Nikol Radović, Sisak

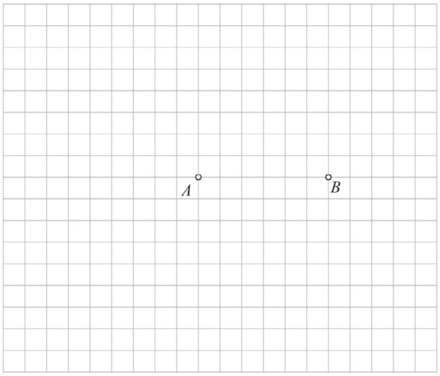
SIMETRALA I POLOVIŠTE DUŽINE
nove zgode geometrijske družbe

– Pogledajte idući izazov – započeo je novo druženje profesor Kosinus.

Zadatak.

Odredi sve točke susreta Krugoslava i Kvadratoslava, jednako udaljene od njihovih polaznih točaka, ako je polazna točka Krugoslava točka A, a točka B polazna točka za Kvadratoslav, Slika 1. Riješiti problem u dva slučaja a) u Euklidiji i b) u Nigdjezemskoj.

Zatim je nastavio: – Za lakše rješavanje i crtanje predlažem da preuzmete datoteku Udaljenost.gsp.



Slika 1.

– To je simetrala dužine u Euklidiji – glasno razmišlja Lukas.

– Točno, ali prvo probajte riješiti oba slučaja – komentira profesor Kosinus. - Kada svi riješite, usporedit ćemo rješenja.

Družba je počela rješavati postavljeni problem. Čulo se Šimunovo mrmljanje u bradu:

– Lako je to u Euklidiji, ali u Nigdjezemskoj… bit će svašta.

– Kako znaš? – znatiželjna je Maja.

Šimun važno tumači:

– Sjetio sam se sličnog zadatka koji je rješavao moj brat, kada smo mi tek učili simetralu dužine u školi. Namučio se.

Ostali su rješavali i pravili se da ne slušaju raspravu. Miševi su „klikali” i „klikali”. Nakon nekog vremena Bubač je napravio inspekciju jednim brzim preletom i zaključio: problem riješen. To je bio znak družbi da počinje razgovor o zadatku.

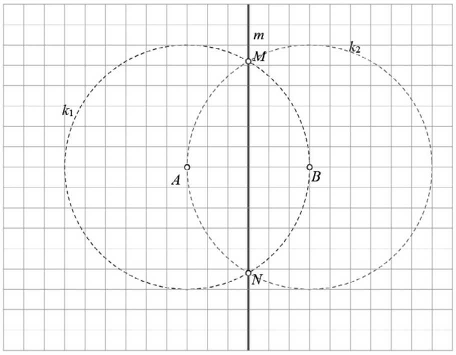
Prvo se javila Petra. Prikazala je dvije Slike: 2.a) i b). Svi su kimali glavama, potvrđujući da su i oni slično rješavali problem. Profesor Kosinus upita:

– Bi li netko nešto komentirao?

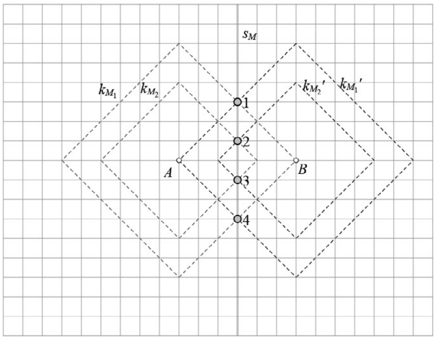
Krugoslav se osjetio prozvanim te je počeo objašnjavati:

– U slučaju Euklidije skup svih točaka koje su jednako udaljene od točaka A i B konstruirat ćemo tako da nacrtamo dvije kružnice k_1 i k_2 sa središtima u točkama A i B, polumjera istih duljina, primjerice $|AB|$. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u dvije točke, M i N. Pravac $m = MN$ skup je svih točaka jednako udaljenih od točaka A i B, Slika 2.a).

