UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Funkční myšlení žáků středních škol

Functional thinking of high school students

Autor: David Janda

Vedoucí práce: Mgr. Derek Pilous

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Derka Pilouse. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

Souhlasím se zveřejněním diplomové práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách, ve znění pozdějších předpisů.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, ve znění pozdějších předpisů.

Práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s uložením své diplomové práce v databázi Theses.

V Praze dne 28. června 2013 . . . .

David Janda

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce, Mgr. Derkovi Pilousovi, za podporu a kvalitní vedení práce.

Doc. RNDr. Naďe Vondrové, Ph.D. děkuji za projevenou ochotu a mnoho cenných rad a připomínek, které mi pomohly realizovat tuto práci.

Abstrakt

Cílem diplomové práce *Funkční myšlení u žáků středních škol* je analýza a popis vybraných problémových aspektů z výuky teorie funkcí na střední škole. V první části práce jsou popsány základní teoretické koncepce v oblasti didaktiky matematiky se zaměřením na uvedenou problematiku a shrnuty vybrané výzkumy z hlediska jednotlivých aspektů. Druhá část práce je věnována analýze původního výzkumu realizovaného v hodinách matematiky na střední škole. V závěrečné kapitole jsou shrnuty výsledky výzkumu z hlediska jednotlivých aspektů a diskutován jejich význam a způsob využití ve výuce.

Abstract

The aim of the thesis Functional thinking of high school students is an analysis and description of chosen aspects of function theory at high school, which seems to be problematic. The first chapter of the thesis summarizes basic theoretical concepts of didactics of mathematics focusing on and describing selected researches in the framework of aspects. The second part deals with the analysis of the research realized in standard math lessons at high school. The final chapter of the thesis recapitulates the results of the research from the points of view of particular aspects and discuses their importance and the way of utilization in education.

Obsah

Úvod

Rozdíly mezi pohledem učitelů a žáků na matematiku lze jistě prohlásit za značné a existuje mnoho různých vlivů, které mohou tyto rozdíly dále negativně ovlivňovat. Mohl bych jmenovat mnoho příkladů: různé přístupy učitelů k výuce, vztahy ve třídě, psychický stav žáka, míra soustředění, únava a podobně. To vše může negativně ovlivňovat žákův pohled na látku, která ho provází celou školní docházkou, a přitom jí z větší části nerozumí. Jednotlivá témata žáci nechápou jako součást většího celku, spíše jsou pro ně útržky bez dalších souvislostí. Teorie funkcí je v tomto směru vhodným příkladem. Je to téma velmi komplexní a složité, které nám poskytuje nástroje k popisu závislostí, se kterými se lidé setkávali od nepaměti na jedné straně a stojí jako základ moderní matematice vznikající teprve v několika posledních staletích na straně druhé. Obě tyto hranice se promítají i do školních vzdělávacích programů. Prvním kontaktem s funkcemi bývá pro žáky seznámení s přímou a nepřímou úměrností, příklady z reálného světa a funkcí lineární. Na druhé straně stojí určování formálních vlastností a charakteristik funkcí, které jsou základem k matematické analýze, a jejichž využití nalezneme ve fyzice, ekonomii a spoustě dalších vědních oborů. Vezmeme-li v úvahu, že takovýto vývoj by měl v mysli žáka proběhnout během tří let při třech hodinách týdně, je jasné, že pokud je to vůbec možné, jistě to musí být velmi obtížné.

Tato myšlenka mne přivedla ke snaze pochopit, jakým způsobem žáci funkce vnímají. Její teoretické ukotvení popisuji v první kapitole nazvané Funkce jako matematický poznatek. Základem tohoto ukotvení se stala teorie poznávacího procesu M. Hejného (Hejný, 2004, 2009). Jako další aplikované teorie jsou zde popsány teorie proceptů (Tall, Gray, 2001), APOS teorie (Dubinsky, 2001) a teorie reifikace (Sfard, Linchevski, 1994). Dále zde shrnuji vybrané výzkumy související s tématem funkcí analyzované na základě kombinace výše citovaných teorií. Třetí důležitou částí je zastoupení funkcí v českých kurikulárních dokumentech. Jak uvedené výzkumy, tak kurikulární dokumenty jsem se snažil popisovat z hlediska jevů pozorovaných v druhé kapitole.

Mnoho otázek, které vyplynuly z teoretického základu práce, bylo nesmyslných, některé byly zbytečné, další utopické a ty, které sítem mých úvah a námitek vedoucího práce prošly, formuluji v druhé kapitole nazvané „Vlastní výzkum“. Na základě těchto otázek vznikla série čtyř testů, které jsem použil jako výzkumný nástroj k jejich zodpovězení. Samotné výzkumné otázky však spíše udávaly směr, kterému bych se ve výzkumu chtěl věnovat. Z tohoto důvodu jsem při analýzách testů vycházel z principů zakotvené teorie (Strauss, 1999) a významné výsledky klíčoval do kategorií, které dále nazývám *aspekty* a pomocí kterých popisuji většinu významných pozorovaných jevů.

Kapitola Diskuse je věnována snaze využít výsledků výzkumu ke zpřesnění pohledu dnešní didaktiky matematiky na problematiku funkcí u žáků středních škol, a to ze tří směrů. V první řadě bylo potřeba pomocí aplikace různých principů a teorií matematického poznání upřesnit, jakým způsobem u žáků probíhá poznávací proces funkce. Za druhé potom zjistit, do jaké míry se popsané jevy a aspekty shodují s existujícími výzkumy na podobná témata. Na závěr jsem formuloval několik otázek/hypotéz vycházejících z mého výzkumu, které si v kontrastu dalších prací zaslouží z hlediska poznávacího procesu pojmu funkce určitou pozornost.

V přílohách jsou uvedena zadání jednotlivých testů a ke každému z nich buď celé vybrané práce, nebo ukázky prací s jednotlivými pozorovanými jevy. Všechny tyto ukázky jsou opatřeny krátkými komentáři.

Kapitola 1

Funkce jako matematický poznatek

1.1 Matematický poznatek

Podstatu matematického poznatku[1] v pojetí této práce nejlépe vystihuje jedna ze zásad konstruktivismu M. Hejného a F. Kuřiny:

> Poznatky, a to nejen poznatky matematické, jsou nepřenosné. Přenosné … jsou pouze informace. Poznatky vznikají v mysli poznávajícího člověka. Jsou to individuální konstrukty (Hejný, 2009, s. 194).

Tyto konstrukty, které Hejný nazývá *obsahem* (pro odlišení od *schopností*) matematického poznání, lze přitom částečně kategorizovat. Hejný obsah dále člení na objekty, vztahy, postupy a schémata takto:

1. *objekty* jsou základní stavební kameny poznatkové struktury (kružnice, trojúhelník, kolmost, posunutí, číslo 5, celé číslo, zlomek, součet, dělitelnost, pořadí, rovnice, funkce, implikace, …),

2. *vztahy* vzájemně propojují dva nebo více objektů nebo vztahů. Budeme je dělit na *tvrzení* ($2 + 3 = 5$, $7 \cdot 8 = 56$, Pythagorova věta, kritérium dělitelnosti číslem 3) a *vzorce* ($S = \frac{zv}{2}$ – vzorec pro obsah trojúhelníku, $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$),

3. *postupy* představují širokou třídu poznatků; sem náleží *algoritmy* a *návody* zaměřené na realizaci procedury nebo řešitelského kroku (návod na písemné násobení, návod na sestrojení rovnostranného trojúhelníku, návod na krácení zlomku), *řeši-*

[1] Popisujeme zde poznatek nikoli obecný, ale poznatek jedince.

telské strategie zaměřené na nalezení řešení nestandardní matematické úlohy, *argumentace* zaměřené na hledání souvislostí jevů a vztahů atd.,

4. *schémata* jsou ucelené představy, které se ve vědomí člověka vytvářejí na základě mnohonásobně opakované zkušenosti a jsou nositelem mnoha konkrétních poznatků, které člověk zná jen nepřímo, tj. dovede je ze schématu vyvodit (např. ze schématu svého bytu dovede vyvodit počet oken, které v bytě jsou, nebo ze schématu krychle počet tělesových úhlopříček tělesa) (Hejný, 2004, s. 25).

Například funkce je možné v různých kontextech považovat za objekty, vztahy či schémata. Například s konkrétní funkcí $f(x) = \sin(x)$ jako objektem můžeme provádět různé operace, určovat její vlastnosti apod. Z pohledu vztahů můžeme chápat tuto funkci jako závislost poměru odvěsny a přepony na úhlu proti této odvěsně, zatímco jako schéma u ní pozorujeme její vzájemnou provázanost s dalšími goniometrickými funkcemi, jejím historickým vývojem či její úlohou v teorii pravděpodobnosti.

Podobný přístup k matematickým poznatkům zaujímá S. Vinner (1983), který je rozlišuje na *concept image* a *concept definition* a popisuje principy jejich utváření (*concept formation*). *Concept image*[2] je podle něj tvořen množinou vlastností spojených s daným pojmem a množinou mentálních obrazů (*mind pictures*), kterou tvoří všechny (vizuální) představy, které má žák s tímto pojmem spojeny. *Concept definition* je možno označit jako „konvenční definici“ (Edwards, 2005), se kterou se v matematice běžně setkáváme.

Některé z těchto mentálních obrazů žáci preferují, jsou pro ně typickými příklady (typickými představiteli) daného pojmu. Co je ovšem typickým příkladem pojmu pro jednoho žáka, nemusí být typickým příkladem pro jiného. Na zadání „uveďte libovolnou funkci“ odpoví jinak žák základní školy, který se setkal zatím pouze s funkcemi lineárními, a jinak student vysoké školy matematického zaměření. Některé typické příklady mají různí žáci zakořeněny více než jiné. Tyto označuje A. Kopáčková (2003, s. 56) za tzv. *prototypy*[3], tedy příklady pojmů, které jsou pro nějakou skupinu jedinců typickými představiteli.

1.2 Matematický pojem

Problematiku vymezení termínu *pojem* (na úrovni obecné, matematické i jako konkrétní funkce) výstižně shrnuje Kopáčková (2003, s. 53 – 54). K obecnému významu termínu pojem

[2]Opět je zde myšlen *concept image* jednoho konkrétního žáka

[3]Na základě práce E. E. Smithe a dalších autorů (Smith, 1988).

z její práce považuji za dostatečné citovat definici dle Pedagogického slovníku (Průcha, 2001):

> zobecněná představa o něčem vyjádřena jedním či více výrazy přirozeného nebo formálního (např. chemický vzorec) jazyka.

Matematický pojem můžeme charakterizovat jako zúžení pojmu obecného. Toto zúžení je dáno snahou matematické pojmy definovat jednoznačně, na čemž stojí celé axiomatické pojetí matematiky.
Funkce můžeme potom chápat buď jako pojem obecný, nebo jako pojem matematický. Obecným pojmem je funkce např. ve smyslu, kdy nějaký přístroj má své funkce. Z pohledu matematických pojmů je potom funkce dána svou definicí a stává se součástí matematického obsahu.

Naším cílem je upřesnit reprezentaci tohoto pojmu (tedy funkci jako poznatek) v poznatkové struktuře žáka tak, aby byl v souladu s definicí pojmu chápán dostatečně široce a zároveň se s ní nedostával do rozporu[4].

V celé práci pro větší srozumitelnost rozlišuji mezi matematickým pojmem a matematickým poznatkem žáka ve smyslu konstruktu konkrétního jedince. Je důležité podotknout, že pojmy i poznatky se vyvíjejí. Vývojem matematických pojmů se zabývá historie a filosofie matematiky, vývojem matematických poznatků didaktické a didakticko-matematické teorie. Teoretický vztah mezi těmito dvěma procesy popisuje metoda genetické paralely (Hejný, 2004, 2009). Konkrétní použití této metody pro logické myšlení popisuje K. Zavřel (2012), pro funkce A. Kopáčková (2003).

Z hlediska fylogeneze matematiky vývoj matematických pojmů popisuje L. Kvasz (2008). V jeho knize *Patterns of change: Linguistic Innovations in Development of Classical Mathematics* můžeme nalézt některá pozorování vývoje pojmu funkce ve vztahu k jazyku matematiky.

1.3 Poznávací proces

1.3.1 Teorie mechanismu poznávacího procesu

Pro výzkumnou část této práce se stala základem teorie M. Hejného (Hejný, 2004, 2009). S touto teorií jsem se v rámci studia na PedF UK setkával nejčastěji a také ji jako klíčovou

[4]Zde se nabízí otázka, zda jako učitelé upřesňujeme žákovi tento poznatek směrem k definici pojmu funkce nebo k našemu osobnímu poznatku funkce, resp. je zřejmé, že vždy nastává druhá varianty, a potom je otázkou, nakolik jsou tyto shodné.

teorii uvádí pro svou práci Kopáčková (2003). Kombinace těchto dvou citovaných zdrojů mi poskytla náhled na vznik poznatků z oblasti teorie funkcí u žáků, ze kterého jsem mohl ve výzkumné části vycházet.

„Motivace způsobuje napětí mezi *nemám* a *chtěl bych mít*, *neumím* a *potřebuji umět*, *neznám* a *potřebuji znát*“ (Hejný, 2009, s. 129). Jak uvádí Kopáčková, k motivaci pro zavedení funkcí dochází, když se žáci seznamují „s různými příklady kauzalit ze života, vytvářejí tabulky různých závislostí, připravují se na souřadný systém a kreslí různé grafy a diagramy, …“ (Kopáčková, 2003, s. 62).

Izolované modely[5] jsou „reprezentanty obecného pojmu“, se kterými žák operuje a jak se postupně seznamuje s dalšími, seznamuje se s jejich dalšími souvislostmi, vytváří se u něj „shluky modelů“. Postupně u žáka dochází k „poznání jejich podstaty“ Hejný (2009, s. 129). Kopáčková do fáze izolovaných modelů funkcí zařazuje „seznamování se s konkrétními příklady funkcí, s jejich grafy i vlastnostmi … přímá a nepřímá úměrnost jako speciální případy funkcí lineární a lineární lomené, …“ (Kopáčková, 2003, s. 62), také sem můžeme zařadit další závislosti známé z reálného života.

Nalézání podstaty izolovaných modelů Hejný označuje etapou univerzálních modelů. Univerzální model je abstraktnější než izolovaný, je to „popis situace ve vhodném jazyku, který umožňuje předpovídání“ (Hejný, 2009, s. 129). U pojmu funkce zpravidla vzniká až po zavedení definice.

Dále dochází k druhému abstrakčnímu zdvihu, po němž se vytváří abstraktní znalosti[6]. Cílem vyučování je dosáhnout co nejvyšší funkční shody reprezentace funkce v mysli žáka a definice pojmu funkce. Čím vyšší funkční shody dosáhneme, tím lepších výsledků může žák dosahovat.

Poznatek se dále podle Hejného „propojuje s existujícími poznatky“, dřívější poznatky se upravují na základě nových, ale mohou se dostat i do sporu. Tato fáze se označuje jako krystalizace. V případě funkcí se proces krystalizace může projevit např. při jejich užití v netradičních úlohách a kontextech a „probíhá u českých studentů až na střední a vysoké škole“ (Kopáčková, 2003, s. 62).

V rámci krystalizace Hejný také poukazuje na proces restrukturace poznatku. Za ten považuje situaci, kdy „v důsledku zásadně nového pohledu na určitou oblast poznatků v ní dochází k restrukturaci“. Tento termín již není součástí popsané teorie, nicméně je zde uveden proto, že je důležité si uvědomit, že ať už nahlížíme na utváření poznatků podle jakékoli teorie, zpravidla tento proces neprobíhá rovnoměrně, dochází v něm ke „skokům“. Hejného

[5] V dřívějším značení se toto stádium označovalo za fázi separovaných modelů.

[6] dříve fáze intuitivně-abstraktních představ

teorie takovýto vývoj naznačuje při popisu abstrakčních zdvihů, ale např. v popisu procesu v teorii proceptů jsem se s touto úvahou nesetkal.

1.3.2 Teorie proceptů

Hejného teorie popisuje jednotlivé procesy, které se dějí s poznatky o různých matematických pojmech v rámci znalostí konkrétního žáka. Tyto procesy člení do jednotlivých fází a přechodů mezi nimi. Tall a Gray (2001) nahlížejí na matematické pojmy z pohledu symbolů, kterými je popisujeme. U těchto symbolů přitom rozlišují mezi dvěma hledisky. Jedná se o proces (*process*) a koncept (*concept*). Na symbol $f(x)$ můžeme tedy nahlížet z hlediska procesuálního, pak se jedná o přiřazení hodnoty z oboru hodnot hodnotě z definičního oboru. Z hlediska konceptuálního o objekt, se kterým můžeme provádět různé operace. Termínem *procept* potom shrnují zastoupení obou těchto pohledů a vyjadřují jím důležitou skutečnost, že při procesu poznávání jsou u žáka v různém poměru zastoupeny oba tyto pohledy.

1.3.3 Další teorie

E. Dubinsky formuluje APOS teorii na podobném základě. Ta je založena na hypotéze, že žák pracuje s matematickou problémovou situací pomocí konstrukcí mentálních akcí (*actions*), procesů (*processes*) a objektů (*objects*) a ty organizuje do schémat (*schemas*), která slouží k tomu „aby situaci daly smysl a žáci vyřešili dané problémy“[7](Dubinsky, 2001).

Ze stejných principů vycházela A. Sfard při formulaci teorie reifikace. V (Sfard, Linchevski, 1994) popisuje základní myšlenku své teorie, že žák nejprve pracuje s matematickými pojmy na operační úrovni (*operational*, *process oriented*) a až později se u něj rozvíjí pohled na pojem jako na objekt (*object*, *structural conception*). Proces přechodu mezi těmito dvěma stádii označuje jako reifikaci (*reification*). V kontextu teorie funkcí tuto teorii aplikoval ve svém výzkumu D. Slavit (1997).

1.3.4 Shrnutí

Jednotlivé teorie se mohou vzájemně doplňovat, ale i rozcházet. K tomu dochází zejména při vymezování užitých pojmů, které se často opakují sice s podobným, ale ne vždy úplně shodným významem. Např. procesy popsané v teorii proceptů jsou chápány šířeji než procesy APOS teorie. Z tohoto důvodu je potřeba vzhledem k terminologii pracovat maximálně obezřetně.

[7] „to make sense of the situations and solve the problems“

Za důležitý ovšem považuji popis samotného průběhu utváření matematických poznatků[8] žáka, který je popsán v každé z teorií trochu jinak, což je hlavním důvodem opravňujícím jejich použití v této práci. Každý z jevů pozorovaných ve výzkumné části práce má trochu jiný charakter a omezení se na jednu konkrétní teorii se ukázalo jako nepřiměřené zúžení teoretického rámce.

Cílem popsaných teorií je na jedné straně interpretace přímo nepoznatelných procesů probíhajících uvnitř žákova vědomí, na straně druhé potom srozumitelné popsání této interpretace sloužící k předání teorie ostatním.

Z mé dosavadní zkušenosti jsou tyto teorie nástrojem pro mnoho různých činností. Slouží například jako nástroje pro výzkum, jako vodítko pro učitele, jako základ k budování dalších teorií s užším rozsahem a větší korelací s danou problematikou a také jako motivační nástroj pro restrukturaci našeho pohledu na danou problematiku.

1.4 Vybrané výzkumy se vztahem k tématu funkcí

1.4.1 A. Kopáčková: Pojmotvorný proces konceptu funkce

Jedná se o disertační práci, ve které je kompletně popsán fylogenetický i ontogenetický vývoj pojmu resp. poznatku funkce a jejíž výzkumná část zahrnuje celou řadu problémů, se kterými se žáci v kontextu funkcí setkávají. Na základě několika výzkumů Kopáčková zjistila některé fenomény, se kterými jsem se poté v rámci svého výzkumu také setkal.

Dále uvedu jen ty výsledky Kopáčkové, které jsou relevantní pro mou práci.

Soustava souřadnic

Kopáčková pozoruje, že „důraz na souřadný systém, který není dostatečně propojen na hlavní objekt, tj. na graf, ukazuje na formální vnímání tohoto nástroje.“ Upozorňuje, že „idea kartézských souřadnic má nedostatečnou propedeutiku. Žáci necítí potřebu stručné a vysoce sofistikované terminologie a symboliky, a proto ji nepřijímají za vlastní.“ Důležité je také následující pozorování uchovávání systému souřadnic v poznatkové struktuře žáků. „Souřadný systém je uchopován vizuálně, nikoliv kontextově a není chápán jako nástroj pro popis grafu.“

U pojmu kartézské soustavy souřadnic (KSS) je podle Kopáčkové potřeba více klást důraz na propedeutiku a z hlediska teorie proceptů na procesy (tedy konstrukci KSS, princip

[8] V rámci této práce je jím tedy žákova cesta od matematického pojmu k vlastnímu poznatku.

vynášení bodů, ...) spíše než na koncepty (KSS jako statický objekt) (s. 74, 75).

