UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

# Způsob výuky kombinatoriky na střední škole a jeho vliv na řešitelské strategie žáků

Diplomová práce

AUTOR PRÁCE: Pavlína Strnadová

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Obor: Učitelství VVP pro ZŠ a SŠ – matematika

VEDOUCÍ PRÁCE: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Praha 2014

CHARLES UNIVERSITY IN PRAGUE

FACULTY OF EDUCATION

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND
MATHEMATICAL EDUCATION

# Ways of Teaching Combinatorics at the Secondary School and their Influence on Pupils' Solving Strategies

Diploma Work

AUTHOR: Pavlína Strnadová

Study programme: Secondary school teacher education

Branch of study: Teaching degree for lower and upper secondary schools – mathematics

SUPERVISOR: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Prague 2014

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala pod vedením vedoucího diplomové práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Byla jsem seznámena s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Příbrami dne 4.12.2014

Pavlína Strnadová

Poděkování:

Děkuji paní docentce Nadě Vondrové za vedení a obrovskou podporu, kterou mi poskytla při psaní diplomové práce. Dále děkuji všem učitelům matematiky, kteří mi poskytli rozhovor a umožnili náslech ve své výuce. Také děkuji celé své rodině za trpělivost a pochopení, které mi pomáhaly během psaní této práce.

**NÁZEV:** Způsob výuky kombinatoriky na střední škole a jeho vliv na řešitelské strategie žáků

**AUTOR:** Pavlína Strnadová

**KATEDRA:** Katedra matematiky a didaktiky matematiky

**VEDOUCÍ PRÁCE:** doc. RNDr. Vondrová Naďa, Ph.D.


**ABSTRAKT:**

Diplomová práce se zabývá způsoby výuky kombinatoriky na střední škole. Konkrétně jsem analyzovala vybrané učebnice středních škol z hlediska zavedení pojmů a operací kombinatoriky a z hlediska typů použitých úloh. Dále jsem na základě rozhovorů s šesti učiteli matematiky střední školy a náslechů na jejich hodinách popsala jejich způsob výuky kombinatoriky. Pomocí testu pro žáky dotazovaných učitelů jsem zjišťovala, zda a jak jsou řešitelské strategie a chyby žáků pravděpodobně ovlivněny přístupem jejich učitelů k výuce kombinatoriky. Nakonec jsem porovnala své výsledky s existujícími výsledky didakticko-matematických výzkumů, které se týkají kombinatorického uvažování žáků.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol, přičemž první tři jsou teoretické (RVP a ŠVP pro vybrané školy a jejich studijní obory, analýza učebnic kombinatoriky pro střední školy z hlediska způsobů zavádění kombinatorických pojmů a operací, vybrané výzkumy týkající se řešitelských strategií žáků a jejich chyb u kombinatorických úloh, způsobů kontroly správnosti u těchto úloh a vlivu způsobu výuky kombinatoriky na výkony žáků). Vlastní výzkum, který je popsán ve čtvrté kapitole, se skládá z rozhovorů s učiteli, náslechů na hodinách kombinatoriky, rozboru a vyhodnocení diagnostického testu jejich žáků.

Ukázalo se, že žáci dělají několik druhů chyb a vzhledem k tomu, že neprovádí u kombinatorických úloh zkoušku, tak je ani neodhalí. Z výzkumu dále vyplynulo, že pokud učitelka předkládá žákům vzorce příliš brzy, hned na začátku probírání látky, tak se je žáci snaží stále používat. Oproti tomu, pokud žákům nejprve předloží dostatek úloh na dané téma a snaží se je s nimi vyřešit bez vzorce a teprve poté žákům vzorec předloží, tak žáci nutně k řešení úloh vzorce nepoužívají a úlohy řeší úvahou a jsou i úspěšnější.



**KLÍČOVÁ SLOVA:** Výuka kombinatoriky, učebnice matematiky pro SŠ, strategie řešení kombinatorických úloh

**TITLE:** Ways of Teaching Combinatorics at the Secondary School and their Influence on Pupils' Solving Strategies

**AUTHOR:** Pavlína Strnadová

**DEPARTMENT:** The Department of Mathematics and Mathematical Education

**SUPERVISOR:** doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

**ABSTRACT:**

The diploma thesis deals with ways of teaching combinatorics at a secondary school. Specifically, I analyzed selected mathematics textbooks for secondary schools in terms of introducing concepts and operations of combinatorics and in terms of types of tasks used. I carried out interviews with six secondary school mathematics teachers and observations of their lessons in order to describe their method of teaching combinatorics. Using results of tests written by these teachers' pupils, I examined whether and how their solving strategies and errors might be influenced by their teachers' approach to teaching combinatorics. Finally, I compared my results with the existing results of mathematics education research on pupils' combinatorial reasoning.

The work is divided into four chapters; the first three are theoretical (curricular documents for selected schools, analysis of textbooks on combinatorics in terms of the implementation of combinatorial concepts and operations, selected research about pupils' solving strategies and errors for combinatorial problems, methods of checking the correctness of their solutions. and the impact of ways of teaching combinatorics on pupils' performance). Chapter 4 focuses on my own research which consists of interviews with teachers, observations of lessons on combinatorics, the analysis and evaluation of the diagnostic test for the interviewed teachers' pupils.

It turned out that pupils make several types of errors which they do not find as they do not check the correctness of their results. The research also showed that if the teacher presents pupils with the formula too soon, at the beginning of the subject matter, the pupils try to use them for all problems. However, if the pupils are first presented with a sufficient number of tasks on the topic and asked to solve them without formulas and only then they learn about formulas, they try to solve the problems in the test without the formulas first and are more successful.

**KEYWORDS:** Teaching of combinatorics, secondary school mathematics, solving strategy for combinatorial problems

# Obsah

# Úvod

Při studiu na střední škole jsem se s kombinatorikou setkala ve 3. ročníku a velice mě zaujala, především začátek, kdy jsme probírali kombinatorická pravidla a variace. Úvod naší paní učitelky byl pro mě velice motivující, začínala jednoduchými úlohami[1], které jsme si mohli představit.

Poté, co jsem sama učila na střední škole kombinatoriku, jsem si po diskuzích s kolegy uvědomila, že vlastně každý má k výuce kombinatoriky jiný přístup. Proto jsem se rozhodla zjistit více o tom, jak moji kolegové kombinatoriku učí a jak se jejich přístup odráží ve způsobech, jakým jejich žáci řeší kombinatorické úlohy a jak je chápou. Tedy stanovila jsem si tyto cíle:

1. Analyzovat vybrané učebnice středních škol z hlediska zavedení pojmů a operací kombinatoriky a z hlediska typů použitých úloh.
2. Na základě rozhovorů s několika učiteli matematiky střední školy (a případně náslechů na jejich hodinách) popsat jejich způsob výuky kombinatoriky.
3. Na základě testu pro žáky dotazovaných učitelů zjistit, zda a jak jsou řešitelské strategie a chyby žáků ovlivněny přístupem jejich učitelů k výuce kombinatoriky.
4. Porovnat své výsledky s existujícími výsledky didakticko-matematických výzkumů, které se týkají kombinatorického uvažování žáků.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole uvádím, jak je kombinatorika zahrnuta v rámcových a školních vzdělávacích programech pro střední školy[2]. Ve 2. kapitole jsou shrnuty některé definice a věty týkající se kombinatoriky a analyzovány některé učebnice, podle kterých se učí nebo učila kombinatorika na středních školách. Zajímalo mě, jak jsou v nich jednotlivé části kombinatoriky vysvětleny a jaké jsou při tom použity úlohy. V další, tj. 3. kapitole je zmíněno několik didaktických výzkumů, které se týkají výuky kombinatoriky (konkrétně toho, jak žáci řeší kombinatorické úlohy, jakých chyb se dopouštějí a zda si svá řešení nějak kontrolují, a dále rozdílu ve výsledcích žáků, kteří se učí kombinatoriku standardním způsobem, a žáků, kteří kombinatoriku probírají s pomocí interaktivní tabule). Poslední, 4. kapitola je věnována vlastnímu výzkumu. Formou rozhovoru s 6 učiteli jsem zjistila základní

[1] Např. Mám v šatníku troje kalhoty a 4 trička. Kolika způsoby se mohu obléknout?

[2] Pouze pro studijní obory, ve kterých učí učitelé, s nimiž jsem dělala rozhovor.

charakteristiky jejich přístupů k výuce kombinatoriky. Ve druhé části výzkumu jsem zadala žákům dvou z dotazovaných učitelů test[3], v němž řešili kombinatorické úlohy. Sledovala jsem, zda se v jejich způsobech řešení nějak projeví vliv způsobu výuky kombinatoriky.

V závěru jsou shrnuty nejdůležitější poznatky, k nimž jsem vlastním zkoumáním dospěla, a navrženy možné směry pokračování. Práce je ukončena seznamem literatury.

[3] Jedná se pouze o dva učitele, protože ve školním roce, kdy jsem výzkum dělala, kombinatoriku učili pouze dva učitelé, resp. učitelky.

# 1 Kombinatorika v pedagogických dokumentech

V této kapitole uvedu, jak je kombinatorika zahrnuta v rámcových vzdělávacích programech (RVP) pro střední odborné školy a ve školních vzdělávacích programech (ŠVP) jednotlivých středních škol, kde jsem provedla vlastní výzkum. RVP i ŠVP uvedu pouze pro ty studijní obory, které jsou na školách, kde jsem dělala výzkum (viz kapitola 4).

## 1.1 Kombinatorika v rámcových vzdělávacích programech

### 1.1.1 RVP pro studijní obory dle RVP (23-41-M/01 Strojírenství, 26-41-M/01 Elektrotechnika, 36-47-M/01 Stavebnictví, 63-41-M/02 Obchodní akademie, 65-42-M/01 Hotelnictví, 65-42-M/02 Cestovní ruch, 66-41-L/01 Obchodník, 78-42-M/02 Ekonomické lyceum)

V RVP pro studijní obory uvedené v názvu oddílu jsou uvedeny následující požadavky na cíle a výsledky matematického vzdělávání.

> Matematické vzdělávání má v odborném školství funkci všeobecně vzdělávací a průpravnou pro odbornou složku vzdělávání.
>
> Všeobecným cílem výuky matematiky je výchova přemýšlivého člověka, který bude umět matematiku používat v různých životních situacích (v odborné složce vzdělávání, v dalším studiu, v osobním životě, budoucím zaměstnání, volném čase apod.).
>
> Níže uvedené výsledky vzdělávání a učivo je minimum, co se žáci daného stupně vzdělání musí v matematice naučit. V oborech se zvýšenými nároky na výuku matematiky musí škola ve svém školním vzdělávacím programu rozšířit obsah zejména o:
>
> − operace s komplexními čísly a řešení kvadratických rovnic v množině C;
> − řešení aplikačních úloh s využitím funkcí, posloupností a trigonometrie;
> − analytickou geometrii kuželoseček.
>
> Vzdělávání směřuje k tomu, aby žáci dovedli:
>
> − využívat matematických vědomostí a dovedností v praktickém životě: při řešení běžných situací vyžadujících efektivní způsoby výpočtu a poznatků o geometrických útvarech;
> − aplikovat matematické poznatky a postupy v odborné složce vzdělávání;

- matematizovat reálné situace, pracovat s matematickým modelem a vyhodnotit výsledek řešení vzhledem k realitě;
- zkoumat a řešit problémy včetně diskuse výsledků jejich řešení;
- číst s porozuměním matematický text, vyhodnotit informace získané z různých zdrojů (grafů, diagramů, tabulek a internetu), přesně se matematicky vyjadřovat;
- používat pomůcky: odbornou literaturu, internet, PC, kalkulátor, rýsovací potřeby.

V afektivní oblasti směřuje matematické vzdělávání k tomu, aby žáci získali:

- pozitivní postoj k matematice a zájem o ni a její aplikace;
- motivaci k celoživotnímu vzdělávání;
- důvěru ve vlastní schopnosti a preciznost při práci.

V tabulce 1 uvedu výsledky vzdělávání žáků a učivo kombinatoriky pro studijní obory.

Tabulka 1: Výsledky vzdělávání a učivo pro studijní obory viz výše

| Výsledky vzdělávání | Učivo |
|---|---|
| − užívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování;<br>− počítá s faktoriály a kombinačními čísly;<br>− určí pravděpodobnost náhodného jevu kombinatorickým postupem;<br>− užívá pojmy: statistický soubor, absolutní a relativní četnost, variační rozpětí;<br>− čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji. | 7 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika v praktických úlohách<br>− variace, permutace a kombinace bez opakování<br>− náhodný jev a jeho pravděpodobnost, nezávislost jevů<br>− základy statistiky |

### 1.1.2 RVP pro nástavbové obory dle RVP (64-41-L/51 Podnikání)

V RVP pro nástavbové obory je uvedeno, že cílem „výuky matematiky je výchova člověka, který bude umět používat matematiku v různých životních situacích“. Výsledky vzdělávání a učivo uvedené v RVP je minimum, co se musí žáci daného stupně vzdělání naučit a navazují na obsah a výsledky vzdělávání stanovené RVP pro tříleté obory vzdělání s výučním listem.

V oborech se zvýšenými nároky na výuku matematiky musí škola ve svém školním vzdělávacím programu rozšířit obsah matematiky podle potřeb vyučovaných oborů. V tabulce 2 jsou uvedeny výsledky vzdělávání žáků a učivo kombinatoriky pro nástavbové studium.

Tabulka 2: Výsledky vzdělávání a učivo pro obor podnikání

| Výsledky vzdělávání | Učivo |
|---|---|
| − využívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování<br>− určí pravděpodobnost náhodného jevu kombinatorickým postupem;<br>− čte, vyhodnotí a sestaví tabulky, diagramy a grafy se statistickými údaji. | 4 Práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost |

## 1.2 Kombinatorika ve školních vzdělávacích programech

V tomto oddíle budou stručně popsány školní vzdělávací programy škol, z nichž pocházeli žáci účastnící se mého výzkumu. Zvolila jsem 3 střední odborné školy v jednom středočeském městě.

### 1.2.1 Střední průmyslová škola

Střední průmyslová škola má 3 studijní obory: ŠVP[4]: 23-41-M/01 Strojírenství, 26-41-M/01 Elektrotechnika, 36-47-M/01 Stavebnictví.

Žáci *oborů strojírenství, elektrotechnika a stavebnictví* mají ve studijním plánu matematiku jako samostatný předmět v 1.–4. ročníku v celkovém rozsahu 448 hodin. Dále si mohou ve 4. ročníku studia zvolit jako volitelný předmět seminář z matematiky, jehož cílem je další rozvíjení matematických znalostí a dovedností studentů a příprava na maturitní zkoušku či přijímací zkoušky na vysokou školu.

Tematický celek kombinatorika je zahrnut na začátku 4. ročníku studia v rozsahu 20 hodin v rámci předmětu matematika. Dále je také probírán v semináři z matematiky. V ŠVP je uvedeno:

Obsah vzdělávání:

- variace, permutace a kombinace bez opakování
- faktoriál, kombinační číslo

Výsledky vzdělávání a kompetence: Žák

- rozliší variace, permutace a kombinace
- matematizuje reálné situace
- upravuje a řeší výrazy a rovnice s faktoriály a s kombinačními čísly

### 1.2.2 Obchodní akademie

Obchodní akademie má 2 studijní obory: ŠVP: 63-41-M/02 Obchodní akademie, 78-42M/02 Ekonomické lyceum.

Žáci *oboru obchodní akademie* mají ve studijním plánu matematiku jako samostatný předmět v 1.–3. ročníku v celkovém rozsahu 340 hodin. Dále si mohou ve 4. ročníku studia zvolit jako volitelný předmět seminář z matematiky a praktikum z matematiky, jehož cílem je další rozvíjení

[4] Neuvádím odkazy na příslušné ŠVP, aby nedošlo k identifikaci dotazovaných učitelů.

matematických znalostí a dovedností studentů a příprava na maturitní zkoušku či přijímací zkoušky na vysokou školu.

Tematický celek kombinatorika, pravděpodobnost je zahrnut na začátku 3. ročníku studia v rozsahu 38 hodin v rámci předmětu matematika. Dále je také probírán v semináři z matematiky a v praktiku z matematiky na konci 4. ročníku v celkovém rozsahu 10 hodin. V ŠVP je uvedeno:

Obsah vzdělávání:

- variace, permutace a kombinace
- faktoriál
- vlastnosti kombinačních čísel, Pascalův trojúhelník
- binomická věta

Výsledky vzdělávání a kompetence: Žák

- užívá základní kombinatorická pravidla
- rozpoznává kombinatorické skupiny (variace, permutace a kombinace)
- určuje počet variací, kombinací a permutací
- užívá je v reálných situacích
- počítá s faktoriály a kombinačními čísly
- využívá vlastnosti kombinačních čísel (Pascalův trojúhelník)
- používá binomickou větu při řešení úloh

Žáci *oboru ekonomické lyceum* mají ve studijním plánu matematiku jako samostatný předmět v 1.–4. ročníku v celkovém rozsahu 460 hodin. Dále si mohou ve 4. ročníku studia zvolit jako volitelný předmět seminář z matematiky a praktikum z matematiky, jehož cílem je další rozvíjení matematických znalostí a dovedností studentů a příprava na maturitní zkoušku či přijímací zkoušky na vysokou školu.

Tematický celek kombinatorika, pravděpodobnost, statistika je zařazen na druhé pololetí 3. ročníku studia v rozsahu 31 hodin v rámci předmětu matematika. Dále je také probírán v semináři z matematiky a v praktiku z matematiky na konci 4. ročníku v celkovém rozsahu 10 hodin. ŠVP obsahuje:

Obsah vzdělávání:

- variace, permutace a kombinace
- faktoriál, kombinační číslo – výpočty
- binomická věta

Výsledky vzdělávání a kompetence: Žák

- užívá základní kombinatorická pravidla
- rozpozná kombinatorické skupiny (variace, permutace, kombinace bez opakování)
- určuje počet variací, kombinací a permutací
- užívá vztahy pro počet variací, kombinací a permutací
- počítá s faktoriály a kombinačními čísly
- používá binomickou větu

### 1.2.3 Integrovaná střední škola hotelového provozu, obchodu a služeb

ISŠ HPOS má tři čtyřleté studijní obory: ŠVP: 65-42-M/01 Hotelnictví, 65-42-M/02 Cestovní ruch, 66-41-L/01 Obchodník a dále dvouletý studijní obor: 64-41-L/51 Podnikání, jedná se tzv. o nástavbu po vyučení žáka.

Žáci *oborů hotelnictví, cestovní ruch a obchodník* mají ve studijním plánu matematiku jako samostatný předmět v 1.–4. ročníku v celkovém rozsahu 256 hodin. Dále si mohou ve 4. ročníku studia zvolit jako volitelný předmět seminář a cvičení z matematiky, jehož cílem je, aby si žáci zopakovali, upevnili a prohloubili dříve získané matematické znalosti a dovednosti.

Tematický celek kombinatorika, pravděpodobnost a statistika v praktických úlohách je zahrnut na konci 4. ročníku studia v rámci předmětu matematika. V ŠVP je uvedeno:

Obsah vzdělávání:

- variace, permutace a kombinace bez opakování

Výsledky vzdělávání a kompetence: Žák

- užívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování
- počítá s faktoriály a kombinačními čísly

Žáci *oboru podnikání* mají ve studijním plánu matematiku jako samostatný předmět v 1.–2. ročníku v celkovém rozsahu 128 hodin. Dále si mohou ve 2. ročníku studia zvolit jako volitelný předmět seminář a cvičení z matematiky, jehož cílem je, aby si studenti zopakovali, upevnili a prohloubili dříve získané matematické znalosti a dovednosti.

Tematický celek práce s daty, kombinatorika a pravděpodobnost je zahrnut na konci 2. ročníku studia v rámci předmětu matematika. V ŠVP je uvedeno:

Výsledky vzdělávání a kompetence: Žák

- využívá vztahy pro počet variací, permutací a kombinací bez opakování

# 2 Kombinatorika v učebnicích

V této kapitole bude nejprve uveden přehled vět (bez důkazů) a definic týkajících se kombinatoriky a poté přehled učebnic pro střední školy. Z každé učebnice vyberu[5] několik zajímavých úloh.

## 2.1 Definice a věty

V1. Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků, a jsou-li každé dvě z těchto množin disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$), pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ je roven $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

V2. Počet všech uspořádaných $k$-tic, jejichž první člen lze vybrat $n_1$ způsoby, druhý člen po výběru prvního členu $n_2$ způsoby atd. až $k$-tý člen po výběru všech předcházejících členů $n_k$ způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

D1. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

D2. $0! = 1$

D3. $k$-členná variace z $n$ prvků je uspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

V3. Počet $V(k,n)$ všech $k$-členných variací z $n$ prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

D4. Permutace z $n$ prvků je každá $n$-členná variace z těchto prvků neboli každá uspořádaná $n$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

V4. Počet $P(n)$ všech permutací z $n$ prvků je

$$P(n) = V(n,n) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

D5. $k$-členná variace s opakováním z $n$ prvků je uspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše $k$-krát.

V5. Počet $V'(k,n)$ všech $k$-členných variací s opakováním z $n$ prvků je $V'(k,n) = n^k$.

D6. Permutace s opakováním z $n$ prvků je každá uspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

---

[5] Úlohy vyberu takové, které jsou buď pouze v dané učebnici, nebo mají zajímavý kontext nebo se mi zdají obtížnější než ostatní úlohy v učebnici. V hranatých závorkách bude zapsán výsledek úloh.

V6. Počet $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutací s opakováním z $n$ prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots, k_n$-krát, je $P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$.

D7. $k$-členná kombinace z $n$ prvků je neuspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

D8. $k$-členná kombinace z $n$ prvků je $k$-prvková podmnožina množiny těmito $n$ prvky určené.

V7. Počet $K(k,n)$ všech $k$-členných kombinací z $n$ prvků je

$$K(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

D9. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$, je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

V8. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{0}{0} = 1$.

V9. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n$, platí $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

V10. Pro každé $n, k \in \mathbb{N}_0, k < n$, platí $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

V11. Pascalův trojúhelník

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

V12. Pro všechna čísla $a, b$ a každé přirozené číslo $n$ platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

D10. $k$-členná kombinace s opakováním z $n$ prvků je neuspořádaná $k$-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše $k$-krát.

