \in Df(A, n).$$

Z čehož máme

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

Nechť máme tyto indukční předpoklady

$$En(i, A, n) \in Df(A, n),$$

$$En(j, A, n) \in Df(A, n),$$

$$En(i, A, n + 1) \in Df(A, n + 1).$$

$m = 2^i * 3^j * 5^2$:

Z definice $En(m, A, n)$

$$En(m, A, n) = A^n - En(i, A, n).$$

Z indukčního předpokladu a lemma 2.5 pro komplement dostaneme

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

$m = 2^i * 3^j * 5^3$:

Z definice $En(m, A, n)$ dostaneme

$$En(m, A, n) = E(i, A, n) \cap E(j, A, n).$$

Z indukčního předpokladu a lemma 2.5 pro průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

$m = 2^i * 3^j * 5^4$:

Z definice $En(m, A, n)$

$$En(m, A, n) = Proj(A, E(i, A, n + 1), n).$$

Z indukčního předpokladu a lemma 2.5 pro projekci

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

Pokud je m je jiné než předchozí, tak

$$En(m, A, n) = \emptyset.$$

Z indukčního předpokladu a lemma 2.5 pro komplement a průnik

$$En(m, A, n) \in Df(A, n).$$

Druhý směr

$$Df(A, n) \subset \{En(m, A, n) : m \in \omega\}.$$

Nechť tedy

$$x \in Df(A, n).$$

Dále předpokládejme, že neexistuje m tak že

$$x = En(m, A, n).$$

Z definice $Df(A, n)$ dostaneme, že existuje nějaké k takže

$$x \in Df^+(k, A, n).$$

Vezměme takové k nejmenší.

$k = 0$

Když

$$x \in Df^+(0, A, n),$$

tak

$$x = Diag_{\in}(A, n, i, j),$$

nebo

$$x = Diag_{=}(A, n, i, j).$$

Z definice 2.8 tedy existuje m, tak že

$$x = En(m, A, n).$$

$k \neq 0$

Když

$$x \in Df^+(k, A, n),$$

tak x je doplněk, průnik nebo projekce nějaké množiny y tak, že

$$y \in Df^+(k-1, A, n),$$

ale pro tyto všechny x podle definice 2.8 existuje m, tak že

$$x = En(m, A, n).$$

$\square$

Nyní si dokážeme, že každá definovatelná n-tice má svůj kód $En(m, A, n)$.

Lemma 2.10 *Nechť* $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$ *je formule s volnými proměnnými mezi* $x_0, ..., x_{n-1}$*, pak existuje nějaké* m*, takové že*

$$\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = En(m, A, n)]$$

Důkaz.
Nechť máme nějaké n, A a nějakou formuli $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$.
Z lemma 2.7 víme, že

$$\forall A[\{\mathtt{s} \in A^n : \phi^{\mathrm{A}}(\mathtt{s}(0), .., \mathtt{s}(n-1)\} \in Df(A, n)].$$

Z lemma 2.9 víme

$$\forall x(x \in Df(A, n) \to \exists m(x = En(m, A, n))).$$

Což nám dohromady dá

$$\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = En(m, A, n)],$$

jako přímý důsledek dvou předchozích lemmat. □

Zde budeme definovat konkatenaci dvou funkcí.

Definice 2.11
Nechť s *a* t *jsou funkce takové, že*

$$dom(s) = \alpha,$$

$$dom(t) = \beta,$$

pak definujme funkci $s\hat{}t$*, takže:*

$$dom(s\hat{}t) = \alpha + \beta$$

$$s\hat{}t \restriction (\alpha) = s$$

$$s\hat{}t(\alpha + \epsilon) = t(\epsilon) \text{ pro všechny } \epsilon < \beta$$

Nyní konečné definujme množinu definovalných podmnožin A pomocí formalizované relace splňování.

Definice 2.12

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}(A) = \{X \subset A : (\exists n \in \omega)(\exists \mathtt{s} \in A^n)(\exists R \in Df(A, n+1)$$

$$X = \{x \in A : s\hat{}\langle x\rangle \in R\}\}$$

Dokažme si teď, že v $\mathfrak{DP}(A)$ jsou všechny definovatelné podmnožiny A.

Lemma 2.13
Nechť $\phi(x_0, .., x_{m-1}, y)$ je formule s volnými proměný $x_0, ..., x_{m-1}, y$, pak

$$\forall A \forall x_0, .., x_{m-1}[\{y \in A : \phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)\} \in \mathfrak{DP}(A)].$$

Důkaz.
Nechť tedy mějme A, m, $x_0, .., x_{m-1}$ a ϕ.
Pak máme

$$n = m,$$

$$\mathbf{s} = (x_0, .., x_{m-1}).$$

Z lemma 2.7 víme, že pro každou $\phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)$ existuje R, takže

$$R \in Df(A, m + 1).$$

Z definice 2.12 máme

$$X \in \mathfrak{DP}(A),$$

takže

$$X = \{y \in A : \phi^{\mathrm{A}}(x_0, .., x_{m-1}, y)\}.$$

□

Nyní si dokážeme pár vlastností $\mathfrak{DP}$. Začneme s tím, že dokážeme, že $\mathfrak{DP}$ je vždy podmnožinou potenční množiny.

Lemma 2.14

$$\mathfrak{DP}(A) \subset P(A)$$

Důkaz.
Plyne přímo z definice.
Nechť tedy

$$x \in \mathfrak{DP}(A),$$

z definice $\mathfrak{DP}(A)$ plyne

$$x \subset A,$$

a z definice $P(A)$ plyne

$$x \in P(A).$$

□

Dokažme si teď, že pokud M je transitivní množina, tak každý prvek množiny M je prvek v $\mathfrak{DP}(A)$.

Lemma 2.15
Nechť M je transitivní množina, pak

$$M \subset \mathfrak{DP}(M).$$

Důkaz.
Použijeme lemma 2.13 na formuli $y \in x$

$$\forall x \in M(\{y \in M : y \in x\} \in \mathfrak{DP}(M)).$$

Vzhledem k tomu, že M je transitivní, tak

$$(\forall x \in M)(y \in x \to y \in M).$$

Z toho plyne že

$$\{y \in M : y \in x\} = x,$$

z čehož dostaneme

$$\forall x \in M(x \in \mathfrak{DP}(M)).$$

□

2.2 Funkce

Nejdříve si definujme Gödelovy operace. Operace ale mohou být použity jiné. V této práci bylo čerpáno z knihy *T. Jech, Set theory*. Jinou definici Gödelových operací můžeme najít třeba v knize *B.Balcar a P. Štěpánek, Teorie množin.*

Definice 2.16 ***Gödelovy operace***

$$G_1(X, Y) = \{X, Y\}$$
$$G_2(X, Y) = X \times Y$$
$$G_3(X, Y) = \epsilon(X, Y) = \{\langle u, v\rangle : u \in X \wedge v \in Y \wedge u \in v\}$$
$$G_4(X, Y) = X - Y$$
$$G_5(X, Y) = X \cap Y$$
$$G_6(X) = \bigcup X$$
$$G_7(X) = dom(X)$$
$$G_8(X) = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in X\}$$
$$G_9(X) = \{\langle u, v, w\rangle : \langle u, w, v\rangle \in X\}$$
$$G_{10}(X) = \{\langle u, v, w\rangle : \langle v, w, u\rangle \in X\}$$

Teď si zadefinujme pojem z teorie vyčíslitelnosti, který využijeme také ve větě o vlastnostech Gödelových operací.

Definice 2.17
Formule $\varphi(x_0, .., x_{n-1})$ je Δ_0-formule teorie množin, pokud:

- *je atomická formule,*
- *když φ je $\phi \wedge \psi$ a ψ a ϕ jsou Δ_0-formule,*
- *když φ je $\neg\phi$ a ϕ je Δ_0-formule,*
- *když φ je $(\exists x \in y)\phi$ a ϕ je Δ_0-formule.*

Ukažme si lemma, které využijeme ve větě o vlastnostech Gödelových operací.

Lemma 2.18
Označme $u = (u_0, .., u_{n-1})$, $X = X_0 \times .. \times X_{n-1}$ *a* $u_i \in X_i$ *pro všechna* i. *Tak pro všechny* $u \in X$ *platí*

$$\varphi(u) \Leftrightarrow (\exists x \in u_i)\psi(u, x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in u_i \wedge \psi(u, x) \wedge x \in \bigcup X_i)$$

$$\Leftrightarrow u \in dom\{(u, x) \in X \times \bigcup X_i : \pi(u, x)\}.$$

Dokažme si větu, že ke každé Δ_0-formuli existuje složení Gödelových operací, které definuje stejné množiny.

Věta 2.19
Nechť $\varphi(x_0, .., x_{n-1})$ *je* Δ_0*-formule, tak tu je* G *složené z Gödelových operací, takže pro všechny* $X_0, ..., X_{n-1}$

$$G(X_0, ..., X_{n-1}) = \{(u_0, ..u_{n-1}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \varphi(x_0, .., x_{n-1})\}.$$

Důkaz.
Větu dokážeme pomocí indukce podle složitosti Δ_0-formule.
Nejdříve začneme s důkazem pro atomické formule.
Nechť $\varphi(x_0, .., x_{n-1})$ je atomická formule tvaru $u_i \in u_j$, kde $i \neq j$.
Provedeme důkaz indukcí podle velikosti n.

