UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

STRATEGIE ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH ŘEŠITELNÝCH ROVNICEMI

Solving strategies for word problems that can be solved with equations

Diplomová práce

Autor: Stanislava Chromá

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2011

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Praze dne ....

Stanislava Chromá

Děkuji doc. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné rady a vedení mé diplomové práce.

OBSAH

Abstrakt

Cílem této diplomové práce je seznámit s problematikou řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi, uvést a analyzovat různé způsoby jejich řešení. Diplomová práce se také zabývá porovnáním strategií řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi volených žáky, které mají již daný typ rovnice probraný, a žáky, kteří ještě daný typ rovnice nemají zvládnutý. Úvodní část práce se věnuje slovním úlohám obecně. Je vymezen pojem slovní úloha, postup, způsob a strategie řešení slovních úloh. V dalším textu jsou charakterizovány základní typy rovnic. Ke každému druhu rovnice je vybrána jedna typická slovní úloha, u které je experimentálně zjištěno, jaké strategie řešení nejčastěji žáci volí.

Klíčová slova: slovní úloha, algebraická rovnice, nealgebraická rovnice, soustava rovnic

Abstract

The aim of this work is to get acquainted with the issue of solving word problems by means of equations, to state and to analyse various ways of solving them. The thesis also includes the comparison of strategies for solving word problems that are selected by students who have been already taught the given type of the equation, and students who have not yet mastered these procedures. The introductory part of the work deals with word problems in general. There the terms such as the word problems, procedures, methods and strategies used for solving word problems are specified. In the next part of the text, the basic types of equations are characterized. For each type of the equation, one typical word problem was selected and it was experimentally found out which solving strategies were used by students most often.

Keywords: word problem, algebraic equation, non-algebraic equation, system of equations

Úvod

Při výběru tématu mé diplomové práce na katedře matematiky a didaktiky matematiky jsem zvolila téma s problematikou slovních úloh řešitelných rovnicemi. Chtěla jsem navázat na svou bakalářskou práci, jejímž cílem bylo seznámit s problematikou řešení slovních úloh rovnicemi, uvést přístupy k řešení slovních úloh různých autorů zabývajících se touto problematikou a tyto přístupy porovnat. Hlavním cílem bakalářské práce bylo vytvořit ucelenou představu o slovních úlohách se zaměřením na úlohy vedoucí k řešení rovnicí či soustavou rovnic.

V první části diplomové práce uvádím různé pohledy na problematiku slovních úloh a jejich řešení. V části zabývající se řešením slovních úloh popisuji jednotlivé části řešení, jako je postup řešení, způsob řešení a různé strategie řešení slovních úloh. Nejde zde o vyčerpávající pohled, ale spíše o charakteristiku prostředí slovních úloh, o seznámení s nejčastějšími postupy a způsoby řešení, o vytvoření představy o základních strategiích řešení slovních úloh.

V další části diplomové práce uvádím obecné definice rovnice a definice jednotlivých typů rovnic a soustav rovnic. Ke každému typu rovnice vybírám typickou slovní úlohu, která vede k řešení tímto typem rovnice. U každého typu rovnice provádím experimentální šetření v podobě průřezové studie. Zjišťuji, jací žáci a v jakých situacích volí určitý typ strategie řešení slovní úlohy. Tyto strategie dále analyzuji a podrobně popisuji.

Cíl celé práce spatřuji ve vytvoření ucelené představy čtenáře o řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi a ve zjištění a analyzování strategií řešení, které jednotliví žáci volí.

1 Uvedení do problematiky

Vyučování matematice je založeno především na aktivních činnostech, na důkladném a logickém osvojení si učiva a na jeho uvědomělém využívání při řešení reálných situací. Poskytuje vědomosti a dovednosti využitelné v běžném životě. Ve výuce matematiky jsou tyto situace z reálného života modelovány především slovními úlohami.

Řešení slovních úloh je důležitou složkou výuky matematiky a je často žáky vnímáno jako velmi obtížné. Při řešení slovních úloh je kladen důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky, jejich vzájemným vztahům a jejich aplikovatelnosti v matematických i nematematických situacích. Pokud žák není schopen aplikovat své teoretické znalosti při řešení slovních úloh, nemůžeme tvrdit, že danou problematiku učiva zvládl.

Slovními úlohami a jejich řešením se zabývalo a zabývá mnoho zahraničních i našich autorů. Jejich přístupy a názory na pojetí slovní úlohy a jejího řešení se liší podle zkušenosti a celkového zaměření autora. V této práci nejčastěji vycházím z materiálů autorů F. Kuřiny, J. Vyšína, J. Divíška, K. Hruši, J. Novotné a M. Tiché.

2 Vymezení pojmu slovní úloha

Najít v literatuře věnované slovním úlohám přesnou a vyčerpávající definici slovní úlohy se mi nepodařilo. Slovními úlohami se zabývá mnoho autorů. Definice některých autorů jsou téměř stejné, ale nalezla jsem v literatuře i některé odlišné.

J. Vyšín definuje slovní úlohu takto: *„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.“* (Vyšín, 1962, s. 104)

Podle J. Divíška je slovní úloha především úloha z reálného života a řešit tyto úlohy lze buď matematicky, nebo v realitě. *„Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“* (Divíšek, 1989, s. 123)

Podle G. Knížete lze mezi slovní úlohy zařadit i úlohy typu „Řešte v množině všech přirozených čísel…“ apod. *„Slovní úlohou nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných* *souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou hledanou."* (Kníže, 1966, s. 5)

Uvedené tři definice se v mnohém shodují, ale lze mezi nimi nalézt i jisté odlišnosti. Vyšín, jako jediný z těchto autorů, požaduje, aby slovní úloha byla formulována slovy. Za slovní úlohu nepovažuje úlohy, ve kterých se vyskytují matematické symboly. Naopak Kníže takovýto typ úloh řadí mezi slovní úlohy. Divíšek stejně jako Vyšín popisuje slovní úlohu jako úlohu z praxe, jejímž obsahem je nějaká reálná situace. Dále však říká, že tato reálná situace vyúsťuje v nějaký problém a úkolem žáka je tento problém vyřešit.

Většina autorů literatury o slovních úlohách se v jejím definování neliší. Jejich definice můžeme shrnout takto:

Slovní úloha je úloha formulovaná slovy, která vychází z praxe a zachycuje nějaké objekty, jevy a reálné situace z nejrůznějších oblastí. Úkolem je identifikovat problém, vyhledat jednotlivé vztahy mezi zadanými a hledanými objekty, sestavit aritmetickou, algebraickou nebo geometrickou úlohu a vyřešit ji.

Ve slovních úlohách se může vyskytovat popis skutečné reálné situace, se kterou se žáci běžně setkávají ve svém okolí. Úloha s takovýmto obsahem je pro ně přijatelnější a srozumitelnější. Žáci poznávají vzájemné vztahy a propojení mezi světem kolem sebe a matematikou, což je již samo o sobě často motivuje.

3 Řešení slovních úloh

Slovní úlohy mají ve vyučování matematice důležitou roli. Při řešení slovních úloh se rozvíjí myšlení žáků, jejich pozornost a představivost, má i výchovný dosah. Na úlohách se objasňují a konkretizují matematické pojmy a upevňují se početní návyky. Řešení slovních úloh připravuje žáky k využívání matematiky v běžném životě.

3.1 Postup řešení

K úspěšnému vyřešení slovní úlohy je vhodné podrobně rozpracovat základní fáze postupu jejího řešení. Postupem řešení slovních úloh se zabývá mnoho autorů.

Podle Novotné lze řešení rozdělit do tří etap. Tyto etapy jsou:

1. *„Etapa uchopování, která obsahuje*
    - *uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc",*
    - *hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,*
    - *hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,*
    - *získání celkového vhledu do struktury problému.*
2. *Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.*
3. *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy."*

(Novotná, 2000, s. 21)

Novotná uvádí, že tento postup řešení je pouze „ideálním" postupem. Žáci často při řešení slovní úlohy nepostupují lineárně, k některým etapám se vracejí a naopak, některou etapu vynechávají.

3.1.1 Etapa uchopování

Etapu uchopování můžeme rozdělit na dvě části: porozumění textu úlohy a rozbor této úlohy.

Porozumění textu úlohy spočívá v tom, že žák je schopen přečíst zadání úlohy s porozuměním, dokáže rozpoznat předmět otázky a zadané údaje. Tyto údaje rozdělí na vztahy potřebné k řešení úlohy a ty, které jsou zadány navíc. Pro snadnější porozumění by měla slovní úloha mít pro žáka srozumitelný text, měla by obsahovat nějakou výzvu či „hádanku". Neměla by obsahovat příliš mnoho bezvýznamných detailů a její text by neměl být příliš dlouhý.

Je potřebné věnovat velkou pozornost zadaným podmínkám, které se vztahují k otázce této úlohy (rozboru). Žák musí sledovat, které údaje jsou zadané a které se musí vypočítat. Pokud toto žák správně pochopí, většinou volí i správné početní operace k vyřešení úlohy. U některých úloh je vhodné znázornit zadání i na konkrétním modelu nebo grafickým znázorněním. Pokud to úloha umožní, je znázornění objektů a vztahů důležitou součástí rozboru. Napomáhá žákům nalézt správné řešení, často lze již z obrázku vyčíst způsob řešení úlohy, jak podrobněji ukazuje a popisuje Novotná (2000, s. 34).

3.1.2 Etapa transformace

Vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce se označuje jako matematizace reálné situace. Je důležité najít vztahy mezi tím, co je dané, a tím, co je neznámé. V mnoha úlohách je nutné zvolit označení neznámých údajů i údajů a vztahů zadaných.

Odhadnutí výsledku je často důležité pro správné vyřešení některých úloh. Odhad výsledku by měli žáci provádět především, když používají k výpočtu kalkulátor.

Při řešení matematické úlohy používáme různých algoritmů. Žáci by při použití algoritmů měli nejprve stanovit strategii řešení. V průběhu řešení mohou svou strategii kontrolovat a v případě potřeby strategii upravit nebo nahradit některou vhodnější.

3.1.3 Etapa návratu do kontextu úlohy

V této fázi musíme ověřit, zda získané řešení je správné a zda vyhovuje kontextu slovní úlohy. To provedeme zkouškou správnosti. Měla by se dodržet zásada dvou zkoušek při řešení slovní úlohy. Provádí se tzv. matematická zkouška, kdy žáci ověřují správnost vyřešení matematické úlohy (matematického modelu) situace ze zadání. Ověřit, zda úlohu vyřešili správně, lze také tím, že tuto úlohu řeší jiným způsobem. Druhou zkouškou je tzv. kontextová zkouška, při které si žák kontroluje proces matematizace, tj. kontroluje správnost vytvoření matematického modelu, a také kontroluje splnění podmínek daných kontextem slovní úlohy.

Konečnou fází je formulace odpovědi na otázku slovní úlohy. Žáci nejčastěji sestavují svou odpověď pomocí toho, jak je formulována otázka a podmínky slovní úlohy.

3.2 Způsob řešení

Při výuce matematiky se můžeme setkat se slovními úlohami jednoduchými, které se dají řešit pouze jednou početní operací, a se složenými slovními úlohami, které se řeší více početními operacemi. Při řešení složené slovní úlohy je často možné postupně vytvářet a řešit jednoduché úlohy. Vytváření těchto jednoduchých úloh můžeme provádět syntetickou nebo analytickou metodou.

