UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Zlatý řez

Golden Section

Autor: Gabriela Novotná

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Doc. RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D., s použitím odborné literatury a dalších pramenů uvedených v seznamu použité literatury.

V Bonnu 25.listopadu 2012

....

Gabriela Novotná

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Doc. RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za jeho čas, trpělivost, cenné rady a dozor, který mi věnoval.

Abstrakt česky

První kapitoly této bakalářské práce se zabývají nejen historií, ale i současností zlatého řezu – kdy se objevují první zmínky, dále popisují počátky jeho intuitivního a později i vědomého používání, stanovení názvu, označení a termínů; a jeho využití v současnosti. Práce se dotýká také života několika osobností, především Eukleida, Platóna, Leonarda Fibbonacciho a Leonarda da Vinciho.

Dále se práce věnuje teoretické části – vyjádření zlatého poměru a zlatého čísla, geometrickým konstrukcím podle různého výchozího zadání; zkoumá a rozebírá zlaté útvary a útvary z nich vycházející a uvádí souvislosti mezi zlatým řezem a Fibonacciho čísly. Další podkapitoly se věnují útvarům v prostoru ve spojení se zlatým řezem.

Praktická část obsahuje můj vlastní výzkum. Zkoumá takzvanou „magickou stránku“ zlatého řezu, tedy jestli jsou útvary konstruované v tomto poměru opravdu nejlahodnější pro lidské oko, a tudíž se i nejvíc líbí.

Závěrem práce uvádím několik vzorových úloh pro studenty druhého stupně základních škol, a středních škol.

Abstrakt anglicky

The first chapters of this thesis deal not only with the history, but also with the present of the golden section. It details the first references on record, describe the beginning of its intuitive and later also intentional usage, designation and terminology, and examines its application into the modern world. It also relates the lives of several personalities, too, above all Euclid, Plato, Leonardo Fibbonacci and Leonardo da Vinci.

Then the thesis descibes the theoretical part aspects – expressions of the golden proportion and the golden number, as well as geometrical contructions on the basis of different default parameters. It investiates the golden figures and those which are derived from them and it shows connections between the golden section and Fibonacci numbers. In the following chapters the solid figures related to the golden section are examined.

The next part deals with practical application and contains my own research. It analyses the so-called 'magical aspect' of the golden section, i.e. if the figures designed according to this ratio are really the most delightfull and the most appreciated ones.

Finally, few specimen exercises for the secondary students are shown.

Obsah

Úvod....6
1.Zlatý řez....8
1.1 Dělení úsečky....8
1.2 Vyjádření zlatého čísla....9
2.Stručná historie a současnost....10
3.Zlaté číslo Φ 15
3.1 Vyjádření řetězovými zlomky....16
3.2 Vyjádření stupňovitou odmocninou....17
3.3 Vyjádření pomocí členů Fibonacciho posloupnosti....17
4.Geometrická konstrukce....18
4.1 Konstrukce bodu C....18
4.2 Konstrukce bodu B....19
4.3 Konstrukce bodu A....20
4.4 Nepřetržité dělení....21
5.Zlaté útvary....22
5.1 Zlatý trojúhelník....22
5.2 Zlatý obdélník....23
5.3 Zlatá spirála....26
5.4 Zlatý úhel....28
5.5 Zlatý pětiúhelník....29
5.6 Pentagram....35
5.7 Platónská tělesa....38
5.7.1 Tetraedr – pravidelný čtyřstěn....39
5.7.2 Hexaedr – pravidelný šestistěn – krychle....40
5.7.3 Oktaedr – pravidelný osmistěn....41
5.7.4 Dodekaedr – pravidelný dvanáctistěn....41
5.7.5 Ikosaedr – pravidelný dvacetistěn....44
5.7.6 Platónské těleso vepsané do jiného platónského tělesa a zlatý řez....44
5.8 „Zlatá tělesa“ 46
5.8.1 Zlatý čtyřstěn....46
5.8.2 Zlatá pyramida....46
5.8.3 Zlatý trojboký hranol....47
5.8.4 Zlatý kvádr....47
5.8.5 Zlatý pětiboký jehlan....48
5.8.6 Zlatý pětiboký hranol....48
6.Výzkum....49
7.Vzorové úlohy k tematice zlatého řezu....52
Závěr....57
Seznam použité literatury....58
Přílohy....60

Úvod

Zlatý řez je téma, které se objevuje už po staletí. Někteří autoři o něm psali přímo, jiní jej využívali (ať už vědomě či ne), nicméně už dlouhou dobu se snažíme odhalit tajemství jeho krásy. Já sama jsem se s ním setkala asi poprvé v beletristické knize Dana Browna *Šifra mistra Leonarda*, kde jsem po přečtení dané pasáže zůstala naprosto ohromeně sedět a pro sebe si říkala, jestli je to opravdu všechno možné, nebo zda je to jen fikce. To mě donutilo zjistit si o zlatém řezu něco víc. Dozvěděla jsem se, že naprostá většina toho, co autor v knize popisoval, je pravda a zlatý řez se mi doslova vryl do paměti. O několik let později, v prvním semestru na vysoké škole, jsem se s ním setkala znovu. A po ledabylé poznámce, že zlatý řez by nebyl špatné téma na bakalářskou práci, jsem měla jasno.

Má práce má především kompilační charakter. Rozhodla jsem se tak, jelikož se mi v češtině, kromě pár diplomových prací, podařilo najít pouze jedinou knížku a jednu internetovou stránku, které by alespoň zhruba obsahovaly danou tématiku z různých hledisek, nicméně ani jedna z nich mi nepřišla úplná. Kniha Scotta Olsena *Záhadný zlatý řez* ([15]), ze které také čerpám, je psána poměrně hodně beletristicky a nezabývá se příliš matematickým hlediskem. Na druhou stranu internetové stránky vytvořené Ivetou Jirovskou ([16]), které vznikly na základě její diplomové práce, jsou poměrně obsáhlé a dobře zpracované, nicméně zaměřené spíše na využití zlatého řezu než na jeho podstatu jako takovou. Matematická stránka – pokud je uvedena – je zde většinou bez důkazů. Rozhodla jsem se tedy pojmout téma z trochu jiného úhlu a zkusit vytvořit práci zaměřenou především na matematickou stránku, nicméně odkazující i na tematiku ze spousty jiných oblastí, do kterých téma zlatého řezu zasahuje.

Kromě kompilační části, která tvoří větší část mé práce, jsem začlenila i vlastní zkoumání (viz kapitola 6). Obdobný výzkum už byl proveden v minulosti, já se jej však pokouším aplikovat na svou věkovou a trochu mladší skupinu, a zjistit tak, zda je zlatý řez ještě stále aktuální i pro mladší generaci.

V závěrečné kapitole uvádím několik řešených vzorových úloh, týkajících se tematiky zlatého řezu. Některé úlohy jsou převzaté, jiné jsem sama vytvořila. Chtěla bych jimi poukázat na to, že není důvod proč se nezmínit o tomto tématu už žákům na druhém stupni základní školy, o víceletých gymnáziích nebo školách zaměřených na výuku matematiky ani nemluvě.

Teorie zlatého řezu nemá však pouze své příznivce, má i mnoho odpůrců. Je to vcelku pochopitelné – poměr není vyjádřitelný racionálním číslem, je tedy jen obtížně a nepřesně měřitelný a založený hodně na lidském zraku a subjektivním vnímání. Mně se na ní ale nejvíc líbí to, že celá tato abstraktní teorie je přesně a fakticky převeditelná do matematiky, kde získává konkrétní charakter a leccos se vysvětlí. Patřím tedy rozhodně mezi její příznivce, proto jsem se také rozhodla napsat o zlatém řezu svoji bakalářskou práci.

V celé práci jsou používány citace či parafráze z jiných děl zabývajících se daným tématem. Pro přehlednost je v textu vždy uveden pouze odkaz na seznam použité literatury, popřípadě příjmení autora, a strana knihy, ze které je v dané části čerpáno.

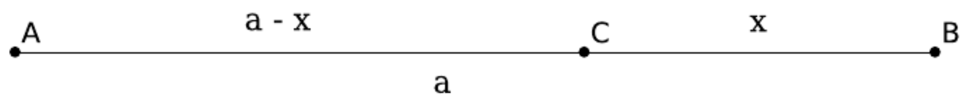
Pokud není uvedeno jinak, v práci jsou používány vlastní ilustrace, vytvořené v programu Geogebra. Všechny jsou k dispozici na CD v příloze ve formátu pdf.

1. Zlatý řez

Zlatý řez je poměr, v němž je rozdělena úsečka tak, že délka její kratší části ku délce delší části je ve stejném poměru jako délka delší části ku délce celé úsečky. Tím je jakákoliv daná úsečka rozdělena bodem na dvě nestejné části v takovém místě, že když se z nich vytvoří rám obrazu, je tento tvar údajně nejlahodnější pro lidské oko; jak alespoň uvádí většina autorů, která se zlatým řezem přinejmenším okrajově zabývá.

Olsen ([15], s. 10) upřesňuje, že v matematice je obecný poměr často značen τ - tau, konkrétně pro poměr zlatého řezu je však obvyklejší symbol Φ- fí podle prvního písmene řeckého sochaře Feidia.

Rozdělení úsečky ve zlatém řezu můžeme znázornit na obr. 1.1:



Obr. 1.1

Má-li daná úsečka AB (podle obr. 1.1) délku a a její kratší úsek CB (v cizojazyčné literatuře často označován jako tzv. Minor část) délku x, delší úsek AC (Major část) má potom délku $a - x$. Bod C přitom náleží úsečce AB a dělí ji v poměru zlatého řezu; platí tedy

$$|CB| : |AC| = |AC| : |AB|.$$

1.1 Dělení úsečky

Je-li dána úsečka délky a (obr. 1.1), můžeme pak následujícím způsobem určit délku x kratšího (Minor) úseku:

Vyjdeme z definice rozdělení dané úsečky délky a ve zlatém řezu a postupujeme ekvivalentními úpravami k vyjádření x:

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$$
$$ax = a^2 - 2ax + x^2$$
$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\,a$$

$$x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,a$$

Jelikož hodnota x_1 je větší než délka a, nemůže být řešením. Získáváme tedy jediné řešení:

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,a$$

Pomocí získaného x vyjádříme obdobným způsobem $a - x$, tedy Major úsek úsečky délky a:

$$a - x = a - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,a = \frac{2a - 3a + \sqrt{5}a}{2} = \frac{-a + \sqrt{5}a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a = \varphi$$

Úsek délky $a - x$ je někdy označován písmenem φ a nazýván malým fí. V cizojazyčné literatuře je pro tento úsek často používán termín Minor, pro úsek délky x potom Major.

Číselný poměr mezi délkami delšího a kratšího úseku se označuje jako zlaté číslo Φ (viz podkapitola 1.2).

1.2 Vyjádření zlatého čísla

Dáme-li do poměru délky delšího a kratšího úseku úsečky délky a, získáme tak číslo, které vyjadřuje zlatý poměr a nazývá se tedy zlaté číslo Φ:

$$\Phi = \frac{a-x}{x} = \frac{(\sqrt{5}-1)\,a}{2} \cdot \frac{2}{(3-\sqrt{5})\,a} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)\cdot(3+\sqrt{5})}{9-5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}61803$$

Zlatému číslu je věnována kapitola 3.

2. Stručná historie a současnost

Původ zlatého řezu, též nazývaného jako zlatý nebo božský poměr, průměr, proporce či číslo, sahá až do dob před naším letopočtem. Není známo, kdy přesně povědomí o něm vzniklo, nicméně víme, že již ve starověkém Egyptě byla teorie zlatého řezu v praxi vědomě používána ([15], s. 10). První skutečná definice ale přišla až s **Eukleidem**, který aplikoval zlatou úměru na úsečku a nazýval ji dělením délky v krajním a středním poměru ([7], s. 29):

> Délka *a* je rozdělena délkou *x* v poměru krajním a středním, neboli zlatým řezem, jestliže $x < a$ a délky a, x, x, $a - x$ jsou úměrné, neboli $a : x = x : (a - x)$. ([5], s. 21)

> Pravíme, že úsečka jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší. ([5], s. 91)

Mimo strohou definici uvádí Eukleides ([5], s. 25) i několik příkladů na využití zlatého řezu; jeden z nich je uveden v kapitole 7 jako vzorový příklad.

Kdo se však věnoval zlatému řezu zcela jistě, byl **Platón**. Jak uvádí Ghyka ([7], s. 23), Platón rozeznával dva druhy čísel: čísla božská, neboli ideje čísel, a čísla vědecká, matematická. Ta první měla sloužit jako ideální vzor těch druhých. Zlaté číslo, přezdívané též jako božský poměr, Platón samozřejmě řadí mezi čísla božská a ukazuje tím, že slouží jako vzor všeho kolem, a je tedy jedním z nejdokonalejších čísel.

Kromě teorie božských a vědeckých čísel poukazoval Platón na existenci zlatého řezu i v jednom ze svých nejznámějších děl – v *Ústavě*. Vyzývá zde čtenáře, aby rozdělil danou úsečku na dva díly, které však nemají být stejně dlouhé, jak by asi každého napadlo jako první možnost ([15], s. 10). Olsen uvádí: „Platón chce, abychom objevili zvláštní poměr, a to takový, že celek k delší části se bude rovnat delší části ke kratší. Dobře ví, že výsledkem bude jeho uctívané přírodní pouto, spojitá geometrická úměra. A platit bude i převráceně, totiž, že kratší část k delší se bude rovnat delší části k celku. ([15], s. 14)“

Nesporný význam v historii zlatého řezu má určitě **Leonardo Fibonacci di Pisa**. Fibonacci, známý též jako Leonardo z Pisy, Leonardo Pisánský či Leonardo Pisano, žil na přelomu 12. a 13. století, hodně cestoval a při svých nespočetných cestách se zabýval především matematikou. Kromě jeho velkého přínosu k počátku používání arabských číslic v Evropě přispěl svým podílem i do algebry a aritmetiky ([12], s. 78). Atalay ([2], s. 33) dodává, že ve své knize *Liber Abaci* se Fibonacci nevěnuje teorii, ale především praktickým výpočtům, představuje dokonce desetinnou soustavu včetně nuly. Nicméně nejznámější je asi jeho úloha o množení králíků, která vede k posloupnosti přirozených čísel, jež byla později pojmenována právě jako Fibonacciho posloupnost. V úloze máme najít celkový počet králíků, který se narodí jednomu páru za jeden rok. Platí přitom, že každému páru se každý měsíc narodí jeden další pár, jenž bude schopen plodit po dvou měsících a přitom žádný králík nezahyne ani neuteče pryč. První měsíc máme tedy jeden pár králíků, druhý měsíc taktéž pouze jeden, třetí měsíc porodí jiný pár – jsou tedy už dva páry, další měsíc porodí další pár, nově porozený ještě ale nerodí atd. Úlohu lze zachytit následujícím schématem 1[*]:

1.měsíc	*2.měsíc*	*3.měsíc*	*4.měsíc*	*5.měsíc*	*6.měsíc*	*7.měsíc*	*...*
*A	A	**A**	**A**	**A**	**A**	**A**	...
		*A.1	A.1	**A.1**	**A.1**	**A.1**	...
			*A.2	A.2	**A.2**	**A.2**	...
				*A.3	A.3	**A.3**	...
				*A.1.1	A.1.1	**A.1.1**	...
					*A.4	A.4	...
					*A.1.2	A.1.2	...
					*A.2.1	A.2.1	...
						*A.5	...
						*A.1.3	...
						*A.2.2	...
						*A.3.1	...
						*A.1.1.1	...