$n = 1$ **:**

Začneme důkazem pro uspořádanou dvojici (u_0, u_1).
φ může mít dva tvary $u_0 \in u_1$, nebo $u_1 \in u_0$.
Začněme tvarem $u_0 \in u_1$. Pak hledáme G, takové že

$$\{(u_0, u_1) : u_0 \in X_0 \wedge u_1 \in X_1 \wedge u_0 \in u_1\}.$$

Když nahlédneme do seznamu Gödelových operací, tak to odpovídá funkci

$$G_3(X, Y) = \epsilon(X, Y),$$

konkrétně tedy v druhém případě, pro formuli tvaru $u_1 \in u_0$, hledáme G pro

$$\{(u_1, u_2) : u_1 \in X_1 \wedge u_2 \in X_2 \wedge u_2 \in u_1\}.$$

Mezi Gödelovými operacemi je funkce

$$G_8(X) = \{(u, v) : (v, u) \in X\}.$$

Můžeme tedy množinu definovat takto

$$\{(u_0, u_1) : u_0 \in X_0 \wedge u_1 \in X_1 \wedge u_1 \in u_0\} = G_8(\epsilon(X_0, X_1)).$$

$n > 1 \wedge i \neq n-1 \wedge j \neq n-1$:
Z indukčního předpokladu máme

$$\{(u_0, ..., u_{n-2}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-2} \in X_{n-2} \wedge u_i \in u_j\} = G(X_0, ...X_{n-2}).$$

Lze nahlédnout, že

$$\{(u_0, ..., u_{n-1}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = \\ = G(X_0, ...X_{n-2}) \times X_{n-1},$$

což odpovídá

$$G_2(X, Y) = X \times Y.$$

Konrétně tedy máme

$$\{(u_0, ..., u_{n-1}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\}\} = \\ = G_2(G(X_0, ...X_{n-2}), X_{n-1}).$$

$n > 1 \wedge i \neq n-2 \wedge j \neq n-2$:
Většina případů byla vyřešena v předchozí podmínce. Ty nevyřešené se dají převést na tento případ.
Z indukčního předpokladu mějme

$$\{(u_0, ..., u_{n-3}, u_{n-1}, u_{n-2}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = \\ = G(X_1, ...X_n)$$

Uzávorkujeme

$$(u_0, ..., u_{n-3}, u_{n-1}, u_{n-2}) = ((u_0, ..., u_{n-3}), u_{n-1}, u_{n-2}).$$

Nyní lze nahlédnout, že

$$\{(u_0, ..., u_{n-1}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = \\ = G_9((u_0, ..., u_{n-3}), u_{n-1}, u_{n-2}).$$

Konkrétně tedy máme

$$\{(u_0, ..., u_{n-1}) : u_0 \in X_0, ..., u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_i \in u_j\} = \\ = G_9(G(X_0, ...X_{n-1})).$$

$n > 1 \wedge i = n-2 \wedge j = n-1$ **:**
Z indukčního předpokladu mějme

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-3}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-3} \in X_{n-3}\} = G(X_0,..,X_{n-3})\\ \{(u_{n-2},u_{n-1}) : u_{n-2} \in X_{n-2} \wedge u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_{n-2} \in u_{n-1}\} =\\ = \epsilon(X_{n-2},X_{n-1})\end{gathered}$$

Naší hledanou $(u_0,...,u_{n-1})$ tedy dostaneme jako

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_{n-2} \in u_{n-1}\} =\\ = G_2(G(X_0,..,X_{n-3}),\epsilon(X_{n-2},X_{n-1}))\end{gathered}$$

$n > 1 \wedge i = n-1 \wedge j = n-2$ **:**
Z indukčního předpokladu mějme

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-3}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-3} \in X_{n-3}\} = G(X_0,..,X_{n-3})\\ \{(u_{n-2},u_{n-1}) : u_{n-2} \in X_{n-2} \wedge u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_{n-1} \in u_{n-2}\} =\\ = G_8(\epsilon(X_{n-2},X_{n-1}))\end{gathered}$$

Naší hledanou $(u_0,...,u_{n-1})$ tedy dostaneme jako

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge u_{n-1} \in u_{n-2}\} =\\ = G_2(G(X_0,..,X_{n-3}),G_8(\epsilon(X_{n-2},X_{n-1}))).\end{gathered}$$

Máme tedy dokázáno pro atomické formule a proto mějme tedy indukční předpoklady pro $\phi(x_0,..,x_{n-1})$ a $\psi(x_0,..,x_{n-1})$.

$\varphi(x_0,..,x_{n-1}) \leftrightarrow \neg\psi(x_0,..,x_{n-1})$**:**
Z indukčního předpokladu máme

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1}\} = G(X_0,..,X_{n-1}),\\ \{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \psi(x_0,..,x_{n-1})\} =\\ = G^{'}(X_0,..,X_{n-1}).\end{gathered}$$

Pomocí toho si vyjádříme $\varphi(x_0,..,x_{n-1})$ jako

$$\begin{gathered}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \varphi(x_0,..,x_{n-1})\} =\\ = G(X_0,..,X_{n-1}) - G^{'}(X_0,..,X_{n-1}) =\\ = G_4(G(X_0,..,X_{n-1}),G^{'}(X_0,..,X_{n-1}))\end{gathered}$$

$\varphi(x_0,..,x_{n-1}) \leftrightarrow \psi(x_0,..,x_{n-1}) \wedge \phi(x_0,..,x_{n-1})$**:**
Z indukčního předpokladu máme

$$\begin{aligned}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \phi(x_0,..,x_{n-1})\} = \\ = G(X_0,..,X_{n-1}), \\ \{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \psi(x_0,..,x_{n-1})\} = \\ = G^{'}(X_0,...,X_{n-1}).\end{aligned}$$

Pomocí toho si vyjádříme $\varphi(x_0,..,x_{n-1})$

$$\begin{aligned}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \varphi(x_0,..,x_{n-1})\} = \\ = G(X_0,..,X_{n-1}) \cap G^{'}(X_0,..,X_{n-1}) = \\ G_5(G(X_0,..,X_{n-1}), G^{'}(X_0,..,X_{n-1})).\end{aligned}$$

$\varphi(x_0,..,x_{n-1}) \leftrightarrow (\exists u_n \in u_i)\psi(x_0,..,x_n)$**:** .
Pak vezměme formuli $\phi(x_0,..,x_n)$ ve tvaru $\psi(x_0,..,x_n) \wedge u_n \in u_i$.
Podle indukční předpokladu existuje G tak, že

$$\{(u_0,...,u_n) : u_0 \in X_0,...,u_n \in X_n \wedge \phi(x_0,...,x_n)\} = G(X_0,...,X_n)$$

pro všechny $X_0,...,X_n$. Využitím lemma 2.18 dostaneme

$$\begin{aligned}\{(u_0,...,u_{n-1}) : u_0 \in X_0,...,u_{n-1} \in X_{n-1} \wedge \psi(x_0,...,x_{n-1})\} = \\ = G_7(G(X_0,..,X_{n-1}, G_6(X_i)))\end{aligned}$$

□

Ukažme si, že všechny Gödelovy operace jsou Δ_0-formule. V tomto lemma použijeme pro ulehčení všechny tři základní spojky a oba uzavřené kvantifikátory. Samozřejme bychom mohli použít jen předpokládanou sadu, ale zesložilo by to zápis.

Lemma 2.20
Gödelovy operace jsou Δ_0-formule.

Důkaz.
Důkazy provedeme, tak že najdeme ekvivalentní Δ_0-formule.

$G_1(X,Y) = Z$**:**

$$(Z = \{X,Y\}) \Leftrightarrow (X \in Z \wedge Y \in Z \wedge (\forall a \in Z)(a = X \vee a = Y))$$

$G_2(X,Y) = Z$**:**

Nejdříve si dokážeme, že formule $A = \langle B, C\rangle$ je Δ_0-formule

$$A = \langle B, C\rangle) \Leftrightarrow (((\forall a \in A)(a = \{B\} \ \vee \ a = \{B, C\}))\wedge$$
$$\wedge((\exists a \in A)(\exists d \in A)(a = \{B\} \wedge d = \{B, C\}).$$

Teď přejdem k důkazu samotného $Z = X \times Y$.

$$(Z = X \times Y) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)z = \langle x, y\rangle)\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)z = \langle x, y\rangle))$$

$G_3(X,Y) = Z$**:**

$$(Z = \epsilon(X,Y)) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(\exists y \in Y)(z = \langle x, y\rangle \wedge x \in y))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists z \in Z)(x \in y \to z = \langle x, y\rangle)))$$

$G_4(X,Y) = Z$**:**

$$(Z = X - Y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(z \in X \wedge z \notin Y)) \wedge ((\forall x \in X)(x \notin Y \to x \in Z)))$$

$G_5(X,Y) = Z$**:**

$$(Z = X \cap Y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(z \in X \wedge z \in Y)) \wedge ((\forall x \in X)(x \in Y \to x \in Z)))$$

$G_6(X) = Z$**:**

$$(Z = \bigcup X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)z \in x) \wedge ((\forall x \in X)(\forall z \in x)(z \in Z)))$$

$G_7(X) = Z$**:**

Nejdříve si dokážeme, že formule $z \in dom(X)$ je Δ_0-formule

$$(z \in dom(X)) \Leftrightarrow ((\exists x \in X)(\exists u \in x)(\exists y \in u)\langle z, y\rangle = x).$$

Pokračujme, pokud ϕ je Δ_0-formule pak i $((\forall y \in dom(X))\phi)$ bude Δ_0-formule tvaru

$$(\forall z \in dom(X)\phi) \Leftrightarrow ((\forall x \in X)(\forall Y \in x)(\forall z, y \in Y)(\langle z, y\rangle = x \to \phi)).$$

Teď si konečně dokážeme $Z = dom(X)$ takto

$$(Z = dom(X)) \Leftrightarrow (((\forall z \in Z)z \in dom(X)) \wedge ((\forall z \in dom(X))z \in Z)).$$

$G_8(X) = Z$:

$$(Z = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in X\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v\rangle \to x = \langle v, u\rangle)\wedge$$
$$\wedge(\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle u, v\rangle \to z = \langle v, u\rangle))$$

$G_9(X) = Z$:

Nejdříve si dokážeme, že formule $a \in \langle x, y, z\rangle$ je Δ_0 formule

$$(a \in \langle x, y, z\rangle) \Leftrightarrow (a = \{x, \langle z, y\rangle\} \vee a = \{x\})$$

To použijeme k důkazu, že $A = \langle x, y, z\rangle$ je Δ_0 formule

$$(A = \langle x, y, z\rangle) \Leftrightarrow ((\forall a \in A)(a \in \langle x, y, z\rangle) \wedge \{x, \langle y, z\rangle\} \in A \wedge \{x\} \in A)$$

což použijem k důkazu, že $\langle x, y, z\rangle \in A$ je Δ_0 formule.

$$(\langle x, y, z\rangle \in A) \Leftrightarrow ((\exists a \in A)a = \langle x, y, z\rangle)$$

a konečně pomocí toho dokážeme,že $(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle u, w, v\rangle \in X\})$

$$(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle v, w, u\rangle \in X\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v, w\rangle \to x = \langle v, w, u\rangle))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle v, w, u\rangle \to z = \langle u, v, w\rangle))).$$

$G_{10}(X) = Z$:

$$(Z = \{\langle u, v, w\rangle : \langle u, w, v\rangle \in X\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (((\forall z \in Z)(\exists x \in X)(z = \langle u, v, w\rangle \to x = \langle u, w, v\rangle))\wedge$$
$$\wedge((\forall x \in X)(\exists z \in Z)(x = \langle u, w, v\rangle \to z = \langle u, v, w\rangle))).$$

□

Definice 2.21
Říkame, že třída T je uzavřená na operaci F :
když $F(x_1, ..., x_n) \in \mathsf{T}$ kdykoliv když $x_1, ..., x_n \in \mathsf{T}$

Teď si definujme uzávěr na Gödelovy operace $\mathfrak{D}(A)$ množiny A .