Podle Divíška (1989) při analytické metodě vycházíme z dané otázky, ke které sestavíme jednoduchou slovní úlohu, jejíž řešení nám dává odpověď na otázku slovní úlohy. Minimálně jeden potřebný údaj k řešení této úlohy není znám, proto musíme sestavit další jednoduchou slovní úlohu, abychom tento údaj určili. Takto pokračujeme, dokud všechny údaje nezjistíme. Tato metoda je považována za „lepší“, protože vede k důslednému promyšlení celé úlohy a postupu jejího řešení.

Při řešení syntetickou metodou, jak uvádí Divíšek (1989), vycházíme naopak z údajů daných slovní úlohou, z nichž vhodně zvolíme dva údaje a vypočteme další potřebný údaj. Z takto zjištěného údaje a dalšího údaje ze zadání slovní úlohy sestavíme další úlohu. Tímto způsobem pokračujeme, dokud nezískáme údaj, který potřebujeme k odpovědi na otázku slovní úlohy.

Proti použití syntetické metody uvádí Vyšín několik námitek:

1. *„Úloha se často začíná řešit dříve, než byla formulována jako matematický problém.*
2. *Tzv. syntetickým postupem můžeme najít jedno řešení, ale mohou nám uniknout řešení další. Není možné beze všeho předpokládat, že daná úloha má jen jedno řešení. ...*
3. *Tzv. syntetická metoda je nevhodná i po stránce výchovné. Matematika má žáky vychovávat k samostatné práci, přesně plánované; těmto požadavkům vyhovuje jen metoda analytická, při níž rozborem získáme zpravidla předpis pro sestavení řešení. Řešení „syntetickou metodou“ je zpravidla jakési počítání „ode zdi ke zdi“.* (Vyšín, 1962, s. 110 – 111)

Slovní úlohu, která je složitější a řešíme ji poprvé, která je pro nás určitým „problémem“, řešíme nejčastěji kombinací obou způsobů, tzv. metodou analyticko-syntetickou.

3.3 Strategie řešení

Analýzou strategií řešení slovních úloh se u nás i ve světě zabývá mnoho autorů. O strategiích při řešení slovních úloh píše například Novotná (2000), jejíž rozdělení a vymezení využívám dále v této práci. Autorka uvádí, že je třeba zohlednit různé pohledy a uvádí některé z nich:

- *„Řešení bylo nalezeno náhodně nebo po získání vhledu do struktury úlohy.*

- *Řešení je založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce / postupu, nebo naopak na porozumění struktuře úlohy do té míry, že řešitel je dokonce schopen převést ji na jednu (nebo sled) jednodušších úloh.*
- *Řešitel použil aritmetický nebo algebraický aparát.*
- *Při stejném zadání může řešitel volit různé zpracování zadaných vztahů. Tento pohled nemá „antagonistický" charakter."*

  (Novotná, 2000, s. 37)

3.3.1 Náhodné nalezení řešení

Strategie pokus – omyl je způsob řešení, při kterém se žák snaží výsledek uhodnout. Důležité je, jak tento žák dále pokračuje. Podle Novotné mohou nastat tři situace:

Prvním případem je, že žák při prvním pokusu dospěl k nějakému číslu (výrazu) a toto číslo prohlásí za výsledek. Žák nepoužívá pravidlo dvojí zkoušky při řešení slovní úlohy, ani se nesnaží nalézt další možná řešení.

Další případ nastává tehdy, kdy žák dospěl k „výsledku" a ten dále podrobuje zkoušce správnosti. Zjistí, že jeho nalezené řešení vyhovuje podmínkám úlohy a označí ho za správný. Žák dále nehledá jiná možná řešení, nebo se naopak snaží zjistit, jestli má tato úloha ještě jiné řešení.

Poslední situací je, kdy žák nalezl „výsledek", provedl zkoušku správnosti a zjistil, že jeho řešení nevyhovuje kontextu úlohy. V této situaci se žák rozhoduje, zda bude hledat jiné řešení této úlohy. Buď se rozhodne další výsledek již nehledat a řešení ukončí, nebo se snaží nalézt nové a správné řešení. Použije opět strategii pokus – omyl, nebo se rozhodne použít své zkušenosti, které získal při předchozím „špatném" řešení, a použije jinou strategii řešení slovní úlohy.

Mnoho učitelů považuje metodu pokus – omyl za nevhodnou. Novotná uvádí dva důvody, proč je tato metoda nevhodná:

1. *„podporuje v žákovi pocit, že řešení úlohy je záležitost náhody, řešiteli stačí „mít štěstí",*
2. *nepodporuje rozvoj žákova strategického myšlení."*

   (Novotná, 2000, s. 40)

3.3.2 Řešení „signálem“

Toto řešení je založené na identifikaci slov a vztahů v zadání, které slouží řešiteli jako určitý signál, který mu napoví, jaký vzorec či postup má použít. Signál se řadí do skupiny tzv. protetických poukazů a je z této skupiny nejčastější. Protetický poukaz Hejný definuje takto: *„Protetickým poukazem nazveme informaci, která řešiteli řekne nebo aspoň napoví, jaký postup řešení volit.“* (Hejný, 1990, s. 44)

3.3.3 Různé zpracování vztahů

Při stejném zadání může žák úlohu různě uchopit z hlediska vzájemných vazeb zadaných v textu úlohy. Různé způsoby uchopování nemusejí být v protikladu, mohou se i prolínat a doplňovat.

3.3.4 Řešení aritmetickým nebo algebraickým aparátem

Podle použitého matematického aparátu dělí Novotná strategie na:

1. *„algebraické, kde je při řešení úlohy použita jedna nebo více rovnic,*
2. *aritmetické, kdy řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku úlohy rovnice.“*

(Novotná, 2000, s. 44)

3.3.4.1 Algebraické strategie

Takto nazýváme strategie řešení, při kterých je použita jedna či více rovnic. Při řešení slovních úloh ve školách bývá častý algebraický způsob řešení (např. úlohy o směsích, o společné práci). Ve většině případů k němu žáci bývají soustavně didakticky vedeni. Aby mohli žáci tento způsob řešení použít, musejí mít zvládnutý daný typ rovnice či nějaký jiný aparát, potřebný k řešení.

3.3.4.2 Aritmetické strategie

Aritmetické strategie jsou strategie, při kterých řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku slovní úlohy rovnice. Tyto strategie lze rozdělit do čtyř základních skupin. Je to způsob řešení slovní úlohy činnostní, grafické, experimentální a řešení úvahou.

Uvedené způsoby řešení se obvykle nevyskytují odděleně, ale žáci často řeší úlohu kombinací několika způsobů.

3.3.4.2.1 Činnostní řešení

Tento způsob řešení je založený na manipulaci s předměty. Řešitel si vymodeluje situaci zadanou slovní úlohou a pomocí manipulací (přesouváním a přeskupováním) s předměty nalezne odpověď na otázku úlohy. Těmito předměty mohou být počitadlo, soubor knoflíků, tyčinek, kamínků, špejlí apod.

Činnostní řešení slovní úlohy požívají nejvíce žáci na prvním stupni základní školy. Kuřina uvádí: *„Na prvním stupni základní školy jsou takovéto modely nezastupitelné, neboť umožňují reprezentovat aritmetické operace činnostmi, a tak pomáhají žákům osvojit si hlouběji např. vlastnosti početních úkonů.“* (Kuřina, 1990, s. 61 – 62)

3.3.4.2.2 Grafické řešení

Při řešení slovní úlohy žák dospěl k jejímu výsledku pomocí nějakého grafického znázornění. Toto řešení vzniká obvykle přesným promyšlením úlohy se všemi detaily a vhodným zvolením způsobu znázornění. Nejčastěji používaným grafickým řešením je obrázek, tabulka, schéma, graf apod. Objevit grafický způsob řešení nebývá pro žáky snadné, ale následné řešení je často oproti jiným způsobům jednodušší a přehlednější.

3.3.4.2.3 Experimentální řešení

Experiment lze popsat jako záměrný způsob získávání zkušeností, které se týkají problematiky úlohy a umožní ji tak žákovi lépe řešit. Žák se nejčastěji k tomuto způsobu řešení uchyluje tehdy, když má problém pochopit, co se vlastně od něho v úloze požaduje. Řešení úlohy experimentem je pro žáky v mnoha případech samo o sobě motivací a prohlubuje u nich schopnost analyzovat různé situace a jevy. *„Žiaci základnej školy majú prirodzenú túžbu skúmať svet vlastnou aktivitou. Zdá se však, že sa táto vzácna schopnosť postupne s vekom žiaka vytráca.“* (Hejný a kol., 1990, s. 326)

Nejčastěji používaným způsobem řešení experimentem je řešení úlohy aproximací, systematickým pokusem a řešení pokus – omyl. Při řešení aproximací žák vhodně volí čísla (možný výsledek) ve snaze přiblížit se co nejvíce k výsledku úlohy. Činí to tak dlouho, než se dobere konečného výsledku. Systematický pokus označuje strategii řešení, kdy žák systematicky testuje všechny možné vhodné kombinace. Ke strategii pokus – omyl se nejčastěji uchýlí žák, který nenalezl cestu k úspěšnému vyřešení úlohy.

3.3.4.2.4 Řešení úvahou

Při řešení slovní úlohy úvahou většinou úvaha probíhá pouze v hlavě žáka. Někdy je žák schopen tuto úvahu zcela či alespoň částečně interpretovat, ale bývá tomu většinou až po vyřešení úlohy. Žák nejčastěji uvažuje o řešení a zapisuje pouze doprovázející výpočty, které mu při úvahách vycházejí. Tyto strategie Novotná nazývá netradiční nebo neškolské. Myslí tím strategie, při kterých žáci vyhledávají vlastní postupy, které jsou založené především na vhledu do problému.

4 Rovnice, vymezení pojmu

Řešení a sestavování rovnic prolíná celou výukou matematiky na školách, od základní až po vysokou školu.

Obsahem této práce je řešení slovních úloh, které mohou žáci řešit rovnicemi. Proto se zde zaměřím na to, jak jsou rovnice definované v některých učebnicích.

Na základních školách se žáci učí například podle učebnice od autorů Odvárko a Kadleček s názvem Matematika 2 pro 8. ročník základních škol – Lineární rovnice, základy statistiky (2006). Autoři v této učebnici obecně rovnice nedefinují, definují slovním popisem pouze lineární rovnice.

Autorky Šarounová, Růžičková a Väterová v učebnici Matematika 7 (II. díl) definují rovnici takto: *„Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, ve kterém máme najít neznámé číslo tak, aby po jeho dosazení za proměnnou do levé a do pravé strany zápisu daná rovnost platila. Hledanému číslu říkáme neznámá. Označujeme ji libovolným písmenem, nejčastěji některým písmenem z konce abecedy. Najdeme-li takové číslo, říkáme mu řešení nebo kořen rovnice.“* (Šarounová, 1998, s. 137)

Na mnoha osmiletých gymnázií probíhá výuka podle učebnice Matematika – Tercie, Rovnice a nerovnice (2006). Autoři Herman, Chrápavá, Jančovičová a Šimša v této učebnici nedefinují obecnou rovnici, věnují se jednotlivým typům rovnic a nerovnic.

