UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY A DIDAKTIKY MATEMATIKY

Platónská tělesa

Platonic solids

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Autor: Radek Šmíd

PRAHA 2012

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně pod vedením Doc. RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 29. listopadu 2012

Radek Šmíd

Děkuji všem, kteří mě vedli na cestě k napsání této bakalářské práce, zejména Doc. RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za pečlivé vedení při její realizaci.

Abstrakt

Tato práce podává ucelený přehled o tématu platónských těles. Počínaje krátkou kapitolou o historii, kde jsou ukázány počátky jejich zkoumání a užití – zejména Platónův a Keplerův přínos. Nejdůležitější část práce se zabývá představením všech pěti platónských těles. Jsou zde popsány jejich míry (vlastnosti stěny, úhlopříčky, výška, povrch a objem), odchylky částí tělesa a myšlenky vedoucí k odvození těchto vzorců.

Tyto znalosti nám dovolují obsáhnout vztahy mezi zkoumanými tělesy, což je provedeno v následující části práce – mezi nejdůležitější vztahy patří dualita a vzájemné vpisování. Prostor je věnován také Archimédovým a dalším částečně pravidelným tělesům, které lze odvodit z těch Platónských.

Klíčová slova: Platónské těleso, stereometrie, stěna, úhlopříčka, výška, povrch, objem

Abstract

This paper deals with the theme of Platonic solids. Opening with little history chapter, where beginings of their examination and use – especially Plato's and Kepler's contribution – are shown. The main part is focused on introducing all of the Platonic solids including their measures (properties of faces, diagonals, height, surface, volume), angles and ideas leading to formulas, that describe these properties.

This knowledge allows us comprehend relations between the solids, as it is done in the next part of this paper – most important of them are duality and inscribing each other. There is also mention about Archimedic and other partly regular solids, that can be described using Platonic solids.

Keywords: Platonic solid, stereometry, face, diagonal, height, surface, volume

Obsah

Úvod

„Třeba pověděti, jaké vlastnosti by měla čtyři nejkrásnější tělesa, nepodobná si navzájem, ale schopná vznikati jedna z rozkladu druhých; dojdeme-li totiž k tomu, nalezli jsme pravdu o vzniku země i ohně i těch látek, které jsou jejich středními úměrnami.“ (Platón, Timaios, 53e)

Přestože nemám takové ambice a hledání pravdy o vzniku Země přenechám jiným, souhlasím, že je dobré vlastnosti těchto těles znát a popsat, což je přesně to, o co jsem se v co nejširší míře v této práci pokusil. Přede mnou se jimi zabývali mnozí v čele s již citovaným Platónem a patří jim za to místo ve stručné kapitole o historii platónských těles. Těžištěm práce je sbírka matematických faktů o každém ze čtyř nejkrásnějších těles, i pátém – také pěkném pravidelném mnohostěnu, podpořená jejich odvozením. To jsem ve většině případů našel v [3] a pro potřeby práce upravil, některé vzorce zmíněná práce neobsahuje a odvození je vlastní práce. V některých případech se odvození vzorců, které Chmelíková nezahrnula, ukázalo jako vhodný mezikrok v dalším postupu.

Zajímavou pointou pak můžou být jejich vzájemné vztahy, zejména pak možnosti a způsoby jejich vpisování do sebe navzájem. Kromě obrázků ilustrujících, jak jsou vůči sobě tělesa umístěna, je důležitou součástí kapitoly podrobný myšlenkový postup tohoto vpisování.

Poslední kapitolu jsem věnoval tělesům, která jsou méně pravidelná, už ne nejkrásnější, ale je v nich vždy kus krásy platónských těles, neboť jsou z nich odvozena různými postupy a s původním platónským tělesem sdílí například symetrie, jsou zde zmíněny nekonvexní pravidelné mnohostěny, polopravidelná tělesa a tělesa s nepravidelnými stěnami. O těchto tělesech se již nedočtete mnoho podrobností, snažil jsem se především vystihnout myšlenku jejich konstrukce z výchozího platónského tělesa.

Snažil jsem se text vystavět svébytně, aby pochopení nebylo závislé na obrázcích a jejich přiložení bylo spíše pro potěchu oka a usnadnění, případně zrychlení, nahlédnutí do dané problematiky. Kromě klasického čtení od začátku do konce jsem se snažil zachovat i možnost samostatného čtení stěžejních kapitol, aby práce mohla sloužit jako příruční zdroj informací o platónských tělesech.

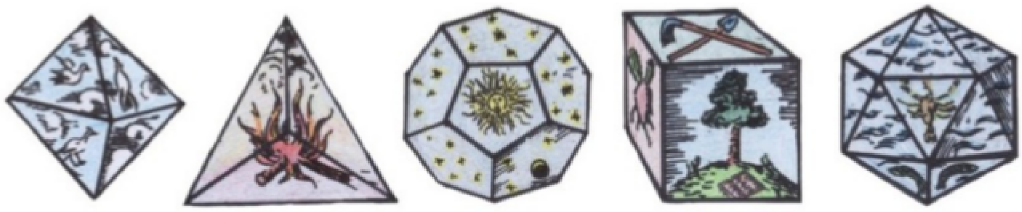
Kapitola 1

Historie

Nelze tvrdit, že jsou platónská tělesa stará jako lidstvo samo. Lze tvrdit, že jsou starší, neboť například krystaly chloridu sodného tvoří tvar krychle i bez lidského přičinění. Ale to byly jen pravidelné krystaly, člověk si jimi jistě dříve solil, než začal zkoumat jejich pravidelnost. To se stalo až s rozvojem starověkých civilizací. Patrně nejstarší dochovanou částí umělého platónského tělesa je Džoserova pyramida starší než 4 600 let. Egyptské pyramidy byly stavěny jako pravidelný čtyřboký jehlan se stranou délky a a výškou $v = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, neboli polovinou pravidelného osmistěnu. Po nejstarším čtyřstěnu, který lze snadno přibližně vytvarovat z měkké hmoty mezi palci a ukazováky obou rukou, je asi zbytečné pátrat, stejně jako dokládat nějakou nejstarší krychli. Zajímavější a o lidském zkoumání více vypovídající jsou nálezy dvanáctistěnu v jižní Itálii, jehož vytvoření je datováno 500 let před náš letopočet ([8], s. 181), což je nedlouho po Pythagorovi (přibližně 570 až 510 př.n.l.), a ještě starší pětice kamenů připomínajících pravidelná tělesa ze Skotska (obr. 1.1), které mohou stářím 4 000 let konkurovat i egyptským pyramidám [6].

Obr. 1.1: Kameny nalezené ve Skotsku (převzato z [7])

Historicky zásadní je Platónův popis těchto těles v dialogu *Timaios* (datováno přibližně 360 př.n.l.). Na straně 55 popisuje zevrubně konstrukci čtyř těles z krásných trojúhelníků, kterých jsou dva druhy – oba pravoúhlé, jeden rovnoramenný, druhý dnes nejsnáze popsatelný jako polovina rovnostranného trojúhelníku (v originále „ten, v němž čtverec delší odvěsny jest třikrát větší než čtverec kratší odvěsny“ nebo také „mající přeponu dvakrát delší kratší odvěsny“). Jejich skládáním vedle sebe pak získáváme v prvním případě čtverec, když přepony tvoří strany čtverce a k sobě přiložené odvěsny jsou polovinami úhlopříček, v druhém případě pak ze šesti složíme rovnostranný trojúhelník vždy kratšími odvěsnami a přeponami k sobě; výsledkem je trojúhelník rozdělený výškami. Čtverec i rovnostranný trojúhelník lze samozřejmě složit z krásných trojúhelníků i jinak (v obou případech například ze dvou); uvedeným způsobem je skládal Platón. Tělesa pak Platón konstruoval spojováním určitého počtu n-úhelníků u jednoho vrcholu a tato tělesa nazval krásná.

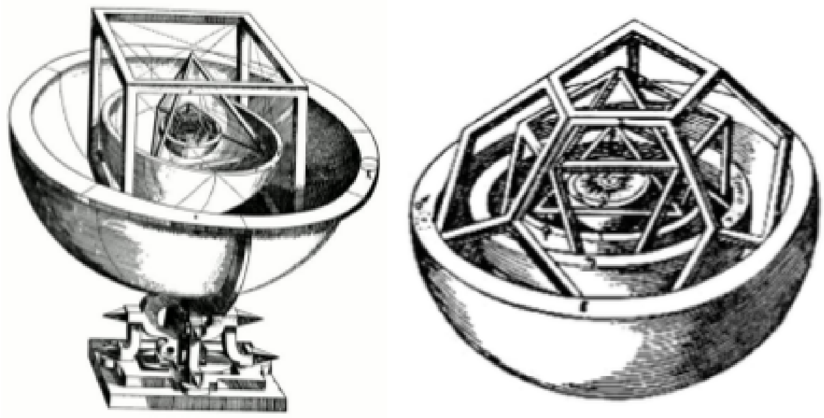


Obr. 1.2: Keplerův nákres těles se zobrazením příslušných živlů podle Platóna (převzato z [7])

Všechny pravidelné mnohostěny použil bůh podle Platóna při uspořádávání světa. Každému ze čtyř krásných těles přiřadil jeden živel podle určité podobnosti. Krychli, jakožto nejstabilnější, přiřadil zem ve smyslu pevné složky, ostatním tělesům pak přiřadil pohyblivé živly. Čtyřstěnu, nejmenšímu a nejostřejšímu, přisoudil oheň, osmistěnu méně pohyblivý vzduch a nakonec vodu přiřadil dvacetistěnu. Zbývající pravidelné těleso, dvanáctistěn složený z pětiúhelníků namísto dokonalých trojúhelníků, pak bůh podle Platóna „užil, propracovávaje nákres všehomíra“. [4] (obr. 1.2)

Nezbytně se tedy platónská tělesa dostala i do Eukleidova souhrnu tehdejšího matematického poznání. Ve třinácté knize *Základů* se podrobně věnuje především jejich konstrukci, dualitě a vzájemnému vpisování. [9] Obsažen je i důkaz existence právě pěti takových těles, což jsou témata, která blíže představíme v dalších kapitolách. Vědomosti v *Základech* přežily i římskou dobu zákazu matematiky do její postupné obnovy.

Mezi jinými se v době renesance tématem podrobně zabýval Johannes Kepler napřed v práci *Mysterium Cosmographicum*, 1 596 (ještě před pobytem v Praze spojeným s pří-



Obr. 1.3: Model Keplerova uspořádání sluneční soustavy (převzato z [2])

stupem k měřením Tycha Brahe); toto dílo bylo mimo jiné první veřejnou obhajobou Kopernikova heliocentrismu. Pokusil se rozvrhnout poloměry oběžných drah pravidelně a použil k tomu právě platónská tělesa, která vepsal mezi sféry s těmito poloměry.

Sféře Saturnu, který byl podle tehdejších poznatků nejvzdálenější planetou, vepsal krychli, do níž byla vepsána sféra Jupiteru, do ní vepsán čtyřstěn, dále stejně sféra Marsu, dvanáctistěn, sféra Země, dvacetistěn, sféra Venuše a do ní osmistěn opsaný sféře Merkuru [1] (obr. 1.3).

Sat	6	Jup	4	Mar	12	Zem	20	Ven	8	Mer
9,54	0,55	5,20	0,29	1,52	0,66	1	0,72	0,72	0,54	0,39
6,54	0,58	3,77	0,33	1,25	0,79	1	0,79	0,79	0,58	0,45

Tabulka 1.1: Skutečné a podle poměrů vypočítané vzdálenosti planet od Slunce a jejich poměry; vysvětlivky:

Zkrácený název planety	Číslo – počet stěn platónského tělesa	...
Skutečná střední vzdálenost planety od Slunce [10]	Vypočítaný poměr vzdáleností dvou sousedních planet	...
Vypočítaná vzdálenost podle poměrů počítaná od Země	Poměr poloměrů vepsané a opsané koule [5]	...

Kromě neskonalé krásy a přibližné pravdy (tabulka 1.1) je v tomto pojetí důležité i omezení počtu planet – mezi šest sfér je vepsáno právě pět platónských těles a jako není více těch druhých, není a nemůže být více ani těch prvních. Bohužel sám Kepler posléze prokázal eliptické dráhy těles a dnešní seznam planet je delší o Uran a Neptun.

Hledáním krásy ve sluneční soustavě pomocí platónských těles Kepler ovšem nekončí jeho zájem o tato tělesa. Později popsal v díle *Harmonices Mundi* další dva pravidelné mnohostěny nazývané Keplerova tělesa, konkrétně malý a velký hvězdicový dvanáctistěn. Stejně jako platónská tělesa mají tato dvě tělesa všechny stěny a hrany shodné, ale stěny nejsou konvexní. Kromě nich popsal ještě další tělesa vykazující částečnou pravidelnost. Francouz Poinsot (1 777–1 859) popsal patrně nezávisle na Keplerovi čtyři nekonvexní pravidelná tělesa, kromě hvězdicových dvanáctistěnů to byly velký dvanáctistěn a velký dvacetistěn. Jejich stěny jsou konvexní a jsou duální ke Keplerovým tělesům. Těmto tělesům se budeme věnovat v kapitole 10.

Dále už se samotná platónská tělesa nestala předmětem zásadnějšího matematického bádání, spíše motivací v jiných oborech matematiky, když byly převedeny do plošných grafů; podobnost je ostatně viditelná již ve shodné terminologii vrcholů a hran. Tímto tématem se mezi prvními zabývali William Rowan Hamilton (1 805–1 865) a Victor Schlegel (1 843–1 905). Zjednodušení jejich charakterizace přinesl Ludwig Schläfli (1814–1895), který zároveň otevřel cestu hledání analogií ve více rozměrech.

Platónská tělesa jsou oblíbená i v jiných oborech přírodních věd – pokud se chtějí například atomy v molekule pravidelně rozmístit, vytváří ve vhodném počtu tvary platónských těles, proto jsou tato tělesa často zmiňována v krystalografických pracích, ale tvary připomínající tato tělesa najdeme i v živé přírodě – například u mřížkovců [7]. Po celou dobu historie hrála tato tělesa také významnou estetickou úlohu, ať už v podobě modelů nebo plošných zobrazení, ale téma platónských těles v umění není zahrnuto v této práci. Historii nejen pravidelných mnohostěnů se věnuje podrobně [6], o historii platónských těles se můžeme dočíst také v [1].

Kapitola 2

Související literatura

Z autorů zmíněných již v kapitole 1 je vhodné zopakovat Eukleida, jehož *Základy* „můžeme pokládat za systematickou učebnici nejen tehdejší geometrie, ale také teorie čísel a elementární algebry. Někteří matematikové dokonce tvrdí, že Eukleidovým cílem bylo popsat vlastnosti právě pravidelných mnohostěnů, k čemuž musel přidat obsáhlý úvod do dané problematiky. Pravdou je, že konstrukci platónských těles věnoval Eukleides poslední, tj. třináctou knihu svých *Základů*. První až šestá kniha jsou věnovány poznatkům z rovinné geometrie, sedmá až devátá kniha se zabývají studiem přirozených čísel a desátá kniha zkoumá tzv. nesouměřitelné veličiny, v dnešní terminologii čísla iracionální.“ [6, str. 15] Zařazení platónských těles na konec ale může vyjadřovat také to, že tato tělesa považoval Eukleides za vrchol soudobé matematiky. Aktuálně vychází jejich český překlad Františka Servíta s komentářem Petra Vopěnky; zatím vyšlo ve čtyřech svazcích prvních dvanáct knih. Online jsou dostupné v angličtině jako stránky [9].