Definice 2.22
Rekurzí přes $n < \omega$ definujme:

$$X_0 = A,$$

$$X_n^* = \{x : (\exists y, z \in X_n)(x = G_1(z, y) \vee .. \vee x = G_{10}(z))\},$$
$$X_{n+1} = X_n \cup X_n^*,$$

pak definujme uzávěr $\mathfrak{D}(A)$ takto

$$\mathfrak{D}(A) = \bigcup_{j<\omega} X_j.$$

Dokažme si, že ke každé množině z uzávěru existuje Δ_0-formule, která ji definuje.

Lemma 2.23
Metamatematickou indukcí sestrojíme Δ_0-formule pro X_n:
Definujme pro $n = 0$

$$(X_0 = Y) \Leftrightarrow ((\forall y \in Y)(y \in X_0) \wedge (\forall y \in X_0)(y \in Y)).$$

Nechť tedy máme Δ_0-formuli pro $y \in X_n$ z toho pak pro následníka definujme

$$(x \in X_n^*) \Leftrightarrow ((\exists y \in X_n)(\exists z \in X_n)(x = G_1(z, y) \vee .. \vee x = G_{10}(z)),$$

$$x \in (X_{n+1}) \Leftrightarrow ((\exists y \in X_n)y = x) \vee ((\exists y \in X_n^*)x = y)).$$

Lemma 2.24
Nechť A je transitivní množina a mějme formuli ϕ, pak každá relativizace formule ϕ^{A} je Δ_0-formule.

Důkaz.
Jediný tvar formule, kdy $\phi(x_0, ..x_{n-1})$ není Δ_0-formule, je když nějaká podformule je tvaru $\exists y\varphi$. Relativizace formule $\phi(x_0, ..x_{n-1})$ na $\phi^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_{n-1})$ znamená přepsání podformule na $(\exists y \in A)\varphi$ a tedy se stane také Δ_0-formulí. Ostatní tvary formule jsou Δ_0-formule podle definice. □

Definujme si pojem absolutní formule a dokážeme si lemma o jejich vlastnostech v transitivním modelu.

Definice 2.25
Formule splňující následující lemma se nazývá absolutní vůči tranzitivnímu modelu M.

V lemma si dokážeme, že každá relativizovaná formule v transitivní třídě je Δ_0-formule.

Lemma 2.26
Když M *je tranzitivní třída a* ϕ *je* Δ_0 *formule, tak pro všechny* $x_0, ..., x_{n-1}$*:*

$$(\psi^M(x_0, .., x_{n-1})) \Leftrightarrow (\psi(x_0, .., x_{n-1}))$$

Důkaz.
Indukcí podle složitosti formule:

$x = y$**:**
Podle definice 2.6 je

$$(x = y)^M \Leftrightarrow x = y.$$

$x \in y$:
Podle definice 2.6 je

$$(x \in y)^M \Leftrightarrow x \in y.$$

Nechť tedy máme indukční předpoklad

$$\phi^M \Leftrightarrow \phi$$

$$\pi^M \Leftrightarrow \pi$$

$\phi \wedge \pi$:
Podle definice 2.6 je

$$(\phi \wedge \pi)^M \Leftrightarrow \phi^M \wedge \pi^M,$$

a z indukčního předpokladu dostáváme

$$\phi^M \wedge \pi^M \Leftrightarrow (\phi \wedge \pi).$$

Dohromady tedy

$$(\phi \wedge \pi)^M \Leftrightarrow (\phi \wedge \pi).$$

$\neg\phi$:

Podle definice 2.6 je

$$(\neg\phi)^M \Leftrightarrow \neg(\phi^M)$$

a z indukčního předpokladu dostaneme

$$\neg(\phi^M) \Leftrightarrow \neg\phi.$$

Dohromady tedy

$$(\neg\phi)^M \Leftrightarrow (\neg\phi).$$

$(\exists u \in x)\phi(u, x, ...)$:

Podle definice 2.6 je

$$(\exists u(u \in x \wedge \phi))^M \Leftrightarrow ((\exists u \in M)(u \in x \wedge \phi^M))$$

a z indukčního předpokladu a transitivity M

$$(\exists u \in M)(u \in x \wedge \phi^M)) \Leftrightarrow (\exists u \in x) \wedge \phi)).$$

□

Teď když se kouknem na předchozí lemmata máme materiál pro toho, abychom zapsali každý prvek uzávěru jako Δ_0-formuli.

Teď už máme dostatek materiálu proto abychom srovnali oba přistupy tvorby $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$

Věta 2.27
Nechť A je tranzitivní množina

$$\mathfrak{D}\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A)$$

Důkaz.
Nechť máme nějaké

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A).$$

Podle lemma 2.23 máme z

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\})$$

Δ_0-formuli tvaru

$$x = G(X_0, .., X_{n-1}).$$

Podle lemma 2.20 je to Δ_0-formule

$$\phi(y_0, .., y_m, z),$$

která definuje prvky x. Podle lemma 2.26 máme

$$\phi^{\mathrm{A}}(y_0,..,y_m,z)$$

a podle lemma 2.13 a předpokladu $x \in P(A)$ máme množinu

$$x = \{z \in A : \phi^{\mathrm{A}}(y_0,..,y_m,z)\} \in \mathfrak{DP}(A).$$

Tím jsme dokázali

$$\mathfrak{D}(A \cup \{A\}) \cap P(A) \subset \mathfrak{DP}(A).$$

Ted si dokážeme druhou inkluzi. Nechť máme nějaké

$$x \in \mathfrak{DP}(A).$$

Z definice 2.12 víme, že

$$x \in P(A).$$

Teď si musíme dokázat už jen

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\}).$$

Nechť tedy máme nějaké

$$x \in \mathfrak{DP}(A),$$

takové že

$$x = \{z \in A : \phi^{\mathrm{A}}(y_0,..,y_m,z)\}.$$

Podle lemma 2.24 je ϕ^{A} Δ_0-formule, což podle věty 2.19 znamená, že existuje $G(A,y_0,..,y_m)$ takové, že

$$G(A,y_0,..,y_m) = x.$$

Z čehož plyne, že existuje X_n takové, že

$$x \in X_n.$$

Z definice $\mathfrak{D}(A \cup \{A\})$ pak plyne

$$x \in \mathfrak{D}(A \cup \{A\}).$$

Tímto jsme dokázali

$$\mathfrak{D}(A \cup \{A\}) = \mathfrak{DP}(A).$$

$\square$

V této kapitole jsme tedy díky větě 2.27 dokázali, že oba případy konstrukce univerza $\mathbb{L}$ budou aspoň z pohledu výsledku stejné. Čím se tyto konstrukce liší, je přístup ke konstrukci $\mathbb{L}$. První přístup vyžaduje prostředky matematické logiky a na $\mathbb{L}$ nahlížíme metamatematicky jako na model teorie množin. Využili jsme k tomu formalizace relace splňování. Druhý přístup studuje $\mathbb{L}$ matematicky jako speciální třídu definovatelnou v teorii množin. Využíváme takzvané schéma Δ_0-vydělení, které odpovídá schéma vydělení aplikovaného na Δ_0-formule.

3 Universum $\mathbb{L}$

3.1 Základní vlastnosti $\mathbb{L}$

Díky větě 2.27 tedy můžem definice ztotožnit. Nejdříve si tedy použitím transfinitní indukce zkonstruujeme samotné universum $\mathbb{L}$.

Definice 3.1
Transfinitní indukcí definujme

$\alpha = \emptyset$**:**

$$L_\alpha = \varnothing,$$

$\alpha = \beta + 1$**:**

$$L_\alpha = \mathfrak{DP}(L_\beta),$$

α **je limitní ordinál:**

$$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta.$$

Tímto jsme zkonstruovali L_α pro každé $\alpha \in On$.
Teď pomocí L_α zkonstruujeme $\mathbb{L}$

$$\mathbb{L} = \bigcup_{\alpha\in On} L_\alpha.$$

Dokažme si, že $\mathbb{L}$ je podmnožinou $\mathbb{WF}$.