Mezi učebnice matematiky pro gymnázia s touto problematikou patří například Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice (2006) od autorů Charvát, Zhouf a Boček. Autoři v této učebnici nedefinují rovnici obecně. Zabývají se zde pouze jednotlivými typy rovnic jako jsou například lineární či kvadratické rovnice.

Na některých středních odborných škol a středních odborných učilišť žáci studují matematiku pomocí učebnice Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU (2006). V této učebnici Calda nedefinuje obecně rovnici, popisuje jen konkrétní typy rovnic.

V Přehledu středoškolské matematiky (1980) Polák uvádí obecnou definici rovnice, ale omezuje se pouze na rovnice s jednou neznámou. Rovnice definuje pomocí množin takto: *„Máme určit všechna čísla z daného číselného oboru M, pro něž jsou definovány dané funkce f, g proměnné x a nabývají týchž funkčních hodnot. Za množinu M se zpravidla volí obor R nebo K a také funkční hodnoty jsou z těchto oborů. Tuto úlohu a její zápis ve tvaru f(x) = g(x), kde* $x \in M$*, nazýváme rovnicí s neznámou x; f(x) se nazývá levá strana rovnice, g(x) pravá strana rovnice. Je-li g(x) = 0, říkáme, že rovnice je v anulovaném tvaru.“* (Polák, 1980, s. 157)

4.1 Řešení rovnic

Řešení rovnice můžeme popsat jako určitý myšlenkový proces, při kterém postupně upravujeme danou rovnici na rovnost typu neznámá = známé číslo.

Při řešení rovnic se setkáváme s několika pojmy:

- Hodnoty proměnné (čísla), pro které se hodnoty výrazů po dosazení do pravé a levé strany rovnice rovnají, se nazývají kořeny rovnice.
- Množinu všech kořenů rovnice nazýváme řešením rovnice. Také postup, kterým kořeny rovnice hledáme, se nazývá řešením rovnice.
- Zkouškou je kontrola správnosti řešení, kterou provedeme dosazením kořenu rovnice do původní rovnice.

Podle Hejného (1990) je několik základních cílů, které by měla výuka rovnic sledovat:

1. prohloubit zájem žáka, umět ho motivovat

2. rozvíjet žákovu schopnost modelovat reálné situace pomocí rovnic
3. rozšířit a prohloubit žákovu zkušenost s řešením rovnic
4. pomocí rovnic propojit různé oblasti matematiky
5. získat zručnost a jistotu při řešení některých typů rovnic
6. rozvíjet abstraktnější pohled na rovnice, rozvíjet logiku a schopnost dedukce.

Vyučování rovnic by mělo samo o sobě žáky motivovat, protože rovnice by měly být určitou výzvou a hádankou.

Hejný doporučuje řešit každý typ rovnice co největším počtem způsobů. Každý typ rovnice lze řešit ekvivalentními a neekvivalentními úpravami (více kapitola 4.1.1).

4.1.1 Ekvivalentní řešení rovnic

Ekvivalentní úpravou rovnice je postup, kterým dostaneme rovnici ekvivalentní s původní rovnicí. Dvě rovnice se nazývají ekvivalentní, pokud každý kořen první rovnice je i kořenem rovnice druhé a naopak.

Řešení rovnic ekvivalentními úpravami je založené na větách, které mají tvar ekvivalence. Tyto věty zní:

- $\forall a,b,c \in R : a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
- $\forall a,b \in R \forall c \in R - \{0\} : a = b \Leftrightarrow ac = bc$
- $\forall a,b \in R : a^2 = b^2 \Leftrightarrow |a| = |b|$
- $\forall a,b \in R_0^+ : a = b \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$
- $\forall a,b \in R - \{0\} : a = b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$
- $\forall a,b,c \in R^+ : a = b \Leftrightarrow a^c = b^c$

Ekvivalentní úpravy rovnice vyplývající z předchozích vět, jejímž oborem řešení D je nějaká podmnožina reálných čísel, jsou:

1. K oběma stranám rovnice přičteme výraz, který je definovaný na D.
2. Obě strany rovnice vynásobíme nenulovým výrazem, který nenabývá v D nulové hodnoty.
3. Obě strany rovnice umocníme na druhou, pokud obě strany rovnice nabývají v D jen nezáporných hodnot, nebo jen nekladných hodnot.

4. Obě strany rovnice odmocníme, pokud obě strany rovnice nabývají v D jen nezáporných hodnot.
5. Obě strany rovnice umocníme na –1, pokud obě strany rovnice nabývají jen nenulových hodnot.

Odvárko (1990) uvádí, že ekvivalentní úpravy jsou výhodné při řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav, rovnic v součinovém a podílovém tvaru. Při řešení rovnic s neznámou pod odmocninou nebo ve jmenovateli využití ekvivalentních úprav není vždy výhodné, neboť často vyžaduje zužování oboru proměnné.

4.1.2 Postup řešení rovnic

Proces řešení slovní úlohy můžeme rozdělit do čtyř fází (např. Divíšek, 1989).

První fází řešení rovnice je rozbor, který je založen na analytickém postupu. Nejprve předpokládáme, že rovnice má alespoň jeden kořen. Od této rovnice se různými ekvivalentními úpravami snažíme přejít k rovnici, jejíž řešení známe nebo ho dovedeme snadno nalézt.

Druhou fázi můžeme nazvat závěr rozboru. V této fázi se snažíme určit množinu všech možných řešení dané rovnice.

Ve třetí fázi provádíme tzv. zkoušku, která má zjistit, zda všechny prvky množiny všech řešení jsou kořeny dané rovnice. Zkouška je nutnou součástí řešení, pokud všechny úpravy z rozboru úlohy nebyly ekvivalentní.

Čtvrtou fází je diskuse řešení, která se provádí, pokud daná rovnice obsahuje parametr. Zde se stanoví, pro které hodnoty parametru má tato rovnice řešení a pro které nemá.

5 Typy rovnic

Rovnice můžeme rozdělit do dvou skupin, algebraické rovnice a nealgebraické (transcendentní) rovnice. Pokud jsou v rovnici známé a neznámé veličiny vzájemně vázány pouze algebraickými početními operacemi, nazývá se algebraickou rovnicí.

Pokud rovnice obsahují neznámou v transcendentní funkci, nazývají se nealgebraické rovnice. *„Rovnice f(x) = 0, kde f(x) je transcendentní funkce. Transcendentní funkce lze rozdělit na nižší, kam patří např. exponenciální,* *logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce, a vyšší. Vyšší transcendentní funkce nelze pomocí elementárních funkcí vyjádřit v konečném tvaru.“* (Wikipedie) Proto do této skupiny patří exponenciální rovnice, logaritmické rovnice, goniometrické rovnice,…

5.1 Výzkum

Návrh a realizace výzkumu

Cíl výzkumu

Cílem tohoto výzkumu je zjistit, zda závisí úspěšné řešení slovních úloh, které lze řešit pomocí daného typu rovnice, s tím, zda již žáci mají problematiku daného typu rovnic zvládnutou. Cílem je také zjistit, jakou strategii řešení zvolí žáci, kteří se již s daným typem rovnice seznámili, a ti, kteří se s tímto typem rovnice dosud neseznámili.

Hypotézy

Na základě prostudování dostupné literatury zabývající se danou problematikou a zkušenostmi z praxe, jsem si stanovila následující hypotézy:

H1: Žáci, kteří již daný typ rovnice mají zvládnutý, jsou úspěšnější při řešení slovních úloh na tento typ rovnice.

H2: Žáci, kteří již daný typ rovnice mají zvládnutý a úspěšně vyřešili úlohu, preferují při řešení slovních úloh na tento typ rovnice strategii řešení rovnicí.

H3: Žáci, kteří ještě daný typ rovnice neprobírali a úspěšně vyřešili úlohu, preferují při řešení slovních úloh na tento typ rovnice náhodné nalezení řešení.

Metodologie výzkumu

Zjištění potřebných dat a ověření hypotéz bylo provedeno pomocí případové studie[1].

[1] V Pedagogickém slovníku je případová studie popsána jako: *„Výzkumná metoda v empirickém pedagogickém výzkumu, při níž je zkoumání podroben jednotlivý případ (např. žák, malá skupina žáků, učitelů, jednotlivá třída, škola apod.). Ten je detailně popsán a vysvětlován, takže se dochází k takovému typu objasnění, jehož při zkoumání týchž objektů v hromadném souboru nelze dosáhnout. Výhodou metody je možnost hlubokého poznání podstaty případu, nevýhodou omezenost zobecnitelnosti výsledků.“* (Průcha, 2003, s. 188)

Během výzkumného šetření byla použita metoda testování pomocí didaktického testu. Didaktický test měl formu jedné slovní úlohy na daný typ rovnice, která byla zadána dvěma skupinám žáků (více viz výzkumný vzorek u jednotlivých částí výzkumu). Na řešení této úlohy měli žáci 20 minut.

Slovní úloha na daný typ rovnice byla vybrána s ohledem na to, aby ji žáci mohli řešit pomocí různých matematických, logických a grafických postupů.

Při zpracování dat bylo zjištěno procento úspěšných a neúspěšných řešení, procentuální zastoupení jednotlivých způsobů řešení. Za úspěšně vyřešenou úlohu jsem považovala pouze řešení, které mělo správný postup i výsledek.

Hypotézu H1 jsem považovala za potvrzenou, pokud slovní úlohu úspěšně vyřešilo alespoň o 10 % více žáků z 2. skupiny než 1. skupiny. Pokud slovní úlohu vyřešilo stejně žáků z obou skupin, nelze hypotézu H1 potvrdit, ani vyvrátit. Vyřešilo-li slovní úlohu úspěšně více žáků z 1. skupiny, pak hypotéza H1 se nepotvrdila.

Hypotézu H2 jsem považovala za potvrzenou, pokud více než 50 % žáků 2. skupiny vyřešilo slovní úlohu úspěšně daným typem rovnice. Pokud daným typem rovnice slovní úlohu vyřešilo úspěšně 50 % žáků z 2. skupiny, nelze hypotézu H2 potvrdit ani vyvrátit. Vyřešilo-li úspěšně slovní úlohu daným typem rovnice méně než 50 % žáků z 2. skupiny, pak se hypotéza H2 nepotvrdila.

Hypotézu H3 jsem považovala za potvrzenou, pokud více než 50 % žáků 1. skupiny vyřešilo slovní úlohu úspěšně náhodným nalezením řešení. Pokud náhodně nalezlo řešení 50 % žáků z 1. skupiny, nelze hypotézu H3 potvrdit ani vyvrátit. Vyřešilo-li úspěšně slovní úlohu náhodným nalezením řešení méně než 50 % žáků z 1. skupiny, pak jsem hypotézu H3 považovala za nepotvrzenou.

V této případové studii také analyzuji jednotlivá žákovská řešení a řešitelské postupy.

Výzkumný vzorek

Výzkumný vzorek je rozdílný u jednotlivých částí výzkumu, neboť je problematika rovnic probírána v několika ročnících. Proto výzkumný vzorek charakterizuji konkrétně až v jednotlivých částech výzkumu.

5.1.1 Algebraické rovnice

V literatuře lze najít různé definice algebraické rovnice. V následujícím textu uvedu definici algebraické rovnice nad obecným tělesem. Z této definice vycházím v některých dalších kapitolách (např. 5.1.1.1). Existuje také definice algebraické rovnice nad číselným tělesem, jak je uvedena například v (Jarník, Šisler, 1969, s. 35), což je speciální případ definice algebraické rovnice nad obecným tělesem.