Grafické reprezentace

U žáků ZŠ je zakreslená křivka vnímána jako „celek, výtvarné dílo, nikoliv jako množina uspořádaných dvojic bodů“, přičemž později, na SŠ mívají žáci problémy při přechodu od dosazování ke grafu funkce resp. od vynesení bodů ke spojité křivce.

Při rozhodování, zda je nějaký objekt funkcí nebo ne, se ukázalo, že žáci přiřazují funkcím různé vlastnosti, které jsou z hlediska definice možnou, ale ne nutnou podmínkou existence. Typicky se jedná o požadavek spojitosti a „pravidelnosti“ křivky, z opačného pohledu potom za „(ne)funkce“ žáci považují např. grafy konstantních funkcí (s. 103).

Žáci také často uvádějí jako funkce jejich typické představitele[9]. Kopáčková identifikuje jako prototypický příklad funkce funkci lineární, případně funkci „speciální“ lineární (např. $y = x$, $y = -x$).

Spojitost

Důležité je pozorování, že „žáci při konstrukci grafu nerozlišují mezi diskrétním a spojitým definičním oborem“ při použití reprezentace funkce grafem (s. 85). Žáci kreslí spojité grafy i v případě, že definičním oborem jsou např. počty knih a oborem hodnot jejich celková cena. Kopáčková poukazuje na to, že důvodem může být i způsob školního výkladu této látky.

Slovní popis

U některých žáků Kopáčková zjistila, že při slovním popisu funkcí a různých činností z oblasti teorie funkcí „použití synonym signifikuje hlubší vhled“ do problematiky. Je také podle Kopáčkové známkou toho, že „žák si vytváří svou vlastní *personal concept definition*, na jejímž základě vzniká *concept image* a která je předpokladem existence univerzálního modelu pojmu“ (s. 106).

[9] Jedná se o prototypy funkcí, tedy často pozorované typické repezentanty tohoto pojmu u žáků.

1.4.2 E. Iliada a S. Panayotis: How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept

E. Iliada a S. Panayotis (2006) provedli výzkum mezi studenty druhého ročníku Department of Education at the University of Cyprus zaměřený na různé způsoby reprezentace funkcí studenty a jejich vliv na komplexní poznatky o funkcích.

Analýzy výsledků ukazují, že studenti nejčastěji nahlížejí funkce jako vztahy „one-to-one“, tedy k jedné hodnotě je přiřazena právě jedna jiná hodnota a není příliš rozlišován definiční obor a obor hodnot. Dále poukazují na často se objevující podmínku (podobně jako Kopáčková), že graf funkce musí být spojitý, kterou studenti považují za nutnou.

Značení funkcí

Pro tuto práci jsou důležité také výroky studentů k otázce, zda a proč mohou být různá symbolická vyjádření (*symbolic expressions*) předpisem funkce (např. $x^2 + y^2 = 25$). Výroky „funkce musí obsahovat dvě proměnné nebo neznámé“[10], „x (nebo y) není obsaženo ve vyjádření, takže funkce nemůže být definována“[11] nebo „funkce je rovnice“[12] jsou známkou toho, že studenti často ztotožňují funkce s rovnicemi, požadují (dvě) proměnné, které by mohli porovnávat.

1.4.3 E. Dubinsky, R. T. Wilson: High school students' understanding of the function concept

Dubinsky a Wilson (2013) si ve svém výzkumu pokládají otázku, jakých znalostí a schopností z oblasti teorie funkcí mohou dosáhnout žáci z nižších socioekonomických poměrů během prvních tří let docházky na SŠ. Analyzují rozhovory se žáky na základě APOS teorie a pozorují především problematiku rozeznávání, co je a co není funkcí, a chápání funkcí z hlediska vztahu definičního oboru a oboru hodnot. Zde, stejně jako v (Iliada, 2006) a (Kopáčková, 2003), ukazují různé chybné podmínky, kterými žáci podmiňují označení vztahu nebo závislosti za funkci.

[10] „a function must essentially contain two variables or unknowns“
[11] „x (or y) do not appear in the expression, therefore a function cannot be defined“
[12] „a function is an equation“

Reprezentace funkcí

Z jejich závěrů je pro mou práci důležité zejména srovnání zastoupení jednotlivých reprezentací funkcí žáky SŠ. Ukazují, že žáky nejčastěji volenou reprezentací byly po řadě „šipkové diagramy" (*arrow diagrams*), přímé grafy[13] (*directed graphs*), uspořádané dvojice (*ordered pairs*) a až na posledním místě bylo použití kartézské soustavy souřadnic. V kontrastu s tím se jeví jako zajímavé, že nejúspěšnější byli žáci, kteří použili kartézskou soustavu, tabulky nebo vyjádření grafem.

1.4.4 M. Sajka: A secondary school student's understanding of the concept of function – A case study

Značení funkcí

M. Sajka (2003) se zabývá podobným tématem – značením funkcí z pohledu teorie proceptů. Na komentovaných ukázkách z rozhovoru s šestnáctiletou žákyní, na jehož počátku byla úloha „Udej příklad funkce f, pro kterou je pro všechna reálná čísla x a y z definičního oboru f splněna rovnost: $f(x+y) = f(x)+f(y)$."[14], ukazuje, jakým způsobem žáci přistupují k použitému značení a jak se procept funkce na základě symbolu $f(x)$ vyvíjí.

Identifikuje zde tři základní problémy ve vztahu ke značení. Nejednoznačnosti ve vnitřním pochopení značení objevené pomocí pokládání série upřesňujících otázek, které žákyni nutily přehodnotit její protichůdné interpretace, značně zúžené chápání některých matematických symbolů a svérázný postoj k položeným matematickým otázkám.

Ukázalo se, že žákyně chápala tento symbol nejprve jako pojmenování funkce, přičemž při záměně x za jiný znak se pro ni pouze změnilo pojmenování dané funkce. Sajka popisuje také podobné mylné interpretace symbolů žáky a shledává, že často nemají problém s proceptem funkce, ale právě se symbolikou užívanou k jejímu značení.

[13] *Directed graphs* jsou spíše grafy, jak je známe z teorie grafů, tedy prvky propojené vazbami

[14] „Give an example of a function f such that for any real numbers x, y in the domain of f the following equation holds: $f(x+y) = f(x) + f(y)$."

1.5 Funkce v českých kurikulárních dokumentech

1.5.1 Rámcové vzdělávací programy

Rámcové vzdělávací programy popisují mimo jiné matematický obsah, který by si žáci v rámci teorie funkcí měli osvojit. Na základní škole se jedná spíše o propedeutiku pojmu funkce a některé typické příklady funkcí (přímá a nepřímá úměrnost, lineární a případně kvadratická funkce). V rámci RVP pro SŠ oboru veřejná správa[15], na jehož základě jsou koncipovány všechny tři obory vyučované na škole, na které probíhal výzkum (SOŠ pro administrativu EU), je množina funkcí v podstatě redukována pouze na funkce elementární. Zkratkou SŠ je proto dále chápána SŠ oboru veřejná správa, pokud není řečeno jinak.

Spojitost

Z důvodu zastoupení problematiky spojitosti (viz kapitola 3) jsem se pokusil najít, v jakých bodech je zde zastoupena alespoň její propedeutika, neboť spojitost je pojem, s nímž se žáci seznamují často až na VŠ. V RVP je uvedeno, že žák na ZŠ „orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času“ a později pracuje s funkcemi jako matematickým pojmem. Z důvodu zastoupení výhradně elementárních (tedy spojitých) funkcí je otázkou, zda je možno je pouvažovat za propedeutiku, když se ani na ZŠ ani na SŠ žáci nesetkají s funkcí nespojitou.

Reprezentace funkcí

Žák nejprve „popisuje jednoduché závislosti z praktického života“, tedy k vyjádření závislostí používá např. slovní popis, později „doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel“ – přechází k různým reprezentacím závislostí. Na SŠ pracuje již s matematickým pojmem funkce a jeho adekvátní reprezentací, tedy „vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem“ a „matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů“. Z tohoto pohledu jsou v RVP zastoupeny základní reprezentace. Nicméně ve výše popsaném článku (Dubinsky, Wilson, 2013) můžeme sledovat, jaké další reprezentace funkcí by mohly být v RVP zahrnuty (šipkové diagramy, přímé grafy).

[15] RVP pro gymnázia je z hlediska obsahu teorie funkcí s tímto programem v podstatě totožný.

Grafické reprezentace

Se základními typy grafů se žák seznamuje již na ZŠ také v rámci tématu *Závislosti, vztahy a práce s daty*, později žák SŠ „rozlišuje jednotlivé druhy funkcí, načrtne jejich grafy a určí jejich vlastnosti“. S grafickým vyjádřením algebraických rovností žáci pracují také v analytické geometrii, i když to v RVP není přímo explicitně vyjádřeno.

Dosazování

Na ZŠ žáci dosazují do výrazů za proměnné a zjišťují hodnoty z různých důvodů (např. aby zjistili, zda pro dané hodnoty má výraz smysl). Po probrání tématu *Číslo a proměnná* žák podle RVP „matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu“. Z hlediska dosazování jsou důležité i výše uvedené požadavky v části grafy, neboť pro kreslení grafů je potřeba si některé hodnoty funkce vypočítat.

Ostatní

Dále uvádím požadavky na žáka, které nebylo vhodné kategorizovat podle uvedených témat, ale mají vztah k této práci. Žák

- řeší lineární a kvadratické rovnice a jejich, soustavy, lineární a kvadratické nerovnice,
- třídí úpravy rovnic na ekvivalentní a neekvivalentní,
- převádí jednoduché reálné situace do matematických struktur, pracuje s matematickým modelem a výsledek vyhodnotí vzhledem k realitě,
- určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti.

1.5.2 Školní vzdělávací program SOŠ pro administrativu EU

Všechny výše zmíněné požadavky na žáky jsou v rámci školního vzdělávacího programu SOŠ rozpracovány podrobněji. V tabulce 1.1 uvádím vybrané požadavky na žáka a odpovídající učivo, jež různými způsoby souvisí se mnou zkoumanými otázkami.

Žák:	Učivo:
	Algebraické výrazy
– určuje hodnotu výrazu – určuje nulový bod výrazu – určuje definiční obor lomeného výrazu	– algebraický výraz – mnohočleny – lomené výrazy – výrazy s mocninami a domocninami
	Rovnice a nerovnice
– řeší početně i graficky soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých – stanovuje definiční obor rovnice – využívá k řešení slovní úlohy grafu nepřímé úměry	– lineární rovnice a jejich soustavy – rovnice s neznámou ve jmenovateli – kvadratické rovnice
	Funkce
– užívá různá zadání funkce, zvládá pojmy definiční obor, obor hodnot, hodnota funkce v bodě, graf funkce – sestrojí graf funkce $y = f(x)$ – řeší reálné problémy pomocí lineární funkce a nepřímé úměrnosti – určí jednotlivé funkce, načrtne jejich graf, stanoví jejich definiční obor, obor hodnot, intervaly monotonie a obor v němž nabývá funkce extrému	– základní poznatky o funkcích – lineární funkce, nepřímá úměrnost – kvadratická funkce – exponenciální a logaritmická funkce, jednoduché rovnice
	Goniometrie a trigonometrie
– znázorňuje goniometrické funkce v oboru reálných čísel a zná jejich vlastnosti	– funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens – základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Pravděpodobnost a statistika	
– prezentuje graficky soubory dat, čte a interpretuje tabulky, diagramy a grafy, diferencuje rozdíly v zobrazení obdobných souborů vzhledem k jeho odlišným charakteristikám	
Analytická geometrie lineárních útvarů	
– zavádí a používá soustavu souřadnic na přímce, v rovině a prostoru	– soustavy souřadnic

Tabulka 1.1: Vybrané požadavky na žáka v kontextu funkcí z ŠVP školy SOŠ pro administrativu EU.

Kapitola 2

Vlastní výzkum

Výzkum byl realizován na SOŠ pro administrativu Evropské unie v Horních Počernicích v průběhu ledna 2013. Testu se zúčastnilo 250 žáků, kteří vyplnili 323 testů.

V rámci testování jsem se snažil využít veškeré možnosti, které jsem měl k dispozici, z tohoto důvodu jsem zadal různé testy i v prvním ročníku, ve druhém a čtvrtém ročníku jsem zadal žákům druhé verze. V rámci matematického semináře jsem s budoucími maturanty z matematiky řešil testy původně cílené na třetí ročník. Většina z těchto testů však nebyla z hlediska zkoumaných jevů příliš vypovídající a takto sebraná data byla značně nekonzistentní a problematicky analyzovatelná. Z těchto důvodů jsem 116 testů z celkového počtu z práce vyřadil. Nakonec jsem tedy v práci analyzoval celkem 207 testů.

2.1 Výzkumné otázky

Ústředním tématem výzkumné části této práce je problematika užívání poznatků a metod spojených s konceptem funkce u žáků středních škol. Teoretický původ, ze kterého toto téma vychází, nejlépe vystihují výzkumné otázky. Považuji za důležité, než přikročím k jejich formulaci, je částečně klasifikovat. Jako zásadní lze označit otázky primární, které jsem formuloval na základě vybraných prací a zkušeností mých kolegů i svých vlastních. Sekundárními otázkami označuji takové, které nejsou pro práci stěžejní, ale nějakým způsobem konkretizují otázky teoretické, poukazují na známé jevy ze školské praxe, případně jsou ve vztahu s dalšími pracemi zabývajícími se oblastí matematických funkcí.

U některých otázek jsou zároveň uvedeny a popsány základní pojmy bezprostředně s otázkou související a sloužící jako možný odkaz v dalším textu. K tomuto postupu mne vede snaha řídit se při popisu analýzy testů jednotným schématem.

2.1.1 Primární otázky

1. Do jaké míry dokáží žáci používat poznatky, které získali při výuce funkcí, v jiných kontextech?

2. Do jaké míry žáci ovládají různé reprezentace funkcí a závislostí a která z nich je pro ně nejpřijatelnější?

   - Za reprezentaci funkce označuji použití matematických symbolů, slov nebo náčrtků žáky k vyjádření informací o funkčních hodnotách v závislosti na hodnotách z definičního oboru. V některých kontextech dále nahrazuji pojem funkce obecnějším pojmem závislost pro odlišení od formálních matematických funkcí odpovídajících definici.

3. Jaké mají žáci prototypické příklady funkcí?

   - Často se vyskytujícím prototypickým příkladem je v následujícím výzkumu lineární funkce. Slovní spojení „Žáci linearizovali graf funkce“ popisuje situaci, kdy žáci nějakým způsobem upravili anebo vynechali některé své výsledky kvůli snaze použít lineárního grafu funkce.

2.1.2 Sekundární otázky

4. Vnímají žáci rozdíl mezi přímou resp. nepřímou úměrností a rostoucí resp. klesající funkcí?

5. Vnímají žáci pojem definiční obor formálně či neformálně?

6. Používají žáci značení funkcí symbolem f formálně?

   - Značení funkcí (závislostí) reprezentuje známou symboliku $f(x)$ a její analogie ať už použité autorem nebo žáky.

7. Dochází u žáků k restrukturaci poznatků při ztotožnění intuitivních prekonceptů s vyučovanými pojmy?

   - Prekoncept je zde použit v souladu s terminologií popsanou v (Bertrand, 1998) a označuje poznatky, „které si žák do školy přináší a které získal dříve“. Jedná se tedy o jakési intuitivní poznatky, které si žáci vytváří v rámci svého neformálního vzdělávacího procesu.

2.2 Výzkumné nástroje

Výzkumnými nástroji jsou jednotlivé úkoly[1] sdružené do testů. Při konstrukci těchto úkolů jsem vycházel z různých témat matematiky (pravděpodobnost, analytická geometrie, funkce)[2] a školního vzdělávacího programu cílové školy. Základní úkoly, které takto vznikly, jsem posléze doplnil o další, méně rozsáhlé, u nichž jsem se snažil, aby u žáků vytvářely alespoň trochu podnětný prostor k zamyšlení. Toho bylo zapotřebí zejména proto, že se jednalo o úkoly, se kterými se žáci v běžných hodinách nesetkávají.

Při závěrečné formulaci úkolů i následném testování žáků jsem byl veden principy vycházejícími z výzkumných otázek a svých vlastních zkušeností.

- Úlohy nejsou formulovány formálně a matematicky přesně, a to ze dvou důvodů. Na prvním místě pro mne byla srozumitelnost textu pro co nejvíce žáků[3]. Dále pak snaha o to, aby žáci k testu nepřistupovali jako k písemné práci.

- Úlohy jsem formuloval tematicky co nejblíže právě probírané látce. Cílem bylo navodit u studentů dojem, že řeší úlohy, na které jsou nyní zvyklí. Také jsem se tím snažil redukovat vysvětlování pojmů a nejasností na minimum a předejít případným výmluvám vedoucím ke snížené aktivitě žáků.

- Během zadávání jsem se vyhýbal pojmům z teorie funkcí, několikrát se však stalo, že se žáci zeptali přímo, zda je „to či ono funkcí“ nebo zda mají napsat „jaké vlastnosti tato funkce má“. V těchto situacích jsem žákům sděloval informace, které požadovali, ale snažil jsem se je formulovat bez použití konkrétních matematických pojmů.

- Žáci byli nabádáni k zaznamenávání veškerých svých myšlenek jakýmkoli způsobem. Často se objevovaly různé náčrtky (zejména v testech 2 a 3) a slovní popisy bez užití matematických symbolů.

Samotný výzkum byl realizován ve větším než původně zamýšleném měřítku a také o nějaký čas dříve, než se předpokládalo, a to z důvodu neočekávané možnosti autora zastoupit některé vyučující v jejich hodinách matematiky bez nutnosti probírat určenou látku. V tu dobu byly

[1] Záměrně v práci používám termín úkol. Na rozdíl od úlohy není požadováno řešení (výsledek), pouze je navrhnuta činnost, kterou má žák provádět.

[2] V tomto směru by bylo možné s tvorbou úkolů pokračovat – např. pro témata intervalů, výrazů, statistiky, planimetrie nebo stereometrie.

[3] Přesto se ukázalo, že úkoly byly pro některé studenty nesrozumitelné. Bohužel není možné rozhodnout, zda to bylo způsobeno spíše těžkostmi při porozumění textu nebo nedostatečnou motivací pro práci.

již v rámci přípravy testování zpracovány některé dílčí teoretické části a stanoveny výzkumné otázky, nicméně v ne úplně konečné formě. V důsledku toho se zamýšlený předvýzkum stal součástí samotného výzkumu a reformulace zadání úkolů probíhala v průběhu testování. Jednalo se především o grafické a stylistické úpravy, které ale často měly nezanedbatelný vliv na úspěšnost řešení. Všechny takovéto případy jsou vždy v textu náležitě označeny.

2.3 Výzkumná metoda

Volba výzkumné metody podléhala značným omezením daným jak možnostmi prostředí, ve kterém byl daný výzkum prováděn, tak omezeními plynoucími z rozsahu diplomové práce. Jako výzkumnou metodu jsem tedy nakonec zvolil matematický test, jehož úkoly nejsou zaměřeny na konkrétní postupy ani na uvedení řešení. Z hlediska obecných pedagogických výzkumných metod je matematický test svým charakterem nejbližší metodě dotazníku (Gavora, 1996).

K analýze dat jsem přistupoval jak z kvantitativního, tak z kvalitativního hlediska. Pro kvalitativní analýzu jsem použil technik zakotvené teorie (Strauss, 1999). Jednotlivé testy nebyly tvořeny na základě jedné konkrétní teorie, spíše jsem se po studiu literatury rozhodl vytvořit podnětné úkoly, které jsem předložil žákům, a jejich následnou analýzou jsem sledoval různé jevy a aspekty, které se v pracích objevovaly.

Analýzu testů by bylo možné provést mnohými sofistikovanými metodami[4], to by však vzhledem k obsáhlosti jednotlivých testů přesahovalo rámec této práce. V rámci testů jsem zaznamenával jednotlivé jevy, z nichž některé jsem nakonec vůbec v práci nevyužil, některé dávaly poměrně jasné odpovědi na vybrané sekundární otázky a některé (a ty považuji ve své práci za zásadní) se začaly po analýze všech typů testů propojovat do struktur, které dávaly smysl i napříč jednotlivými matematickými tématy, a to nejen svým výskytem, ale i jejich interpretacemi a pozorovanými důsledky. Takových aspektů, které sdružují nejzajímavější pozorování napříč testy, jsem identifikoval 9:

- Reprezentace funkcí (závislostí)
- Soustava souřadnic
- Grafické znázornění
- Dosazování

[4] Např. pomocí atomární analýzy M. Hejného.

- Značení funcí
- Slovní popis
- Charakteristiky a vlastnosti funkcí
- Souvislost definičního oboru[5]
- Spojitost

2.4 Faktory ovlivňující výsledky testů

Každý výzkum provází řada faktorů, které mají negativní vliv na výsledky. Z principů, jakými byl test konstruován, považuji za vhodné uvést přehled těch faktorů, které jsou mi známy a jež mohly mít vliv na průběh testování.