Základní přehled o platónských tělesech najdeme v *Platónských a archimedovských tělesech* od Dauda Suttona [5], kde jsou jednotlivá tělesa stručně popsána a užitečnou může být tabulka hodnot s počty vrcholů, stěn a hran, poměrem délek hran a poloměrů význačných kružnic. Bohužel Sutton žádnou z hodnot neodvozuje a pro tuto tabulku jsou vyjádřeny desetinným číslem namísto exaktního vyjádření zlomkem.

Dílo stejného názvu – *Platonishe und Archimedishe Körper* (tedy česky *Platónská a archimedovká tělesa*) – doplněné podnázvem ihre *Sternformen und polaren Gebilde* (volně přeloženo *jejich ohvězdování a duality*) publikoval Paul Adam společně s Arnoldem Wyssem v Německu [1], rozsahem je ale nesrovnatelně širší a velmi poctivě zpracované, zvláště rozsáhlý je zde obrazový doprovod jak přímo v textu, tak i v přílohách. Zahrnuje mimo jiné i podrobnou kapitolu o Keplerově uspořádání sluneční soustavy pomocí platónských těles a popis ježků založených na platónských tělesech, který je citován v části 10.1.

Když představivost a statické obrázky nestačí, můžeme se obrátit na webový aplet Waltera Fendta, zásluhou Miroslava Panoše přeložený do češtiny [11], kde můžeme vybrané těleso nechat rotovat kolem jedné ze základních os a ve vhodných úhlech pohledu si pohyb zastavit.

Na poli českých akademických prací nejsou platónská tělesa novým tématem. Již v historické kapitole jsme ostatně citovali zejména rigorózní práci Veroniky Svobodové, *Historie pravidelných mnohostěnů* [6], kde najdeme více informací o postupném rozvoji poznání v tomto oboru, ale i příklady užití v umění.

Citována je také bakalářská práce *Mnohostěny a diskrétní povrchy* Adély Vytiskové [7], kde kromě Eulerovy věty a jejích důkazů najdeme téma platónských grafů jakožto reprezentace těles, dozvíme se o jejich vlastnostech, ale celkově platónská tělesa nejsou hlavním tématem této práce.

Naopak přímo je na ně zaměřena bakalářská práce Lucie Hudcové *Platónova tělesa* [2], kde najdeme rozsáhlou obecnou část a stručný výčet některých vzorců vztahujících se k jednotlivým tělesům, které nejsou odvozeny.

Chybějící odvození najdeme pro mnoho vzorců v učebním textu *Pravidelné mnohostěny* od Vlasty Chmelíkové a Luboše Moravce [3], jehož cílem je inspirovat učitele k rozšíření výuky stereometrie o výklad platónských těles. V jejich textu kromě většiny vzorců najdeme často i myšlenku jejich odvození. V kapitolách věnovaných dvanáctistěnu a dvacetistěnu je zmíněná práce citována. Vzhledem k zaměření textu ale obsahuje dále jen letmou informaci o dualitě. Také v něm nenajdeme některé odchylky a poloměry hranových koulí.

V literatuře celkově chybí exaktní vyjádření délek poloměrů hranových koulí a nenajdou se ani odchylky hran od stěn. Proto jsou v naší práci doplněny tyto hodnoty včetně myšlenky jejich odvození. Originální jsou také některá další odvození, ve většině případů snad jednodušší než v citovaných zdrojích. Dalším přínosem naší práce je shrnutí základních faktů, vzorců a odvození v kapitolách věnovaných jednotlivým tělesům.

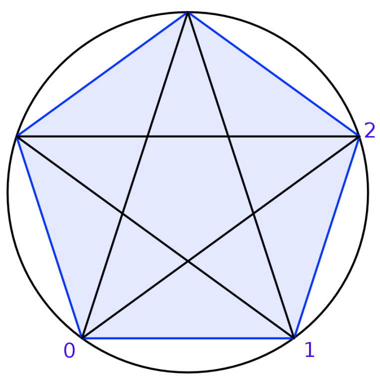
Kapitola 3

Základní pojmy

Těleso nebo mnohostěn je část prostoru ohraničená několika rovinami. Můžeme ji tedy definovat jako průnik n poloprostorů, kde n je počet stěn.

Pravidelný mnohostěn je takový mnohostěn, který má všechny stěny shodné a všechny vrcholy shodné ve smyslu počtu hran stýkajících se v každém vrcholu. Jejich konvexní případy označujeme souhrnně jako platónská tělesa, vzácně Platónova tělesa.

Ludwig Schläfli využil pravidelnosti těles k jejich jednoduššímu popsání. Když má mít pravidelné těleso všechny stěny a vrcholy shodné (ve smyslu vzájemné zaměnitelnosti), stačí odpovědět na dvě otázky: jaké jsou stěny a jaké jsou vrcholy. Stěny jsou pravidelné p-úhleníky a číslo p nazveme stupněm stěny. Valencí vrcholu nazveme číslo q vyjadřující počet hran, které z něj vedou. Uspořádanou dvojici $\{p, q\}$ pak nazveme Schläfliho symbolem.



Obr. 3.1: Pětiúhelník – Schläfliho symbol $\{5\}$ a pentagram – $\{\frac{5}{2}\}$

Rozšířením této definice může být použití racionálních čísel p a q. Pokud $p = \frac{r}{s}$, vyjadřuje r počet vrcholů pravidelně rozmístěných po kružnici a s upravuje rozmístění hran

– očíslujeme-li vrcholy po kružnici od nuly, povede hrana mezi vrcholem 0 a vrcholem s (obr. 3.1). V případě čísla q jde o rozmístění stěn u vrcholu, nejlépe si ho lze představit jako stěnu, která vznikne useknutím vrcholu. [7]

Také není nutné uspořádat vždy dvě čísla. Jedno číslo vyjadřuje pravidelný rovinný obrazec, například $\{\frac{5}{2}\}$ vyjadřuje pentagram. Na druhou stranu můžeme čísla i přidávat, což nám umožňuje generovat pravidelné mnohostěny ve vyšších dimenzích. Už ve třech rozměrech je ale vidět, že čísla do Schläfliho symbolu nemůžeme volit libovolně se zárukou existence takového tělesa. Například ale posloupnost $\{3, 3, 3, ..., 3\}$ n trojek tuto jistotu poskytuje nezávisle na volbě přirozeného čísla n a útvar se bude jmenovat n-simplex.

Zlatý řez je nejoblíbenějším poměrem délek v lidské historii. Jeho základní vlastností je, že větší část dělí celek ve stejném poměru jako menší část dělí větší část. Značí se φ, dá se vyjádřit nekonečným zlomkem

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cdots}}},$$

je řešením rovnice (vycházející z definiční vlastnosti)

$$\frac{1}{\varphi} = 1 - \varphi$$

a jeho přibližná hodnota je

$$\varphi \doteq 1,618. \text{ [5]}$$

Úhlopříčka je každá úsečka spojující dva vrcholy a není hranou. Náleží-li stěně, jedná se o stěnovou úhlopříčku, v opačném případě to je úhlopříčka tělesová. Prochází-li navíc středem tělesa, je to hlavní úhlopříčka.

Tělesová výška ke stěně je největší možná kolmá vzdálenost bodu tělesa od roviny stěny dané stěny.

3.1 K platónským tělesům

Volněji řečeno jsou platónská tělesa taková tělesa, jejichž všechny stěny jsou shodné pravidelné n-úhelníky. Takto je vnímal i Platón. Vzhledem k tomu, že tato práce se nezabývá obecnými mnohostěny, budeme vždy čtyřstěnem myslet pravidelný čtyřstěn, osmistěnem pravidelný osmistěn atd.

Podobně jako pravidelné n-úhelníky, kterým lze vepsat a opsat kružnici, mají platónská tělesa vepsanou a opsanou kouli, čehož využil Kepler při uspořádávání sluneční soustavy (kapitola 1.1), navíc jako třetí existuje koule dotýkající se středů hran. Jsou zde tedy tři význačné koule – opsaná, na které leží vrcholy tělesa, vepsaná, na které leží středy stěn, a hranová, která je de facto vepsána drátěnému modelu. Středy všech těchto koulí splývají ve všech případech v jednom bodě [5]. Značení se v literatuře různí, poloměr vepsané koule je někdy značen ρ a opsané koule r, v této práci je budeme značit běžným písmenem r opatřeným indexem, tedy od největšího r_o, r_h, r_v.

3.2 Eulerova věta

Označíme v počet vrcholů, h počet hran a s počet stěn tělesa. V konvexním mnohostěnu potom platí

$$v + s - h = 2\,.$$

Existuje mnoho způsobů, jak toto tvrzení dokázat, několik z nich popisuje Vytisková . Pro potřeby této práce dozajista stačí jeden. Ten je inspirován důkazem číslo 7 [7, str. 46–47].

Důkaz je veden indukcí pro tělesa s trojúhelníkovými stěnami, pro stěny jiných tvarů pak úpravou. Čtyřstěn má čtyři stěny, čtyři vrcholy a šest hran. A protože $4 + 4 - 6 = 2$, tvrzení pro něj platí.

Dále přidávejme vždy jeden vrchol nad libovolnou stěnu (vně tělesa tak, aby nové těleso bylo konvexní), což dá zaniknout této stěně. Každou ze tří hran dosud ohraničujících bývalou stěnu spojuje ale s novým vrcholem nová stěna a od každého ze tří vrcholů náležejících původní stěně k němu vede nová hrana. Tento indukční krok zápíšeme symbolicky:

$$v_{n+1} = v_n + 1$$

$$s_{n+1} = s_n + 2$$

$$h_{n+1} = h_n + 3$$

Pokud pro původní těleso Eulerova věta platila, platí i pro těleso obohacené o jeden vrchol:

$$v_{n+1} + s_{n+1} - h_{n+1} = (v_n + 1) + (s_n + 2) - (h_n + 3) = v_n + s_n - h_n = 2$$

Ne každé těleso je ale ohraničeno trojúhelníky. Předchozí postup však nebránil vzniku sousedních komplanárních stěn. Pokud odebereme hranu, která dvě takové stěny odděluje, stane se ze dvou stěn jedna, dohromady počet stěn klesne o jednu stejně jako počet hran.

Počet vrcholů se nezměnil. I zde tedy platí, že pokud věta platila pro původní těleso, platí i pro nové:

$$v_{m+1} + s_{m+1} - h_{m+1} = v_m + (s_m - 1) - (h_m - 1) = v_m + s_m - h_m = 2$$

3.3 Právě pět platónských těles

Jak už bylo naznačeno v historické kapitole, je platónských těles pět a žádný další pravidelný konvexní mnohostěn neexistuje. To je tvrzení, které se sluší dokázat. Napřed se seznámíme s důkazem pomocí Eulerovy věty, který je matematicky přesvědčivější, ale z úcty k historii a představivosti naznačíme i důkaz Euklidův.

3.3.1 Důkaz pomocí Eulerovy věty

Předpokládejme existenci pravidelného konvexního mnohostěnu charakterizovaného Schläfliho symbolem $\{p, q\}$.

Každá stěna je tedy pravidelný p-úhelník, zároveň každá hrana náleží dvěma stěnám. Pro počet stěn a hran tedy platí vztah $\frac{ps}{2} = h$, po úpravě $s = \frac{2h}{p}$. Také z každého vrcholu vede q hran a každá hrana spojuje dva vrcholy. Analogicky tedy platí $\frac{qv}{2} = h$, potažmo $v = \frac{2h}{q}$. Upravené vztahy dosadíme do Eulerovy věty:

$$\frac{2h}{q} + \frac{2h}{p} = 2 + h$$

Na levé straně je stejný čitatel, kterým obě strany rovnice vydělíme a dostaneme

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$$

a tuto rovnici řešíme jako diofantovskou s omezením $p \geq 3$ a $q \geq 3$; připomeňme, že stěna je p-úhelník a q je počet stěn nebo hran u vrcholu, pro obě čísla je tedy minimum 3. Zároveň i počet hran je kladný, takže aby rovnost mohla být splněna, musí platit

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2},$$

což nemůže být splněno, pokud jsou $p > 3 \wedge q > 3$. Alespoň jedno z čísel p, q tedy musí být rovno 3.

Nechť napřed $p = 3$, potom

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{3} = \frac{1}{h} + \frac{1}{2}$$

a po úpravě

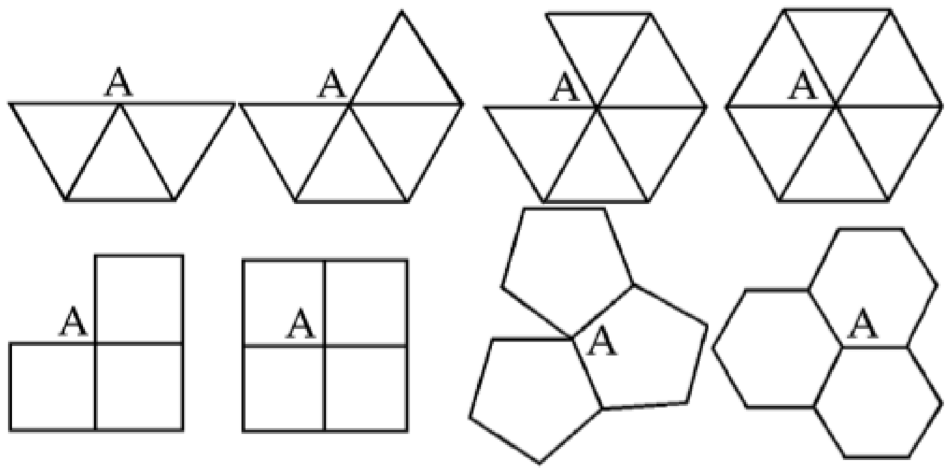
$$\frac{1}{q} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}\,.$$

Víme, že h je kladné, přípustné hodnoty q jsou tedy z množiny $\{3, 4, 5\}$. Stejného výsledku se nám dostane i při volbě $q = 3$, kde z rovnice $\frac{1}{p} - \frac{1}{6} = \frac{1}{h}$ dostáváme množinu $\{3, 4, 5\}$ jako množinu možných hodnot p.

Dvakrát jsme tedy získali tři možné kombinace, už na první pohled je ale vidět, že kombinace $p = 3$ a $q = 3$ se vyskytuje dvakrát. Omezili jsme tedy počet pravidelných těles na pět. O jejich existenci se přesvědčíme konstrukcí v kapitolách 4 až 8.

3.3.2 Euklidův důkaz počtu platónských těles

Euklidův důkaz počtu platónských těles, přesněji řečeno důkaz uvedený v jeho Základech, pochází nejpozději od Theaitéta z Athén (417–369 př.n.l). Je založen na konstrukci pravidelných prostorových úhlů, jak je u bodu A naznačeno na obr. 3.2. Pro vznik prostorového úhlu použitelného v pravidelném mnohostěnu je potřeba alespoň tří pravidelných mnohoúhelníků. Nejmenším je trojúhelník, který vytvoří prostorový úhel v počtu tří, v počtu čtyř i v počtu pěti u jednoho vrcholu. Šest rovnostranných trojúhelníků vyplňuje plný rovinný úhel a tvoří pravidelný šestiúhelník. [6]



Obr. 3.2: Počty pravidelných n-úhelníků u vrcholu [7]

Čtverec, pravidelný čtyřúhelník, vytvoří prostorový úhel jen v počtu tří, čtyři pravé úhly čtverce tvoří opět plný úhel. Pravidelný pětiúhelník má vnitřní úhel u vrcholu 108°, tři pětiúhelníky tedy vytvoří prostorový úhel, čtyři se v rovině již překrývají a tři šestiúhelníky tvoří plochu, jak je vidět na obr. 3.2.