Definice algebraické rovnice nad obecným tělesem může být nazvána také jako definice algebraické rovnice pomocí polynomů. Tyto polynomy jsou definovány nad obecným tělesem. *„Buď* $f(x) = b_0x^k + \ldots + b_{k-1}x + b_k$ *libovolný polynom jedné neurčité x nad tělesem T. Algebraickou rovnicí jedné neznámé x stupně k (nad tělesem T) rozumíme každou rovnici* $b_0x^k + \ldots + b_{k-1}x + b_k = 0$*. Je-li T' nadtěleso tělesa T, potom řešením (resp. kořenem) rovnice v tělese T' rozumíme každý kořen* $\alpha \in T''$ *polynomu f.“* (Novotná, Trch, 2000, s. 106)

5.1.1.1 Lineární rovnice

Lineární rovnice je algebraickou rovnicí prvního stupně. Je ve tvaru $ax + b = 0$, kde *a*, *b* jsou libovolné prvky tělesa, nebo lze algebraickými úpravami na tento tvar upravit, a má řešení:

1. Pokud je $a \neq 0$, má rovnice vždy právě jedno řešení ve tvaru $x = -\frac{b}{a}$. Je-li $a \in R \wedge b \in R$, je potom také $x = -\frac{b}{a} \in R$.
2. Pokud je $a = 0$, pak není tato rovnice lineární a mohou nastat dva případy:
   - Je-li $b = 0$, má tato rovnice nekonečně mnoho řešení.
   - Je-li $b \neq 0$, nemá tato rovnice žádné řešení.

5.1.1.1.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 7. ročníku základní školy Dr. Edvarda Beneše, kteří ještě lineární rovnice neprobírali (dále 1. skupina). Tato škola je klasická základní škola v Praze 9 Čakovicích, ve které se vyučuje podle Školního vzdělávacího programu - Škola – perspektiva pro život. V tomto ŠVP je problematika lineárních rovnic zaváděna v 8. ročníku. Školní výstupy jsou zformulovány takto: *„Žák/žákyně*

- *řeší jednoduché rovnice, určuje kořeny rovnic, provádí zkoušku (ověřuje správnost řešení)*
- *řeší lineární rovnice, užívá ekvivalentní úpravy rovnic*
- *matematizuje jednoduché reálné situace s využitím rovnic"*

(Škola – perspektiva pro život, 2007, s. 174)

Učivo je zde uvedeno takto:

- *„řešení rovnic – rovnost, kořeny rovnice*
- *ekvivalentní úpravy rovnic*
- *řešení lineárních rovnic*
- *rovnice kolem nás – jednoduché i složitější slovní úlohy"*

(Škola – perspektiva pro život, 2007, s. 174)

Druhou experimentální skupinou jsou žáci 2. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již lineární rovnice mají zvládnuty (dále 2. skupina). Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. Podle tohoto ŠVP jsou lineární rovnice probírané v 1. ročníku. Školní výstupy jsou v něm uvedeny takto: *„Žák*

- *rozliší pojmy rovnost a rovnice*
- *řeší lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav*
- *vysloví závěr o počtu řešení rovnice*
- *provádí zkoušku řešení*
- *vyjádří neznámou ze vzorce"*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 80)

Učivo je formulováno následovně: *„Lineární rovnice*

- *rovnost*
- *lineární rovnice s jednou neznámou*
- *ekvivalentní úpravy lineárních rovnic*
- *vyjádření neznámé ze vzorce“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 80)

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, která lze řešit pomocí lineární rovnice (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na lineární rovnice“). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit mnoha způsoby, může podpořit využití grafických prvků. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z běžného života, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

Úloha: Na třech hromadách bylo složeno 260 tun písku. Na první bylo o 35 tun písku více než na druhé a na třetí hromadě o 60 tun méně než na druhé hromadě. Kolik tun písku bylo na jednotlivých hromadách?

(Polák, 1980, s. 173)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení rovnicí
2. řešení úsudkem
   a. aproximací
   b. aritmeticky
3. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně vyřešilo 31,25 % žáků a z 2. skupiny 60 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	16	5	31,25	11	68,75
2. skupina	25	15	60	10	40

Hypotéza H2 se potvrdila. Mohu tak soudit ze zjištěných údajů o 2. skupině, které jsou v následující tabulce. Úlohu úspěšně vyřešilo 15 žáků 2. skupiny, z nichž 66,67 % použilo strategii řešení lineární rovnicí.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení lineární rovnicí	Ostatní strategie
Počet	15	10	5
Procent (%)	100	66,67	33,33

Hypotéza H3 se nepotvrdila. Pouze 5 žáků vyřešilo úlohu úspěšně, proto nelze rozhodnout, zda žáci 1. skupiny řešení nalezli náhodně.

1. skupina	Úspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	5	3	2
Procent (%)	100	60	40

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 16 žáků. 5 žáků vyřešilo úlohu úspěšně a 11 nedospělo ke správnému výsledku:

- 6 žáků se pokusilo řešit úlohu úsudkem – aritmeticky
- 2 žáci se pokusili řešit úlohu úsudkem – aproximací
- 2 žáci řešili slovní úlohu úvahou
- 1 žák se pokusil sestavit lineární rovnici

5 žáků vyřešilo slovní úlohu úspěšně:

- 2 řešení úvahou (téměř nepopsanou)
- 2 řešení úsudkem - aproximací
- 1 řešení úsudkem - aritmeticky

Ve 2. skupině bylo 25 žáků, z nichž 15 dospělo ke správnému výsledku. 10 žáků úlohu nevyřešilo správně:

- 1 žák neuvedl žádné řešení,
- 1 žák se pokusil sestavit lineární rovnici
- 5 žáků sestavilo rovnici s neznámou ve jmenovateli
- 2 žáci řešili úlohu úvahou
- 1 žák řešil úlohu úsudkem – aproximací

Z 15 úspěšných řešení bylo:

- 10 řešení lineární rovnicí
- 2 řešení úsudkem - aproximací
- 2 řešení úsudkem - aritmeticky
- 1 řešení nejprve úvahou (počet tun na druhé hromadě) a poté dořešení pokus – omyl

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

<u>1. Řešení rovnicí</u>

Nikdo z 1. skupiny nevyřešil tuto slovní úlohu úspěšně lineární rovnicí, 10 žáků ze 2. skupiny ji vyřešilo lineární rovnicí. Všechna tato řešení by se dala shrnout do následujícího postupu řešení. Jen dva žáci navíc toto řešení doplnili ještě obrázkem, ale ten byl spíše ilustrativního charakteru (viz Příloha 1).

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou *x*. Sestavíme lineární rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

V celé práci budu v rozboru a výsledku úlohy používat veličiny s jednotkami, ve výpočtu úlohy budu pracovat s číselnými hodnotami.

1. hromada ....($x + 35$) tun

2. hromada ....x tun

3. hromada ....($x - 60$) tun

<u>Celkem..........................260 tun</u>

$$x + 35 + x + x - 60 = 260$$

$$3x = 285$$

$$\underline{\underline{x = 95 \text{ tun}}}$$

Vypočítali jsme neznámou x = 95 tun, která určuje, že na druhé hromadě je 95 tun písku. Tuto neznámou dosadíme do zadání a vypočteme, kolik tun písku bylo na všech hromadách.

1. hromada ....95 tun + 35 tun = 130 tun
2. hromada ....95 tun
3. hromada ....95 tun – 60 tun = 35 tun

Naše výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

<u>2. Řešení úsudkem (aproximací)</u>

Dva žáci 1. skupiny a dva 2. skupiny vyřešili tuto slovní úlohu úvahou (aproximací). Podle postupů a výpočtů, které žáci pravděpodobně provedli, můžeme říci, že jsou všechna čtyři řešení stejná. Snaha přiblížit se výsledku je zapsána bez jakéhokoli uspořádání na papíře, některé kroky jsou přeškrtané (Příloha 2). Pro lepší přehlednost a představu o tom, jak úlohu žáci řešili, uvádím následující způsob řešení. Postup řešení uvádím pro přehlednost do tabulky a popisuji některé kroky, které si myslím, že i žáky vedly k jejich řešení.

Připravíme tabulku, kde sloupce znamenají hromady. Do řádků budeme psát počty tun v jednotlivých hromadách. Do prvního řádku zapíšeme to, co víme ze zadání:

- Na 2. hromadě je o 60 tun písku více než na 3. => Zvolíme-li si počáteční stav 3. hromady jako nulu, bude na 2. hromadě 60 tun písku.
- Na 1. hromadě je o 35 tun více než na 2., tzn. je tam (60 + 35) tun písku.
- Jako počáteční stav tedy máme na všech hromadách celkem 155 tun písku.

Ze zadání víme, že celkem musí být na všech hromadách 260 tun písku. Aby se zachoval rozdíl množství písku v jednotlivých hromadách, musíme ke všem hromadám přidávat stejné množství. Pro snadné numerické počítání zkusíme nejprve přidávat např. po 10 tunách a budeme zkoumat počet tun celkem.

		1. (tun)	2. (tun)	3. (tun)	Celkem (tun)
		95	60	0	155
+	10	105	70	10	185
+	10	115	80	20	215
+	10	125	90	30	245
+	10	135	100	40	275
-	1	134	99	39	272
-	2	133	98	38	269
-	3	132	97	37	266
-	4	131	96	36	263
-	5	130	95	35	260
-	6	129	94	34	257

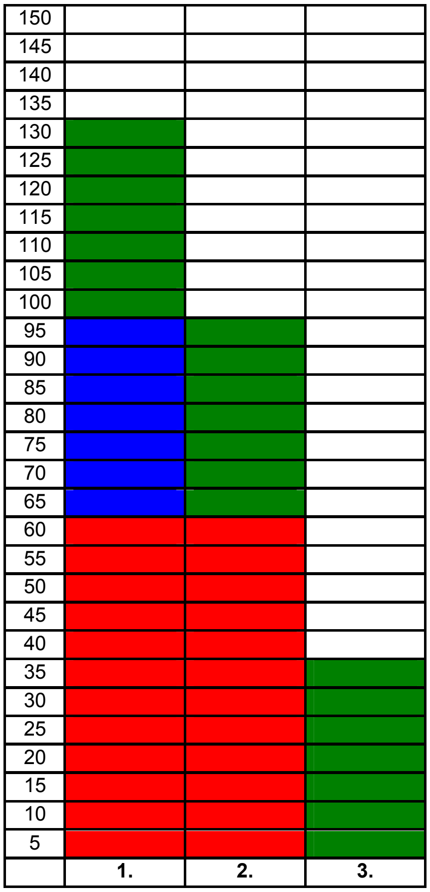
Vidíme, že po přidání 30 tun je celkem na hromadách 245 tun, což je stále málo. Po přidání dalších 10 tun je celkem 275 tun, což už je moc. Takže zkusíme například postupně odčítat po jedné tuně od každé hromady. Z tabulky vidíme, že 260 tun je na všech hromadách, pokud na 1. hromadě je 130 tun, 2. hromadě 95 tun a 3. hromadě 35 tun písku. Nyní už jen zformulujeme odpověď.

Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

3. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Z 1. skupiny tímto způsobem řešil slovní úlohu jeden žák a z 2. skupiny dva žáci. Tato tři řešení byla ve své podstatě stejná. V následujícím řešení uvádím souhrn těchto řešení. Použila jsem přidávání do jednotlivých hromad po pěti, což použili dva žáci, třetí přidával po jedné tuně. Také jsem pro přehlednost vše zanesla do obrázku, což neudělal žádný žák. Všichni pracovali pouze s čísly.