Schéma 1

Dostaneme tak posloupnost, kde každé číslo vzniká jako součet dvou předchozích. Na začátku stojí obvykle dvě jedničky, lze však narazit i na interpretaci, kde na počátku stojí nula následovaná jedničkou.

* Značení: **tučně** – pár schopný reprodukce; * - nově narozený pár;
A.1.2 – druzí potomci páru A.1; a obdobně

Prvních několik členů Fibonacciho posloupnosti je

(0,) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...,

a pro každé přirozené číslo $n \geq 3$ tedy platí

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Kromě aditivnosti této posloupnosti můžeme vypozorovat i multiplikativní charakter, který ji právě spojuje se zlatým řezem (viz podkapitola 3.3). Leonardo Fibonacci nazval tuto vlastnost božskou proporcí a můžeme říct, že tak předvídal poměr zlatého řezu.

Jak uvádí Atalay ([2], s. 13), přibližně tři století po formulování Fibonacciho posloupnosti vzniklo asi nejstarší pojednání, které se zabývá přímo zlatým řezem, a to *Divina Proportiona.* Jeho autor je **Luca Pacioli,** františkánský mnich a dobrý počtář, který jezdil po Itálii a vyučoval matematiku a podle Mareše ([12], s. 114) navíc pomáhal Leonardu da Vinci s počítáním poměrů ve zlatém řezu. Jeho dílo je ale známé spíše proto, že ilustrace do něj poskytl právě **Leonardo da Vinci**. Ačkoliv termín „zlatý řez" v pojednání *Divina Proportiona* ještě použit nebyl, Leonardo jej naprosto vědomě a záměrně začleňoval do svých obrazů a kreseb. White ([18], s. 134) však připouští, že Leonardo da Vinci nebyl dobrý matematik a že se v tomto ohledu mnohé naučil právě od Pacioliho.

Praktickou stránku zlatého řezu rozvíjel i německý malíř **Albrecht Dürer**, který se ke konci svého života pokoušel propojit výtvarné umění s matematikou. Vynikají především jeho díla *Unterweysung der Messung mit Zirkel und Richtscheydt* (Návod na měření kružítkem a pravítkem) a jeho čtyřdílná studie o lidských proporcích, která však vyšla až po jeho smrti ([8], s. 20).

Slovní spojení „zlatý řez" se poprvé knižně vyskytuje údajně až v díle **Martina Ohma** *Die reine Elementar-Matematik* z roku 1835 ([15], s. 10). Autor se zde věnuje teorii aritmetiky a v kapitole věnované poměrům a proporcím v poměrně nenápadné poznámce pod čarou uvádí, že dané rozdělení přímky na dvě části se nazývá zlatý řez, v některých případech také rozdělení úsečky plynulým poměrem ([14], s. 194, překlad autorka).

Za zmínku jistě stojí i německý psycholog a filozof **Gustav Theodor Fechner**, který v druhé polovině 19. století pomocí měření obrazů zkoumal, které tvary a rozměry jsou pro lidi z estetického hlediska příjemné a které ne ([9], překlad autorka). Jak uvádí Jirovská ve své práci [11], nedospěl však k uspokojivému závěru, tedy účast zlatého řezu ve většině exponátů nepotvrdil.

Jedno z prvních ucelených pojednání o zlatém řezu (z nějž je zde též čerpáno) sepsal Francouz **Matila Ghyka** a vydal roku 1931 v Paříži pod názvem *Le Nombre d'Or*.

V současnosti se zlatý řez asi už nepoužívá tolik jako dříve. Ze spíše teoretického hlediska se s ním setkáme především v syntetické geometrii při některých konstrukčních úlohách (viz kapitola 7); prakticky se využívá ve fotografování, architektuře, malířství a plastické chirurgii.

Nesporně se však zlatý řez objevuje **v přírodě** – nejen na rostlinách, ale i jako součást živočichů. Jedním z mnoha důkazů je fylotaxe – nauka, která zkoumá uspořádání listů na stoncích rostlin. Podle Olsena ([15], s. 22) jsou listy na stoncích rozmístěny pouze třemi základními způsoby a všechny základní struktury využívají členů Fibonacciho posloupnosti. Tato čísla se mimo jiné objevují i jako počet okvětních lístků nebo v genetice. Jako příklad z říše živočichů většina autorů uvádí mořskou hvězdici (pentagram), ulitu hlemýždě nebo rohy některých kopytníků (spirála). Na lidském těle se potom zlatý řez nachází mimo jiné ve vztahu úseků mezi nohami a hlavou rozdělených pupíkem a existují i různé studie proporcí lidského těla či obličeje, kde jsou vzdálenosti blížící se ke zlatému řezu pečlivě zakresleny.

Není divu, že se člověk tím vším kolem sebe nechal inspirovat, a přenesl tak tento božský poměr i do své kultury. Jestli vědomě či ne, zůstane asi navždy předmětem sporů. Asi největší podíl na užití zlatého řezu mají architektura, malířství a fotografie.

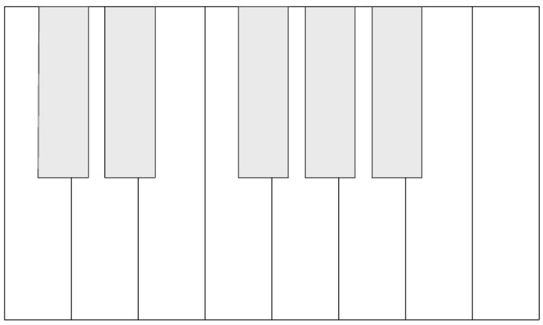
Vyžití zlatého poměru **v architektuře** je poměrně známé, nejčastějším příkladem jsou Egyptské pyramidy či antický Pantheon. Ze současné architektury v sobě zlatý řez skrývá například „pyramida" v Louvre nebo budova La Geode v Paříži.

V malířství se božský poměr hojně využíval již dříve (viz již zmiňovaní Leonardo da Vinci či Albrecht Dürer). V současné době je však spíše než v malířství aktuální v teorii **fotografování**. V praxi dochází k pozdějším úpravám a změnám rozměrů fotografií tak, aby se nejenom tvar, ale i rozložení prvků na fotografii blížilo spíše zlatému řezu než prosté symetrii.

Zvláštní uplatnění nachází i **v hudbě**:

> Struktura rytmu i harmonie je založena na poměru. Nejprostší a nejlibější hudební intervaly, oktáva (2:1) a kvinta (3:2), jsou prvními fibonacciovskými aproximacemi zlatého řezu. Řada pokračuje velkou a malou sextou (5:3 a 8:5). Dalším krokem je překvapivě celá stupnice (13:8), protože včetně oktávy zahrají hudebníci ve stupnici osm tónů z celkem třinácti chromatických tónů. A konečně, jednoduché durové a mollové akordy sestávají z 1., 3., 5. a 8. tónu stupnice. ([15], s. 46)

Autor dále uvádí působivý obrázek klavírních klapek ve spojení s Fibonacciho čísly (obr. 2.1) a upozorňuje, že jsou nejprve 2 černé klapky, poté 3 černé klapky, které dávají dohromady 5 černých klapek. Pod nimi je 8 bílých klapek, které společně s černými tvoří oktávu sestávající ze 13 tónů. Fibonacciho čísla se zde tedy objevují naprosto nesporně.



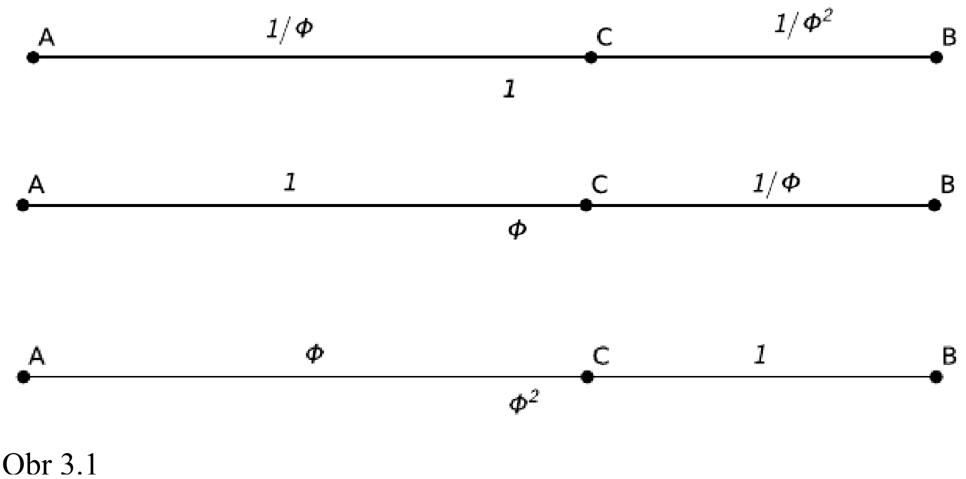
Obr. 2.1

3. Zlaté číslo *Φ*

Jak je již uvedeno výše, zlaté číslo vyjadřuje poměr mezi délkami obou částí úsečky, která je dělena v poměru zlatého řezu. Podle návrhu Marka Barra ([7], s. 30) se obvykle značí symbolem *Φ*. Zlaté číslo je vždy konstantní, nezáleží tedy na délce úsečky a je rovno $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Někdy je *Φ* mylně zaměňováno s hodnotou *φ*, která vyjadřuje délku Major části jednotkové úsečky rozdělené ve zlatém řezu a má hodnotu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Olsen ([15], s. 14) uvádí některé zajímavé vztahy mezi *Φ* a *φ*:

> Budeme-li řešit celý problém matematicky a vyjdeme od předpokladu, že průměr (ztělesněný delším úsekem) je 1, zjistíme, že větší hodnota zlatého řezu je 1,6180339... (pro celek) a menší hodnota je 0,6180339... (kratší úsek). (…) Povšimněme si, že jak jejich součin, tak rozdíl je 1. Kromě toho druhá mocnina velkého fí je 2,6180339, neboli *Φ* + 1. Také vidíme, že každé z obou čísel je převrácenou hodnotou druhého, takže *φ* je 1/ *Φ*. (…) Všimněme si také, že jednotka může fungovat jako vyšší hodnota (celek), průměr (delší úsek) i jako nižší hodnota (kratší úsek) (obr. 3.1).



Obr 3.1

Kromě již uvedeného způsobu pomocí poměru jde zlaté číslo vyjádřit následujícími způsoby:

Olsen ([15], s. 60) vychází z kvadratické rovnice $a^2 - a = 1$ (vzniklé dosazením $x = 1$ do vyjádření poměru zlatého řezu a následným roznásobením), jež má dvě řešení, kladné Φ a záporné Φ^{-1}, obě nezávislá na délce úsečky a:

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi\,,\quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi} = -\varphi\,.$$

Platí tedy

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,,\quad \varphi = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

([15], s. 60)

Vyplývají z toho též následující rovnosti:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \tag{3.1}$$

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi} \tag{3.2}$$

3.1 Vyjádření řetězovými zlomky

Vyjdeme-li z rovnosti 3.1 a za Φ ve jmenovateli budeme vždy postupně dosazovat pravou stranu rovnosti, tedy $1+\frac{1}{\Phi}$, dostaneme jednoduchý řetězový zlomek tvaru:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\Phi}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

3.2 Vyjádření stupňovitou odmocninou

Vezmeme-li jako výchozí tvar rovnost 3.2 a opět budeme za Φ dosazovat pravou stranu rovnosti (obdobným způsobem jako ve vyjádření řetězovými zlomky), získáme tak řetězovou odmocninu tvaru:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

3.3 Vyjádření pomocí členů Fibonacciho posloupnosti

Jak už bylo zmíněno v první kapitole, zlatý řez se velmi často vyskytuje ve spojení s Fibonacciho posloupností.

Každé číslo posloupnosti vynásobené zlatým číslem Φ se limitně blíží následujícímu číslu posloupnosti, neboli každý člen posloupnosti vydělený předcházejícím členem se blíží zlatému číslu. Přitom platí, že čím vyšší čísla jsou dělena, tím přesněji se výsledek blíží zlatému číslu. Platí tedy, že $\lim \frac{F_{i+1}}{F_i} = \Phi$, kde F_i, F_{i+1} jsou dvě po sobě následující čísla Fibonacciho posloupnosti.

4. Geometrická konstrukce

Tato kapitola je věnována způsobům konstrukce zlatého řezu na úsečce, konkrétně tedy nalezení třetího bodu ke dvěma zadaným. Pro upřesnění a zjednodušení je vždy používáno již uvedené označení (obr. 1.1):

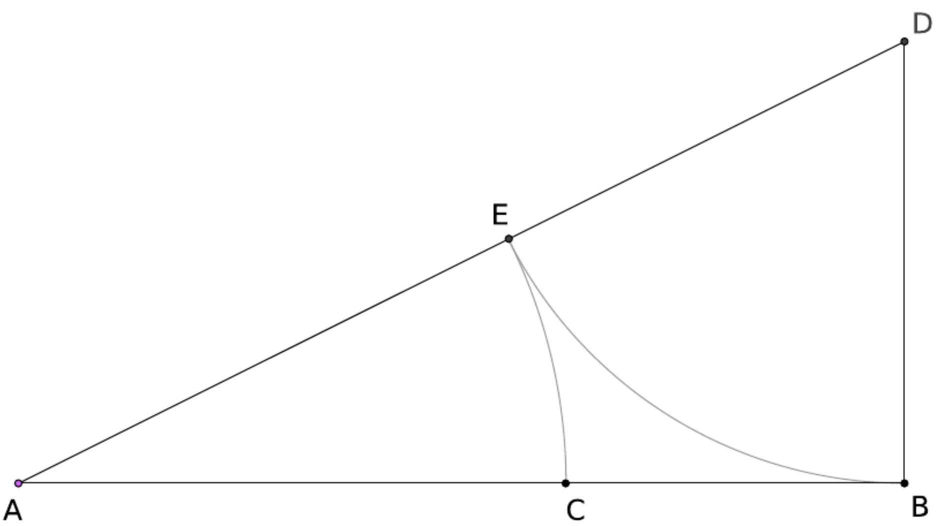
A – levý krajní bod úsečky

B – pravý krajní bod úsečky

C – bod dělící úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, přičemž platí, že $|AC|>|CB|$

4.1 Konstrukce bodu *C*

V tomto případě známe délku úsečky *AB* a chceme ji rozdělit bodem *C* v poměru zlatého řezu. Konstrukce, stejně jako její důkaz pochází od Heróna ([11], matematická stránka problému):



Obr. 4.1

Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník *ABD* s pravým úhlem u vrcholu *B* (obr. 4.1), kde strana *BD* má délku rovnou polovině délky úsečky *AB*. Na úsečce *AD* se poté sestrojí bod *E* tak, aby platilo $|ED|=|BD|$. Bod *C* na úsečce *AB* najdeme jednoduše, jelikož platí $|AE|=|AC|$.