V13. Počet $K'(k,n)$ všech $k$-členných kombinací s opakováním z $n$ prvků je

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

V následujícím oddíle bude uveden rozbor učebnic pro střední školy. Učebnice jsem zvolila jak současné, tak i starší, jedna učebnice je elektronická, ostatní tištěné. Dále jsem chtěla ukázat rozdíl mezi učebnicemi určenými pro gymnázia a učebnicemi pro střední odborné školy. Popíši, jak je v učebnicích kombinatorika vysvětlena, přičemž uvedu několik ilustrativních příkladů a úloh s komentářem. Některá zadání jsem pro úsporu místa zkrátila (tak, aby nedošlo ke změně významu). U vybraných úloh uvádím v hranatých závorkách i výsledky.

Terminologická poznámka: Dále v textu používám termíny příklad a úloha. Termín příklad je určen pro označení úloh, které jsou v učebnici řešeny, pro ostatní úlohy je určen termín úloha.

## 2.2 Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika (autoři Emil Calda, Václav Dupač, nakladatelství Prometheus, rok vydání 2009)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Úvod, 2. Základní kombinatorická pravidla, 3. Variace, 4. Permutace, 5. Kombinace, 6. Shrnutí I, 7. Úlohy k opakování, 8. Variace s opakováním, 9. Permutace s opakováním, 10. Kombinace s opakováním, 11. Shrnutí II, 12. Úlohy k opakování, 13. Vlastnosti kombinačních čísel, 14. Binomická věta, 15. Shrnutí III, 16. Úlohy k opakování

### 2.2.1 O učebnici

Kapitoly začínají krátkým úvodem, kde je popsáno, čeho se týkají. Dále je uvedena definice konkrétního pojmu a následuje odvození vzorce pro výpočet.

Např. kombinatorická pravidla jsou ukázána na konkrétním příkladu.

Příklad
Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
Řešení
1. způsob. Na místě desítek může stát libovolná z devíti číslic $1, 2, \cdots, 9$, neboť zde nesmí být číslice 0. Ke každé z těchto devíti možností pro výběr číslice na místě

desítek existuje devět možností, jak vybrat číslici pro místo jednotek: může zde totiž být číslice 0 a jakákoli z osmi číslic, která je různá od číslice stojící na místě desítek. Počet uvažovaných dvojciferných čísel je tedy $9 \cdot 9 = 81$.

2. způsob. Všechna přirozená dvojciferná čísla lze rozložit do dvou disjunktních skupin tak, že v první jsou dvojciferná čísla s různými a ve druhé dvojciferná čísla s týmiž číslicemi. Je zřejmé, že všech dvojciferných čísel je $90$ a dvojciferných s týmiž číslicemi $9$; označíme-li $p$ hledaný počet dvojciferných čísel s různými číslicemi, platí $p + 9 = 90$. Odtud dostáváme, že je $p = 81$. (Calda, Dupač, 2009, s. 8)

Jinde je odvození uděláno zobecněním konkrétního příkladu (kap. 5, 9, 10 učebnice).

Máme určit počet všech permutací s opakováním z $n$ prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1$-krát, $k_2$-krát, …, $k_n$-krát; značení $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$. Vzorec odvodíme z konkrétního příkladu.

Příklad

Mějme pět různých prvků $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$, utvořme z nich všech 5! permutací a zkoumejme, kolik z těchto permutací se ztotožní, jestliže u všech pěti prvků odstraníme indexy, tj. položíme $a_1 = a_2 = a, b_1 = b_2 = b_3 = b$. Které permutace z prvků $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ se po odstranění indexů ztotožní např. s permutací $(b, a, b, b, a)$? Zřejmě to budou permutace: $(b_1, a_1, b_2, b_3, a_2), (b_1, a_2, b_2, b_3, a_1)$,

$(b_1, a_1, b_3, b_2, a_2), (b_1, a_2, b_3, b_2, a_1)$,

$(b_2, a_1, b_1, b_3, a_2), (b_2, a_2, b_1, b_3, a_1)$,

$(b_2, a_1, b_3, b_1, a_2), (b_2, a_2, b_3, b_1, a_1)$,

$(b_3, a_1, b_1, b_2, a_2), (b_3, a_2, b_1, b_2, a_1)$,

$(b_3, a_1, b_2, b_1, a_2), (b_3, a_2, b_2, b_1, a_1)$.

Je vidět, že to jsou právě ty permutace, v nichž jsou prvky $a_1, a_2$ na místech druhém a pátém a prvky $b_1, b_2, b_3$ na pístech prvním, třetím a čtvrtém. Pro umístění na těchto místech však máme pro prvky $a_1, a_2$ právě 2! a pro prvky $b_1, b_2, b_3$ právě 3! možností, takže – v souladu s uvedeným výčtem – splyne s permutací $(b, a, b, b, a)$ celkem $2! \cdot 3! = 12$ původních permutací z pěti prvků $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$. Tímto způsobem se všech 5! permutací z daných pěti prvků $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$ rozloží do takových tříd, že v každé budou právě ty permutace, které se po odstranění indexů u daných prvků ztotožní. A protože každá tato třída odpovídá jediné permutaci s opakováním ze dvou prvků $a$ a tří prvků $b$, a protože má $2! \cdot 3!$ členů, platí pro jejich počet $P'(2,3)$: $P'(2,3) = \frac{5!}{2!3!}$, neboli $P'(2,3) = \frac{(2+3)!}{2!3!}$. (Calda, Dupač, 2009, s. 41)

Např. pro variace je ukázáno obecné odvození.

Příklad
Máme určit počet všech $k$-členných variací z $n$ prvků; značení $V(k,n)$.
Je tedy dáno $n$ navzájem různých prvků a přirozené číslo $k$, $k \leq n$. Schematické znázornění, jak vybrat jednotlivé členy:

| Uspořádaná $k$-tice | 1. člen | 2. člen | … | $(k-1)$-ní člen | $k$-tý člen |
|---|---|---|---|---|---|
| Možnosti výběru z $n$ prvků | $n$ | $n-1$ | … | $n-(k-2)$ | $n-(k-1)$ |

Podle kombinatorického pravidla součinu (viz V2, oddíl 2.1) je počet všech těchto uspořádaných $k$-tic roven součinu
$n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(k-1)\big) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, což je výsledek. (Calda, Dupač, 2009, s. 13)

Věty o kombinačních číslech jsou dokázány až po uvedení dané věty. Po teorii je uvedeno několik příkladů a úloh.

Podle mého názoru je tato učebnice jedna z hodně používaných učebnic matematiky na gymnáziích. Myslím, že pro studenty gymnázií je látka vysvětlena dostatečně a i příkladů a úloh je zde dost vzhledem k tomu, že jsou zde i kapitoly (kap. 7, 12, 16), které obsahují pouze úlohy.

### 2.2.2 Vybrané úlohy

1. Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin. V kolika z nich se vyskytuje daný předmět a v kolika z nich je tento předmět zařazen na 1. vyučovací hodinu? [$V(6,12) = 665\,280$, s daným předmětem $6 \cdot V(5,11) = 332\,640$, s daným předmětem v 1. hodině $V(5,11) = 55\,440$] (s. 16)
2. Dokažte, že pro počet $k$-členných variací z $n$ prvků platí $V(k,n) = nV(k-1,n-1)$. [$nV(k-1,n-1) = n\big[(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\big(n-1-(k-1-1)\big)\big] = n[(n-1)(n-$ $-2)(n-3)\cdots(n-k+1)] = V(k,n)$] (s. 16)
3. Určete, kolika způsoby může $m$ chlapců a $n$ dívek nastoupit do zástupu tak, aby
   a) nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci; [$n!\,m!$]

b) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec; $[2n!\,m!]$

c) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka. $[(n+1)!\,m!]$ (s. 23)

4. Vyjádřete kombinačními čísly, kolika způsoby může $m$ chlapců a $n$ dívek utvořit taneční pár. $[\binom{m+n}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2}]$ (s. 32)
5. Určete počet průsečíků všech úhlopříček konvexního $n$-úhelníku, nemají-li žádné tři společný vnitřní bod. $[\binom{n}{4}]$ (s. 34)
6. Určete, kolika způsoby se kolem kulatého stolu může posadit pět mužů a pět žen tak, aby žádné dvě ženy neseděly vedle sebe. $[2 \cdot 5!\,5! = 28\,800]$ (s. 34)
7. Jméno a příjmení každého obyvatele městečka s 1 500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokažte, že aspoň dva obyvatelé městečka mají stejné iniciály. [počet možných iniciál je $V'(2, 32) = 1\,024$] (s. 40)
8. Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly. $[4! \cdot \frac{3!}{2!}]$ (s. 46)
9. Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7. $[K'(3,4) = \binom{6}{3} = 20]$ (s. 51)

## 2.3 Kombinatorika pro 2. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku (autor Antonín Vrba, nakladatelství SPN, rok vydání 1978)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Pořadí, variace a kombinace, 2. Faktoriály a kombinační čísla, 3. Binomická věta, 4. Variace s opakováním, kombinace s opakováním a pořadí s opakováním, 5. Řešení kombinatorických úloh, 6. Zobrazení konečných množin, 7. Výsledky cvičení

### 2.3.1 O učebnici

Kapitoly 1, 4, 5 začínají konkrétním příkladem, který je zobecněn a vyřešen. Na základě řešení je odvozen např. vzorec pro výpočet permutací.

Příklad

Do školní jídelny přišla skupina 35 žáků. Určete, kolika způsoby se mohli seřadit do fronty u výdeje obědů.

Jednotlivé způsoby se budou lišit pořadím, v němž žáci u okénka stojí. Máme tedy určit pořadí všech pořadí 35 žáků. Úlohu zformulujeme a vyřešíme obecně:

Určete počet všech pořadí prvků neprázdné konečné $k$-prvkové množiny $M$. Pořadím se zde míní uspořádaná $k$-tice navzájem různých prvků množiny $M$.

Hledaný počet označíme $P(k)$[6]. Počet $P(k)$ bude ovšem záviset jen na čísle $k$ a ne na dalších vlastnostech množiny $M$ a jejích prvků[7].

Je-li číslo $k$ malé, můžeme najít počet pořadí $P(k)$ tak, že systematicky sestavíme všechna pořadí a pak spočítáme, kolik jich je. (…)

Obecně pro každé přirozené číslo $n$ platí, že $P(n+1) = (n+1)P(n)$. (…)

O vzorec $P(n+1) = (n+1)P(n)$ se budeme opírat při důkazu věty (viz V4). (…)

Podle $P(n+1) = (n+1)P(n)$ je pak $P(n+1) = (n+1)P(n) = (n+1)n(n-$ $-1 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ a vzorec tedy platí i pro číslo $n+1$, čímž je důkaz hotov.

(…) Počet různých front, které mohli žáci v jídelně utvořit, činí

$P(35) = 35 \cdot 34 \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$. (Vrba, 1978, s. 3)

V kapitole 2 jsou uvedeny potřebné matematické symboly (faktoriál, kombinační číslo) pro jednodušší a přehlednější zápis. Věty o vlastnostech kombinačních čísel jsou zde dokázány vždy po uvedení příslušné věty. Ve 3. kapitole je na základě znalostí předchozího učiva sepsána binomická věta a poté i dokázána. Po teorii následují cvičení, kde se vyskytují i úlohy, ve kterých se prokáže, zda žáci látku pochopili, či nikoli (jedná se o úlohy, ve kterých musí žáci vysvětlovat, zdůvodňovat).

Tuto učebnici uvádím pro zajímavost, jedná se o učebnici, která je již několik desítek let stará. Kladně hodnotím zpracování jednotlivých kapitol (hlavně kap. 1, 4, 5), protože je v nich pěkně rozepsán postup řešení ukázkových příkladů. Těchto příkladů je však málo. Myslím, že schopnější žák by se podle této učebnice mohl kombinatoriku naučit sám. Bohužel se jedná o starou učebnici, takže graficky není příliš přehledná (např. není zvýrazněno, co je důležité a co méně důležité).

### 2.3.2 Vybrané úlohy

1. V Československu je souvislá železniční síť s 3 714 stanicemi. Zjistěte, kolik různých druhů jízdenek za obyčejné jízdné by musela nechat natisknout železniční správa, kdyby na každé

[6] V úloze bude $k = 35$ a $M$ skupina žáků, hledáme $P(35)$.

[7] Počet pořadí 35 žáků je stejný jako počet pořadí 35 parních lokomotiv či počet pořadí 35 bodů v rovině.

jízdence byly uvedeny dvě stanice: nejprve výchozí a pak cílová. $[V(2{,}3\,714) = 3\,714 \cdot 3\,713]$ (s. 8)

2. V rovině je dáno 7 bodů, z nichž žádnými třemi neprochází přímka a žádnými čtyřmi kružnice. Každými třemi z těchto bodů vedeme kružnici. Kolik kružnic dostaneme? $[K(3,7) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35]$ (s. 8)

## 2.4 Matematika pro 2. ročník gymnázií. Kombinatorika (autor Jozef Smida, nakladatelství SPN, rok vydání 1989)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Úvod, 2. Matematická indukce, 3. Počet prvků konečných množin, 4. Kombinatorické úlohy 1, 5. Variace s opakováním, 6. Variace bez opakování, 7. Pořadí (permutace), 8. Kombinace, 9. Kombinační čísla, 10. Kombinace s opakováním, 11. Kombinatorické úlohy 2, 12. Binomická věta, 13. Vyzkoušejte se, 14. Výsledky úloh

### 2.4.1 O učebnici

V kapitolách 4 a 11 jsou řešené příklady a na závěr kapitol je uvedeno několik úloh. Od 5. kapitoly je vždy uvedena definice pojmu, na kterou navazuje příklad či příklady, které jsou řešeny vypisováním všech možností (viz ilustrace dole).

> Příklad
>
> Je dána konečná množina $M = \{a, b, c\}$. Všechny dvojčlenné variace s opakováním ze tří prvků této množiny jsou:
>
> $$\begin{matrix} [a,a] & [b,a] & [c,a] \\ [a,b] & [b,b] & [c,b] \\ [a,c] & [b,c] & [c,c] \end{matrix}$$
>
> (…)
>
> Při řešení úloh není obvykle třeba hledat a vypisovat všechny $k$-členné variace s opakováním z $n$ prvků dané množiny, ale stačí zjistit jejich počet. V dalším budeme tento počet označovat $V'(k,n)$. (Smida, 1989, s. 36)

Dále v učebnici následuje vzorec pro výpočet a jeho důkaz (kap. 5, 6).

U kapitol 7, 8, 10 je připomenuta předešlá látka pomocí příkladů, které vedou na možnost řešení jiným pojmem např. $n$-členné variace bez opakování z $n$ prvků lze řešit jako permutace z $n$ prvků. Následuje definice a zapsání vzorce pro výpočet. V 9. kapitole je z příkladu odvozen vzorec pro výpočet kombinací a uvedeno kombinační číslo.

Příklad

Napište všechny: a) tříčlenné kombinace, b) tříčlenné variace bez opakování z prvků množiny $M = \{a, b, c, d\}$.

Řešení

a) kombinace

$\{a, b, c\}$
$\{a, b, d\}$
$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$

b) variace bez opakování

$$
\begin{array}{cccccc}
[a,b,c] & [a,c,b] & [b,a,c] & [b,c,a] & [c,a,b] & [c,b,a] \\
[a,b,d] & [a,d,b] & [b,a,d] & [b,d,a] & [d,a,b] & [d,b,a] \\
[a,c,d] & [a,d,c] & [c,a,d] & [c,d,a] & [d,a,c] & [d,c,a] \\
[b,c,d] & [b,d,c] & [c,d,b] & [c,b,d] & [d,b,c] & [d,c,b]
\end{array}
$$

Všimněte si, že variace jsme získali utvořením všech pořadí příslušné kombinace. Vidíme, že pro počet těchto variací platí $V(3, 4) = K(3, 4) \cdot P(3) = 4 \cdot 3! = 24$.

Zobecnění postupu z řešení příkladu nám umožní odpovědět na otázku, kolik je $k$-členných kombinací z $n$ prvků.

Jelikož $k$-členné variace z $n$ prvků lze získat z $k$-členných kombinací z $n$ prvků tak, že utvoříme všechna pořadí (permutace) každé $k$-členné kombinace, je $k$-členných variací $k!$-krát více než $k$-členných kombinací z téhož počtu prvků.

Platí $V(k, n) = K(k, n) \cdot P(k)$.

Z tohoto vztahu dostaneme $K(k, n) = \frac{V(k,n)}{P(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!}$. (Smida, 1989, s. 60)

V této kapitole je zmíněn Pascalův trojúhelník a věty o vlastnostech kombinačních čísel. V kapitole 12 je uvedena binomická věta a poté dokázána. U každé kapitoly po teorii následují příklady a úlohy.

Stejně jako v případě předchozí učebnice se jedná o starší publikaci. Z hlediska výuky je důležité, že v učebnici jsou uvedeny nejprve příklady a až poté vzorce pro výpočet. Považuji za vhodné kapitoly 4 a 11, kde je hodně úloh. V kapitole 4 jsou kombinatorické úlohy, které mají žáci řešit bez znalosti kombinatoriky, což je podle mého názoru důležité, žáci nejsou hned od začátku tlačeni k používání vzorců. U příkladů je pěkně rozpracováno řešení.

### 2.4.2 Vybrané úlohy

1. V některých zemích dávají rodiče dětem při narození více jmen. Kolik různých „pojmenování" nejvýše třemi jmény může dítě dostat, je-li k dispozici 300 různých jmen? (Na pořadí jmen v „pojmenování" ovšem záleží.) [Dítě může dostat jedno, dvě nebo tři jména, přičemž jsou všechna tři různá. Celkem to je $300 + 300 \cdot 299 + 300 \cdot 299 \cdot 298 =$ $= 26\,820\,600$ možností.] (s. 35)
2. Je dán čtverec $ABCD$. Každou z úseček $AB, BC, CD, AD, AC$ obarvíme jednou z pěti barev. Kolik je těchto obarvení, považujeme-li za různá obarvení ta, kdy takto obarvené čtverce nelze ztotožnit žádným přemístěním? [30 obarvení] (s. 52)
3. Jízdenky dopravního podniku mají devět očíslovaných okének. Kolika způsoby lze nastavit navzájem různé kódy v označovacím strojku, dírkují-li se tři nebo čtyři okénka? [$K(3,9) +$ $+K(4,9) = 210$] (s. 62)
4. V domě, který má šest podlaží (přízemí a pět poschodí), je výtah. Vypočítejte, kolika různými způsoby lze vyjet z přízemí do pátého poschodí. Způsob jízdy výtahu je dán tím, v kterých podlažích se zastavuje. Výtah se pohybuje pouze směrem nahoru. Chcete-li si jízdy výtahu zaznamenávat, můžete to udělat pomocí znaků 1, 0 – výtah zastaví, výtah nezastaví. [16] (s. 81)

## 2.5 Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy (autoři Jarmila Robová, Martin Hála a Emil Calda, nakladatelství Prometheus, rok vydání 2013)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Základní kombinatorická pravidla, 2. Permutace, 3. Variace, 4. Kombinace, 5. Vlastnosti kombinačních čísel, Pascalův trojúhelník, 6. Binomická věta, 7. Úlohy k opakování I, 8. Permutace s opakováním, 9. Variace s opakováním, 10. Kombinace s opakováním, 11. Úlohy k opakování II, 12. Exkurze do historie

### 2.5.1 O učebnici

Na začátku každé kapitoly (kap. 1–4, 8–10) je uveden příklad, po kterém následuje definice pojmu a odvození vzorce pro výpočet a několik příkladů a úloh.

Příklad

Kolika způsoby se na čtyřmístnou lavici letního kina mohou posadit čtyři diváci?

Úlohu vyřešíme nejprve tak, že vypíšeme všechny možnosti; tento způsob se dá sice použít pro konečný počet diváků vždy, ale při jejich velkém počtu bude časově velmi náročný. Označíme-li jednotlivé diváky B, C, D, je pro jejich rozsazení na čtyřmístné lavici těchto 24 možností:

$$\begin{array}{cccccc}
[A,B,C,D] & [A,B,D,C] & [A,C,B,D] & [A,C,D,B] & [A,D,B,C] & [A,D,C,B] \\
[B,A,C,D] & [B,A,D,C] & [B,C,A,D] & [B,C,D,A] & [B,D,A,C] & [B,D,C,A] \\
[C,A,B,D] & [C,A,D,B] & [C,B,A,D] & [C,B,D,A] & [C,D,A,B] & [C,D,B,A] \\
[D,A,B,C] & [D,A,C,B] & [D,B,A,C] & [D,B,C,A] & [D,C,A,B] & [D,C,B,A]
\end{array}$$

Zajímáme-li se však pouze o počet těchto způsobů a uvědomíme-li si, že se jedná o počet uspořádaných čtveřic sestavených ze čtyř prvků, můžeme použít kombinatorické pravidlo součinu: (…)

Uspořádané čtveřice ze čtyř prvků z předcházející ilustrační úlohy se nazývají permutace, přesněji řečeno permutace ze čtyř prvků.

Obecně definujeme: viz D4, oddíl 2.1.

Kolik permutací z $n$ prvků? Odpověď získáme podobným způsobem jako v předchozí úloze, a to užitím kombinatorického pravidla součinu: (…) Počet permutací z $n$ prvků je proto roven součinu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. (Robová, Hála, Calda, 2013, s. 68)

V kapitolách 2 a 4 jsou zavedeny matematické symboly (faktoriál, kombinační číslo) pro jednodušší a přehlednější zápis řešení. V kapitole 5 jsou nejprve z příkladů odvozeny věty o vlastnostech kombinačních čísel a poté věty zapsány. V kapitole zabývající se binomickou větou je nejprve uvedeno odvození věty a pak je věta zapsána. Na závěr je uvedeno něco málo z historie, co se týká kombinatoriky, což v učebnicích nebývá pravidlem.

Jednotlivé kapitoly jsou pěkně graficky zpracovány, jsou zde odlišně označeny definice a věty a jinak jsou označeny poučky[8] či zajímavosti.

Učebnice se mi velice líbí, na rozdíl od starších učebnic je pěkně graficky zpracována. Vhodné jsou i kapitoly (7, 11), kde jsou další úlohy.

[8] Např. poznámky k definicím a větám nebo popsání, co je to anagram, apod.