- Žáci vyplňovali testy v běžné hodině, nebyli rozděleni do skupin. Proto v některých případech mohlo dojít k opisování.
- V důsledku toho, že se jednalo o suplované hodiny, dávali někteří žáci najevo svou neochotu pracovat a vyrušovali více, než je u nich obvyklé v běžných hodinách.
- Test jsem prezentoval jako povinný, nikoli ale hodnocený, někteří žáci jej proto nebrali příliš vážně a nedosahovali tak výsledků, kterých by byli schopni dosáhnout s větší motivací.

[5] V textu rozlišuji mezi pojmy souvislý definiční obor a spojitá funkce (spojitá křivka). Je to dáno rozdílem mezi souvislostí jako vlastností množiny a spojitostí jako vlastností funkce.

2.5 Test 1

Komentované zadání testu

1. *Jak se mění $f(x)$, dosazujeme-li za x různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.*

   - $f(x) = -x$
   - $f(x) = \frac{1}{x}$

     Domníval jsem se, že žáci první dvě uvedené funkce důvěrně znají, a proto nakreslí buď přímo jejich graf anebo si vynesou některé body a ty propojí křivkou. Na základě výsledků Kopáčkové (2003, s. 85) jsem neočekával, že by některý z žáků kreslil pouze diskrétní graf, nicméně jsem očekával alespoň naznačení, že funkčními hodnotami jsou pro celá čísla konkrétní body.

     Na základě dosazení hodnot jsem také očekával použití různých reprezentací, nejvíce grafických.

   - $f(x) = \frac{1}{x} - x$
   - $f(x) = \frac{1}{1-x}$

     Druhé dvě funkce nebyly pro žáky příliš známé, proto jsem předpokládal použití postupu dosazení $\rightarrow$ graf, případně použití jiné reprezentace a opět vyznačení diskrétních hodnot.

2. *Mají předchozí závislosti něco společného?*

   Od otázky jsem si sliboval, že žáci naleznou některé charakteristiky a vlastnosti, které se vyskytují u více funkcí. Např. omezené jsou pro celá čísla funkce $f(x) = \frac{1}{x} - x$ a $f(x) = \frac{1}{x}$, klesající je pouze $f(x) = -x$, grafem všech vyjma první je pro reálná čísla hyperbola a další.

3. *Které z uvedených závislostí reprezentují přímou resp. nepřímou úměrnost?*

   Přímou úměrnost nereprezentuje žádná funkce, nepřímou úměrnost funkce $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. *Jakých maximálních a minimálních hodnot tyto mohou závislosti pro daná x nabývat?*

   Zde jsem chtěl, aby se žáci zamysleli především nad spojením „dosazujeme-li za x různá celá čísla“. V případě funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je maximum v bodě 1 a minimum v bodě -1 a pro $f(x) = \frac{1}{1-x}$ je maximum v bodě 0 a minimum v bodě 2.

2.5.1 Charakteristika testu

První z testů (Přílohy – 3.1, 3.2) byl sestaven pro žáky druhého ročníku, zadán 1 – 3 hodiny matematiky po napsání pololetní písemné práce na téma funkce ve třech třídách a vyplnilo jej 78 žáků. Test byl původně koncipován jako doplňující část výzkumu, zaměřeného původně na využívání funkcí v jiných tématech, nicméně častý výskyt typických příkladů funkcí (otázka 3) ukázal, že si zaslouží svou pozornost.

První úkol byl zaměřen mimo jiné na značení funkcí. Toto zaměření mě vedlo k formulaci dvou různých verzí testů (první vyplnilo 40, druhou 38 žáků), v první je závislost značena dle standardů dnešní matematiky, v druhém písmenem B. Tuto verzi jsem považoval za pro žáky obtížnou, nicméně kompenzovanou okolnostmi zadání, neboť žáci byli v posledním půlroce v kontaktu s funkcemi téměř v každé hodině matematiky. Polovině třídy byla rozdána první a polovině třídy druhá verze. Dále bych chtěl upozornit na požadavek na dosazování celých čísel do závislostí. Tato formulace byla motivována snahou zjistit, jaký postoj zaujmou žáci k definičním oborům daných funkcí (ot. 5).

Druhý úkol měl žáky vést ke zkoumání uvedených funkcí z hlediska jejich charakteristik a vlastností. Mým cílem bylo zjistit, zda jsou některé z těchto charakteristik a vlastností žáky preferovány a případné odpovědi formulovány matematickým či běžným jazykem (ot. 1).

Pomocí třetího úkolu jsem se snažil zjistit míru ztotožňování pojmů rostoucí, resp. klesající funkce a přímé, resp. nepřímé úměrnosti (ot. 4).

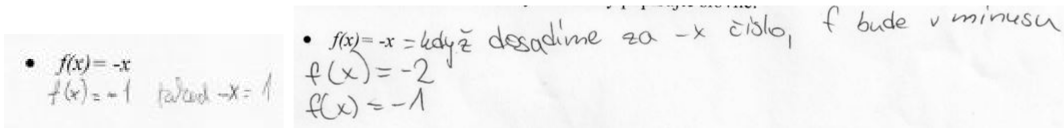
Závěrečný úkol byl formulován tak, abych mohl na základě řešení žáků určit jejich vztah k souvislosti resp. diskrétnosti definičního oboru (ot. 5).

2.5.2 Analýza úkolu 1

První úkol tohoto testu byl jedním z nejobsáhlejších v rámci celého testování. Vzhledem k úmyslné nejednoznačnosti zadání byl přístup žáků k úkolu velmi rozmanitý.

Dosazování

Dosazování do vztahů bylo nejčastěji použitou technikou k řešení úkolu. U žáků se ale velmi zřetelně projevilo, že nejsou s tímto postupem dobře obeznámeni a neumí ho používat (obr. 2.1). Tabulka 2.1 ukazuje, jakým způsobem žáci použili dosazení do vztahů. Jednotlivé kategorie jsou disjunktní, seřazené podle toho, jak vhodné bylo jejich použití. Dosazení muselo být v testu explicitně vyjádřeno, nestačilo vynesení hodnot do grafu. Konkrétní test byl vždy zařazen do nejvyšší možné kategorie.



Obrázek 2.1: Dvě chybná dosazení do vztahu.

typ	$f(x)$ (celkem 40 testů)	B(A) (celkem 38 testů)
jedna hodnota	5	7
dvě hodnoty	4	4
více přirozených	12	3
více celých	6	5
celkem dosazení	27	19

Tabulka 2.1: Různé varianty dosazování při rozdílném značení.

Z tabulky je možno vyvodit některé závěry:

- Žáci pracující s obvyklým značením úspěšněji dosazovali do vztahů.
- Pouze v jedenácti případech (14 %) žáci dosadili do vztahů i záporná čísla.
- Celkem 34 žáků ze 78 (44 %) nedosadilo nebo špatně dosadilo do vztahu. Důvodů bylo více, nejčastějším byla snaha popsat situaci jinak (viz grafické reprezentace, slovní popis), nepochopení zadání (viz značení závislostí), chybné dosazení do vztahu nebo chybný výklad značení vztahu.

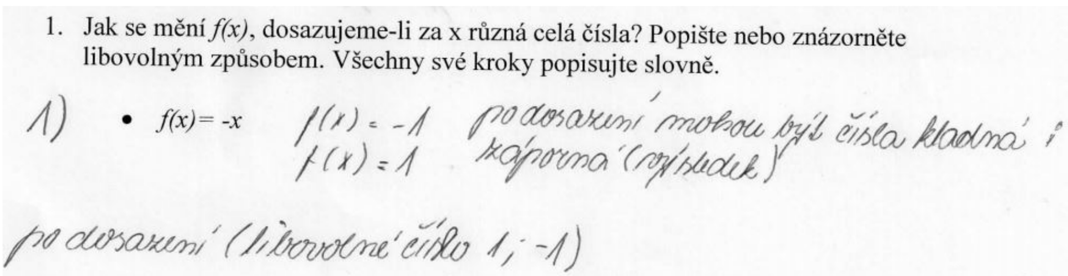
V souvislosti s problematikou dosazování se objevoval další fenomén – dosazování malých přirozených čísel. V naprosté většině případů byla dosazena čísla 1, 2, 3 a naopak, pouze v několika výjimečných případech žáci dosadili 0. Tyto výsledky mi umožňují označit čísla 1, 2, 3 jako prototypy čísel u žáků, zatímco 0 jako prototyp čísla pro žáky nebyla identifikována.

Reprezentace funkcí

Nejčastějšími reprezentacemi, pomocí kterých žáci funkce popisovali, byly grafy, slovní popisy a vyčíslování jednotlivých hodnot. V několika případech žáci použili tabulku nebo uvedli pouze vlastnosti nebo charakteristiky funkcí.

Slovní popis

Za test obsahující slovní popis řešení byl považován takový, který obsahoval alespoň u jednoho funkčního vztahu samostatný výrok komentující symbolické nebo grafické vyjádření žáka nebo výrok, který by z tohoto popisu vyvozoval nějaké závěry (i chybné). Za slovní popis nebylo uznáváno jmenování vlastností dané funkce nebo určování jejích charakteristik. Příklad slovního popisu je uveden na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Ukázka vyvození závěru ze symbolického popisu (dosazení do vztahu).

Žáci, kteří popisovali funkce svými vlastními slovy, se často dopouštěli následujících nepřesností.

- Popsali situaci špatně, ale výpočty i grafické znázornění ukazují na správnost myšlenky. Např. „když dosadíme za $-x$ číslo, f bude v mínusu“ nebo „čím větší dosadíme x, tím větší nám vyjde $-x$.“
- Formulovali triviální výroky: „Čím větší číslo dosadíme, tím větší bude neznámá x.“
- Formulovali výroky, které popisovaly situaci nedostatečně: „Když si dosadím 1, tak $B = -1$ a když -1, tak $B = 1$.“

Takové formulace svědčí o tom, že tito žáci z hlediska reprezentace funkcí nepodléhají formalismu, tedy nepopisují funkce bez porozumění, ale na druhou stranu mají problémy s přesným vyjadřováním. Zde se nabízí otázka, zda nějakým způsobem souvisí formální porozumění matematickým pojmům se schopností vyjadřování.

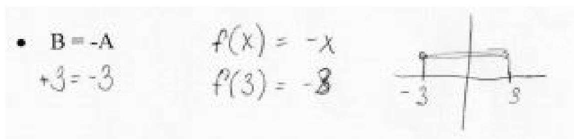
Tabulky

Tabulka byla pro popis situace používána velmi zřídka a princip jejího užití kopíruje princip dosazování, proto tomuto popisnému nástroji nebude v dalším textu věnována přílišná pozornost.

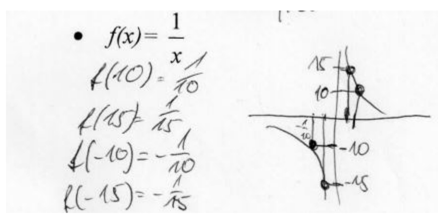
Grafické reprezentace

Grafy byly oproti očekávání užívány žáky v mnoha případech chybně. A to i díky takovým chybám, které by se u žáků 2. ročníku SŠ daly označit za velmi překvapivé.

- Nepříliš často se vyskytujícími nedostatky žáků byla omezená schopnost nakreslit kartézskou soustavu souřadnic a nepochopení základní myšlenky vynášení bodů (obr. 2.3). Ty se projevovaly především záměnou os, kdy žáci vynášeli dosazené hodnoty na svislou osu a funkční hodnoty na osu vodorovnou (obr. 2.4). Z principiálního hlediska nelze tuto záměnu považovat za chybnou, nicméně v tomto kontextu je zřejmé, že žák vynášení bodů do grafu nerozumí.

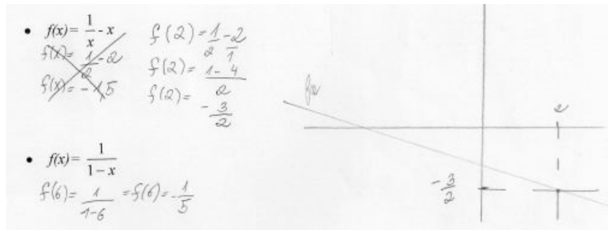


Obrázek 2.3: Vynášení obou hodnot na jednu osu grafu.

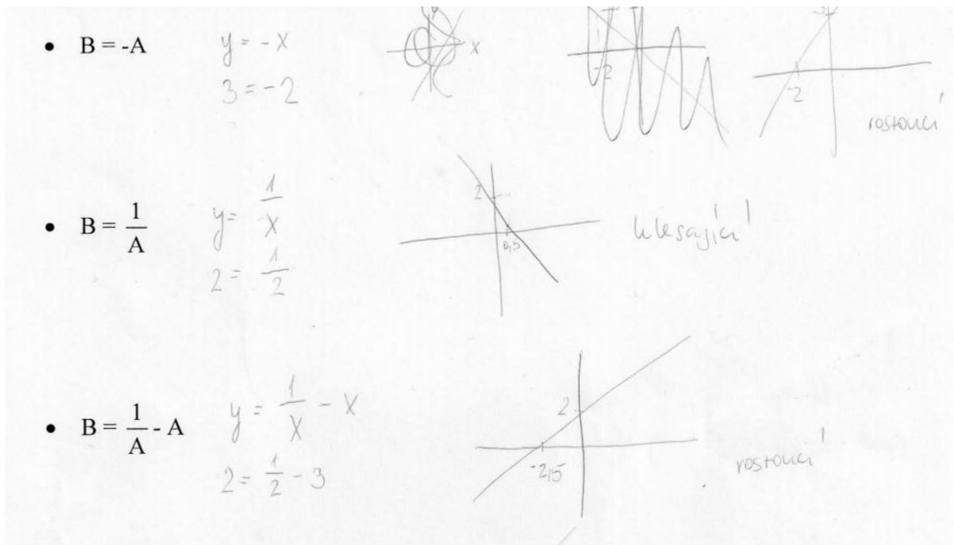


Obrázek 2.4: Vynášení bodů definičního oboru na svislou osu a funkčních hodnot na vodorovnou.

- Žáci vynesli malý počet bodů, na jejichž základě nakreslili nesprávný graf funkce. Tento důvod byl zdaleka nejčastější a objevil se ve větší či menší míře u velkého množství žáků. Přitom byly z vynášených bodů doplňovány nejčastěji grafy lineárních nebo lineárních lomených funkcí. Tento fenomén zasluhuje několik konkrétních příkladů s popisem:
  - Žáci nakreslili graf intuitivně, podle stávajících poznatků.
  - Žáci nakreslili graf na základě jednoho vyneseného bodu. Tento případ nastával pouze výjimečně a jednalo se zpravidla o vedení náhodné přímky vyneseným bodem (obr. 2.5).
  - Žáci nakreslili graf na základě dvou vynesených bodů. Žáci kreslili buď grafy funkce lineární (obr. 2.6), lineární lomené, pouze výjimečně jiné (Přílohy – obr. 3.3).



Obrázek 2.5: Žák nakreslil graf funkce na základě vynesení jednoho bodu.



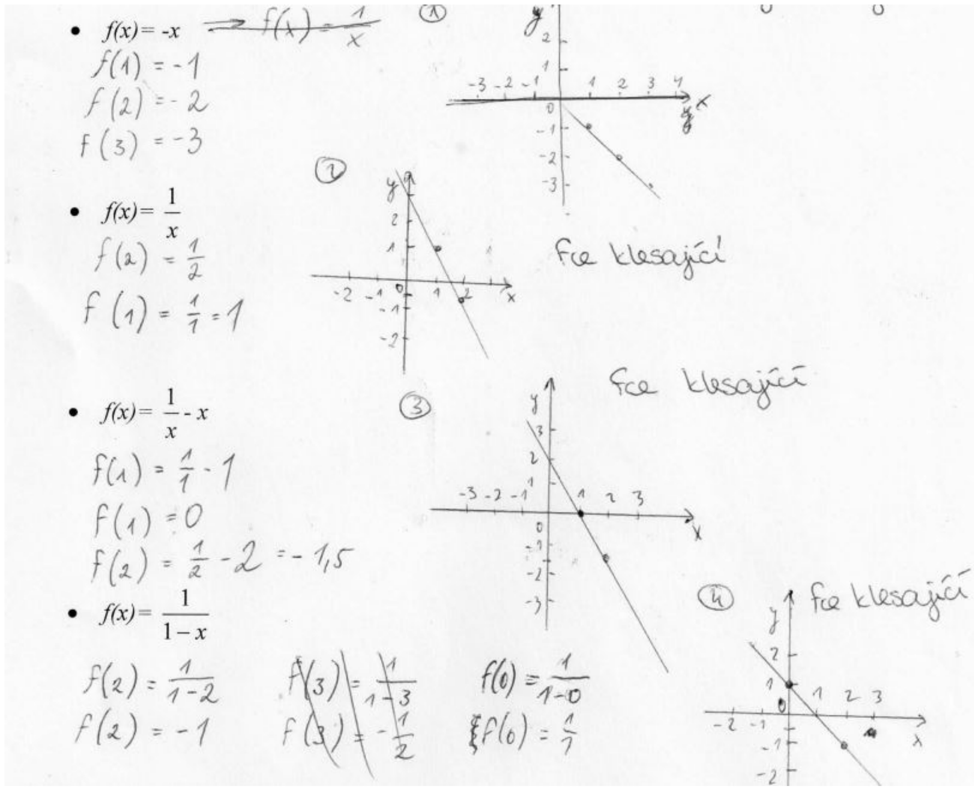
Obrázek 2.6: Žák vynesl dvě hodnoty na osy a vzniklé body propojil přímkou.

- Poměrně často se vyskytovaly přístupy, kdy si žáci zdeformovali osy grafu tak, aby mohli graf nakreslit, případně kreslili natolik nepřesně, že nenarazili na problém (Přílohy – obr. 3.4). V jednom případě dokonce žák škrtl výpočet a vynesený bod v grafu, protože by mu znemožnil nakreslit jako graf lineární funkci (obr. 2.7).

Nejčastější chybou při vytváření grafů jednotlivých závislostí byla linearizace, která se objevila přibližně v polovině testů, u některých žáků se však jako typický příklad grafu ukázala např. sinusoida (Přílohy – obr. 3.5). Lineární funkci (rostoucí i klesající) zde můžeme na základě pozorování označit za prototyp grafu funkce.

Konstrukce grafu funkce, speciálně přechod od souřadnic bodů ke spojité křivce grafu, se ukázal jako proces, který žáci chápou spíše formálně. Křivku konstruují na základě malého počtu vynesených bodů a při propojování bodů ignorují své další matematické poznatky.

V rámci testování jsem se s tímto fenoménem setkával často i jinde a pozoruje ho i Kopáčková: „Křivka sama včetně souřadného systému je vnímána jako celek, výtvarné dílo, nikoliv jako množina uspořádaných bodů.“(Kopáčková, 2003, s. 76).

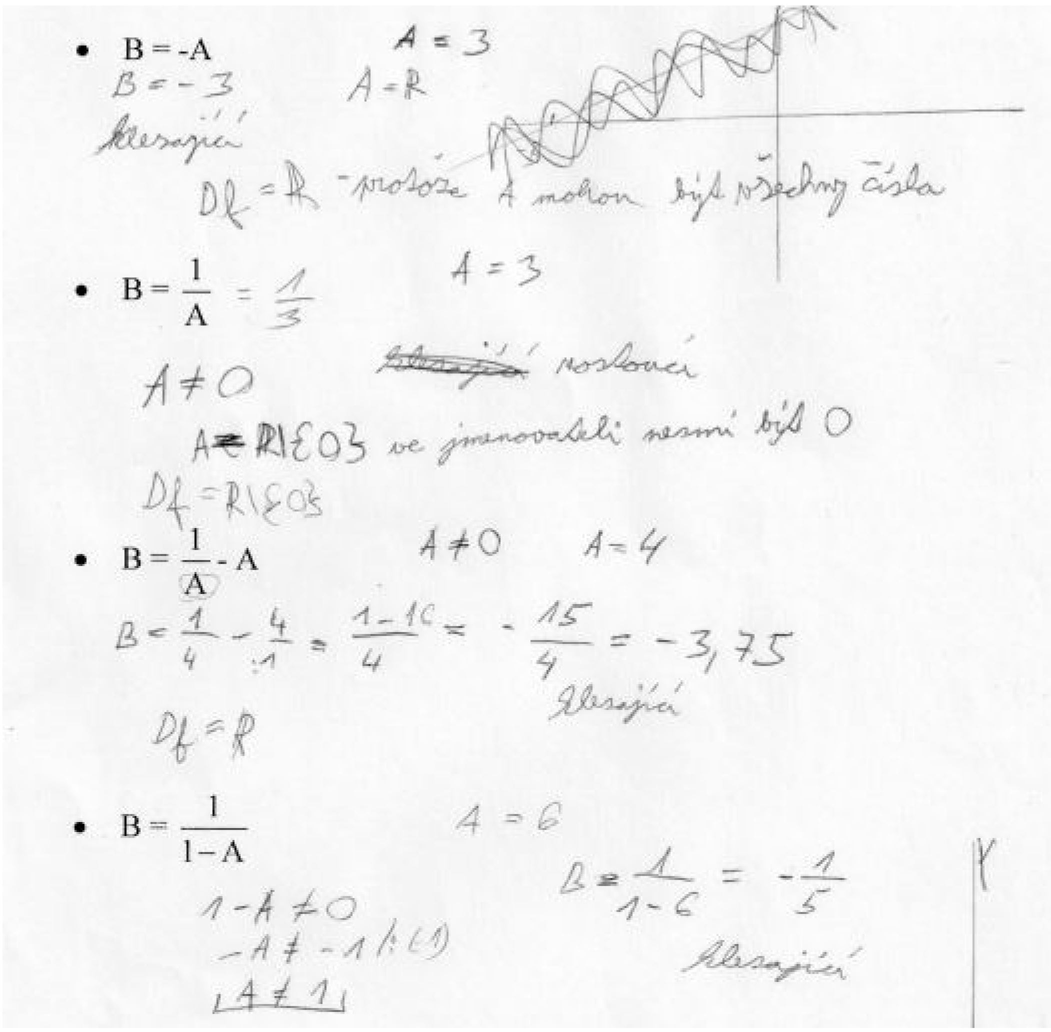


Obrázek 2.7: Žák vypočetl a vynesl souřadnice bodu, načež ho škrtl, neboť znemožňoval zakreslení grafu lineární funkce.