Lemma 3.2

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{WF}$$

Důkaz.
Nejdříve indukcí pro každé $\alpha \in On$ dokážeme, že platí

$$L_\alpha \subset R_\alpha$$

$\alpha = \emptyset$**:**

Z definice L_α dostaneme

$$L_\alpha = \varnothing.$$

Z definice R_α dostaneme

$$R_\alpha = \varnothing.$$

Což nám tedy dává

$$R_\alpha = L_\alpha.$$

$\alpha = \beta + 1$:
Z definice L_α dostaneme

$$L_\alpha = \mathfrak{DP}(L_\beta).$$

Z definice R_α dostaneme

$$R_\alpha = P(L_\beta).$$

Podle lemma 2.14 máme pro každé $\alpha = \beta + 1$

$$L_\alpha \subset R_\alpha.$$

α je limitní ordinál:
Nechť tedy mějme

$$x \in L_\alpha.$$

Z definice L_α plyne, že existuje ordinál $\beta < \alpha$ takový, že

$$x \in L_\beta.$$

Z indukčního předpokladu dostaneme

$$x \in R_\beta.$$

Z definice R_α dostáváme

$$x \in R_\alpha.$$

Takže i pro limitní ordinál α dostáváme také

$$L_\alpha \subset R_\alpha.$$

Důkaz pro $\mathbb{L}$ a $\mathbb{WF}$ je prakticky identický jako důkaz pro limitní ordinál Nechť tedy

$$x \in \mathbb{L}.$$

Z definice $\mathbb{L}$ plyne, že existuje ordinál β takový, že

$$x \in L_\beta.$$

Z indukčního předpokladu dostaneme

$$x \in R_\beta.$$

Z definice $\mathbb{WF}$ dostáváme

$$x \in \mathbb{WF}.$$

Tím jsme tedy dokázali

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{WF}.$$

□

V následujícím lemma si dokážeme, že každé L_α je transitivní.

Lemma 3.3

$$(\forall \alpha \in On)(\forall x \in L_\alpha)(y \in x \to y \in L_\alpha)$$

Důkaz.
Dokazujme indukcí přes $\alpha \in On$.

$\alpha = \emptyset$**:**
L_α neobsahuje žádný prvek, tedy formule je triviálně splněna.

$\alpha = \beta + 1$**:**
Nechť tedy máme lemma dokázáno pro $\forall \gamma(\gamma < \alpha)$ a $\alpha = \beta + 1$ pak

$$L_\alpha = \mathfrak{D}\mathfrak{P}(L_\beta).$$

Nechť tedy mějme

$$x \in L_\alpha.$$

Z definice $\mathfrak{D}\mathfrak{P}(L_\beta)$ dostaneme

$$x \subset L_\beta.$$

L_β je transitivní množina z indukčního předpokladu a podle lemma 2.15 máme

$$L_\beta \subset L_\alpha.$$

Kombinaci těchto dvou tvrzení dostáváme

$$x \subset L_\alpha.$$

α **limitní ordinál:**
Nechť tedy máme lemma dokázáno pro $\forall \gamma(\gamma < \alpha)$ a nechť

$$x \in L_\alpha.$$

Z definice L_α plyne,že existuje $\gamma < \alpha$, tak že

$$x \in L_\gamma.$$

Z indukčního předpokladu víme, že L_γ je transitivní tedy

$$x \subset L_\gamma.$$

Což opětovným použitím definice L_α dává

$$x \subset L_\alpha.$$

□

Nadefinujme si několik vlastností relací.

Definice 3.4 ***Úzká relace***
Relaci R nazveme úzkou právě tehdy když $\{x : xRy\}$ je množina pro každé y.

Definice 3.5
Když $x \in A$, a R je úzká relace na A, tak definujme

$$\mathit{pred(A,x,R)} = \{y \in A : yRx\}.$$

Definice 3.6
Relaci R nazveme extenzionální na A, právě tehdy když

$$\forall x, y \in A(\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy) \Rightarrow x = y).$$

Následující lemma použijeme k důkazu extenzionality relace R.

Lemma 3.7

$$(\mathit{pred(A,x,R)} = \mathit{pred(A,y,R)}) \Leftrightarrow (\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy))$$

Důkaz.
Nechť tedy platí

$$\mathit{pred(A,x,R)} = \mathit{pred(A,y,R)}.$$

Zvolme libovolné $z \in A$, tak že zRx.
Z rovnosti

$$\mathit{pred(A,x,R)} = \mathit{pred(A,y,R)},$$

dostaneme zRy.
Teď zvolme libovolné $z \in A$, tak že $\neg zRx$.
Z rovnosti

$$\mathit{pred(A,x,R)} = \mathit{pred(A,y,R)},$$

dostaneme $\neg zRy$.
Teď dokážem druhou část implikace.
Nechť tedy platí
$$\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy).$$
Vezmeme libovolné $a \in$ *pred(A,x,R)*. Z definice *pred(A,x,R)* víme
$$a \in A \wedge aRx.$$
Z předpokladu
$$\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy)$$
tedy máme
$$a \in A \wedge aRy.$$
Pak tedy z definice *pred(A,y,R)* dostaneme
$$a \in \mathit{pred}(A,y,R).$$
Opačná inkluze se dokáže obdobně. □

Dokažme si další lemma o vlastnostech transitivních množin.

Lemma 3.8
Nechť M je transitivní, tak
$$\mathit{pred}(\mathsf{M}, x, \in) = x.$$
Důkaz.
Nechť tedy pro nějaké $x \in \mathsf{M}$ máme
$$y \in x.$$
Podle definice 3.5 je
$$y \in \mathsf{M} \rightarrow y \in \mathit{pred}(\mathsf{M}, x, \in).$$
Z transitivity M plyne pro každé $x \in \mathsf{M}$
$$y \in x \rightarrow y \in \mathsf{M}.$$
Z transitivity implikace tedy plyne
$$y \in x \rightarrow y \in \mathit{pred}(\mathsf{M}, x, \in).$$
Tedy z toho dostaneme
$$x \subset \mathit{pred}(\mathsf{M}, x, \in).$$

Dokazujme opačnou inkluzi.
Nechť tedy pro nějaké $x \in \mathsf{M}$ je

$$y \in pred(\mathsf{M}, x, \in).$$

Podle definice 3.5 tedy platí

$$y \in x.$$

A tedy dostáváme

$$pred(\mathsf{M}, x, \in) \subset x.$$

□

Teď si dokážeme lemma o extenzionalitě relace.

Lemma 3.9
Když $\langle \mathsf{M}, \in \rangle$ je transitivní model, tak relace $\in$ je extenzionální na M

Důkaz.
Použitím lemma 3.7 na definici 3.5 dostaneme

$$\forall x, y \in A((pred(A,x,R) = pred(A,y,R)) \Rightarrow x = y).$$

Pokud aplikujeme lemma 3.8 dostáváme pro transitivní množiny podmínku

$$\forall x, y \in A(x = y \rightarrow x = y).$$

□

Dokážme si lemma o fundovanosti relace.

Lemma 3.10
Když $\mathsf{M} \subset \mathbb{WF}$ pak M splňuje axiom fundovanosti.

Důkaz.
Pro každé $x \in \mathbb{WF}$ platí axiom fundovanosti. Pokud

$$M \subset \mathbb{WF},$$

pak pro libolné $x \in M$ platí axiom fundovanosti. □

Definujme pojem podmnožinově uzavřeného seznamu formulí.

Definice 3.11
Nazveme seznam formulí $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ podmnožinově uzavřený, právě tehdy když každá podformule libovolé formule ϕ_i je v seznamu a žádná formule neobsahuje universální kvantifikátor.

Dokažme si lemma o uzavřenosti na existenční kvantifikátor.

Lemma 3.12
Nechť $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je podmnožinově uzavřený seznam formulí a A,B jsou neprázdné třídy tak, že $A \subset B$, tak nasledujicí je ekvivaletní:
Pro každou $\phi_i(x_0, ..., x_i)$ ze seznamu platí:

$$(\forall x_0, ..., x_t \in A)((\phi_t^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_t) \leftrightarrow \phi_t^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_t)))(1)$$

Pro každou existenční formuli $\phi_i(x_0, ..., x_i)$ tvaru $\exists a(\phi_j(x_0, ..., x_i, a))$ ze seznamu platí:

$$(\forall x_0, ..., x_i \in A)((\exists a \in B)(\phi_i^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i) \rightarrow (\exists a \in A)\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a)))(2)$$

Důkaz.
Nechť tedy máme nějaké $x_0, ..., x_i \in A$ a nechť platí předpoklad

$$(\forall x_0, ..., x_t \in A)((\phi_t^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_t) \leftrightarrow \phi_t^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_t))).$$

Předpokládejme

$$\phi_i^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i),$$

z předpokladu pro ϕ_i platí

$$\phi_i^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_i).$$

To je podle definice a relativizace

$$(\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_j, a)).$$

Z předpokladu pro ϕ_j platí

$$(\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_1, ..x_n, a)).$$

Druhou implikaci dokážeme indukcí podle složitosti formule.
Pro všechny formule ψ_i bez kvantifikátoru platí (1) z lemma 2.26.
Nechť tedy ψ_i je $\exists a\ \psi_j(x_0, ..x_j, a)$ fixujme $x_0, ..., x_i \in A$.
Z definice relativizace dostaneme

$$(\phi_i^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_i)) \Leftrightarrow ((\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_i, a))).$$

Z indukčního předpokladu dostaneme

$$((\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{A}}(x_0, ..x_i, a))) \Leftrightarrow ((\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))).$$

Z $A \subset B$ plyne

$$((\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))) \Rightarrow ((\exists a \in B)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))).$$

A z předpokladu věty

$$((\exists a \in A)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))) \Leftarrow ((\exists a \in B)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))).$$

Z definice relativizace dostaneme

$$((\exists a \in B)(\phi_j^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i, a))) \Leftrightarrow (\phi_i^{\mathrm{B}}(x_0, ..x_i)).$$

□

Dokažme si větu, která je jedna z verzí Principu reflexe.