### 2.5.2 Vybrané úlohy

1. Hlavní město Švambránie má 500 000 obyvatel, žádný z nich nemá na hlavě více než 500 000 vlasů. Je jisté, že mezi těmito obyvateli jsou určitě dva, kteří mají stejný počet vlasů? [Jisté to není.] (s. 68)
2. Určete, kolika způsoby může při nástupu, kterým se zahajuje volejbalový turnaj, nastoupit $n$ hráčů
   a) do řady, v níž hráč A stojí na prvním místě, [$(n-1)!$]
   b) do řady, ve které hráči A, B nestojí vedle sebe. [$n! - 2 \cdot (n-1)!$] (s. 69)
3. Určete, kolika způsoby je možné sestavit pro danou třídu šestihodinový rozvrh hodin na jeden den, má-li v něm být z deseti vyučovaných předmětů každý nejvýš jednou. [$V(6,10)$] (s. 75)
4. V kolika bodech se protíná deset přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem? [$\binom{10}{2}$] (s. 79)
5. Kolik trojúhelníků je možné sestrojit z úseček o délkách 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm a 8 cm? Trojúhelníky mohou být i rovnostranné nebo rovnoramenné. [$K'(3,5) - 1$] (s. 98)
6. Určete, kolika způsoby se ze všech přirozených čísel od jedné do padesáti dají vybrat tři, jejichž součet je sudé číslo. [$\binom{25}{2} \cdot 25 + \binom{25}{3}$] (s. 99)

## 2.6 Matematika SŠ: Kombinatorika (autor Martin Krynický, 2010)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Základní kombinatorická pravidla, 2. Variace, 3. Permutace, 4. Kombinace, 5. Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly, 6. Kombinatorické úlohy bez opakování, 7. Variace s opakováním, 8. Permutace s opakováním, 9. Kombinace s opakováním, 10. Kombinatorické úlohy s opakováním, 11. Další vlastnosti kombinačních čísel, 12. Binomická věta, 13. Užití binomické věty

### 2.6.1 O učebnici

Jedná se o internetovou učebnici, jejíž podobu autor průběžně upravuje.

Kapitoly začínají několika příklady, na které navazuje definice pojmu a odvození vzorce pro výpočet, příp. věty. Autor nechává odvozování a dokazování hodně na žákovi (jak je zřejmé z pedagogických poznámek, kterými svůj text doprovází).

Příklad

Urči počet $k$-členných variací z $n$ prvků.

Řešení:

Vytváříme uspořádanou $k$-tici z $n$ prvků?

1. člen: $n$ možností,

2. člen: $n - 1$ možností,

3. člen: $n - 2$ možností, (vždy odečítáme od $n$ číslo o jedna menší, než kolikátý je člen)

...

$(k - 1)$-ní člen: $n - (k - 2)$,

$k$-tý člen: $n - (k - 1)$.

Možnosti kombinujeme:

$$n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot \big(n-(k-1)\big) = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví výraz:

$n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)$,

nejdříve je pouze upozorňuji, aby si přepočítali počet členů.

Počet $k$-členných variací z $n$ prvků značíme $V_k(n)$ nebo $V(k, n)$, někdy se také označuje jako variační číslo.

Pedagogická poznámka: V dalším textu budeme důsledně používat pouze zápis $V_k(n)$. Je podle mě logičtější než v nových učebnicích používaný zápis $V(k, n)$. Zápis $V_k(n)$ lépe koresponduje se zápisem permutací $P(n)$. Žákům říkám, že v závorce vždy uvádíme počet prvků, ze kterých vybíráme, a jako index, kolik prvků vybíráme. (Krynický, 2010, hodina č. 090104, s. 2)

Dále je uveden vzorec pro výpočet variací, viz V3 v oddíle 2.1.

Jsou zde graficky zvýrazněny definice, věty a vzorce. V kapitolách 3 a 4 jsou uvedeny matematické symboly (faktoriál, kombinační číslo), které umožňují jednodušší a přehlednější zápis řešení. Dále jsou zde již zmíněné pedagogické poznámky a na závěr každé kapitoly je krátké shrnutí. V učebnici jsou pouze příklady, u některých je uvedeno i více řešení. Ve zvláštním souboru ke každé kapitole jsou úlohy, definice a věty pro žáky. Na další úlohy autor odkazuje na publikaci „Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy“ od Jindry Petákové.

Ze všech učebnic, které jsem měla k dispozici, je v této asi nejvíce příkladů a úloh. Připadá mi velice vhodné, že autor hodně věcí nechává na žácích, aby k matematickým poznatkům dospěli sami. Ale nejsem si jista, zda by se tato metoda dala použít na SOŠ, alespoň podle mé zkušenosti. Ne všude jsou žáci, kteří jsou svými vědomostmi schopni se aktivně podílet na výuce. A také učitelé jsou limitováni časem a množstvím látky, kterou musí s žáky probrat.

Tato učebnice se zdá být spíše pro učitele než pro žáky, aby ji měli k dispozici při výuce. V textech je vše řešeno, žáci by nebyli nuceni přemýšlet, ale mohli by se na řešení podívat do učebnice. Žákům bych dala k dispozici pouze soubor s úlohami.

### 2.6.2 Vybrané úlohy

1. Barvy na monitoru jsou vytvářeny smícháním tří barev (RGB – červená, zelená, modrá). Jas každé z nich můžeme měnit od 0 do 255. Kolik barev je na monitoru možné vytvořit? $[256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216]$ (hodina č. 090102, s. 3)
2. Král má osm dcer. Urči, kolika způsoby může vybrat dvě dcery, které chce sníst stohlavý drak (vzhledem k tomu, že drak bude jíst obě princezny najednou, nezáleží na tom, kterou vybereme jako první a kterou jako druhou). $[\frac{8\cdot 7}{2} = 28]$ (hodina č. 090103, s. 3)
3. Je dán čtverec $ABCD$, na každé z jeho stran je dáno $n$ vnitřních bodů. Urči počet trojúhelníků, které mají vrcholy v těchto bodech a na různých stranách čtverce $ABCD$. $[4n^3]$ (hodina č. 090103, s. 4)
4. Televizního pořadu, ve kterém diváci kladou politikům nepříjemné otázky, se účastní i občané Nora, Oldřich, Pavlína, Radek, Stanislav, Tamara a Uršula. Každý účastník může položit jednu otázku. Urči počet všech možných pořadí, ve kterých:
   a) mohou položit své dotazy, $[P(7) = 7! = 5\,040]$
   b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži, $[4!\,3! = 144]$
   c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek, $[6! = 720]$
   d) Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara. $[\frac{7!}{2} = 2\,520]$ (hodina č. 090106, s. 4)
5. Šíleně smutnou princeznu přišlo rozesmát 20 kejklířů, 35 komiků, 41 šašků, 27 zpěváků, 12 bavičů, Zlatovláska, Kocour v botách a Hloupý Honza. Urči počet všech pořadí, ve kterých mohou před princeznu předstoupit:
   a) všichni uchazeči, $[138]$
   b) pouze kejklíři a šašci, $[61!]$
   c) pouze komici a po nich zpěváci, $[35!\,27!]$

d) nejdříve všichni baviči, $[12!\,126!]$

e) každá skupina uchazečů pohromadě, pohádkové bytosti na konci, $[5!\,20!\,35!\,41!\,27!\,12!\,3!]$

f) první Zlatovláska, druhý Kocour v botách a třetí Hloupý Honza, $[135!]$

g) všichni uchazeči tak, aby byl Hloupý Honza byl první nebo druhý, $[2\cdot 137!]$

h) všichni uchazeči tak, aby Kocour v botách nebyl první, $[137\cdot 137!]$

i) všichni uchazeči tak, aby Hloupý Honza byl nejhůře desátý, $[10\cdot 137!]$

j) Zlatovláska před Hloupým Honzou a Kocourem v botách ostatní libovolně. $[\frac{138!}{4}]$ (hodina č. 090106, s. 5)

6. Urči, kolika způsoby může $n$ táborníků nastoupit na rozcvičku:
   a) do řady, $[n!]$
   b) do řady, na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp, $[2(n-1)!]$
   c) do řady, ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko, $[2(n-1)!]$
   d) do řady, ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí Tlapa, $[3!\,(n-2)!]$
   e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru, $[n!-2(n-1)!]$
   f) do kruhu, v němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich poloze vzhledem k okolí. $[(n-1)!]$ (hodina č. 090107, s. 3)
7. Na osobním oddělení velké firmy pracuje jako obyčejný zaměstnanec $z$ žen a $m$ mužů. Počet žen je větší než počet mužů. Kromě nejvyšší vedoucí, která má v mimořádné oblibě hromadné nástupy, má oddělení navíc ještě tři další vedoucí pracovníky, kteří se nepočítají ani mezi muže ani mezi ženy. Urči kolika způsoby je možné:
   a) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady u příležitosti blahopřání vedoucí k významnému životnímu jubileu, $[(m+z+3)!]$
   b) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli na začátku řady, $[3!\,(m+z)!]$
   c) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli vedle sebe, $[3!\,(m+z+1)!]$
   d) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci, muži i ženy stáli pohromadě, $[3!\,3!\,m!\,z!]$
   e) rozestavit obyčejné zaměstnance do řady tak, aby se pravidelně střídaly ženy s muži a zbývající ženy stály pohromadě na tom z krajů řady, kde by jinak stál muž, $[2\cdot m!\,z!]$

f) rozestavit obyčejné zaměstnance podle pohlaví do dvou kruhů ke hraní stmelovací hry „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“, $[(m-1)!\,(z-1)!]$

g) rozestavit kruh, který ve hře „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“, vyhraje, pokud si vedoucí jeden z kruhů z předchozího bodu vybere a stoupne si v něm na libovolné místo, $[m! + z!]$

h) rozestavit všechny zaměstnance kolem kulatého stolu tak, aby vedoucí měla vedle sebe své oblíbence Petru a Josefa, $[2(m+z+1)!]$

i) rozestavit do jednoho kruhu všechny muže a potřebný počet žen tak, aby se pohlaví pravidelně střídalo. $[\frac{(m-1)!z!}{(z-m)!}]$ (hodina č. 090107, s. 4)

8. Policejní agent-provokatér vybírá ze zásoby pečlivě evidovaných bankovek (každá bankovka je označena číslem, které umožňuje její identifikaci) sumu na úplatky. K dispozici má celkem 100 bankovek 1000 Kč, 100 bankovek 2000 Kč, 100 bankovek 5000 Kč a 50 bankovek 10000 Kč. Urči, kolika způsoby může vybrat:

a) 10 bankovek 5000 Kč na přijímací úplatek na VŠ právnického směru, $[\binom{100}{10}]$

b) 40 bankovek 10000 Kč a 20 bankovek 5000 Kč na „pět na stole v českých“ pro bývalého tajemníka předsedy vlády ČR, $[\binom{50}{40} \cdot \binom{100}{20}]$

c) 5 bankovek 5000 Kč tak, aby mezi nimi byla legendární bankovka E05 752314, se kterou se mazlil při svém zatčení tehdejší starosta brněnských Žabovřesk, $[\binom{99}{4}]$

d) bankovky 1000 Kč, 4 bankovky 2000 Kč a 2 bankovky 5000 Kč potřebné k vyřizování povolení k trvalému pobytu na cizinecké policii v Karlových Varech, $[\binom{100}{3} \cdot \binom{100}{4} \cdot \binom{100}{2}]$

e) 4000 Kč v libovolných bankovkách na řešení dopravního přestupku, $[\binom{100}{4} + \binom{100}{2} \cdot \binom{100}{1} + \binom{100}{2}]$

f) 6000 Kč v libovolných bankovkách na urychlení vyřizování stavebního povolení na úpravu kůlny na zahradě.$[\binom{100}{6} + \binom{100}{4} \cdot \binom{100}{1} + \binom{100}{2} \cdot \binom{100}{2} + \binom{100}{3} + \binom{100}{1} \cdot \binom{100}{1}]$ (hodina č. 090108, s. 4)

9. Známá modelka VV má obrovský šatník s velkým výběrem modelů. Například pro pěkné počasí má 15 (6 od první a 9 od druhé sponzorské firmy) druhů klobouků, 58 (24 od první a 34 od druhé sponzorské firmy) různých kostýmů a 32 (20 od první a 12 od druhé) párů bot. Kolika různými způsoby může zkombinovat jednotlivé části oblečení ta, aby byla celá vybavena od jedné firmy? $[6 \cdot 24 \cdot 20 + 9 \cdot 34 \cdot 12]$ (hodina č. 090111, s. 1)

## 2.7 Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: 4. část (autoři Oldřich Petránek, Emil Calda a Petr Hebák, nakladatelství Prometheus, rok vydání 2006)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Kombinatorické pravidlo součinu, 2. Variace, 3. Permutace, 4. Variace s opakováním, 5. Kombinace, 6. Vlastnosti kombinačních čísel, 7. Binomická věta

### 2.7.1 O učebnici

První kapitola začíná příklady, za kterými je uvedeno pravidlo součinu, příklady a úlohy. Kapitoly 2, 3, 4, 5 začínají krátkým úvodem, navazuje na něj definice pojmu a příklad, po kterém je odvozen vzorec pro výpočet.

> Příklad
>
> Napište všechny variace třetí třídy z prvků $3, 5, 7, 9$.
>
> Řešení. Při namátkovém vypisování těchto variací by se mohlo stát, že na některou zapomeneme. Je proto nutno ve všech příkladech tohoto typu postupovat systematicky; v daném příkladu vypíšeme třeba nejdříve všechny variace obsahující prvky $3, 5, 7$, potom všechny variace s prvky $3, 5, 9$, dále všechny variace obsahující prvky $3, 7, 9$ a nakonec všechny variace s prvky $5, 7, 9$: (…)
>
> Spíše než o vypisování všech variací $k$-té třídy z daných $n$ prvků však jde o určení počtu všech těchto variací. Označíme $V_k(n)$ počet všech variací $k$-té třídy z $n$ prvků; užitím kombinatorického pravidla součinu počet $V_k(n)$ všech těchto variací odvodíme.
>
> (…) Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech uspořádaných $k$-tic požadované vlastnosti roven součinu
>
> $n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$,
>
> takže je $V_k(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$. (Petránek, Calda a Hebák, 2006, s. 53)

Dokázali jsme větu V3, viz oddíl 2.1.

Kapitoly pokračují příklady a úlohami. U kapitol 3 a 5 jsou ještě uvedeny matematické symboly (faktoriál, kombinační číslo) pro kratší zápis a přehlednost výpočtů. V kapitole 6 jsou uvedeny věty o vlastnostech kombinačních čísel a poté příklady a úlohy. Je zde také zaveden Pascalův trojúhelník. V poslední kapitole je na základě znalostí předchozího učiva sepsána binomická věta a poté i dokázána. Je zde několik příkladů a úloh. Na závěr je uvedeno něco krátce z historie.

Tato učebnice se používá k výuce již několik desetiletí, svědčí o tom několikáté vydání. V učebnici jsou standardní úlohy z kombinatoriky, kterých není mnoho, ale pro žáky SOŠ a SOU, pro které je učebnice určena, je dle mého názoru množství úloh dostačující.

### 2.7.2 Vybrané úlohy

1. Je dán rovnostranný trojúhelník $ABC$ a na každé jeho straně je zvoleno $n$ jejích vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy $X, Y, Z$ leží v daných bodech a na různých stranách daného trojúhelníku $ABC$. $[n^3]$ (s. 52)
2. Určete, kolik kružnic je určeno deseti body, jestliže žádné tři z těchto bodů neleží v jedné přímce a žádné čtyři na kružnici. [120] (s. 70)

## 2.8 Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: 3. díl. (autor Emil Calda, nakladatelství Prometheus, rok vydání 2004)

Pořadí probíraných témat je následující:

1. Základní pravidla, 2. Variace, 3. Permutace, 4. Kombinace, 5. Vlastnosti kombinačních čísel, 6. Binomická věta

### 2.8.1 O učebnici

Po krátkém úvodu je uvedena definice či pravidlo (kap. 1, 2, 3, 4) a následuje příklad, na kterém je definice či pravidlo vysvětleno.

Příklad

Pro ilustraci tohoto pojmu jsou v následujícím schématu vypsány všechny dvojčlenné a trojčlenné variace ze čtyř prvků $a, b, c, d$:

(…)

$$
\begin{array}{cccccc}
[a,b,c] & [a,c,b] & [b,a,c] & [b,c,a] & [c,a,b] & [c,b,a] \\
[a,b,d] & [a,d,b] & [b,a,d] & [b,d,a] & [d,a,b] & [d,b,a] \\
[a,c,d] & [a,d,c] & [c,a,d] & [c,d,a] & [d,a,c] & [d,c,a] \\
[b,c,d] & [b,d,c] & [c,d,b] & [c,b,d] & [d,b,c] & [d,c,b]
\end{array}
$$

(Calda, 2004, s. 173)

Dále je odvozen vzorec pro výpočet variací V3, viz oddíl 2.1.

Příklad

Počet $k$-členných variací z $n$ prvků budeme značit $V(k,n)$ a určíme ho pomocí kombinatorického pravidla součinu.

(…)

Tento postup si můžeme znázornit následovně:

| Výběr členů uspořádané $k$-tice | 1. | 2. | … | $(k-1)$-ního | $k$-tého |
|---|---|---|---|---|---|
| Počet možností výběru z $n$ prvků | $n$ | $n-1$ | … | $n-(k-2)$ | $n-(k-1)$ |

Podle kombinatorického pravidla součinu (viz V2, oddíl 2.1) dostáváme, že počet $V(k,n)$ všech těchto uspořádaných $k$-tic je roven součinu

$n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(k-1)\big)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$. (Calda, 2004, s. 173)

Všechny kapitoly pokračují řešenými příklady a úlohami. V kapitolách 3 a 4 jsou uvedeny matematické symboly (faktoriál, kombinační číslo) pro kratší zápis a přehlednost výpočtů. V kapitole 5 jsou nejprve uvedeny věty o vlastnostech kombinačních čísel a poté řešené příklady a úlohy. Je zde také zaveden Pascalův trojúhelník. V poslední kapitole je na základě znalostí předchozího učiva sepsána binomická věta a poté i dokázána. Je zde několik řešených příkladů a úloh.

Učebnice je určena pro netechnické obory SOŠ a SOU, čemuž odpovídá i obsah, nejsou zde variace s opakováním, permutace s opakováním ani kombinace s opakováním, ale zároveň učebnice splňuje požadavky pro státní maturitu platné od školního roku 2009/2010[9].

### 2.8.2 Vybrané úlohy

1. Určete počet všech přímek, které procházejí danými dvaceti body, jestliže
   a) žádné tři neleží v přímce, [$\binom{20}{2}$]
   b) právě pět jich leží v přímce. [$\binom{20}{2}-\binom{5}{2}+1$] (s. 187)
2. Je dána čtvercová síť, ve které je 10 vodorovných a 15 svislých přímek. Určete, kolik je v této síti obdélníků, jejichž všechny čtyři strany leží na přímkách této sítě. [$\binom{10}{2}\binom{15}{2}$] (s. 187)

[9] Viz: Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od roku 2009/2010: Matematika, základní úroveň. http://www.novamaturita.cz/index.php?id_document=1404033138

Pokud bych si měla vybrat mezi uvedenými učebnicemi, které bych chtěla používat při výuce kombinatoriky, tak z hlediska zpracování bych zvolila učebnici *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy* (viz oddíl 2.5). Učebnice je pěkně graficky zpracována, což umožňuje rychlou orientaci v textu. Nebo elektronickou učebnici *Matematika SŠ: Kombinatorika* (oddíl 2.6), z níž bych použila jak výkladovou část, tak i většinu úloh a příkladů. Výklad kombinatoriky je nechán spíše na žákovi a jsou zde jen pomocí příkladů odvozeny vzorce. Učebnice obsahuje zajímavé, netradiční příklady a úlohy; v jiných učebnicích jsem se s takovými úlohami nesetkala. Úlohy bych čerpala i z učebnice *Kombinatorika pro 2. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku* (oddíl 2.3) a učebnice *Matematika pro 2. ročník gymnázií. Kombinatorika* (oddíl 2.4), protože obě učebnice obsahují zajímavé úlohy.

# 3 Výuka kombinatoriky a výzkum v didaktice matematiky

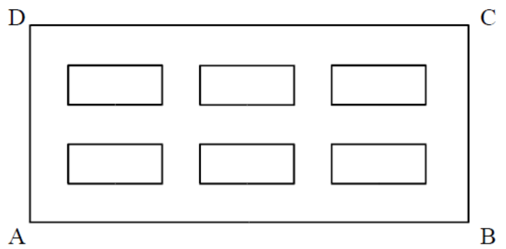
V této kapitole jsou shrnuty čtyři výzkumy, které se týkají kombinatoriky. Při jejich výběru jsem se řídila požadavkem, aby se týkaly různých aspektů zkoumané problematiky. První z nich se zabývá žákovskými strategiemi při řešení kombinatorických úloh, druhý se týká chyb, kterých se žáci při řešení úloh dopouštějí, třetí se věnuje tomu, jak provést kontrolu řešení kombinatorických úloh a zda žáci kontroly úloh provádějí, a poslední výzkum se zabývá výsledky žáků, kteří se učili kombinatoriku standardně, a žáků, kteří kombinatoriku probírali s interaktivní tabulí a bez předčasného použití vzorců. Výzkumů podobného typu je samozřejmě mnohem více, zde uvedené je tedy třeba brát spíše jako ilustrativní k dané problematice.

## 3.1 Strategie řešení kombinatorických úloh

Žákovskými strategiemi řešení kombinatorických úloh se zabývá výzkum M. Janáčkové a J. Janáčka (2006). Konkrétně autoři zkoumali strategie řešení šestnáctileté dívky Jane u čtyř kombinatorických úloh.

1. Město

Domy na obrázku jsou označené jako obdélníky, mezi nimi jsou uličky. Máme zjistit, kolika způsoby se lze dostat z místa A do místa C, pokud se budeme pohybovat v ulicích města jen nahoru a doprava?




2. Lední hokej

Hokejový zápas skončil 2 : 3. Jaké jsou možné dílčí výsledky, které by vedly ke konečnému skóre tohoto zápasu?

3. Přihrádky

Napište všechny možnosti, ve kterých 5 míčů A, B, C, D, E může být umístěno do dvou přihrádek $u$ a $v$ tak, že 2 míčky jsou v přihrádce $u$ a 3 míčky v přihrádce $v$.

4. Řada

Kolika způsoby je možné dát do řady tři ∘ a dva ■?