Tím je vymezeno pět pravidelných prostorových úhlů, jejichž opakováním ve všech vrcholech vzniká pět platónských těles. To, že všechna tělesa existují, dokázal Eukleidés jejich konstrukcí.

Kapitola 4

Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn je tvořen čtyřmi stěnami, čtyřmi vrcholy a šesti hranami. V každém vrcholu se stýkají tři hrany a tři stěny, které mají tvar rovnostranného trojúhelníku. Aletrnativní názvy jsou tetraedr nebo zřídka používaný 3-simplex odkazující na rodinu vícerozměrných těles, do které čtyřstěn patří. Schläfliho symbol čtyřstěnu je $\{3, 3\}$. Podle Platóna je základní složkou živlu ohně, Kepler jej vepsal mezi Jupiter a Mars.

4.1 Vzorce a odvození

4.1.1 Míry

Délku hrany označme a.

Výška stěny v_s je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky a a kratší odvěsnou délky $\frac{a}{2}$; z Pythagorovy věty získáváme snadno

$$v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\,.$$

Obsah S jedné stěny je podle vzorce pro obsah trojúhelníku roven polovině součinu délky strany a a výšky v_s, tedy

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\, a^2.$$

Tělesová výška v_t vychází z těžiště podstavy, je tedy odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku se zbývajícími stranami délek a a $\frac{2}{3} v_s = \frac{\sqrt{3}}{3} a$. Podle Pythagorovy věty je tedy

$$v_t = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a\,,$$

$$v_t = \frac{\sqrt{6}}{3}\, a\,.$$

Povrch čtyřstěnu P je čtyřnásobkem obsahu rovnostranného trojúhelníka:

$$P = \sqrt{3}a^2$$

Protože je čtyřstěn speciálním případem jehlanu, jeho objem je třetinou objemu hranolu se stejnou podstavou a stejnou výškou. Platnost tohoto tvrzení lze názorně ukázat rozkládacím geometrickým modelem, spočítat lze pomocí čtyřstěnu vepsaného do krychle (vepsání je popsáno v odstavci 9.2), nejjednodušší je ale použití určitého integrálu. Protože tento vzorec využijeme i v dalších kapitolách, odvodíme jej pro obecný jehlan s výškou v_o a podstavou plochy $s_o a^2$ (kde s_o je plocha podstavy pro jednotkovou hranu a a je délka hrany). Na intervalu $\langle 0, v_0\rangle$ potom budeme integrovat funkci f vyjadřující plochu podstavy při výšce x, hrana podstavy závisí na výšce lineárně:

$$f = s_o \frac{a^2}{v_o^2} x^2$$

Objem bude tedy:

$$V_o = \int_0^{v_o} s_o \frac{a^2}{v_o^2} x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3} s_o \frac{a^2}{v_o^2} x^3\right]_0^{v_o} = \frac{1}{3} s_o a^2 v_o$$

Po dosazení v_t za v_0 a za $s_o a^2$ pak obsah podstavy S pravidelného čtyřstěnu vyjádříme objem pravidelného čtyřstenu

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}\, a^3.$$

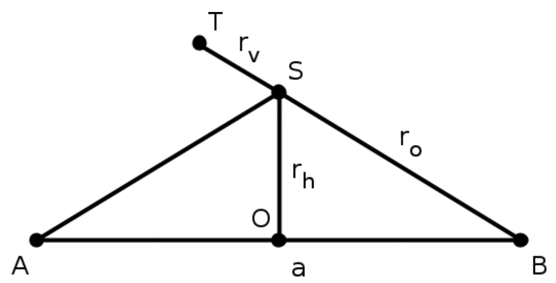
Středem pravidelného čtyřstěnu je průsečík tělesových výšek, které dělí v poměru 1 : 3 (souřadnice těžiště jsou aritmetickým průměrem souřadnic vrcholů). Vzdálenost mezi středem a libovolným vrcholem, neboli poloměr opsané koule, je tedy tři čtvrtiny délky tělesové výšky:

$$r_o = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\, a = \frac{\sqrt{6}}{4}\, a\,.$$

Jedna čtvrtina výšky tvoří naopak vzdálenost středu od libovolné stěny a poloměr koule vepsané:

$$r_v = \frac{1}{3} r_o = \frac{\sqrt{6}}{12}\, a$$

Náročnější je odvození poloměru hranové koule r_h. Nejsnáze jej lze vyjádřit jako výšku rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky r_o a základnou délky a podle obr. 4.1.



Obr. 4.1: Poloměr hranové koule r_h

Použitím Pythagorovy věty dostaneme:

$$r_h = \sqrt{r_o^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{16}\,a^2 - \frac{4}{16}\,a^2}$$

$$r_h = \frac{\sqrt{2}}{4}\,a$$

4.1.2 Odchylky

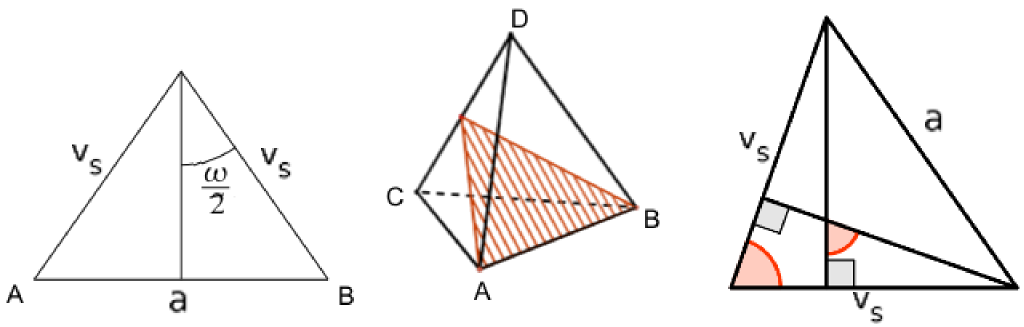
Stěny pravidelného čtyřstěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, odchylky hran mají tedy velikost 60°. Velikost odchylky ω dvou stěn je úhlem u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku, ve kterém je základnou hrana délky a, ramena jsou pak stěnové výšky $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (na obr. 4.2), ze kterého už není problém vyjádřit

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Odkud

$$\frac{\omega}{2} \doteq 35°16'\,,\ \text{a tedy } \omega \doteq 70°32'.$$

Stejně velký je také úhel svíraný ve středu čtyřstěnu dvěma tělesovými výškami, jak je znázorněno na obr. 4.2 vpravo.



Obr. 4.2: Řez čtyřstěnu, odchylka jeho stěn [3] a odchylka dvou tělesových výšek

Dalším zajímavým úhlem je úhel mezi hranou a stěnou u vrcholu. Ten je v trojúhelníku na obr. 4.2 vlevo reprezentován úhly při základně AB (úhel mezi touto hranou a například stěnou ACD) a jeho velikost lze tedy snadno dopočítat:

$$\psi = \frac{180^\circ - \omega}{2} \doteq \frac{109^\circ 28'}{2} \doteq 54^\circ 44'$$

Kapitola 5

Krychle

Krychle je platónským tělesem, se kterým se většina lidí seznámí jako s prvním prostřednictvím kostiček a hracích kostek již v útlém věku. Má šest čtvercových stěn stýkajících se po třech v osmi vrcholech, které spojuje dvanáct hran.

Používá se také název hexaedr, pro její zobecnění do více rozměrů je užíván pojem hyperkrychle nebo nadkrychle, jako 3-rozměrná hyperkrychle je tedy prakticky nazývána jen ve výkladu hyperkrychlí ve vyšších dimenzích. Hyperkrychle mají obecně Schläfliho symbol $\{4, 3, ..., 3\}$, kde počet čísel 3 je dán rozměrem hyperkrychle tak, aby měl symbol patřičnou délku – pro krychli tedy $\{4, 3\}$. Pro svojí stabilitu představovala u Platóna živel země a Kepler ji vepsal mezi Saturn a Jupiter.

5.1 Vzorce a odvození

5.1.1 Míry

Použijeme opět délku hrany a.

Povrch P je šestinásobkem obsahu stěny $S = a^2$, tedy

$$P = 6a^2.$$

Objem krychle je roven

$$V = a^3.$$

Stěnová úhlopříčka má délku

$$u_s = \sqrt{2}\, a\,.$$

Tělesová úhlopříčka je přeponou nad odvěsnami délek a, u_s a její délku vyjádříme jako

$$u_t = \sqrt{3}\,a\,.$$

Střed krychle je v průsečíku tělesových úhlopříček, současně se v něm střetávají i spojnice středů protilehlých stěn i hran. Poloměry význačných koulí odpovídají polovinám již vytyčených délek. Poloměr koule vepsané je polovinou délky hrany

$$r_v = \frac{a}{2},$$

poloměr hranové koule je polovinou délky stěnové úhlopříčky

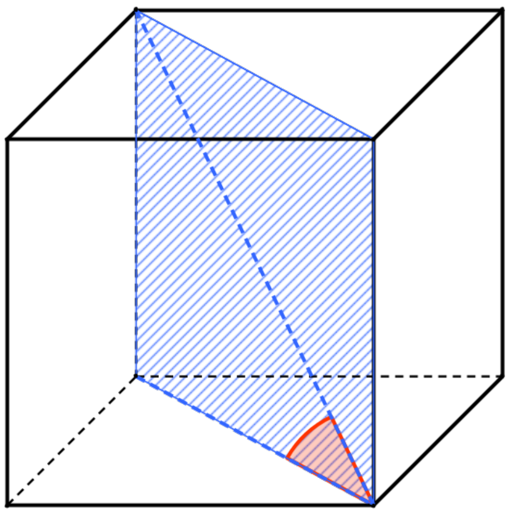
$$r_h = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}$$

a nakonec poloměr opsané koule je polovinou tělesové úhlopříčky

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\,a}{2}.$$

5.1.2 Odchylky

Napřed konstatování zřejmých faktů: každé dvě sousední stěny jsou na sebe kolmé, protilehlé stěny jsou rovnoběžné, hrany jsou rozmístěny ve třech navzájem kolmých směrech, každý z těchto je kolmý na dvě vzájemně rovnoběžné stěny. Tyto skutečnosti vyplývají přímo z vlastností čtverce a z umístění tří čtverců u jednoho vrcholu.



Obr. 5.1: Odchylka tělesové úhlopříčky a stěny

Tělesová úhlopříčka se těmto kolmostem vymyká, proto si určíme její odchylku od stěny vyjádřenou velikostí úhlu mezi tělesovou a stěnovou úhlopříčkou (obr. 5.1). Jak je vidět, odchylku τ lze vyjádřit pomocí goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníku, kde je tělesová úhlopříčka přeponou a odvěsnami jsou hrana a stěnová úhlopříčka. Například je tedy

$$\sin \tau = \frac{a}{\sqrt{3}\, a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tuto hodnotu již známe z oddílu 4.1.2, kde reprezentovala polovinu odchylky dvou stěn čtyřstěnu. Tuto rovnost zdůvodníme při vepisování čtyřstěnu do krychle v části 9.2. Přibližná hodnota odchylky τ tělesové úhlopříčky od stěny je tedy

$$\tau \doteq 35^\circ 16'.$$

U středu lze zkoumat odchylku dvou tělesových úhlopříček, kterou není těžké dopočítat ze součtu velikostí úhlů v rovnoramenném trojúhelníku – poloviny úhlopříček tvoří ramena a základnou je hrana. Při základně budou úhly $90^\circ - \tau$. Vychází tedy hodnota 2τ, neboli odchylka dvou stěn čtyřstěnu s přibližnou hodnotou

$$2\tau \doteq 70^\circ 32'.$$

Kapitola 6

Pravidelný osmistěn

Pravidelný osmistěn má osm trojúhelníkových stěn stýkajících se po čtyřech v šesti vrcholech spojených dvanácti hranami.

Dalším jeho názvem je oktaedr. Dobře si ho lze představit jako těleso vzniklé použitím středů stěn krychle jako vrcholů osmistěnu, neboli je duálním tělesem krychle (dualitě se věnuje kapitola 9.1). Dá se také sestrojit jako průnik dvou čtyřstěnů, podrobněji tentokrát v odstavci 10.2. V Platónově nauce patřil osmistěn vzduchu, Kepler jej vepsal mezi sféry Venuše a Merkuru.

6.1 Vzorce a odvození

6.1.1 Míry

Tradičně označíme délku hrany a.

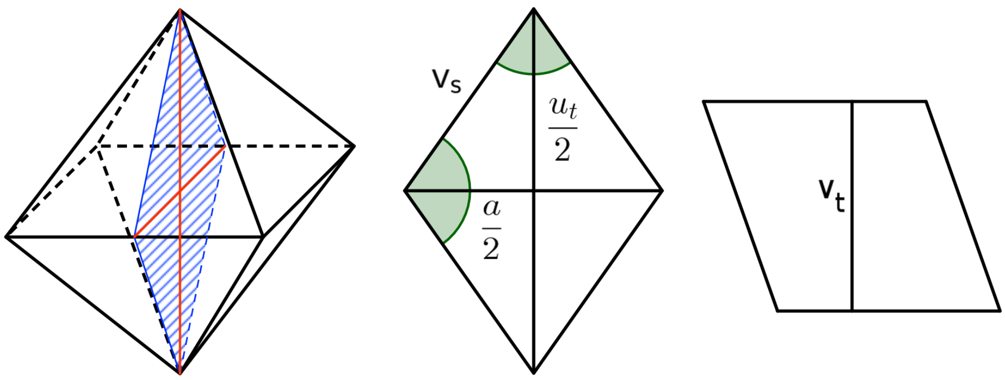
Stěnou osmistěnu je rovnostranný trojúhelník, jehož výška $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ i obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ jsou stejné jako u čtyřstěnu, povrch je osminásobkem obsahu stěny :

$$P = 2\sqrt{3}\,a^2$$

Tělesová úhlopříčka je úhlopříčkou čtverce se stranou délky a:

$$u_t = \sqrt{2}\,a$$

Tělesová výška v_t, v případě osmistěnu vzdálenost protilehlých stěn, lze nejlépe nahlédnout na řezu vedeném dvěma protějšími vrcholy a dvěma středy hran (obr. 6.1).



Obr. 6.1: Řez vyznačený na osmistěnu a odchylka jeho stěn sousedících hranou (na řezu vlevo) a odchylka protějších stěn u vrcholu (nahoře), vyznačení tělesové výšky v_t.