U žáků 2. ročníků byly identifikovány jako izolované modely funkcí nejčastěji funkce lineární, funkce lineární lomené, v několika případech funkce sinus. Na základě grafů nebylo možné prokázat, že některý z žáků pracoval s funkcemi na úrovni univerzálního modelu.

Charakteristiky a vlastnosti funkcí

Žáci určovali nejčastěji u funkcí definiční obor, monotonii a extrémy funkce. Své závěry ale zpravidla nijak nezdůvodňovali a určovali jednotlivé vlastnosti a charakteristiky na základě chybných postupů. Na obrázku 2.8 žák určil monotonii všech funkcí na základě dosazení jediné hodnoty do každé z nich. Výjimkou bylo určování definičního oboru funkcí, v jejichž předpisu figuroval zlomek. Zde žáci často uváděli, že „ve jmenovateli nesmí být 0“. Na obrázku 2.8 však můžeme vidět, že ani tato známá podmínka smysluplnosti výrazu není používána precizně. Žák ji identifikoval u druhé funkce, u třetí ale zároveň označil za definiční obor množinu reálných čísel.



- $B = -A$ $A = 3$

$B = -3$ $A = R$

klesající

$Df = R$ - protože A mohou být všechny čísla

- $B = \frac{1}{A} = \frac{1}{3}$ $A = 3$

$A \neq 0$ ~~klesající~~ rostoucí

$A \neq R\setminus\{0\}$ ve jmenovateli nesmí být 0

$Df = R\setminus\{0\}$

- $B = \frac{1}{A} - A$ $A \neq 0$ $A = 4$

$B = \frac{1}{4} - \frac{4}{1} = \frac{1-16}{4} = -\frac{15}{4} = -3{,}75$

klesající

$Df = R$

- $B = \frac{1}{1-A}$ $A = 6$

$B = \frac{1}{1-6} = -\frac{1}{5}$

$1 - A \neq 0$

$-A \neq -1 \;/\cdot(-1)$

$\boxed{A \neq 1}$

klesající

Obrázek 2.8: 1. Žák určil monotonii na základě dosazení jedné hodnoty. 2. U druhé funkce uvedl podmínku nenulového jmenovatele, ale u třetí určil jako definiční obor reálná čísla.

Značení funkcí

Rozdíly dané různým značením funkcí byly značné. Vzhledem k aspektu dosazování žáci pracující s obvyklým značením dosazovali častěji a dosazovali vhodnější hodnoty (viz tabulka 2.1). Někteří žáci, kteří své postupy popisovali slovně, uváděli výroky typu „dosadíme za B libovolné číslo a vyjde nám výsledek“ nebo „když B bude nějaké číslo (např 3), tak A bude -3“. Několik žáků nedokázalo určit, za jaké z písmen mají dosazovat, chápali rovnosti jako rovnice a označovali za proměnnou písmena A i B, případně různé kombinace vzhledem k dalším použitým symbolům (např. $-B$). Potvrdila se tedy domněnka, že značení písmeny A a B bude pro žáky obtížnější.

Označování kombinace symbolů za jednu proměnnou (jeden zástupný symbol), nikoli jako znaménko a proměnnou, se však objevoval i při obvyklém značení (symbolem proměnné bylo zde tedy např. $-x$). Podobně žáci chápali i symbol $f(x)$.

Shrnutí

Výsledky prvního úkolu ukázaly některé problémy, které žákům způsobovaly potíže při práci na testech a nemenší potíže jim musí působit i při řešení standardních úkolů z matematiky. Jako problematický se jeví fakt, že žák, který na jedné straně určuje z pohledu žáka SŠ netriviální vlastnosti a charakteristiky funkcí (definiční obor, sudost/lichost, monotonii), na straně druhé neumí vynášet body grafu, případně pomocí těchto bodů odvozovat správné grafy funkcí. Žádný z žáků v testu bezpečně neprokázal, že by jeho poznatky o funkcích byly na úrovni univerzálního modelu.

2.5.3 Analýza úkolu 2

Slovní popis

Odpovědi žáků v rámci tohoto úkolu neměly zpravidla žádnou informační hodnotu. Několik jedinců k úkolu přistoupilo z těchto pohledů:

- popisovali obecné závěry („všechno jsou to funkce“, „všechno jsou to rovnice“),
- pokusili se určit společné vlastnosti daných funkcí („jsou prosté, jsou neomezené“),
- zařadili funkce do kategorií („všechny kromě první jsou lineární lomené funkce“).

2.5.4 Analýza úkolu 3

Ukázalo se, že žáci nemají pojmy přímé a nepřímé úměrnosti propojeny s funkcemi reprezentovanými předpisy resp. jejich grafy. Odpovědi byly zpravidla neodůvodněné, pouze několik žáků uvedlo poučky „čím více, tím více“ resp. „čím více, tím méně“ a dokázalo je propojit na rostoucí, resp. klesající funkci[6].

2.5.5 Analýza úkolu 4

Na tuto otázku žáci buď neodpověděli anebo popsali funkce jako neomezené, případně některým z ekvivalentích zápisů (od $-\infty$ do ∞).

2.5.6 Reflexe testu 1

Zadání testu 1 bylo v mém zpětném ohledu široce otevřené a pro žáky obtížné. Velká náročnost na představivost při řešení úkolu 1 zřejmě studenty odradila od řešení dalších úkolů. Na druhou stranu tato komplexnost ukázala některé fragmenty toho, jak žáci funkce vnímají. Konkrétně bych zmínil slovní popis, typy grafů a způsoby dosazování.

2.6 Test 2

2.6.1 Komentované zadání testu

Tramvaj jezdí pravidelně jednou za 10 minut.

1. *Jaká je pravděpodobnost, že do jedné minuty od mého příchodu na zastávku přijede tramvaj? Zdůvodněte.*

   Jedna minuta tvoří desetinu intervalu příjezdu tramvají. Pokud přijdu na zastávku úplně náhodně, mám tedy šanci 1 ku 10, že tramvaj do minuty přijede.

2. *Jak se zvyšuje pravděpodobnost, že přijede tramvaj, když čekám na zastávce? Zkuste tuto změnu pravděpodobnosti nějak znázornit a popište ji co nejpřesněji vlastními slovy.*

   Očekával jsem, že si žáci spočítají pravděpodobnost pro různé časy čekání na zastávce. pro 2 minuty je pravděpodobnost 2 ku 10, pro 3 je 3 ku 10 atd. Další důležité body jsou ty, kde se nárůst pravděpodobnosti mění, tedy časy 0 a 10 minut. Zde je již potřeba jisté

[6] Což ještě samo o sobě nestačí. Je nutno si uvědomit jaké předpisy tyto konkrétní funkce mohou mít. Vzhledem k uvedenému výsledku považuji toto téma za vhodné pro výzkum spíše v prvním ročníku VŠ.

abstrakce. Je nutné přejít v uvažování od reality k matematickému modelu, neboť těžko se vysvětluje pravděpodobnost příjezdu tramvaje při nulové nebo velmi malé délce čekání. Pokusy zjistíme, že pravděpodobnost narůstá rovnoměrně, pro nekladná čísla bude pravděpodobnost nulová, pro čísla větší nebo rovna 10 bude pravděpodobnost 1.

3. *Jakých hodnot může pravděpodobnost z předchozího příkladu nabývat?*

   Z definice pravděpodobnost může nabývat hodnot z intervalu $\langle 0; 1\rangle$. V 0 je pravděpodobnost nulová, v 10 je rovna 1. Pravděpodobnost narůstá přímo úměrně, grafem jejího přírůstku je na intervalu $\langle 0; 10\rangle$ úsečka.

4. *Jaká je pravděpodobnost, že přijede tramvaj do 30 sekund od mého příchodu? Zamyslete se, jakými způsoby můžeme tuto pravděpodobnost odvodit nebo spočítat.*

   Doba čekání je poloviční, pravděpodobnost nárůstá přímo úměrně, tedy bude také poloviční: 1 ku 20.

5. *Pro jaké časy můžeme určovat pravděpodobnost příjezdu tramvaje?*

   Zde záleží, do jaké míry jsou žáci schopni situaci matematizovat, teoreticky lze takovou pravděpodobnost určit pro všechna reálná čísla.

2.6.2 Charakteristika testu

Test byl sestaven pro žáky třetích ročníků se zaměřením na právě probranou látku, a to pravděpodobnost. Byl vypracován ve dvou verzích. První z nich vypracovalo 22 žáků a po předběžné analýze výsledků bylo nutno zadání výrazně zjednodušit a zpřehlednit. Tyto testy jsem z výzkumu vyloučil a v práci se tedy dále zabývám výsledky druhé verze (tu vypracovalo 47 žáků), neboť výsledky první neměly potřebnou vypovídající hodnotu.

Samotný test ukazuje pravděpodobnost z jiného úhlu pohledu, než s jakým se žáci běžně v hodinách setkávají, neboť zde neurčovali pravděpodobnost jednoho nebo několika konkrétních jevů. Spíše bylo cílem podnítit u nich zamyšlení nad množinou prvků, pro které danou pravděpodobnost můžeme určovat, případně jakých hodnot může pravděpodobnost nabývat.

Úkol č. 1 měl úlohu výhradně motivační, neboť byl zodpověditelný intuitivně a přirozenou úvahou.

Až druhým úkolem měli žáci prokázat, zda jsou schopni detailně uvažovat nad množinou prvků, pro které pravděpodobnost určují (otázka 5). Také, podobně jako v testu 1, bylo mým cílem zjistit, jaké reprezentace budou žáci k popisu dané závislosti používat (ot. 2).

spojitý graf	28	60 %
vyčíslení	2	4 %
jiné grafické	2	4 %

Tabulka 2.2: Počty žáků, kteří použili danou reprezentaci.

Třetí, resp. pátý úkol jsem se snažil formulovat tak, aby bylo možné získat informace o tom, zda průběh pravděpodobnosti v čase budou schopni žáci posoudit z hlediska spojitosti, tedy jestli popíší hodnoty definičního oboru resp. oboru hodnot spojitě či diskrétně (ot. 5).

Cílem úkolu 4 bylo žákům ukázat, zda mohou být hodnoty, pro které určují pravděpodobnost, „jemnější“, zda je mohou nějakým způsobem dělit (ot. 5).

2.6.3 Analýza úkolu 1

Vzhledem k charakteru úkolu zde uvádím pouze jeho úspěšnost. Správně otázku zodpovědělo 41 žáků (87 %). Vysoká úspěšnost může mít několik důvodů. Jako nejvíce pravděpodobné bych označil jednoduchost a intuitivnost řešení.

2.6.4 Analýza úkolu 2

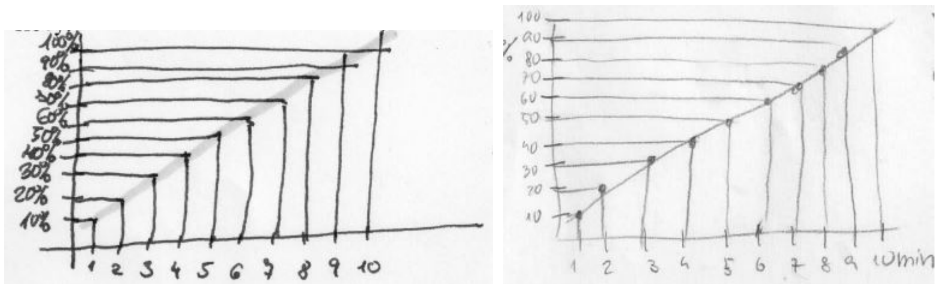
Řešení úkolu 2 bylo také intuitivní, nebylo prokazatelné, zda žáci pracovali s hlubším porozuměním problému. Úkol byl však velmi dobře analyzovatelný z hlediska různých reprezentací zkoumané závislosti. Žáci používali k reprezentaci funkce spojitých a diskrétních grafů, vyčíslení, slovního popisu nebo vlastních grafických znázornění (viz tabulka 2.2). Uvedené kategorie jsou disjunktní. Slovní popis tentokrát nebyl do tabulky zařazen, neboť byl obsažen v naprosté většině prací.

Grafické reprezentace

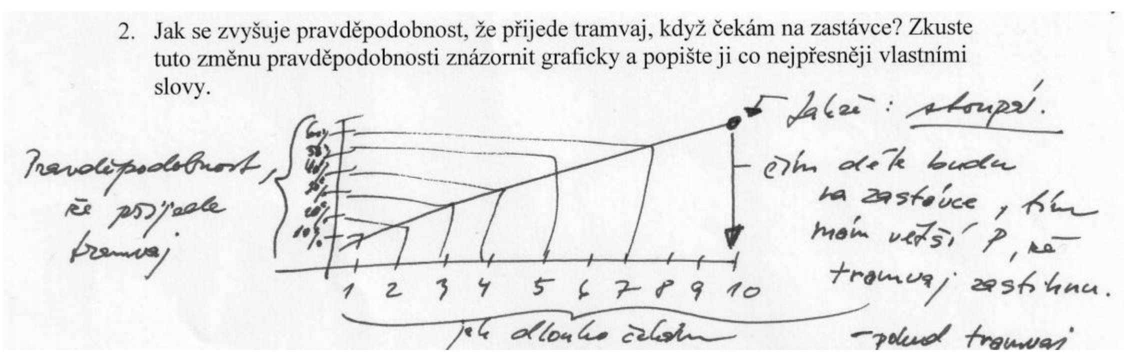
Z tabulky 2.2 je vidět, že nejčastěji voleným nástrojem k popisu situace byly užívány grafy. Žáci je kreslili většinou správně, ovšem vzhledem k faktu, že jeho předpisem je část lineární funkce $f(x) = x/10$, není možné rozhodnout, zda byl kreslen také s porozuměním, neboť se jednalo o intuitivní řešení.

U grafů se objevovalo několik typických prvků, které jsou vzhledem k mému pozorování podstatné.

- Žáci naznačili pokračování grafu lineární funkce nad 100 % pravděpodobnosti (obr. 2.9). V drtivé většině případů byl graf veden od bodu [0,0], ale nebyl ukončen, případně zalomen, u hodnoty 100 % resp. 1. Pouze ve třech případech bylo zřejmé, že má žák povědomí o tom, jak se mění hodnoty funkce v okolí 0 a 10 min (obr. 2.10).



Obrázek 2.9: Naznačení pokračování grafu nad 100 % pravděpodobnosti.

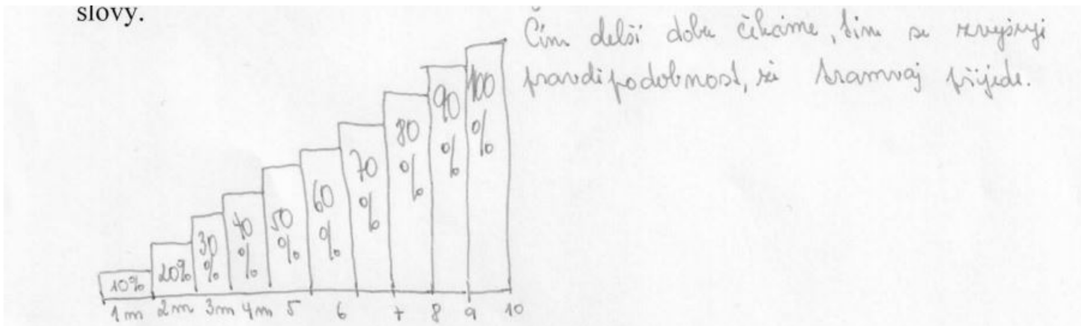


Obrázek 2.10: Ukončení grafu u hodnoty 100 %.

- Žáci použili zkresleného měřítka při konstrukci os souřadnic. Všichni žáci při kreslení grafu použili „neproporcionální“ měřítko os souřadnic, kde 1 minuta na vodorovné ose odpovídala 10 procentním bodům na ose svislé. Toto zkreslení ukazuje v tomto kontextu $f(x) = x$ jako prototypický příklad lineární funkce, neboť žáci, pravděpodobně neúmyslně, zkreslili soustavu souřadnic tak, aby funkce odpovídala jejich představě (viz obr. 2.9)[7]

- Dva žáci použili k reprezentaci závislosti diskrétní graf, který nebyl úplně standardní, neboť se podobal spíše než kartézské soustavě souřadnic sloupcovým grafům známým z programu Excel (obr. 2.11). Hodnoty pravděpodobnosti se zde měnily „po skocích“.

[7]Zde je možné interpretovat použití zkresleného grafu i tak, že žáci zkreslili měřítko os proto, aby šlo vše lépe znázornit nebo z důvodu umístění na papíře apod.

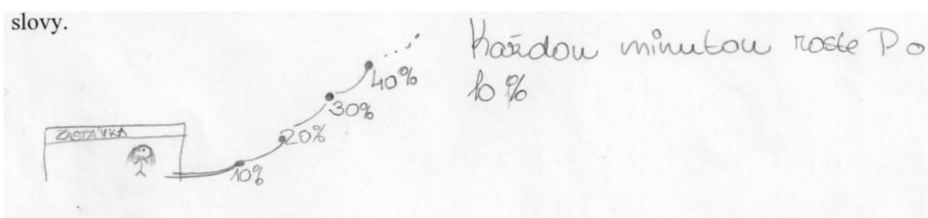


Obrázek 2.11: Použití grafu „po skocích“.

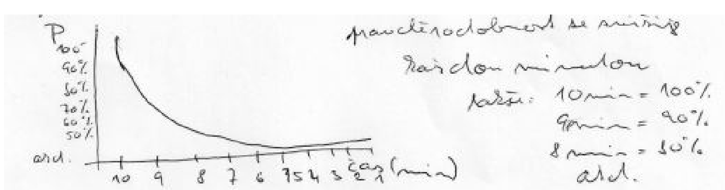
- Ve většině případů žáci použili k reprezentaci spojitý graf. U žádného spojitého grafu nebyla vynesena jiná než diskrétní hodnota. Z tohoto hlediska tedy žádný z žáků bezpečně neprokázal, že plně chápe spojitost průběhu času z hlediska matematického.

  Navíc, i přes správnost lineárního grafu, lze tyto výsledky interpretovat jako případy linearizace, neboť žáci si neověřili, zda se skutečný graf nemění jinak než lineárně, a nakreslili automaticky přímku.

- Několik žáků použilo netypických, chybných grafů a jiných grafických znázornění. Dva žáci se snažili znázornit závislost pravděpodobnosti na čase graficky, ale bez použití poznatků o funkcích, které získali v předchozím studiu (obr. 2.12). Zajímavé bylo rovněž použití lineárních lomených funkcí k vyjádření závislosti (obr. 2.13).



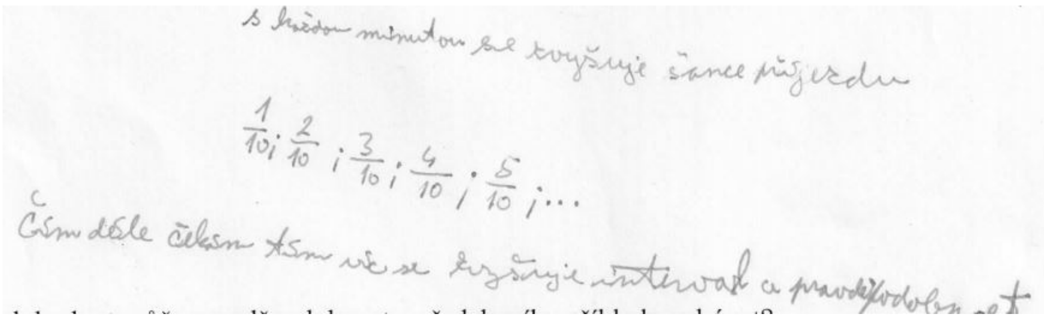
Obrázek 2.12: Grafické znázornění bez použití poznatků o funkcích.