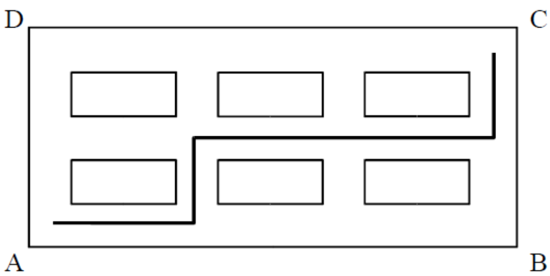
Všechny problémy jsou izomorfní[10], můžeme je řešit jako jeden problém, při použití zástupných znaků 0 (tři symboly) a 1 (dva symboly) tak, že symbol 0 znamená:

1. vpravo
2. gól dal soupeřící tým
3. míče dát do přihrádky $v$
4. symbol ∘

a symbol 1 znamená:

1. nahoru
2. gól dal domácí tým
3. míče v přihrádce $u$
4. symbol ■

Ilustrativní příklad




| pozice | 1. p[11] | 2. p | 3. p | 4. p | 5. p |
|---|---|---|---|---|---|
| cesta | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Problémy řešila Jane, žákyně 2. ročníku střední školy. Jane byla při řešení problémů natočena na video a poté bylo video přepsáno i s časovým protokolem.

Autoři identifikovali celkem 11 strategií, které použila Jane při řešení.

1. Strategie vyčerpání podmnožiny (of exhausted subset) – žák hledá novou strategii, protože je již vyčerpána podmnožina permutací se společným rysem:
   a) Permutace s určitou společnou předponou – tj. permutace, které jsou totožné až na určitou pozici. Viz příklad 1: permutace (a)–(c), tj. permutace, které začínají symboly 10.

[10] Izomorfní úlohy – úlohy, které jsou formálně identické, ale liší se v povrchové struktuře.

[11] 1.p–5.p – označení pozice

b) Permutace, u kterých se až do určitého místa pravidelně střídají symboly 0 a 1. Viz příklad 1: Permutace (a)–(e), tj. permutace, kde se střídají symboly 0 a 1 na prvních dvou pozicích.
c) Permutace, u kterých je nejprve sekvence jednoho symbolu a na něj navazuje sekvence druhého symbolu. Viz příklad 1: permutace (g), (h).
d) Permutace, které mají symbol 1 v určité poloze. Viz příklad 2: permutace (c)–(f), tj. permutace mají symbol 1 na třetí pozici.
e) Permutace, které obsahují všechny možné uspořádání dvou symbolů 1 v daných pozicích. Viz příklad 2: permutace (a), (c), (d).

Příklad 1:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) 10100 | (c) 10001 | (e) 01100 | (g) 00011 |
| (b) 10010 | (d) 01010 | (f) 01 | (h) 11000 |

Příklad 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) 11000 | (d) 10100 | (g) 10010 | (j) 01001 |
| (b) 11 | (e) 00110 | (h) 10001 | (k) 00011 |
| (c) 01100 | (f) 00101 | (i) 01010 | |

2. Skupinová strategie – již zjištěné permutace se používají ke zjištění dalších permutací.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ∇ | ∇ | ∇ | ∇ | |
| (d) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (b) | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| | ∇ | ∇ | ∇ | ∇ | |
| (e) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (c) | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** |

∇ – označuje změnu na jiný symbol

3. Strategie konstantního začátku – všechny kroky jsou stejné až do toho místa, kde v případě, že by nedošlo ke změně, tak by permutace byla totožná s předchozí permutací.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ↓ | ↓ | | | |
| (b) | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| | ↓ | ↓ | ↓ | | |
| (c) | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** |

4. Strategie stejného počtu permutací ve skupinách

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| (b) | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| (c) | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| (d) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| (e) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| (f) | **0** | **1** | | | |
| (g) | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |

5. Strategie souměrnosti (of symmetry) – symboly 0 zaměním za 1 a naopak, až do místa, kde to není možné, protože by byl překročen počet daného symbolu. Tento počet je předem znám.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ∇ | ∇ | ∇ | ∇ | |
| (b) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |

6. Strategie rovnoběžnosti (of parallelism) – symboly 0 jsou posunuty o jednu pozici doprava či doleva a zbývající místa zaplněna symboly 1. Pokud symbol nemůže být posunut v prvním kroku, zůstává na svém místě a ostatní symboly se posunou.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| | | ↙ | | ↙ | |
| (b) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ↓ | | ↙ | | |
| (c) | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |

7. Strategie konstantního prvku – jeden ze symbolů 1 necháme na místě a druhý symbol má náhodnou polohu, zbývající místa jsou doplněna symbolem 0.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| | | | ↓ | | |
| (b) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | | | ↓ | | |
| (c) | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** |
| | | | ↓ | | |
| (d) | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** |

8. Strategie doplňku všech úprav – podmnožina permutací obsahuje všechna uspořádání až na jedno. Zbývající permutace se vytvoří pomocí strategie vyčerpání podmnožiny.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| (b) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| (c) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |

9. Strategie tachometru – jeden symbol 1 je stále v dané poloze a druhý postupně zabírá zbývající pozice. Po vyčerpání všech možností je vybrána další pozice a proces se opakuje.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| (b) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| (c) | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| (d) | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| (e) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| (f) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| (g) | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| (h) | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** |
| (i) | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| (j) | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |

10. Strategie otáčení – nová permutace je vytvořena otočením předchozí o 180°.

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| (b) | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |

11. Strategie doplňku vyčerpané množiny (of complement of the exhausted subset)

Příklad:

| | 1.p. | 2.p. | 3.p. | 4.p. | 5.p. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |
| (b) | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** |
| (c) | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| (d) | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| (e) | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| (f) | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| (g) | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| (h) | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| (i) | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |

Autoři došli k závěru, že žáci používají rozdílné strategie, i když se jedná o izomorfní úlohy.

Při plánování výuky kombinatoriky (zejména pokud jde o výuku, v níž hraje důležitou roli aktivita žáka) je žádoucí, abychom měli představu o tom, jakými způsoby žáci kombinatorické úlohy řeší. Proto považuji tento výzkum pro svou práci za významný.

## 3.2 Chyby žáků v řešení kombinatorických úloh

Žáci se stejně jako v jiných matematických tématech i v kombinatorice dopouštějí chyb. To bylo tématem výzkumu (Batanero, Navarro-Pelayo, Godino, 1997).

Hlavním cílem výzkumu Batanero a kol. bylo zjistit vliv implicitního kombinatorického modelu na kombinatorické uvažování žáků před a po výuce kombinatoriky.

K získání výsledků autoři použili dotazník, který obsahoval 13 kombinatorických úloh. Autoři měli dvě varianty, druhá měla otočené pořadí položek, tj. začínala bodem 13 a končila bodem 1. Dotazník předložili 720 žákům, kterým bylo 14–15 let, na 9 různých středních školách ve Španělsku tak, že polovina žáků každé třídě měla jinou variantu. Žáci na vyplnění dotazníku potřebovali hodinu až hodinu a půl. Z celkového počtu žáků se kombinatoriku již učilo 352 žáků, ostatní ještě kombinatoriku neměli.

Analýzou dotazníku autoři dospěli k souboru chyb, kterých se žáci dopouštěli. Stručně je popíši a v tabulce 3 uvedu relativní frekvenci, s jakou se jich dopouštěli žáci před výukou a po výuce.:

1. Chybný výklad textu úlohy – chyba se vyskytovala více ve skupině žáků, kteří již výuku kombinatoriky měli.
2. Chyba pořadí – vzniká z kritéria kombinace a variace, jestli rozlišovat pořadí prvků nebo ne. Chyba se vyskytla nejvíce ze všech chyb u žáků s výukou kombinatoriky.
3. Chyba opakování – žák opakuje prvky, kdy to není možné, a neopakuje prvky, když je to žádané. Jedná se o druhou nejčastější chybu u žáků s výukou kombinatoriky.
4. Záměna typu objektu – žák považuje stejné objekty za různé nebo různé za nerozlišitelné. Jedná se o chybu, která se vyskytla u žáků s výukou, jako třetí s nejmenším počtem výskytů. U žáků bez výuky se vyskytla jako v pořadí čtvrtá nejčastější.
5. Vyloučení některých prvků, které tvoří uspořádání – časté u permutací s opakováním; pokud se prvky opakují, tak je žáci nezapočítají. Tato chyba se vyskytla nejméně krát v obou skupinách.
6. Nesystematické řazení – vypisování pokusem-omylem. Byla to nejčastější chyba u skupiny bez výuky.

7. Chybná intuitivní odpověď – žáci napíší numerické řešení, aniž by svou odpověď odůvodnili. Ve skupině bez výuky se chyba vyskytla více krát, než u druhé skupiny.
8. Špatná aritmetická operace při řešení – použití kombinace základních pravidel součinu, součtu, podílu při řešení, namísto vzorce či vypsání možností. V obou skupinách se tato chyba vyskytla málo.
9. Zapomenutí správného vzorce pro kombinatorickou operaci, která byla správně identifikována. Tato chyba se vyskytla pouze u skupiny s výukou.
10. Zapomenutí významu proměnných v kombinatorickém vzorci. Ve skupině s výukou se chyba vyskytla v pořadí jako třetí nejvíce krát. Ve skupině bez výuky se vyskytla v pořadí jako třetí s nejmenším počtem výskytů.
11. Chybná interpretace „stromu“ (schématu) – málo žáků používá „strom“ jako pomoc pro nalezení řešení; pokud jej použijí, neumějí ho správně interpretovat. Tato chyba se vyskytla pouze ve skupině s výukou.
12. Chybně použito kombinační číslo. Chyba se vyskytla v obou skupinách.
13. Záměna typu skupiny prvků – žák věří, že se stejné skupiny dají rozlišit, nebo že naopak není možné rozlišit rozeznatelné skupiny. Ve skupině bez výuky se tato chyba vyskytla v pořadí jako druhá nejčetnější.
14. Chyba v nalezeném rozdělení – např. v úloze 6[12] musíme vzít v úvahu všechny následující rozklady čísla 4: $4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 0 + 4$. Někteří žáci brali v úvahu pouze některé rozklady čísla:

„10 způsobů:

A, B, C, D = 1. patro;

A, B, C, D = přízemí;

A, B, C = 1. patro D = přízemí;

A, B, D = 1. patro C = přízemí;

A, D, C = 1. parto B = přízemí;

B, C, D = 1. parto A = přízemí;

A, B, C = přízemí D = 1. parto;

A, B, D = přízemí C = 1. parto;

A, D, C = přízemí B = 1. parto;

B, C, D = přízemí A = 1. parto.“

Chyba se vyskytla vícekrát ve skupině bez výuky, jedná se o třetí nejpočetnější výskyt.

[12] Čtyři děti Alice, Bert, Karel a Diana jdou spát k babičce domů. Babička má dvě místnosti (jedna je v přízemí, druhá v 1. patře), ve kterých mohou děti spát. Kolika způsoby si mohou děti u babičky vybrat místo na spaní? (Mohou spát všichni v jedné místnosti.)

Tabulka 3: Seznam chyb s počty výskytu v jednotlivých skupinách

| Chyby | | Počet výskytu chyby ve skupině s výukou | Počet výskytu chyby ve skupině bez výuky |
|---|---|---|---|
| 1. | Chybný výklad textu úlohy | 145 | 36 |
| 2. | Chyba pořadí | 787 | 153 |
| 3. | Chyba opakování | 563 | 145 |
| 4. | Záměna typu objektu | 26 | 241 |
| 5. | Vyloučení některých prvků, které tvoří uspořádání | 20 | 3 |
| 6. | Nesystematické řazení | 50 | 1678 |
| 7. | Chybná intuitivní odpověď | 29 | 220 |
| 8. | Špatná aritmetická operace při řešení | 24 | 19 |
| 9. | Zapomenutí správného vzorce pro kombinatorickou operaci, která byla správně identifikována | 156 | |
| 10. | Zapomenutí významu proměnných v kombinatorickém vzorci | 458 | 30 |
| 11. | Chybná interpretace „stromu“ (schématu) | 36 | |
| 12. | Chybně použito kombinační číslo | 103 | 213 |
| 13. | Záměna typu skupiny prvků | 42 | 280 |
| 14. | Chyba v nalezeném rozdělení | 36 | 272 |
| | Více než dvě chyby | 226 | 388 |
| | Žádné řešení | 549 | 648 |

Podle výsledků dotazníku má výuka kombinatoriky pozitivní vliv na výskyt chyb. Žáci bez výuky měli průměrně 10,59 chyby na žáka a žáci s výukou měli 7,01 chyby na žáka. U kolika žáků se vyskytly více než dvě chyby a kolik jich nemělo žádné řešení, je vidět pro jednotlivé skupiny v tabulce 3. U žáků, kteří se kombinatorice již učili, se však vyskytoval jiný typ chyb, které poukazovaly na nepochopení významu kombinatorické operace.

Autoři dále zjistili, že jednotlivé strategie se prolínají, žáci nepoužívají k řešení jedné úlohy pouze jednu strategii, ale používají jich více.

S 17 žáky autoři udělali rozhovor, ve kterém zjistili, že ani v případě, že žáci použijí stejnou strategii při řešení dvou kombinatorických úloh, nepovažují tyto úlohy za rovnocenné.

Podle Odvárka (1990) je zdrojem častých chyb v kombinatorice snaha žáků o rychlé vyřešení úlohy tak, že začnou uplatňovat vzorce, aniž by provedli rozbor úlohy a příslušnou matematizaci. To odpovídá i některým výše uvedeným chybám.

Pro učitele je dobré vědět, jakých chyb se žáci nejčastěji při řešení kombinatorických úloh dopouštějí, aby mohli při výuce s chybami počítat a vhodným způsobem výuky jim předcházet a případně didakticky využívat. Popis chyb žáků při řešení vybraných kombinatorických úloh je jedním z cílů i mé diplomové práce (viz kap. 4).

## 3.3 Způsoby kontroly řešení kombinatorických úloh

U kombinatorických úloh je obtížné dělat zkoušku, neexistuje žádný osvědčený, zaručený způsob, jak najít chybu v řešení. Pokud nějakou chybu najdeme, neznamená to ještě, že nalezené řešení je správné.

Mashiach Eizenberg a Zaslavsky (2004) se zabývali otázkou „Jak ověřit řešení studentů a jaké strategie studenti používají k ověřování?“. Zároveň se autoři pokusili o vyhodnocení účinnosti jednotlivých strategií.

Výzkumu se zúčastnilo 14 vysokoškolských studentů ve věku 19–24 let, kteří měli zapsán alespoň jeden kurz z kombinatoriky a kteří podle svého vyjádření neměli zkušenosti s ověřováním výsledků u kombinatorických úloh. Studenti řešili 10 kombinatorických úloh buď samostatně, nebo ve dvojicích. Výzkumníci s nimi vedli rozhovory a pozorovali je při práci. Studenti pracující samostatně měli při řešení přemýšlet nahlas a studenti pracující ve dvojici měli spolupracovat. Se studenty se výzkumníci setkali čtyřikrát. První setkání bylo 30ti minutové, ostatní setkání byla dvouhodinová po dobu 2–3 týdnů. Celkem získali autoři 108 řešení (11 rozhovorů, 10 úloh, 2 případy byly bez řešení).

Výzkumníci při řešení úloh sledovali, jestli studenti ověřují svá řešení z vlastní iniciativy nebo až na vyzvání.

Nejprve studenti řešili úlohy a pouze z vlastní iniciativy ověřovali svá řešení. Z celkem ze 108 řešení pouze 66 bylo ověřeno z iniciativy studentů. Přes pokusy zkontrolovat řešení zůstalo 34 z 66 řešení špatně. Pouze 6 z 39 původně chybných řešení bylo zlepšeno na základě kontroly.

Dále studenti řešili úlohy a na základě žádosti výzkumníka měli provést kontrolu svého řešení, bez ohledu na správnost tohoto řešení. Počet řešení, kde se studenti pokusili o ověření řešení, stoupl, bylo jich 83 ze 108, ale přesto jej stále někteří studenti neprovedli (25 ze 108). Pouze 7 z 51 původně chybných řešení bylo zlepšeno na základě kontroly. U 3 případů došlo v rámci kontroly k chybným úpravám, což vedlo ke 2 řešením, která byla před kontrolou správná, ale po kontrole byla chybná. Celkem po této části výzkumu zůstalo 63 chybných řešení.

Jako poslední část výzkumu byli studenti s chybným řešením na tuto skutečnost upozorněni a opětovně vyzváni, aby provedli kontrolu svého řešení. Nyní bylo 54 z 63 chybných řešení ověřeno, ke zlepšení došlo v 18 případech. Ve 41 případech nebyli studenti schopni zjistit chybu svého řešení.

Autoři výzkumu identifikovali 5 strategií, které studenti použili pro kontrolu řešení kombinatorických úloh.

1. Přepracování řešení – studenti přepracovali své řešení tak, že vše (nebo část) prošli podruhé. Tento způsob kontroly byl častý, ale neúčinný.
2. Přidání odůvodnění k řešení – studenti připsali odůvodnění svého řešení. To bylo užitečné pro opravu řešení, v nichž byl sice použit správný model, ale v nichž se objevily dílčí chyby:
   a) odůvodnění jen některého kroku řešení
   b) odůvodnění použitého modelu řešení problému
   c) odůvodnění založené na analogii k známé nebo již řešené úloze
3. Posouzení přiměřenosti odpovědi – studenti posoudili konečný výsledek, jestli je přiměřený k zadaným hodnotám. Touto metodou nelze najít konkrétní chybu, pouze upozorní na chybu. Studenty bylo málo používané.
4. Úprava některého kroku řešení – studenti si představili situaci jiným způsobem nebo si úlohu upravili pro menší čísla, než která byla v zadání. To však může změnit povahu problému.
5. Studenti úlohu vyřešili jinou metodou a porovnali výsledky. Jedná se o častou a užitečnou metodu, ale je zde riziko, že student získá dvě stejné a přesto nesprávné odpovědi, pokud jsou řešení provázána.

Výsledky použití strategie 5 ukazuje tabulka 4.

Tabulka 4: Použití strategie 5

<table>
<tr><th>Celkové použití strategie 5</th><th>První metoda řešení (před použitím strategie 5)</th><th>Druhá metoda řešení (použití strategie 5)</th><th>Porovnání výsledků</th><th>Volba řešení</th><th>Celkem</th></tr>
<tr><td rowspan="8">57 případů</td><td rowspan="6">Nesprávné řešení (43 případů)</td><td rowspan="2">Správné řešení (13 případů)</td><td rowspan="2">Různé</td><td>Druhé</td><td>12</td></tr>
<tr><td>První</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Nesprávné řešení (30 případů)</td><td>Stejné</td><td>Stejné</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Různé</td><td>Druhé</td><td>17</td></tr>
<tr><td>První</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Žádné</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Správné řešení (14 případů)</td><td>Správné řešení (12 případů)</td><td>Stejné</td><td>Stejné</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Nesprávné řešení (2 případy)</td><td>Různé</td><td>Druhé</td><td>2</td></tr>
</table>

Z celkového počtu 57 případů použití se touto metodou zlepšilo 24 řešení.

Studenti se pokusili ověřit 219 řešení. Tabulka 5 ukazuje, jaké při tom volili strategie.

Tabulka 5: Zvolené strategie a zlepšení řešení

| | Typ strategie ověření řešení | Počet pokusů ověření touto strategií | Počet případů, ve kterých mělo ověření vliv na zlepšení řešení |
|---|---|---|---|
| 1. | Přepracování řešení | 83 | 2 |
| 2. | Přidání odůvodnění k řešení | 57 | 12 |
| 3. | Posouzení přiměřenosti odpovědi | 11 | 3 |
| 4. | Úprava některého kroku řešení | 11 | 2 |
| 5. | Studenti úlohu vyřeší jinou metodou a porovnají výsledky | 57 | 13 |
| | Celkem | 219 | 32 |

Nejčastěji používanou kontrolou byla 1 (38 %), 2 (26 %) a 5 (26 %). Mezi nejúčinnější kontroly patří strategie 2 a 5.

Výzkum ukázal, že kombinatorika je komplexní téma, vždyť jen 43 ze 108 původních řešení bylo správné. Dále se potvrdilo, že je nutné studenty vést k ověřování řešení u kombinatorických úloh. Někteří studenti jsou schopni najít způsob, jak ověřit své řešení bez předchozí výuky, především pokud jim někdo řekne, že je jejich řešení chybné. Avšak také se ukázalo, že mnoho studentů, kteří dělali kontrolu řešení ať z vlastní iniciativy nebo na výzvu výzkumníků, nebylo schopno najít efektivní metodu ověřování a nenašli a neopravili chybu. Různé strategie ověřování správnosti řešení kombinatorických úloh by tedy měly být zařazeny do výuky kombinatoriky.

Jak se zmiňuji na začátku tohoto oddílu, kontrola řešení je důležitá nejen u kombinatorických úloh. Zajímalo mě, jaké způsoby kontroly řešení jsou možné u kombinatorických úloh a zda žáci zkoušky řešení dělají. Ve svém výzkumu jsem se pokusila tento faktor sledovat; zjištění uvedu v kapitole 4.

## 3.4 Výzkum zabývající se výukou kombinatoriky s využitím interaktivní tabule a porovnání s výsledky žáků, kteří se učí kombinatoriku standardně

Několika otázkami týkajícími se kombinatoriky se ve své disertační práci „Interaktivní metody ve výuce matematiky“ zabývá M. Kafková.

Výzkumu se zúčastnili žáci tří gymnázií (z Českých Budějovic, Prachatic a Benešova). V tabulce 6 uvedu přehled údajů k jednotlivým třídám.

Tabulka 6: Údaje o třídách

| Třída | Škola | Počet žáků | Počet hodin před 1. testem | Počet hodin mezi 1. a 2. testem |
|---|---|---|---|---|
| 2.A | Gymnázium v Českých Budějovicích | 27 | 7 hodin | 7 hodin |
| 8A8 oktáva | Gymnázium v Benešově | neuveden | 15 hodin | 3 hodiny |
| 4.B | | 31 | 9 hodin | 6 hodin |
| septima | Gymnázium v Prachaticích | 26 | 17 hodin | 0 hodin |

Třída 2. A, kterou učila autorka, probírala kombinatoriku pomocí interaktivní učebnice. Žáci se nedozvěděli žádné vzorce k řešení kombinatorických úloh, ty řešili pouze pomocí pravidla součtu a součinu. Během výuky se seznámili, pro ulehčení výpočtů, s kombinačním číslem a pojmem $n!$. Až na konci výuky se dozvěděli pojmy variace, permutace a kombinace a příslušné vzorce.

V septimě Gymnázia v Prachaticích se úlohy řešily převážně logickou úvahou, na konci každého tématu se odvozovaly obecné vzorce, které studenti mohli používat.

Ve třídách Gymnázia v Benešově se kombinatorika probírala podle učebnice od E. Caldy „Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika". U každého kombinatorického tématu se odvozovaly jednotlivé vzorce.