V tomto kosočtverci se stranami délky $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a úhlopříčkami délek a a $\sqrt{2}a$ je v_t vzdálenost protilehlých stran. Tu pak není těžké vyjádřit z rovnosti obsahů kosočtverce:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}\,av_t &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,a^2 \\ v_t &= \frac{\sqrt{6}}{3}\,a \end{aligned}$$

Objem je dvojnásobkem objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu nad základnou s hranami délky a, podle vzorce $V = \frac{1}{3}S_p v_t$, který byl metodou integrace odvozen již v kapitole 4.1.1. Výškou jehlanu je v tomto případě polovina tělesové úhlopříčky u_t:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

Polovina tělesové úhlopříčky, vzdálenost středu a vrcholu, je zároveň poloměrem opsané koule, jehžo velikost je tedy

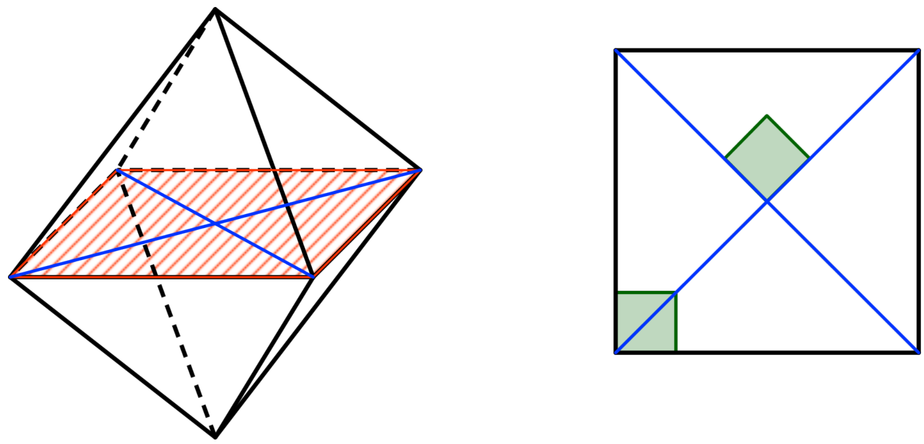
$$r_o = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a\,.$$

Poloměr hranové koule je velikostí roven polovině délky hrany, jak je patrné na čtvercovém řezu čtyřmi komplanárními vrcholy (obr. 6.2), tedy

$$r_h = \frac{a}{2}.$$

Poloměr vepsané koule odpovídá polovině tělesové výšky:

$$r_v = \frac{\sqrt{6}}{6}\,a$$



Obr. 6.2: Čtvercový řez vyznačený na osmistěnu s tělesovými úhlopříčkami

6.1.2 Odchylky

Jak již bylo nastíněno, čtyři komplanární vrcholy osmistěnu tvoří čtverec – protilehlé hrany jsou tedy rovnoběžné. Aplikací této skutečnosti na dvě dvojice hran zjistíme, že i protilehlé stěny jsou rovnoběžné. Úhlopříčky zmíněného čtverce, o kterých je známo, že svírají pravý úhel, jsou zároveň tělesovými úhlopříčkami.

Stěny, které nejsou protilehlé, spolu sousedí buď hranou, nebo přes jeden společný vrchol. V obou případech jsou jejich odchylky v řezu na obr. 6.1. Odchylku dvou stěn sousedících u vrcholu spočteme pomocí sinu její poloviny:

$$\sin\frac{\omega_v}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Tato hodnota je nám již dobře známa z krychle i čtyřstěnu a je

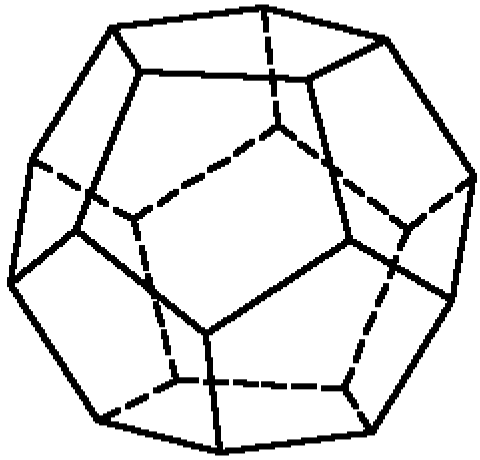
$$\omega_v = 70°32'.$$

Z kosočtverce je vidět, že odchylka stěn sousedících hranou bude doplňkem do 180°, což jsme ostatně už počítali v části 4.1.2 jako odchylku hrany od stěny čtyřstěnu. Celá odchylka je tedy

$$\omega_h = 109°28'.$$

Kapitola 7

Pravidelný dvanáctistěn



Obr. 7.1: Ukázka pravidelného dvanáctistěnu (vytvořeno pomocí apletu [11])

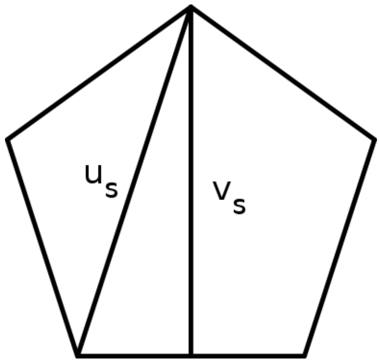
Stranami pravidelného dvanáctistěnu jsou pravidelné pětiúhelníky, které se po třech stýkají ve dvaceti vrcholech (jak je vidět na obr.7.1), to znamená Schläfliho symbol $\{5, 3\}$. K pospojování vrcholů je potřeba 30 hran.

V literatuře je pro pravidelný dvanáctistěn používán také název dodekaedr. Bůh jej podle Platóna použil při uspořádávání vesmíru, což možná Keplera inspirovalo ke vpisování těles mezi sféry oběžných drah planet, ale právě mezi Marsem a Zemí, kam vepsal dvanáctistěn, byl jeho model nejméně přesný (jak je vidět v tabulce 1.1).

Na rozdíl od těles s menším počtem stěn má dvanáctistěn tělesové úhlopříčky různých délek, také jich má výrazně víc: z každého vrcholu vedou tři hrany a šest stěnových úhlopříček, ke zbývajícím deseti vrcholům tedy vede tělesová úhlopříčka. Jediná z nich prochází středem a vede do protějšího vrcholu, tuto úhlopříčku nazveme hlavní. Úhlopříčky jsou podrobně popsány v části 7.2.1.

Zajímavé je, že vrcholy leží po pěti ve čtyřech rovnoběžných rovinách; prostřední dvě roviny dělí těleso na tři části: dva shodné komolé pětiboké jehlany s hranou větší podstavy o délce úhlopříčky pětiúhelníku a ostatními hranami z původního tělesa, mezi nimi zbývá těleso s dvěma shodnými podstavami – v kapitole 10.3 poznáme, že díky vzájemné poloze obou podstav se jedná o antihranol. Navíc mají tyto tři části stejný objem. Důkaz tohoto tvrzení najdeme na konci této kapitoly.

7.1 Pravidelný pětiúhelník



Obr. 7.2: Ukázka pravidelného pětiúhelníku

Zatímco vlastnosti stěn předchozích těles – rovnostranného trojúhelníku a čtverce – jsou dobře známé, vlastnosti pětiúhelníku (obr. 7.2) si zaslouží vyčleněný popis.

V téměř všech pramenech je informace o zlatém řezu v pětiúhelníku. Proč se v něm vyskytuje, je ovšem informace vzácná. Pokusíme se odpověď alespoň nastínit. Poměr zlatého řezu se tradičně značí φ a nabývá hodnoty $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

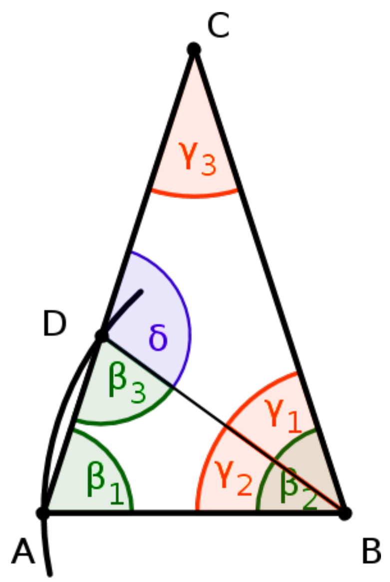
Známe součet velikostí vnitřních úhlů $n-$úhelníků

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2) \cdot 180^\circ,$$

pro pravidelný pětiúhelník bude tedy platit $5\alpha = 540^\circ$ a u každého vrcholu bude úhel o velikosti

$$\alpha = 108^\circ\,.$$

Dále je potřeba znalost pojmu zlatý trojúhelník. Ten je rovnoramenný a základna je větší částí zlatého řezu ramen. Na obr. 7.3 je vidět konstrukce menšího zlatého trojúhelníku nad částí ramene původního zlatého trojúhelníku. Trojúhelník vzniklý nad druhým



Obr. 7.3: Zlatý trojúhelník

ramenem je díky zlatému řezu rovnoramenný a ze shodnosti úhlů u jeho základny získáváme $\beta = 2\gamma$ a ze součtu velikostí vnitřních úhlů pak $5\gamma = 180°$. Úhel δ je doplňkovým úhlem k β, a tedy $\delta = 3\gamma$ ve stupních a pak

$$\gamma = 36°\,,\ \beta = 72° \text{ a } \delta = 108°\,.$$

Libovolné dvě sousední strany pětiúhelníku spolu s úhlopříčkou tedy tvoří trojúhelník podobný trojúhelníku BDC z obr. 7.3 podle věty *sus*. Úhlopříčka pětiúhelníku je tedy stranou dělena v poměru zlatého řezu:

$$u_s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$$

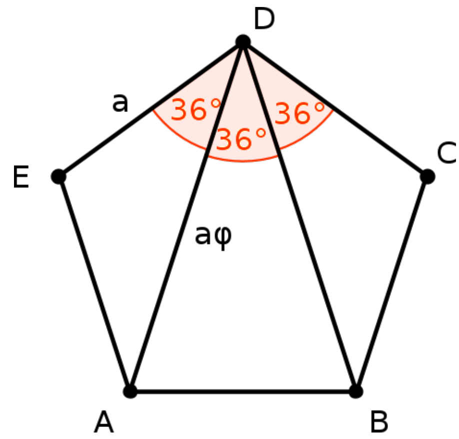
Zároveň můžeme vyjádřit $\cos 72°$. Při použití poloviny zlatého trojúhelníku s jednotkovou základnou má přilehlá odvěsna délku $\frac{1}{2}$ a přepona je délky φ:

$$\cos 72° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Ze vzorce $|\sin\frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ získáme

$$\sin 36° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Tím se konečně dostáváme k obsahu pravidelného pětiúhelníku. Třikrát aplikujeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ u jednoho vrcholu podle obr. 7.4, kde za ab



Obr. 7.4: Rozdělení pravidelného pětiúhelníku pro výpočet jeho obsahu

dosadíme dvakrát $a^2\varphi$ a jednou $(a\varphi)^2$:

$$S_{EAD} = S_{BCD} = \frac{a^2\varphi}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{a^2\varphi}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$S_{ABD} = \frac{a^2\varphi^2}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Ze všech sčítanců obsahu tedy můžeme vytknout $\frac{a^2}{2}\varphi\sin 36°$:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{a^2\varphi}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\cdot(2+\varphi) = \\
&= \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\left(2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)^2\left(5+\sqrt{5}\right)^2} = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{(25-5)\left(6+2\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)} = \\
&= \frac{a^2}{16\sqrt{2}}\sqrt{20\left(40+16\sqrt{5}\right)}
\end{aligned}$$

Odtud už po snadné další úpravě získáme:

$$S = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,a^2$$

Pro odvození některých vztahů v dvanáctistěnu je potřeba znát také poloměry význačných kružnic pětiúhelníku. Označíme r_5 poloměr opsané kružnice a ρ_5 poloměr vepsané kružnice, jak je naznačeno na obr. 7.5.

K odvození r_5 poslouží věta o obvodovém a středovém úhlu, díky které známe velikosti úhlů $|\angle BSC| = 72°$ a $|\angle FSB| = 36°$. Protože již známe hodnotu $\sin 36°$, vyjádříme délku

r_5 z trojúhelníku FBS:

$$r_5 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\,a$$

Poloměr vepsané kružnice pak vyjádříme z Pythagorovy věty z trojúhelníku FBS:

$$\rho_5 = \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{8-\left(5-\sqrt{5}\right)}{5-\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{5-\sqrt{5}}}$$

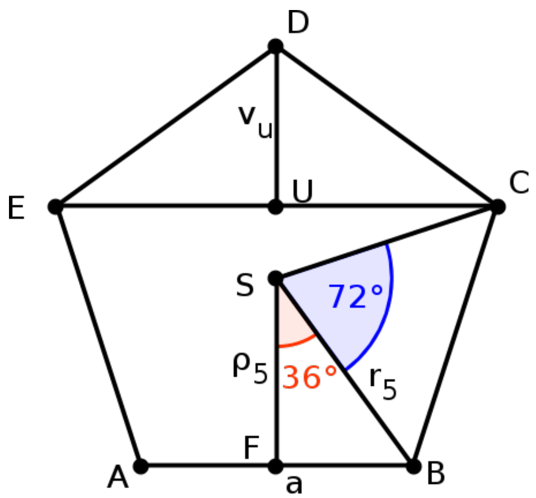
Po dvojím usměrnění je:

$$\rho_5 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{10}\,a$$

Poslední potřebnou vzdáleností z pravidelného pětiúhelníku je vzdálenost vrcholu od úhlopříčky; označíme ji v_u a vyjádříme jako kratší odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka CUD (obr. 7.5):

$$v_u^2 = a^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\,a\right)^2 = a^2\left(\frac{16-\left(6+2\sqrt{5}\right)}{16}\right)$$

$$v_u = \frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$



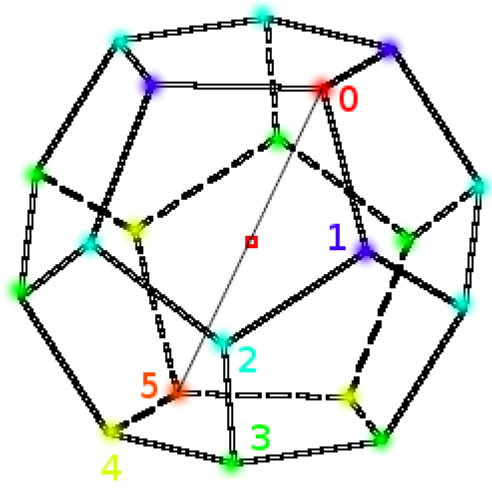
Obr. 7.5: Délka v_u a poloměr kružnice vepsané a opsané pravidelnému pětiúhelníku

7.2 Vzorce a odvození

Z důvodu přehlednosti je odvození některých vzorců platných v pravidelném dvanáctistěnu vyděleno do kapitoly 7.2.1, přehledové kapitoly jsou zařazeny dále. Délku hrany značíme již tradičně a.