Obrázek 2.13: Lineární lomená funkce použitá pro popsání změny pravděpodobnosti.

Vyčíslení

Tři žáci se pokusili vyčíslit hodnoty pravděpodobnosti, konkrétně v desítkách procent nebo v odpovídajících zlomcích, což svědčí o jejich jednostranně diskrétním uvažování v přístupu k této situaci (obr. 2.14).



Obrázek 2.14: Vyčíslení jednotlivých pravděpodobností pro celé minuty.

Slovní popis

Tento nástroj nebyl záměrně zahrnut do tabulky, neboť ve větší či menší míře byl použit téměř ve všech pracích. V drtivé většině však ve tvaru triviálního výroku: „čím déle budeme na zastávce čekat, tím vyšší je pravděpodobnost příjezdu tramvaje.“ Pouze několik žáků dovedlo využít slovního popisu k lepšímu znázornění situace: „Zvyšuje se o 10 % každou minutou, každých 6 vteřin se zvýší o 1 %.“ Tento výrok svědčí o úvaze směřované k snaze dále popis „zjemňovat“.

2.6.5 Analýza úkolu 3

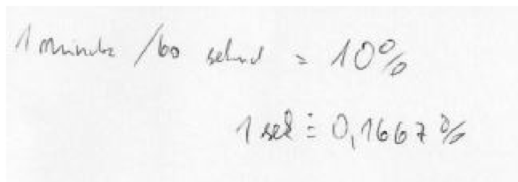
Nejčastější výrok při řešení úkolu 3 zněl: „může nabývat maximálně sta procent“. Je vidět, že tuto znalost mají žáci z hodin věnovaných pravděpodobnosti silně zakořeněnu. Ovšem jak je vidět z tabulky 2.3, podíl špatných odpovědí (diskrétních, kladných, ...) měl velké zastoupení – celkem 10 žáků (21 %) odpovědělo špatně. Ze zbývajících patnácti žáků, jejichž odpověď se dá považovat za správnou[8], pouze dva napsali přesné rozmezí hodnot (0–100 %). Tyto počty je možno interpretovat tak, že žáci nepociťují nutnost vyjadřovat se přesně, a to i v případě, že znají správnou odpověď.

Pozitivním prvkem, který se mezi řešeními objevil, byla snaha studentů „zjemňovat“ hodnoty, pro které mohou pravděpodobnost určit (obr. 2.15).

[8] tzn. v jejich formulaci se nevyskytuje žádná chyba, ale řešení nemuselo být zcela úplné

desítek procent	3	6 %
libovolných	1	2 %
kladných	4	9 %
od 0 do 100%	15	32 %
diskrétních	1	2 %
odvozených z jednotek času	2	4 %

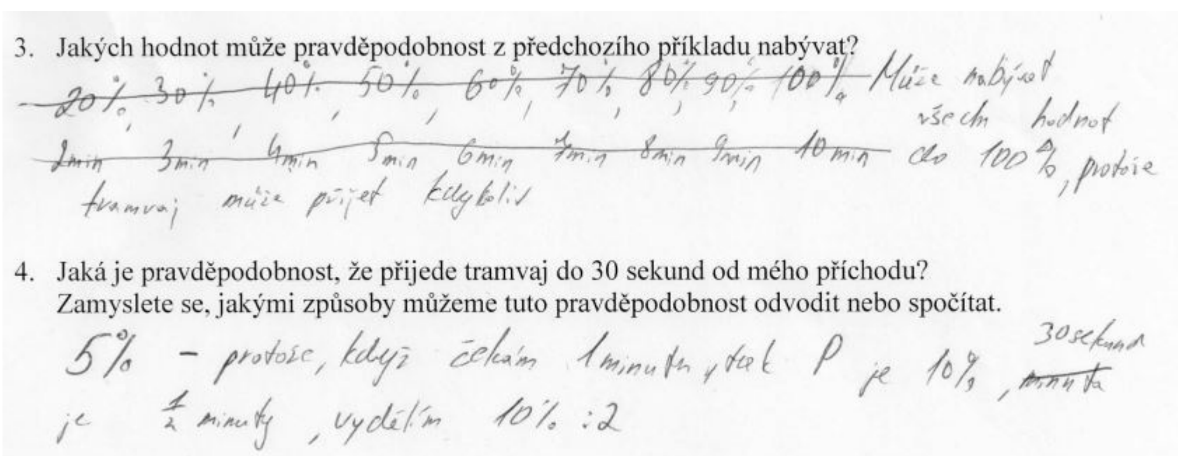
Tabulka 2.3: Jednotlivé uvedené možné hodnoty závislosti a počty žáků, kteří je uvedli.



Obrázek 2.15: Snaha žáka popsat pravdděpodobnost pro „jemnější“ hodnoty než minuty.

2.6.6 Analýza úkolu 4

Určení pravděpodobnosti pro poloviční časový úsek než v úkolu 1 vyřešilo 33 žáků (70 %), tedy o 8 méně. Pouze jediné řešení je možno interpretovat tak, že žák díky tomuto úkolu dokázal přehodnotit řešení úkolu předchozího (obr. 2.16).



3. Jakých hodnot může pravděpodobnost z předchozího příkladu nabývat?

~~20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%~~ Může nabývat všech hodnot do 100 %, protože tramvaj může přijet kdykoliv

~~2min, 3min, 4min, 5min, 6min, 7min, 8min, 9min, 10min~~

4. Jaká je pravděpodobnost, že přijede tramvaj do 30 sekund od mého příchodu? Zamyslete se, jakými způsoby můžeme tuto pravděpodobnost odvodit nebo spočítat.

5% – protože, když čekám 1 minutu, tak P je 10%, 30 sekund ~~minuta~~ je 1/2 minuty, vydělím 10% :2

Obrázek 2.16: Žák na základě úkolu 4 přehodnotil a opravil úkol 3.

2.6.7 Analýza úkolu 5

U posledního úkolu se ukázalo, že mnoho žáků si nedokáže představit určování pravděpodobnosti pro jiné časové úseky než minuty (6 žáků, 13 %), resp. jiné používané jednotky času (sekundy, hodiny – 10 žáků, 21 %). Přitom za spojité spektrum (13 žáků, 28 %) byly uznávány výroky jako „pro jakékoli časy“, „pro všechny“ atd., tedy zde není možné přesně určit, jak hluboce vnímají někteří žáci spojitost průběhu času. Několik řešení však bylo formulováno tak, že je z nich patrná myšlenka, že určení pro minuty či vteřiny je nedostatečné: „minuty, vteřiny, nanosekundy, ...“, „všechno $\leq$ minutám“.

2.6.8 Reflexe testu 2

Druhá verze testu dva byla podle mého názou svou obtížností i rozsáhlostí odpovídající možnostem studentů. Většina studentů byla schopna více či méně úspěšně test řešit. Úkoly nepůsobily natolik rozsáhle, aby žáky od řešení odradily. Ovšem jejich nedostatek vidím v intuitivním způsobu řešení (zejména u úkolů 1 a 2).

2.7 Test 3

2.7.1 Komentované zadání testu

Představme si desetistěnnou kostku.

1. *Jaká je pravděpodobnost, že padne jedno konkrétní číslo?*

   Čísel je na kostce 10, tedy pravděpodobnost, že padne jedno z nich je 1 ku 10.

2. *Je možné rozšířit úvahy o určování pravděpodobnosti na libovolná čísla? Tedy např. jaká je pravděpodobnost, že padne číslo mezi 0 a 2,75?*

   Z čísel na kostce do intervalu $(0, 2, 5)$ spadají čísla 1 a 2, pravděpodobnost, že padne jedno z nich je 2 ku 10.

3. *Znázorněte a slovně popište pravděpodobnost, že padne číslo mezi 0 a x, kde x nemusí být pouze celé číslo. Popište, co všechno o takovém vztahu můžete říci.*

   Očekával jsem, že si žáci vypočítají pravděpodobnost pro několik různých hodnot tak, aby zjistili, jakým způsobem se daná pravděpodobnost mění. Například pro čísla 2,15 a 2,75 bude pravděpodobnost stejná. Pro 2,75 a 3,1 se bude lišit o jednu desetinu. Z toho můžeme vyvodit jakých hodnot bude daná pravděpodobnost pro různá čísla nabývat.

Graf hledané pravděpodobnostní funkce potom kopíruje na intervalu $(-\infty, 0)$ konstantní funkci $f(x) = 0$, na intervalu $\langle 0, 10\rangle$ graf funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor /10$ a na intervalu $(10, \infty)$ konstantní funkci $f(x) = 1$ při uvádění pravděpodobnosti ve tvaru desetinného čísla.

4. *Pro jaká všechna čísla můžeme určovat tuto pravděpodobnost?*

   Záleží na míře matematizace daného problému, teoreticky je možno takovou pravděpodobnost určit pro libovolná reálná čísla, pokud budeme uvažovat, že pro 0 se nejedná o interval, ale pouze jedno číslo.

5. *Jakých hodnot může tato pravděpodobnost nabývat?*

   Pravděpodobnost se může měnit pouze „skokově" s přírůstkem 0,1 a v intervalu $(0, 1)$.

6. *Zkuste se zamyslet, jak by se mohla tato pravděpodobnost hodů zobecnit na dvě desetistěnné kostky, kde jedna by určovala desítky, druhá jednotky a výsledkem by bylo dvojciferné číslo.*

   Místo deseti by mohlo padnout na kostkách čísel sto (10 možností na jedné a 10 na druhé kostce). Pravděpodobnost by se potom měnila stejně jako v předchozím případě vždy, když by se x rovnalo celému číslu.

2.7.2 Charakteristika testu

Série úkolů byla vypracována opět pro 3. ročník, v návaznosti na předchozí test. Úkoly byly tentokrát konstruovány v prostředí hodů kostkou, tedy s diskrétním obsahem, nicméně v úkolech 2, 3 a 4 jsem se snažil žáky přivést na myšlenku rozšíření definičního oboru na reálná čísla se zachováním diskrétnosti oboru hodnot. Jednalo se o úkoly dosti netradiční, právě přechod od diskrétního vnímání ke spojitému dělal žákům velké problémy. Test řešilo celkem 42 žáků.

První úkol byl triviální, opět měl plnit především motivační úlohu.

Oproti tomu v druhém úkolu již byl požadován posun od diskrétního k souvislému definičnímu oboru (otázka 5). Tento přechod jsem se pokusil zmírnit požadavkem určení konkrétní pravděpodobnosti, aby bylo zadání pro žáky smysluplné.

Ve třetím úkolu bylo požadováno zobecnění této myšlenky (ot. 5) a byl vznesen požadavek na znázornění a popis žákových představ o problému (ot. 2). Formálně by úkol odpovídal hledání pravděpodobnostní funkce daného problému.

Následovaly úkoly podobné těm ze zadání předchozího testu, ve kterých jsem se dotazoval na definiční obor a obor hodnot zkoumané závislosti (ot. 5).

Poslední úkol byl zaměřen na další zobecnění předchozích, tentokrát ale ze samého zadání, rozšířením o druhou kostku. Zde mne zajímalo jakým způsobem budou toto rozšíření popisovat.

Od takto strukturovaného testu jsem si sliboval především možnost ukázat žákům různá rozšíření či zobecnění známých úloh, které řešili, do netradičních kontextů s další látkou.

Protože byl tento test specifický tím, že byl v pořadí druhý se zaměřením na 3. ročník, uvádím u analýzy úkolů i porovnání s analogickými úkoly testu 2.

2.7.3 Analýza úkolu 1

Triviální úkol, jehož hlavním účelem bylo motivovat žáky k řešení dalších úkolů, vyřešila správně naprostá většina žáků. Pouze dva (4 %) odpověděli špatně, a to spíše z nepozornosti než z neschopnosti úkol vyřešit.

2.7.4 Analýza úkolu 2

Řešení se vyskytovala především ve dvou tvarech. Velmi často žáci zapisovali přímo konkrétní pravděpodobnost bez dalších postupů. Často také žáci zmínili, že čísla, která mohou padnout na kostce mezi 0 a 2,75, jsou právě dvě, a tedy pravděpodobnost, že padnou, je 2/10.

Ze způsobů odpovědí a také z četnosti správných výsledků (29 žáků, tedy 69 %) usuzuji, že onen přechod od diskrétního k souvislému definičnímu oboru pro žáky nebyl zásadně cizí. Konkrétní příklad byla v tomto kontextu schopna řešit většina žáků, potíže vznikaly při požadavku zobecnění těchto příkladů, kdy si žáci museli souvislost definičního oboru sami uvědomit, případně když měli přecházet mezi různými reprezentacemi závislostí.

2.7.5 Analýza úkolu 3

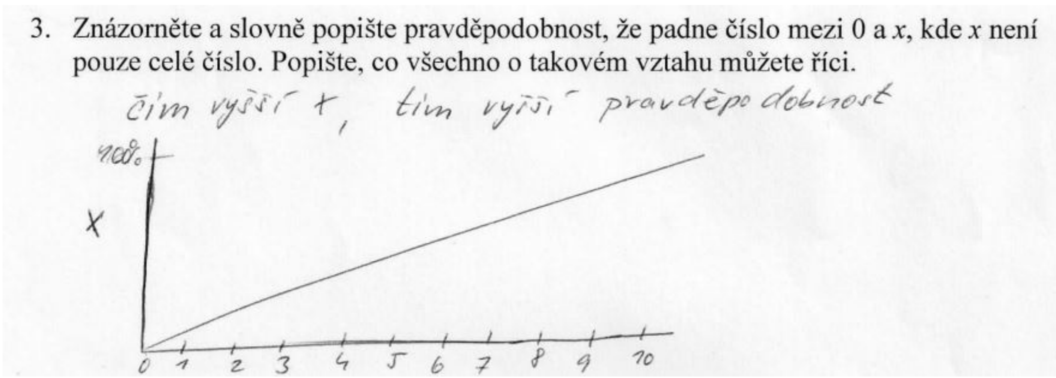
Tabulka 2.4 vystihuje zastoupení jednotlivých reprezentací při znázorňování závislosti.

Grafická reprezentace

Značně netriviální grafická reprezentace funkce vedla k tomu, že žáci, kteří se pro tento druh zápisu rozhodli, byli neúspěšní (obr. 2.17). Zpravidla totiž kreslili část lineární funkce. Důvod vidím ve faktu, že ani jeden z nich si pravost svého grafu žádným způsobem neověřil dosazením různých čísel.

slovní popis	6	14 %
graf lineární funkce	10	24 %
tabulka	1	2 %
jiné grafické znázorňování	3	7 %

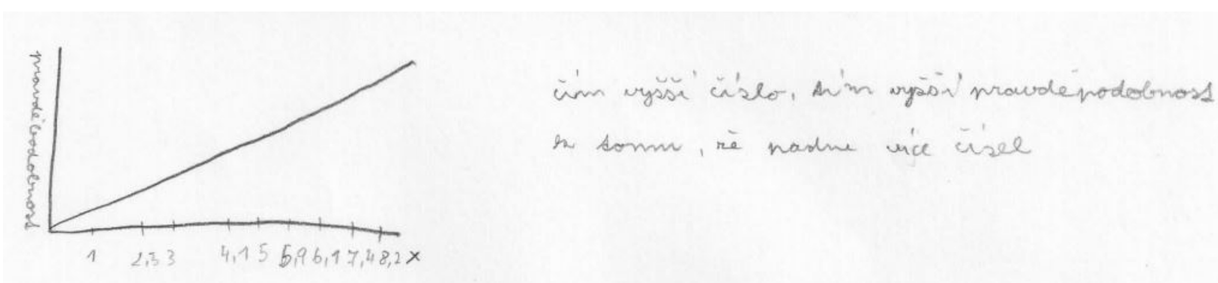
Tabulka 2.4: Použití jednotlivých reprezentací závislosti.



Obrázek 2.17: Reprezentace změny pravděpodobnosti, že padne číslo z intervalu v závislosti na změně intervalu, ve kterém ji určujeme.

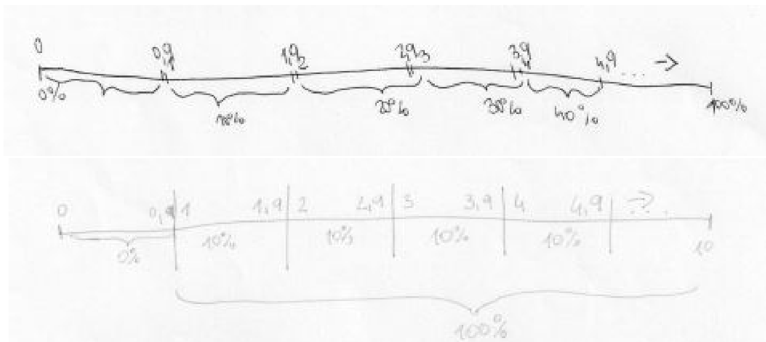
Průvodním znakem všech řešení v podobě grafů byly, stejně jako ve zmiňovaném úkolu předchozího testu, triviální slovní popisy typu: „čím vyšší x, tím vyšší pravděpodobnost“ nebo „čím vyšší číslo, tím vyšší pravděpodobnost k tomu, že padne více čísel.“

Na obrázku 2.18 je možno pozorovat jev, kdy si byl žák zřejmě vědom dosazování různých hodnot do závislosti (na vodorovné ose jsou vynesena různá čísla), ale už pro ně neprovedl ověření funkčních hodnot. Důsledkem bylo, že nakreslil chybný graf.



Obrázek 2.18: Žák znázornil na ose různé hodnoty, ale nevypočítal funkční hodnoty a nakreslil chybný graf.

Celkem tři žáci použili k reprezentaci vlastní grafické znázornění (obr. 2.19). Ta považuji ve všech případech za velice zdařilá. Použití těchto nástrojů by mohlo být hypoteticky zapříčiněno taktéž formálně matematickou složitostí daného problému.

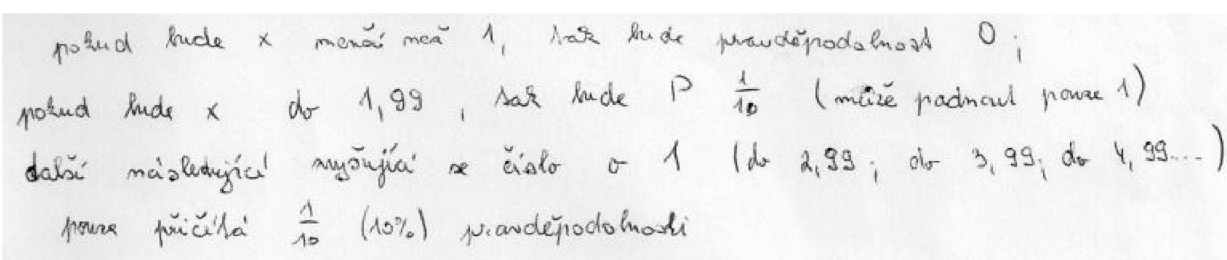


Obrázek 2.19: Dvě grafická znázornění bez využití poznatků o funkcích svědčila o hlubším náhledu do situace.

Slovní popis

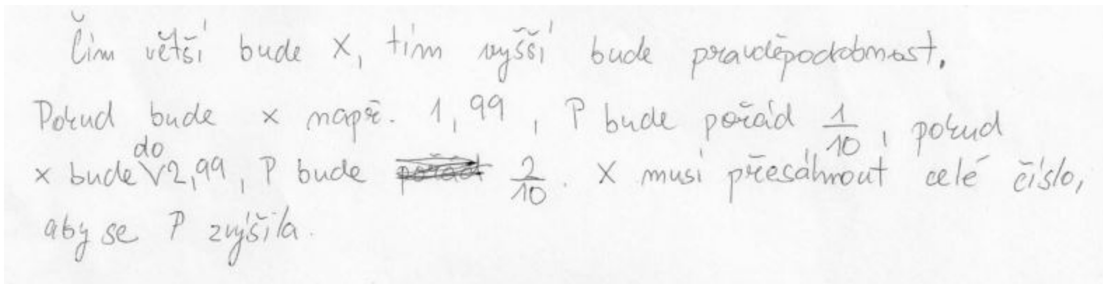
Tento princip popisu situace je možné označit za nejčastější nechybový. Žáci, kteří situaci popsali slovně zpravidla nepřehlédli fakt o nespojitém zvyšování pravděpodobnosti se zvyšujícím se x.

Za zásadní považuji zjištění, že oproti podobnému úkolu v testu 2 (úkol 2), zde slovní zápis nesloužil pouze jako způsob vyjádření triviálního výroku ve vztahu ke grafu. Žáci se v šesti případech (21 %) zcela oprostili od grafické reprezentace a interpretovali situaci správně, výhradně pomocí slovního vyjádření (obr. 2.20). Tyto výroky považuji za velice hodnotné.