Věta 3.13 ***Princip reflexe***
Nechť $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je seznam formulí, máme neprázdnou třídu $\mathbb{T}$, pro každé $\alpha \in On$ je T_α množina a pro libovolné $\alpha, \beta, \gamma \in On$ platí:

- $$\alpha < \beta \rightarrow T_\alpha \subset T_\beta$$
- *pro limitní ζ* $$T_\zeta = \bigcup_{\rho < \zeta} T_\rho$$
- $$\mathbb{T} = \bigcup_{\rho \in On} T_\rho$$

pak $\forall \alpha (\exists \beta > \alpha)$ takže pro něj platí

- *β je limitní ordinál*
- $$\bigwedge_{i<n} (\phi_i^{\mathrm{T}_\beta} \Leftrightarrow \phi_i^{\mathbb{T}})$$

Důkaz.
Nechť seznam formulí $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ je podmnožinově uzavřený, pokud není tak ho rozšíříme, tak aby byl.
Pro každé $i = 0, 1, .., n-1$, tak že ϕ_i je $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$ definujme G_i takto:

$$G_i : \mathbb{T}^n \rightarrow On.$$

Když $(\neg \exists x \in \mathbb{T})(\phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l))$, pak

$$G_i(y_1, .., y_l) = 0.$$

Pro $(\exists x \in \mathbb{T})(\phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l))$ definujme

$$G_i(y_1, .., y_l) = \alpha$$

tak, že α je nejmenší takové α, že

$$(\exists x \in T_\alpha)(\phi_j^{\mathrm{T}}(x, y_1, .., y_l)).$$

Teď definujme

$$F_i : On \to On$$

Když ϕ_i není $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$, tak

$$F_i(\alpha) = 0.$$

Jinak když ϕ_i je $\exists x \phi_j(x, y_1, .., y_l)$

$$F_i(\alpha) = sup\{G_i(y_1, .., y_l) : y_1, .., y_l \in T_\alpha\}.$$

Z toho teď definujme

$$K(\alpha) = max(\{F_i(\alpha) : i < n\} \cup \{\alpha + 1\}).$$

Nechť tedy máme α dané. Ukážeme si jak zkonstruovat $\beta > \alpha$, tak že:

- $T_\beta \neq \emptyset$,
- splňuje lemma 3.12 pro T_β a $\mathbb{T}$.

Tak nechť γ_0 je nejmenší $\gamma > \alpha$, tak že $T_\gamma \neq \emptyset$.
Rekurzí pak zkonstruujeme

$$\gamma_{n+1} = K(\gamma_n).$$

Z konstrukce plyne

$$\beta < \gamma_0 < \gamma_1 < ......$$

Definujme

$$\beta = sup\{\gamma_k : k \in \omega\}.$$

Máme tedy β limitní ordinál pro který platí

$$\bigwedge_{i<n} (\phi_i^{\mathrm{T}_\beta} \Leftrightarrow \phi_i^{\mathbb{T}}).$$

$\square$

Dokážeme si lemma, o tom že $\mathfrak{DP}(L_\alpha)$ obsahuje jako prvek L_α .

Lemma 3.14

$$L_\alpha \in L_{\alpha+1}$$

Důkaz.

$$L_\alpha = \{x \in L_\alpha : (x = x)^{\mathrm{L}_\alpha}\},$$

což podle lemma 2.13 znamená

$$L_\alpha \in \mathfrak{DP}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

□

Definujme si $\rho(x)$ jako $\mathbb{L}$-rank.

Definice 3.15

Když $x \in \mathbb{L}, \rho(x)$ je $\mathbb{L}$-rank roven nejmenšímu β tak, že $x \in L_{\beta+1}$.

Dokažme si lemma pro platnost schéma nahrazení.

Lemma 3.16

Pro libovolnou formuli $\phi(x, y, A, a_1, .., a_n)$ a libovolné $A, a_1, .., a_n \in M$, kde A je dom(ϕ) a M je transtivní.
Když platí

$$((\forall x \in A)(\exists! y \in M)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\exists Y \in M)(\{y : (\exists x \in A)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\} \subset Y)$$

tak schéma nahrazení platí v M.

Důkaz.
Nejdříve si dokážeme

$$(\forall x, y, z \in M)(F(x, y) \wedge F(x, z) \to z = y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\forall x \in A)(\exists! y \in M)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)).$$

Formule $\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)$ definuje funkci tak, že

$$A = dom(F).$$

Pak z definice dom(F) pro libovolné $x \in A$ existuje y tvaru

$$y = F(x)$$

a z předpokladu může existovat právě jedno y.
Teď dokážeme

$$((\exists Y \in M)(\{y : (\exists x \in A)\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\} \subset Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists W \in M)(\forall y \in M)(y \in W \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge F(x, y)).$$

Z předpokladu $\phi^{\mathrm{M}}(x, y, A, a_1, .., a_n)$ definujme funkci F, takže $W = Rng(F)$.

□

Ukážeme si, že další vlastnost je Δ_0-formule.

Lemma 3.17
x je ordinál je Δ_0 formule.

Důkaz.
Ordinál je definovaný takto

$$x \text{ je ordinál} \Leftrightarrow ((x \text{ je transitivní množina}) \wedge (x \text{ je totálně uspořádaná } \in)).$$

Teď si ukážeme, že levá i pravá část konjunkce jsou Δ_0 formule a tedy i formule je podle definice Δ_0 formule.
Definujme takto transitivní množinu

$$(x \text{ je transitivní množina}) \Leftrightarrow ((\forall v \in x)(\forall z \in v)(z \in x)).$$

Definujme si, že x je totální uspořádaná relací $\in$ jako

$$(x \text{ je totálně uspořádaná } \in) \Leftrightarrow ((\forall y \in x)(\forall z \in x)(y \in z \vee y = z \vee z \in y))$$

$\square$

Dokažme si lemma, o tom že pro každé α platí $(\alpha \in L_{\alpha+1})$.

Lemma 3.18

$$(\forall \alpha \in On)(\alpha \in L_{\alpha+1})$$

Důkaz.
Vzhledem k tomu že L_α je transitivní množina, tak formule x je ordinál je absolutní a tedy definujme

$$\alpha = L_\alpha \cap On = \{x \in L_\alpha : (x \in On)^{\mathrm{L}_\alpha}\}.$$

Což podle lemma 2.12 je

$$\alpha \in L_{\alpha+1},$$

pokud pro α platí

$$\alpha \subset L_\alpha.$$

Tak si to tedy dokážeme transfinitní indukcí.

$\alpha = \emptyset$:

Prázdná množina je podmnožina, každé množiny, specialně tedy platí

$$\emptyset \subset L_\emptyset.$$

$\alpha = \beta + 1$**:**

Nechť tedy pro všechny $\beta < \alpha$ platí

$$\beta \subset L_\beta.$$

Vezměme tedy

$$x \in \alpha.$$

Z $\alpha = \beta + 1$ dostaneme že

$$x = \beta \vee x \in \beta.$$

Pro oba případy provedeme důkaz.

$x = \beta$

Podle předpokladu platí

$$\beta \in L_\beta.$$

Z lemma 2.15 dostaneme

$$L_\beta \subset L_\alpha.$$

Z toho pak tedy dostaneme

$$\beta \in L_\alpha.$$

Takže pro tento případ máme

$$\alpha \subset \ L_\alpha.$$

$x \in \beta$

Z indukčního předpokladu

$$x \in L_\beta.$$

Z lemma 2.15 máme

$$L_\beta \subset L_\alpha.$$

A pak tedy

$$\beta \in L_\alpha.$$

Takže i pro tento případ dostaneme

$$\alpha \subset \ L_\alpha.$$

α **limitní ordinál:**

Nechť tedy máme dokázáno pro $\forall\gamma(\gamma < \alpha)$ a nechť

$$x \in \alpha.$$

Z definice α plyne, že existuje $\gamma < \alpha$, tak že

$$x \in \gamma.$$

Z indukčního předpokladu víme, že

$$\gamma \subset L_\gamma.$$

Z čehož tedy dostaneme

$$x \in L_\gamma.$$

Opětovným použitím definice L_α máme

$$x \in L_\alpha.$$

Takže i pro tento případ dostaneme

$$\alpha \subset L_\alpha.$$

$\square$

3.2 $\mathbb{L}$ je model ZF

Věta 3.19 $\mathbb{L}$ *splňuje axiomy ZF*

Důkaz.

Axiom extenzionality

Podle lemma 3.3 je $\mathbb{L}$ transitivní a tedy podle lemma 3.9 v $\mathbb{L}$ platí axiom extenzionality.

Schéma nahrazení

Podle lemma 3.16 stačí ověřit

$$((\forall x \in A)(\exists! y \in L)\phi^{\mathbb{L}}(x, y, A, a_1, .., a_n)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\exists Y \in L)(\{y : (\exists x \in A)\phi^{\mathbb{L}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\} \subset Y).$$

Budeme tedy předpokládat

$$((\forall x \in A)(\exists! y \in L)\phi^{\mathbb{L}}(x, y, A, a_1, .., a_n)).$$

Teď definujme

$$\alpha = sup\{\rho(y) + 1 : (\exists x \in A)\phi^{\mathbb{L}}(x, y, A, a_1, .., a_n)\},$$

z toho dostaneme naše hledané Y jako

$$Y = L_\alpha.$$

O L_α víme podle lemma 3.14, že

$$Y \in L_{\alpha+1}.$$

Což pak nám z definice $\mathbb{L}$ dává

$$Y \in \mathbb{L}.$$

Schéma vydělení

Nechť je daná formule $\phi(x, z)$, tak pro ni musíme dokázat

$$\forall y(\{x \in y : \phi^{\mathbb{L}}(x, z)\} \in \mathbb{L}.$$

Podle věty 3.13 máme pro ϕ ordinál α takový, že

$$Y = \{x \in y : \phi^{\mathbb{L}}(x, y)\} = \{x \in L_\alpha : \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(x, y) \wedge x \in y\}.$$

Z lemma 3.14 víme, že

$$Y = \{x \in L_\alpha : \phi^{\mathrm{L}_\alpha}(x, y) \wedge x \in y\} \in L_{\alpha+1}.$$

Konečně tedy z definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$Y \in \mathbb{L}.$$

Axiom dvojice

Máme dokázat formuli

$$(\forall a \in \mathbb{L})(\forall b \in \mathbb{L})(\exists c \in \mathbb{L})(\forall x \in \mathbb{L})(x \in c \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)).$$

Nechť tedy máme dané

$$a \in L_\alpha,$$

$$b \in L_\beta.$$

Tak definujme

$$\gamma = max\{\beta, \alpha\}.$$

Je zřejmé,že

$$a, b \in L_\gamma.$$

Z definice uzávěru na Gödelovy operace dostaneme

$$\{a, b\} \in L_{\gamma+1}.$$

A nakonec tedy z definice $\mathbb{L}$

$$\{a, b\} \in \mathbb{L}.$$

Axiom sumy

Dokazujeme formuli

$$(\forall a \in \mathbb{L})(\exists c \in \mathbb{L})(\forall x \in \mathbb{L})(x \in c \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{L}(x \in y \wedge y \in a)).$$