M. Kafková ve svém výzkumu zadala celkem tři testy. Vstupní, kterým zjistila u žáků jejich aktuální matematické znalosti, a následně 2 testy kombinatorické, pomocí kterých zjišťovala rozdíly mezi žáky jednotlivých tříd v tom, jaké mají obtíže při řešení úloh a především do jaké míry žáci kombinatoriku pochopili.

Vstupní test napsalo 99 žáků a obsahoval 7 úloh (množiny, dělitelnost, výrazy, funkce, geometrie, kombinatorika) a žáci mohli získat celkem 7 bodů. Pouze 25 % žáků získalo 4 a více bodů, nejlépe dopadli žáci oktávy z Gymnázia v Benešově, kde necelých 48 % napsalo test alespoň na 4 body.

První test z kombinatoriky psala každá třída po jiném počtu odučených hodin, viz tabulka 6. Učitelé test zadali, až když byli přesvědčeni, že by žáci měli test zvládnout. Test obsahoval 6 úloh (viz oddíl 4.3), celkem mohli žáci získat 10 bodů. Nejlépe dopadla třída autorky, tj. 2. A, kde necelých 80 % žáků získalo alespoň 5 bodů, tj. nejhůře trojku. V ostatních třídách alespoň 5 bodů získalo 52 %, 42 %, 39 % (oktáva, 4. B, septima). Podrobnější výsledky testu uvedu v oddíle 4.3, kde je porovnám s výsledky vlastního výzkumu.

Druhý test z kombinatoriky obsahoval 7 úloh, kde se žáci museli rozhodovat mezi 6 skupinami (variace, permutace, kombinace s opakováním i bez), test obsahoval také jednu rovnici. Žáci mohli získat maximálně 16 bodů. Alespoň 7 bodů, tj. trojku, získalo nejvíce žáků opět ve třídě autorky, tj. téměř 70 %. V ostatních třídách to bylo pouze 42 %, 34 %, 23 % (septima, 4. B, oktáva).

Dle zjištění autorky výzkumu byly velké rozdíly v řešení úloh mezi třídami. Žáci ve třídách, kde se učily i vzorce, se je také snažili aplikovat, málokdy úlohu řešili vlastním úsudkem bez použití vzorců. Pokud zadání úlohy nebylo jednoduché, ve smyslu pouhého dosazení do vzorce, měli žáci problémy s jejím řešením. Žáci, kteří se učili kombinatoriku bez použití vzorců, nad úlohami uvažovali, řešili vlastním úsudkem, výuka je více bavila a byli celkově úspěšnější (M. Kafková, 2010).

Výzkum M. Kafkové je pro mou práci důležitý, protože se bezprostředně dotýká výuky kombinatoriky na střední škole, konkrétně s použitím interaktivní tabule a bez používání vzorců. M. Kafková se zabývá porovnáním způsobů výuky a výsledků žáků na gymnáziích, já budu ve svém výzkumu (viz kap. 4) porovnávat učitelky a žáky středních odborných škol. Proto jsem také pro svou práci použila zadání 1. testu, který navrhla a použila ve svém výzkumu M. Kafková.

# 4 Vlastní výzkum

Během své praxe a především během své práce učitelky na střední škole při diskusích se zkušenějšími kolegy jsem si začala při výuce kombinatoriky uvědomovat, že každý učitel má k výuce kombinatoriky jiný přístup. Proto jsem si položila tyto otázky:

Jak učí kombinatoriku mí kolegové?

Jak se jejich způsob výuky odráží v uvažování a řešení úloh u žáků?

Na tyto otázky jsem se snažila najít odpovědi pomocí rozhovorů s učiteli a náslechů na jejich hodinách a testů, které byly zadány žákům.

Z důvodu dostupnosti jsem zvolila tři střední odborné školy (Obchodní akademii, Střední průmyslovou školu a Integrovanou střední školu) v malém středočeském městě. Rozhovor jsem udělala s celkem šesti vyučujícími matematiky, z toho byl jeden muž. Jedna paní učitelka ještě nikdy kombinatoriku neučila. Náslechy jsem vykonala u dvou učitelek.

Na dvou středních školách (Střední průmyslové škole a Integrované střední škole) jsem nechala zadat test v celkem šesti třídách u dvou učitelek (na každé škole dala jedna paní učitelka testy ve třech třídách). Celkem test vyplnilo 97 žáků 4. ročníku střední školy.

## 4.1 Rozhovory s učiteli

Jak jsem uvedla výše, rozhovor jsem udělala s šesti učiteli, údaje o nich jsou uvedeny v tabulce 7.

Tabulka 7: Seznam učitelů

| Učitel/ka | SŠ, na které učí | Délka praxe na SŠ | Poznámka |
|---|---|---|---|
| BO | Obchodní akademie | 30 let | v době dotazování kombinatoriku neučila |
| SI | Integrovaná střední škola HPOS | 4 roky | kombinatoriku učila poprvé |
| CS | Integrovaná střední škola HPOS | 7 let | pan učitel, který kombinatoriku v době dotazování neučil |
| VS | Integrovaná střední škola HPOS | 25 let | kombinatoriku učila, byla jsem u ní na náslechu |
| HS | Střední průmyslová škola | 17 let | kombinatoriku učila, byla jsem u ní na náslechu |
| RP | Střední průmyslová škola | 26 let | v době dotazování kombinatoriku neučila |

Otázky pro rozhovor jsem podle vývoje rozhovoru trochu upravovala či přehazovala jejich pořadí. Připravené jsem měla následující otázky:

1. Jak dlouho učíte na střední škole?
2. V jakých ročnících se na vaší škole učí kombinatorika?
3. Už jste tuto látku učil/a?
4. Jaké obtíže žáci u kombinatoriky podle vás mají?
5. Jak přistupujete k výuce kombinatoriky? Podle čeho se řídíte? Jaké zdroje používáte? Jak probíhají vaše první hodiny při výuce kombinatoriky? Jakými příklady začínáte?
6. Jaká je výhoda vašeho přístupu ke kombinatorice oproti např. přístupu v učebnicích?
7. Požadujete po žácích, aby si pamatovali vzorce a používali je, i když by úlohy dokázali vyřešit jinak (bez použití vzorců)? Když už chcete, aby žáci používali vzorce, mohou používat tabulky či jiné pomůcky, kde by měli vzorce zapsány?
8. Používal/a jste někdy jiný přístup při výuce kombinatoriky? Proč jste u něj nezůstal/a?
9. Jaké výsledky v kombinatorice žáci mají?

Rozhovory probíhaly ve školním roce 2013/2014 a jejich délka byla mezi 15 a 30 minutami. Zaznamenávala jsem je na diktafon a záznam následně přepsala do protokolů. Shrnutí poznatků z rozhovorů následuje.

Tabulka 7 ukazuje, jakou zkušenost s výukou matematiky dotazovaní učitelé měli.

Pouze na Obchodní akademii se kombinatorika vyučuje již ve třetím ročníku. Na ostatních školách mají kombinatoriku zařazenu až ve čtvrtém ročníku studia.

Až na učitelku SI měli všichni učitelé zkušenost s výukou kombinatoriky. S učitelkou jsem SI tedy rozhovor vedla směrem do budoucnosti, jak plánuje výuku kombinatoriky, čeho se obává apod.

U otázky o obtížích v kombinatorice se někteří vyučující vyjádřili konkrétně ke kombinatorice, jiní však mluvili obecně, v čem spatřují problém u žáků v matematice.

Učitelé se vesměs shodovali, že většina žáků má problém rozlišit variace, kombinace a permutace, nejsou schopni poznat, zda záleží či nezáleží na pořadí. Dále mají žáci problém pochopit zadání, porozumět textu, což se prolíná celou matematikou, hlavně těmi oblastmi, kde se vyskytují slovní úlohy. Problémem jsou podle učitelů také špatné matematické základy, které žákům dělají problémy při řešení kombinatorických úloh. Učitelé uváděli, že žáci nemají problémy, pokud řeší jednoduchou úlohu, kde už je ze zadání jasné, jakou operaci (variace, permutace, kombinace) mají použít, nebo pokud mají vypočítat faktoriál nebo kombinační číslo či řešit rovnici, kterou nemusejí sestavovat.

BO: „Špatně se jim rozlišuje, co je kombinace a co je variace, to je hlavní problém. Myslím, že celkem bez problémů se popasují, když pomine ten prvotní šok z faktoriálů a z kombinačního čísla, že to prostě je nové značení, tak pak to nedělá problém. Dobře se s nimi naučí pracovat a řešit takové standardní rovnice nerovnice s faktoriály a s kombinačními čísly. Problém je, když je slovní úloha; největší problém jsou slovní úlohy typu: Zvětší-li se počet prvků o 2, zvětší se počet variací, kombinací druhé třídy o něco nebo několikrát, tak se jim pak špatně sestavuje ta rovnice. Sama nevím proč, ale u těchto úloh prostě narážíme.“

VS: „Pochopit zadání úlohy, dvě základní pravidla, která nejsou většinou schopni si úplně uvědomit; když řeší, zda se jedná o variace, permutace, nebo kombinace, tak to jedno základní pravidlo, zda záleží, nebo nezáleží na pořadí ve skupinách, to je pro ně problém a je to zase dáno tím, že oni by měli umět číst úlohu, porozumět textu a vzhledem k tomu, že mají problémy s porozuměním textu, tak se to samozřejmě promítá i do slovních úloh tady toho typu.“

Problémy podle učitelů začínají, když se do testu nedávají úlohy jen na jeden typ operace, ale jsou to již smíšené úlohy. To potvrzuje učitelka VS, která to přisuzuje tomu, že žáci „prostě nepřemýšlí, neuvažují“. Učitelka SI se vyjadřuje podobně: „Pokud bude příklad ‚vypočítej kombinační číslo, permutace…‘, tak to bude bez problémů, to dosadí do vzorce. Ale pokud bude slovní úloha, na kterou bude třeba zvolit vhodnou metodu výpočtu, tak to bude problém.“

Z hlediska výsledků žáků jen učitelka BO uvedla, že nejsou až tak špatné, pokud se kombinatorika vezme jako celek. Ostatní vyučující uváděli, že jejich výsledky jsou „strašné“.

S variacemi, permutacemi a kombinacemi, pokud se vyskytují ve slovních úlohách, mají podle učitelů žáci problémy, ale u rovnic s faktoriály či kombinačními čísly nebo s binomickou větou velké problémy nemají, tady se prý dá naučit postup.

BO: „No, překvapivě ne tak špatný, ale když se to vezme jako celek. Protože poměrně bezproblémové jsou pro ně ty rovnice nebo nerovnice s faktoriály, s kombinačními čísly, to se naučí, odstraní faktoriál nebo kombinační číslo a pak je to normální kvadratická rovnice, nerovnice, už jim to nedělá tak velký problém. Celkem dobře se naučí pracovat s binomickou větou, ta jim taky nedělá problémy, a asi z těch tří částí nejproblematičtější jsou pro ně tedy slovní úlohy, ale to zase není nic divného, protože slovní úlohy a práce s textem je pro ně vždycky nejtěžší.“

U otázky týkající se přístupu k výuce kombinatoriky se odpovědi dotazovaných učitelů lišily.

Učitelky BO, VS, HS a RP při výkladu kombinatoriky začínají tzv. úvodní hodinou, kde žákům předloží několik reálných kombinatorických úloh, aniž by žáci něco věděli o kombinatorice, a snaží se je řešit. Postupně se žáci pomocí těchto úloh seznamují s variacemi, permutacemi a kombinacemi, ze zadání úlohy zjišťují, o jakou kombinatorickou operaci se jedná, až poté si říkají definice a odvozují vzorce. Záleží také na reakcích žáků, u některé třídy jsou žáci schopnější řešit i složitější příklady.

BO: „Máme na začátku úvodní hodinu, kde jim předestřu asi tak 12 nebo 15 různých případů, kdy se seznamují s kombinatorickými úlohami, a vysvětlíme si, co jsou variace, kombinace a permutace, a nechávám je, aby si ty úlohy roztřídili do těchto tří kategorií, aby k tomu určili $n$ a $k$ a jestli jsou s opakováním, nebo bez opakování. To je první hodina. A když toto uděláme a naučí se nebo měli by se na tom naučit rozlišit ty konkrétní případy, kdy se jedná o variace a kdy se jedná o kombinace, tak pak teprve začínáme s variacemi, odvozujeme vztahy a počítáme úlohy na variace, na permutace a potom na kombinace."

VS: „Mám vzorové příklady z praxe, kde se žáci sami, aniž by věděli, že se jedná o kombinatoriku, seznámili s úlohami typu, které patří do kombinatoriky."

Zbylí dva učitelé začínají rovnou výkladem látky. Ukážou žákům vzorový příklad a na něj aplikují teorii (obdobně je to ve většině učebnic).

SI: „Řídím se podle ŠVP (…), co se chce u státní maturity, to je pro mě důležitý (…) příklady, které se v maturitních otázkách vyskytly. Tam to potom směruju a samozřejmě se pak také dívám do učebnic, i když to nedělám úplně přesně, vybírám spíše ty jednodušší příklady, protože máme dvě hodiny týdně."

Učitelky BO, HS a RP uvedly podle svých slov „typové úlohy", kterými začínají. Jedná se o úlohy na „slovníky, cesty, jablka, hrušky, zámek u sejfu, telefonní číslo, SPZ v různých modifikacích, morseovka, volba členů volejbalového družstva či třídního výboru".

Každý z dotazovaných učitelů používá různé zdroje, někteří využívají tištěných zdrojů – učebnice, sbírky, jiní mají vlastní příklady nebo také hledají úlohy na internetu či využívají DUMy.[13]

Otázku „Jaká je výhoda vašeho přístupu ke kombinatorice oproti např. přístupu v učebnicích?" jsem položila pouze učitelkám BO, VS, HS a RP, které začínají tzv. úvodní hodinou, ostatní učitelé učí podobně, jako je tomu v učebnicích.

[13] DUM – digitální učební materiál na www.rvp.cz.

Učitelky BO, HS a RP se odkazovaly právě na tu první hodinu, na rozlišení variací, permutací a kombinací, použití vlastních příkladů. Paní učitelka BO řekla: „No, myslím si, že hlavně v té první hodině, protože to v učebnici nevidím tak dobře rozlišený, omezuje se to tam na teoretickou definici a já potřebuju, aby se děti naučily v konkrétních případech určit, o co se jedná, jestli o variace, kombinace, nebo permutace." Paní učitelka VS si naproti tomu nemyslí, že by měla úplně jiný přístup, v učebnicích se také začíná příkladem.

VS: „(…) většina učebnic vychází s nějakým příkladem, třeba taková klasická mám pocit, že to je v gymnaziální učebnici, jak se domluvil kovář s majitelem koně, že mu oková toho koně a že za to bude chtít jenom takhle málo, ale potom za další podkovy bude chtít tolik a tolik, to je taková klasická, vlastně už ze starověku, úloha, která právě třeba v těch učebnicích gymnaziálních je na úvod (…). Neřekla bych, že je to úplně nějaký jiný přístup, ale je pravda, že ne asi ve všech učebnicích, ale jak říkám, já používám těch učebnic jenom pár určitě, když pracuji s nějakými novými příklady nebo novými přístupy, tak to spíš zjišťuju přes internet než v učebnicích."

Pouze učitelka RP chce, aby si žáci při probírání látky vzorce pamatovali: „Při probírání látky chci, aby si vzorečky pamatovali, ale u čtvrtletní písemné práce smějí mít tabulky."

Ostatní učitelé nepožadují po žácích zapamatování vzorců, mohou používat např. „učební pomůcku", kde mají vzorce vypsané, nebo „vzorníček" či tabulky.

BO: „Ne. Nemusí mít ani tabulky, ale v prvním ročníku si zakládáme sešitek ‚vzorníček' a tam si průběžně připisují vzorečky."

VS: „Ne, mají je v tabulkách, (…) na ty výpočty běžné v hodinách jim dovoluji vytvořit si ‚učební pomůcku', to znamená ne tahák, ale ve tvaru opravdu čtvrtka, barevné fixy, popsáno atd. Na těch učebních pomůckách nesmí být vzorové příklady, pouze jenom vzorce."

Učitelka VS a učitel CS učí kombinatoriku podle svých slov stále stejným způsobem, jiný přístup nepoužívali. Ostatní učitelky učí nyní jinak. Učitelka BO začínala učit kombinatoriku podle učebnice, nyní má svůj přístup (zmiňovanou úvodní hodinu). Další uvedly, že každý rok kombinatoriku učí jinak, záleží na složení třídy: „Každý rok učím kombinatoriku trochu jinak, záleží, jaká je třída. Také mám na žáky rok od roku nižší nároky, postupem času ji učím více jednoduše a minimum, co musím." (HS)

## 4.2 Náslechy na hodinách

Na vyučovacích hodinách, kde se probírala kombinatorika, jsem se byla podívat u dvou učitelek (HS, VS) – u každé na jedné vyučovací hodině. Obě hodiny nejdříve stručně popíši a následně provedu rozbor s cílem identifikovat hlavní rysy výukového přístupu obou učitelek.

### 4.2.1 Náslech u učitelky HS

Na náslechu u paní učitelky HS jsem byla v říjnu 2013, byla to třetí hodina kombinatoriky, jednalo se o třídu 4. PA a přítomných bylo 20 žáků. Tato třída se zúčastnila mého výzkumu (viz oddíl 4.3).

Žáci si nejprve zopakují pravidlo součinu. Paní učitelka vyvolává žáka, který se snaží říct pravidlo součinu, učitelka mu radí, aby uvedl příklad. Žák neví, tak uvádí příklad sama:

1. Máme k dispozici patery kalhoty, 6 košil a 2 bundy. Kolika způsoby se můžeme obléci, jestliže si vezmeme od každého druhu jeden na sebe?

Učitelka vyvolává dalšího žáka a pomáhá mu dát pravidlo dohromady. Uvádí další příklad:

2. Kolik je čtyřciferných čísel, jestliže se číslice nemohou opakovat?

Učitelka uvádí příklad čísla, které nepatří mezi čtyřciferná čísla, kde se nesmí číslice opakovat. Pomáhá žákům v řešení návodními otázkami; např. Kolik je čísel?, Kolik je cifer?, žáci postupně odpovídají. Jeden žák je vyvolán a říká, že na místo tisícovek je možnost dát 10 číslic, učitelka se ptá: „Může být nula na místě tisícovek?“, a jestli je opravdu možno dát na místo tisícovek 10 číslic. Správně odpovídá jiný žák. Učitelka zadává další úlohu:

3. Kolik je čtyřciferných čísel, jestliže se číslice mohou opakovat?

Jeden žák odpovídá a učitelka píše na tabuli a dává další úlohu:

4. Kolik je čtyřciferných čísel dělitelných 10, jestliže se číslice mohou/nemohou opakovat?

Vyvolaný žák chce nejprve řešit úlohu s opakováním číslic, odpovídá na otázky, které pokládá učitelka, např. Kolik cifer?, Kolik čísel?, Kolik je možností na místě jednotek?, A co místo tisícovek?, Může tam být nula?. Spolu s učitelkou žák úlohu vyřeší, učitelka píše řešení na tabuli. Další žák s pomocí učitelky a návodných otázek řeší úlohu bez opakování číslic.

Dále na úloze 5 žáci opakují, co znamená, že záleží, resp. nezáleží na pořadí.

5. Vybereme tři žáky ze třídy.

Učitelka se ptá: „Jestliže máme ze třídy vybrat tři žáky, je jedno, jestli vybereme Martina, Adama a Petra, nebo Adama, Petra a Martina?“ Žáci říkají, že je to jedno. Učitelka pokračuje a ptá se: „A co když první vybraný dostane 100 Kč, druhý 200 Kč a třetí 500 Kč. Je jedno, jestli vybereme Martina, Adama a Petra, nebo Adama, Petra a Martina?“ Žáci správně usuzují, že to jedno není.

Učitelka zadává další úlohu:

6. Kolika způsoby můžete navštívit svých 5 oblíbených restaurací, jestliže chceme navštívit všechny za večer?

Žáci nejprve tipují 25, 20, pak učitelka počítá s žáky na tabuli pomocí pravidla součinu. Následně zadává podobnou úlohu:

7. Kolika způsoby můžete navštívit 3 restaurace z 8 existujících restaurací ve městě?

Úlohu vyřeší žáci správně a učitelka upozorňuje na to, že se jedná o uspořádané trojice, a odkazuje se na minulou hodinu, aby žáci určili, zda se jedná o variace, či kombinace. Žáci určují správně, že se jedná o variace, a učitelka zapisuje na tabuli $V_3(8)$, vrací se k úloze 6 a zapisuje na tabuli $V_5(5)$.

Dále učitelka pokládá otázku: „Je možné při řešení úlohy použít variace i pravidlo součinu?“ Žáci přemýšlejí a učitelka se odkazuje na úlohu 2. Jeden žák se hlásí: „Variace čtvrté třídy z deseti.“ Učitelka se ptá ostatních, jestli je to správně. Po správné reakci jednoho žáka, že ne, se ptá: „Proč? Co tam vadí? Jaká by tam byla i čtveřice?“ Žáci mlčí. Učitelka tedy vypočítá s žáky $V_4(10)$ a porovnává získaný výsledek s výsledkem, který jim vyšel u úlohy 2. Učitelka pokládá další otázky, jeden žák upozorňuje, že jsou tu navíc i čísla, která mají na místě tisícovek nulu. Třída dořeší úlohu pomocí odečtení čísel, která mají na místě tisícovek nulu.

Paní učitelka žákům ukazuje, jak počítat variace na kalkulačce, pomocí funkce „nPr“ a zadává několik úloh:

8. $V_6(8)$ 9. $V_{10}(20)$

Upozorňuje, že vedle je funkce pro počítání kombinací „nCr“. Pokračuje úlohou:

10. Z 8 barev máme vytvořit trikoloru. Kolik je takových trikolor?

Nejprve si řeknou, co je to trikolora, a poté vyvolaný žák diktuje řešení na tabuli. Učitelka zadává podobnou úlohu.

11. Z 10 barev máme vytvořit trikoloru. Kolik je takových trikolor?

Žák správně diktuje $V_3(10)$. Učitelku dále zajímá, jak zapsat variace vzorcem. Vyvolává žáky a pomocí otázek dávají vzorec dohromady. Dále pokračuje variacemi $n$-té třídy z $n$ prvků a vrací se k úloze 6, výpočet zapisuje pomocí faktoriálu a seznamuje s ním žáky. Zadává úlohy na faktoriál, chce po žácích, aby ji řekli, jak by faktoriál rozepsali.