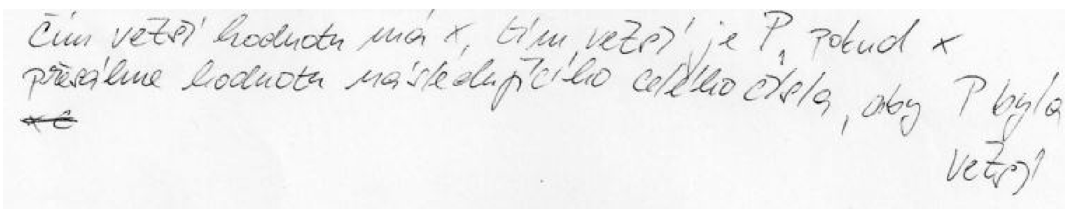
Obrázek 2.20: Slovní popis, který zachycuje správný vývoj závislosti při změně x.

Žákovské slovní formulace měly ale i svá úskalí. Často při jejich použití docházelo k nepřesnostem („další následující zvyšující se číslo o 1 (do 2,99; do 3,99; do 4,99…) pouze přičítá $\frac{1}{10}$ (10 %) pravděpodobnosti“ (obr. 2.20)) a chybným formulacím („čím větší bude x, tím vyšší bude pravděpodobnost“ (obr. 2.21)).


Čím větší bude x, tím vyšší bude pravděpodobnost.
Pokud bude x např. 1,99, P bude pořád $\frac{1}{10}$, pokud x bude do 2,99, P bude ~~pořád~~ $\frac{2}{10}$. X musí přesáhnout celé číslo, aby se P zvýšila.

Obrázek 2.21: Slovní popis, který zachycuje správný vývoj závislosti v závislosti na změně x.

Výrok z obrázku 2.22 byl také formulován na základě poměrně přesné představy, nicméně jazyková úroveň jeho informační hodnotu snižuje.


Čím větší hodnotu má x, tím větší je P, pokud x přesáhne hodnotu následujícího celého čísla, aby P byla větší

Obrázek 2.22: Slovní popis založený na správné myšlence, ale formulovaný nesprávně.

Srovnání s úkolem 2 v testu 2

Srovnáním s analogickým úkolem z předchozího testu je možno zjistit, že žáci méně využívali ke znázornění grafické reprezentace. Zatímco v testu 2 použilo spojitý či diskrétní graf 68 % žáků, v druhé verzi to bylo 45 %. Tento pokles si vysvětluji tím, že znázornění závislosti nebylo tak intuitivní jako v předchozím testu a grafická reprezentace závislosti na čase je žákům bližší z různých dalších předmětů i reálného života.

Na základě tohoto výsledku je ale možno usuzovat, že žáci nepoužívají graf jako nástroj, se kterým se naučili pracovat při probírání funkcí, k řešení, resp. popisování jiných matematických situací, spíše stále dávají přednost svým subjektivním představám – prekonceptům[9].

[9] Na tomto místě je vhodné zmínit jeden z cílů výuky matematiky a tím je, že se jejím prostřednictvím

Velmi zajímavým výsledkem je také fakt, že žáci dokázali jistým způsobem zobrazit nespojitou funkci tam, kde její použití bylo chybné, a tam, kde část grafu tvořila funkce celá část, to nikdo nedokázal. Interpretovat tento výsledek je možno mnohými způsoby, žádný objektivně přijatelný však nespatřuji.

Při porovnání použití slovního popisu se ukazuje, že úkoly související s pravděpodobností hodu kostkou byly pro žáky spíše těžší než předchozí z kontextu pravděpodobnosti příjezdu tramvaje. Oproti tomu intuitivní pochopení testu 2 vedlo k více chybným řešením než „více matematický“ test 3.

Test 3 je mimo jiné také příkladem situace, kdy je grafická reprezentace pro žáky přítěží a snaha použít ji formálně a matematicky přesně vede při nedodržení mnoha dílčích podmínek k neúspěchu.

2.7.6 Analýza úkolu 4

Úkol byl zaměřen na vnímání definičního oboru popsané závislosti žáky.

I přesto, že celkem 12 žáků (29 %) odpovědělo, že pravděpodobnost daného jevu je možno počítat pro „všechna x“, není možné tento výsledek z důvodu použití vágního pojmu „všechna“ považovat za jednoznačně interpretovatelný ve smyslu správného či špatného uvažování žáků. V kontextu ostatních řešení lze mnohdy vyvodit, že ona „všechna x“ mohou pro žáky někdy znamenat „všechna reálná x“, někdy „všechna přirozená x“ atd.

Celkem 8 žáků (20 %) uvedlo výčet různých čísel, případně celé množiny čísel přirozených nebo celých navzdory zadání úkolu 2, 9 žáků (21 %) uvedlo množinu hodnot ve tvaru intervalu, většinou to byly otevřené či uzavřené intervaly s krajními body 0 a 10.

V porovnání s analogickým úkolem testu 2 (úkol 5) se jeví pro žáky srozumitelnější spojitost definičního oboru u úkolů s kostkami. Spojitý definiční obor popsalo celkem 20 žáků z 42 (48 %), oproti tomu v případě úkolů s příjezdy tramvaje spojitý obor popsalo pouze 13 ze 47 žáků (28 %).

2.7.7 Analýza úkolu 5

Častou odpovědí na zadání úkolu 5 byl rozsah 0 – 100 % (8 žáků, 19 %), což není odpověď chybná z hlediska hodnot, jakých může pravděpodobnost obecně nabývat, žáci zde ale

učíme neřešit problémy podle subjektivních hledisek a pocitů, ale pomocí objektivních nástrojů, které nám její teorie poskytuje. Tato schopnost je u žáků obecně na nízké úrovni. Zde vidíme právě příklad toho, že se žáci nemohou oprostit od svých představ a řešit úkol na základě abstraktních znalostí.

neprovedli žádné zpřesnění v konkrétním kontextu. Pozitivně však vnímám počet žáků (11, tedy 26 %), kteří různým způsobem popsali jako obor hodnot zkoumané funkce hodnoty 0; 0,1; 0,2; …; 1 resp. 0 %, 10 %, …, 100 %. Současně jsem však zaregistroval v poměrně velkém počtu případů spor s řešením úkolu 2 v případě kreslení grafu. Žáci kreslili graf lineární funkce a přitom za obor hodnot správně označili pouze některé konkrétní hodnoty.

2.7.8 Analýza úkolu 6

Úkol 6 se ukázal jako bezpředmětný, žáci téměř v žádném případě situaci nepopsali dostatečně přesně na to, abych mohl z porovnání s ostatními úkoly vyvozovat nějaké závěry.

Správně rozšíření zadání na dvě kostky popsalo 10 žáků, tedy 23,81%, většina z nich považovala za dostatečný popis určení pravděpodobnosti, že padne jedno konkrétní číslo.

2.7.9 Reflexe testu 3

Tento test považuji za zdařilý. Formulace úkolů byla pro žáky srozumitelná a i když jsem se obával přechodu ke spojitému modelu, s konkrétními čísly si žáci poradili dobře. Za pozitivní považuji možnost porovnání s předchozím testem.

2.8 Test 4

2.8.1 Komentované zadání testu

1. *Trojúhelník je zadán body* $A[0;0]$, $B[2;0]$ *a* $C[x;f(x)]$, *kde* x *je přirozené číslo a* $f(x)$ *je zadána následujícími předpisy. Určete* x, *pro které bude obsah trojúhelníku* ABC *co nejmenší.*

   V rámci řešení tohoto úkolu můžeme popsat dva způsoby řešení. Za prvé, do každého ze vztahů dosadit několik hodnot a zakreslit si je do obrázku. Za druhé, nakreslit si graf dané funkce a podle něj načrtnout dané trojúhelníky. Dále si spočítat několik obsahů a odvodit, pro které umístění bodu C bude obsah trojúhelníku ABC nejmenší, případně toto určit z obrázku.

   - $f(x) = 3$

     Bod C se „pohybuje“ po přímce rovnoběžné s osou x, při dosazení několika hodnot zjistíme, že základna se pro různá umístění bodu C na této přímce nemění a jeho výška také ne. Za těchto podmínek se obsah daných trojúhelníků také nemění.

- $f(x) = 2x + 2$

  Graf této funkce je rostoucí pro x jdoucí do nekonečna, body C se budou vzdalovat od vodorovné osy, tedy se bude zvětšovat výška trojúhelníku ABC pro rostoucí x. Trojúhelník s nejmenším obsahem bude tedy ten pro $x = 1$ resp. pro bod C se souřadnicemi $[1, 2]$[10].

- $f(x) = -x^2$

  Podobně jako u předchozí funkce, se výška trojúhelníků bude zvětšovat pro rostoucí x (graf funkce jde pro taková x do $-\infty$). Výška trojúhelníku se tedy pro tato x postupně zvětšuje, základna se stále nemění. Nejmenší obsah bude trojúhelník mít opět pro $x = 1$, tedy pro bod C se souřadnicemi $[1, -1]$.

- $f(x) = \operatorname{arctg}(\pi x)$

  Tento předpis byl použit pouze v první verzi testu. Po dosazení některých hodnot se výška trojúhelníků bude pro rostoucí x opět zvyšovat. Trojúhelník tedy bude mít nejmenší obsah pro stejné x jako v předchozím případě, souřadnice bodu C budou $[1, \operatorname{arctg}(\pi)]$. Ovšem vzhledem ke konvergenci funkce k hodnotě $\pi/2$ pro x jdoucí do ∞ se růst obsahu trojúhelníků bude zpomalovat.

V celém testu nebylo nutné žádné obsahy numericky počítat.

2. *V jakých případech se obsah trojúhelníku pro rostoucí x zvětšuje (zmenšuje)? Zdůvodněte.*

   Obsah trojúhelníku se pro rostoucí x zvyšuje pro funkce $f(x) = 2x + 2$, $f(x) = -x^2$ a $f(x) = \operatorname{arctg}(\pi x)$.

3. *Jak se bude v jednotlivých případech měnit obsah trojúhelníků pro celá x jdoucí do nekonečna?*

   V prvním případě se obsah nemění, ve druhém a třetím roste nade všechny meze, ve čtvrtém případě konverguje k hodnotě $\pi/2$.

2.8.2 Charakteristika testu

Test byl zadán ve dvou třídách čtvrtého ročníku, celkem byl řešen 40 žáky a průvodním tématem byla analytická geometrie. Po zadání v první třídě jsem byl nucen test upravit,

[10] Pokud by se v pracích objevilo řešení pro $x = 0$, tedy zařazení 0 do přirozených čísel, také bych ho považoval za správně.

neboť se ukázalo, že je pro žáky poměrně nesrozumitelný. Dále proto budu vždy rozlišovat mezi první a druhou verzí testu (obě řešilo 20 žáků), neboť rozdíly v řešeních byly poměrně velké.

První úkol byl zaměřen na propojení funkce a geometrického objektu (trojúhelníku) pomocí analytického vyjádření v kartézské soustavě souřadnic. Použitou formulací jsem se snažil pozorovat tři prvky v práci studentů. Za prvé, stejně jako v předchozích testech, jakým způsobem budou závislost reprezentovat (ot. 2). Za druhé, zda budou využívat uvedených vztahů (ve smyslu funkcí) ke znázornění v grafu (ot. 1) a za třetí, pomocí jakých nástrojů budou hledat ono x, pro které bude obsah trojúhelníku nejmenší.

Úkoly č. 2 a 3 měly sloužit jako doplňující, formulované tak, aby žákům představily problém, který je donutí zamyslet se nad zadáním úkolu 1.

Verze testů se od sebe lišily uspořádáním jednotlivých zadání na stránce, přičemž u druhé jsem jednotlivé podúkoly (a, b a c) oddělil větší mezerou, což některým žákům pomohlo při porozumění zadání úkolu. Dále jsem odstranil možnost d, neboť z použití funkce arkustangens byli někteří žáci rozrušeni a nedařilo se jim do vztahu dosazovat.

2.8.3 Analýza úkolu 1

Původně neplánované dvě verze testu se ukazaly nakonec jako vhodné pro porovnání schopností žáků zvolit správný postup pro řešení úkolu. Uspořádání funkcí na papíře v první verzi testu v podstatě přidávalo žákům jeden dílčí úkol navíc, a to porozumění poměrně složitě formulované otázce, odlišení jednotlivých možností od sebe a zvolení vhodného způsobu zakreslení náčrtku a dosazení do předpisu. Způsob dosazování do jednotlivých funkcí a následné grafické zobrazování získaných informací ukázaly problémy, které žáci s interpretací zadání měli.

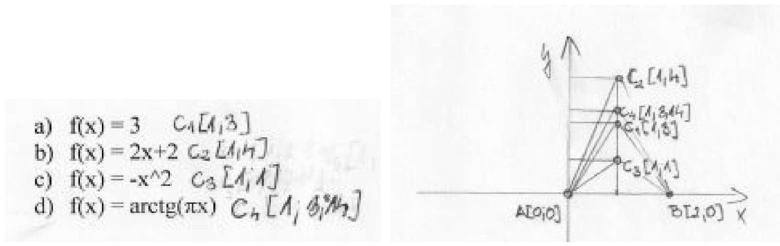
Dosazování

Nejčastějším chybnou interpretací zadání se ukázalo dosazení pouze jedné hodnoty do každé z funkcí. Na obrázku 2.23 žák dosadil pouze číslo 1 do každého vztahu a na základě získaných bodů vytvořil 4 trojúhelníky. Tím jeho řešení prvního úkolu skončilo[11].

Více hodnot do vztahů dosadilo v první verzi testu 8 žáků (40 %), v druhé 13 (65 %), přičemž za správné dosazení bylo počítáno grafické nebo písemné vyjádření souřadnic jednotlivých bodů pro alespoň jednu z funkcí. V několika případech se stalo, že žáci odpověděli

[11] Celý test je k náhlednutí v přílohách 3.10

správně bez jakýchkoli popisů pouze slovně, takové práce nebyly započítány. V těchto případech mohlo dojít ke dvěma postupům vedoucím ke správnému úsudku. Prvním bylo dosazení některých čísel pouze v duchu a následné vyvození závěrů, druhým řešení na základě ještě abstraktnějších úvah – např. na základě vlastností dané funkce. Zastoupení různých způsobů dosazování zachycuje tabulka 2.5.



Obrázek 2.23: Žák dosadil do každého vztahu číslo 1 a pomocí získaných bodů nakreslil jednotlivé trojúhelníky do jednoho obrázku.

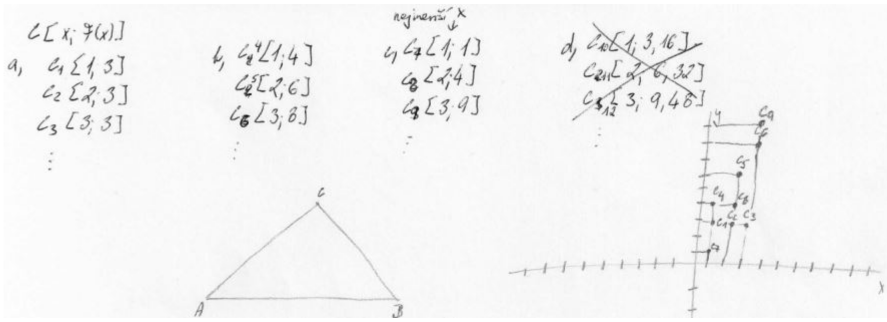
dosazení	1. verze	2. verze
jedno číslo do jednoho vztahu	5	0
jedno číslo do všech vztahů	0	1
více čísel do jednoho vztahu	3	2
více čísel do více vztahů	5	11

Tabulka 2.5: Počty různých dosazení použitých žáky dosazení v jednotlivých verzích.

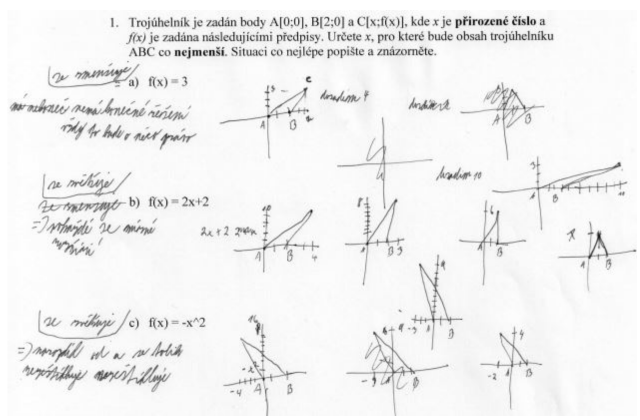
Grafické reprezentace

Grafické znázornění také ukázalo, jaké problémy s pochopením prvního úkolu žáci měli. Objevila se taková řešení, že žáci kreslili všechny získané body do jednoho obrázku (obr. 2.23, 2.24), nebo naopak každý trojúhelník zvlášť (obr. 2.25). Z takových znázornění žáci zpravidla nevyvodili žádné závěry, řešení při jejich použití není úplně zřejmé a žákům dělalo potíže.

Jednotlivé způsoby zakreslení trojúhelníků do obrázku zachycuje tabulka 2.6. Můžeme zde vidět, že zatímco v první verzi testu žáci volili různé způsoby zakreslení, v druhé byl převážně použit ten nejpřehlednější, tedy jeden obrázek k jednomu předpisu funkce. Vizuální uspořádání úkolů na stránce mělo zde velký vliv na pochopení zadání úkolu a postup jeho řešení.



Obrázek 2.24: Zakreslení všech nalezených bodů do jednoho obrázku (pozorováno u pěti žáků).

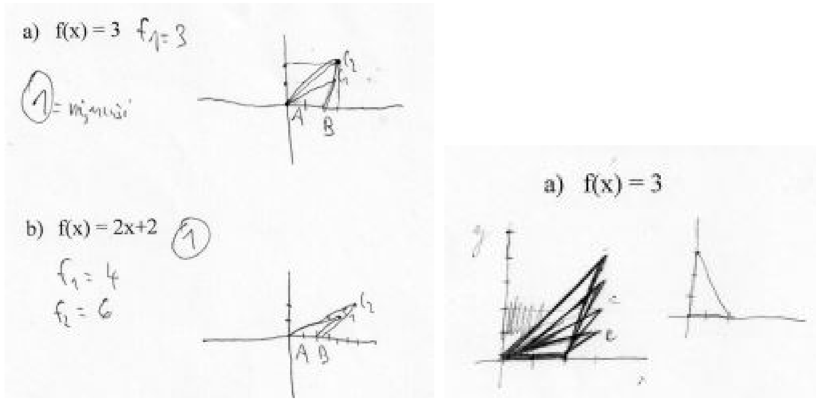


Obrázek 2.25: Zakreslení každého trojúhelníku do zvláštního obrázku (celkem 5 žáků).

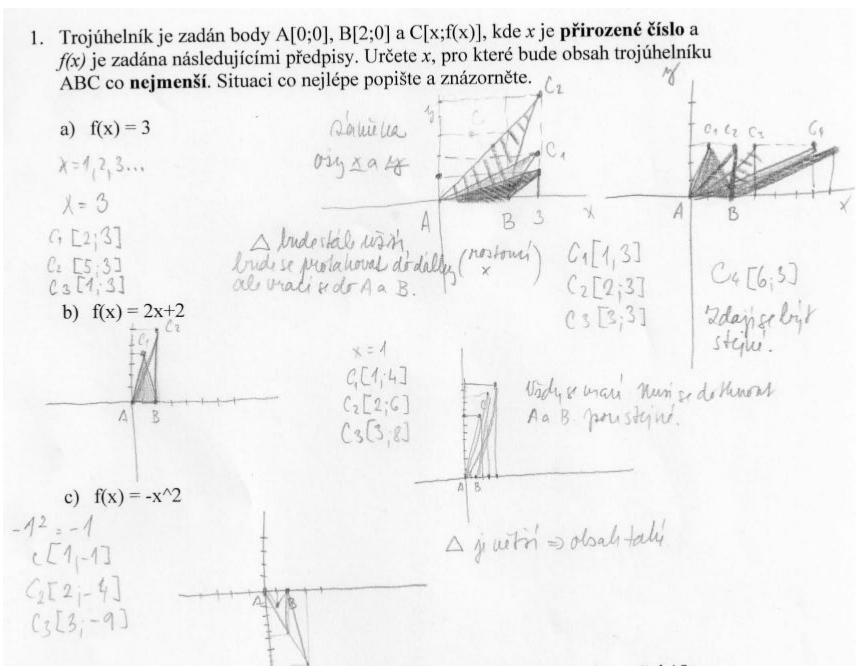
grafické znázornění	1. verze	2. verze
všechny trojúhelníky do jednoho obrázku	5	0
pro každý předpis zvláštní obrázek	4	10
každý troúhelník do zvláštního obrázku	3	2

Tabulka 2.6: Různé způsoby zakreslení trojúhelníků do soustavy souřadnic.