Nechť tedy máme dané

$$a \in \mathbb{L}.$$

Z definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$a \in L_\alpha.$$

Z definice uzávěru na Gödelovy operace dostaneme

$$\bigcup a \in L_{\alpha+1}.$$

Pak tedy z definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$\bigcup a \in \mathbb{L}.$$

Axiom potence

Ač se to zdá neintuivní dokážeme, že

$$(\forall a \in \mathbb{L})(\exists c \in \mathbb{L})(\forall x \in \mathbb{L})(x \in c \Leftrightarrow x \subset a)).$$

Na to si ale nejdříve dokážeme, že $x \subset a$ je Δ_0-formule

$$(x \subset a) \Leftrightarrow ((\forall y \in x)(y \in a)).$$

Nechť tedy máme dané

$$a \in \mathbb{L}.$$

Z definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$a \in L_\alpha.$$

Teď definujme množinu

$$\{y \in L_\alpha : y \subset a)\},$$

pro kterou podle lemma 2.13 platí

$$\{y \in L_\alpha : y \subset a)\} \in L_{\alpha+1}.$$

A pak použitím definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$\{y \in L_\alpha : y \subset a)\} \in \mathbb{L}.$$

Axiom nekonečna

Teď dokazujme

$$\exists a \in \mathbb{L}(\emptyset \in a \wedge (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)).$$

Takové a je pro které formule platí je evidentně ω, pro kterou podle lemma 3.18 platí

$$\omega \in L_{\omega+1}.$$

Z čehož podle definice $\mathbb{L}$ dostaneme

$$\omega \in \mathbb{L}.$$

Axiom fundovanosti

A konečně dokážeme

$$(\forall a \in \mathbb{L})(a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{L})(b \in a \wedge b \cap a = \emptyset)).$$

Podle lemma 3.2 je

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{WF}$$

a podle lemma 3.3 je $\mathbb{L}$ transitivní. Můžeme tedy použít lemma 3.10, tím dostáváme, že platí axiom fundovanosti.

□

3.3 Axiom konstruovatelnosti

Definice 3.20 ***Axiom konstruovatelnosti***

$$\mathbb{L} = \mathbb{V}$$

nebo-li

$$\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$$

Lemma 3.21
L_α je absolutní

Důkaz.
Podle lemma 2.23 $\mathfrak{D}$ je absolutní funkce a podle lemma 3.3 je L_α transitivní. Transfinitní indukcí:

$\alpha = \emptyset$
Prázdná množina je absolutní, protože

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}$$

a $b \neq b$ je Δ_0 formule.

$\alpha = \beta + 1$
Nechť tedy L_β je absolutní a tedy $L_{\beta+1}$ je absolutní z definice,

$$L_{\beta+1} = \mathfrak{D}(L_\beta),$$

protože $\mathfrak{D}$ je absolutní funkce a tedy kdyby

$$L_{\beta+1} \neq L_{\beta+1}^{\mathbb{L}},$$

tak by to bylo ve sporu s tím, že $\mathfrak{D}$ je absolutní funkce.

α **je limitní ordinál**
Nechť tedy pro všechny $\beta < \alpha$

$$L_\beta = L_\beta^{\mathbb{L}}.$$

Budem postupovat sporem. Nechť ať platí

$$L_\alpha \neq L_\alpha^{\mathbb{L}}.$$

Z definice L_α musí existovat $\gamma < \alpha$ tak, že

$$L_\gamma \neq L_\gamma^{\mathbb{L}},$$

což je spor s předpokladem.

□

Věta 3.22

$$\mathbb{L} \textit{ je model } ZF + \mathbb{L} = \mathbb{V}$$

Důkaz.
Podle věty 3.19 ZF platí v $\mathbb{L}$, tedy stačí dokázat, že

$$(\forall x \in \mathbb{L})(\exists \alpha \in \mathbb{L})(x \in L_\alpha)^{\mathbb{L}}.$$

Nechť tedy fixujeme

$$x \in \mathbb{L}.$$

Z definice $\mathbb{L}$ máme

$$x \in L_\alpha.$$

Podle lemma 3.18 je $\alpha \in \mathbb{L}$ a podle lemma 3.21 je $x \in L_\alpha$ absolutní. $\square$

4 $Con(ZF) \to Con(ZFC + GCH)$

4.1 Axiom výběru

Věta 4.1

$$WO \Rightarrow AC$$

Nebo-li že princip dobrého uspořádání implikuje axiom výběru.

Důkaz.
Nechť máme množinu A a definujme množinu

$$B = \bigcup_{a \in A} a.$$

Z předpokladu máme možnost B dobře uspořádat. Což znamená, že každá neprázdná množina má nejmenší prvek. Označme ho min_a, kde a je množina, kde je min_a je minimální prvek. Teď pomocí toho definujme výběrovou fuknci z A jako

$$F : A \to \bigcup_{a \in A},$$

$$F(a) = min_a.$$

Takže máme výběrovou funkci F z libovolného A, tedy platí axiom výběru. □

V další části provedeme důkaz, že axiom konstruovatelnosti implikuje axiom výběru. Využijeme předchozí větu a důkaz povedeme tak, že $\mathbb{L}$ jde dobře uspořádat. K uspořádání využijeme dvě definice a to definici 2.8 a definici 3.15. Budememe postupovat tak, že nejdříve seřadíme L_α pro každé α a pak podle α seřadíme L_α.

Definice 4.2
Nechť tedy rekurzí přes α definujme uspořádání $\lhd_\alpha = \lhd(\alpha)$ pro L_α

$\alpha = \emptyset$

$$L_\alpha = \emptyset$$

$\alpha = \beta + 1$

Z indukčního předpokladu mějme uspořádaní $\lhd_\beta$, definujme indukcí podle n lexikografické uspořádání $\lhd_\beta^n$ na L_β^n jako

$$a \lhd_\beta^n b \leftrightarrow ((\exists k < n)(a \restriction k = b \restriction k \wedge a(k) \lhd_\beta b(k)).$$

Teď definujme pro každé $a \in L_\alpha$ n_a tak, že to je nejmenší n, takže platí

$$(\exists s \in L^n_\beta)(\exists R \in Df(L_\beta, n+1))(X = \{x \in L_\beta : s\hat{\ }\langle x\rangle \in R\}).$$

Teď definujme s_a jako nejmenší $s \in L^{n_a}_\beta$ vzhledem k uspořádaním $\lhd^{n_a}_\beta$ pro které platí

$$(\exists R \in Df(L_\beta, n_a+1))(X = \{x \in L_\beta : s\hat{\ }\langle x\rangle \in R\}).$$

Konečně definujme m_a jako nejmenší $m \in \omega$ takové, že platí

$$X = \{x \in L_\beta : s_a\hat{\ }\langle x\rangle \in En(m, L_\beta, n_a)\}.$$

A teď konečně pro každé $X, Y \in L_\alpha$ definujme $X \lhd_\alpha Y$, když platí jedna z následujících třech podmínek:

1. $$X \in L_\beta \wedge Y \in L_\beta \wedge X \lhd_\beta Y$$
2. $$X \in L_\beta \wedge Y \notin L_\beta$$
3. $$X \notin L_\beta \wedge Y \notin L_\alpha \wedge [(n_x < n_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x \lhd^{n_x}_\beta s_y) \vee$$ $$\vee n_x = n_y \wedge s_x = s_y \wedge m_x < m_y]$$

α je limitní ordinál

$$\lhd_\alpha =$$
$$= \{(x,y) \in L_\alpha \times L_\alpha : \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge (x,y) \in \lhd (\rho(x)+1))\}$$

Tak teď máme uspořádané L_α pomocí uspořádaní $\lhd$ pro každé α a pomocí toho definujme uspořádaní pomocí $<_{\mathbb{L}}$

Definice 4.3

$$x <_{\mathbb{L}} y \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (y \in \mathbb{L} \wedge y \in \mathbb{L} \wedge (\rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge (x,y) \in \lhd (\rho(x)+1))))$$

Věta 4.4
$\mathbb{L}$ *lze dobře uspořádat.*

Důkaz.
Použijeme uspořádání z definice 4.3 a definice 4.2 pro každé $x \in \mathbb{L}$, pak existuje α tak, že $x \subset L_\alpha$ a x je tedy dobře uspořádáno uspořádáním $\lhd_\alpha$ □

Věta 4.5

$$\textit{Axiom konstruovatelnosti} \to \textit{axiom výběru.}$$

Důkaz.
Axiom konstruovatelnosti nám říká, že $\mathbb{L}$ je celé universum a věta 4.4 nám říká, že každou množinu z $\mathbb{L}$ lze dobře uspořádat a tedy platí WO. Pomocí věty 4.1 dostaneme, že platí axiom výběru. □

4.2 Zobecněná hypotéza kontinua

Definice 4.6
Definujme

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \textit{existuje prostá funkce } f\ f : A \to B,$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \textit{existuje bijekce } f\ f : A \to B.$$

Lemma 4.7
Předpokládejme platnost axiom výběru:
Když máme funkci f z A na B, tak

$$|B| \leq |A|.$$

Důkaz.
Z axiom výběru máme, že A je dobře uspořádaná nějakou relací R.
Definujme funkci g

$$g : B \to A$$

tak, že $g(y)$ je R-nejmenší prvek $f^{-1}(\{y\})$.
Kdyby g nebyla prostá, tak existuje x, y pro které platí

$$x \neq y \wedge g(x) = g(y),$$

což by z definice g znamenalo, že existuje c takové, že $f(c) = y \wedge f(c) = x$, což použitím transitivnosti relace rovnosti dostaneme $x = y$, což je spor s předpokladem. □

Toto teď použijeme spolu s poznatkem z lemma 2.9 k dalšímu důkazu.