12. $7!$ 13. $100!$

Ukazuje výpočet faktoriálů na kalkulačce, žáci vyřeší několik úloh na kalkulačce:

14. $20!$ 15. $9!$ 16. $70!$ 17. $69!$

Učitelka u úloh 16 a 17 upozorňuje na omezení kalkulaček a možnost krácení faktoriálů. Zadává úlohu:

18. $\frac{102!}{100!}$

Pomocí návodních otázek vyřeší s žáky úlohu úpravou čitatele a zkrácením faktoriálů.

Na závěr hodiny chce učitelka po žácích, aby jí řekli, co je to faktoriál a variace. Vyvolaní žáci se snaží dát dohromady odpověď, kterou učitelka doplňuje.

### 4.2.2 Náslech u učitelky VS

Na hodině kombinatoriky u paní učitelky VS jsem byla v únoru 2013, jednalo se o 6. hodinu kombinatoriky ve třídě CR4, přítomných bylo 15 žáků.

Při zápisu do třídní knihy paní učitelka oznamuje žákům, jaký bude průběh hodiny – budou pokračovat s permutacemi, variacemi a nově začnou probírat kombinace, ke kterým jim pustí prezentaci. Než začnou pracovat, mají se podívat na vzorce z minula, které mají v sešitě. Učitelka upozorňuje na učební pomůcku, kterou si mají žáci vyrobit do příští hodiny, kdy budou psát písemku; mohou mít i tabulky. Po zápisu do třídní knihy zadává žákům úlohu k opakování, píše ji na tabuli:

1. Kolik čtyřciferných čísel je možno napsat z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 tak, aby byla dělitelná čtyřmi (číslice se nesmějí opakovat)?

Učitelka připomíná, že probírali variace a permutace, a chce po žácích, aby jí řekli rozdíl mezi uvedenými operacemi a rozhodli, jak budou řešit úlohu 1. Pokládá žákům pomocné otázky: „Jaké mají variace a permutace vlastnosti? Záleží u nich na pořadí?“ Žáci mlčí, učitelka si sama odpovídá a vrací se k řešení úlohy. Učitelka chce po žácích, aby určili $k$ a $n$, žákyně odpovídá $n = 6, k = 4$. Učitelka upozorňuje, že v tomto případě se jedná o všechna čtyřciferná nikoli jen o ta, která jsou dělitelná čtyřmi. Chce po žácích pravidlo dělitelnosti čtyřmi, žáci nevědí, tak jim ho připomíná. Následně společně vypisují dvojice čísel z číslic ze zadání, která jsou dělitelná čtyřmi. Úlohu převádějí na výběr dvojic (tisíce a stovky) ze 4 číslic a na zbývající dvě místa (desítky a jednotky) lze dosadit 8 čísel. Dochází k výpočtu $V(2,4) \cdot 8$. Než začne učitelka řešit na tabuli, ptá se ještě žáků, aby se ujistila, že danou úlohu pochopili: „Proč $V(2,4)$ a ne variace $V(4,6)$?“ Dále paní učitelka pokračuje obecným předpisem pro variace a chce, aby jí žáci nadiktovali, jak jej budou obecně počítat a kolik bude v zápisu činitelů. Žákyně odpovídá: „$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$ a počet činitelů bude roven $k$.“ Učitelka upozorňuje, že je možný ještě jiný vzorec pro výpočet variací, a sice $V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Učitelka píše řešení úlohy 1 na tabuli a žákyně diktuje, jak rozepsat $V(2,4)$ podle vzorce. Učitelka sama dopočítává. Jedna žákyně se ptá: „Jak poznám, kolik bude činitelů?“ Učitelka celé třídě připomíná, jak zjistí počet činitelů, a dává úlohu na procvičení:

2. $V(5,11)$

Žáci diktují možnosti výpočtu uvedené variace, pomocí součinu i pomocí faktoriálů, které se upraví na součin. Učitelka na tabuli dopočítává a upravuje výpočet s faktoriály a upozorňuje na možnost úpravy faktoriálu (př. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$) a krácení, na což zadává úlohu:

3. Upravte $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

Paní učitelka zjišťuje u žáků, co je to faktoriál, co představuje. Jeden žák odpovídá, že vykřičník, učitelka opravuje, že vykřičník je označení faktoriálu, a říká, co je to faktoriál. Zadává úlohu:

4. 6!

Žák diktuje $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, učitelka chce kratší zápis (např. $6 \cdot 5 \cdot 4!$) a vrací se k úloze 3. Učitelka říká, že se faktoriál rozloží a zkrátí, rozloží se to, co je větší, větší je čitatel. Žáci doplňují, jak upravit čitatele, aby se výraz dal krátit. Učitelka píše řešení na tabuli a chce po žácích, aby rozložili i výraz ve jmenovateli. Jedna žákyně odpovídá správně.

Dále začínají probírat kombinace bez opakování. Učitelka pouští prezentaci k výkladu kombinací. Upozorňuje na rozdíl oproti permutacím a variacím, že nezáleží na pořadí prvků, že se jedná o neuspořádanou $k$-tici. Dále v definici naráží na pojem „nejvýše jednou“. Učitelka s žáky řeší rozdíl mezi „nejméně jednou“, „nejvýše jednou“, „právě jednou“. Dále chce, aby si zapsali vzorec pro výpočet kombinací nejprve pomocí faktoriálů, a píše na tabuli. Říká, že je ještě jedna možnost, jak zapsat výpočet kombinací, a sice pomocí kombinačního čísla. Žáky seznamuje s tím, jak se čte výraz v závorce, a upozorňuje, že se nejedná o zlomek, není tam zlomková čára, v čemž podle ní často žáci chybují. Zdůrazňuje, že kombinační číslo představuje kombinaci. Zadává úlohu, žáci mají kombinace zapsat jako kombinační číslo:

5. $K(5,6)$

Pokud si žáci příště přinesou tabulky, tak jim učitelka ukáže, kde hledat kombinace. Zapisuje na tabuli vzorec pro výpočet kombinačního čísla a podotýká, že se takto dá spočítat i kombinace $K(k,n)$.

Učitelka zadává žákům úlohy na výpočet kombinačních čísel a chce po nich, aby si výsledky se zadáním zapsali stranou, aby je měli po ruce na příště a nemuseli je znovu počítat.

6. $\binom{7}{5}$ 7. $\binom{15}{5}$ 8. $\binom{8}{3}$ 9. $\binom{9}{3}$ 10. $\binom{10}{8}$

U šesté úlohy žákyně diktuje výpočet a učitelka zapisuje na tabuli a dopočítává. Žáci píší do sešitu a kontrolují výpočty na kalkulačce. Učitelka klade důraz na propojení pojmů kombinace a kombinační číslo, že hodnota kombinačního čísla je počet kombinací. Úlohu 7 si žáci mají vyřešit sami a společně pokračují úlohami 8 a 9. Učitelka vyvolává žáky, ti diktují výpočet podle vzorce a učitelka píše na tabuli a dopočítává. Na konci hodiny upozorňuje na krátkou písemnou práci z variací, permutací a faktoriálů příští hodinu.

### 4.2.3 Shrnutí náslechů

Je jasné, že na základě pozorování jediné hodiny nelze spolehlivě popsat výukový styl obou učitelek. Nicméně i z těchto dvou hodin jsou zřejmé některé rozdíly mezi nimi, které by mohly ovlivnit přístupy jejich žáků k řešení úloh.

Paní učitelka HS chce po žácích, aby přemýšleli, po vyřčení otázky jim nechává prostor k přemýšlení a odpovědi, teprve po nějaké době odpovídá a řeší úlohu sama. Úlohy volí především ze života žáků, aby je látka více bavila. Předkládá žákům hodně příkladů, aby měli možnost co nejvíce si látku procvičit. Zadání úloh různě upravuje, aby je žáci mohli řešit jinou kombinatorickou operací, např. úlohu zadá nejprve s opakováním, poté chce po žácích, aby ji řešili bez opakování, nebo nejprve u úlohy záleží na pořadí a poté nezáleží na pořadí – žáci se učí rozdíly mezi jednotlivými kombinatorickými operacemi. Nevyžaduje po žácích vzorce při řešení úloh, pokud to není uvedeno v zadání a lze je vyřešit jinak. V případě, že žák úlohu řeší chybně, tak se snaží zapojit celou třídu. Ptá se žáků takovým způsobem, aby došli k závěru, že řešení je chybné, a našli správné řešení. Neřekne okamžitě, že je to špatně (viz řešení úlohy 2 v oddíle 4.2.1). Nebo nechá žáky pokračovat v chybném řešení a pak zadá žákům úlohu, u které bude příslušné řešení správným, a nechá žáky úlohy porovnat (viz řešení úlohy 7 v oddíle 4.2.1).

Paní učitelka VS při procvičování látky žákům pokládá otázky a téměř okamžitě na ně odpovídá, takže jim nedává velký prostor k přemýšlení. Nevyžaduje po žácích definice, ale chce, aby rozpoznali variace, permutace a kombinace na základě vlastnosti, zda záleží, či nezáleží na pořadí, již ze zadání úlohy, a chce po žácích, aby při řešení úloh aplikovali vzorce (resp. alespoň tak řeší úlohy na tabuli, s použitím vzorců). Vzorce si žáci nemusejí pamatovat, mohou používat „učební pomůcku" nebo tabulky. V případě, že žák řeší nebo se chystá řešit úlohu chybně, učitelka ho na chybu upozorní a vede ho ke správnému řešení (viz řešení úlohy 1 v oddíle 4.2.2). Řekne žákům, co by v případě pokračování v chybném výpočtu dostali.

## 4.3 Diagnostický test

Testu se zúčastnilo celkem 97 žáků čtvrtých ročníků tří středních škol. V tabulce 8 je přehled tříd a počet žáků ve třídách včetně počtu hodiny kombinatoriky před testem. Žáci psali test 1 až 2 hodiny po ukončení kombinatoriky.

Tabulka 8: Přehled tříd

| Škola, paní učitelka | Třída[14] | Počet žáků | Počet hodin kombinatoriky před testem |
|---|---|---|---|
| SPŠ – HS | 4. SP | 14 | 22 hodin |
| | 4. PA | 18 | 20 hodin |
| | 4. PB | 20 | 20 hodin |
| ISŠ – SI | HT4 | 16 | 14 hodin |
| | CR4 | 19 | 14 hodin |
| | OB4 | 10 | 13 hodin |

Úlohy testu jsem převzala z výzkumu M. Kafková (viz oddíl 3.4), včetně bodového hodnocení a času, který měli žáci k dispozici. Cílem testu bylo získat přehled, jakými způsoby žáci řeší kombinatorické úlohy a jakých chyb se dopouštějí.

1. *Na schůzi má promluvit pět řečníků A, B, C, D, E (každý právě jednou).*
    a) *Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupeni. (1b) [120; permutace z pěti prvků]*
    b) *Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupeni, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A. (1b) [24; dvě osoby se zafixují a jedná se o permutace ze čtyř prvků]*

[14] Obory jednotlivých tříd: SP – strojírenství; PA, PB – stavebnictví; HT – hotelnictví; CR – cestovní ruch; OB – obchodník.

c) *Určete počet všech možných pořadí jejich proslovů, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A. (1b) [60; počet všech možných pořadí, kdy vystoupí osoba B až po osobě A je stejný jako počet pořadí, kdy osoba A vystoupí až po osobě B, tedy stačí výsledek z 1a vydělit dvěma]*

U úlohy 1 je možné vidět, zda žáci používají při řešení vzorce, nebo si dokážou poradit jinak, v tomto případě například použitím pravidla součinu.

2. *Rotu tvoří 3 důstojnici, 6 poddůstojníků a 60 vojáků.*
   a) *Kolika způsoby z nich lze vybrat četu, kterou tvoří 1 důstojník, 2 poddůstojnici a 6 vojáků? (1b) [2 252 873 700; součin kombinací]*
   b) *Řešte tentýž úkol (vybíráme 1 důstojníka, 2 poddůstojníky a 6 vojáků) pro případ, kdy vybraný důstojník má být velitelem této čety a jeden z poddůstojníků jeho zástupcem. (1b) [4 505 747 400; jeden poddůstojník má být zástupcem velitele, stačí tedy předchozí výsledek vynásobit dvěma]*

Úloha 2 je zaměřena na použití kombinací a pravidla součinu. Žáci musí rozlišit a vhodně použít pravidla součtu a součinu.

3. Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer: *0, 1, 2, 3, 4, 5? Kolik je mezi nimi sudých čísel? (2b) [300; pravidlo součinu; 156; sečteme počet čísel, která mají na místě jednotek 0, 2, 4, ta zjistíme pomocí pravidla součinu]*

První část úlohy 3 je jednoduchá, pokud si žáci uvědomí, kam lze umístit nulu. Druhá část je obtížnější a tím i zajímavější z hlediska způsobů řešení, zde musí žáci již více přemýšlet nejen nad nulou, ale především nad tím, jak poznáme sudé číslo.

4. *Kolika způsoby lze postavit do řady 4 Angličany, 5 Francouzů a 3 Turky, musí-li osoby téže národnosti stát vedle sebe? (1b) [103 680; součinem permutací, zjistíme počet možných pořadí jednotlivých osob u každé národnosti a také jednotlivých národností]*

U úlohy 4 žákům částečně stačí vzorec, musí však také provést určitou úvahu. Musejí si uvědomit, že mají zjistit jednak počet pořadí osob u každé národnosti (permutace osob), ale také jednotlivých národností (pravidlo součinu).

5. *Kolika způsoby je možné vybrat z přirozených čísel menších nebo rovných 30 tři různá čísla tak, aby jejich součet byl roven sudému číslu? (1b) [2030; sečteme výběr tří sudých čísel a výběr 2 lichých a jednoho sudého čísla]*

Úloha 5 vyžaduje řešení úvahou, nestačí použít jen vzorce.

6. *V pekařství dnes prodávají 6 různých druhů rohlíků. Kolika způsoby si může zákazník vybrat 3 rohlíky, má-li být každý jiného druhu? (1b) [20; kombinace]*

Šestá úloha je jednoduchá. Lze ji řešit vzorcem (pro kombinace) nebo úvahou (pravidlo součinu dělené 3!).

Na vypracování testu měli žáci 35 minut a bodové hodnocení je uvedeno v tabulce 9.

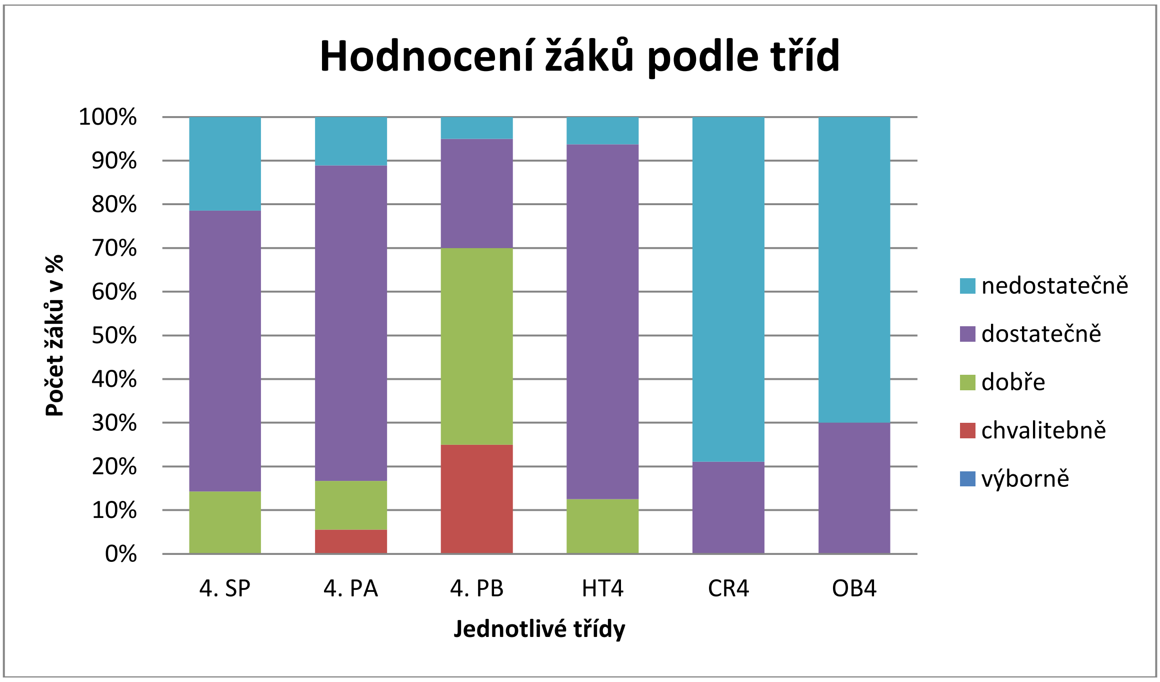
Tabulka 9: Bodové hodnocení testu

| Počet bodů | Známka |
|---|---|
| 10–9 | 1 |
| 8,5–7 | 2 |
| 6,5–5 | 3 |
| 4,5–3 | 4 |
| 2,5–0 | 5 |

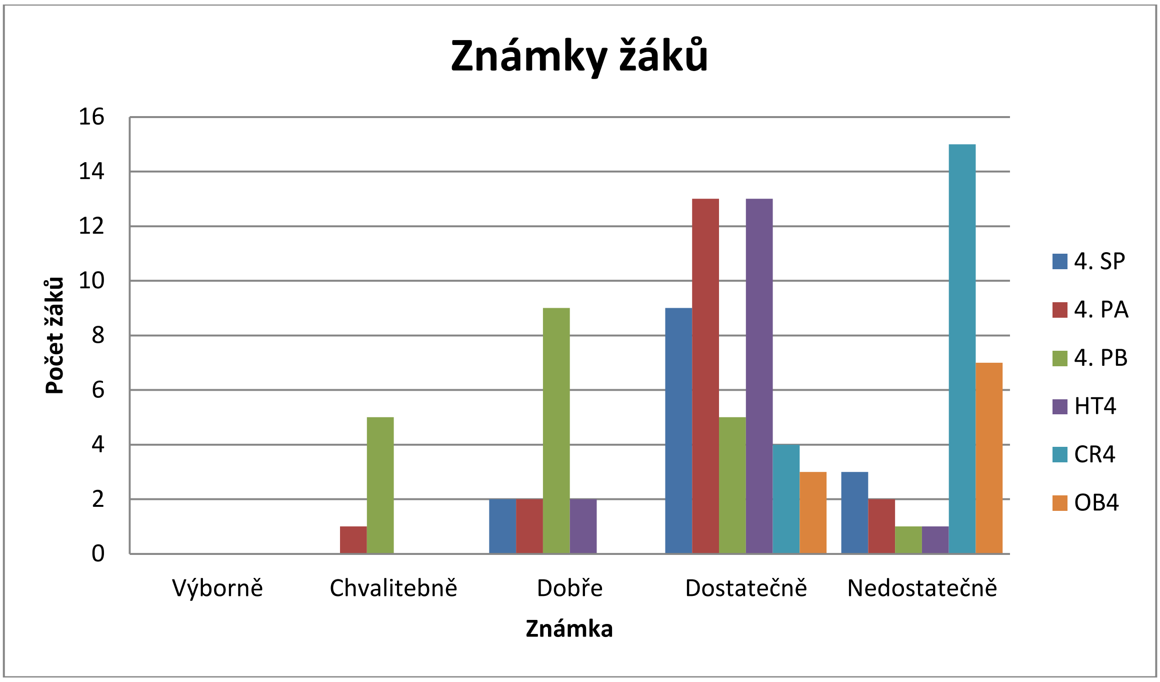
(M. Kafková, 2010, s. 128)

### 4.3.1 Vyhodnocení testu

Níže uvedu výsledky testu žáků zkoumaných tříd (viz obr. 1 a 2) a porovnám je s výsledky testu žáků z práce M. Kafkové.




Obrázek 1: Hodnocení žáků podle tříd

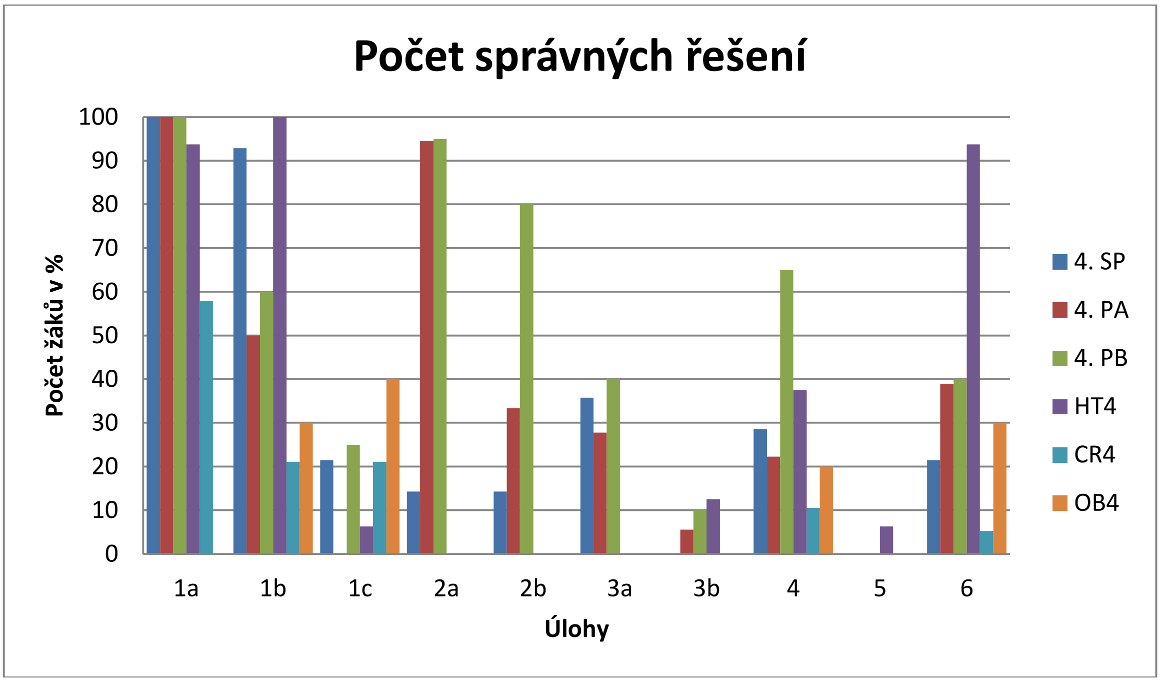



Obrázek 2: Známky žáků

Jak je vidět z obrázků 1 a 2, nejlépe dopadla třída 4. PB, což je třída učitelky HS, a nejhůře třída CR4 paní učitelky SI. Žádný žák nezískal jedničku a nejvíce jich mělo čtyřku (47 z 97 žáků). Dvojku dostalo 6 žáků, jedná se o žáky tříd 4. PA a 4. PB paní učitelky HS. Na trojku test napsalo 15 žáků a pětku dostalo 29 žáků. Celkové výsledky nejsou pro nás tak důležité, třídy nelze mezi s sebou porovnávat, protože jsem neprováděla vstupní porovnání jejich matematických znalostí.