7.2.1 Odvození některých vzorců

Tělesové úhlopříčky

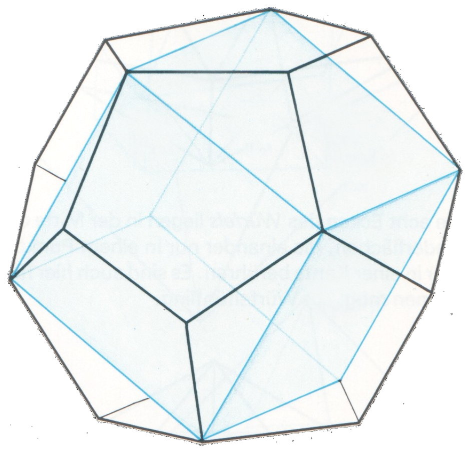


Obr. 7.6: Dvanáctistěn s vyznačenými vzdálenostmi vrcholů vyjádřenými počtem hran na nejkratší cestě. Podkladový obrázek vytvořen pomocí [11]

Úhlopříčky pravidelného dvanáctistěnu jsou různých délek, konkrétně tří. To nejlépe prokážeme vzdáleností jednotlivých vrcholů od výchozího vrcholu vyjádřené podle grafové terminologie počtem hran, jak je vyznačeno na obr. 7.6. Sousední vrcholy, vzdálené jednu hranu, jsou pochopitelně spojeny s výchozím vrcholem hranou. S nimi sousední, na obrázku označeny azurovou barvou a číslem 2 náleží stejné stěně jako výchozí vrchol a úsečka k němu je stěnovou úhlopříčkou. Nejkratší tělesová úhlopříčka vede k vrcholům vzdáleným po drátěném modelu tři hrany, proto ji označíme u_3, delší úhlopříčka k jejich o jednu hranu vzdálenějším sousedním vrcholům, kterou označíme u_4. Nejdelší úhlopříčkou je ta, která vede do protějšího vrcholu se vzdáleností pěti hran; označení u_5 by se ale mohlo plést se stěnovou úhlopříčkou u_s, proto hlavní tělesovou úhlopříčku a jedině ji budeme značit u_t.

Pro odvození jejich délek je užitečné představit si ve dvanáctistěnu vepsanou krychli (obr. 7.7) s délkou hrany φa (o vpisování podrobněji v části 9.2). Úhlopříčka dvanáctistěnu u_3 je pak stěnovou úhlopříčkou vepsané krychle a nejdelší u_t je její tělesovou úhlopříčkou a stačí dosadit do vzorců známých z kapitoly 5:

$$u_3 = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\,a$$



Obr. 7.7: Krychle vepsaná do dvanáctistěnu

$$u_t = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\,a$$

Délku zbývající úhlopříčky u_4 vypočteme pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku se stranami délek a, u_4 a u_t:

$$u_4 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\,a\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)-4}{4}}\,a = \frac{\sqrt{2\left(7+3\sqrt{5}\right)}}{2}\,a$$

Že je takový trojúhelník pravoúhlý, není těžké nahlédnout. Dvě protilehlé hrany jsou rovnoběžné, spojnice vytvářející s nimi obdélník jsou délky u_4 a úhlopříčky tohoto obdélníku mají délku u_t. K představě obdélníku může pomoci krychle vepsaná do dvanáctistěnu (na obr.7.7), kde je vidět, že hrany ležící nad protilehlými stěnami krychle tvoří dvě protější stěny obdélníku.

Poloměry význačných koulí

Hlavní tělesová úhlopříčka prochází středem pravidelného dvanáctistěnu a je zároveň průměrem jeho opsané koule; délka jejího poloměru je tedy

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}\,a.$$

Pomocí Pythagorovy věty získáme poloměr hranové koule:

$$r_h^2 = r_o^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$r_h = \sqrt{\frac{3a^2}{16}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)-4}{16}}\,a$$

$$r_h = \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{4}\,a$$

Jinou aplikací Pythagorovy věty získáme poloměr koule vepsané:

$$r_v^2 = r_o^2 - r_5^2 = \frac{3\left(6+2\sqrt{5}\right)}{16}\,a^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\,a^2 = \frac{25+11\sqrt{5}}{40}\,a^2$$

$$r_v = \frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\,a$$

Objem

Pravidelný dvanáctistěn lze složit z dvanácti jehlanů, ve kterých je jeho stěna jejich podstavou a výškou je poloměr vepsané koule, jeho objem tedy vyjádříme jako dvanáctinásobek objemu pravidelného pětibokého jehlanu s výškou r_v:

$$V = \frac{12}{3} S r_v = 4\cdot\frac{\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10\left(25+11\cdot\sqrt{5}\right)}}{20}\,a^3 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\sqrt{2\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{4}\,a^3 =$$

$$= \sqrt{2(25+11\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}\cdot\frac{a^3}{4} = \sqrt{2\left(125+55\sqrt{5}+50\sqrt{5}\right)+110}\cdot\frac{a^3}{4} =$$

$$= \sqrt{470+210\sqrt{5}}\cdot\frac{a^3}{4} = \sqrt{225+210\sqrt{5}+245}\cdot\frac{a^3}{4} = \sqrt{\left(15+7\sqrt{5}\right)^2}\cdot\frac{a^3}{4}$$

Finálně tedy:

$$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$$

7.2.2 Míry

Přehledově uvádíme vztahy při hraně délky a, odvození najdeme v předchozích částech.

Délka stěnové úhlopříčky je

$$u_s = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,a\,.$$

Obsah stěny je

$$S = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,a^2.$$

Povrch tělesa je prostým dvanáctinásobkem obsahu jedné stěny:

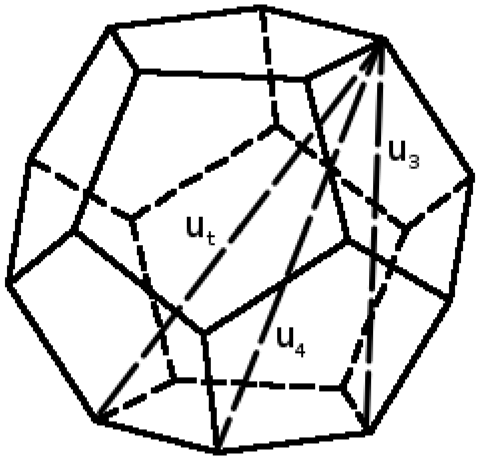
$$P = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$$

Tělesové úhlopříčky vyznačené na obr. 7.8 mají délky:

$$u_3 = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\,a$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{2\left(7+3\sqrt{5}\right)}}{2}\,a$$

$$u_t = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\,a$$



Obr. 7.8: Vyznačené úhlopříčky pravidelného dvanáctistěnu (podkladový obrázek vytvořen pomocí apletu [11])

Poloměry význačných koulí jsou délek:

$$r_o = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}\,a$$

$$r_h = \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{4}\,a$$

$$r_v = \frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{20}\,a$$

Výška dvanáctistěnu je průměrem vepsané koule, tedy

$$v_t = \frac{\sqrt{10\left(25+11\sqrt{5}\right)}}{10}\,a.$$

Objem jsme odvodili jako součet objemů dvanácti jehlanů, $V = \frac{12}{3}Sr_v$:

$$V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$$

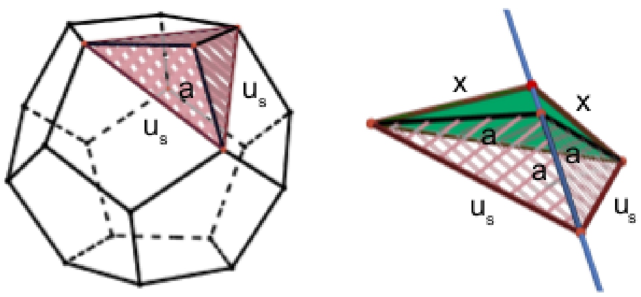
7.2.3 Odchylky

Odchylku sousedních stěn označíme ω. „Pro odchylku dvou sousedních stěn budeme uvažovat pomocný pravidelný trojboký jehlan odříznutý z pravidelného dvanáctistěnu tak, že hrany podstavy mají délku úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku a boční hrany jsou hrany dvanáctistěnu. Představíme si řez tohoto jehlanu rovinou kolmou k boční hraně a procházející hranou podstavy (obr. 7.9). Řezem je rovnoramenný trojúhelník se základnou délky u_s a rameny délky x.“ [3] Ramena tohoto trojúhelníku svírají úhel, jehož velikost je současně odchylkou dvou sousedních stěn. Pro zjištění hodnoty x ji vyjádříme z rovnosti obsahu trojúhelníku v plášti pomocného jehlanu, kde je x výškou k rameni délky a. Výška k základně délky u_s je vzdáleností vrcholu od úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, kterou značíme v_u a její velikost je odvozena v oddílu 7.1:

$$\begin{aligned} \frac{ax}{2} &= \frac{u_s v_u}{2} \\ ax &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} a^2 \\ x &= \frac{a}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Pro další výpočet se bude hodit zápis

$$x = \frac{u_s}{2} \cdot \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$



Obr. 7.9: Pomocný jehlan a délka x pro výpočet odchylky sousedních stěn (převzato z [3])

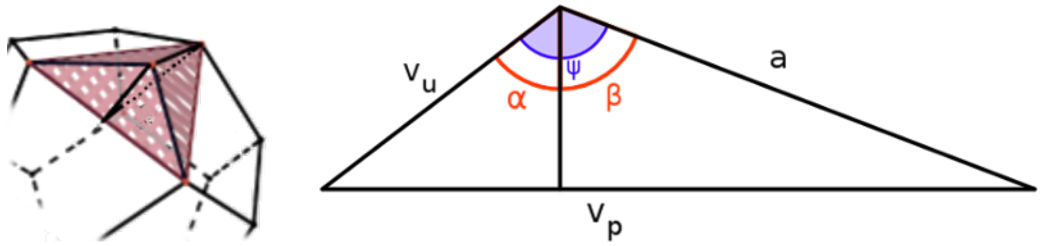
Při znalosti x už můžeme spočítat $\sin\frac{\omega}{2}$, kde x bude přeponou a $\frac{u_s}{2}$ protilehlou odvěsnou:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{u_s}{2}}{x} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}}{10}$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$$

Přibližně je tedy úhel $\frac{\omega}{2} \doteq 58°17'$, a odchylka sousedních stěn je tedy

$$\omega \doteq 116°34'.$$



Obr. 7.10: Řez pomocného jehlanu z obr. 7.9 pro výpočet odchylky hrany od stěny

Odchylku ψ hrany od sousední stěny spočítáme pomocí stejného jehlanu, ze kterého vezmeme řez kolmý na základnu (obr. 7.10). Vznikne trojúhelník se stranami délek a, v_u a výškou podstavy v_p původního jehlanu, kterou tvoří rovnostranný trojúhelník se stranou délky φa; po dosazení tedy

$$v_p = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}a.$$

Všimněme si, že tato výška je shodná s poloměrem opsané koule $v_p = r_o$. Známe tedy délky tří stran obecného trojúhelníku a chceme zjistit velikost jednoho z úhlů. Můžeme využít ještě vlastnosti vycházející z původního jehlanu, a sice že kolmý průmět jeho vrcholu dělí výšku – těžnici podstavy v poměru 1 : 2. Výšku jehlanu označíme pro přehlednost jako b. Z trojúhelníků už sice jdou spočítat hodnoty sinu úhlů α a β, ale se znalostí b ,

$$b = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{6}a\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{3(6+2\sqrt{5})}{36}}\,a = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{12}}\,a,$$

vyjádříme přesně $\sin\psi$ z rovnosti obsahu trojúhelníku počítaného těmito dvěma způsoby:

$$\frac{1}{2}av_u\sin\psi = \frac{1}{2}v_p b$$

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{12}}\cdot\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}a^2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}\cdot(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

nebo po usměrnění

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}$$

S vědomím, že je úhel tupý, získáme

$$\psi \doteq 121°43'.$$

Odchylka τ hlavních tělesových úhlopříček je rovna velikosti vrcholového úhlu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délek r_o a základnou o délce a. [3] Z již známých hodnot tedy spočteme

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{a}{2r_o} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})},$$

po úpravě a usměrnění

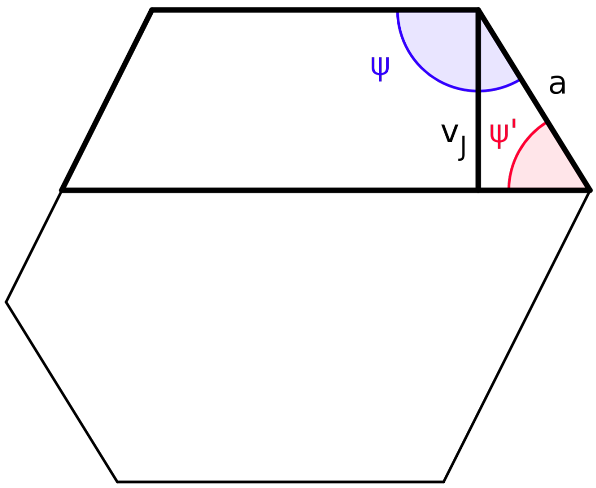
$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{6},$$

z čehož získáváme přibližnou hodnotu $\frac{\tau}{2} \doteq 20°54'$ a odchylka dvou úhlopříček je po zaokrohlení

$$\tau \doteq 41°49'.$$

7.2.4 Třetiny objemu

Jak bylo na začátku kapitoly avizováno, dokážeme, že objem dvanáctistěnu je rovinami jeho vrcholů rozdělen na třetiny. Na to stačí dokázat, že objem jednoho komolého jehlanu je třetina objemu dvanáctistěnu. Známe $\sin\psi = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, což můžeme použít pro vyjád-



Obr. 7.11: Řez dvanáctistěnu s vyznačeným řezem komolého jehlanu. Je zřejmé že oba vyznačené úhly mají stejný sinus

ření výšky komolého jehlanu v_J v závislosti na délce hrany a. Když $\sin\psi' = \frac{v_J}{a}$ (obr. 7.11), potom

$$v_J = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}a$$

Tuto hodnotu stačí dosadit do vzorce pro komolý jehlan $V = \frac{1}{3}v_j\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)$ společně s hodnotou $S_1 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2$ pro obsah menší podstavy a pro obsah větší podstavy $S_2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 a^2$. Povšimněme si, že se obsahy liší jen o činitel $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, schválně ponechaný ve druhé mocnině. Objem komolého jehlanu je tedy

$$
\begin{aligned}
V_J = {} & \frac{1}{3}\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}a\cdot \\
& \cdot\left[\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 a^2 + \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}a^2\right] = \\
= {} & \frac{a^3}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\cdot\frac{2+\left(1+\sqrt{5}\right)+\left(3+\sqrt{5}\right)}{2} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(10-2\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)^2}}{10-2\sqrt{5}} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{5\left(50-10\sqrt{5}+20\sqrt{5}-20\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(10+2\sqrt{5}\right)^2}}{100-20} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{50\left(3+\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(100+40\sqrt{5}+20\right)}}{80} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(3+\sqrt{5}\right)\left(14+6\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}}{80} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(14+6\sqrt{5}\right)^2}}{80} = \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(196+168\sqrt{5}+180\right)}}{80} = \\
= {} & \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{2\,000\left(8\cdot 47+8\cdot 21\sqrt{5}\right)}}{80} = \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{1\,600\left(470+210\sqrt{5}\right)}}{80},
\end{aligned}
$$

ale tuto závorku už známe z výpočtu objemu dvanáctistěnu, proto

$$V_J = \frac{a^3}{6}\cdot\frac{\sqrt{\left(15+7\sqrt{5}\right)^2}}{2}$$

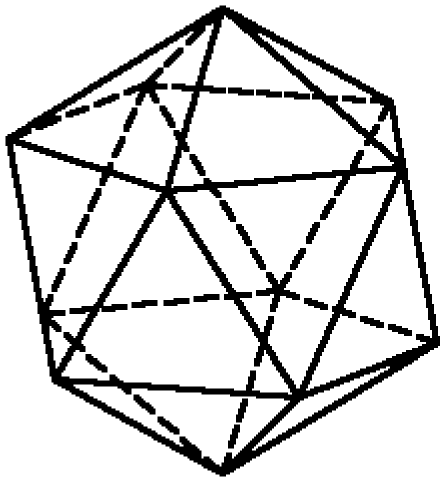
a po snadné finální úpravě získáme

$$V_J = \frac{15+7\sqrt{5}}{12}a^3.$$

Pro připomenutí objem dvanáctistěnu je $V = \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$, takže poměr $\frac{V_J}{V} = \frac{1}{3}$ dokazující původní tvrzení je už snadno vidět.