Nakreslíme tři hromady. Do každé nejprve dáme to, co víme ze zadání: v 1. a 2. hromadě je o 60 tun více než ve 3., v 1. hromadě je o 35 tun více než ve 2.



$260 - 2 \cdot 60 - 35 = 260 - 155 = 105$

Spočítali jsme, že máme už na hromadách 155 tun písku a zbývá rozdělit 105 tun. Postupně se pokusíme např. po 5 tunách je rozdělit rovnoměrně do všech hromad.

Vyšlo, že na 1. hromadě je 130 tun, na 2. hromadě 95 tun a na 3. hromadě 35 tun písku. Ještě jsme přidali na každou hromadu 35 tun.

Ověříme to výpočtem: 105 : 3 = 35.

Odpověď: Na první hromadě bylo 130 tun, na druhé 95 tun a na třetí 35 tun písku.

4. Řešení úvahou

Dva žáci z 1. skupiny a jeden z 2. skupiny použili řešení úvahou. Z řešení obou žáků 1. skupiny nemohu vyčíst, jak postupovali. Jsou nakresleny pouze obrázky hromad a u nich dvě až čtyři přeškrtaná čísla. Nemohu zde ani vyloučit, zda správný výsledek někde neopsali.

Žák z 2. skupiny nejprve použil úvahu, kterou dospěl k počtu tun na druhé hromadě. Z jeho zápisu však nelze vyčíst, jakým způsobem k tomuto číslu dospěl. Dále si sestavil tři rovnice o třech neznámých, do kterých postupně, způsobem pokus – omyl, dosazoval čísla.

Řešení úvahou probíhá většinou jen v hlavě žáka, který je jen omezeně schopen tyto své myšlenky (úvahy) interpretovat (více viz kap. 3.3.4.2.4). Ani v jednom z těchto tří řešení nejsem schopna vystihnout a pochopit myšlenkové postupy žáků, proto zde neuvádím žádné souhrnné řešení.

5.1.1.1.2 Závěr části o lineárních rovnicích

V mém výzkumu se potvrdilo to, že má-li žák zvládnutou problematiku lineárních rovnic, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy rovnicí. Pokud žák tuto problematiku zvládnutou nemá, používá jiné způsoby řešení, nejčastěji řešení úsudkem (aproximací či aritmeticky).

Pokud žák zvolí řešení lineární rovnicí a tuto rovnici správně sestaví, dovede ho často toto řešení bez větších problémů ke správnému výsledku. Zvolí-li žák řešení úsudkem, mohou nastat v průběhu jeho řešení různé problémy.

U řešení aproximací často žák zvolí nepřehlednou formu zápisu dílčích výsledků, mezi kterými nenajde potřebné vztahy ke správnému vyřešení slovní úlohy. Zvolí-li žák řešení aritmetické, nastává často problém v tom, že špatně převede zadání slovní úlohy na početní úlohu.

Ze zjištěných údajů vyplývá, že řešení uvedené slovní úlohy lineární rovnicí je pro žáky bezpečným způsobem, jak dosáhnout správného výsledku, pokud má zvládnutou problematiku lineárních rovnic. Pokud ji zvládnutou nemá, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení úsudkem.

5.1.1.2 Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je algebraickou rovnicí druhého stupně. Tato rovnice lze vyjádřit v obecném tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, kde *a*, *b*, *c* jsou libovolné prvky tělesa. Kvadratickou rovnici lze upravit na normovaný tvar $x^2 + px + q = 0$, který dostaneme tím, že rovnici v obecném tvaru vydělíme nenulovým číslem *a*.

Číslo $D = b^2 - 4ac$ se nazývá diskriminant kvadratické rovnice. Pro $D \neq 0$ má rovnice dva různé kořeny, pro $D = 0$ má rovnice jediný dvojnásobný kořen. Má-li rovnice reálné koeficienty, pak

- pro $D > 0$ má dva různé reálné kořeny;
- pro $D < 0$ má dva komplexně sdružené kořeny;
- pro $D = 0$ má jediný reálný kořen.

„Tuto rovnici lze řešit dvěma způsoby:

a. *rozkladem v součin kořenových činitelů*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Viètovy vzorce: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Odvození (použitím Viètových vzorců):

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - xa(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) =$$

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \underline{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

b. *vzorcem:* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Odvození:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\left(ax^2 + bx + \frac{b^2}{4c}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) = 0$$

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a} - c}\right)^2$$

$$\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a} - c}$$

$$\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

$$\frac{2ax + b}{2\sqrt{a}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2\sqrt{a}}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\underline{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \text{ “}$$

(Chromá, 2009, s. 20 – 21)

5.1.1.2.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 3. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří ještě kvadratické rovnice neprobírali (dále 1. skupina). Druhou experimentální skupinou jsou žáci 4. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již kvadratické rovnice mají zvládnuty (dále 2. skupina). Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. Podle tohoto ŠVP jsou kvadratické rovnice probírané ve 3. ročníku. Školní výstupy jsou v něm uvedeny takto: *„Žák*

- *rozpozná kvadratickou rovnici*
- *řeší úplné i neúplné kvadratické rovnice*
- *použije efektivní řešení kvadratické rovnice*
- *z hodnoty diskriminantu pozná počet řešení kvadratické rovnice“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 86)

Učivo je formulováno následovně: *„Lineární rovnice*

- *ryze kvadratická rovnice, kvadratická rovnice bez absolutního členu, obecná kvadratická rovnice*
- *řešení kvadratické rovnice rozkladem*
- *diskriminant, řešení kvadratické rovnice pomocí vzorce“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 86)

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, kterou lze řešit pomocí kvadratické rovnice (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na kvadratické rovnice“). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit mnoha způsoby, může podpořit využití grafických prvků. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z běžného života, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

<u>Úloha:</u> Ze stanice se má vypravit 11 vlaků, z nichž každý má po 35 vagónech. Aby se ušetřilo několik lokomotiv, zmenšili počet vlaků tím, že ke každému vlaku přidali tolikrát po pěti vagónech, kolik lokomotiv ušetřili. Tak byly opět vypraveny všechny vagóny. Kolik lokomotiv se ušetřilo, kolik vagónů měl každý vlak?

(Bušek, 1988, s. 37)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení rovnicí
2. řešení úsudkem
    a. aproximací
    b. systematickým pokusem
3. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně vyřešilo 33,33 % žáků a z 2. skupiny 77,78 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	21	7	33,33	14	66,67
2. skupina	18	14	77,78	4	22,22

Hypotéza H2 se nepotvrdila. Mohu tak soudit ze zjištěných údajů o 2. skupině, které jsou v následující tabulce. Úlohu úspěšně vyřešilo 14 žáků 2. skupiny, z nichž nikdo nepoužil strategii řešení kvadratickou rovnicí.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení kvadratickou rovnicí	Ostatní strategie
Počet	14	0	14
Procent (%)	100	0	100

Hypotéza H3 se nepotvrdila. Pouze 7 žáků vyřešilo úlohu úspěšně, z nichž 3 žáci (tj. 42,86 %) řešení nalezlo náhodně.

1. skupina	Úspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	7	4	3
Procent (%)	100	57,14	42,86

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 21 žáků. 7 žáků vyřešilo úlohu úspěšně a 14 nedospělo ke správnému výsledku:

- 8 žáků se pokusilo sestavit rovnici (většinou lineární)
- 2 žáci se pokusili řešit úlohu úsudkem – systematickým pokusem
- 2 žáci se pokusili řešit úlohu úsudkem – aproximací
- 2 žáci řešili slovní úlohu úvahou

7 žáků vyřešilo slovní úlohu úspěšně:

- 3 řešení úvahou (téměř nepopsanou)
- 2 řešení úsudkem - aproximací
- 2 řešení úsudkem – systematickým pokusem

Ve 2. skupině bylo 18 žáků, z nichž 14 dospělo ke správnému výsledku. 4 žáci úlohu nevyřešili správně:

- 1 žák se pokusil sestavit lineární rovnici
- 1 žák řešil úlohu úvahou
- 1 žák řešil úlohu úsudkem – aproximací
- 1 žák řešil úlohu úsudkem – systematickým pokusem

Ze 14 úspěšných řešení bylo:

- 7 řešení úsudkem – systematickým pokusem
- 3 řešení úsudkem - aproximací
- 4 žáci řešili úlohu úvahou

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

1. Řešení rovnicí

Nikdo z 1. ani 2. skupiny nevyřešil tuto slovní úlohu úspěšně kvadratickou rovnicí. 8 žáků z 1. skupiny a jeden žák z druhé skupiny se pokusili sestavit lineární rovnici, která nevedla ke správnému řešení. Dále uvádím řešení kvadratickou rovnicí, které jsem chybně předpokládala, že žáci použijí.

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme si neznámou x. Sestavíme kvadratickou rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

11 vlaků .... 385 vagónů

Ušetřených lokomotiv .... x lokomotiv

<u>1 vlak .... $(35 + 5x)$ vagónů</u>

$(11 - x)\,(35 + 5x) = 385$

$385 + 55x - 35x - 5x^2 = 385$

$-5x^2 + 20x = 0$ /:(-5)

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$.....nevyhovuje

$\underline{\underline{x_2 = 4 \text{ lokomotivy}}}$

Vypočítali jsme dva kořeny, z toho zadání vyhovuje pouze hodnota $x = 4$, která určuje, kolik lokomotiv jsme ušetřili. Tuto hodnotu dosadíme do zadání a vypočteme, kolik vagónů měl každý vlak.

1 vlak .... $35 + 5x = 35 + 5\times 4 = 55$ vagónů

Výsledek zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

2. Řešení úsudkem (systematický pokus)

Z 1. skupiny tímto způsobem řešili slovní úlohu dva žáci a z 2. skupiny 7 žáků. Tato řešení byla ve své podstatě stejná (Příloha 3). V následujícím řešení uvádím souhrn těchto řešení. Vše jsem pro přehlednost zanesla do tabulky, což neudělal žádný žák. Všichni pracovali pouze s čísly.

Vytvoříme postupně několik tabulek, kde budeme postupně ubírat po jednom vlaku a rozdělovat tolikrát po pěti vagónech ke každému vlaku, aby byl stále stejný počet všech vagónů.

Do první tabulky vepíšeme 10 vlaků (tj. o 1 méně) a rozdělíme 35 vagónů po 5. Vidíme, že vagóny nevystačí na všechny vlaky. Do druhé tabulky vepíšeme 9 vlaků (tj. o 2 méně) a rozdělíme 70 vagónů po 5. Vidíme, že opět nevystačí na všechny vlaky. Tento postup opakujeme.

Po vytvoření tabulky, kde je 7 vlaků, vidíme, že rozdělení $(11-7)\times 35 = 140$ vagónů vystačí na všech 7 vlaků. Z toho plyne, že jsme dospěli k výsledku.