Žáci, které testovala M. Kafková, dopadli o poznání lépe. Ve dvou třídách se vyskytla jednička, ve všech třídách byli žáci, kteří měli dvojku, trojku a čtyřku dostal podobný počet žáků a pětku mělo méně žáků než dvojku. Hodnocení 1 až 3 získalo téměř 54 % žáků, což je téměř o 32 % více než žáci z mého výzkumu. Čtyřku dostalo skoro 34 % žáků, oproti přibližně 48 % žáků z mého výzkumu. Je nutné si však uvědomit, že M. Kafková zkoumala pouze žáky z gymnázia.

Zajímavější jsou výsledky z hlediska jednotlivých úloh a obtíží, které v nich žáci měli.




Obrázek 3: Počet správných řešení

Z obrázku 3 lze vyčíst, že úloha 5 dělala žákům největší problémy, vyřešil ji správně pouze jeden žák (třída HT4). Dále měli žáci problémy s úlohou 3b, tu vyřešilo pouze 5 žáků. Nejlépe si žáci poradili s úlohou 1a, vyřešilo ji 78 z 97 žáků. Podrobněji se jednotlivými úlohami budu zabývat v dalším textu.

I žáci z výzkumu M. Kafkové si nejlépe poradili s úlohami 1a, 1b a 6. Nejobtížnější pro ně byly úlohy 3b a 5.

### 4.3.2 Způsoby řešení u jednotlivých úloh podle tříd

Postupně pro každou úlohu uvedu způsoby řešení, které použily jednotlivé třídy.

1. *Na schůzi má promluvit pět řečníků A, B, C, D, E (každý právě jednou).*
   a) *Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupeni.*

Tabulka 10: Správnost řešení úlohy 1a

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 14 | 18 | 20 | 15 | 11 | 0 | 80,4 % |
| Špatně | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 | 10 | 19,6 % |

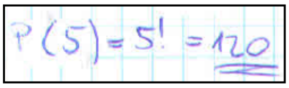
Žáci paní učitelky HS byli při řešení úlohy 1a zcela úspěšní, ale žáci paní učitelky SI už tak úspěšní nebyli. Ve třídě OB4 tuto úlohu nikdo nevyřešil správně, řešili ji pomocí kombinací (viz obr. 4).

Obrázek 4: Ukázka chybného řešení úlohy 1a pomocí kombinací

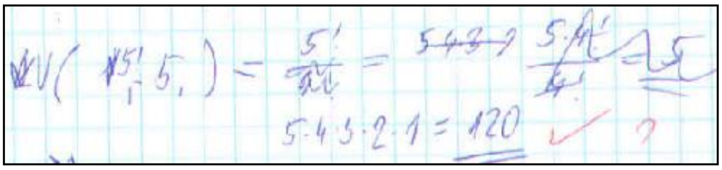
Tabulka 11: Způsoby řešení úlohy 1a

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Permutace | Pravidlo součinu | Variace | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|---|---|
| HS | 79 % | 13 % / 7 | - | 8 % / 4 | - | - |
| SI | 49 % | - | 5 % / 2 | 4 % / 2 | 38 % / 17 | 4 % / 2 |

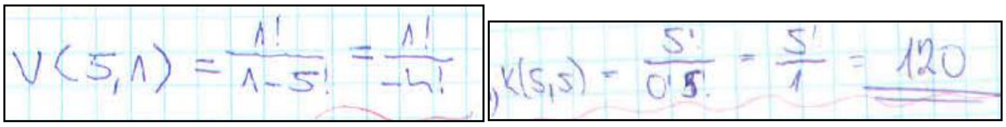
Celkem 16 ze 17 žáků paní učitelky SI, kteří úlohu řešili chybně, ji řešili pomocí kombinací.



Obrázek 5: Ukázka řešení úlohy 1a pomocí permutací



Obrázek 6: Ukázka řešení úlohy 1a pomocí variací



Obrázek 7: Ukázka chybného řešení úlohy 1a pomocí variací a kombinací

Úlohu 1a žáci M. Kafkové vyřešili téměř se 100% úspěšností, k řešení použili permutace (faktoriál) či pravidlo součinu.

b) *Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupeni, má-li řečník B promluvit bezprostředně po A.*

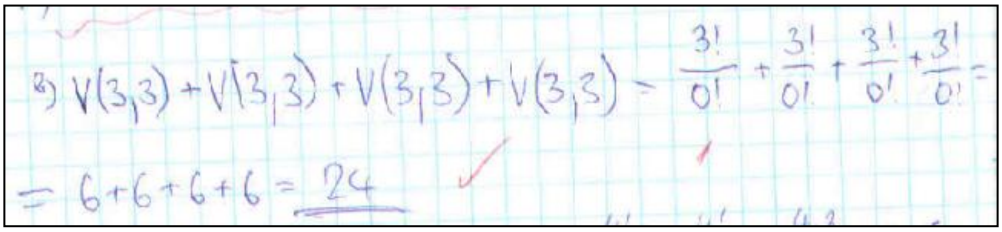
Tabulka 12: Správnost řešení úlohy 1b

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 13 | 9 | 12 | 16 | 4 | 3 | 58,8 % |
| Špatně | 1 | 9 | 8 | 0 | 15 | 7 | 41,2 % |

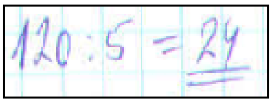
V každé třídě byli žáci, kteří úlohu 1b řešili správně, pouze třída HT4 měla 100% úspěšnost v řešení. Žáci třídy CR4 vyřešili tuto úlohu správně jen z 21%, obě třídy učí paní učitelka SI.

Tabulka 13: Způsoby řešení úlohy 1b

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Permutace | Pravidlo součinu | Variace | 120:5=24 | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| HS | 57 % | 2 % / 1 | - | - | 6 % / 3 | 29 % | 6 % |
| SI | 40 % | - | 7 % / 3 | 4 % / 2 | - | 13 % | 36 % |

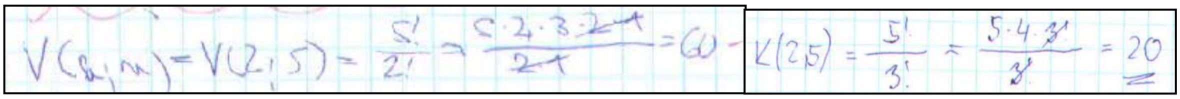



Obrázek 8: Ukázka řešení úlohy 1b pomocí variací




Obrázek 9: Ukázka řešení úlohy 1b


Obrázek 10: Ukázka chybného řešení úlohy 1b




Obrázek 11: Ukázka chybného řešení úlohy 1b

Při řešení úlohy 1b byli žáci M. Kafkové úspěšní z přibližně 77 %. Jejich způsob řešení byl podobný způsobům řešení mnou zkoumaných žáků, použili permutace (zafixování 2 osob a permutace ze 4), pravidlo součinu a rozepsání.

c) *Určete počet všech možných pořadí jejich proslovů, má-li řečník B promluvit až poté, co promluvil řečník A.*

Tabulka 14: Správnost řešení úlohy 1c

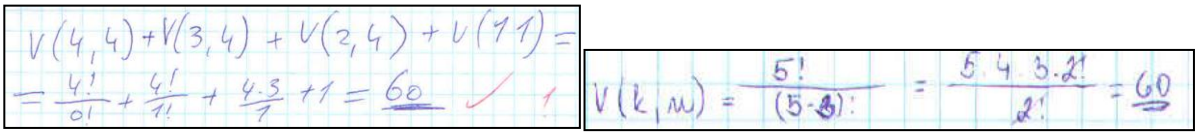
| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 3 | 0 | 5 | 1 | 4 | 4 | 17,5 % |
| Špatně | 11 | 18 | 15 | 15 | 15 | 6 | 82,5 % |

Nejúspěšnější v řešení této úlohy byla třída OB4, což mě velice překvapilo, vzhledem k tomu, že úlohu 1a v této třídě nikdo nevyřešil správně a úloha 1c je podle mého názoru obtížnější než úloha 1a. Ve třídě 4. PA úlohu nevyřešil správně nikdo.

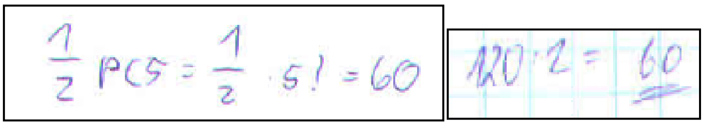
Tabulka 15: Způsoby řešení úlohy 1c

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | $\frac{5!}{2}$ | Variace | 120 : 2 = 60 | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|---|---|
| HS | 15 % | - | - | - | 48 % | 37 % |
| SI | - | 11 % / 5 | 7 % / 3 | 2 % / 1 | 2 % | 78 % |

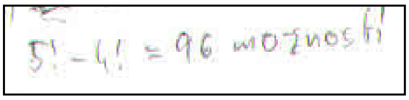
Z pěti žáků od paní učitelky SI, kteří řešili úlohu pomocí variací (viz obr. 12), 3 žáci variacemi řešili i úlohu 1b, dva žáci, úlohu 1b neřešili.




Obrázek 12: Ukázka řešení úlohy 1c pomocí variací




Obrázek 13: Ukázka řešení úlohy 1c




Obrázek 14: Ukázka chybného řešení úlohy 1c

Úlohu 1c žáci M. Kafkové vyřešili s téměř 33% úspěšností. Úlohu řešili rozepsáním nebo dělením $\frac{5!}{2} = 60$.

2. *Rotu tvoří 3 důstojnici, 6 poddůstojníků a 60 vojáků.*
   a) *Kolika způsoby z nich lze vybrat četu, kterou tvoří 1 důstojník, 2 poddůstojnici a 6 vojáků?*

Tabulka 16: Správnost řešení úlohy 2a

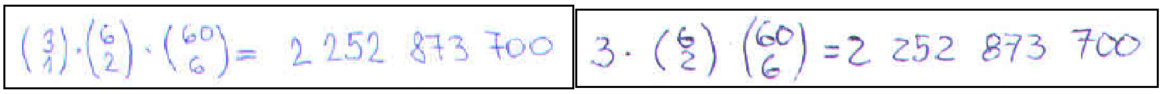
| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 2 | 17 | 19 | 0 | 0 | 0 | 39,2 % |
| Špatně | 12 | 1 | 1 | 16 | 19 | 10 | 60,8 % |

Tuto úlohu vyřešili pouze někteří žáci paní učitelky HS, nejlépe třídy 4. PA (94 %) a 4. PB.

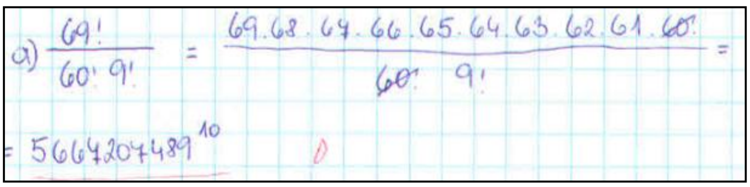
Tabulka 17: Způsoby řešení úlohy 2a

| Učitelka/Způsoby řešení | Součin kombinací | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|
| HS | 73 % | 19 % | 8 % |
| SI | - | 24 % | 76 % |

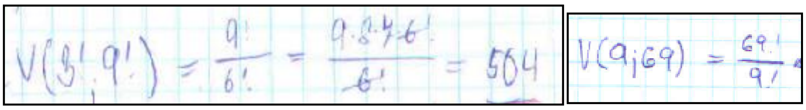
U paní učitelky HS řešili úlohu úspěšně žáci pomocí součinu kombinací (obr. 15). Ostatní žáci řešili úlohu chybně, nebo vůbec. Žáci paní učitelky SI úlohu řešili chybně, nebo vůbec.



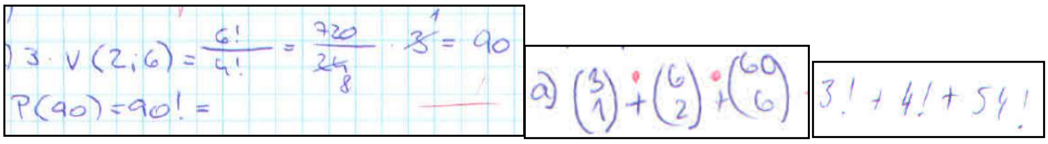

Obrázek 15: Ukázka řešení úlohy 2a pomocí součinu kombinací



Obrázek 16: Ukázka chybného řešení úlohy 2a pomocí kombinací




Obrázek 17: Ukázka chybného řešení úlohy 2a pomocí variací




Obrázek 18: Ukázka chybného řešení úlohy 2a

Žáci M. Kafkové úlohu 2a vyřešili z téměř 63 % správně. K řešení využili kombinační čísla, pravidlo součinu, někteří použili chybně pravidlo součtu, našla se řešení jen s napsaným výsledkem či použitím variací.

b) *Řešte tentýž úkol (vybíráme 1 důstojníka, 2 poddůstojníky a 6 vojáků) pro případ, kdy vybraný důstojník má být velitelem této čety a jeden z poddůstojníků jeho zástupcem.*

Tabulka 18: Správnost řešení úlohy 2b

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 2 | 6 | 16 | 0 | 0 | 0 | 24,7 % |
| Špatně | 12 | 12 | 4 | 16 | 19 | 10 | 75,3 % |

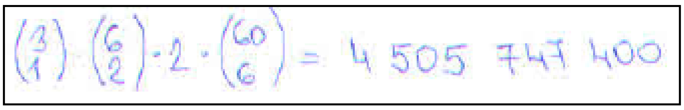
Úlohu 2b také ve třídách paní učitelky SI nevyřešil nikdo správně, u paní učitelky HS bylo u žáků zhoršení v úspěšnosti řešení. Nejlépe dopadla třída 4. PB, kde správně vyřešilo úlohu 80 % žáků.

Tabulka 19: Způsoby řešení úlohy 2b

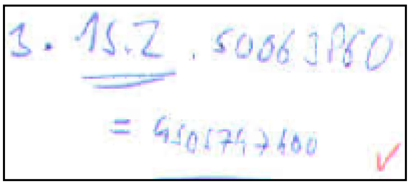
| Učitelka/Způsoby řešení | Kombinace | Součin | Variace, kombinace | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|---|
| HS | 36 % | 6 % | 4 % | 23 % | 31 % |
| SI | - | - | - | - | 100 % |

Žáci paní učitelky HS řešili úlohu opět kombinacemi (viz obr. 19), tři žáci použili k řešení součin (obr. 20), nebo zdvojnásobili výsledek řešení úlohy 2a), dva žáci řešili úlohu součinem variací a kombinací (obr. 21), ostatní žáci řešili úlohu chybně (12 žáků, 5 z nich udělalo numerickou chybu) nebo vůbec.

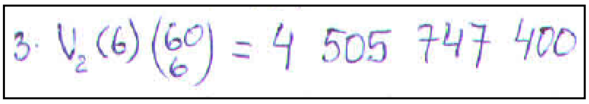
Žáci ze tříd paní učitelky SI se o vyřešení této úlohy vůbec nesnažili.



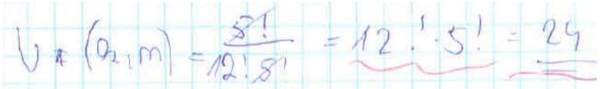

Obrázek 19: Ukázka řešení úlohy 2b pomocí kombinací



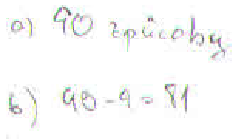

Obrázek 20: Ukázka řešení úlohy 2b pomocí součinu




Obrázek 21: Ukázka řešení úlohy 2b pomocí součinu variací a kombinací



Obrázek 22: Ukázka chybného řešení úlohy 2b




Obrázek 23: Ukázka chybného řešení úlohy 2

Úlohu 2b žáci M. Kafkové vyřešili s přibližně 26% úspěšností. K řešení použili stejné postupy jako u úlohy 2a (kombinační číslo, variace, pravidlo součinu) a několik žáků napadlo vynásobit dvěma výsledek z úlohy 2a.

3. *Kolik čtyřciferných přirozených čísel s navzájem různými ciframi lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 4, 5?*

Tabulka 20: Správnost řešení úlohy 3a

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 5 | 5 | 8 | 0 | 0 | 0 | 18,6 % |
| Špatně | 9 | 13 | 12 | 16 | 19 | 10 | 81,4 % |

Úlohu 3a vyřešili správně pouze někteří žáci paní učitelky HS, žáci paní učitelky byli zcela neúspěšní.

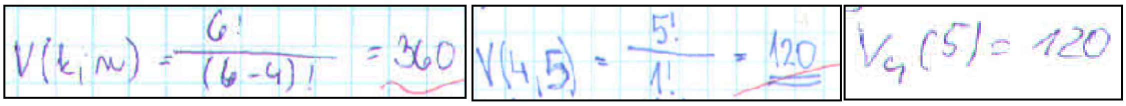
Tabulka 21: Způsoby řešení úlohy 3a

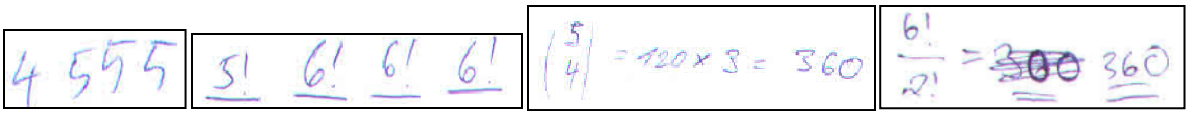
| Učitelka/Způsoby řešení | Pravidlo součinu | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|
| HS | 32,7 % | 1,9 % | 32,7 % | 32,7 % |
| SI | - | - | 51,1 % | 48,9 % |

Žáci paní učitelky HS řešili úlohu 3a pomocí pravidla součinu, jeden žák napsal rovnou výsledek a ostatní žáci řešili úlohu chybně, např. 9 žáků použilo chybně pravidlo součinu (obr. 24), 4 žáci napsali rovnou chybný výsledek, dále se jako řešení vyskytly variace, součin permutací i kombinace, 17 žáků úlohu neřešilo vůbec.

Ve třídách paní učitelky SI nevyřešil úlohu správně nikdo, 23 žáků se snažilo o řešení pomocí variací, 11 žáků řešení úlohy zapsalo přímo jako variace, 12 žáků zapsalo pouze výpočet, ke kterému přes vzorec variací dojdou. Ostatní žáci se o řešení úlohy nesnažili.

Obrázek 24: Ukázky chybných řešení úlohy 3a pomocí pravidla součinu


Obrázek 25: Ukázky chybných řešení úlohy 3a pomocí variací


Obrázek 26: Ukázka chybného řešení úlohy 3a

Úlohu 3a vyřešili žáci M. Kafkové úspěšně z téměř 73 %. Úlohu řešili převážně pravidlem součinu.

*Kolik je mezi nimi sudých čísel?*

Tabulka 22: Správnost řešení úlohy 3b

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 5,2 % |
| Špatně | 14 | 17 | 18 | 14 | 19 | 10 | 94,8 % |

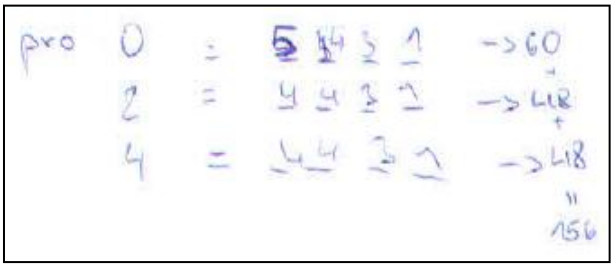
Úspěšnost řešení úlohy 3b bylo o poznání horší, vyřešilo jej správně pouze 5 žáků, z toho 2 žáci ze třídy HT4, kteří úlohu 3a nevyřešili správně.

Tabulka 23: Způsoby řešení úlohy 3b

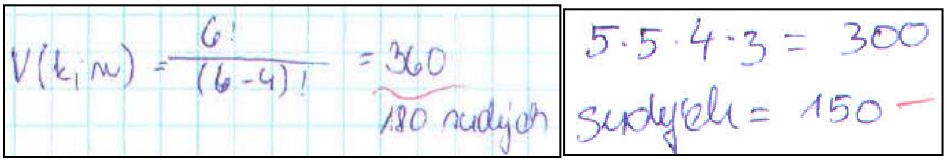
| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Vypsání | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|
| HS | 6 % / 2 | - | 29 % / 15 | 65 % |
| SI | - | 4 % / 2 | 7 % / 3 | 89 % |

Deset z 15 žáků paní učitelky HS, kteří úlohu řešili chybně, uvedlo jako výsledek 150 (obr. 28) a někteří dokonce přímo k tomu výsledku napsali, že je to půlka z výsledku úlohy 3a.

Ze tří žáků paní učitelky SI, kteří úlohu řešili chybně, 2 uvedli jen výsledek 180 (předpokládám, že vycházeli ze svého výsledku úlohy 3a, obr. 28) a jeden žák uvedl jako výsledek 181.




Obrázek 27: Ukázka řešení úlohy 3b pomocí vypsání možností pro 0, 2, 4




Obrázek 28: Ukázka chybného řešení úlohy 3b

S úlohou 3b měli problémy i žáci M. Kafkové, v řešení byli úspěšní přibližně z 10 %. Většina žáků vydělila výsledek z úlohy 3a dvěma. Žáci, kteří řešili úlohu správně, rozebrali všechny tři možnosti podle číslice na místě jednotek. Vyskytl se i jiný způsob, a sice od všech možností se odečtou ty, které nemohou nastat.

4. *Kolika způsoby lze postavit do řady 4 Angličany, 5 Francouzů a 3 Turky, musí-li osoby téže národnosti stát vedle sebe?*

Tabulka 24: Správnost řešení úlohy 4

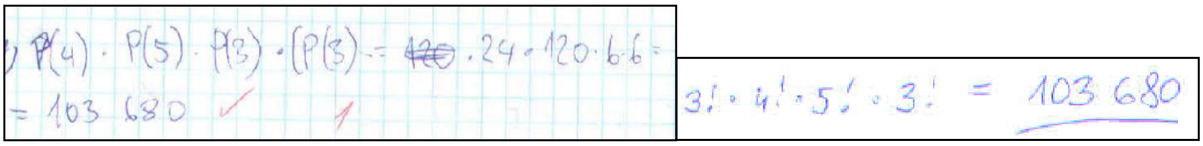
| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 4 | 4 | 13 | 6 | 2 | 2 | 32 % |
| Špatně | 10 | 14 | 7 | 10 | 17 | 8 | 68 % |

V každé třídě byli žáci, kteří úlohu vyřešili správně. Nejúspěšnější byla třída 4.PB paní učitelky HS. Naopak nejméně správných řešení se vyskytlo ve třídě CR4 paní učitelky SI.