Zajímavé byly dvě práce, ve kterých žáci při vynášení bodů udělali chybu a prohodili souřadné osy (obr. 2.26). Podobně, na obrázku 2.27 žák při vynášení bodů u první funkce také popletl souřadné osy, ale svou chybu si uvědomil a na základě toho nakreslil nový obrázek.



Obrázek 2.26: Prohození souřadných os při vynášení bodu do obrázků.



Obrázek 2.27: Vhodně zvolené grafické znázornění situace i způsob dosazování do vztahů.

Celkem 14 žáků z obou verzí testu (35 %) zvolilo vhodnou grafickou reprezentaci úlohy. Téměř všichni, kteří ji použili, byli schopni z obrázků vyvodit požadované závěry o obsahu trojúhelníků.

Slovní popis

Slovní popis k vyjádření některých zjištěných informací použila přibližně polovina žáků. V druhé verzi testu bylo jeho použití častější než v první, což ale mohlo být dáno rozdíly mezi třídami[12]. Žáci se stejně jako u předchozích testů dopouštěli různých nepřesností a „kostrbatých“ formulací.

- Uváděli chybná tvrzení na základě chybných úvah. Např. na obrázku 2.27 žák vyslovil výrok „Δ bude větší, bude se protahovat do dálky (rostoucí x), ale vrací se do A a B“, podobně další žák tvrdil „obsah trojúhelníku se zvětší, protože se zvětší jeho rozměry“. Z těchto výroků vyplývá mylná doměnka žáků, že obsah trojúhelníku je úměrný jeho obvodu.

- Správná tvrzení formulovaná vlastními slovy. Z těchto žákovských výroků je možno se také mnoho dozvědět, např výrok „Trojúhelník by mohl mít obsah pořád stejný, čím dosadím vyšší x, tím se mi Δ víc klopí v případě 1[13]. (v_c se nemění)“ svědčí o dobrém vhledu žáka do problematiky, nicméně nepodává důkaz tvrzení o stále stejném obsahu.

2.8.4 Analýza úkolů 2 a 3

Při řešení těchto úkolů se žáci dopouštěli podobných chyb jako v předchozím úkolu. V několika případech použili pojmu „rostoucí“ obsah. Několik žáků uvedlo výroky ve smyslu následujících dvou tvrzení „pokud se zvětší x, tak se zvětší i rozměry, a tím pádem se zvětší i obsah Δ“ a „obsah se bude zmenšovat při záporném x“. Oba jsou známkou chybných úvah založených na nedostatečném prozkoumání úkolu způsobeného neprovedeným dosazováním. Je ale nutno přiznat, že žáci čtvrtého ročníku byli ve srovnání s ostatními méně aktivní.

2.8.5 Reflexe testu 4

Test se ukázal zajímavým z hlediska neplánovaného rozdělení na dvě podobné verze. Hlavním pozorovaným aspektem zde byly především grafy a slovní formulace žáků. Z hlediska ostatních aspektů a výzkumných otázek bych označil tento test za informačně nejchudší. Jednalo se o nejméně motivované žáky.

[12]Každá ze tříd měla jiného učitele matematiky.

[13]myšleno zadání funkce $f(x) = 3$.

Kapitola 3

Diskuse

Cílem této kapitoly je zasadit výsledky získané při vlastním výzkumu do kontextu obecných a matematických didaktických teorií a jejich aplikací popsaných v kapitole 1. Pomocí tohoto procesu se snažím odpovědět na formulované výzkumné otázky a případně k těmto odpovědím přidat komentáře související s obsahem kurikula a možnými otázkami, které získané výledky implikují a které jsem nenalezl v prozkoumané literatuře.

Další důležité výsledky, které byly mimo rámce jednotlivých otázek, jsem označil jako „Vybrané pozorované problémy“ a jsou popsány v závěru této kapitoly.

3.1 Otázka 1

Do jaké míry dokáží žáci používat poznatky, které získali při výuce funkcí, v jiných kontextech?

Otázku lze konfrontovat s výsledky testů 2, 3 a 4, jež byly směrovány na žáky, kteří se v době testování věnovali v rámci školní matematiky jiným tématům než funkcím.

Grafické reprezentace

Žáci prokázali, že je jim vlastní používání grafu pro reprezentaci funkcí v kontextu pravděpodobnosti. Používali jich pro vyjádření závislosti pravděpodobnosti na čase (test 2) i pravděpodobnosti na různých číselných hodnotách (test 3). V testu 4 grafické znázorňování zadaných funkcí nebylo použito v žádném z případů, žáci vynášeli pouze jednotlivé body a pomocí nich črtali hledané trojúhelníky.

V souvislosti s vynášením bodů do grafu se však jeví jako velmi důležitý fenomén dosazování výhradně celé časové jednotky (minuty, v několika případech sekundy) v testu 2, v případě testu 3 žáci dosazovali přirozená, resp. celá čísla. Pro žáky je křivka grafu statickým objektem a vynášení hodnot do grafu určuje bod, kterým tato křivka prochází, případně slouží pro zpětné ověření. Žáci vnímají grafické znázornění formálně, z hlediska teorie proceptů nahlíží na graf funkce jako na objekt, není pro ně výsledkem procesu přiřazení.

V testu 4 žáci nepoužívali soustavu souřadnic pro reprezentaci funkcí, ale trojúhelníků daných dvěma statickými body a jedním, který měnil svou polohu. Několik žáků špatně vyneslo body do soustavy souřadnic (prohodili osy souřadnic), ale žádnému z žáků nedělalo problémy vynášení jednotlivých bodů. Žáci více používali soustavu souřadnic z hlediska procesů než u testu 3, vytvořený obrázek pro ně nebyl statickým objektem.

Značení funkcí

V testu 3 nebylo formální značení funkce použito, v testu 4 v zadání prvního úkolu museli žáci spočítat souřadnice bodu $C[x, f(x)]$. Na základě tohoto značení většina žáků neměla problém vyjádřit alespoň jeden bod (nejčastěji pro $x = 1$). Značení funkcí žáci čtvrtého ročníku ve většině případů používali s porozuměním. Pokud vyjádření bodu nebylo provedeno, nebylo možné prokázat, že se tak stalo kvůli neporozumění značení.

Charakteristiky a vlastnosti funkcí

Žádný z žáků v testech 2 a 3 nepoužil k řešení zadaného úkolu formálních vlastností funkcí ani jejich pojmenování (rostoucí, klesající, prostá, ...). V žádném z těchto testů také nebyly použity termíny definiční obor ani obor hodnot. V několika případech bylo pozorováno použití matematické symboliky, zejména intervalů, případně značení číselných oborů $(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

3.2 Otázka 2

Do jaké míry žáci ovládají způsoby různých reprezentací funkcí a závislostí a která z nich je pro ně nejpřijatelnější?

Reprezentace funkcí

P. W. Thompson (1994) se mimo jiné zabývá i tím, jak žáci středních a vysokých škol chápou funkce reprezentované tabulkami, grafy a předpisy. Tyto tři reprezentace je z hlediska mé práce nutno ještě rozšířit o slovní popis funkce, neboť jej v rámci testů žáci často používali a, jak ukazuje Kopáčková (2003), navzdory použití vlastního, matematicky neformálního, popisu funkce, jsou žáci schopni pracovat často správně a s porozuměním.

Thompson (1994, s. 23) zdůrazňuje nedostatky přístupu k vyučování funkcí pomocí vícenásobných reprezentací (*multiple representation*), když říká:

> Tabulky, grafy a vyjádření mohou být vícenásobnými reprezentacemi funkcí pro nás, ale neviděl jsem žádný důkaz toho, že by byly vícenásobnou reprezentací čehokoli pro žáky[1].

Podobným způsobem, jakým se liší naše[2] poznatky o funkcích od poznatků žáků, se liší i poznatky o reprezentacích a vztazích mezi nimi. Zatímco poznatky o jednotlivých reprezentacích byly v testech pozorovány (i když někdy chybné či neúplné), poznatky o vztazích mezi těmito reprezentacemi žáci zpravidla nepoužili. Žáci tedy spíše na jednotlivé reprezentace téže funkce nahlížejí jako na oddělené objekty, mezi nimiž nejsou žádné hlubší vztahy, pouze přechod pomocí různých algoritmů.

Vztahy mezi jednotlivými reprezentacemi je zde možno zařadit v rámci APOS teorie do stádia akcí a procesů, nikoli do stádia objektů. Na nedostatečnou „hloubku“ porozumění přechodům mezi reprezentacemi poukazuje např. nedostatečné a neefektivní dosazování nebo upravování získaných informací.

3.3 Otázka 3

Jaké mají žáci prototypické příklady funkcí?

Vzhledem k tématu prototypů se ukazuje jako velmi podstatné rozlišovat mezi jednotlivými reprezentacemi funkcí, neboť, jak bylo řečeno, žák je vnímá spíše nezávisle na sobě a co může být pro něj typickým příkladem grafu funkce, nemusí být typickým příkladem při reprezentaci tabulkou či předpisem.

Grafické reprezentace

Kopáčková (2003, s. 118, 119) označuje za nejčastější prototypy grafů funkcí ty s předpisem $f(x) = ax + b$, $a > 0$, $b \neq 0$ (příp. $b = 0$). Výsledky mého výzkumu toto potvrzují pouze částečně, neboť zde žáci zpravidla používali obecné lineární funkce, zatímco Kopáčková ozna-

[1] „Tables, graphs, and expressions might be multiple representations of functions to us, but I have seen no evidence that they are multiple representations of anything to students.“

[2] Zde jsou zájmenem „naše“ myšleny poznatky učitelů, odborníků.

čuje za prototyp rostoucí funkci, případně procházející počátkem soustavy souřadnic. Toto si vysvětluji kontextem, ve kterém byly tyto výsledky pozorovány. Kopáčková požadovala zcela libovolné funkce a žáci kreslili nejčastěji lineární rostoucí. V mých testech (zejména v testu 2) žáci zpravidla vynášeli body a ty poté (nesprávně) spojovali přímkou, neboli graf linearizovali.

Tento postup žáci používali, i pokud museli různými způsoby upravovat své výsledky. Zpravidla se jednalo o deformaci os souřadnic, deformaci vynášeného grafu a zanedbání některých vlastních dílčích výsledků nebo informací ze zadání.

3.4 Otázka 4

Vnímají žáci rozdíl mezi přímou resp. nepřímou úměrností a rostoucí resp. klesající funkcí?

Výsledky testu 2, kde byla tato problematika primárně zkoumána v úkolu 3, ukázaly, že přímou a nepřímou úměrnost žáci nemají ve své poznatkové struktuře s funkcemi příliš propojenu. Většina žáků přiřadila funkcím přímou resp. nepřímou úměrnost náhodně, svoji volbu nijak nezdůvodnila. Jediným pozitivním zjištěním bylo, že někteří žáci dokázali jako nepřímou úměrnost identifikovat funkci $f(x) = 1/x$, ovšem ve většině případů opět bez jakéhokoli zdůvodnění.

Zkoumání, zda žáci dokáží rozlišovat mezi přímou resp. nepřímou úměrností a rostoucí resp. klesající funkcí, se ukázalo jako bezpředmětné, pokud žáci tyto speciální funkce s poznatky o funkcích nemají propojeny. Pouze jediný žák označil přímou úměrnost sloven rostoucí a nepřímou slovem klesající, tedy použil požadovaného kontextu k zodpovězení otázky, i když chybně. Pojmy rostoucí a klesající funkce přiřadil k přímé a nepřímé úměrnosti pouze jediný žák. Pojmy přímé a nepřímé úměrnosti nejsou v RVP nijak dále zařazovány do kontextu další probírané látky, v čemž spatřuji problém. Žáci v nich nevidí speciální případy funkcí, chápou je z hlediska Hejného členění matematického obsahu jako objekty a postupy, nikoli jako schémata, která by byla u žáků propojena s dalšími poznatky.

3.5 Otázka 5

Vnímají žáci pojem definiční obor formálně či neformálně?

Experiment v (Kopáčková, 2003, s. 85) ukázal, že „žáci při konstrukci grafu nerozlišují mezi diskrétním a spojitým definičním oborem“. Na základě výsledků mých testů je možné toto pozorování potvrdit a rozšířit dvojím způsobem.

- Žáci nerozlišují mezi souvislým a diskrétním definičním oborem nejen při konstrukci grafu, ale ani při slovním popisu funkce (obr. 2.14, 38).
- Žáci nerozlišují ani mezi souvislým a diskrétním oborem hodnot, tedy neověřují, zda mohou vynesené body propojit spojitou křivkou či ne (zejména v testu 3).

S těmito výsledky úzce souvisí pozorovaný aspekt dosazování. Žáci zpravidla nedosazovali do vztahů, aby si zpětně ověřili, že jimi nakreslené grafy jsou korektní (test 1), spíše používali tohoto postupu jako „nástroje pro potvrzení svých intuitivních představ“, neboť do závislostí dosazovali pouze takové hodnoty, které je potvrzovaly.

Optikou APOS teorie je pro žáky dosazování stále na úrovni akce, neboť nedokáží přizpůsobovat tento nástroj svým potřebám (dosazovat jiné než přirozené nebo celé hodnoty, vybírat dosazované hodnoty podle zadané funkce, ...). Slavit (1997) toto popisuje na příkladu, kde akční hledisko funkce $f(x) = 3x^2 - 7$ je „algoritmem pro vypočtení hodnot pro dané vstupy“[3]. Podle mého výzkumu žáci tohoto algoritmu nevyužívají efektivně a nemají jej propojen s dalšími poznatky, nelze jej proto označit za schéma[4].

3.6 Otázka 6

Používají žáci značení funkcí symbolem f formálně?

Jeden z výroků žáků ve výzkumu Iliada (2006) charakterizuje poznatky o funkcích, které jsem pozoroval i ve svém výzkumu: „A function is an equation“. V testech přístup žáků k závislostem značeným písmeny naznačuje, že uvedené vztahy skutečně jako rovnice zkoumali – posuzovali, zda se sobě rovnají obě strany, pokud dosadí za A i za B různá čísla. Považovali obě proměnné za nezávislé. Takovýto postup při hledání funkčních hodnot přirozeně nemá smysl.

Podobné výsledky získala i M. Sajka při pozorování vývoje chápání symbolu $f(x)$ u šestnáctileté žákyně (Sajka, 2003).

[3] „an algorithm used to compute numeric values for a given input“

[4] Schéma je zde myšleno v kontextu APOS teorie, nicméně se domnívám, že principem odpovídá i Hejného schématu členění matematického obsahu.

3.7 Otázka 7

Dochází u žáků k restrukturaci poznatků při ztotožnění intuitivních prekonceptů s vyučovanými pojmy?

Odpovědět na tuto výzkumnou otázku na základě získaných dat by bylo příliš spekulativní, neboť v rámci písemných testů nelze přesně analyzovat myšlenkové pochody žáků při řešení. Na základě získaných zkušeností věřím, že více informací by z tohoto hlediska poskytl hloubkový kvalitativní výzkum realizovaný pomocí kombinace série testů a klinických rozhovorů.

3.8 Vybrané pozorované problémy

Soustava souřadnic

Dubinsky a Wilson (2013) zjistili, že žáci SŠ volili ke znázornění libovolné funkce kartézskou soustavu souřadnic až na posledním místě, pokud si mohli vybrat. K reprezentaci funkcí používali raději šipkové diagramy či zápis pomocí uspořádých dvojic.

Kopáčková ve své práci shledává, že idea „kartézských souřadnic má nedostatečnou propedeutiku“ (Kopáčková, 2003, s. 74).

Principiální chyby žáků druhých, třetích i čvrtých ročníků při vynášení jednotlivých bodů do soustavy souřadnic poukazují na to, že ani požadované kartézské soustavě souřadnic není ve výuce věnován dostatečný prostor. Pozoroval jsem tyto:

- vynesení hodnoty z definičního oboru i oboru hodnot na jednu osu,
- prohození os souřadnic,
- zkreslení měřítek os a na jeho základě nakreslení chybného grafu.

Na základě těchto výsledků se domnívám, že kartézská soustava souřadnic je chápána žáky spíše jako objekt než jako nástroj k zobrazování funkcí, žáci nevnímají postupy, které se za tímto pojmem skrývají.

Spojitost

Fenomén spojitosti funkce resp. souvislosti definičního oboru jsem identifikoval jako problémový. Nutno podotknout, že to nemusí být vinou žáků nebo nesprávného sestavení či aplikace RVP. Spojistost je pojmem, se kterým se žáci setkávají v několika fázích. První začíná již v předškolním věku, kdy děti kreslí spojitou čáru. Každé z nich dokáže nějak vysvětlit, jak se liší spojitá čára od nespojité. K rozvíjení získaných poznatků o spojitosti dochází na ZŠ, kdy se žáci seznamují s propedeutikou tohoto pojmu v rámci prvních izolovaných modelů funkcí. Pro další fázi je však potřeba přechod od intuitivního, silně zakořeněného chápání spojitosti, k formálnímu matematickému, popisovanému pomocí nekonečně malých veličin.

Domnívám se, že tento konflikt je natolik důležitý, že by spojitosti funkcí měla být ve výuce na SŠ věnována větší pozornost. Důvodů zde spatřuji hned několik.

- Spojitost je podstatným pojmem pro pochopení infinitesimálního počtu.
- Pomocí spojitosti je možné plnohodnotně ukazovat netriviálnost a hloubku jak samotné kartézské soustavy souřadnic, tak i pojmů definiční obor[5] a obor hodnot. Tyto pojmy se ve výzkumu ukázaly jako problematické, žáky chápané formálně a bez hlubšího porozumění.
- Především je ale na tomto pojmu možno prezentovat kontrast mezi triviální vlastností, kterou žáci znají z dětství a poměrně hlubokým matematickým pojmem.

Samozřejmě není žádoucí, abychom žáky mátli speciálními nespojitými funkcemi, jako je Riemannova funkce. Práce s funkcemi signum či celá část by ale podle mého názoru měla mít ve výuce své místo.

Grafické reprezentace

Podobné problémy, jaké pozoruje Thompson (1994) u vícenásobných reprezentací, pozoruje i Eisenberg (1991) s tím rozdílem, že nerozlišuje na více různých reprezentací, ale popisuje pouze symbolické a vizuální znázornění a přechody mezi nimi: „Zdá se, že žáci přemýšlejí o pojmech teorie funkcí pouze v symbolickém smyslu.[6]“ V rámci přípravy na výzkum jsem viděl snahu učitelů proti tomuto fenoménu bojovat právě pomocí používání různých reprezentací funkcí ve výuce a domnívám se, že žáci jsou schopni částečně nahlížet na funkce i vizuálně, nicméně, jak již bylo řečeno, tyto reprezentace nemají příliš propojeny.

Tato zjištění mne vedou k formulování hypotézy, že poznatky o symbolické reprezentaci funkce učitelů a žáků jsou si bližší než poznatky o vizuální reprezentaci. Tuto hypotézu považuji za vhodnou k dalšímu zkoumání jak empiricky, tak studiem odborné literatury.

[5] Tuto problematiku ve své bakalářské práci *Elementární funkce a definiční obor* podrobně zpracovává T. Vitásek (2012)

[6] „Students seem to think of function concepts in only a symbolic representational mode.“

Slovní popis

Při zadávání všech testů jsem žákům zdůrazňoval, aby se snažili veškeré své činnosti popisovat slovně. Celkově slovní popis svého řešení v jakékoli podobě použila více než polovina žáků, přičemž některé výroky byly velmi kreativní a zajímavé. Na jejich základě je možné formulovat následující pozorování, která jsou pouze možnou interpretací pozorovaných jevů. Jsou však zajímavá a mohou vést k dalším námětům na případná zkoumání.

- Žáci, kteří používali spíše formálnějších nástrojů (grafy, dosazování) než slovního popisu, se více uchylovali k deformaci svých výsledků na základě prototypů funkcí. Tyto situace je možno nalézt především v analýzách testu 1 (při kreslení grafu funkcí často docházelo k linearizaci).

- Slovní popis užitý ve formě doprovodného nástroje k nějaké další reprezentaci byl často použit pouze k formulování triviálních výroků. Tento fenomén byl pozorován ve všech testech.

- Slovní popis použitý samostatně byl často netriviální a málokdy chybný.

Jazykový pohled na reprezentace funkcí

Nalezení teoretického rámce k popsání některých pozorovaných aspektů bylo pro mne obtížné a u některých (např. u slovního popisu) dokonce mimo mé možnosti v rámci diplomové práce. Propojení jednotlivých jevů jsem ale shledal natolik zajímavým a významným, že mne nutilo k hledání možného teoretického základu, pomocí kterého bych mohl popsat alespoň některé z aspektů. Ten se mi podařilo nalézt v práci L. Kvasze (2008).

Jeho přístup k pozorování historického vývoje matematiky, myšlenka genetické paralely a rozmanitost teorie funkcí z hlediska fylogenetického (Kopáčková, 2003, s. 4 – 34) mne vedou k formulaci hypotézy, zda by bylo možné pozorovat vyjádření žáků v rámci některých aspektů z pohledu úrovně jazyka, který k tomuto vyjadřování používají. Vhodné k takovému pozorování se jeví zejména téma spojitost, díky popsanému kontrastu intuitivního a formálního chápání, značení funkcí, kvůli návaznosti na mnohá další témata (např. výrazy, rovnice, analytická geometrie) a grafy, jako nejčastější způsob vizuální reprezentace, který je, jak popisuji výše, často chápán formálně.