Důkaz:

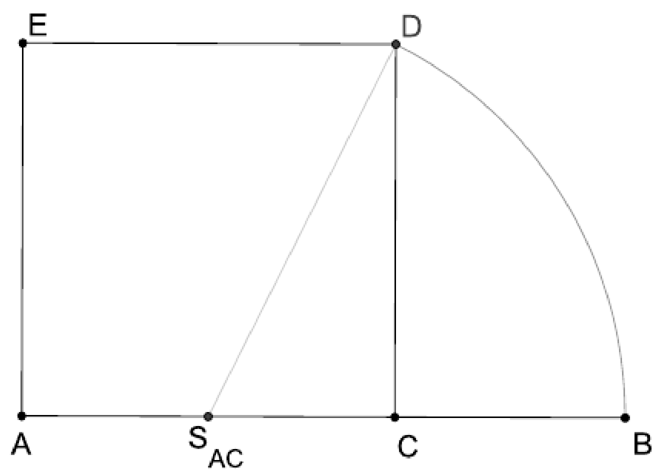
V podkapitole 1.1 bylo dokázáno, že délka delší části dělené úsečky, tedy Major části $a - x$ jde vyjádřit jako $a - x = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Postupnými úpravami převedeme výraz do tvaru

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}\,a}{2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

Výraz $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ nám říká, jak sestrojit bod E (pomocí Pythagorovy věty), a odečtením výrazu $\frac{a}{2}$ získáme potřebnou délku úseku $a - x$, neboli $|AC|$, kterou už zbývá jen přenést na polopřímku AB.

4.2 Konstrukce bodu *B*

Konstrukce bodu B, tedy hledání pravého krajního bodu kratšího úseku dělené úsečky, probíhá stejně jako konstrukce zlatého obdélníku (konstrukce a důkaz viz podkapitola 5.2). Zadané body A a C tvoří vrcholy čtverce vztyčeného nad touto úsečkou a bod B tvoří vrchol zlatého obdélníku, který je kolineární s body A a C. Bod C potom dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu (obr. 4.2).

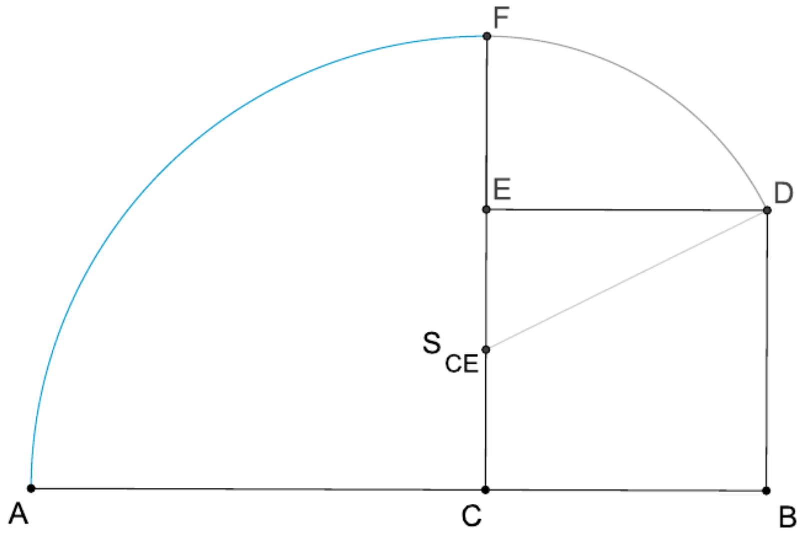


Obr. 4.2

4.3 Konstrukce bodu *A*

Známe délku kratšího úseku dělené úsečky a chceme najít levý krajní bod děleného úseku, tedy *A*. Postup je obdobný jako u hledání druhého krajního bodu, nicméně poněkud pozměněný:

Nad úsečkou *CB* sestrojíme čtverec *CBDE* (obr. 4.3). Sestrojíme střed úsečky *CE* a narýsujeme kružnici se středem v bodě S_{CE} o poloměru $|DS_{CE}|$. Bod *A* je potom stejně vzdálený od bodu *C* jako bod *F*, což je průsečík sestrojené kružnice se středem v bodě S_{CE} a polopřímky *CE*.



Obr. 4.3

Důkaz:

Důkaz vychází opět z definice zlatého řezu, tedy má platit $\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Nejprve vyjádříme délky jednotlivých stran:

$$|BC| = |CE| = c$$

$$|S_{CE}C| = |S_{CE}E| = \frac{c}{2}$$

$$|S_{CE}D| = \sqrt{c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5c^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}c$$

$$|AC| = |CF| = |CS_{CE}| + |S_{CE}D| = \frac{\sqrt{5}}{2}c + \frac{c}{2} = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5})$$

$$|AB| = |AC| + |BC| = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5}) + c = \frac{c}{2}(3+\sqrt{5})$$

Vyjádřené délky poté dosadíme do rovnosti pro poměr zlatého řezu a zjistíme, že se poměry skutečně rovnají:

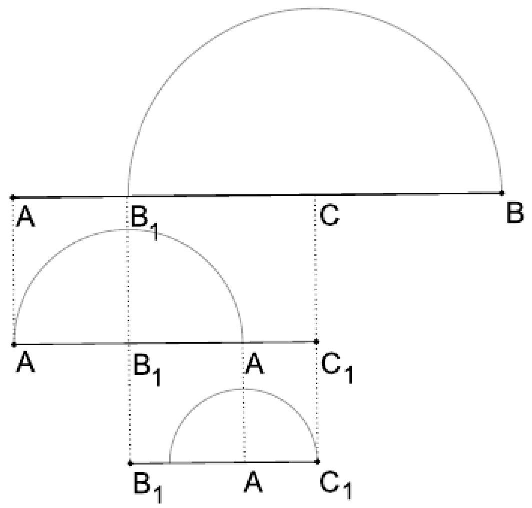
$$L = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{c}{\frac{c}{2}(1+\sqrt{5})} = \frac{2c}{c(1+\sqrt{5})} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$P = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\frac{c}{2}(1+\sqrt{5})}{\frac{c}{2}(3+\sqrt{5})} = \frac{(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$L = P$$

4.4 Nepřetržité dělení

Adam a Wyss ([1], s. 23) uvádějí ve svém díle zajímavou konstrukci pro dělení úsečky v poměru zlatého řezu, kde dochází k dělení delší části úsečky vzniklé předchozím dělením v poměru zlatého řezu, neboli tzv. Major části. Konstrukce jde chápat tak, že vychází z vlastnosti zlatého obdélníku (viz podkapitola 5.2), která nám říká, že oddělíme-li od zlatého obdélníku čtverec o stejné straně, jako je kratší strana obdélníku, zbývající obdélník bude opět zlatý (obr. 4.4).



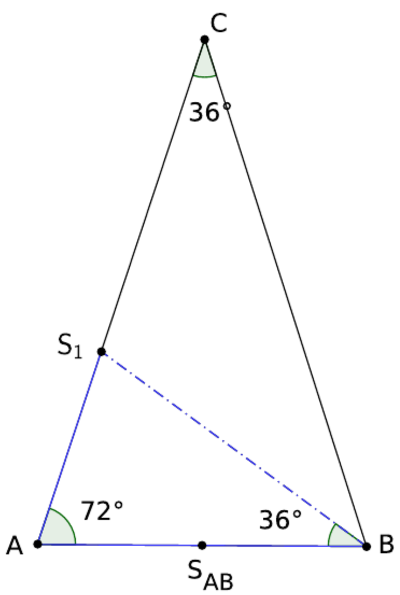
Obr. 4.4

5. Zlaté útvary

Jak uvádí Olsen v jedné z kapitol [15] „Fí v rovině“, přesuneme-li se od jednorozměrné úsečky ke dvourozměrné rovině, objevíme zlatý řez skrytý i jako součást dalších objektů: od obyčejného čtverce se dostaneme až ke zlatému trojúhelníku, obdélníku, pětiúhelníku, desetiúhelníku, pentagramu, či ke zlaté spirále. Každý z těchto útvarů v sobě skrývá zlatý řez nejedním způsobem a při dalším dělení daného útvaru nezřídka dostáváme další zlaté útvary.

5.1 Zlatý trojúhelník

Rovnoramenný trojúhelník, který má délku své základny a svého ramena v poměru zlatého řezu, se nazývá zlatý trojúhelník. Platí o něm to, že velikost úhlu, který svírají ramena, je rovna 36°, a úhly mezi rameny a základnou mají tedy velikost 72°.



Obr. 5.1

Důkaz:

Zachováme-li značení trojúhelníku podle obr. 5.1, poměr zlatého řezu bude určen rovností $\frac{c}{b} = \frac{b}{b+c}$.

Z pravoúhlého trojúhelníku $AS_{AB}C$ můžeme vyjádřit délku strany c jako $2b\cos 72°$, a získáváme tak rovnost

$$\frac{2b\cos 72°}{b} = \frac{b}{b+2b\cos 72°},$$

kterou ekvivalentními úpravami upravíme do tvaru

$$4b^2\cos^2 72° + 2b^2\cos 72° = b^2,$$

$$1 = 4\cos^2 72° + 2\cos 72°.$$

Hodnotu $\cos 72°$ můžeme pomocí matematického softwaru vyjádřit jako $\frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)$, a po dosazení této hodnoty do předchozí rovnosti tak tvrzení dokázat:

$$1 = 4\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\right)$$

$$1 = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4} + 2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$1 = \frac{6-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2}{4}$$

$$1 = 1$$

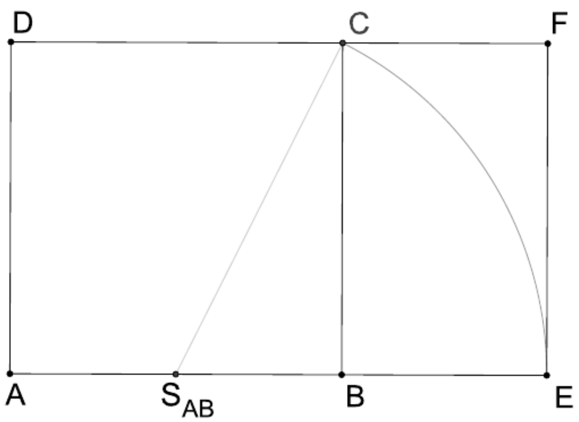
Zajímavé je, že sestrojíme-li osu úhlu sevřeného mezi základnou a jedním ramenem, vzniklý trojúhelník ABS_1 (obr. 5.1) bude opět zlatý. Vrcholy takto vytvořených zlatých trojúhelníků leží všechny na zlaté logaritmické spirále (viz podkapitola 5.3). Platí navíc, že bod S_1 dělí úsečku AC v poměru zlatého řezu.

5.2 Zlatý obdélník

Zlatý obdélník je takový obdélník (zde $AEFD$), jehož délky stran jsou v poměru zlatého řezu. Lze ho jednoduše sestrojit z obyčejného čtverce $ABCD$ (obr. 5.2a):

Nejprve sestrojíme střed strany AB. Vzdálenost středu S_{AB} od vrcholu C je pak stejná jako vzdálenost S_{AB} od hledaného vrcholu E. Poslední vrchol F získáme vztyčením kolmice z bodu E na přímku AB a jejím proniknutím s polopřímkou DC. Platí tedy

$$\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|EF|}{|AE|}.$$



Obr. 5.2a

Důkaz:

Bez újmy na obecnosti můžeme pro zjednodušení považovat čtverec za jednotkový, tedy $|AB| = 1$. Můžeme pak vyjádřit potřebné vzdálenosti jako

$$|S_{AB}B| = \frac{1}{2}$$

$$|S_{AB}C| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = |S_{AB}E|$$

$$|AE| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$|BE| = |S_{AB}E| - |S_{AB}B| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Aby byl obdélník zlatý, musí platit rovnost $\frac{|BE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AE|}$. Vyjádříme zvlášť levou a pravou stranu rovnosti:

$$L = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

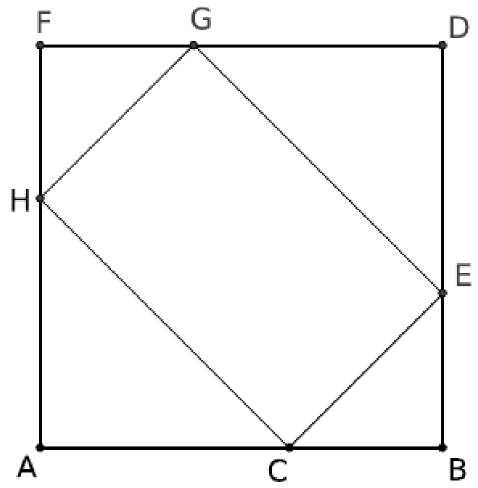
$$P = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$L = P$$

Zajímavé je, že nejen obdélník *AEFD* je zlatý, ale stejně tak i obdélník *BEFC*. O prvně jmenovaném se lze také dočíst jako o velkém zlatém obdélníku, *BEFC* se potom označuje jako malý zlatý obdélník. Záleží tedy jen na tom, zda stranu čtverce, ze které vycházíme, považujeme za kratší nebo za delší stranu výsledného obdélníku.

Budeme-li vždy z menšího obdélníku oddělovat čtverec, dostaneme tak posloupnost zlatých obdélníků. Její význam spočívá především v konstrukci zlaté spirály (dále viz podkapitola 5.3).

Zlatý obdélník navíc můžeme vepsat do čtverce tak, že vrcholy obdélníku dělí strany čtverce v poměru zlatého řezu (obr. 5.2b).



Obr. 5.2b

Důkaz:

V tomto důkazu je používáno standardní značení, tedy $|AB| = a$ a $|CB| = x$. Potom je

$$|CE| = \sqrt{|CB|^2 + |BE|^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x\,,$$

$$|CH| = \sqrt{|AC|^2 + |AH|^2} = \sqrt{2(a-x)^2} = \sqrt{2}(a-x).$$

Z vyjádření poměru zlatého řezu je okamžitě patrné, že každý člen je pouze rozšířen hodnotou $\sqrt{2}$, nicméně formální důkaz vychází opět z definice zlatého poměru, tedy

$$\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}(a-x)} = \frac{\sqrt{2}(a-x)}{\sqrt{2}a}\,,$$

$$2ax = 2(a-x)^2\,,$$

$$a^2 - 3ax + x^2 = 0\,,$$

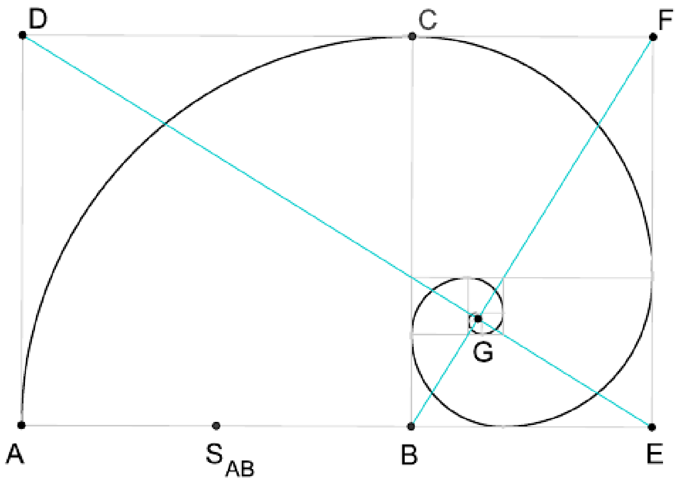
což je rovnice pro získání hodnoty zlatého řezu (viz podkapitola 1.1).

5.3 Zlatá spirála

Druhů spirál existuje mnoho, známá je především spirála logaritmická, Archimédova či hyperbolická ([10], s. 5). Zde se budeme věnovat pouze jednomu speciálnímu druhu, spirále zlaté. Jak už její název napovídá, je provázána se zlatým řezem, a to nejen při procesu konstrukce, který je uveden níže, ale skrývá v sobě též zlatý poměr. Jako každá logaritmická spirála má navíc tu vlastnost, že nemění tvar, to znamená, že ať se na ni podíváme v jakémkoliv měřítku, vypadá pořád stejně.