10	5	**9**	5	5	**8**	5	5	5	**7**	5	5	5	5
9	5	**8**	5	5	**7**	5	5	5	**6**	5	5	5	5
8	5	**7**	5	5	**6**	5	5	5	**5**	5	5	5	5
7	5	**6**	5	5	**5**	5	5	5	**4**	5	5	5	5
6	5	**5**	5	5	**4**	5	5	5	**3**	5	5	5	5
5	5	**4**	5	5	**3**	5	5	5	**2**	5	5	5	5
4	5	**3**	5	5	**2**	5	5	5	**1**	5	5	5	5
3		**2**			**1**								
2		**1**											
1													

Ušetřeno: 11 – 7 = 4

Vagónů: 35 + 5 + 5 + 5 + 5 = 55

Výsledek zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

3. Řešení úsudkem (aproximací)

Dva žáci 1. skupiny a tři 2. skupiny vyřešili tuto slovní úlohu úvahou (aproximací). Podle postupu a myšlenek, které žáci pravděpodobně provedli, můžeme říci, že je všech pět řešení stejných. Jeden žák z 1. skupiny zapsal své řešení bez jakéhokoli uspořádání na papíře. U ostatních čtyř žáků byla snaha přiblížit se výsledku přehledně zapsána. Jeden z nich (z 1. skupiny) uvedl své řešení do přehledné tabulky (Příloha 4). Pro lepší přehlednost a představu toho, jak úlohu žáci řešili, uvádím postup řešení do tabulky.

Vytvoříme tabulku, kde budeme v prvním sloupci postupně ubírat počet vlaků. Ve druhém sloupci přidáme vždy tolikrát po 5 vagónech, kolik lokomotiv jsme ubrali. Ve třetím sloupci vypočítáme, kolik vagónů má nově vzniklý vlak.

vlaky	**vagóny/1 lokom.**	**vagóny**
11	35	385
10	40	400
9	45	405
8	50	400
7	55	385
6	60	360
5	65	325

Z tabulky vyčteme, že pokud máme 7 vlaků, tak máme i stejný počet vagónů jako na začátku.

ušetřeno.................. 11 – 7 = 4 lokomotiv

1 vlak .... 35 + 4×5 = 55 vagónů

Nyní již pouze zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Ušetřily se 4 lokomotivy a každý vlak měl 55 vagónů.

4. Řešení úvahou

Tři žáci z 1. skupiny a čtyři z 2. skupiny vyřešili úspěšně úlohu úvahou. Z řešení nelze vyčíst, jak žáci postupovali. Jsou uvedeny dva až tři výpočty a výsledek. Pět řešení vypadá tak, že správný výsledek je nalezen náhodně (Příloha 5). Zařadila jsem je do této skupiny řešení, protože je možné, že žáci použili úvahu, která je těžko vystihnutelná. Z tohoto důvodu zde neuvádím souhrnné řešení.

5.1.1.2.2 Závěr části o kvadratických rovnicích

Předpokládala jsem že, pokud má žák zvládnutou problematiku kvadratických rovnic, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy rovnicí. Provedený výzkum tento předpoklad vyvrátil. Žáci, kteří mají již učivo kvadratických rovnic osvojeno, nejčastěji řešili úlohu úsudkem. Tento závěr však nelze zobecnit. Podle mé praxe a rozhovorů s učiteli gymnázia je výsledek výzkumu spíše ojedinělý.

Nepotvrdil se ani další předpoklad. Předpokládala jsem, pokud žák řeší slovní úlohu kvadratickou rovnicí a neudělá v řešení numerickou chybu, dospěje ke správnému řešení rovnice. Nesmí však zapomenout ověřit, zda oba kořeny kvadratické rovnice odpovídají kontextu slovní úlohy. Je zde nebezpečí, že si řešitel neuvědomí, že kořen rovnice 0 není řešením slovní úlohy, protože máme zjistit, kolik se ušetří lokomotiv. Tento předpoklad jsem nemohla ověřit, neboť nikdo neřešil slovní úlohu kvadratickou rovnicí. Z celkového počtu 39 žáků se pouze devět pokusilo řešit úlohu rovnicí. Tito žáci však chybně sestavili rovnici a nedospěli ke správnému výsledku.

Žáci, kteří již mají kvadratické rovnice zvládnuty, se nejčastěji uchýlili k řešení úsudkem – systematickým pokusem. Žáci, kteří ještě kvadratické rovnice neprobírali, úlohu nejčastěji správně vyřešili úvahou.

5.1.2 Nealgebraické rovnice

5.1.2.1 Rovnice obsahující neznámou ve jmenovateli

Jsou-li *p*, *q* dva polynomy, rovnici $\frac{p(x)}{q(x)}$ = 0; $q(x) \neq 0$, řešíme tak, že nalezneme kořeny algebraické rovnice *p(x)* = 0. Všechny kořeny rovnice *p(x)* = 0 nemusí být kořeny původní rovnice. Vyloučíme kořeny rovnice *p(x)* = 0, pro které je *q(x)* rovno nule. Takto nalezneme všechny kořeny původní rovnice.

5.1.2.1.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 7. ročníku základní školy Dr. Edvarda Beneše, kteří ještě rovnice s neznámou ve jmenovateli neprobírali (dále 1. skupina). Tato škola je klasická základní škola v Praze 9 Čakovicích, ve které se vyučuje podle Školního vzdělávacího programu - Škola – perspektiva pro život. V tomto ŠVP je problematika rovnic s neznámou ve jmenovateli omezena pouze na lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli, která je zaváděna v 9. ročníku. Školní výstupy jsou zformulovány takto: *„Žák/žákyně*

- *vybaví si získané poznatky o mocninách, mnohočlenech a rovnicích*
- *rozezná a zapíše lomený výraz, určí podmínky za kterých má anebo nemá daný lomený výraz smysl*
- *krátí, rozšiřuje, sčítá, odčítá, násobí, dělí lomené výrazy*
- *řeší jednoduché lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli“*

(Škola – perspektiva pro život, 2007, s. 176)

Učivo je zde uvedeno takto:

- *„opakování mocnin, mnohočlenů a rovnic*
- *lomený výraz, definiční obor lomených výrazů*
- *krácení a rozšiřování lomených výrazů*
- *sčítání a odčítání lomených výrazů*
- *násobení a dělení lomených výrazů*
- *lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli*
- *řešení slovních úloh*“

(Škola – perspektiva pro život, 2007, s. 176)

Druhou experimentální skupinou jsou žáci 1. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již rovnice obsahující neznámou ve jmenovateli mají zvládnuty (dále 2. skupina). Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. Podle tohoto ŠVP jsou rovnice s neznámou ve jmenovateli probírané v 1. ročníku. Školní výstupy jsou v něm uvedeny takto: *„Žák*

- *řeší rovnice s neznámou ve jmenovateli*
- *určí podmínky řešitelnosti rovnice*
- *určí množinu kořenů rovnice"*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 81)

Učivo je formulováno následovně: *„Rovnice s neznámou ve jmenovateli*

- *určování podmínek*
- *ekvivalentní úpravy při řešení rovnic*
- *řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli"*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 81)

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, která lze řešit pomocí rovnice obsahující neznámou ve jmenovateli (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na rovnice s neznámou ve jmenovateli"). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit několika různými způsoby. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z běžného života, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

Úloha: Cena vápna byla snížena o 5 Kčs na tuně a stavební závod dostane nyní za 9 765 Kčs o 2,1 t vápna více. Kolik stálo vápno dosud a kolik tun vápna dostával závod za uvedený obnos dosud?

(Jarník, Šisler, 1969, s. 158)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení rovnicí
2. řešení úsudkem – aritmeticky
3. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně nevyřešil nikdo a z 2. skupiny 25 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	16	0	0,00	16	100,00
2. skupina	20	5	25,00	15	75,00

Hypotéza H2 se potvrdila. Mohu tak soudit ze zjištěných údajů o 2. skupině, které jsou v následující tabulce. Úlohu úspěšně vyřešilo 5 žáků 2. skupiny, z nichž 60 % použilo strategii řešení lineární rovnicí.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení rovnicí	Ostatní strategie
Počet	5	3	2
Procent (%)	100	60	40

Hypotéza H3 nelze potvrdit ani vyvrátit, neboť nikdo z 1. skupiny úlohu nevyřešil úspěšně. Mohu pouze usuzovat z neúspěšných řešení. Úlohu se pokusilo vyřešit 11 žáků z 1. skupiny, z nichž 63,64 % se úlohu snažilo řešit náhodně.

1. skupina	Neúspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	11	4	7
Procent (%)	100	36,36	63,64

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 16 žáků, z nichž nikdo nedospěl ke správnému výsledku:

- 4 žáci se pokusili řešit úlohu úsudkem – aritmeticky
- 7 žáků řešilo slovní úlohu úvahou
- 5 žáků neuvedlo žádné řešení

Ve 2. skupině bylo 20 žáků, z nichž 5 dospělo ke správnému výsledku. 15 žáků úlohu nevyřešilo správně:

- 6 žáků neuvedlo žádné řešení,
- 3 žáci se pokusili sestavit rovnici s neznámou ve jmenovateli
- 4 žáci řešili úlohu úvahou
- 2 žáci řešili úlohu úsudkem – aritmeticky

Z 5 úspěšných řešení bylo:

- 3 řešení rovnicí s neznámou ve jmenovateli
- 1 řešení úsudkem - aritmeticky
- 1 řešení úvahou

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

<u>1. Řešení rovnicí</u>

Tři žáci z 2. skupiny vyřešili tuto úlohu úspěšně rovnicí s neznámou ve jmenovateli. Všechna řešení se dají shrnout do následujícího postupu řešení. Nikdo ze žáků neuvedl podmínky existence řešení (Příloha 6) .

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou *x*. Sestavíme rovnici s jednou neznámou ve jmenovateli a řešíme ji.

původně .... x Kčs/tun

nyní........................ $(x-5)$ Kčs/tun

cena........................ 9 765 Kčs

původně.................. $\frac{9765}{x}$ tun

nyní .... $\frac{9765}{x-5}$ tun

$$\frac{9765}{x} + 2{,}1 = \frac{9765}{x-5} \quad /x(x-5)$$

Nesmíme zapomenout na podmínky existence řešení, protože máme neznámou ve jmenovateli.

$x \neq 0$

$x \neq 5$

Tuto rovnici postupnými úpravami převedeme na kvadratickou rovnici s jednou neznámou a tu dále řešíme.

$9\,765(x-5) + 2{,}1x(x-5) = 9\,765x$

Roznásobením závorek a vydělením celé rovnice číslem 2,1 dostaneme:

$x^2 - 5x - 23250 = 0$

$D = 25 + 93000 = 93025$

$\sqrt{D} = 305$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 305}{2} = -150$ (nevyhovuje kontextu úlohy, tj. cena není záporná)

$= \underline{\underline{155 \text{ Kčs}}}$

9765/155 = $\underline{\underline{63 \text{ tun}}}$ vápna

Vypočítali jsme dvě neznámé, z toho zadání vyhovuje pouze hodnota x = 155 Kčs, která určuje, jaká byla cena vápna před snížením. Tuto neznámou dosadíme do zadání a vypočteme, kolik tun vápna za 9 765 Kčs dostával dříve závod. Zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Cena vápna před snížením byla 155 Kčs. Za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun vápna.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Aritmetickým způsobem tuto úlohu úspěšně řešil pouze jeden žák z 2. skupiny (Příloha 7). Dva žáci z 2. skupiny a 4 žáci z 1. skupiny se pokusili tuto úlohu řešit aritmeticky, ale nedospěli ke správnému výsledku. V následujícím řešení uvádím souhrn všech těchto řešení.