– Ti si objasnio korake konstrukcije simetrale dužine ako su zadane točke A i B, rubne točke te dužine – komentirao je Šimun i nastavio: – Slično možemo kopirati i u slučaju Nigdjezemske, ali konstruiramo M-kružnice k_{M_1} i $k_{M'_1}$ sa središtima u točkama A i B koje se sijeku u točkama 1 i 2, pa ponovno M-kružnice koje se sijeku u točkama 3 i 4. Pravac s_m je M-simetrala te dužine ili skup svih točaka koje su u Nigdjezemskoj jednako udaljene od točaka A i B, Slika 2.b).

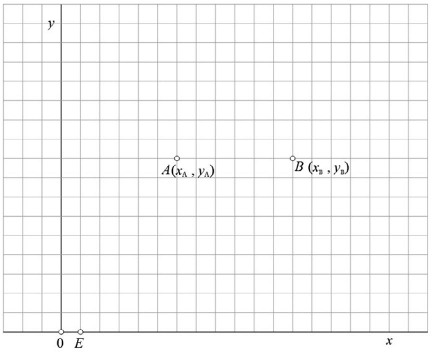


Slika 2.a)

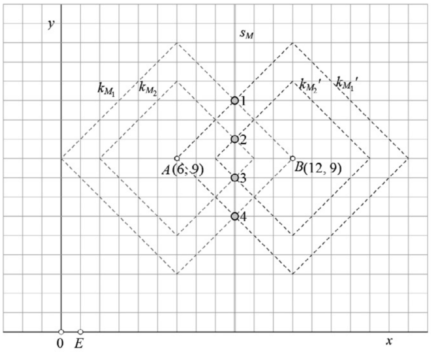


Slika 2.b)

– Sada pretpostavimo – uključio se profesor Kosinus – da je zadan pravokutni koordinatni sustav xOy, Slika 3. te točke s koordinatama, primjerice, $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$. Probajte pogledati rješenje u Nigdjezemskoj u ovoj situaciji.



Slika 3.a)



Slika 3.b)

Družba je utihnula. Malo su kolutali očima i glavama te uspoređivali slike.

– Mislim da sam shvatio – čuo se glas Lukasa – u ovom slučaju koordinate x_A i x_B razlikuju se, dok su koordinatne y_A i y_B identične, pa je M-simetrala pravac s_M – koji je isti kao i u elučaju Euklidije - nadopunila ga je Eva.

– Dobar zaključak – zazujao je Bubač.

– Profesore, znači li to da će promjenom položaja točaka u koordinatnom sustavu M-simetrala rezultirati različitim oblicima, slično kao kod presjeka dviju kružnica? – znatiželjna je Maja.

– Točno tako – odgovara profesor Kosinus. Podijelite se u grupe i svaka će dobiti različite primjere. Zadatak je da ih pokušate riješiti, pa ćemo zajedno prokomentirati dobivena rješanja.

– Bubač će vam podijeliti zadatke – nastavlja profesor Kosinus. – Kako bih vas malo usmjerio i pripomogao vam pri proučavanju i zaključcima, pogledajte u kakvom su međusobnom odnosu brojevi $|x_A - x_B|$ i $|y_A - y_B|$.

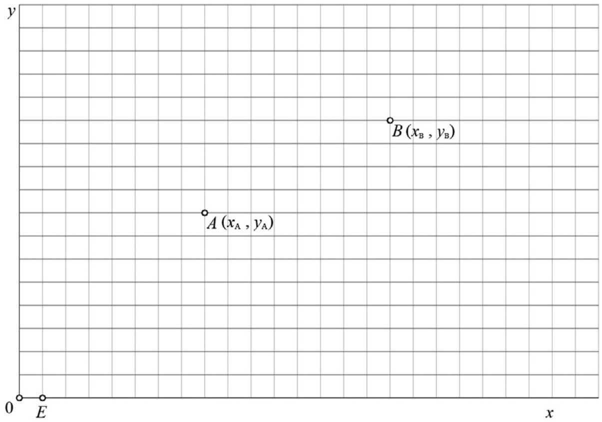
Novonastale grupe, Krugoslav i Kvadratoslav, Maja i Petra, Eva, Lukas i Šimun prihvatile su se posla. Međusobno komentiraju, raspravljaju i crtaju. Nakon nekog vremena svi su utihnuli i počeli se međusobno zagledati. To je bio znak profesoru Kosinusu da je trenutak za prezentacije i razgovor.