Jak už bylo zmíněno v podkapitole 5.2, zlatá spirála lze jednoduše sestrojit pomocí zlatého obdélníku:

Ze zlatého obdélníku nejprve oddělíme čtverec. Část spirály ležící uvnitř tohoto čtverce bude tvořena čtvrtkružnicí se středem ve vrcholu čtverce *B* (obr. 5.3a). Obdélník *BEFC*, který je tvořen zbytkem původního obdélníku po oddělení čtverce, je opět zlatý obdélník. Oddělíme z něj další čtverec, kde se bude nalézat druhá část zlaté spirály, tentokráte na čtvrtkružnici se středem v bodě *G*. Takto můžeme pokračovat do nekonečna. Ze vzniklého zlatého obdélníku vždy oddělíme čtverec a najdeme střed dané části zlaté spirály.



Obr. 5.3a

Na obr. 5.3a jsou naznačeny i úhlopříčky obdélníků *AEFD* a *BEFC*. To proto, že průsečík těchto dvou úhlopříček tvoří střed zlaté spirály. Navíc platí, že délky daných úhlopříček jsou vůči sobě také v poměru zlatého řezu.

Důkaz:

Abychom mohli dokázat platnost poměru zlatého řezu, je potřeba si vyjádřit vzdálenosti obou úhlopříček:

$$|AB| = a$$

$$|S_{AB}C| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|AE| = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$|CF| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2}$$

Jelikož $|AD| = |AB|$ a $|BC| = |AB|$, můžeme potom podle Pythagorovy věty ve tvaru $|AB|^2 + |AE|^2 = |DE|^2$ vyjádřit $|DE|$ a pomocí Pythagorovy věty ve tvaru $|CF|^2 + |BC|^2 = |BF|^2$ vyjádříme $|BF|$:

$$|DE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = a\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

$$|BF| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{a^2\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + 1\right)} = a\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Teď už jen zbývá vyjádřené délky dosadit do rovnosti podle definice zlatého řezu:

$$\frac{|BF|}{|DE|} = \frac{|DE|}{|BF| + |DE|}$$

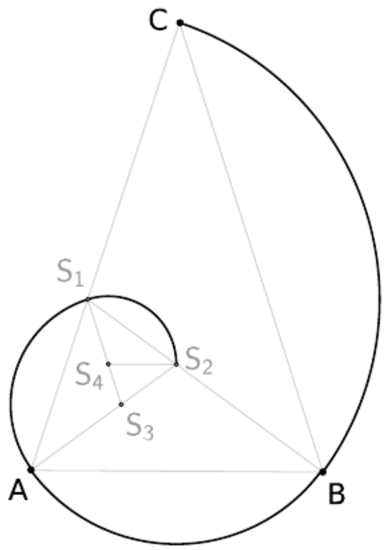
$$\frac{a\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}}{a\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}} = \frac{a\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}}{a\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + a\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{5}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$0 = 0$$

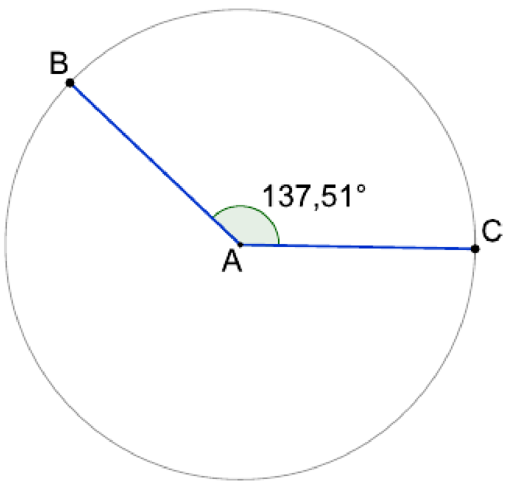


Kromě konstrukce zlaté spirály vpisováním do zlatého obdélníku existuje i alternativní postup pomocí zlatého trojúhelníku (podkapitola 5.1). Tento postup je obdobný jako u konstrukce pomocí zlatých obdélníků; ze zlatého trojúhelníku postupně oddělujeme další zlaté trojúhelníky a jejich stranám opisujeme části kružnic (obr. 5.3b).

Obr. 5.3b

5.4 Zlatý úhel

Zlatý je takový úhel, který dělí úhel plný v takovém poměru, že velikost menšího úhlu ku velikosti většího je stejná jako poměr velikosti většího úhlu ku plnému; jedno z ramen úhlu tedy dělí 2π v poměru zlatého řezu (obr. 5.4).



Obr. 5.4

Velikost menšího úhlu α zjistíme jednoduchým výpočtem:

$$\frac{\alpha}{2\pi - \alpha} = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$$
$$2\pi\alpha = 4\pi^2 - 4\pi\alpha + \alpha^2$$
$$\alpha^2 - 6\pi\alpha + 4\pi^2 = 0$$

$$\text{Diskriminant}: \quad 36\pi^2 - 4 \cdot 4\pi^2 = 20\pi^2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{6\pi \pm 2\pi\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha_1 = \left(3 + \sqrt{5}\right)\pi \approx 16{,}45 rad$$
$$\alpha_2 = \left(3 - \sqrt{5}\right)\pi \approx 2{,}40 rad$$

Získáváme dva kořeny, z nichž však pouze jeden má smysl, jelikož kořen α_1 je větší než plný úhel.

Velikost menšího úhlu je tedy přibližně 2,399963 rad, tedy asi 137,507764 °. Olsen ([15], s. 19) navíc uvádí, že velikost zlatého úhlu lze vyjádřit i pomocí zlatého čísla a odpovídá též hodnotě $\frac{360°}{\Phi^2}$, neboli $\frac{360°}{\Phi + 1}$.

5.5 Zlatý pětiúhelník

Další mnohoúhelník, který rozhdoně nelze vynechat, je pravidelný pětiúhelník. Součet velikostí vnitřních úhlů pětiúhelníku je 540°, na jeden úhel tedy připadá 108°. Zajímavé je, že poměr délky úhlopříčky ku délce strany je v poměru zlatého řezu.

Důkaz

Pomocí kosinové věty vyjádříme délku úhlopříčky u, stranu pětiúhelníku přitom označíme jako a: $u^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos 108° = 2a^2(1 - \cos 108°)$

$$u = a\sqrt{2(1 - \cos 108°)}$$

Teď je nutné dokázat, že platí $\frac{a}{u} = \frac{u}{a+u}$. Jelikož jsme ale vyjádřili délku úhlopříčky v závislosti na délce strany *a*, můžeme přímo dokázat, že $u = \Phi$, tedy

$$\sqrt{2\,(1-\cos 108\,°)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Hodnotu cos 108° můžeme opět pomocí matematického softwaru vyjádřit jako $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ a dostaneme pak ekvivalentní rovnosti:

$$\sqrt{2\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}$$

$$6+2\sqrt{5} = 6+2\sqrt{5}$$

$$0 = 0$$

Ve zlatém pětiúhelníku navíc platí, že dvě protínající se úhlopříčky jsou svým průsečíkem děleny v poměru zlatého řezu (obr. 5.5a).

Důkaz

Jirovská na svých stránkách [11] uvádí poměrně elegantní důkaz pomocí podobnosti trojúhelníků, který s drobnými úpravami v práci převezmeme.

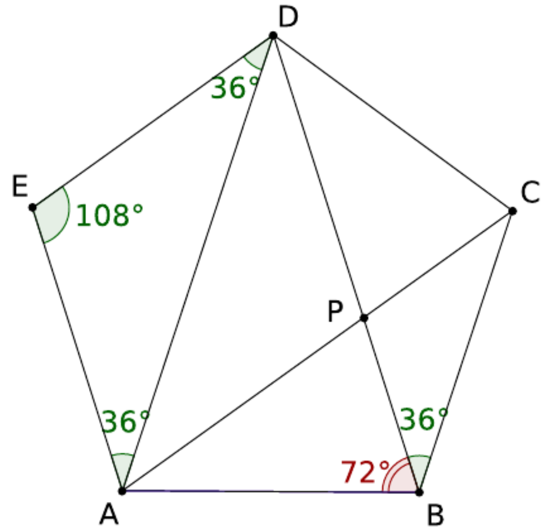
Označíme-li průsečík úhlopříček jako *P,* pro trojúhelníky *CDB* a *PBC* potom platí, že jsou podobné (vnitřní úhly mají velikost 36° a 108°). Potom tedy platí

$$|DB| : |CB| = |CB| : |CP|.$$

Jelikož úhly *PCD* a *CPD* mají shodnou velikost 72°, je tedy trojúhelník *DPC* rovnoramenný a $|CD| = |DP| = |CB|$. Stejně tak je rovnoramenný i trojúhelník *PBC* a platí $|CP| = |BP|$.

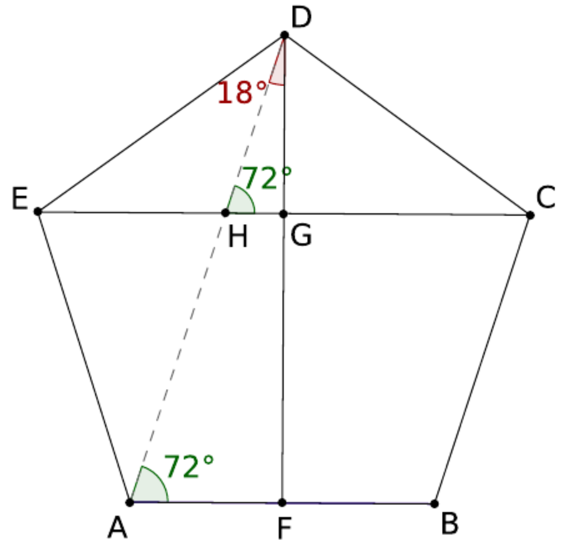
Dosazením vhodných hodnot do původní rovnosti dostaneme rovnost

$$|DB| : |DP| = |DP| : |BP| = \Phi.$$



Obr. 5.5a

Adam a Wyss ([1], s. 26) dále uvádějí, že úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku dělí jeho výšku (kolmou na danou úhlopříčku) v poměru zlatého řezu (obr. 5.5.b).



Obr. 5.5b

Důkaz Jako důkaz postačí říci, že jde pouze o modifikaci předchozího tvrzení (o průsečíku dvou úhlopříček pětiúhelníku). Jelikož trojúhelníky *DGH* a *DFA* jsou podobné, platí tedy, že pokud jsou úhlopříčky děleny v určitém poměru, je v tomtéž poměru dělena i výška rozdělená kolmou úhlopříčkou.

Další zajímavostí je, že vedeme-li z jednoho vrcholu pětiúhelníku dvě úhlopříčky do protějších vrcholů (obr. 5.5a), vznikne tímto ohraničením zlatý trojúhelník.

Důkaz

Vedením úhlopříčky z bodu *D* do bodu *A* vzniká rovnoramenný trojúhelník *ADE*. Jelikož součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku je 180° a úhel u vrcholu *E* má velikost 108°, každý ze zbývajících dvou úhlů trojúhelníku *ADE* má velikost 36°. Úhel *DAB* je potom doplněk k úhlu *DAE* do 108°, má tedy velikost 72°.

Obdobnou úvahou pro trojúhelník *BCD* bychom dospěli k tomu, že i úhel *CDB* má velikost 36°. Úhel *ADB* potom musí mít velikost 36°. Trojúhelník, jehož vnitřní úhly mají velikosti 36°, 72° a 72°, jsme v podkapitole 5.1 definovali jako zlatý.

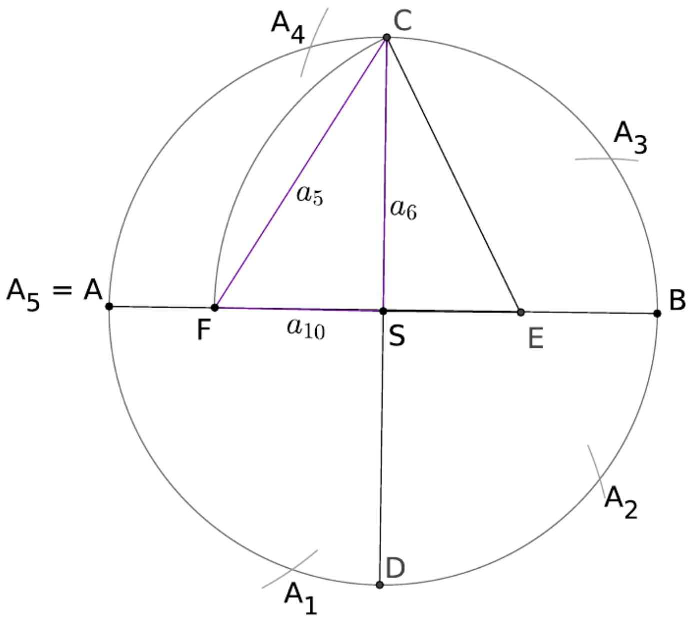
Pomocí úhlopříček pravidelného pětiúhelníku můžeme najít ještě další zlaté trojúhelníky. Budeme-li uvažovat dvě libovolné úhlopříčky, které se kříží uvnitř pětiúhelníku, ramena zlatého trojúhelníku jsou potom tvořena stranou pětiúhelníku a delší částí jedné z dělených úhlopříček, základna leží na kratší části druhé rozdělené úhlopříčky (obr. 5.5a).

Důkaz

Důkaz je zřejmý, vychází opět z faktu, že velikosti vnitřních úhlů zlatého trojúhelníku jsou 36°, 72° a 72°. Přímo z obrázku 5.5a lze snadno vyčíst, že dané trojúhelníky přesně takové úhly mají.

I při samotné konstrukci pětiúhelníku se využívá zlatého řezu. Vychází se z kružnice opsané (obr. 5.5c):

Zvolíme libovolný průměr *AB* kružnice a průměr *CD* na něj kolmý a jejich průsečík označme *S*. Sestrojíme střed úsečky *SB*, který pojmenujeme *E*. Délku $|CE|$ potom přeneseme na úsečku *AB*, a získáme tak bod *F*. Délka $|FC|$ je potom rovna délce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného dané kružnici.



Obr. 5.5c

Důkaz

Je třeba dokázat, že strana pětiúhelníku, jenž je vepsán dané kružnici o poloměru *r*, má stejnou hodnotu jako $|FC|$.

Nejprve vyjádříme délku $|FC|$:

Podle obr. 5.5c lze určit, že $|SC| = r$, $|SE| = \frac{r}{2}$ a následně podle Pythagorovy věty získat délku $|CE|$:

$$|CE|^2 = |SE|^2 + |SC|^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5}{4} r^2$$

$$|CE| = \frac{\sqrt{5}}{2} r$$

Potom platí $|FS| = |FE| - |SE| = \frac{\sqrt{5}}{2} r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

Z trojúhelníku *FSC* můžeme pomocí Pythagorovy věty vyjádřit délku úsečky *FC*:

$$|FC|^2 = |FS|^2 + |SC|^2 = \frac{r^2}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^2 + r^2 = r^2\left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} + 1\right) = r^2 \quad \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

$$|FC| = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

Následně vyjádříme stranu pětiúhelníku.

Vybereme libovolný trojúhelník s vrcholy A, A_1 ve dvou sousedních vrcholech pětiúhelníku a třetím ve středu S kružnice opsané. Pro tento trojúhelník platí, že je rovnoramenný, ramena mají délku jako poloměr r kružnice a úhel u hlavního vrcholu má velikost 72°.