Vytvoříme tabulku, kde zvolíme původní cenu vápna, dopočítáme příslušnou novou cenu a spočítáme, kolik vápna dostal závod v obou případech za 9 765 Kčs. Do posledního sloupce zapíšeme rozdíl toho, kolik tun dostal závod dříve a dnes.

původní cena (Kčs)	počet tun za 9765,-	nová cena (Kčs)	počet tun za 9765,-	rozdíl tun za 9765,-
50	195,30	45	217,00	21,70
100	97,65	95	102,79	5,14
150	65,10	145	67,34	2,24
200	48,83	195	50,08	1,25
160	61,03	155	63,00	1,97
151	64,67	146	66,88	2,21
152	64,24	147	66,43	2,19
153	63,82	148	65,98	2,16
154	63,41	149	65,54	2,13
155	63,00	150	65,10	2,10
156	62,60	151	64,67	2,07

Nejprve zvyšujeme původní cenu např. o 50 Kčs a porovnáváme poslední sloupec s rozdílem 2,1. Vidíme, že toto číslo je mezi cenou 150 a 200 Kčs. Začneme zvyšovat původní cenu např. o 10 Kčs. Již u 160 Kčs vidíme, že rozdíl 2,1 tun je mezi 150 a 160 Kčs. Začneme zvyšovat původní cenu např. o 1 Kčs. Z tabulky opět vyčteme, že rozdíl 2,1 je, když je původní cena 155 Kčs. V tabulce také vidíme odpověď na druhou otázku. Pokud byla původní cena 155 Kčs, pak za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun vápna.

Odpověď: Cena vápna před snížením byla 155 Kčs. Za 9 765 Kčs dostával závod 63 tun vápna.

3. Řešení úvahou

Sedm žáků z 1. skupiny a 4 žáci z 2. skupiny se pokusili úlohu řešit úvahou, ale nedospěli ke správnému výsledku. Pouze jeden žák z 2. skupiny vyřešil úspěšně tuto úlohu úvahou. Z jeho řešení není možné vyčíst, jakým způsobem při svém řešení postupoval, proto pouze uvádím jeho řešení v příloze (Příloha 8).

5.1.2.1.2 Závěr části o rovnicích s neznámou ve jmenovateli

Z 1. skupiny úspěšně nikdo nevyřešil slovní úlohu na rovnice s neznámou ve jmenovateli, z 2. skupiny pouze 5 žáků z celkového počtu 36 zkoumaných žáků. Jelikož úspěšně vyřešilo úlohu pouze 13,9 %, nelze výsledky výzkumu zcela shrnout ani zobecnit. Mohu pouze usuzovat z výzkumu a své praxe, ale hlavně z rozhovorů s učiteli.

Řešení této slovní úlohy vede k řešení rovnicí s neznámou ve jmenovateli. Pokud řešitel pochopil údaje v této slovní úloze, pak tento způsob řešení je jednoduchý na porozumění. Je zde nebezpečí toho, že řešitel zapomene na podmínky existence některého zlomku, ale konkrétně na výsledky této slovní úlohy zmíněné opominutí nemá vliv. Pokud řešitel neprovede zkoušku, může získat jedno či více nesprávných řešení.

Aritmetický způsob řešení je v řešení této slovní úlohy neefektivní a je zde velká pravděpodobnost, že se řešitel splete a dospěje ke špatnému výsledku, nebo se nedopočítá výsledku žádného, což se stalo u většiny žáků, kteří zvolili tento způsob řešení.

5.1.2.2 Iracionální rovnice

Rovnice, kde se výrazy obsahující neznámou vyskytují pod odmocninou, se nazývají iracionální rovnice. Pokud neumíme iracionální rovnici zjednodušit jinak, upravíme ji umocněním jejích obou stran na rovnici algebraickou. K těmto úpravám lze přistupovat dvojím způsobem:

1. *„Jako k úpravám důsledkovým, pak je nutnou součástí řešení zkouška, která z možných kořenů vybere skutečné kořeny dané rovnice."*
2. *„Jako k úpravám ekvivalentním, pak je třeba stanovit podmínky (dané nerovnicemi), za nichž nastává ekvivalence původní a upravené rovnice. Tento postup je však vhodný jen u jednodušších iracionálních rovnic."*

(Polák, 1980, s. 200)

5.1.2.2.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 3. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří ještě iracionální rovnice neprobírali (dále 1. skupina). Druhou experimentální skupinou jsou žáci 4. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již iracionální rovnice mají zvládnuty (dále 2. skupina). Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. Podle tohoto ŠVP jsou iracionální rovnice probírané ve 3. ročníku. Školní výstupy jsou v něm uvedeny takto: *„Žák*

- *řeší rovnice s neznámou pod odmocninou, provede zkoušku*
- *vysvětlí pojmy ekvivalentní a neekvivalentní úpravy*
- *vhodně užije substituci při řešení rovnic a nerovnic"*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 278)

Učivo je formulováno následovně: *„Iracionální rovnice a nerovnice*

- *rovnice s neznámou pod odmocninou*
- *nerovnice s neznámou pod odmocninou*
- *použití substituce“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 278)

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, kterou lze řešit pomocí iracionální rovnice (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na iracionální rovnice“). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit mnoha způsoby, může podpořit využití grafických prvků. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z geometrického prostředí, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

<u>Úloha:</u> Od čtverce oddělujeme jeho části, jednou získáme obrazec s obsahem o 9 m^2 menším, podruhé obrazec s obsahem o 24 m^2 menším. Sestrojíme-li čtverce, jejichž obsahy jsou rovny obsahům získaných obrazců, je součet délky strany prvního a délky strany druhého čtverce roven délce strany původního čtverce. Jaký je obsah původního čtverce?

(Bušek, 1988, s. 28)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení rovnicí
2. řešení úsudkem
   a. obrázkem
   b. aritmeticky
3. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně vyřešilo 12 % žáků a z 2. skupiny 40 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	25	3	12,00	22	88,00
2. skupina	20	8	40,00	12	60,00

O hypotéze H2 nelze říci, zda se potvrdila či vyvrátila. Zjištěné údaje o 2. skupině jsou v následující tabulce. 8 žáků úlohu vyřešilo úspěšně, z nichž 4 použili strategii řešení rovnicí a 4 jinou strategii.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení rovnicí	Ostatní strategie
Počet	8	4	4
Procent (%)	100	50	50

Hypotéza H3 se nepotvrdila. Z 1. skupiny úlohu vyřešili úspěšně 3 žáci a všichni použili strategii řešení úsudkem – aritmeticky.

1. skupina	Úspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	3	3	0
Procent (%)	100	100,00	0,00

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 25 žáků. 3 žáci vyřešili úlohu úspěšně, všichni použili strategii řešení úsudkem – aritmeticky. 22 žáků nedospělo ke správnému výsledku:

- 6 žáků se pokusilo sestavit rovnici kvadratickou či lineární
- 2 žáci řešili úlohu úsudkem – aritmeticky
- 5 žáků se pokusilo řešit úlohu úsudkem – obrázkem
- 5 žáků řešilo slovní úlohu úvahou
- 4 žáci neuvedli žádné řešení

Ve 2. skupině bylo 20 žáků, z nichž 8 dospělo ke správnému výsledku. 12 žáků úlohu nevyřešilo správně:

- 2 žáci neuvedli žádné řešení
- 7 žáků se pokusilo sestavit a vyřešit rovnici
- 3 žáci použili řešení úsudkem - obrázkem

Z 8 úspěšných řešení bylo:

- 4 řešení iracionální rovnicí
- 1 řešení nejprve úsudkem – obrázkem a poté systematickým pokusem
- 1 řešení úsudkem - aritmeticky
- 2 řešení úvahou

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

1. Řešení rovnicí

Žádný žák z 1. skupiny nevyřešil tuto slovní úlohu iracionální rovnicí, 4 žáci z 2. skupiny ji vyřešili právě iracionální rovnicí. Všechna čtyři řešení můžeme shrnout do následujícího postupu řešení. Nikdo neuvedl podmínky existence výrazů pod odmocninami. Jen jeden žák na úvod nakreslil obrázek, který však měl pouze ilustrativní charakter.

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámou například *x*. Sestavíme iracionální rovnici o jedné neznámé a řešíme ji.

původní .... x m^2

1. obrazec .... $(x - 9)$ m^2

2. obrazec .... $(x - 24)$ m^2

Ze zadání víme, že součet délek stran nových čtverců se má rovnat délce strany původního čtverce, tedy

$$\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x}$$

Nesmíme zapomenout na podmínky existence odmocniny.

$x \geq 0 \wedge x \geq 9 \wedge x \geq 24$, tj.

$\underline{\underline{x \geq 24}}$

$\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = \sqrt{x}$ $/^2$

$x - 9 + 2\sqrt{(x-9)(x-24)} + x - 24 = x$

$x - 33 = -2\sqrt{x^2 - 33x + 216}$ $/^2$

$x^2 - 66x + 1089 = 4(x^2 - 33x + 216)$

$3x^2 - 66x - 225 = 0$

$(x - 25)(x + 3) = 0$

$x_1 = -3$ nevyhovuje podmínkám

$\underline{\underline{x_2 = 25\ \text{m}^2}}$

$L(25) = \sqrt{16} + \sqrt{1} = 5$

$P(25) = \sqrt{25} = 5$

$\underline{\underline{L = P}}$

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Z 1. skupiny řešili úspěšně slovní úlohu tímto způsobem 3 žáci a z 2. skupiny jeden žák (Příloha 9). Tato čtyři řešení byla ve své podstatě stejná, proto v následujícím řešení mohu uvést souhrn těchto řešení. Pro přehlednost jsem vše zaznamenala do tabulky, i když žádný z žáků do ní své řešení nezanesl.

Vytvoříme tabulku, kde volíme délku strany původního čtverce a dopočítáváme délky stran nových obrazců. Dále počítáme obsahy všech čtverců a součet délek stran nových čtverců.

délka strany 1. (m)	**obsah 1.** (m^2)	**obsah 2.** [-9] (m^2)	**délka strany 2.** (m)	**obsah 3.** [-24] (m^2)	**délka strany 3.** (m)	**délka strany 2. + délka strany 3.** (m)
1	1	-8	nelze	-23	nelze	nelze
2	4	-5	nelze	-20	nelze	nelze
3	9	0	0	-15	nelze	nelze
4	16	7	2,65	-8	nelze	nelze
5	25	16	4,00	1	1,00	5,00
6	36	27	5,20	12	3,46	8,66
7	49	40	6,32	25	5,00	11,32
8	64	55	7,42	40	6,32	13,74
9	81	72	8,49	57	7,55	16,04
10	100	91	9,54	76	8,72	18,26
11						
12						

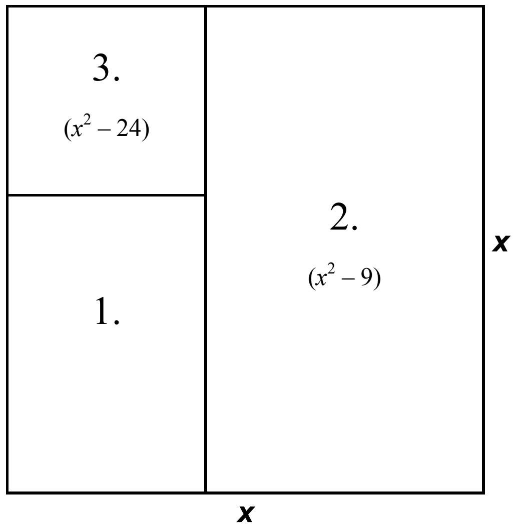
Ze zadání víme, že součet délek stran nových čtverců se má rovnat délce strany původního čtverce. Z tabulky vyčteme, že je to tehdy, pokud původní čtverec má délku strany 5 m a obsah 25 m^2.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

3. Řešení úsudkem (obrázkem)

Úsudkem – obrázkem řešil úspěšně slovní úlohu na iracionální rovnici pouze jeden žák z 2. skupiny. Tento žák nejprve úlohu řešil obrázkem a dořešil ji způsobem pokus – omyl (Příloha 10). V následujícím textu uvádím řešení obrázkem, které jsem u žáků předpokládala.