– Prvi će nam Kvadratoslav i Krugoslav prikazati svoje rješenje i iznijeti razmišljanja i zaključke.

– Naš zadatak – započeo je Krugoslav – prikazan je na slici 4.a).

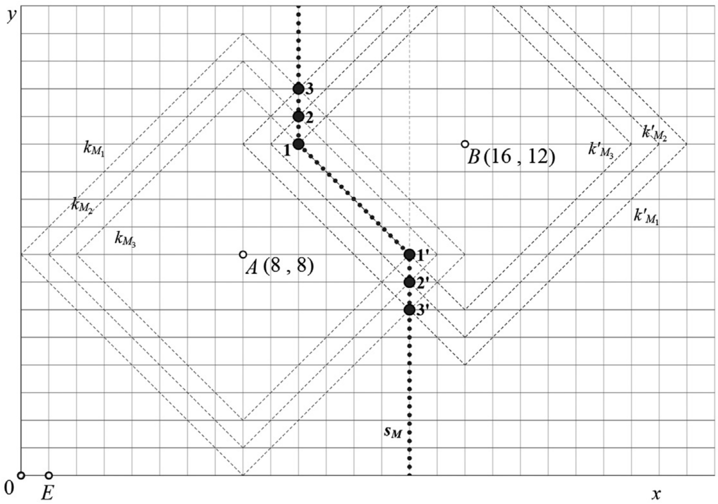
Za to vrijeme Kvadratoslav je prezentirao uradak. Očito je da se koordinate razlikuju, no ako slično predlošku sa Slike 4.a) odaberemo točke A i B s konkretnim koordinatama, nešto možemo zaključiti. I nastavlja:

– Točka A s koordinatama (8, 8) te točka B s koordinatama (16, 12) omogućavaju nam da proučimo odnos brojeva $|x_A - x_B|$ i $|y_A - y_B|$.



Slika 4.a)

– Slijedi: 8 = |8 – 16| > |8 – 12| = 4, pa možemo zaključiti da se M-simetrala sastoji od dužina, Slika 4.b).

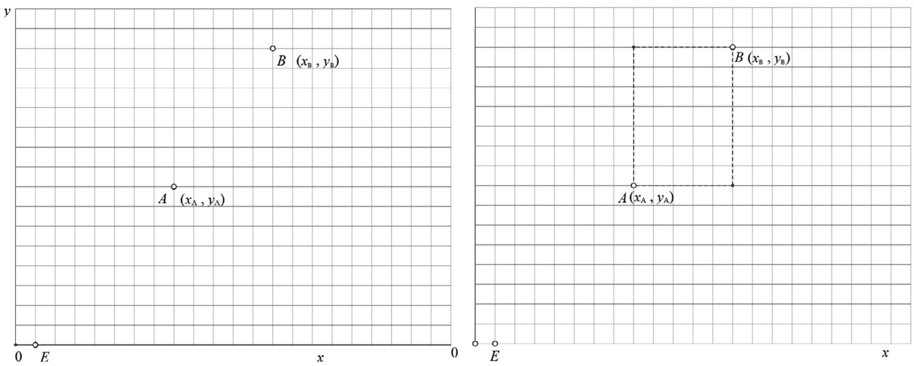


Slika 4.b)

– Jako dobro – pohvalio ih je profesor Kosinus. – Sada slušamo i gledamo što će reći Maja i Petra.

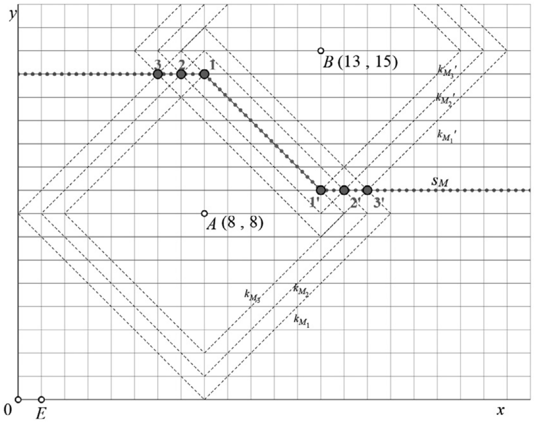
Maja je odmah sjela za računalo kako bi prikazala rješenje, pa je Petra odlučila ponešto reći.