Kapitola 8

Pravidelný dvacetistěn



Obr. 8.1: Ukázka pravidelného dvacetistěnu (vytvořeno pomocí apletu [11])

Zbývajícím platónským tělesem je pravidelný dvacetistěn (obr. 8.1), jehož dvacet trojúhelníkových stěn se stýká po pěti ve dvanácti vrcholech a má třicet hran. Pro Platóna představoval vodu a v Keplerově modelu byl vepsán mezi Zemi a Venuši.

Libovolný vrchol tvoří s pěti sousedními vrcholy pravidelný pětiboky jehlan; tento jehlan budeme v kontextu dvacetistěnu nazývat vrcholový. Odebereme-li dva protější vrcholové jehlany, těleso, které zůstane, se nazývá antihranol, v tomto případě navíc pravidelný (podrobněji v části 10.3).

Z každého vrcholu pravidelného dvacetistěnu vychází šest úhlopříček, z toho jedna hlavní do protějšího vrcholu a ostatní do pěti vrcholů s ním sousedících.

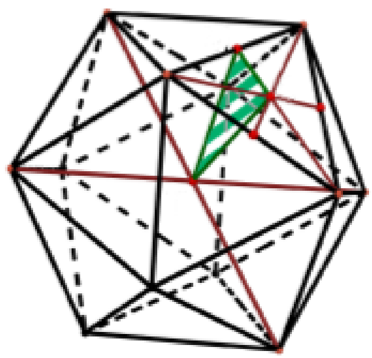
8.1 Vzorce a odvození

8.1.1 Míry

Délku hrany značíme opět a.

Trojúhelníkové stěny mají výšku $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a obsah $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, známé již z předchozích těles. Povrch je dvacetinásobkem obsahu jedné stěny:

$$P = 5\sqrt{3}a^2$$



Obr. 8.2: Pravoúhlý trojúhelník s vrcholy ve středu dvacetistěnu, středu stěny a středu hrany (převzato z [3])

Poloměry význačných koulí budeme tentokrát odvozovat od hranové koule při využití odchylky sousedních stěn ω odvozené až v následující podkapitole 8.1.2 tak, jako v [3]. Představíme si trojúhelník s těmito vrcholy: střed dvacetistěnu, střed libovolné stěny a střed některé její hrany, tak jako je na obr. 8.2. V něm známe jednu stranu a jí připsané úhly – tou stranou je třetina stěnové výšky, u středu stěny je pravý úhel a u středu hrany je úhel polovinou velikosti odchylky dvou stěn $\frac{\omega}{2}$. Pro tento úhel je dále odvozena hodnota $\sin\frac{\omega}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$, a můžeme tedy dvěma způsoby vyjádřit kosinus:

$$\sqrt{1-\sin^2\frac{\omega}{2}} = \cos\frac{\omega}{2} = \frac{v_s}{3r_h}$$

Odtud vyjádříme poloměr hranové koule

$$r_h = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{1-\frac{6+2\sqrt{5}}{12}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2\sqrt{3}}}\,a = \frac{1}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}\,a,$$

po usměrnění je

$$r_h = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}\,a\,.$$

Podle Pythagorovy věty aplikované na stejný trojúhelník dopočítáme poloměr koule vepsané a současně polovinu tělesové výšky

$$r_v = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{12}}\, a = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}-4}}{4\sqrt{3}}\, a = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{4\sqrt{3}}\, a,$$

po úpravě je

$$r_v = \frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}\, a.$$

Podobně vypočítáme i poloměr opsané koule jako délku přepony v trojúhelníku s odvěsnami r_h a $\frac{a}{2}$

$$r_o = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}\, a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\, a,$$

případně

$$r_o = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{4}\, a.$$

Délka hlavní tělesové úhlopříčky je dvojnásobkem tohoto poloměru:

$$u_t = \frac{\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{2}\, a$$

Kratší úhlopříčky ve dvacetistěnu jsou úhlopříčkami podstavy vrcholového jehlanu a mají délku

$$u_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\, a.$$

Výška vrcholového jehlanu v_J je odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém je druhou odvěsnou poloměr kružnice opsané základně tohoto jehlanu, pravidelnému pětiúhelníku, o velikosti $r_5 = \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\, a$ a přeponou je hrana délky a. Z Pythagorovy věty získáme

$$v_J = \sqrt{a^2 - \frac{10\left(5+\sqrt{5}\right)}{100}\, a^2},$$

po úpravě

$$v_J = \frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10}\, a.$$

Objem pravidelného dvacetistěnu je dvacetinásobkem objemu pravidelného trojbokého jehlanu s hranou podstavy o délce a a výšce r_v [3]:

$$V = \frac{12}{3} S r_v$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{12}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}a \\
V &= \frac{3+\sqrt{5}}{4}a^3
\end{aligned}
$$

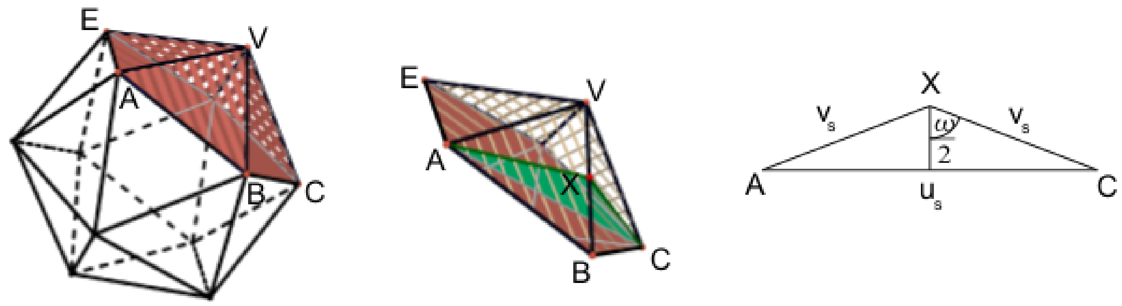
8.1.2 Odchylky

Odvození odchylek je převzato z [3]. Odchylku dvou sousedních stěn nejlépe nahlédneme na řezu vrcholového jehlanu na obr. 8.3. Bude nás zajímat úhel u hlavního vrcholu rovnoramenného trojúhelníku s rameny délky rovné stěnové výšce $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ a základnou o délce úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku $u_5 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. Snadno tedy vyjádříme sinus polovičního úhlu

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},$$

z čehož zjistíme přibližnou hodnotu

$$\frac{\omega}{2} \doteq 69°05' \quad \text{a} \quad \omega \doteq 138°11'.$$



Obr. 8.3: Vrcholový jehlan a jeho řez pro výpočet odchylky sousedních stěn (převzato z [3])

Odchylku hlavních tělesových úhlopříček u středu pravidelného dvacetistěnu spočítáme obdobně jako u dvanáctistěnu pomocí rovnoramenného trojúhelníku nad libovolnou hranou s hlavním vrcholem ve středu dvacetistěnu. Potom je

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a} = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{2\left(5+\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)}}{20} = \frac{\sqrt{40\left(5-\sqrt{5}\right)}}{20},$$

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{\sqrt{10\left(5-\sqrt{5}\right)}}{10},$$

z čehož vychází přibližné hodnoty úhlů:

$$\frac{\tau}{2} \doteq 21°43' \quad \text{a} \quad \tau \doteq 63°26'$$

Kapitola 9

Dualita a vpisování

9.1 Dualita

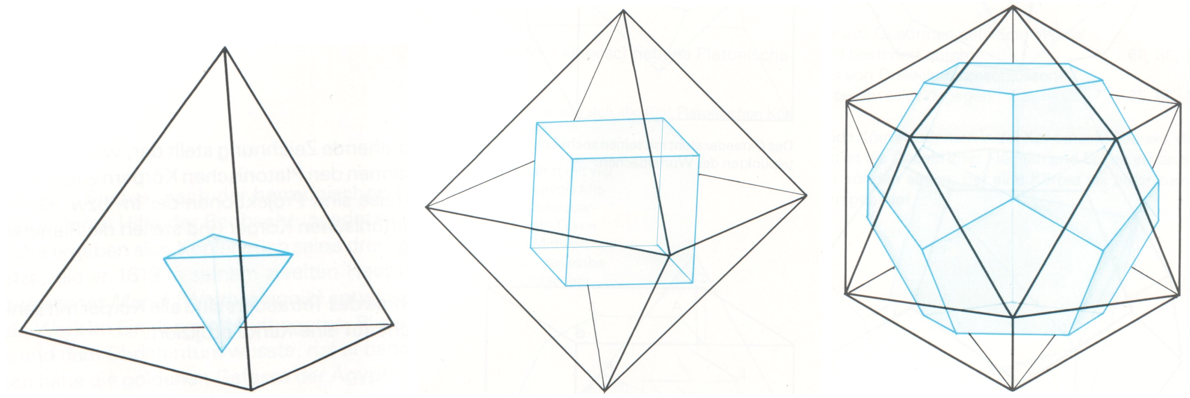
Dualita nebo také dualismus vychází z využití středů stěn jednoho tělesa jako vrcholů nového tělesa. Již jsme se dozvěděli, že krychle má osm vrcholů a šest stěn, zatímco osmistěn má tyto počty opačné, tedy osm stěn a šest vrcholů. Stejně jsou tyto počty prohozené i u dvanáctistěnu s dvaceti vrcholy a dvacetistěnu s dvanácti vrcholy. Zbývající čtyřstěn má čtyři vrcholy, počet stěn a vrcholů je stejný, a je tedy duální sám se sebou.

Je nutné si uvědomit, podobně jako v důkazu počtu platónských těles v části 3.3.1, že každá hrana spojuje dva vrcholy a odděluje dvě stěny. Vrcholy i stěny jsou tedy k hranám v analogickém vztahu. Tolik hran, kolik vychází z jednoho vrcholu základního tělesa, ohraničuje v duálním tělese jednu stěnu a naopak. Proto je dualita vzájemným vztahem právě dvou těles, neexistuje žádné třetí, které by bylo duální s jedním nebo oběma.

Zcela obecně vychází dualita těles z Eulerovy věty (pro připomenutí $v + s = h + 2$) kde lze prohodit počet vrcholů v a počet stěn s. Duální těleso má tedy každé těleso splňující vztah z Eulerovy věty. Někdy se také nazývá duál. Dále se ale budeme věnovat jen dualitě platónských těles, přestože některé výroky platí i pro nepravidelná tělesa. V případě pravidelných těles je dualita zároveň otočením Schläfliho symbolu (například krychle se symbolem $\{4, 3\}$ je duální s osmistěnem symbolizovaným dvojicí $\{3, 4\}$).

Dvě navzájem duální tělesa lze převést jedno na druhé použitím středů stěn jako vrcholů (obr. 9.1), jak již bylo naznačeno v kapitole 6, při tom splývá vepsaná koule vnějšího tělesa s koulí opsanou tělesu vnitřnímu [5].

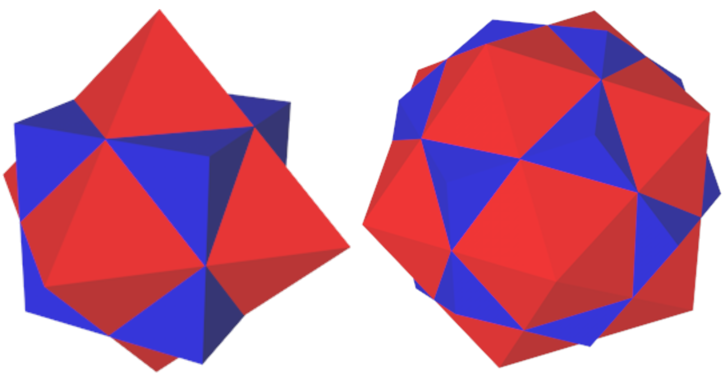
Další vzájemně propojenou konstrukcí je splynutí středů hran (obr. 9.2), v takovém



Obr. 9.1: Příklady duálních těles (převzato z [1])

případě splývají hranové koule obou těles. Sjednocením dvou takto umístěných duálních těles vznikl nový mnohostěn, nepravidelný, nekonvexní, ale přesto „dost pravidelný“, který budeme dále nazývat dvojtělesem.

Obě duální tělesa spolu s tímto novým sdílí grupu symetrií. Důkaz není složitý. Je jasné, že dvojtěleso nemá žádnou symetrii navíc oproti ani jednomu z původních duálních těles, a tedy původní tělesa mají všechny symetrie dvojtělesa. Žádná symetrie ale nezanikla: nad každou stěnou, pravidelným n-úhelníkem, je vztyčen pravidelný n-boký jehlan se základnou danou středy hran původní stěny a vrcholem, který je na kolmici ze středu stěny – a nezáleží na volbě výchozího tělesa, jak je vidět na obr. 9.2.



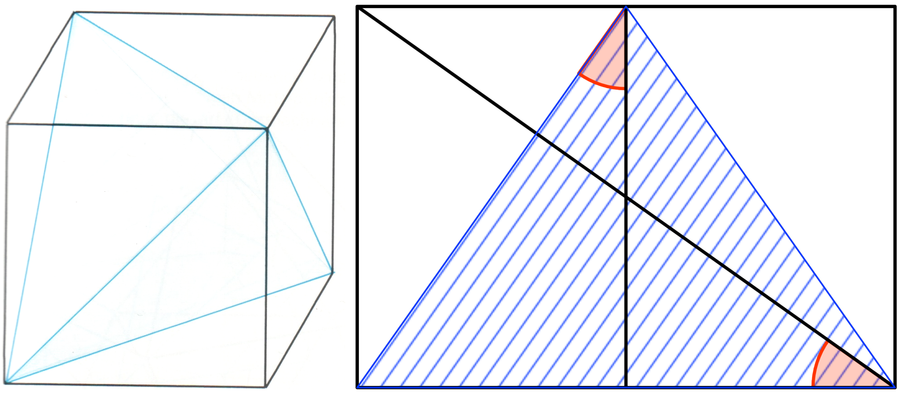
Obr. 9.2: Příklady dvojtěles: vlevo krychle s osmistěnem, vpravo dvanáctistěn s dvacetistěnem

Středové symetrie jsou zachovány – jehlan je otočen společně se stěnou, nad kterou je vztyčen. Osy symetrií mohou procházet středem stěny – v tom případě prochází i vrcholem jehlanu a symetrie je zachována, nebo původním vrcholem – v tom případě se jehlan nad stěnou zobrazí na jehlan příslušný stěně, na kterou se zobrazila původní stěna. Plochy symetrií jsou dány středem tělesa společně s osou symetrie stěny a díky tomu, že hlavní vrchol jehlanu leží stejně jako střed na kolmici ke stěně, je jehlan vždy symetrický podle takové plochy.

Rozborem možností jsme tedy vyloučili ztrátu symetrie a zároveň tím prokázali, že obě duální tělesa mají stejné symetrie. Že symetrie tvoří společně se skládáním grupu, je zřejmé.