Označíme-li střed úsečky AA_1 jako P (obr. 5.5d), platí $\frac{|PA_1|}{r} = \sin 36\,°$, neboli

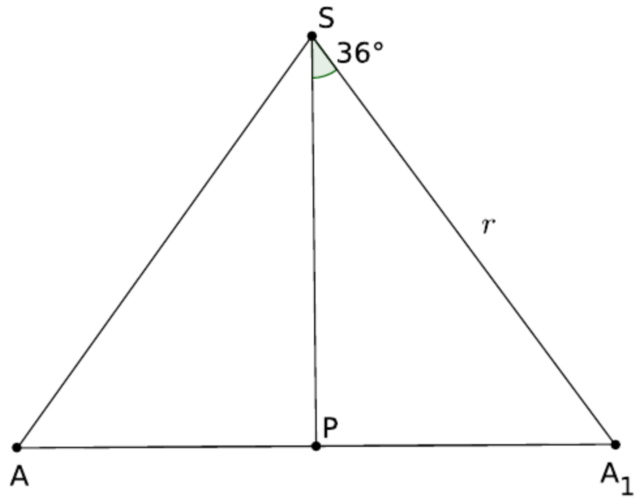
$$|PA_1| = r \cdot \sin 36\,°.$$

Délka základny tohoto trojúhelníku je rovna dvojnásobku této délky, tedy $|AA_1| = 2|PA_1|$. Hodnotu sin 36° můžeme pomocí matematického softwaru vyjádřit jako $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ a po úpravě dostat délku

$$|AA_1| = 2r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Zde je ihned vidět, že

$$|FC| = |AA_1| = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

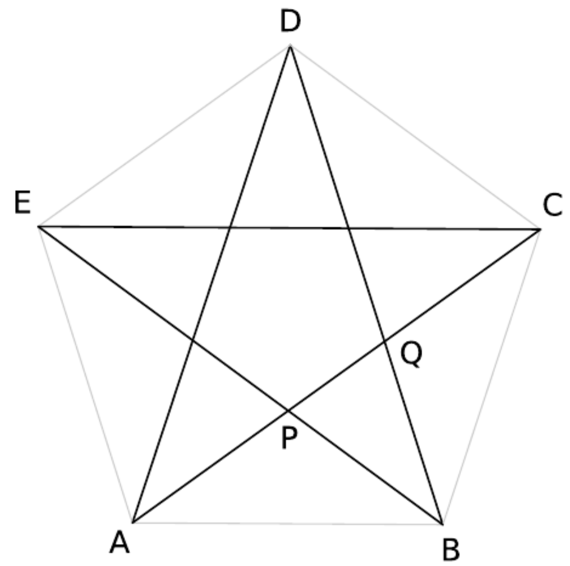


Obr. 5.5d

Další výhoda této konstrukce je, že zároveň získáváme i stranu *FS* pravidelného desetiúhelníku o délce a_{10} (obr. 5.5c) a stranu *CS* pravidelného šestiúhelníku o délce a_6, což však není tématem této práce.

5.6 Pentagram

Z pravidelného pětiúhelníku lze jednoduše sestrojit pentagram, neboli pěticípou hvězdu. Jeho hrany jsou totiž tvořeny všemi úhlopříčkami pětiúhelníku (obr. 5.6a).



Obr. 5.6a

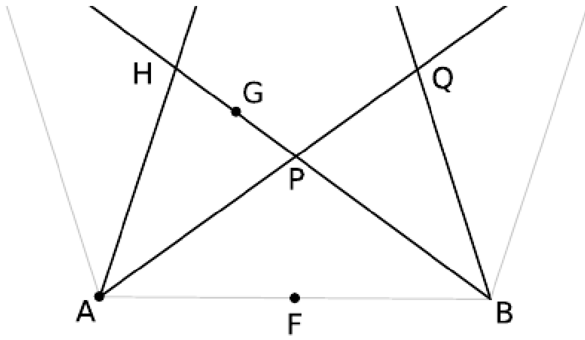
Každá hrana pentagramu, jež spojuje dva vrcholy, je dělena průsečíkem s jinou takovou hranou v poměru zlatého řezu. Toto tvrzení jsme již dokázali v předchozí podkapitole s tvrzením o protínajících se úhlopříčkám v pětiúhelníku (str. 33), které ve skutečnosti tvoří strany pentagramu.

Strany navíc vytínají uvnitř pentagramu menší pětiúhelník, který je oproti původnímu opačně orientován. Jirovská ve své práci [11] zároveň uvádí zajímavé tvrzení, že poměr délek stran menšího a většího pětiúhelníku je roven převrácené hodnotě druhé mocniny Φ.

Důkaz

V předchozí kapitole jsme vyjádřili délku strany pětiúhelníku jako

$$|AB| = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$



Obr. 5.6b

S využitím značení na obr. 5.6b vyjádříme postupně délku strany menšího pětiúhelníku $|HP|$:

Jelikož dvě úhlopříčky dělí vnitřní úhel pětiúhelníku na tři shodné úhly, platí, že velikost úhlu *PAB* je 36° a z pravoúhlého trojúhelníku *AFP* potom dostáváme

$\frac{|AF|}{|AP|} = \cos 36°$, neboli $|AP| = \frac{|AF|}{\cos 36°} = \frac{|AB|}{2\cos 36°}$.

Jelikož velikost úhlu *APB* je 108°, úhel *APG*, jenž je jeho doplněk do přímého úhlu, má velikost 72°.

Pomocí pravoúhlého trojúhelníku *AGP* dostáváme vztah $\frac{|PG|}{|AP|} = \cos 72°$, neboli $|PG| = |AP|\cos 72°$. Strana menšího pětiúhelníku má potom dvojnásobnou délku $|HP| = 2|PG| = |AB|\frac{\cos 72°}{\cos 36°}$. Pro poměr stran pětiúhelníků tedy platí

$$\frac{|HP|}{|AB|} = \frac{\cos 72°}{\cos 36°} = \frac{\cos^2 36° - \sin^2 36°}{\cos 36°} = \frac{\cos^2 36°\left(1 - \frac{\sin^2 36°}{\cos^2 36°}\right)}{\cos 36°} =$$

$$= \cos 36° - \frac{\sin^2 36°}{\cos 36°} = \cos 36° - \frac{1}{\cos 36°} + \cos 36° = 2\cos 36° - \frac{1}{\cos 36°}$$

Pomocí matematického softwaru vyjádříme hodnotu cos36° jako $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ a dosadíme do kvadratické rovnice:

$$2\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})-\frac{1}{\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{4}{1+\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{5})^2-8}{2(1+\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{2(1+\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-1)(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{5}-3)}{-4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Dosadíme-li hodnotu $\Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ do tvaru $\frac{1}{\Phi^2}$, dostáváme vyjádřenou hodnotu:

$$\frac{1}{\Phi^2}=\frac{4}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\frac{4}{2\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Jirovská ke svému tvrzení dodává, že délky úseků *PQ*, *AP*, *AQ* a *AC* (obr. 5.6a) celkově tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem *Φ*. Položíme-li stranu pětiúhelníku rovnou jedné, dostáváme:

$$|PQ|=\frac{1}{\Phi^2} \tag{5.6.1}$$

$$|AP|=\frac{1}{\Phi} \tag{5.6.2}$$

$$|AQ|=1 \tag{5.6.3}$$

$$|AC|=\Phi \tag{5.6.4}$$

Důkaz

Rovnost (5.6.1) jsme dokázali v minulém tvrzení.

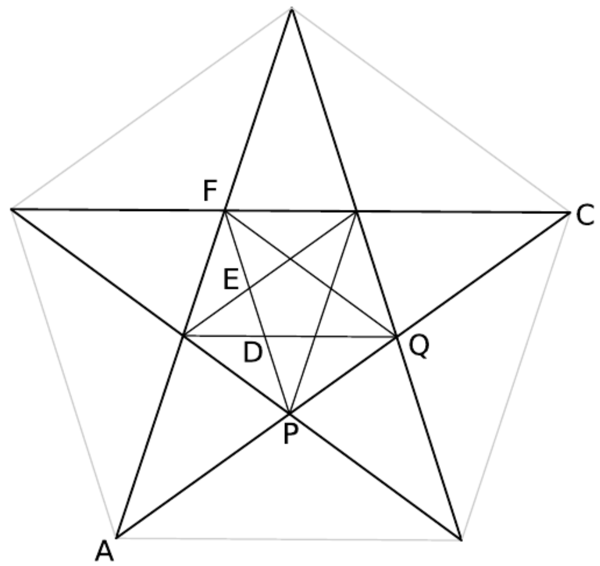
Rovnost (5.6.2) je vyjádřena tamtéž jako $|AP|=\frac{|AB|}{2\cos 36°}$, je-li $|AB|=1$, pak tedy $|AP|=\frac{1}{2\cos 36°}$. Po dosazení hodnoty $\cos 36°=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ dostáváme

$$|AP|=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\varphi=\frac{1}{\Phi}.$$

Pro rovnost (5.6.3) platí, že $|AQ|=|AB|=1$.

Rovnost (5.6.4) jde vyjádřit jako $|AC|=|AQ|+|QC|=|AQ|+|AP|=1+\frac{1}{\Phi}$, což (jak jsme ukázali již dříve) je hodnota *Φ*.

Adam a Wyss ([1], s. 20) rozšiřují tuto posloupnost zlatých poměrů o další pentagram, který získáme z menšího pětiúhelníku, který je utvořen uvnitř pentagramu pomocí jeho úhlopříček (obr. 5.6c).



Obr 5.6c

Platí $|AC| : |AQ| = |AQ| : |AP| = \Phi$, což jsme ukázali již dříve, stejně tak platí

$$|AP| : |PQ| = \Phi.$$

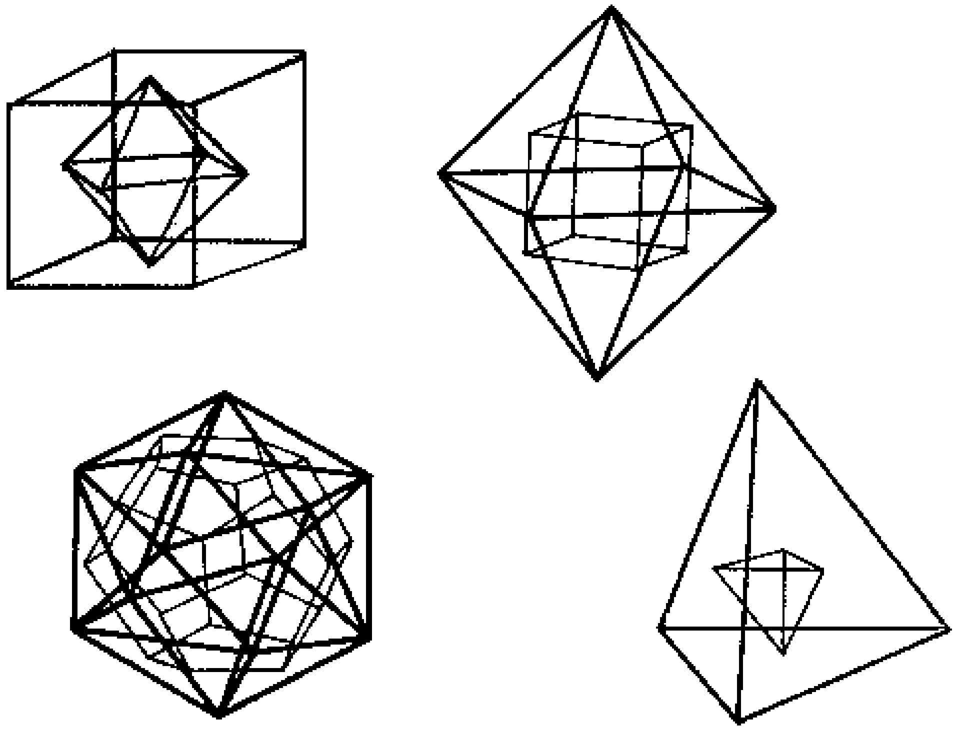
Jelikož $|AP| = |PF|$ a $|PQ| = |PE|$, platí zároveň $|PF| : |PE| = \Phi$ a obdobně dále $\Phi = |PF| : |PE| = |PE| : |PD| = ...$

Obdobně lze aplikovat tento algoritmus na menší a menší vepsané pentagramy.

5.7 Platónská tělesa

Mnohostěn, který má všechny stěny tvořené stejným pravidelným mnohoúhelníkem a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran, se nazývá pravidelný. Ve trojrozměrném prostoru existuje pouze pět pravidelných mnohostěnů, a to čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Jak uvádí Atalay ([2], s. 70), všech pět typů identifikoval již Pýthagorás (skoro dvě stě let před Platónovým narozením), nicméně souhrnně tuto teorii sepsal až Eukleides a nazval tato tělesa na Platónovu počest jako platónská nebo Platónova tělesa. Jednotlivá tělesa mají navíc doplňovat Platónovu teorii, že celý svět je tvořen ze čtyř živlů, přičemž atomy ohně mají tvar čtyřstěnu, atomy země tvar krychle, atomy vzduchu tvar osmistěnu a atomy vody tvar dvacetistěnu. Zbývající dvanáctistěn je potom nadřazen živlům a symbolizuje Platónovo jsoucno.

Spojíme-li vhodně středy stěn jednotlivých platónských těles, dostaneme tak opět jeden z pěti pravidelných mnohostěnů. Takovéto dvojice těles jsou označovány jako vzájemně duální tělesa. Platí, že ke krychli je duální osmistěn a naopak, ke dvanáctistěnu dvacetistěn a čtyřstěn je duální sám se sebou (obr. 5.7)*.



Obr 5.7

5.7.1 Tetraedr – pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn má čtyři stěny tvořené rovnostrannými trojúhelníky, šest hran, čtyři vrcholy a v každém vrcholu se stýkají tři hrany. Nicméně co se týče spojení se zlatým řezem, pravidelný čtyřstěn pro něj zjevně neposkytuje vhodné prostředí.

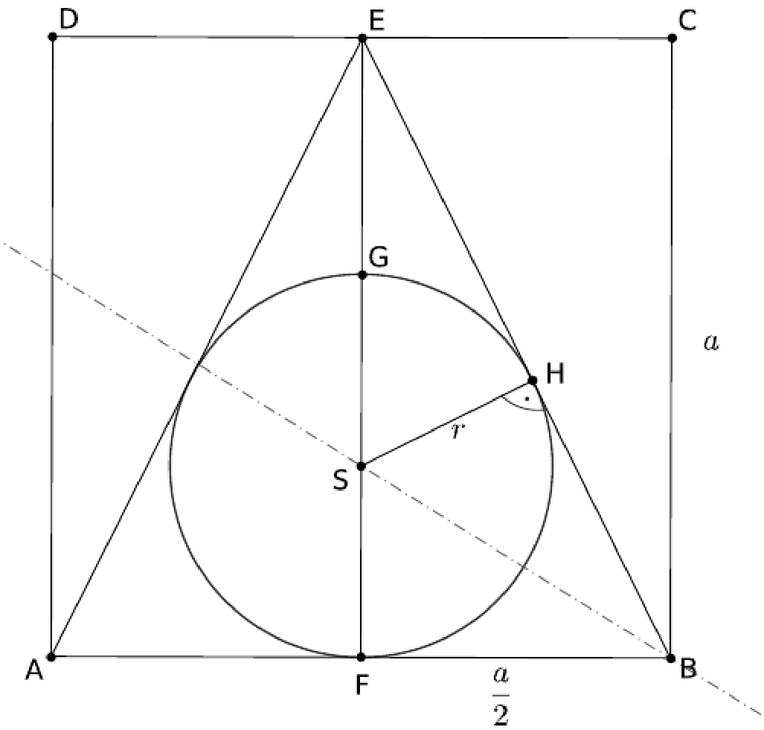
* Obr. 5.7 je čerpán z [11].