– Naš zadatak prikazan je na slici 5.a).



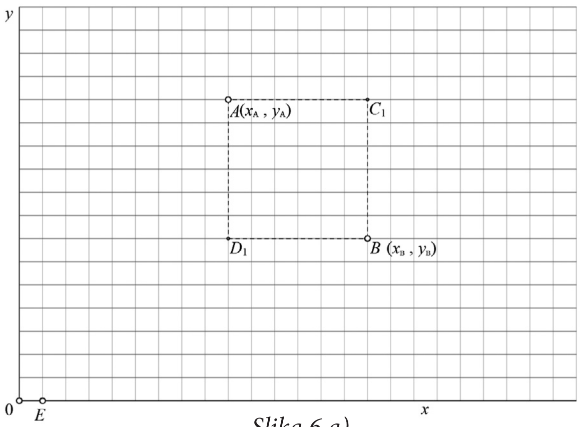
Slika 5.a)

– Sada kada gledam naš zadatak i uspoređujem sa zadatkom Krugoslava i Kvadratoslava, mogu zaključiti da su u oba slučaja točke *A* i *B* nasuprotni vrhovi pravokutnika, pa će rješenje bili slično, to jest *M*-simetrala će biti „razlomljeni” pravac s_M.



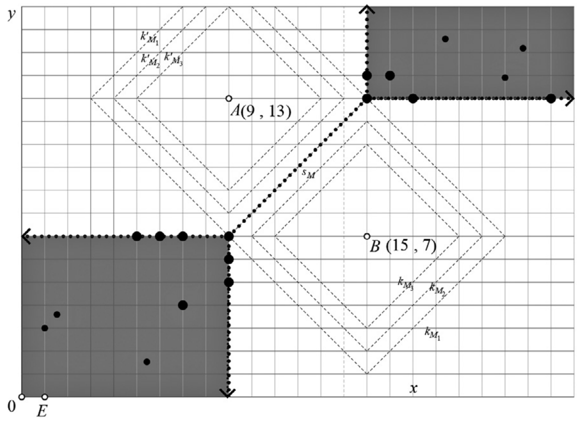
Slika 5.b)

– Zadavši konkretne vrijednosti koordinata, i malim računom dobile smo da vrijedi: $5 = |8 - 13| < |8 - 15| = 7$.
– Dobro zaključivanje – komentirao je profesor Kosinus. – Sada su još ostali Eva, Šimun i Lukas. Slušamo vas.
– Mi smo dobili zadatak prikazan na slici 6.a) – započeo je Lukas. Nastavio je Šimun: – Ako sada primijenimo Petrin i Majin zaključak o točkama *A* i *B*, uočite da su u našem zadatku točka *A* i *B* nasuprotni vrhovi kvadrata.



Slika 6.a)

– Za konkretne koordinate – nastavila je Eva – dobili smo: $6 = |9 - 15| <$ $< |13 - 7| = 6$. U ovom slučaju M-simetrala sastoji se od dužine, ali i obojenih dijelova, jer svaka točka ispunjava uočeno svojstvo, Slika 6.b).



Slika 6. b)

– Vrlo dobro ste se snašli pri rješavanju ovih zadataka o simetrali dužine u Nigdezemskoj – pohvalio je članove geometrijske družbe profesor Kosinus na kraju druženja.

Literatura:

1. Divjak, B. (2000.): *Notes on Taxicab Geometry*, KOG. 5 – 9.
2. Mladinić, P.; Radović N. (2018.): *Geometrija prirode*, Proven grupa d. o. o., Zagreb.
3. Mladinić, P.; Radović, N. (2019.): Kružnica je kvadrat ili proučavanje novih geometrija, Zbronik radova Stručno – metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi – Geometrija u nastavi matematike, Pula, 14. – 16.11.2019., 261 – 269.
4. Nirode, W. (2018.): *Doing Geometry with Geometry Software*, Mathematic Teacher, Vol. 112, No. 3, November/ December, 179 – 184.
5. Polya, G. (2003.): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005.): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.