9.2 Vpisování

Dualita není jediným způsobem, jak vepsat jedno platónské těleso do druhého. Počty vrcholů a stěn také nejsou jediná čísla opakující se v popisu platónských těles: čtyřstěn má šest hran, krychle má šest stěn a dvanáct hran – a to je počet stěn dalšího platónského tělesa. V těchto případech použijeme metodu vepsání „hrana na stěnu“, která je de facto jedinou nosnou myšlenkou, jak do sebe vpisovat neduální tělesa.

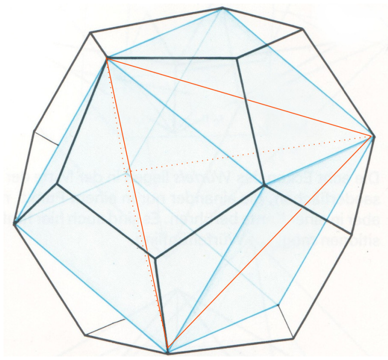


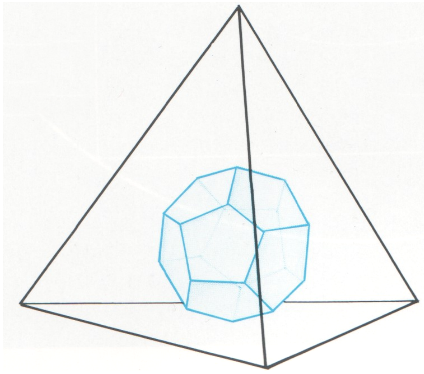
Obr. 9.3: Čtyřstěn vepsaný do krychle (převzato z [1]) a rovnost poloviny odchylky stěn čtyřstěnu a odchylky úhlopříčky od stěny na řezu krychle

Zároveň začne být patrná rovnost úhlů v krychli a čtyřstěnu, jak je vidět na úhlopříčném řezu krychle (obr. 9.3); díky poměru délek hrany a stěnové úhlopříčky krychle $1 : \sqrt{2}$ jsou dva vyznačené úhly shodné.

Opakovaným použitím vepíšeme čtyřstěn do dvanáctistěnu pomocí již vepsané krychle – použijeme ne osm z dvaceti vrcholů, ale jen čtyři. Pro vepsání dvanáctistěnu do čtyřstěnu využijeme již vepsanou krychli. Protože na stěnách čtyřstěnu leží vrcholy krychle, opíšeme dvanáctistěn této krychli s využitím těchto čtyř vrcholů (obr. 9.4).

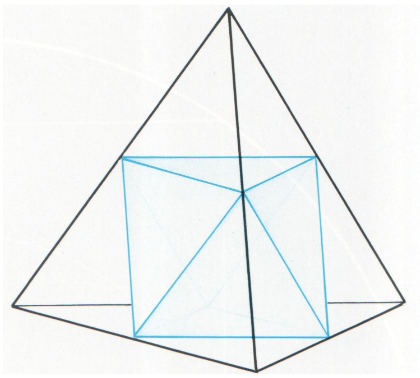
Protože mají obě tělesa společný střed, dá se tato myšlenka vpisování použít i obrá-





Obr. 9.4: Čtyřstěn vepsaný pomocí krychle do dvanáctistěnu a dvanáctistěn vepsaný do čtyřstěnu (převzato z [1])

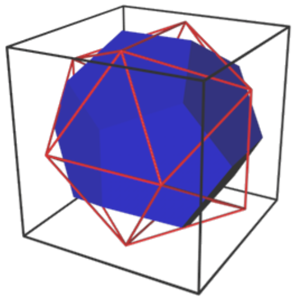
cený; těleso původně vpisované se zvětší tak, aby od středu nejvzdálenější body původně vnějšího tělesa ležely ve stěně zvětšeného tělesa. Tím získáme krychli vepsanou do čtyřstěnu a dvanáctistěn vepsaný do krychle. V prvním případě leží ve stěnách čtyřstěnu čtyři z osmi vrcholů (druhé čtyři jsou na poloměrech koule opsané vedených k vrcholům čtyřstěnu). V druhém případě leží ve stěnách krychle vždy hrana dvanáctistěnu.



Obr. 9.5: Osmistěn vepsaný čtyřstěnu (převzato z [1])

Zbývá jen zkombinovat tuto metodu vpisování s dualitou tak, abychom byli schopni navzájem vepsat i čtyřstěn a osmistěn (obr. 9.5), kde je situace jednoduchá – hrany vepsaného čtyřstěnu prochází středy stěn krychle, kde leží vrcholy osmistěnu vepsaného jak krychli, tak i čtyřstěnu. Proto mají stěny čtyřstěnu stejnou odchylku jako dvě u vrcholu protější stěny osmistěnu (kapitoly 4 a 6).

Pro vepsání dvacetistěnu do krychle využijeme již vepsaného dvanáctistěnu, který rozšíříme na dvojtěleso pomocí dvacetistěnu. Na stěně krychle budou tedy na sebe kolmé hrany dvanáctistěnu a dvacetistěnu, obou vepsaných do stejné krychle (obr. 9.6).



Obr. 9.6: Způsob vepsání dvacetistěnu do krychle pomocí již vepsaného dvanáctistěnu

Zajímavé je, že hrany krychle, dvacetistěnu a dvanáctistěnu jsou při tomto vepsání v poměru zlatého řezu po řadě $\varphi : 1 : \frac{1}{\varphi}$. [1]

Kapitola 10

Související tělesa

To bylo pět platónských těles, které splnily přísné požadavky pravidelnosti ve smyslu vrcholů hran i stěn a zároveň požadavek na konvexitu. Je jistě užitečné alespoň zmínit tělesa, která nesplňují některý z těchto požadavků; často jsou totiž ze zcela pravidelných mnohostěnů odvozená. Tato kapitola nemá ambici přesného popisu, je spíše přehledovým seznamem; napřed si představíme nekonvexní pravidelné mnohostěny, dále tělesa polopravidelná, jejichž stěny jsou různé pravidelné mnohoúhelníky. Na závěr ještě zmíníme mnohostěny, které mají všechny stěny shodné, ale stýkají se v jednotlivých vrcholech v různém počtu.

10.1 Kepler-Poinsotova tělesa

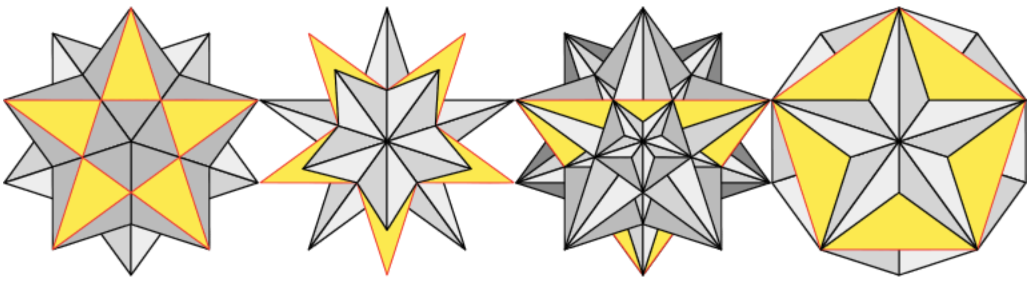
Kepler-Poinsotova tělesa je souhrnné označení pro čtyři pravidelné nekonvexní mnohostěny (obr. 10.1). Jedním ze způsobů, jak je vytvořit, je použití vrcholů dvanáctistěnu nebo dvacetistěnu a mezi nimi stanovit jiné stěny. Tento postup se obecně nazývá fasetace. Fasetací krychle například dosáhneme dvou prolínajících se čtyřstěnů. [5]

10.1.1 Keplerova tělesa

Stěny Keplerových těles tvoří pravidelné pentagramy (Schläfliho symbol $\{\frac{5}{2}\}$), které jsou cípy k sobě připojeny ve vrcholech, jak je dobře vidět na 10.1, kde jsou u jednotlivých těles vyznačeny viditelné části vybrané stěny. Ostatní body, kde se protínají hrany, nejsou vrcholy stejně jako u pentagramu. Taková tělesa jsou dvě a jejich názvy jsou malý hvězdicový dvanáctistěn reprezentovaný symbolem $\{\frac{5}{2}, 5\}$ a velký hvězdicový dvanáctistěn se symbolem $\{\frac{5}{2}, 3\}$.

Vizuálně vypadají tato tělesa stejně jako dvanáctistěn (respektive dvacetistěn), kterým byl ke každé stěně připsán pravidelný pětiboký (respektive tříboký) jehlan. Tento popis může lépe přiblížit podobu těles, ale vzdaluje se od ideje jejich vzniku. Kepler je možná proto nazval větší a menší dvacetistěnný ježek; některé další vlastnosti najdete v tabulce 10.1.

Klasickým způsobem konstrukce Keplerových těles, kterou použil i Kepler [5], je prodlužování hran platónského tělesa. Z mnohoúhelníků použitých při konstrukci pravidelných mnohostěnů se jedině strany pětiúhelníku při protažení znovu protnou a vytvoří již zmíněný pentagram (pentagram tvoří také úhlopříčky pětiúhelníku, čehož využívá pro konstrukci Keplerových těles facetace). První pětiúhelník, jehož strany jsou protaženy, je stěna dvanáctistěnu – nad každou stěnou pomyslně vznikne pětiboký jehlan, vzniklé pentagramy utvoří malý hvězdicový dvanáctistěn. Pro velký hvězdicový dvanáctistěn jsou protaženy hrany dvacetistěnu, kdy výchozí pětiúhelník je vždy podstavou vrcholového jehlanu (popsán v kapitole 8).



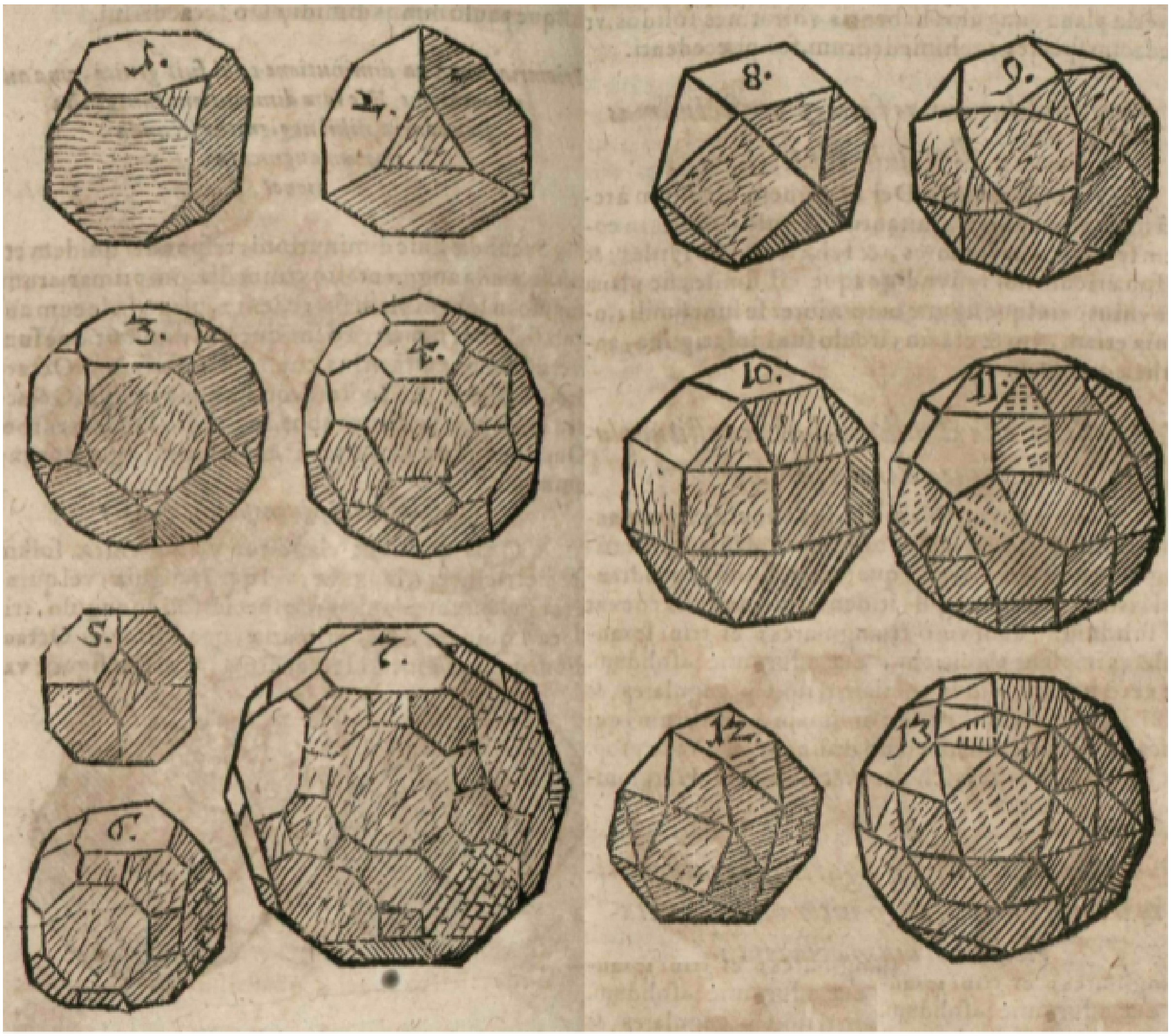
Obr. 10.1: Kepler-Poinsotova tělesa: zleva malý a velký hvězdicový dvanáctistěn, velký dvacetistěn a velký dvanáctistěn (převzato z [13])

10.1.2 Poinsotova tělesa

Stěny dvou Poinsotových těles jsou běžné konvexní mnohoúhelníky – trojúhelník a pětiúhelník a vznikají facetací dvacetistěnu a opět platí, že vrcholy jsou jen krajní body hran a navíc ani každý průnik dvou stěn není hrana (obr. 10.1). Jmenují se velký dvacetistěn (Schläfliho symbol $\{3, \frac{5}{2}\}$) a velký dvanáctistěn ($\{5, \frac{5}{2}\}$). V obou případech mají stejnou stěnu jako „malé“, platónské, těleso a jsou duální ke Keplerovým tělesům.

Náročně je lze sestrojit i zvětšováním stěn, což popíšeme na příkladu dvanáctistěnu. Pokud z dvanáctistěnu uděláme protažením hran do pentagramu Keplerův malý hvězdicový dvanáctistěn, nové vrcholy můžeme spojit také do pětiúhelníků, které tvoří právě stěny velkého dvanáctistěnu. U dvacetistěnu je tato představa horší, může jí pomoci Baravalleova hvězda (její popis je v části 10.5).