5.7.2 Hexaedr – pravidelný šestistěn – krychle

Krychle má šest stěn tvořených čtverci, 12 hran, 8 vrcholů a v každém vrcholu se stýkají tři hrany.

Sama o sobě krychle zlatý řez nejspíš neobsahuje, dá se najít pouze jakási umělá konstrukce, kterou uvádí Adam a Wyss ([1], s. 26), jež využívá stěnu krychle, tedy čtverec. V tomto případě se tedy omezíme pouze na dvourozměrnou rovinu.

Vepíšeme-li do čtverce rovnoramenný trojúhelník s vrcholem uprostřed jedné strany a se základnou ležící na straně protější a do tohoto trojúhelníku poté vepíšeme kružnici, kružnice potom dělí výšku trojúhelníku spuštěnou na základnu, potažmo stranu čtverce, v poměru zlatého řezu (obr. 5.7.2).



Obr. 5.7.2

Důkaz

V trojúhelníku *EFB* platí podle Pythagorovy věty:

$$|EB|^2 = |EF|^2 + |FB|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|EB| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Trojúhelníky EFB a EHS jsou podobné (jelikož mají jeden úhel shodný a druhý pravý), platí tedy $|EB| : |FB| = |ES| : |SH|$.

Po dosazení do této rovnosti vypočítáme poloměr vepsané kružnice:

$$\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \frac{a-r}{r}$$

$$\sqrt{5} = \frac{a-r}{r}$$

$$r\left(\sqrt{5}+1\right) = a$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{5}+1}$$

Z obr. 5.7.2 je jasně vidět, že delší část dělené úsečky je shodná s průměrem kružnice, její délka je tedy

$$2r = \frac{2a}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = \varphi.$$

5.7.3 Oktaedr – pravidelný osmistěn

Pravidelný osmistěn má 8 stěn tvořených rovnostrannými trojúhelníky, 12 hran, 6 vrcholů a v každém jeho vrcholu se stýkají čtyři hrany. Stejně jako pravidelný čtyřstěn, ani pravidelný osmistěn v sobě zlatý řez nejspíš neobsahuje.

Dvě platónská tělesa, v nichž se zlatý řez bezesporu vyskytuje ve vyšší míře, jsou dodekaedr a ikosaedr. Jelikož tato tělesa nejsou přímo předmětem práce, následující podkapitoly jsou spíše ilustrativní, a proto jsou uváděny většinou bez důkazů.

5.7.4 Dodekaedr – pravidelný dvanáctistěn

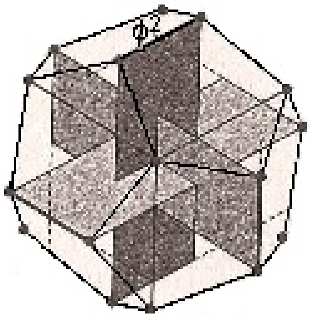
Pravidelný dvanáctistěn má 12 stěn tvořených pravidelnými pětiúhelníky, 30 hran, 20 vrcholů a v každém vrcholu se stýkají 3 hrany.

Už pouhý fakt, že stěny dvanáctistěnu jsou pětiúhelníky, zaručuje v tomto tělese přítomnost zlatého řezu v jeho jednotlivých stěnách (viz podkapitola 5.5). Zlatý řez lze ale najít i jinde než ve stěnách dodekaedru.

Naprostá většina autorů uvádí, že do pravidelného dvanáctistěnu jdou vepsat tři zlaté obdélníky, které jsou na sebe kolmé. Vrcholy těchto obdélníků potom leží ve středech dvanácti stěn tvaru pětiúhelníku (obr. 5.7.4a)*

Obr. 5.7.4a

Olsen ([15], s. 52) uvádí, že do dodekaedru jde také vepsat několik obdélníků se stranami délek v poměru $\Phi^2 : 1$, neboli $(\Phi + 1) : 1$, přičemž jdou vždy vybrat tři, které jsou na sebe kolmé. Všechny tyto obdélníky mají kratší ze stran shodnou se dvěma proti sobě ležícími hranami dvanáctistěnu (obr. 5.7.4b)**.



Obr. 5.7.4b

Velikost úhlu mezi dvěma stěnami pravidelného dvanáctistěnu jde vyjádřit například jako $\arccos\left(-\frac{1}{5}\sqrt{5}\right)$, což je podle Weissteinových údajů v [17] přibližně 116,56°. Parveen ve svém díle [13] ale zmiňuje, že tento úhel jde také vyjádřit pomocí zlatého čísla, a to jako $2\,\mathrm{arctg}\,\Phi$. Zadáme-li tuto hodnotu do matematického softwaru, získáme přibližný výsledek 63,44°, což je doplněk k 116,56° do 180°, tedy k hodnotě vyjádřené pomocí funkce arccos. Většina autorů se přiklání k definici úhlu mezi dvěma rovinami jako velikosti toho menšího ze dvou úhlů, nicméně autoři MathWorld (viz [17]) zastávají jiný názor. I tak lze ale prohlásit, že obě vyjádření jsou více či méně shodná.

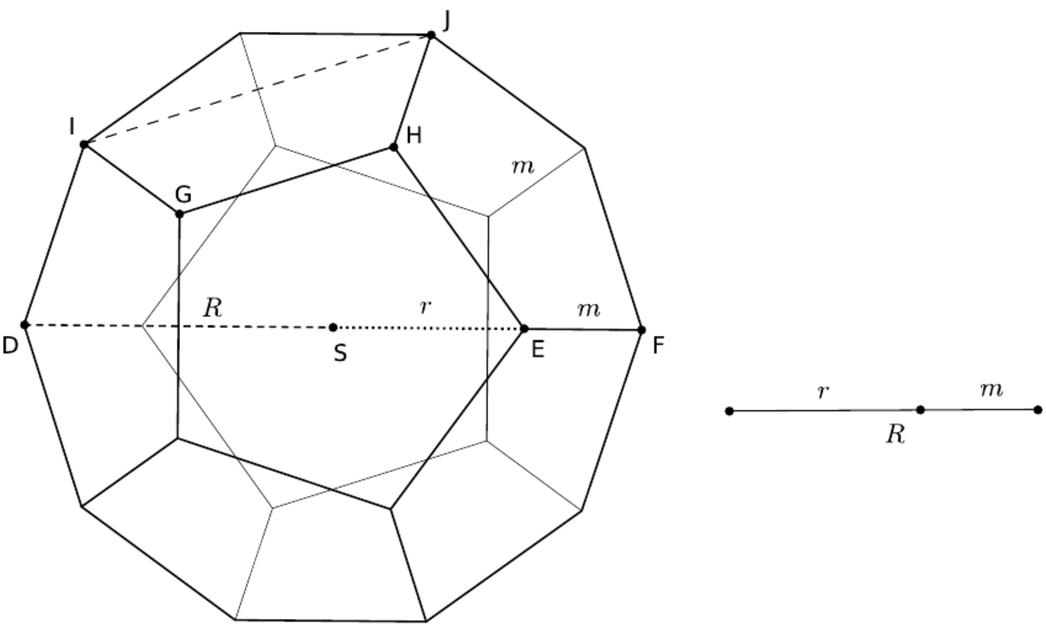
Zlatý řez můžeme využít také při zobrazování půdorysu pravidelného dvanáctistěnu, jak uvádí autoři Adam a Wyss ([1], s. 30):

---

* Obr 5.7.4a je čerpán z [17].

** Obr 5.7.4b je čerpán z [15], s. 53, upraven.

Vyjdeme z pravidelného desetiúhelníku, vepsaného do kružnice se středem S a průměrem R (obr. 5.7.4c vlevo). Uvnitř budou dva pravidelné pětiúhelníky, vepsané do shodné kružnice (na níž leží vrcholy pravidelného desetiúhelníku) také se středem S a poloměrem r. Poté už je nutné jen spojit body na obou vnitřních pětiúhelnících s jim odpovídajícími body na vnějším desetiúhelníku. Jedinou neznámou zůstává, jak zjistíme poloměr menší kružnice označený jako r. Stačí pouze rozdělit délku poloměru R v poměru zlatého řezu, další část dělené úsečky (Major) má potom shodnou délku s poloměrem r. Obr. 5.7.5c vpravo zobrazuje úsečku délky R rozdělenou v poměru zlatého řezu. Major část má shodnou délku jako r, a Minor část tedy odpovídá úseku označenému m, neboli spojnici dvou odpovídajících si vrcholů vnitřního a vnějšího desetiúhelníku.



Obr. 5.7.4c

Důkaz

Sám autor uvádí vysvětlení (s mírně upraveným značením). Užívá přitom pojem „poloměr pětiúhelníku“, čímž je myšlen poloměr kružnice tomuto pětiúhelníku opsané:

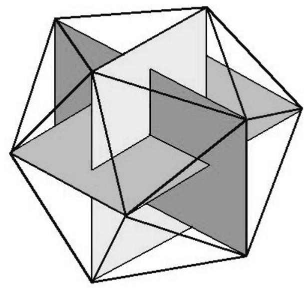
> Lze jednoduše pochopit, proč je délka r Major částí úsečky délky R:

Strana *GH* malého pětiúhelníku je Major částí diagonály *IJ*, tedy Major částí velkého pětiúhelníku se stranou *IJ*. Tedy také délka *r* jako poloměr malého pětiúhelníku dělí poloměr *R* velkého pětiúhelníku v poměru zlatého řezu. ([1], s. 30, překlad autorka)

5.7.5 Ikosaedr – pravidelný dvacetistěn

Pravidelný dvacetistěn má 20 stěn tvořených rovnostrannými trojúhelníky, 30 hran, 12 vrcholů a v každém jeho vrcholu se stýká 5 hran.

Olsen ([15], s. 52) například uvádí, že do dvacetistěnu lze vepsat obdélník, jehož strany jsou v poměru Φ : 1, tedy obdélník zlatý. Obdobně jako u dvanáctistěnu i do dvacetistěnu lze vepsat tři zlaté obdélníky, které jsou na sebe kolmé (obr. 5.7.5)*.



Obr. 5.7.5

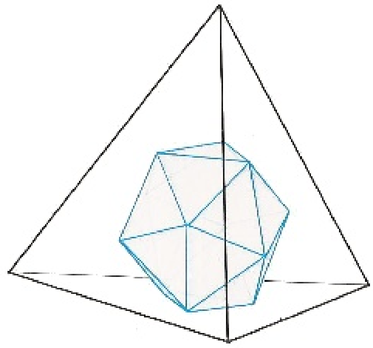
Parveen v [13] opět vyjadřuje úhel sevřený stěnami ikosaedru pomocí zlatého čísla jako $2\mathrm{arctg}\,\Phi^2$, neboli $2\mathrm{arctg}(\Phi+1)$. Ostatní autoři jej obvykle vyjadřují jako $\arccos\left(-\frac{1}{3}\sqrt{5}\right)$, což je přibližně 138,19°. Zadáme-li všechny vzorce do matematického softwaru, zjistíme, že výsledky jsou shodné.

5.7.6 Platónské těleso vepsané do jiného platónského tělesa a zlatý řez

Zlatý řez jde často také objevit v kombinaci dvou těles, kdy jedno vepisujeme do druhého. Při těchto umělých konstrukcích lze poměr zlatého řezu objevit i v tělesech, kde se jinak nevyskytuje, a to ve čtyřstěnu nebo osmistěnu.

* Obr. 5.7.5 je čerpán z [3].

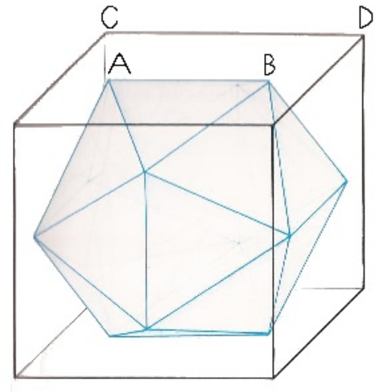
Dvacetistěn uvnitř čtyřstěnu (obr. 5.7.6a)*



Obr. 5.7.6a

Jak uvádí Adam a Wyss ([1], s. 34), čtyři stěny ikosaedru leží uvnitř stěn čtyřstěnu. Prodloužíme-li hrany těchto čtyř stěn, budou dělit hrany čtyřstěnu v poměru zlatého řezu. Rohy těchto čtyř stěn tvoří všech dvanáct vrcholů ikosaedru.

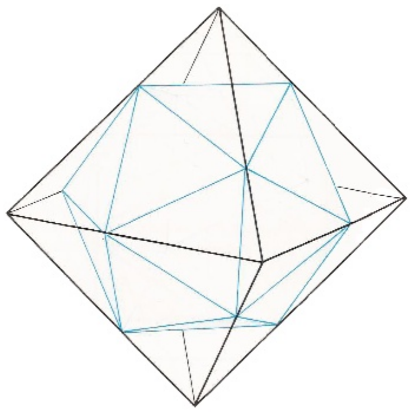
Dvacetistěn uvnitř krychle (obr. 5.7.6b)**



Obr. 5.7.6b

V každé stěně krychle vždy leží jedna hrana vepsaného ikosaedru. Jak zmiňují autoři Adam a Wyss ([1], s. 35), tato hrana, např. *AB*, je Major částí hrany krychle *CD*. Koncové body těchto kratších hran navíc tvoří všech dvanáct vrcholů ikosaedru.

Dvacetistěn uvnitř osmistěnu (obr. 5.7.6c)**



Obr. 5.7.6c

V Platónských tělesech ([1], s. 36) je uvedeno, že dvanáct vrcholů dvacetistěnu ježí na dvanácti hranách osmistěnu tak, že je dělí v poměru zlatého řezu. Osm z dvaceti stěn také leží ve stěnách osmistěnu.

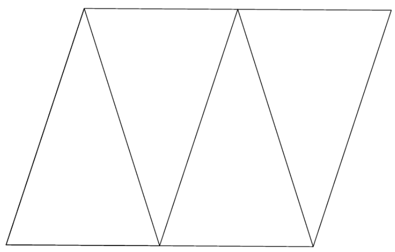
* Obr. 5.7.6a je čerpán z [1], s. 34.
** Obr. 5.7.6b,c jsou čerpány z [1], s. 35-36.

5.8 „Zlatá tělesa“

Žádná z prostudované literatury neuvádí, kromě souvislosti s platónskými tělesy, ani zmínku o zlatém řezu v prostoru. Rozhodla jsem se tedy zkusit najít a popsat nějaká tělesa, která by byla vhodná označit jako zlatá. Budeme vycházet z analogie ke zlatým útvarům v rovině, především z trojúhelníku, obdélníku a pětiúhelníku.

5.8.1 Zlatý čtyřstěn

Jako nejjednodušší se nabízí těleso typu čtyřstěnu, ne však se stěnami ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, ale trojúhelníku zlatého. Síť tohoto tělesa je zachycena na obr. 5.8.1.



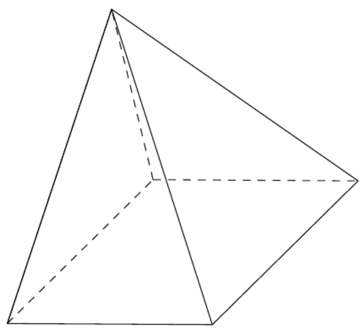
Obr. 5.8.1

Každá stěna tohoto tělesa samozřejmě obsahuje zlatý řez, jak bylo již ukázáno v podkapitole 5.1 o zlatém trojúhelníku.