Takto popsaný pohled na poznávací proces pojmu funkce by bylo vhodné zkoumat z několika směrů. Například analýzou současného i minulého stavu vzdělávacího obsahu, tedy rámcových vzdělávacích programů a učebních osnov a učebnic, a zkoumání jejich případné korelace s přechody mezi jazyky. Dále analýzou současných teorií poznávacího procesu pojmu funkce a prvky podobnosti s popsaným jazykově-historickým přístupem. Jako nejvhodnější se ale samozřejmě jeví zkoumání poznávacího procesu z tohoto pohledu pomocí empirického výzkumu přímo u žáků.

Závěr

Na základě provedené rešeršní činnosti popsané v první kapitole a výsledků vlastního výzkumu realizovaného v rámci hodin matematiky na střední odborné škole jsem formuloval některé problémové aspekty, které se vyskytují na úrovni středoškolského pojetí vyučování teorie funkcí. Právě činnosti rozvíjející tyto aspekty považuji za klíčové pro rozvoj žákovských poznatků o funkcích a schopnosti tyto poznatky aplikovat v různých kontextech. Ve třetí kapitole jsem formuloval několik hypotéz, které s tímto tématem bezprostředně souvisí a které považuji za hodné dalšího výzkumu. Své výsledky považuji za přínosné ve třech různých rovinách.

První rovinou je základní souhrn problematiky didaktiky teorie funkcí, některých vybraných výzkumů na toto téma a interpretace vlastních dat získaných v prostředí české střední školy pomocí popsaného teoretického rámce, který může poskytnout odbornému čtenáři základní pohled na tuto problematiku. Z hlediska srovnání s nejčastěji citovanou prací A. Kopáčkové (Kopáčková, 2003) jsem se pokusil rozvinout některé její myšlenky a popsat často podobné pozorované jevy pomocí obecnějších hledisek.

Druhou rovinou, ve které by tato práce mohla byla přínosem, je inspirace pro učitele matematiky. V tomto směru považuji za pozitivní náměty úkolů provazující jednotlivá témata a vybrané výsledky mého výzkumu. Mou snahou je podpořit ve vyučovacím procesu konstruktivní přístup k poznávání jednotlivých problematických aspektů, zejména soustavě souřadnic, grafické reprezentace a spojitosti křivky resp. souvislosti definičního oboru.

Třetí rovinou, ve které pozoruji alespoň částečný úspěch, je přínos pro mou vlastní osobu. Ten pozoruji jednak ve svém osobním rozvoji při poznávání některých oblastí didaktiky matematiky a jejich aplikace v didaktice teorie funkcí, jednak ve zkušenosti s realizací vlastního výzkumu.

Právě nedostatek zkušeností s plánováním, realizací a analýzou výzkumu bych označil za hlavní negativum mé práce, se kterým jsem se neustále potýkal prakticky ve všech fázích tvorby, ať už šlo o prozkoumání velkého množství teoretických materiálů existujících k tématu didaktiky funkcí, formulaci vhodných výzkumných otázek, realizaci výzkumu v rámci hodin matematiky nebo o analýzu velkého množství získaných dat.

I přesto věřím, že seznámení čtenáře s některými průvodními jevy poznávacího procesu pojmu funkce, o které jsem se v práci pokusil, může být inspirující.

Literatura

BERTRAND, Yves. *Soudobé teorie vzdělávání Přel. O. Selucký.* 1.vyd. Praha: Portál, 1998, 247 s. ISBN 80-717-8216-5.

DUBINSKY, E. D.; MCDONALD, Michael. APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. *NEW ICMI STUDIES SERIES*, 2001, 7: 275-282.

DUBINSKY, Ed a Robin T. WILSON. High school students' understanding of the function concept. *The Journal of Mathematical Behavior* [online]. 2013, roč. 32, č. 1, s. 83-101 [cit. 2013-04-21]. ISSN 07323123. DOI: 10.1016/j.jmathb.2012.12.001.

EDWARDS, Barbara S.; WARD, Michael B. Překvapení z didaktického výzkumu: Jak studenti „užívají" matematické definice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 2005, 50.3: 221-236.

EISENBERG, Theodore. Functions and associated learning difficulties. In: *Advanced mathematical thinking.* Springer Netherlands, 1991. p. 140-152.

GAVORA, Peter. *Výzkumné metody v pedagogice: příručka pro studenty, učitele a výzkumné pracovníky.* Brno: Paido - edice pedagogické literatury, 1996, 130 s. ISBN 80-859-3115-X.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.*2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-807-3673-970.

Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky [online]. Editor Milan Hejný, Jarmila Novotná, Naďa Vondrová. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, viii, 212 s. [cit. 2013-04-07]. ISBN 80729018931.

HEJNÝ, Milan. (1984) História učí učiť. *Matematické obzory.* 23, s. 311

ILIADA, E. a S. Panayotis. How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 2006. roč.3, č.2. ISSN 1551-3440.

KOPÁČKOVÁ, Alena. *Pojmotvorný proces konceptu funkce.*Praha, 2003. Doktorská disertační práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

KVASZ, Ladislav. *Patterns of change: linguistic innovations in the development of classical mathematics.* [London: Springer, distributor], c2008, xviii, 261 p. ISBN 978-376-4388-393.

PRŮCHA, Jan. *Pedagogický slovník.* 3., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Portál, 2001, 322 s. ISBN 80-717-8579-2.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 2013-06-07].

SAJKA, Miroslawa. A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. *Educational Studies in Mathematics* , 2003, 53.3: 229-254.

SFARD, Anna. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 1991, 22.1: 1-36.

SFARD, Anna; LINCHEVSKI, Liora. The gains and the pitfalls of reificationthe case of algebra. In: *Learning mathematics.* Springer Netherlands, 1994. p. 87-124.

Slovník spisovného jazyka českého. Díl II N-Q. 1. vyd. Praha: Nakladatelství československé akademie věd, 1964, 1191 s.

SLAVIT, David. An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 1997, 33.3: 259-281.

SMITH, Edward E. 2 Concepts and thought. *The psychology of human thought*, 1988, 19.

STRAUSS, Anselm. *Základy kvalitativního výzkumu: Postupy a techniky metody zakotvené teorie* Přel. S. Ježek. 1.vyd. Boskovice: Albert, 1999, 196 s. ISBN 80-858-3460-X.

TALL, David, GRAY, Eddie et al. Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2001, 1.1: 81-104.

THOMPSON, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 2144). Providence, RI: American Mathematical Society.

VINNER, Shlomo. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1983, 14.3: 293-305.

VITÁSEK, Tomáš. *Elementární funkce a definiční obor.* Praha, 2012. Bakalářská. Univerzita Karlova.

ZAVŘEL, Karel. *Paralely ve vývoji logického myšlení žáka a v dějináách logiky.* Praha, 2012. Diplomová. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Seznam tabulek

Seznam obrázků

Přílohy

Jméno: ____________________ Datum: ____________________

Třída: ____________________

1. Jak se mění *f(x)*, dosazujeme-li za x různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.

   - $f(x) = -x$
   - $f(x) = \frac{1}{x}$
   - $f(x) = \frac{1}{x} - x$
   - $f(x) = \frac{1}{1-x}$

2. Mají předchozí závislosti něco společného?

3. Které z uvedených závislostí reprezentují přímou resp. nepřímou úměrnost?

4. Jakých maximálních a minimálních hodnot tyto mohou závislosti pro daná *x* nabývat?

Obrázek 3.1: 2. ročník, 1. verze, značení závislosti symbolem f

Jméno: ____________________ Datum: ___________________

Třída: _____________________

1. Jak se mění hodnoty B, dosazujeme-li za A různá celá čísla? Popište nebo znázorněte libovolným způsobem. Všechny své kroky popisujte slovně.

    - B = -A

    - B = $\frac{1}{A}$

    - B = $\frac{1}{A}$ - A

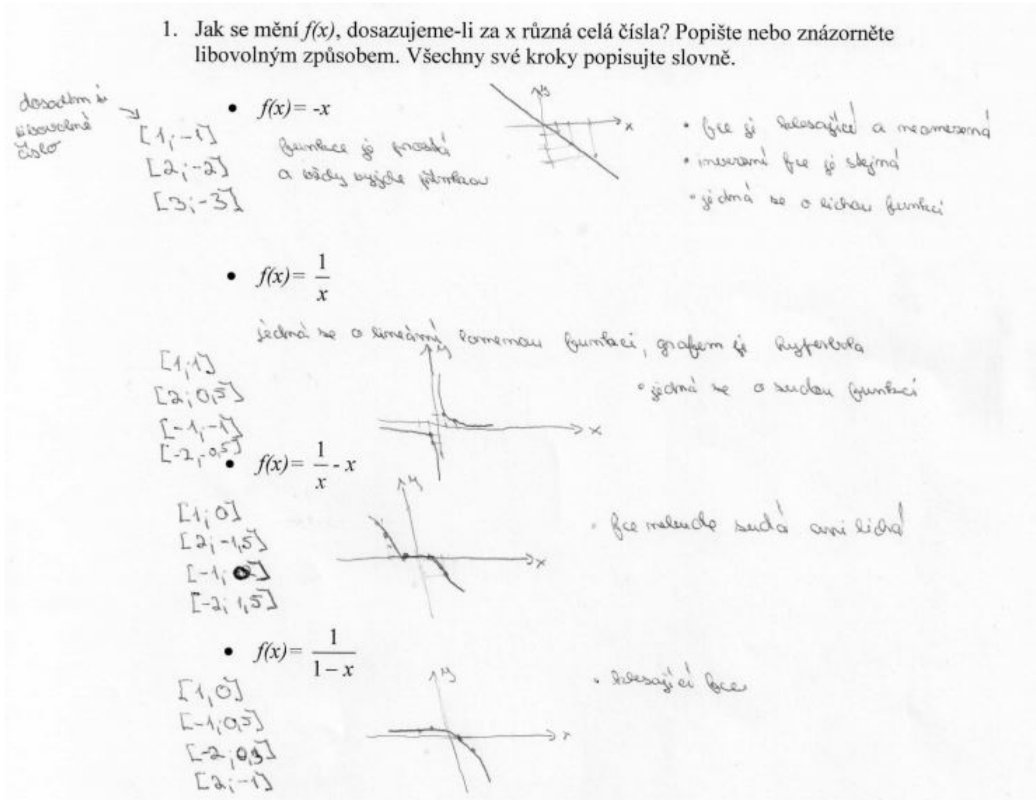
    - B = $\frac{1}{1-A}$

2. Mají předchozí závislosti něco společného?

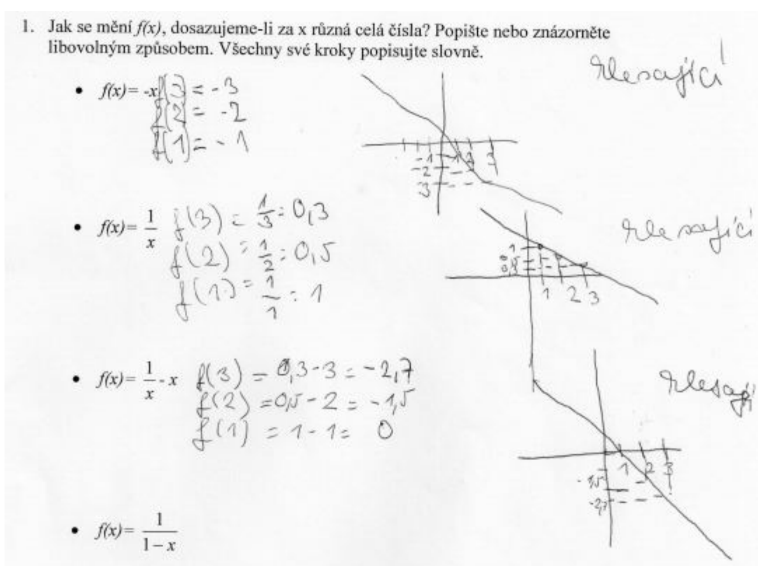
3. Které z uvedených závislostí reprezentují přímou resp. nepřímou úměrnost?

4. Jakých maximálních a minimálních hodnot mohou tyto závislosti pro daná A nabývat?

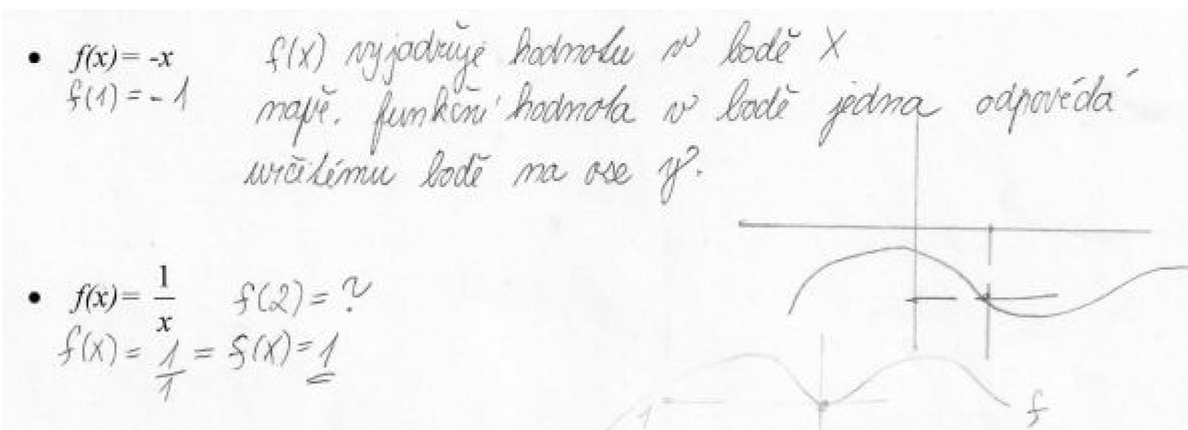
Obrázek 3.2: 2. ročník, 2. verze, značení závislosti ve tvaru B(A).



Obrázek 3.3: Chybný graf vytvořený na základě vynesení dvou bodů.



Obrázek 3.4: Žák vynesl body do grafu natolik nepřesně, že je mohl spojit přímkou.



Obrázek 3.5: Žák nakreslil na základě vynesení bodu sinusoidu.

Jméno: ____________________ Datum: ____________________

Třída: ____________________ Čas: 30 min

Tramvaj jezdí pravidelně jednou za 10 minut.

1. Jaká je pravděpodobnost, že do jedné minuty od mého příchodu na zastávku přijede tramvaj? Zdůvodněte.

2. Jak se zvyšuje pravděpodobnost, že přijede tramvaj, když čekám na zastávce? Zkuste tuto změnu pravděpodobnosti znázornit graficky a popište ji co nejpřesněji vlastními slovy.

3. Jakých hodnot může pravděpodobnost z předchozího příkladu nabývat?

4. Jaká je pravděpodobnost, že přijede tramvaj do 20 sekund od mého příchodu? Zamyslete se, jakými způsoby můžeme tuto pravděpodobnost odvodit nebo spočítat.

5. Pro jaké časy můžeme určovat pravděpodobnost příjezdu tramvaje?

Obrázek 3.6: 3. ročník, 2. verze, pravděpodobnost příjezdu tramvaje

Jméno: ____________________ Datum: ___________________

Třída: _____________________

Představme si desetistěnnou hrací kostku.

1. Jaká je pravděpodobnost, že padne jedno konkrétní číslo?

2. Je možné rozšířit úvahy o určování pravděpodobnosti na libovolná čísla? Tedy např. jaká je pravděpodobnost, že padne číslo mezi 0 a 2,75?

3. Znázorněte a slovně popište pravděpodobnost, že padne číslo mezi 0 a x, kde x není pouze celé číslo. Popište, co všechno o takovém vztahu můžete říci.

4. Pro jaká všechna čísla x můžeme určovat tuto pravděpodobnost?

5. Jakých hodnot může tato pravděpodobnost nabývat?

6. Zkuste se zamyslet, jak by se mohla tato pravděpodobnost hodů zobecnit na dvě desetistěnné kostky, kde jedna by určovala desítky, druhá jednotky a výsledkem by bylo dvojciferné číslo.

Obrázek 3.7: 3. ročník, 2. zadání, 1. verze, pravděpodobnost hodu kostkou

Jméno: ______________________ Datum: _____________________

Třída: _______________________

1. Trojúhelník je zadán body A[0;0], B[2;0] a C[x;f(x)], kde *x* je **přirozené číslo** a *f(x)* je zadána předpisem:

   a) f(x) = 3
   b) f(x) = 2x+2
   c) f(x) = -x^2
   d) f(x) = arctg(πx)

   Určete *x*, pro které bude obsah trojúhelníku ABC co **nejmenší**.

2. V jakých případech se obsah trojúhelníku pro rostoucí *x* zvětšuje (zmenšuje)? Zdůvodněte.

3. Jak se bude v jednotlivých případech měnit obsah trojúhelníků pro celá *x* jdoucí do nekonečna?

Obrázek 3.8: 4. ročník, 1. verze, funkce jako objekty v analytické geometrii

Jméno: ____________________ Datum: ____________________

Třída: ____________________

1. Trojúhelník je zadán body A[0;0], B[2;0] a C[x;f(x)], kde *x* je **přirozené číslo** a *f(x)* je zadána následujícími předpisy. Určete *x*, pro které bude obsah trojúhelníku ABC co **nejmenší**.

   a) f(x) = 3

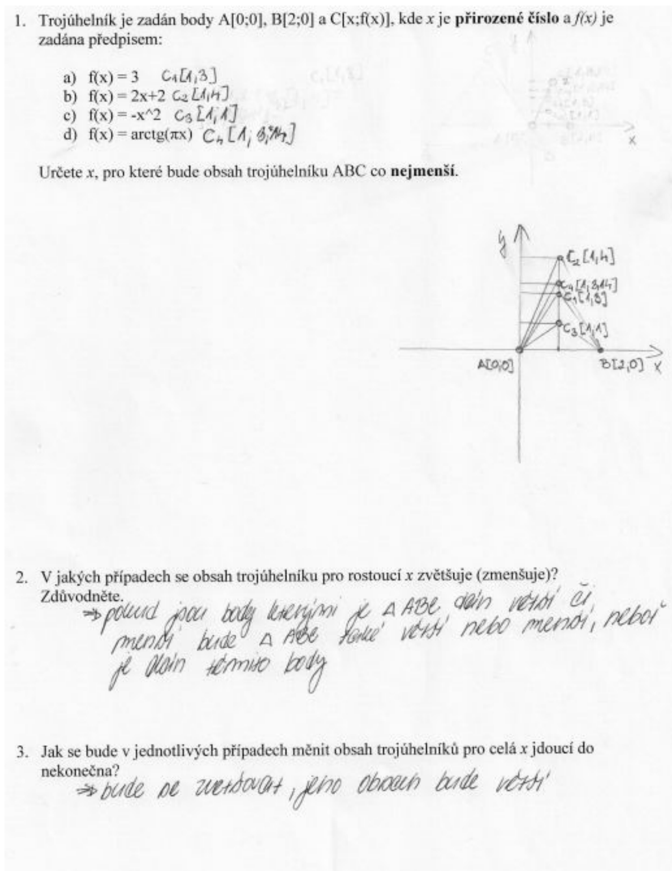
   b) f(x) = 2x+2

   c) f(x) = -x^2

2. V jakých případech se obsah trojúhelníku pro rostoucí *x* zvětšuje (zmenšuje)? Zdůvodněte.

3. Jak se bude v jednotlivých případech měnit obsah trojúhelníků pro celá *x* jdoucí do nekonečna?

Obrázek 3.9: 4. ročník, 2. verze, funkce jako objekty v analytické geometrii



1. Trojúhelník je zadán body A[0;0], B[2;0] a C[x;f(x)], kde *x* je **přirozené číslo** a *f(x)* je zadána předpisem:

   a) f(x) = 3 C1[1;3]
   b) f(x) = 2x+2 C2[1;4]
   c) f(x) = -x^2 C3[1;1]
   d) f(x) = arctg(πx) C4[1; 3,14]

   Určete *x*, pro které bude obsah trojúhelníku ABC co **nejmenší**.

2. V jakých případech se obsah trojúhelníku pro rostoucí *x* zvětšuje (zmenšuje)? Zdůvodněte.
   ⇒ pokud jsou body kterými je △ABC dán větší či menší bude △ABC taky větší nebo menší, neboť je dán těmito body

3. Jak se bude v jednotlivých případech měnit obsah trojúhelníků pro celá *x* jdoucí do nekonečna?
   ⇒ bude se zvětšovat, jeho obsah bude větší

Obrázek 3.10: Řešení žáka s nedostatečným dosazením a a znázorněním v grafu a chybným komentářem.