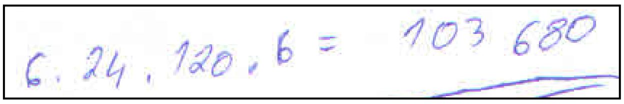
Tabulka 25: Způsoby řešení úlohy 4

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Součin permutací | Součin | Vypsání | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|---|---|
| HS | 35 % | 4 % / 2 | - | 2 % / 1 | 38 % / 20 | 21 % |
| SI | 19 % | - | 5 % | - | 9 % | 67 % |

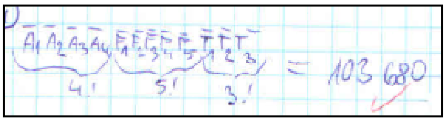
Šest z 20 žáků paní učitelky HS, kteří měli chybné řešení, mělo špatně znaménko ve výpočtu, 6 žáků mělo chybně výpočet.



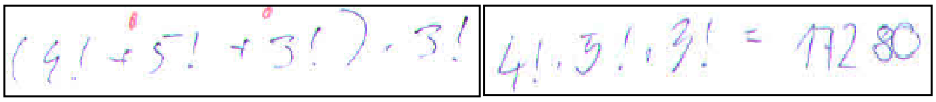

Obrázek 29: Ukázka řešení úlohy 4 pomocí součinu permutací



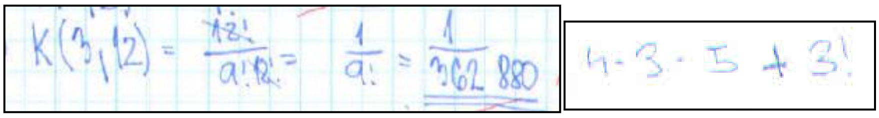

Obrázek 30: Ukázka řešení úlohy 4 pomocí součinu




Obrázek 31: Ukázka řešení úlohy 4 vypsáním




Obrázek 32: Ukázka chybného řešení úlohy 4




Obrázek 33: Ukázka chybného řešení úlohy 4

Úlohu 4 vyřešilo správně přibližně 25 % žáků M. Kafkové. Nejčastější chyby byly, že žáci zaměnili pravidlo součtu a součinu nebo si neuvědomili, že musí určit jak pořadí osob jednotlivých národností, tak i pořadí národností.

5. *Kolika způsoby je možné vybrat z přirozených čísel menších nebo rovných 30 tři různá čísla tak, aby jejich součet byl roven sudému číslu?*

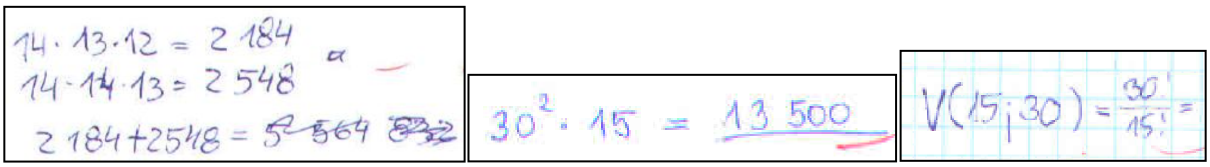
Tabulka 26: Správnost řešení úlohy 5

| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 % |
| Špatně | 14 | 18 | 20 | 15 | 19 | 10 | 99 % |

Tato úloha byla pro žáky nejobtížnější, pouze jeden žák, ze třídy HT4 paní učitelky SI, ji vyřešil správně.

Tabulka 27: Způsoby řešení úlohy 5

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|
| HS | - | 12 % / 6 | 88 % / 46 |
| SI | 2 % / 1 | 2 % / 1 | 96 % / 43 |




Obrázek 34: Ukázky chybných řešení úlohy 5

Úloha 5 měla nízkou úspěšnost u všech tříd, žáci M. Kafkové byli úspěšní z téměř 13 %. U úlohy si žáci uvědomili, že lze vybrat tři sudá čísla nebo dvě lichá a jedno sudé, přičemž každou variantu řešili zvlášť. Dále se vyskytlo řešení založené na ciferném součtu. Ten bude sudý právě tehdy, když nastanou možnosti S + S + S nebo S + L + L, podobně to platí pro lichý součet: L + L + L nebo L + S + S. jelikož sudých a lichých čísel je stejně, stačí vypočítat všechny různé trojice čísel ze třiceti a vydělit dvěma. Mezi nejčastější chyby patřila záměna pravidla součtu a součinu.

6. *V pekařství dnes prodávají 6 různých druhů rohlíků. Kolika způsoby si může zákazník vybrat 3 rohlíky, má-li být každý jiného druhu?*

Tabulka 28: Správnost řešení úlohy 6

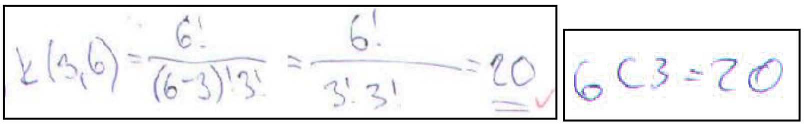
| Řešení/Třída | 4. SP | 4. PA | 4. PB | HT4 | CR4 | OB4 | Celkově v % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Správně | 3 | 7 | 8 | 15 | 1 | 3 | 38,1 % |
| Špatně | 11 | 11 | 12 | 1 | 18 | 7 | 61,9 % |

Tuto úlohu úspěšně vyřešili žáci každé třídy, nejlépe ji vyřešila třída HT4 paní učitelky SI, nejhůře dopadla CR4, také třída paní učitelky SI.

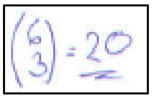
Tabulka 29: Způsoby řešení úlohy 6

| Učitelka/Způsoby řešení (% / počet žáků) | Kombinace, kombinační číslo | Výsledek | Chybné řešení | Žádné řešení |
|---|---|---|---|---|
| HS | 31 % | 4 % / 2 | 27 % | 38 % |
| SI | 42 % | - | 11 % / 5 | 47 % |

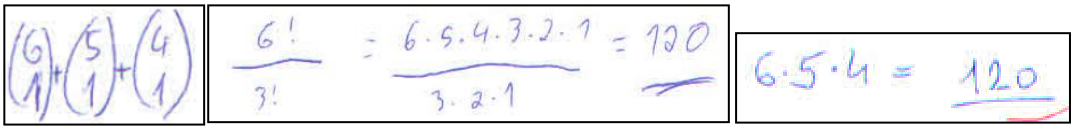
Žáci paní učitelky SI řešili úlohu chybně pomocí variací.



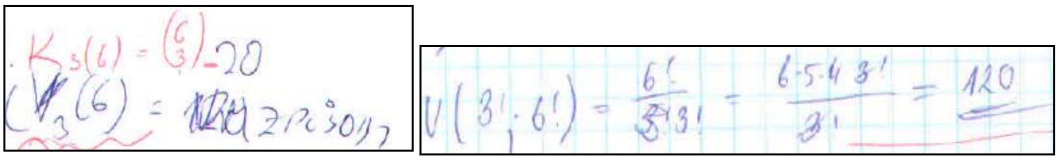
Obrázek 35: Ukázky řešení úlohy 6 pomocí kombinací



Obrázek 36: Ukázka řešení úlohy 6 pomocí kombinačního čísla



Obrázek 37: Ukázky chybných řešení úlohy 6



Obrázek 38: Ukázka chybného řešení úlohy 6

Poslední úlohu 6 vyřešilo správně asi 61 % žáků M. Kafkové. Žáci jej řešili pomocí kombinací a kombinačního čísla nebo pravidlem součinu a vydělením 3!.

Jak je uvedeno výše u jednotlivých úloh, žáci se při jejich řešení dopouštěli několika typů chyb. Nejčastěji žáci chybovali v uvedení výsledku bez řešení, tzv. intuitivní odpovědi (viz číslo 7 v seznamu chyb, oddíl 3.2), této chyby se dopustil alespoň jeden žák u všech úloh kromě úlohy 1a. S výjimkou dvou úloh (3a, 4) žáci také udělali špatnou aritmetickou operaci (viz číslo 8 v seznamu chyb, oddíl 3.2). V polovině úloh měli žáci problém s porozuměním textu, tzv. chyba výkladu textu úlohy (viz číslo 1 v seznamu chyb, oddíl 3.2). Dále žáci udělali ještě následující chyby: chyba pořadí, chyba opakování, nesystematické řazení, zapomenutí správného vzorce pro kombinatorickou operaci, která byla správně identifikována, a chyby zapomenutí významu proměnných v kombinatorickém vzorci (viz po řadě čísla 2, 3, 6, 9, 10 ze seznamu chyb, oddíl 3.2).

Žáci se také dopustili záměny pravidel součtu a součinu, která je spojená s nepochopením rozdílu kombinatorických pravidel součtu a součinu. Této chyby se dopouštěli i žáci z výzkumu M. Kafkové.

U žádného žáka jsem nenašla známku toho, že by se pokoušel o kontrolu svého řešení. Je možné, že by některé své chyby odhalili. Potvrzuje to, že žáci nejsou zvyklí u kombinatorických úloh dělat kontroly. Nejsou k tomu ani vedeni. Ani jeden z mnou dotazovaných učitelů (viz oddíl 4.1) se o problematice kontroly správnosti řešení u kombinatorických úloh sám nezmínil a já jsem jim bohužel přímou otázku nepoložila.

### 4.3.3 Porovnání výsledků žáků učitelky HS a SI

Jak jsem uvedla výše, na základě jednoho rozhovoru s učitelem a náslechu na jedné hodině nelze usuzovat na výukový styl učitele. Nicméně s jistou dávkou opatrnosti můžeme vyslovit závěr, že způsob výuky a především požadavky učitelek mají vliv na způsob řešení úloh žáky. To vyplynulo přesvědčivě z analýz řešení žáků. V tabulce 30 je uveden přehled úspěšnosti řešení úloh ve třídách obou učitelek.

Tabulka 30: Úspěšnost řešení úloh tříd obou učitelek

| Učitelka/Úloha | 1a | 1b | 1c | 2a | 2b | 3a | 3b | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| HS | 100 % | 65 % | 15 % | 73 % | 46 % | 34,6 % | 6 % | 41 % | 0 % | 35 % |
| SI | 58 % | 51 % | 20 % | 0 % | 0 % | 0 % | 4 % | 24 % | 2 % | 42 % |

Jak lze vyčíst z tabulky 30, žáci paní učitelky HS byli celkově úspěšnější než žáci paní učitelky SI. Ovšem je velice zajímavé, že u úlohy 1c byli v řešení úspěšnější žáci SI, přitom tato úloha je dle mého názoru obtížnější než předchozí dvě, tj. 1a, 1b. Překvapivá je také úspěšnost žáků SI u úlohy 3b, kde 4 % žáků tuto úlohu vyřešilo správně (uvedli výsledek, viz oddíl 4.3.2), ale předchozí úlohu, tj. 3a nevyřešil nikdo. Žáci SI byli úspěšnější než žáci HS, kromě již zmíněné úlohy 1c, také v úlohách 5, zde ji vyřešil pouze jeden žák (uvedl výsledek, viz oddíl 4.3.2) ze všech zúčastněných, a v úloze 6, kterou všichni žáci, kteří ji vyřešili správně, ji řešili pomocí kombinací (viz oddíl 4.3.2).

U paní učitelky HS se žáci snažili úlohy řešit jednak použitím vzorců, ale také, a to hlavně vlastní úvahou či rozepisováním, nepotřebovali mít konkrétní vzorec pro danou úlohu. Oproti tomu žáci paní učitelky SI se snažili převážně najít vhodný vzorec a ten aplikovat na úlohu. Jejich výpočty většinou začínají označením pro variace, permutace nebo kombinace (např. viz obrázek 4, oddíl 4.3.2).

Úlohu 2 žáci HS úspěšně řešili pomocí součinu kombinací (viz tabulka 17 a obrázek 15, oddíl 4.3.2), žáci SI úlohu správně nevyřešili, hledali k řešení vzorec (viz obrázky 16 a 17, oddíl 4.3.2). I u úlohy 3 žáci HS nepoužívali vzorec, řešili ji pomocí pravidla součinu a druhou část úlohy vyřešili vypsáním možností pro 0, 2, 4 (viz tabulky 21a 23, oddíl 4.3.2). Žáci SI se snažili úlohu řešit pomocí variací (viz obrázek 25, oddíl 4.3.2). Poslední úlohu, tj. šestou, žáci HS řešili většinou kombinačním číslem (viz obrázek 36, oddíl 4.3.2), oproti tomu žáci SI ji řešili převážně pomocí vzorce pro kombinace (viz obrázek 35, oddíl 4.3.2).

Domnívám se, že podstatným důvodem, proč se žáci HS snaží řešit úlohy i jinak než vzorci, je fakt, že paní učitelka HS začíná kombinatoriku tzv. „úvodní hodinou“ a poté teprve pokračuje konkrétní látkou a vzorci. Paní učitelka SI látku sice zavádí pomocí příkladů, ale okamžitě přechází ke vzorcům.

K podobnému závěru došla i M. Kafková. Podle ní mají žáci, kterým byly předkládány vzorce brzo, tendence je používat při řešení všech úloh a jsou při tom často neúspěšní, na rozdíl od žáků, kteří dostali k dispozici vzorce až později, po pochopení podstaty kombinatorických operací, a jsou zvyklí nejdříve hledat řešení úlohy úvahou.

# Závěr

Ve své práci se zabývám výukou kombinatoriky na střední škole, konkrétně, jak se způsob výuky odráží v řešení úloh u žáků. Na začátku jsem si stanovila následující cíle:

1. Analyzovat vybrané učebnice středních škol z hlediska zavedení pojmů a operací kombinatoriky a z hlediska typů použitých úloh.
2. Na základě rozhovorů s několika učiteli matematiky střední školy (a případně náslechů na jejich hodinách) popsat jejich způsob výuky kombinatoriky.
3. Na základě testu pro žáky dotazovaných učitelů zjistit, zda a jak jsou řešitelské strategie a chyby žáků pravděpodobně ovlivněny přístupem jejich učitelů k výuce kombinatoriky.
4. Porovnat své výsledky s existujícími výsledky didakticko-matematických výzkumů, které se týkají kombinatorického uvažování žáků.

Při rozboru učebnic jsem měla k dispozici celkem 7 učebnic pro výuku kombinatoriky; dvě učebnice byly staršího data vydání, jedna elektronická a ostatní se dle mých zkušeností stále používají. Nejlépe graficky i způsobem zavedení pojmů je zpracována učebnice *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy* (viz oddíl 2.5). Nejvíce úloh (a také nejvíce zajímavých) je v elektronické učebnici *Matematika SŠ: Kombinatorika* (oddíl 2.6). Výklad v učebnici je podnětný. Odvozování vzorců pomocí úloh je necháno spíše na žákovi. Další zajímavé úlohy jsou v učebnicích *Kombinatorika pro 2. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku* (oddíl 2.3) a *Matematika pro 2. ročník gymnázií. Kombinatorika* (oddíl 2.4).

Rozhovor jsem dělala s celkem šesti učiteli ze tří středních odborných škol, z toho jeden byl muž, a náslech jsem měla u dvou učitelek na dvou středních školách. Čtyři učitelky, alespoň jedna z každé školy, začínají kombinatoriku tzv. „úvodní hodinou“ a poté postupně probírají látku a odvozují vzorce. To má podle mého názoru pozitivní vliv na způsob řešení úloh žáky. Žáci se nesnaží používat vzorce, ale zkouší úlohy řešit i bez použití vzorců, úvahou. To se potvrdilo i v mém testu, kde jednu třídu učila i paní učitelka, která začínala „úvodní hodinou“ a nepožadovala po žácích nutně vzorce.

Žáci paní učitelky, která začínala „úvodní hodinou“, se snažili úlohy řešit jednak použitím vzorců, ale také, a to hlavně, vlastní úvahou či rozepisováním; nepotřebovali mít konkrétní vzorec pro danou úlohu. Oproti tomu žáci druhé učitelky se snažili převážně najít vhodný vzorec a ten aplikovat na úlohu. Jejich výpočty většinou začínají označením pro variace, permutace nebo kombinace. Paní učitelka žákům předkládala vzorce již při výkladu látky.

Žáci všech tříd se dopouštěli podobných chyb. Nejčastěji uváděli pouze výsledek bez řešení a dělali aritmetické chyby a chyby související s neporozuměním textu. Dále se dopustili těchto chyb: chyba pořadí, chyba opakování, nesystematické řazení, zapomenutí správného vzorce pro kombinatorickou operaci, která byla správně identifikována, a chyby zapomenutí významu proměnných v kombinatorickém vzorci. Žáci se ještě dopustili záměny pravidel součtu a součinu, protože důkladně nechápali, v jakých situacích se užívají. U žádného žáka jsem se nesetkala s pokusem o kontrolu řešení.

Podle mého názoru by učitelé měli věnovat dostatek času výběru vhodné učebnice pro žáky, kde by bylo dostatečné množství různých úloh a vhodně udělaný výklad. Učebnice neslouží jen učitelům, ale také žákům. Ti by měli dostat dostatečné množství úloh ať už pomocí vhodně zvolené učebnice nebo z jiných. Na základě svého výzkumu i na základě odborné literatury zmíněné v této práci se domnívám, že je vhodnější zavádět jednotlivé operace pomocí řešení vhodných úloh a až na samotný závěr dovést žáky k poznání, že způsoby řešení, které dosud používali, se dají zapsat pomocí vzorců. Je pak pravděpodobnější, že žáci nebudou za každých okolností preferovat vzorce, i když je nebudou chápat. Bylo by vhodné, aby se při výuce kombinatoriky také vyučovalo, jak kontrolovat řešení kombinatorických úloh. Větší pozornost by se měla věnovat kombinatorickým pravidlům součtu a součinu a nejen v matematice dbát na porozumění textu.

Bohužel jsem měla možnost testy zadat pouze u dvou učitelek a náslechy jsem také měla jen u dvou učitelek, ale jiných než, u kterých jsem dávala žákům testy, takže není možné porovnat výsledky testů i s náslechy (jako jsem to udělala pro porovnání výsledků testů s tím, jak sami učitelé hovořili o tom, jak učí kombinatoriku). Možná by také bylo i dobré dělat výzkum pouze na jedné škole u více učitelů, protože na každou střední odbornou školu se hlásí jinak připravení žáci.

Při psaní práce jsem si udělala přehled ve středoškolských učebnicích, což využiji pro vlastní praxi. Také poznatky z výzkumů, které v práci uvádím, při své práci učitelky určitě využiji. Za velký přínos považuji zkušenost s přípravou a samotným rozhovorem. Pro mou praxi za nejpřínosnější považuji vyhodnocování testu, zejména uvažování nad chybnými řešeními. Učitel by měl vědět, jakých chyb se žáci dopouštějí, a snažit se přijít na jejich příčinu.

# 5 Seznam použité literatury

## 5.1 Knihy a články

BATANERO, Carmen, Virginia NAVARRO-PELAYO a Juan D. GODINO. Effect of the imlicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*. 1997, vol. 32, issue 2, s. 181–199. DOI: 10.1023/A:1002954428327.

MASHIACH EIZENBERG, Michal a Orit ZASLAVSKY. Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems. *Mathematical Thinking and Learning*. 2004, vol. 6, issue 1, s. 15–36. DOI: 10.1207/s15327833mtl0601_2.

JANÁČKOVÁ, Martina a Jaroslav JANÁČEK. A classification of strategies employed by high school students in isomorphic combinatorial problems. *The Montana math enthusiast*. 2006, vol. 3, issue 2, s. 128–145.

KAFKOVÁ, Marika. *Interaktivní metody ve výuce matematiky*. Brno, 2010. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/183126/prif_d/Disert.prace-Kafkova.pdf. Disertační práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc.

ODVÁRKO, Oldřich. *Metody řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: SPN, 1990, 261 s.

VOGLOVÁ, Zuzana. *Kombinatorika na střední škole*. Brno, 2006. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/14810/prif_r/Kombinatorika_na_stredni_skole.pdf. Rigorózní práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.

## 5.2 Učebnice

VRBA, Antonín. *Kombinatorika pro 2. ročník gymnázií se zaměřením na matematiku*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978, 39 s.

SMIDA, Jozef. *Matematika pro 2. ročník gymnázií. Kombinatorika*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 98 s.

CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2009, 170 s.

CALDA, Emil. *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU: 3.díl*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2004, 251 s.

PETRÁNEK, Oldřich, Emil CALDA a Petr HEBÁK. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: 4.část*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2006, 148 s.

KRYNICKÝ, Martin. Matematika SŠ: Kombinatorika. *Elektronické učebnice matematiky a fyziky* [online]. 2010 [cit. 2014-01-07]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=62

ROBOVÁ, Jarmila, Martin HÁLA a Emil CALDA. Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika : matematika pro střední školy. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2013, 235 s.

## 5.3 Internetové odkazy

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 64–41–L/51 Podnikání. Ministerstvo školství, *mládeže a tělovýchovy dne 6. 5. 2009, č. j . 9325/2009-23*. 2009. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP_3_vlna/RVP%206441L51%20Podnikani.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 23-41-M/01 Strojírenství. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202341M01%20Strojirenstvi.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 26-41-M/01 Elektrotechnika. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%202641M01%20Elektrotechnika.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 36-47-M/01 Stavebnictví. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%203647M01%20Stavebnictvi.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 63-41-M/02 Obchodní akademie. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206341M02%20Obchodni%20akademie.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 65-42-M/01 Hotelnictví. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206542M01%20Hotelnictvi.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 65-42-M/02 Cestovní ruch. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206542M02%20Cestovni%20ruch.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 66-41-L/01 Obchodník. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%206641L01%20Obchodnik.pdf

Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání 78-42-M/02 Ekonomické lyceum. *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy dne 28. 6. 2007, č. j. 12 698/2007-23*>. 2007. Dostupné z: http://zpd.nuov.cz/RVP/ML/RVP%207842M02%20Ekonomicke%20lyceum.pdf

Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od roku 2009/2010: Matematika, základní úroveň. In: *č. j. 3242/2008-2/CERMAT*. MŠMT, 2008. Dostupné z: http://www.novamaturita.cz/index.php?id_document=1404033138