5.8.2 Zlatá pyramida

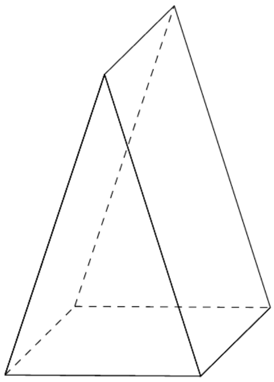
Zlatý trojúhelník lze využít i v tělese tvaru pyramidy (obr. 5.8.2).

Podstava je poté tvořena čtvercem a stěny jsou tvořeny čtyřmi zlatými trojúhelníky.



Obr. 5.8.2

5.8.3 Zlatý trojboký hranol

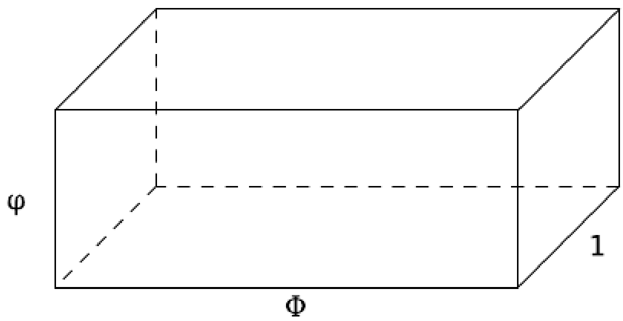


Obr. 5.8.3

Další způsob, jak využít zlatý trojúhelník v prostoru, je vytvořit z něj hranol, kde trojúhelník bude tvořit podstavu (obr. 5.8.3). Abychom dotáhli přítomnost zlatého poměru k dokonalosti, výšku hranolu definujeme tak, aby dvě ze stěn hranolu byly tvořeny zlatými obdélníky. Budeme-li ramena trojúhelníku považovat za delší stranu zlatého obdélníku, třetí stěna hranolu bude tvořená čtvercem.

5.8.4 Zlatý kvádr

Pokud vyjdeme ze zlatého obdélníku, lze analogicky k němu sestrojit zlatý kvádr. Mějme úsečku dané délky rozdělenou v poměru zlatého řezu. Hrany kvádru potom zvolíme jako délky kratšího a delšího úseku dělené úsečky a třetí hranu jako celou danou úsečku. Čtyři z šesti stěn kvádru budou tedy tvořeny dvěma různými zlatými obdélníky. Využijeme-li například hodnot úsečky z obr. 3.1 uprostřed, získáme kvádr s hranami délek φ, 1 a Φ (obr. 5.8.4).



Obr. 5.8.4

Kromě faktu, že ze tří různých hran tohoto kvádru lze utvořit dvě dvojice, které jsou vzájemně děleny v poměru zlatého řezu – lze tedy mluvit o postupném poměru zlatého řezu – platí obdobné tvrzení i o obsazích stěn zlatého kvádru. Vypočítáme-li obsahy jednotlivých stěn kvádru, lze z nich opět vytvořit stejný postupný poměr.

Důkaz

Bez újmy na obecnosti lze vycházet z hodnot délek hran obdélníku na obr. 5.8.4, jelikož jiný zlatý obdélník je mu vždy podobný, tedy všechny jeho hrany jsou jen vynásobeny stejnou kladnou konstantou.

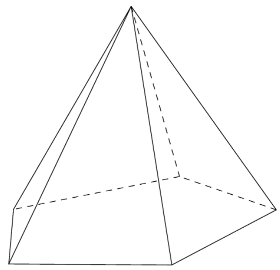
Vypočítáme tedy obsahy jednotlivých stěn:

$$S_1 = \varphi \cdot 1 = \frac{1}{\Phi} \cdot 1 = \frac{1}{\Phi} = \varphi$$
$$S_2 = \varphi \cdot \Phi = \frac{1}{\Phi} \cdot \Phi = 1$$
$$S_3 = 1 \cdot \Phi = \Phi$$

Na první pohled je zřejmé, že se situace převedla na případ, ze kterého jsme vycházeli. Bezesporu platí, že stěny o obsazích φ, 1 a Φ tvoří postupný poměr zlatého řezu.

5.8.5 Zlatý pětiboký jehlan

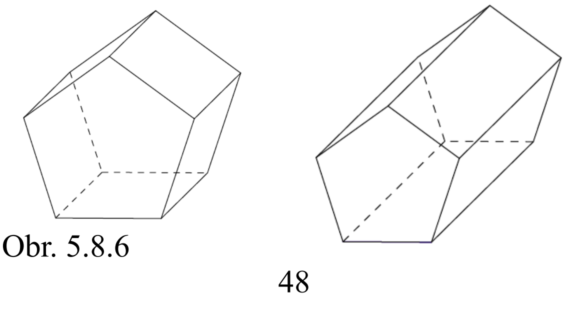
Vycházet můžeme i z pravidelného pětiúhelníku. Vytvoříme těleso typu jehlanu, jehož stěny budou tvořeny zlatými trojúhelníky (obr. 5.8.3).



Obr. 5.8.5

5.8.6 Zlatý pětiboký hranol

Z pravidelného pětiúhelníku můžeme vytvořit i těleso typu hranolu. Abychom opět zaručili co nejhojnější přítomnost zlatého řezu, stěny hranolu budou tvořit zlaté obdélníky. Podle toho, zda stranu pětiúhelníku považujeme za Major či Minor část, můžeme rozlišit dva druhy zlatého pětibokého hranolu (obr. 5.8.6).



Obr. 5.8.6

6. Výzkum

Výzkumů na téma zlatého řezu už bylo provedeno nespočet. V kapitole 2 už jsem zmínila výzkum Gustava Theodora Fechnera, který zkoumal účast či neúčast zlatého řezu v různorodých obrazech. Atalay ([2], s. 66) například uvádí svůj vlastní výzkum, kdy na skupině deseti mužů a jedenácti žen ověřoval hypotézu, že Φ je poměr výšky člověka k výšce jeho pupku. Ačkoliv, jak sám přiznává, skupina zkoumaných byla poměrně malá, průměrem získaných hodnot hypotézu potvrdil.

Mým cílem bylo provést alespoň trochu originální výzkum. Po prostudování dané literatury jsem zavrhla cokoliv ohledně lidského těla, jelikož zde je všechno omíláno stále dokola. Stále jsem však měla potřebu zabývat se něčím ve spojení s lidmi. Vybrala jsem si tedy téma, které se na rozdíl od většiny již zmiňovaných výzkumů zdá být poměrně subjektivní. Rozhodla jsem se zkoumat názor, který z daných obdélníků se nejvíc líbí.

Dotazování na to, který z daných obdélníku se lidem nejvíc líbí, proběhlo jistě již mnohokrát. Mým cílem bylo ale získat co největší množství vzorků od studentů mezi 15 a 26 lety, tedy studentů druhých stupňů základních škol, či odpovídajících ročníkům víceletých gymnázií, středních a vysokých škol. Chtěla jsem zjistit, zda je zlatý řez aktuální téma i pro současné studenty, nebo zda se jim líbí úplně jiné tvary a poměry, než se líbily dříve.

Na výzkum jsem předem připravila obrázky pěti různých obdélníků, respektive čtyř obdélníků a jednoho čtverce (viz příloha 6.2a). Poměry stran obdélníků jsem postupně měnila tak, že obdélník a) je vodorovný, velmi úzký, b) je o něco širší, c) zobrazuje zlatý obdélník, d) odpovídá čtverci a obdélník e) je opět úzký, ale tentokráte nakreslen ve svislé poloze. Otázka byla jednoduchá – vybrat obdélník, který se dotazovanému zkrátka nejvíc líbí. Pro lepší přehlednost a výpovědní hodnotu jsem vždy ještě zaznamenávala pohlaví dotazovaného.

Bylo samozřejmě očekáváno, že zlatý obdélník zvítězí na plné čáře. Problémem se ovšem stal čtverec, jenž naprostá většina studentů druhého stupně základních škol a středních škol označila jako nejhezčí. V psychologii je obecně známo, že děti kolem věku puberty mají rádi všechno jednoduché, tedy i tvary. Proto by nemělo být překvapivé, že čtverec uspěl jako nejhezčí u většiny z nich. Jak lze tedy očekávat, studentům vysokých škol už nepřipadají nejpůsobivější ty nejjednodušší tvary a zlatý obdélník zde opravdu zvítězil, i když poměrně těsně.

Pokud bych tedy výzkum omezila na výběr nejhezčího obdélníku ze čtyř možných (s vynecháním čtverce), je pravda, že zlatý obdélník vyhrál ve všech věkových kategoriích i u obou pohlaví a celkově poměrně s velkým náskokem.

Studenti druhého stupně středních škol

Dotazování probíhalo většinou mezi studenty nižšího stupně osmiletého gymnázia, nicméně zahrnula jsem i deset studentů ze základních škol. Zajímavé je, že oněch deset studentů rozdělilo své hlasy naprosto rovnoměrně, tedy po dvou ke každé nabízené možnosti. Celkem bylo dotázáno 67 studentů, 30 dívek a 37 chlapců. Jak už bylo uvedeno dříve, nejvíce hlasů dostal od obou pohlaví čtverec, a to 8 hlasů od dívek a 14 od chlapců. Zlatý obdélník se umístil na druhém místě s patnácti hlasy, následně obdélník a) s dvanácti hlasy, o dva hlasy méně dostal obdélník e) a nejméně se líbil obdélník b) s osmi hlasy.

Studenti středních škol

I v kategorii středních škol probíhalo dotazování především mezi studenty gymnázií, buď vyššího stupně osmiletého, nebo čtyřletého. Dále je zahrnuto několik studentů z odborných učilišť či ekonomických středních škol. Celkem bylo dotázáno 74 studentů, 32 dívek a 42 chlapců. První místo opět získal čtverec s 27 hlasy, následován zlatým obdélníkem se čtrnácti hlasy. Poslední tři obdélníky byly poměrně vyrovnané se sedmi pro obdélník a) a osmi hlasy pro obdélníky b) a e).

Studenti vysokých škol

V této věkové skupině byli dotazováni především studenti pedagogické fakulty, nicméně studující různé kombinace oborů, tudíž jde o kategorii poměrně pestrou. Příležitostně byly zaznamenány hlasy i studentů jiných vysokých škol, hlavně s ekonomickým zaměřením. Celkem bylo dotázáno 87 lidí, z toho 68 žen a 19 mužů. Nejvíce hlasů dostal v této skupině zlatý obdélník – 24 hlasů ženy, 8 hlasů muži – těsně následoval čtverec s celkem 22 hlasy. Obdélník b) obdržel 15 hlasů a zbývající obdélníky shodně 9 hlasů.

Můj výzkum tedy s jistou mírou opatrnosti potvrdil neustále omílanou frázi, že obdélník, který se lidem nejvíc líbí, je zlatý. Výjimek existuje spousta, vzato souhrnně, víc lidí vybralo jiný obdélník než ten zlatý, ale pokud se má zvolit jeden s nejvíce hlasy, výsledek je poměrně jasný. Přesné výsledky jsou k dispozici v příloze 6.2b.

7. Vzorové úlohy k tematice zlatého řezu

V této kapitole je uvedeno několik úloh včetně řešení, které mohou být zadány studentům druhého stupně nebo střední školy. Bohužel jsem neměla příležitost vyzkoušet všechny úlohy v praxi, nicméně vždy je uvedeno i odůvodnění, proč jsem se rozhodla řešit úlohy daným způsobem a zda je to pro studenty vhodné. Úlohy jsou zde uvedeny proto, aby poukázaly na skutečnost, že téma zlatého řezu je běžnou, avšak často opomíjenou součástí matematiky, a není tedy důvod, proč se o něm v hodinách matematiky nezmínit.

1. Délku *a* rozděl poměrem krajním a středním (zlatým řezem).

(úloha zadaná v [6], s. 25)

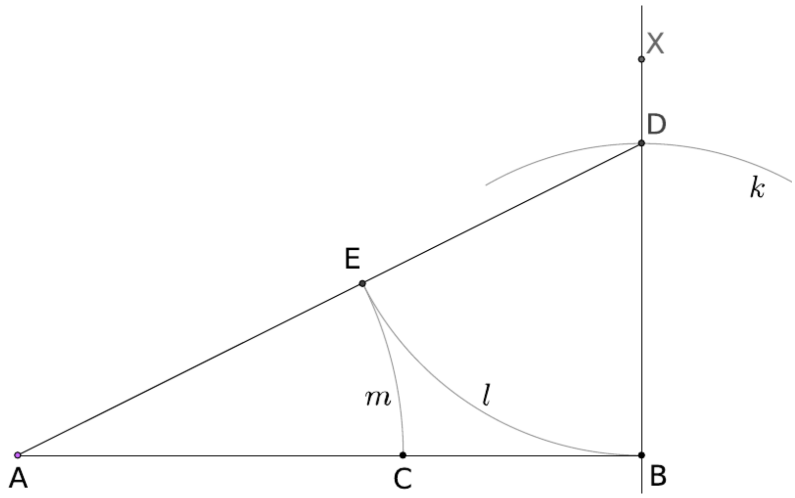
Eukleides u své úlohy uvádí poznámku: „Protože pro hledanou délku x platí $a : x = x : (a - x)$, je x délka strany čtverce, který má stejný plošný obsah jako obdélník o stranách délky a, $a - x$“ ([6], s. 25). Tato úloha je tedy řešená ve druhé knize jeho *Základů* – viz úloha č. 2.

Pro studenty je však jednodušší řešení uvedené v podkapitole 5, jelikož je snáze pochopitelné, a nevyžaduje tak dlouhou a pracnou konstrukci (podle obr. 8.1).

Postup konstrukce:

0. zadaná úsečka AB
1. $ABX;\ |\sphericalangle ABX| = 90°$
2. $k;\ k\left(B;\ r = \frac{|AB|}{2}\right)$
3. $D;\ D \in k \cap BX$
4. $l;\ l\,(D;\ r = |DB|)$
5. $E;\ E \in l \cap AD$
6. $m;\ m\,(A;\ r = |AE|)$
7. $C;\ C \in m \cap AB$

Konstrukce:

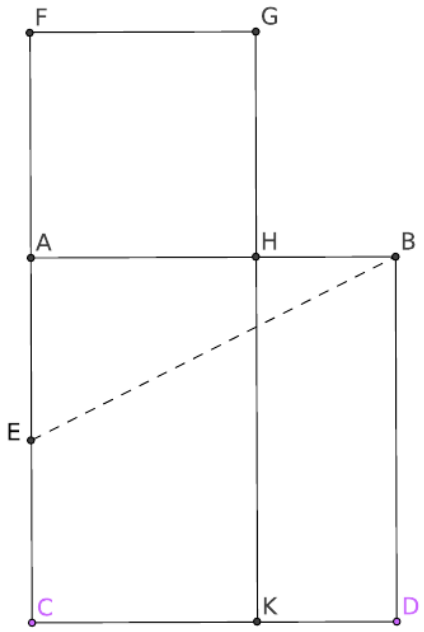


Obr. 8.1

2. Rozděl danou úsečku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající. ([4], s. 89)

Autor po nás jinými slovy chce, abychom na úsečce *AB* našli bod (na obr. 8.2 označený *H*), pro který platí, že jím prochází obdélník takový, který má jednu stranu dlouhou jako úsečka *AH* a druhou jako *AH* a *AB* dohromady. Obsah tohoto obdélníku má být shodný s obsahem čtverce vztyčeného nad danou úsečkou.