Lemma 4.8
Předpokládejme platnost axiom výběru:

$$|Df(A, n)| \leq \omega$$

Důkaz.
Definujme funkci H

$$H : \omega \to Df(A, n),$$

$$H(m) = En(m, A, n).$$

Funkce H bude na, protože v lemma 2.9 jsme si mimojiné dokázali, že pro každé x platí

$$x \in Df(A, n) \to (\exists m \in \omega) x = En(m, A, n).$$

Díky předpokladu platnosti axiom výběru použijeme lemma 4.7 a dostaneme

$$|Df(A, n)| \leq \omega.$$

□

Lemma 4.9
Předpokládejme platnost axiom výběru:

$$|A| \geq \omega \to |\mathfrak{DP}(A)| = |A|$$

Důkaz.
Mějme tedy axiom výběru a $|A| \geq \omega$:
Pro každé $m \in \omega$ platí

$$|A^m| = |A|.$$

Z definice $\mathfrak{DP}(A)$ víme, že

$$|\mathfrak{DP}(A)| \leq \omega \times |A^m| \times |Df(A, n)|.$$

Pak pomocí lemma 4.8 dostaneme

$$|\mathfrak{DP}(A)| \leq \omega \times |A| \times \omega.$$

Což nám s předpokladem

$$|A| \geq \omega$$

dává

$$|\mathfrak{DP}(A)| \leq |A|.$$

Z lemma 2.15 dostaneme

$$A \subset \mathfrak{DP}(A).$$

Definujme teď funkci H

$$H : A \to \mathfrak{DP}(A),$$
$$H(a) = a.$$

Tato funkce H je identita na A, která je prostá protože pro každé $a, b \in A$

$$H(a) = H(b) \to a = b,$$

platí z definice funkce H.
Pak tedy
$$|A| \leq |\mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)|.$$
Čímž jsme dokázali
$$|A| = |\mathfrak{D}\mathfrak{P}(A)|.$$
□

Lemma 4.10
Předpokládejme platnost axiom výběru, pak
$$|\mathbb{L}_\omega| = \omega.$$

Důkaz.
Víme, že
$$\mathbb{L}_\omega = \bigcup_{\alpha<\omega} \mathbb{L}_\alpha.$$
Pro $(\forall \alpha < \omega)$ platí
$$|\mathbb{L}_\alpha| \leq \omega.$$
Z toho dostaneme, že platí
$$|\mathbb{L}_\omega| \leq \omega \times \omega.$$
Z definice kardinálního součinu dostaneme
$$|\mathbb{L}_\omega| \leq \omega.$$
V lemma 3.18 jsme dokázali, že
$$\omega \subset \mathbb{L}_\omega.$$
Definujme funkci H
$$H : \omega \to \mathbb{L}_\omega,$$
$$H(a) = a.$$
Tato funkce H je identita na A, která je prostá, protože pro každé $a, b \in A$ platí
$$H(a) = H(b) \to a = b$$
z definice funkce H. Z toho tedy použitím definice 4.6 dostaneme
$$\omega \leq |\mathbb{L}_\omega|.$$
Tímto jsme dokázali
$$|\mathbb{L}_\omega| = \omega.$$
□

Lemma 4.11
Předpokládejme platnost axiomu výběru:
Pak pro každé $\alpha \geq \omega$

$$|\mathbb{L}_\alpha| = \alpha.$$

Důkaz.
Transfinitní indukcí pro $\alpha \geq \omega$:

$\alpha = \omega$
Jsme dokázali v lemma 4.10.

$\alpha = \beta + 1$
Nechť tedy pro všechny $\omega \leq \gamma < \alpha$

$$|\mathbb{L}_\gamma| = |\gamma|.$$

Tedy

$$\mathbb{L}_\alpha = \mathfrak{D}\mathfrak{P}(\mathbb{L}_\beta)$$

Z lemma 4.9 máme

$$|\mathfrak{D}\mathfrak{P}(L_\beta)| = |L_\beta|.$$

Z kardinální aritmetiky víme

$$|\alpha| = |\beta|.$$

A konečně z toho tedy

$$|\mathbb{L}_\alpha| = \alpha.$$

α je limitní ordinál různý od ω
Nechť tedy pro všechny $\omega \leq \beta < \alpha$

$$|\mathbb{L}_\beta| = |\beta|.$$

Víme, že

$$\mathbb{L}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{L}_\beta.$$

Z indukčního předpokladu pro $(\forall \beta < \alpha)$ máme

$$|\mathbb{L}_\beta| \leq |\alpha|.$$

Tedy z toho dostaneme, že platí

$$|\mathbb{L}_\alpha| \leq |\alpha| \times |\alpha|.$$

Z definice kardinálního součinu dostaneme

$$|\mathbb{L}_\alpha| \leq \alpha.$$

V lemma 3.18 jsme dokázali, že pro každé α platí

$$\alpha \subset \mathbb{L}_\alpha.$$

Definujme funkci H předpisem

$$H : \alpha \to \mathbb{L}_\alpha,$$

$$H(a) = a.$$

Tato funkce je identita na α, která je prostá, protože pro každé $a, b \in A$ platí

$$H(a) = H(b) \to a = b$$

z definice funkce H. Z toho tedy použitím definice 4.6 dostaneme

$$\alpha \leq |\mathbb{L}_\alpha|.$$

Tím jsme dokázali

$$|\mathbb{L}_\alpha| = \alpha.$$

□

Definice 4.12

$$o(M) = M \cap On$$

Věta 4.13

Je tady konečná konjunkce ς axiomů $ZF - P + V = L$, tak že

$$\forall M(M \text{ je transitivní} \wedge \varsigma^M \to (L_{o(M)} = M)).$$

Důkaz.

Nechť ς obsahuje axiomy dokazující, že tu není největší ordinál.

Mějme transitivní M a nechť platí ς^M, pak o(M) je limitní ordinál, protože kdyby $o(M)$ byl následník β, tak β je největší ordinál. $o(M) = \emptyset$ nemůže být, protože z axiomů ZF musí obsahovat ordinál $\emptyset$.

Tedy z toho, že $o(M)$ je limitní ordinál dostaneme

$$L_{o(M)} = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha.$$

Mějme
$$\mathbb{L}^M = \{x \in M : (\exists\alpha(x \in L_\alpha))^M\}.$$
Z absolutnosti L_α dostaneme
$$\{x \in M : (\exists\alpha(x \in L_\alpha))^M\} = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha.$$
Dohromady nám to dává
$$L_{o(M)} = \mathbb{L}^M.$$
Z definice $\{x \in M : (\exists\alpha(x \in L_\alpha))^M\}$ dostáváme, že platí
$$L_{o(M)} \subset M.$$
Z axiomu konstruovatelnosti relativizovaném v M dostaneme
$$(\forall x(x \in \mathbb{L}))^M,$$
z čehož dostáváme, že platí
$$M \subset L_{o(M)}.$$
Z toho tedy pak dostaneme
$$M = L_{o(M)}.$$
□

Definice 4.14 ***Mostowského kolapsující zobrazení***
Nechť R je úzká fundovaná relace na A. Definujme Mostowského kolapsující zobrazení G z A, R takto:
$$G(x) = \{G(y) : y \in A \wedge yRx\}.$$
Mostowského kolaps M je pak množina
$$M = \{G(y) : y \in A\}.$$

Věta 4.15
Mějme Mostowského kolapsující zobrazení. Pokud R na A je extenzionalní, tak G je jednoznačný izomorfimus na M. M je jednoznačně určená transtitivní třída.

Důkaz.
Funkce G je určitě na, protože M definováno jako obor hodnot funkce G. Teď budeme pokračovat důkazem,že G je prostá. Důkaz povedeme sporem. Nechť máme x jako R-nejmenší prvek pro který platí:
$$\{x \in A : (\exists y \in A)(x \neq y \wedge G(y) = G(X))\}.$$

Vzhledem k extenzionalitě relace R můžou nastat tyto dva případy:

1. Mějme nějaké $z \in A$ takové, že zRx a $\neg zRy$:
   Z definice funkce G dostaneme
   $$G(z) \in G(x).$$
   Z předpokladu máme
   $$G(x) = G(y).$$
   Z toho plyne, že existuje nějaké $w \in A$, takové že wRy.
   Z toho dostaneme, že $w \neq z$.
   Což znamená, z je R-nejmenší prvek, což je spor s předpokladem.

2. Druhy případ je, že máme $a \in A$ takové, že aRy a $\neg aRx$:
   Z definice funkce G dostaneme
   $$G(a) \in G(y).$$
   Z předpokladu máme
   $$G(x) = G(y).$$
   Z toho plyne, že existuje nějaké $b \in A$, takové že bRx.
   Z toho dostaneme, že $b \neq a$.
   Což znamená, b je R-nejmenší prvek, což je spor s předpokladem.

Teď si ověříme vzájemnost relací nebo-li:

$$(\forall x, y \in A)(xRy \leftrightarrow G(x) \in G(y)).$$

Tato ekvivalence plyne přímo z definice G.
Ověřme jednoznačnost G. Mějme tedy G' splňující podmínky.
Máme tedy

$$(\forall x, y \in A)(xRy \leftrightarrow G(x) \in G(y)),$$
$$(\forall x, y \in A)(xRy \leftrightarrow G'(x) \in G'(y)).$$