10.2 Archimédova tělesa



Obr. 10.2: Keplerův nákres všech Archimédových těles (převzato z [6])

Archimédova tělesa, někdy také archimedovská, splňují konvexitu, shodnost hran a dokonce i ekvivalenci vrcholů, jediná odlišnost od platónských těles je, že jejich stěny tvoří různé pravidelné n-úhelníky (vždy však u každého vrcholu zastoupeny ve stejném počtu i pořadí). Jejich české názvosloví není úplně ustálené. Poprvé popsal těchto třináct těles ve svých spisech Archimédes (přibližně 287 – 212 př.n.l), ale tyto spisy se nedochovaly a pro Evropu byla Archimédova tělesa postupně znovu objevena v průběhu renesance a všechna popsána v Keplerově *Harmonices Mundi* (1620) (obr. 10.2). [5]

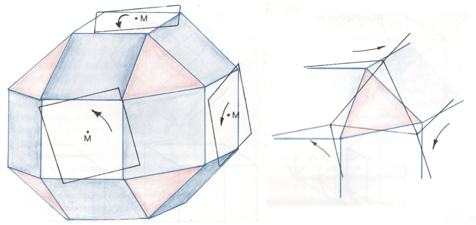
Všechna tato tělesa lze postupně odvodit z platónských těles. První skupinu tvoří osekaná platónská tělesa (čísla 1 až 5). Osekání znamená oříznutí rohu tak, aby stěny tvořily pravidelný n-úhelník s dvojnásobným počtem vrcholů. Oříznutím vzniká také nová stěna pod původním vrcholem, rovněž pravidelný n-úhelník a počet jejích vrcholů je roven počtu hran vycházejících z vrcholu původního platónského tělesa.

Jiná dvě archimedovská tělesa jsou tvořena průnikem dvou duálních těles při ztotožnění středů hran – vznikají tedy podobně jako dvojtělesa v kapitole 9.1. Novými vrcholy jsou tedy středy hran. I jméno kombinuje jména původní duální dvojice: jmenují se kuboktaedr (č. 8) a ikosododekaedr (č. 9). Kuboktaedr je kombinací krychle a osmistěnu, má proto šest čtvercových a osm trojúhelníkových stěn. Vrcholy ikosododekaedru tvoří poloviny hran dvacetistěnu nebo dvanáctistěnu a má dvanáct pětiúhelníkových a dvacet trojúhelníkových stěn.

Další metodou utváření archimedovských těles je „nafukování“, kdy se stěny od sebe odsunují tak, aby se vrcholy vzdálily na délku hrany, neboli hrany jsou nahrazeny čtverci a vrcholy jsou nahrazeny stěnami duálního tělesa. Nafukováním krychle nebo osmistěnu vznikne rombokuboktaedr a z druhé dvojice duálních platónských těles vznikne romboikosododekaedr (čísla 10 a 11), někdy se tato tělesa nazývají také rombická krychle a rombický dodekaedr. Nafukováním čtyřstěnu vznikne s šesti čtvercovými a osmi trojúhelníkovými stěnami kuboktaedr. Rozestupovat se mohou i stěny osekaných těles, vždy ty s největším počtem vrcholů. Z výchozího platónského tělesa vznikne stejné těleso nezávisle na volbě z původní duální dvojice. Vznikne velký rombokuboktaedr a velký romboikosododekaedr (čísla 6 a 7).

Do avizovaných třinácti zbývají dvě. Jsou odvozená od „malých“ rombických těles zkroucením (obr. 10.3) tak, že čtverce jsou nahrazeny dvojicí rovnostranných trojúhelníků. Náleží jim přídavné jméno „otupené“ nebo „přitlačené“ namísto „rombické“; česky tedy otupená krychle (č. 12) a otupený dvanáctistěn (č. 13). [5]

Je dobré poukázat, že představené metody utváření těles mohou transformovat také platónská tělesa mezi sebou, použití středů hran jako vrcholů nového tělesa je také metodou vepsání osmistěnu do čtyřstěnu, podle terminologie archimedovských těles by se osmistěn mohl nazývat podle vzoru kuboktaedru tetrotetraedr. Dvacetistěn zase vzniká



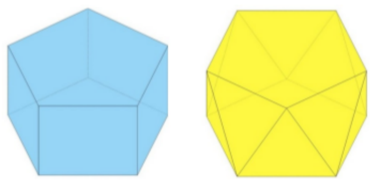
Obr. 10.3: Zkroucení rombokuboktaedru (převzato z [1])

z čtyřstěnu přitlačením [12].

10.3 Hranoly a antihranoly

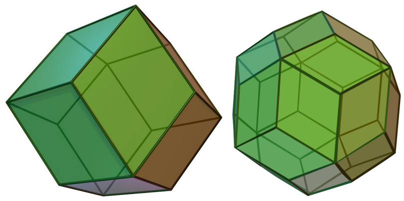
Z rovinných pravidelných n-úhelníků není těžké udělat těleso, které má všechny hrany stejně dlouhé a splňuje i ostatní požadavky archimedovských těles, vztyčením čtverce nad každou stranou a uzavřením druhým shodným n-úhelníkem – neboli vytvořit hranol s pravidelnou základnou a pláštěm složeným ze čtverců, v odborné literatuře lze najít také název prizma.

Druhý způsob, jak konvexně spojit dva rovnoběžné n-úhelníky, je pomocí trojúhelníků. Při vhodném vzájemném pootočení a vzdálenosti n-úhelníků mohou být spojující trojúhelníky rovnostranné. Takové těleso má tedy u každého vrcholu jeden n-úhelník a tři trojúhelníky a jmenuje se antihranol nebo antiprizma (obr. 10.4).



Obr. 10.4: Ukázka hranolu a antihranolu (převzato z [7])

Archimédes do svého výčtu ale nezařadil hranoly ani antihranoly, naopak Kepler je v *Harmonices Mundi* zmiňuje, ale odděleně [6]. Dnes se hranoly, antihranoly a Archimédova tělesa souhrnně označují jako polopravidelná. Na první pohled je zřejmé, že krychle je zástupcem takovýchto hranolů mezi platónskými tělesy. Na druhý pohled je také vidět, že osmistěn lze popsat jako trojboký antihranol.

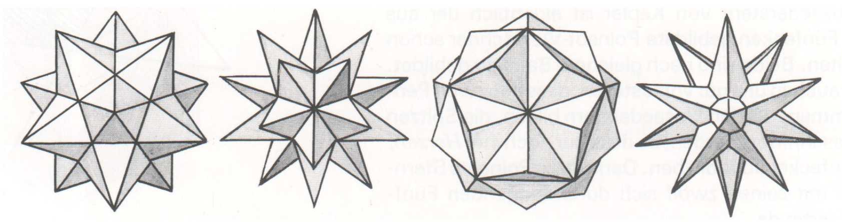


Obr. 10.5: Kosočtverečný dvanáctistěn a třicetistěn (převzato z [13])

10.4 Kosočtverečné mnohostěny

V *Harmonices mundi* si Kepler také povšiml možnosti připsat hranám krychle a dvanáctistěnu kosočtverce tak, aby utvořily nové těleso. V případě krychle vzniká kosočtverečný dvanáctistěn a v případě dvanáctistěnu kosočtverečný třicetistěn (obr. 10.5). Kromě toho, že kosočtverec není úplně pravidelný čtyřúhelník, porušují tato tělesa i další podmínku pravidelnosti – mají dva typy vrcholů: jeden ve vrcholech původního tělesa, kde se stýkají vždy tři kosočtverce tupými úhly k sobě, druhý nad stěnami původního tělesa, kde se stýká čtyři nebo pět ostrých úhlů kosočtverce. U osmistěnu a dvacetistěnu jdou kosočtverce připsat jen delší úhlopříčkou na hranu a vznikají tedy znovu stejná tělesa – vrcholy kosočtverečných mnohostěnů jsou tedy tvořeny také vnějšími vrcholy dvojtěles (popsaných v kapitole 9.1) [1]. Čtyřstěnu lze stejným způsobem připsat čtverec a vzniká krychle.

10.5 Další ježci



Obr. 10.6: Zleva malý a velký hvězdicový dvanáctistěn, Bindelův a Baravallův ježek (převzato z [1])

Kromě Keplerových hvězdicových mnohostěnů existují další hvězdicovitá tělesa odvozená z dvacetistěnu (obr. 10.6). Zde už je představa připsaných jehlanů žádoucí, přehled vlastností ježků najdeme v tabulce 10.1. Další dva ježci nevychází při zvětšování stěn z prodlužování hran, ale z prodlužování výšek přes hranu. Jednodušší Bindelův ježek (na

	Malý hvězdicový dvanáctistěn	Velký hvězdicový dvanáctistěn	Bindelův ježek	Baravallův ježek
Výchozí těleso Konstrukce prodloužením	dvanáctistěn hran	dvacetistěn hran	dvacetistěn výšek	dvacetistěn výšek
Počet stěn Počet vrcholů (včetně vnitřních) Počet hran (podle délek)	60 12 32 90 (30 + 60)	60 20 32 90 (30 + 60)	60 20 32 90 (30 + 60)	60 12 62 (20+30+12)[1] 120 (60 + 60)
Poměr velikostí hran v připsaných jehlanech	zlatý řez $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	zlatý řez $\varphi \doteq 1{,}618$	s = hrana pláště $s = k\frac{\sqrt{10}}{5} \doteq 0{,}632k$ $k = s\frac{\sqrt{10}}{2} \doteq 1{,}581s$	k = hrana 20stěnu $s = \frac{k}{2}\sqrt{2}\left(2+\sqrt{5}\right)$ $s \doteq 2{,}995k$
Jádro (těleso vnitřních vrcholů) Obal (těleso vnějších vrcholů)	dvanáctistěn dvacetistěn	dvacetistěn dvanáctistěn	dvacetistěn pentakisdodekaedr	nemá dvacetistěn

Tabulka 10.1: Tabulka hvězdicovitých těles [1, str. 95]

obr. 10.6 druhý zprava) je založen na dvacetistěnu a nové vrcholy konstruuje nad každou ze stěn prodloužením výšek tří stěn sousedících hranou. Protože jsou takto prodlouženy všechny výšky, z každé stěny se stane šestiúhelník.

Druhý je Baravallův ježek (obr. 10.6, zcela vpravo), který prodlužuje výšky trojúhelníků sousedících hranou s vrcholovým jehlanem. U vrcholu je tedy každý osten pětiboký jehlan. Tyto jehlany jsou připsány podstavám vrcholových jehlanů a pronikají se i mimo výchozí dvacetistěn. Každý nový vrchol je na ose středu dvacetistěnu a jednoho původního vrcholu, proto jsou jeho vnější vrcholy uspořádáy ve dvacetistěnu. Z obou těchto ježků nalezneme v českém literatuře pouze Baravallova ježka na stránkách [12] pod názvem „velký deltoidový šedesátistěn“. Používaná terminologie je překladem z [1].

[1] Baravallův ježek má dva druhy vnitřních vrcholů: „nad hranou“, kde se stýkají čtyři stěny (30) a „nad stěnou“, kde se stýkají tři stěny (20).

Závěr

Jak již bylo zmíněno, touto prací jsem se zařadil do dlouhé řady matematiků a dalších autorů, kteří se kdy zabývali platónskými tělesy, a doufám, že se ctí. Podařilo se dát dohromady velmi rozsáhlý soubor vztahů platných v jednotlivých pravidelných mnohostěnech a to včetně jejich odvození, které se ne vždy v literatuře a v mnoha případech je toto odvození – a exaktní hodnota – vlastní práce. Všechny výpočty jsem skutečně provedl, byť v některých případech jen jako kontrolu citovaných zdrojů.

Také jsou v práci začleněny všechny nalezené zajímavé skutečnosti o platónských tělesech a jejich vztazích, možnostech a způsobech vzájemného vpisování a popis obecnějšího fenoménu duality těles na příkladu těles platónských. Podstatnou částí, rozvíjející pohled na tato tělesa, je pak přesahová kapitola o tělesech polopravidelných a dalších tělesech odvozených od pětice těch platónských, z nichž některé jsem v české literatuře vůbec nenašel.

Práce by mohla pokračovat dalšími přesahy do úzce příbuzných témat, ať už jsou to vícerozměrná pravidelná tělesa a jejich reprezentace ve dvou a třech rozměrech. Z dvojrozměrných reprezentací platónských těles se nedostalo na sítě reprezentující „rozbalený“ povrch – tedy všechny stěny se zachováním jejich velikosti, ale bez informace o jejich vzájemném uspořádání. Nedotčeno zůstalo také téma platónských grafů, které reprezentují tato tělesa jiným způsobem než sítě a převádějí zkoumání těles do teorie grafů.

Podrobněji by se samozřejmě dala zpracovat i Archimédova a další tělesa zmíněná v poslední kapitole. Zkoumání jejich vlastností je podmíněno znalostí platónských těles a způsobu odvození, což jsou nosné části kapitoly jim věnované. Tato práce tak položila pro detailní zkoumání dalších těles užitečný základ, na kterém lze pokračovat.

V neposlední řadě jsem díky této práci objevil zajímavé internetové zdroje, ať už striktně na tělesa zaměřený web [12], nebo server s mnoha didakticky využitelnými zejména matematickými aplety, mezi kterými jsou i rotující platónská tělesa [11].

Literatura

[1] ADAM, Paul a WYSS, Arnold. *Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde: einschliesslich: "Die Sonderlinge"- Die Archimedischen Körper Cubus simus und Dodecaedron simum. Das Rätsel ihrer Herkunft.* 2., unveränd. Aufl. Bern: Haupt, ©1994. 136 s.

[2] HUDCOVÁ, Lucie. *Platónova tělesa.* Olomouc, 2009. Bakalářská práce. Dostupné z: http://mant.upol.cz/soubory/OdevzdanePrace/B09/b09-16-lh.pdf

[3] CHMELÍKOVÁ, Vlasta a Luboš MORAVEC. MFF UK. *Pravidelné mnohostěny.* Praha, 2007, 23 s. Dostupné z:
http://www.sgo.cz/stranky_predmetu/mat/Studijni_literatura/Pravidelne_mnohosteny.pdf

[4] PLATÓN. *Timaios; Kritias.* 2. vyd. Praha: OIKOYMENH, 1996. 137 s. Oikúmené. Platónovy spisy; 17. ISBN 80-86005-07-0.

[5] SUTTON, Daud. *Platónská a archimedovská tělesa: geometrie prostoru.* 1. vyd. v českém jazyce. Praha: Dokořán, 2011. 66 s. Pergamen; sv. 7.

[6] SVOBODOVÁ, Veronika. *Historie pravidelných mnohostěnů.* Brno, 2006. Rigorózní práce. Dostupné z:
http://is.muni.cz/th/15501/prif_r/kostra.pdf

[7] VYTISKOVÁ, Adéla. *Mnohostěny a diskrétní povrchy.* Plzeň, 2009. Bakalářská práce. Dostupné z:
https://stag-ws.zcu.cz/ws/services/rest/kvalifikacniprace/downloadPraceContent?adipIdno=31656

[8] WELLS, D. G. *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry.* 1st publ. London: Penguin Books, 1991. 14, 285 s. ISBN 978-0140118131.

[9] JOYCE, David E. CLARK UNIVERSITY. *Euclid's Elements: Book XIII* [online]. 1996 [cit. 2012-06-14]. Dostupné z: http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/bookXIII/bookXIII.html

[10] MIROSLAV, Randa. *Planety: Sluneční soustava - Charakteristiky.* [online]. [cit. 2012-06-06]. Dostupné z: http://astronomia.zcu.cz/planety/soustava/1863-charakteristiky

[11] FENDT, Walter. *Platónská tělesa.* Walter Fendt Homepage [online]. 1998, 14. března 2006 [cit. 2012-06-13]. Dostupné z: http://www.walter-fendt.de/m14cz/platon_cz.htm

[12] *Svět těles* [online]. [cit. 2012-06-5]. Dostupné z: http://telesa.wz.cz/

[13] WIKIMEDIA FOUNDATION. *Wikimedia obrázky* [online]. 2012 [cit. 2012-06-13]. Dostupné z: http://wikipedia.org