Jelikož autor uvádí i řešení, nebudu vytvářet alternativní formu, ale uvedu přímo jeho způsob řešení:



Obr. 8.2

Nechť je daná úsečka *AB*, která má být rozdělena tak, aby se obsah pravoúhelníku z celé a jedné úsečky rovnal obsahu čtverce nad celou úsečkou *AB*.

Narýsujeme tedy z *AB* čtverec *ABCD* (obr. 8.2). Úsečku *AC* rozpůlíme bodem *E* a spojíme s bodem *B*. Tuto vzdálenost pak přeneseme do prodloužené úsečky *CA* a průsečíkem získáme bod *F*. Nad úsečkou *AF* poté vztyčíme čtverec *AHGF*. Bod *H* dělí úsečku *AB* v poměru zlatého řezu, stejně tak bod *K* dělí úsečku *CD*. Pak jsou obsahy obdélníku *CKGF* a čtverce *ABCD* stejné.

Důkaz

Ačkoliv autor uvádí i důkaz řešení, nezdá se pro studenty příliš vhodný, jelikož využívá několika dalších pomocných vět. Uvádím tedy svůj vlastní důkaz, který se zdá být srozumitelnější:

Označme opět délku úsečky *AB* jako *a* a úsečky *HB* jako *x*; je tedy $|AH| = a - x$. Pro hledaný čtverec a obdélník potom platí (podle obr. 8.2):

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$S_{CKGF} = (a - x)(a + a - x) = (a - x)(2a - x) = 2a^2 - 3ax + x^2$$

Použijeme-li vztah pro hodnotu φ a vyjádříme-li x, dostáváme rovnost

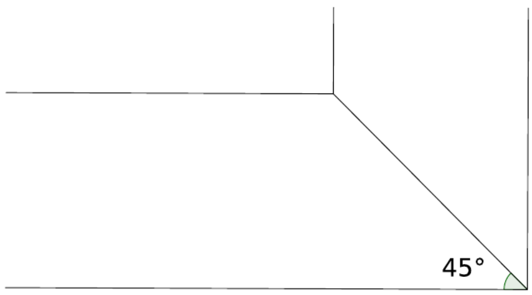
kterou dosadíme výše a získáváme

$$S_{CKGF} = 2a^2 - 3a\left(a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right) + \left(a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}a\right)^2 =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left(\sqrt{5}-1\right) - a^2\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2 = a^2\left(\frac{3\sqrt{5}-3-2\sqrt{5}+2+3-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{2}{2}a^2 = a^2.$$

3. Vypočítej, o kolik je nutné zkrátit dvě ze čtyř metrových prken, aby jejich stlučením k sobě vznikl rám obrazu ve tvaru zlatého obdélníku a odpad byl co nejmenší. Uvažuj, že rohy obrazu budou tvořeny bočními hranami prken seříznutými do 45° (obr. 8.3). Počítejte s délkami vnějších hran.

Abychom měli co nejmenší ztráty, budeme jedno celé metrové prkno považovat za delší stranu zlatého obdélníku, podle obvyklého značení tedy za Major úsek délky $a - x$. Zbývá tedy dvě prkna zkrátit tak, aby tvořila kratší stranu obdélníku, neboli odříznout úsek délky x.



Obr. 8.3

K řešení můžeme použít tvrzení z kapitoly 3 (obr. 3.1), tedy že tvoří-li delší část dělené úsečky jednotka, délka kratší části se poté rovná $1/\Phi$. Z toho dostáváme snadno

$$x = \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

Musíme tedy odříznout přibližně 38,2 cm prkna.

Pokud tvrzení neznáme, můžeme k výsledku dojít i prostým výpočtem z definice, kam za $a-x$ dosadíme jednotku

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{1+x}$$
$$x(x+1)=1$$
$$x^2+x-1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Kořen $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ je záporný, tudíž pro nás nemá význam. Druhý kořen $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ je stejným výsledkem, který jsme dostali v prvním způsobu řešení.

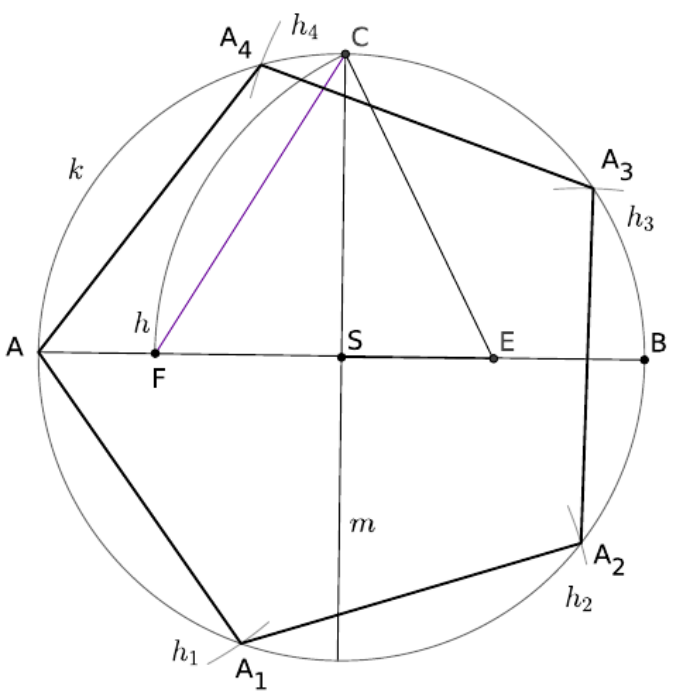
4. Narýsuj pravidelný pětiúhelník, který je vepsán kružnici o průměru 4 cm.

Popis konstrukce je i s důkazem popsán v podkapitole 5.5, nicméně uvedeme zde alespoň postup konstrukce a obrázek (obr. 8.4):

<u>Postup konstrukce:</u>

0.$k;\ k(S;\ r=2cm)$
1.$A;\ A\in k$ - $lib.$
2.$B;\ B\in AS\cap k, B\neq A$
3.$m, S\in m\wedge m\perp AS$
4.$C;\ C\in m\cap k$
5.$E;\ E\in SB\wedge |SE|=|EB|$
6.$h;\ h(E;\ r=|EC|)$
7.$F;\ F\in h\cap AS$
8.$h_1;\ h_1(A;\ r=|FC|)$
9.$A_1;\ A_1\in h_1\cap k$
10.$h_2;\ h_2(A_1;\ r=|FC|)$
11.$A_2;\ A_2\in h_2\cap k$
12.$h_3;\ h_3(A_2;\ r=|FC|)$
13.$A_3;\ A_3\in h_3\cap k$
14.$h_4;\ h_4(A_3;\ r=|FC|)$
15.$A_4;\ A_4\in h_4\cap k$
16.$AA_1A_2A_3A_4$

<u>Konstrukce:</u>



Obr. 8.4

5. V minulosti byly délky stran televizní obrazovky v poměru 4 : 3. Současné obrazovky mají však délky stran v poměru 16 : 9. Zkus vymyslet, proč se poměr obrazovek změnil a jsou-li současné televizory lahodnější pro lidské oko, či ne.

Aby byl poměr co nejhezčí, měl by se blížit zlatému číslu *Φ,* tedy

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}61803\,.$$

Vypočítáme tedy jednotlivé poměry:

$$4:3 = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}$$

$$16:9 = \frac{16}{9} = 1{,}\overline{7}$$

Z toho vyplývá, že lichotivější poměr je 16 : 9, protože se blíží zlatému poměru více než 4 : 3. Může to být i jeden z důvodů, proč se poměr stran obrazovky změnil.

Závěr

Zlatý řez je téma, na které bakalářská práce svým rozsahem ani zdaleka nestačí. Já sama jsem zpočátku měla v plánu zahrnout mnohem víc, především různé druhy praktického využití zlatého řezu, které jsem v průběhu psaní byla nucena shrnout jen do několika málo odstavců; či věnovat kapitolu Fibonacciho a Lucasovým číslům. Na většinu z toho však nezbyl prostor.

Rozhodla jsem se tedy soustředit se především na matematickou a geometrickou stránku tématu, a vytvořit tak přehlednou a obohacující kompilaci, do které by mohli nahlédnout třeba i studenti víceletých gymnázií či vysokých škol. Aby však práce nebyla pouhým shrnutím již existující literatury, snažila jsem se zahrnout i vlastní tvorbu. Jednak jsou to důkazy, které jsem ve většině případů vymýšlela sama a snažila se je rozepsat srozumitelně i pro méně zkušeného čtenáře. Dále jsou to podkapitola 5.8 pojmenovaná jako zlatá tělesa, sběr a tvorba vzorových úloh, které by bylo možné využít při hodinách matematiky na základní a střední škole, či výzkum, který se zaměřuje na cílovou věkovou skupinu.

Práci by bylo vhodné rozšířit a doplnit právě o objekty kolem nás, které obsahují zlatý řez. Zajímavé by bylo i provázání s historií, kde by šlo vyjít od filozofie a geometrie k architektuře, malířství až třeba k fotografování či plastické chirurgii. Zajímavá by mohla být i praktická demonstrace tématu ve školách s následným zkoumáním, jak se změnilo vnímání žáků a jestli třeba vzrostl jejich zájem o geometrii.

Já sama jsem intenzivně obklopená zlatým řezem strávila skoro rok života a rozhodně s k tomuto tématu budu ráda vracet.

Seznam použité literatury

[1] ADAM, Paul a WYSS, Arnold. *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde: einschliesslich: "Die Sonderlinge"- Die Archimedischen Körper Cubus simus und Dodecaedron simum. Das Rätsel ihrer Herkunft.* 2., unveränderte Auflage, Bern : Haupt, 1994. *136 stran*. ISBN 3-258-04943-2.

[2] ATALAY, B. *Matematika a Mona Lisa : Umění a věda Leonarda da Vinci*. Přeložil V. Horák. První vydání, Praha : Slovart, 2007. *267 stran*. Přeloženo z: *Maths and Mona Lisa : The Art of Science of Leonardo da Vinci*. ISBN 978-80-7209-1.

[3] Aula Facil: Selección de cursos gratis on line. *Aula Facil* [online]. 2000 [cit. 23.7.2012]. Dostupné z: http://www.aulafacil.com/matematicas-volumenes/curso/Lecc-6.htm.

[4] EUKLEIDES, *Základy : Knihy I–IV.* První vydání, Nymburk : OPS, 2007. *Kniha druhá*. ISBN 80-903773-6-X.

[5] EUKLEIDES, *Základy : Knihy V–VI.* První vydání, Nymburk : OPS, 2009. *127 stran.* ISBN 978-80-87269-05-3.

[6] EUKLEIDES, *Základy : Knihy VII–IX.* První vydání, Kanina : OPS, 2010. *Kniha VIII*. ISBN 978-80-87269-11-4.

[7] GHYKA, M. C. *Zlaté číslo aneb Jak pythagorovské rytmy a obřady ovlivnily vývoj západní civilizace*. Přeložila D. Navrátilová. První vydání, Praha : Argo, 2008. *1. Díl*. Přeloženo z: *Le Nombre d'Or.* ISBN 978-80-7203-926-5.

[8] HAMZOVÁ, Jitka. *Albrecht Dürer : Kresby.* První vydání, Praha : Odeon, 1982. Úvodní studii napsal L. Hlaváček. ISBN 01-504-82

[9] ENCYCLOPÆDIA BRITANNICA. *Gustav Theodor Fechner* [online]. 2012 [cit. 11.2.2012]. Dostupné na: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/203301/Gustav-Theodor-Fechner .

[10] JAREŠOVÁ, Miroslava a ZHOUF, Jaroslav. Spirály a jejich význam v praxi. *Rozhledy*, 2009, ročník 84, č. 3, s. 5-19.

[11] JIROVSKÁ, Iveta. *Zlatý řez*. *http://www.volny.cz/zlaty.rez/* [online]. 6.8.2000 [cit. 5.2.2012]. Dostupné na: http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka.html.

[12] MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky.* První vydání, Vimperk : Pistorius & Olšanská, 2008. *311 stran*. ISBN 978-80-87053-16-4.

[13] PARVEEN, Nikhat. UNIVERSITY OF GEORGIA. *Class Page for Nikhat Parveen* [online]. 2009 [cit. 27.7.2012]. Dostupné z: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680/Parveen/platonic_solids.htm.

[14] OHM, Martin. *Die reine Elementar-Mathematik* [online]. Druhé vydání. Berlin: Jonas Verlags-Buchhandlung, 1835 [cit. 12.2.2012]. Dostupné na: http://books.google.cz/booksid=KS3yAAAAMAAJ&printsec=frontcover&dq=reine+elementar+mathematik+ohm&hl=cs&sa=X&ei=CsU2T7--EMSV-wau4NCDAg&ved=0CEAQ6AEwAg#v=onepage&q&f=false .

[15] OLSEN, S. *Záhadný zlatý řez*. Přeložil P. Holčák. První vydání, Praha : Dokořán, 2009. *68 stran*. Přeloženo z: *The Golden Section*.
ISBN 978-80-7363-195-6.

[16] STRUIK, D. J. *Dějiny matematiky : Malá moderní encyklopedie.* Přeložili L. Nový a J. Folta. První vydání, Praha : Orbis, 1963. *250 stran*. Přeloženo z: *A Concise History of Mathematics.* ISBN 11-123-63.

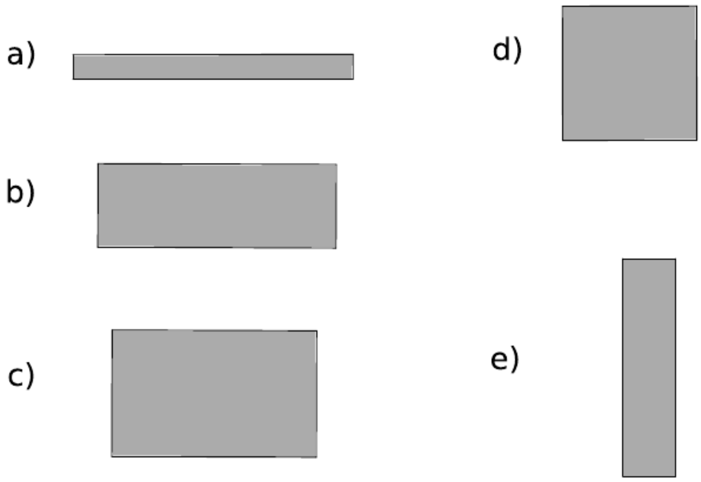
[17] WEISSTEIN, Eric W. MATHWORLD. *Dodecahedron* [online]. 1999 [cit. 29.7.2012]. Dostupné z: http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html

[18] WHITE, Michael. *Leonardo : První vědec.* Přeložil P. Dan. První vydání, Praha : Ottovo nakladatelství, 2001. *296 stran.* Přeloženo z: *Leonardo, The First Scientist.* ISBN 80-7181-482-2.

Přílohy

Pro přehlednost jsou přílohy číslovány podle kapitol a podkapitol, ke kterým se vztahují.

<u>Příloha 6.2a</u>



<u>Příloha 6.2b</u>

	2.st. ZŠ		SŠ		VŠ	
	ženy	muži	ženy	muži	ženy	muži
a)	5	7	1	6	6	3
b)	4	4	4	4	11	4
c)	7	8	8	6	24	8
d)	8	14	14	23	18	4
e)	6	4	5	3	9	0

	celkem	ženy	muži
a)	28	12	16
b)	31	19	12
c)	61	39	22
d)	81	40	41
e)	27	20	7
celkem	228	130	98