Z toho dostaneme

$$(\forall x, y \in A)(G(x) \in G(y) \leftrightarrow G'(x) \in G'(y)).$$

Takže z toho máme

$$G = G'.$$

Nakonec mějme tedy M' splňující podmínky. Z jednoznačnosti G dostaneme

$$M = M'.$$

Nakonec mějme

$$x \in M.$$

Z definice M pro nějaké

$$y \in A$$

dostaneme

$$G(y) \in M.$$

Mějme teď

$$w \in G(y).$$

Z definice G pro nějaké

$$c \in A$$

dostaneme

$$G(c) = w.$$

Z definice M tedy

$$w \in M.$$

M je tedy transitivní. □

Věta 4.16
Mějme formule $\phi_0, ..., \phi_n$, tak

$$(\forall X \subset \mathbb{L})(\exists A)[X \subset A \subset \mathbb{L} \wedge (\phi_0, ..., \phi_n \textit{ jsou absolutní pro } A, \mathbb{L}) \wedge$$

$$\wedge |A| \leq max(\omega, |X|)].$$

Důkaz.
Mějme $\phi_0, ..., \phi_n$ podmnožinově uzavřený seznam formulí.
Najděme teď α tak, že $X \subset L_\alpha$ a podle věty 3.13 existuje $\beta > \alpha$ tak, že $\phi_0, ..., \phi_n$ je absolutní pro $L_\beta, \mathbb{L}$. L_β je podle věty 4.4 dobře uspořádaná uspořádaním $\lhd$. Když ϕ_i má d_i volných formulí $y_1, ..., y_{d_i}$ definujme funkci H_i

$$H_i : {L_\beta}^{d_i} \to L_\beta.$$

Nechť tedy ϕ_i je formule tvaru $(\exists x)(\phi_j(x, y_1, ..., y_{d_i}))$, pak $H_i(y_1, ..., y_{d_i})$ je $\lhd$-nejmenší takové x, že pro něj platí

$$(\exists x \in L_\beta)(\phi_j(x, y_1, ..., y_{d_i})).$$

Pokud pro nějaké x platí

$$\neg(\exists x \in L_\beta)(\phi_j(x, y_1, ..., y_{d_i})),$$

pak $H_i(y_1, ..., y_{d_i})$ je $\lhd$-nejmenší prvek L_β.
Pokud ϕ_i není existenční formule, pak $H_i(y_1, ..., y_{d_i})$ je $\lhd$-nejmenší prvek L_β.
Pro konstantu definujme H jako nějaký prvek L_β.
Definujme A jako uzávěr X na funkce $H_0, ..., H_n$.
Podle lemma 3.12 jsou $\phi_0, ..., \phi_n$ absolutní pro $A, \mathbb{L}$.
Pak z definice A vidíme

$$|A| \leq \omega \times |X|.$$

Z čehož plyne

$$|A| \leq max(\omega, |X|).$$

□

Lemma 4.17
Nechť G je bijekce z A na M s izomorfismem pro relaci $\in$, tak pro libovolnou formuli $\phi(x_0, ..., x_n)$

$$\forall x_0, ..., x_n \in A[\phi(x_0, ..., x_n)^A \leftrightarrow \phi(G(x_0), ..., G(x_n))^M].$$

Důkaz. Indukcí podle složitosti formule:

$x = y$**:**
Podle definice G a z definice relativizace dostaneme

$$G(y) = G(x) \leftrightarrow y = x.$$

$x \in y:$
Z izomorfismu pro relaci $\in$ a z definice relativizace máne

$$(x \in y) \leftrightarrow G(x) \in G(y).$$

Nechť tedy máme indukční předpoklady

$$\phi(x_0, ..., x_n)^A \leftrightarrow \phi(G(x_0), ..., G(x_n))^M,$$

$$\pi(x_0, ..., x_n)^A \leftrightarrow \pi(G(x_0), ..., G(x_n))^M.$$

$\phi \wedge \pi:$
Podle definice 2.6 je

$$(\phi(x_0, ..., x_n \wedge \pi(x_0, ..., x_n))^A \leftrightarrow (\phi(x_0, ..., x_n)^A \wedge \pi(x_0, ..., x_n)^A).$$

Z indukčního předpokladu dostáváme

$$(\phi(x_0, ..., x_n)^A \wedge \pi(x_0, ..., x_n)^A) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\phi(G(x_0), ..., G(x_n))^M \wedge \pi(G(x_0), ..., G(x_n))^M),$$

což podle definice 2.6 je

$$(\phi(G(x_0), ..., G(x_n)) \wedge \pi(G(x_0), ..., G(x_n)))^M.$$

$\neg\phi$:

Podle definice 2.6 je

$$(\neg\phi(x_0, ..., x_n)^A \leftrightarrow (\neg\phi(x_0, ..., x_n)^A).$$

Z indukčního předpokladu dostáváme

$$(\neg\phi(x_0, ..., x_n)^A) \leftrightarrow (\neg\phi(G(x_0), ..., G(x_n))^M),$$

což podle definice 2.6 je

$$(\neg\phi(G(x_0), ..., G(x_n)))^M.$$

$(\exists u \in x)\phi(u, x, ...)$:

Podle definice 2.6 je

$$(\exists u(u \in x \wedge \varphi(x_0, ..., x_n)))^A \leftrightarrow ((\exists u \in A)(u \in x \wedge \varphi(x_0, ..., x_n))^A).$$

Z indukčního předpokladu a definice G

$$((\exists u \in A)(u \in x \wedge \varphi(x_0, ..., x_n))^A) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (((\exists G(u) \in M)(G(u) \in G(x) \wedge \varphi(G(x_0), ..., G(x_n)))^M).$$

$\square$

Věta 4.18 *Nechť* $\phi_0, ..., \phi_{n-1}$ *jsou sentence tak*

$$(\forall X \subset \mathbb{L})[X \textit{ je transitivní} \to \exists M[X \subset M \wedge \textstyle\bigwedge_{i<n}({\phi_i}^M \leftrightarrow {\phi_i}^{\mathbb{L}}) \wedge$$
$$\wedge M \textit{ je transitivní} \wedge |M| \leq max(\omega, |X|)]]$$

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti nechť ϕ_{n-1} je *axiom extenzionality.*

V $\mathbb{L}$ platí axiom extenzionality, takže podle věty 4.16 máme A pro které platí

$$\bigwedge_{i<n}({\phi_i}^A \leftrightarrow {\phi_i}^{\mathbb{L}}).$$

V A platí *axiom extenzionality.*
Máme tedy $A, \in$ tak, že $\in$ je extenzionální, úzká, fundovaná relace na A.
Podle věty 4.15 máme M, které je transitivní.
Z bijekce G pro M platí

$$|M| = |A|.$$

Z toho tedy

$$|M| \leq max(\omega, |X|).$$

Z lemma 4.17 dostaneme

$$\bigwedge_{i<n} ({\phi_i}^M \leftrightarrow {\phi_i}^{\mathbb{L}}).$$

Nakonec si dokažme $X \subset M$:
Mějme pro libovolné $x \in X$

$$G(x) = \{G(y) : y \in X \wedge y \in x\},$$

z transitivity X dostaneme, že pro každé $y \in x$ platí

$$y \in X.$$

To nám dává, že pro libovolné $x \in X$ můžem $G(x)$ definovat ekvivalentně jako

$$G(x) = \{G(y) : y \in x\}.$$

Z čehož $\in$-indukcí přes x plyne, že pro každé $x \in X$ platí

$$G(x) = x.$$

Z definice M tedy dostaneme

$$x \in M.$$

□

Lemma 4.19
Pro libovolné α platí

$$(\forall \beta \leq \alpha)(L_\beta \subset L_\alpha).$$

Důkaz.
Indukcí podle α:

$\alpha = \emptyset$
Jediná možnost zde je, že β může jen $\emptyset$, protože pak máme

$$L_\emptyset \subset L_\emptyset,$$

což je splněno triviálně.

$\alpha = \gamma + 1$

Nechť lemma platí pro všechna $\beta \leq \gamma$.
Z lemma 3.3 pro L_γ víme že L_γ je transitivní.
Použijeme lemma 2.15 a dostaneme

$$L_\gamma \subset L_\alpha.$$

Pro $\beta < \gamma$ máme

$$L_\beta \subset L_\alpha$$

z tranzitivity podmnožin.

α je limitní ordinál

Plyne přímo z definice L_α.

□

Věta 4.20

$$V = \mathbb{L} \rightarrow ((\forall \alpha \in On)((\alpha \geq \omega) \rightarrow P(L_\alpha) \subset L_{\alpha^+})$$

Důkaz.
Nechť ς je konečná konjunkce axiomů z věty 4.13, pak vezměme formuli $\chi \leftrightarrow \varsigma \wedge V = \mathbb{L}$.
Nechť tedy platí $V = \mathbb{L}$ a nechť mějme nějaké x tak, že

$$x \in P(L_\alpha).$$

Položme

$$X = L_\alpha \cup \{x\}.$$

Z lemma 4.11 a pravidel kardinalní aritmetiky dostaneme

$$|X| = |\alpha|.$$

Z věty 4.5 víme, že platí axiom výběru.
Pak podle věty 4.18 dostaneme transitivní M, v kterém platí χ^M.
Podle věty 4.13 dostaneme, že

$$M = L_{o(M)}.$$

Z věty 4.18 dále víme, že

$$|M| = |\alpha|.$$

Z toho dostáváme, že

$$|o(M)| < |\alpha^+|,$$

jinak by $o(M)$ bylo v rozporu s lemma 4.11.
Podle lemma 4.19 dostáváme

$$L_{o(M)} \subset L_{\alpha^+}.$$

Z věty 4.18 dále víme, že

$$X \subset M.$$

Což nám dohromady dá

$$x \in L_{\alpha^+}.$$

Tím jsme dokázali

$$P(L_\alpha) \subset L_{a^+}.$$

□

Věta 4.21

$$V = \mathbb{L} \to (\forall \alpha \geq \omega(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha^+}))$$

Důkaz.
Nechť platí $V = \mathbb{L}$ a mějme dané $\kappa \geq \omega$.
Podle věty 4.20

$$P(L_\kappa) \subset L_{\kappa^+}.$$

Z monotonie potence množin a z

$$\kappa \subset L_\kappa,$$

což jsme dokázali v průběhu důkazu 3.18, dostaneme

$$P(\kappa) \subset P(L_\kappa).$$

Z transitivity podmnožin dostaneme

$$P(\kappa) \subset L_\kappa^+.$$

Podle toho existuje f, takže

$$f : P(\kappa) \to L_\kappa^+,$$

$$f(x) = x.$$

Funkce f je prostá Z toho tedy použitím definice 4.6 dostaneme

$$2^\kappa \leq \kappa^+.$$

Druhá nerovnost je důsledek Cantorovy věty. A tedy dostáváme

$$2^\kappa = \kappa^+.$$

□

Reference

[Ku] K.Kuhnen, *Set theory: An introduction to independence proofs* North Holland, Elsevier, 1980.

[Je] T. Jech, *Set theory*, Springer, 2003.

[BaS] B. Balcar a P. Štěpánek, *Teorie množin*, Academia, 2000.