Nakreslíme obrázek, který vystihuje situaci ze zadání.



Z obrázku ze zadání vyčteme různé vztahy:

$S = x^2$ m^2

$S_2 = (x^2 – 9)$ m^2

$\underline{S_3 = (x^2 – 24)\ \text{m}^2}$

$S_1 = S - S_2 - S_3$

$S_1 = x^2 - x^2 + 9 - x^2 + 24$

$S_1 = - x^2 + 33$

$x^2 < 33 \Rightarrow x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vyzkoušíme všechna x:

$\mathbf{S_2 = x^2 – 9}$

$1^2 – 9 < 0$

$2^2 – 9 < 0$

$3^2 – 9 < 0$

$\underline{4^2 – 9 = 7}$

$\underline{5^2 – 9 = 16}$

$\mathbf{S_3 = x^2 – 24}$

$4^2 – 24 < 0$

$\underline{5^2 – 24 = 1} \Rightarrow \underline{x = 5\ \text{m}}$

$\underline{\underline{S = 25\ \text{m}^2}}$

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Původní čtverec má obsah 25 m^2.

4. Řešení úvahou

Dva žáci z druhé skupiny použili úvahu při řešení slovní úlohy na iracionální rovnici. Jeden žák zapsal svou úvahu tak, že není možné odhadnout jeho myšlenkové postupy. Nemohu ani vyloučit, zda výsledek někde neopsal.

Druhý žák si nejprve uvědomil vztahy uvedené v zadání a zapsal je i pomocí obrázku. Následně vycházel z toho, že obsah jakéhokoli útvaru musí být kladné číslo. Podle toho si určil několik podmínek, různě je kombinoval a zkoušel vhodná čísla, než dospěl k výsledku (Příloha 11).

5.1.2.2.2 Závěr části o iracionálních rovnicích

Výsledky výzkumu ukázali, že má-li žák již osvojeny vědomosti a dovednosti týkající se řešení iracionálních rovnic, dává při řešení slovních úloh na iracionální rovnice přednost řešení rovnicí před ostatními strategiemi.

Řešení rovnicí v této slovní úloze vede k řešení iracionální rovnicí. Při tomto řešení je nebezpečí, že řešitel zapomene na podmínky existence odmocniny a může tím dospět ke špatnému výsledku. Další chybou může být, že řešitel výsledky iracionální rovnice neporovná se zadáním úlohy a zapomene vyloučit záporný kořen. (Máme zjistit obsah původního čtverce, který nemůže být záporný.)

Aritmetické řešení je v této úloze neúčelné a zdlouhavé, přesto tímto způsobem vyřešili slovní úlohu úspěšně 4 žáci (z celkového počtu). Je důležité, aby řešitel zvolil přehlednou grafickou úpravu postupu řešení. Pokud tak neučiní, je zde velká pravděpodobnost, že nedospěje k výsledku nebo k němu dospěje za dlouhou dobu.

Považovala jsem za nejpřehlednější a nejefektivnější třetí způsob řešení, řešení pomocí obrázku. V tomto způsobu je jen třeba, aby se řešitel správně orientoval v zadání úlohy, dovedl ho zakreslit do obrázku a znal vzorce pro obsah čtverce a obdélníka. Ve výzkumu se tento předpoklad nepotvrdil. Slovní úlohu tímto způsobem úspěšně vyřešil pouze jeden žák.

5.1.3 Soustavy rovnic

Soustavou rovnic rozumíme množinu rovnic, ve které mají být rovnice splněny současně. V této práci se dále zabývám dvěma skupinami soustav, jsou to soustavy lineárních rovnic a soustavy nelineárních rovnic.

Soustavu rovnic definuje například Novotná a Trch takto: *„Soustavou k rovnic o n neznámých* $x_1, x_2, ..., x_n$ *rozumíme k rovnic* $V_1 = W_1, V_2 = W_2, ..., V_k = W_k$, *po řadě s množinami řešení* $P_1, P_2, ..., P_k$. *Množinou řešení této soustavy rozumíme množinu* $P = P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_k$*.“* (Novotná, Trch, 2004, s. 52)

Soustavy rovnic nazýváme ekvivalentními, mají-li stejnou množinu řešení. Ekvivalentní úpravy soustavy (tj. úpravy převádějící danou soustavu na soustavu s ní ekvivalentní) jsou:

1. *„nahrazení kterékoli rovnice rovnicí s ní ekvivalentní“*
2. *„přičtení libovolného násobku jedné rovnice k jiné rovnici soustavy“*
3. *„vypuštění rovnice, která je ekvivalentní s některou jinou rovnicí soustavy“*
4. *„záměnou pořadí rovnic“*

(Novotná, Trch, 2004, s. 52)

5.1.3.1 Soustavy lineárních rovnic

„Soustavou m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$ nazýváme soustavu

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

($a_{11}, ..., a_{mn}, b_1, ..., b_m$ *jsou daná reálná čísla, resp. komplexní čísla).*

Řešením soustavy se nazývá každá taková uspořádaná n-tice (reálných, resp. komplexních) čísel $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, *tj. n-členný vektor, že při dosazení čísel* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *za neznámé $x_1, ..., x_n$ jsou splněny všechny rovnice soustavy.“* (Rektorys a kol., 1981, s. 61)

„Soustava m homogenních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0$$

*má vždy nulové (triviální) řešení **0** = (0, 0,…, 0).“* (Rektorys a kol., 1981, s. 62)

„Má-li soustava řešení $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$*, má i řešení* $\alpha\xi = (\alpha\xi_1,...,\alpha\xi_n)$*, kde* α *je libovolné reálné, resp. komplexní číslo. Jsou-li vektory* $\xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)},...,\xi_n^{(1)}),...,\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)},...,\xi_n^{(k)})$ *řešeními soustavy, pak každá jejich lineární kombinace* $\alpha_1\xi^{(1)} + \alpha_2\xi^{(2)} + \ldots + \alpha_k\xi^{(k)}$ *je řešením soustavy.“* (Rektorys, 1981, s. 62)

5.1.3.1.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 1. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří ještě soustavy lineárních rovnic neprobírali (dále 1. skupina). Druhou experimentální skupinou jsou žáci 2. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již soustavy lineárních rovnic mají zvládnuty (dále 2. skupina). Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. Podle tohoto ŠVP jsou soustavy lineárních rovnic probírány ve 2. ročníku. Školní výstupy jsou v něm uvedeny takto: *„Žák*

- *řeší soustavu dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými (metoda sčítací a dosazovací*
- *zapíše řešení soustavy rovnic“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 85 - 86)

Učivo je formulováno následovně: *„Soustavy rovnic o dvou neznámých*

- *soustavy dvou lineárních rovnic*
- *metody řešení“*

(Dveře ke vzdělání otevřené, 2009, s. 85 - 86)

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, kterou lze řešit pomocí soustavy lineárních rovnic (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na soustavy lineárních rovnic“). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit mnoha způsoby, může podpořit využití grafických prvků. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z geometrického prostředí, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

Úloha: Zvětšíme-li šířku obdélníka o 5 m a délku obdélníka o 10 m, zvětší se jeho obsah o 625 m^2; zvětšíme-li šířku o 10 m a délku o 5 m, zvětší se jeho obsah o 675 m^2. Jaké jsou rozměry obdélníka?

(Janeček, 2006, s. 98)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení soustavou lineárních rovnic
2. řešení soustavou nelineárních rovnic
3. řešení úsudkem - aritmeticky
4. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně nevyřešil nikdo a z 2. skupiny 26,09 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	24	0	0,00	24	100,00
2. skupina	23	6	26,09	17	73,91

Hypotéza H2 se potvrdila. Mohu tak soudit ze zjištěných údajů o 2. skupině, které jsou v následující tabulce. Úlohu úspěšně vyřešilo 6 žáků 2. skupiny, všichni použili strategii řešení soustavou rovnic. Dva z nich soustavou lineárních rovnic a 4 soustavou nelineárních rovnic.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení soustavou rovnic	Ostatní strategie
Počet	6	6	0
Procent (%)	100	100	0

Hypotéza H3 nelze potvrdit ani vyvrátit, neboť nikdo z 1. skupiny úlohu nevyřešil úspěšně. Mohu pouze usuzovat z neúspěšných řešení. Úlohu se pokusilo vyřešit 14 žáků z 1. skupiny, z nichž pouze 42,86 % se úlohu snažilo řešit náhodně.

1. skupina	Neúspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	14	8	6
Procent (%)	100	57,14	42,86

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 24 žáků, z nichž nikdo nedospěl ke správnému výsledku:

- 2 žáci se pokusili sestavit dvě rovnice a každou řešit zvlášť
- 6 žáků řešilo úlohu úsudkem – aritmeticky
- 6 žáků se pokusilo řešit úlohu úsudkem
- 10 žáků neuvedlo žádné řešení

Ve 2. skupině bylo 23 žáků, z nichž 6 dospělo ke správnému výsledku. 17 žáků úlohu nevyřešilo správně:

- 11 žáků se pokusilo sestavit soustavu dvou lineárních rovnic
- 6 žáků řešilo úlohu soustavou dvou nelineárních rovnic

Z 6 úspěšných řešení bylo:

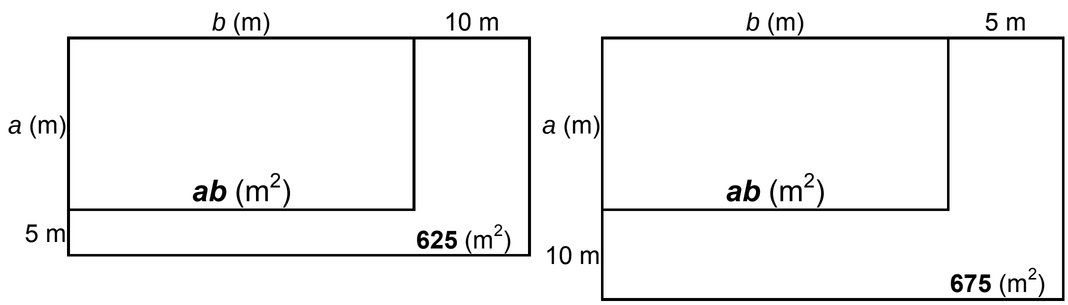
- 2 žáci úlohu vyřešili soustavou dvou lineárních rovnic
- 4 řešení soustavou dvou nelineárních rovnic

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

1. Řešení obrázkem a soustavou dvou lineárních rovnic

Dva žáci z 2. skupiny vyřešili úspěšně slovní úlohu na soustavu lineárních rovnic tímto způsobem a oba žáci začali své řešení obrázkem. Obě řešení se dají shrnout do následujícího postupu řešení.

Nakreslíme obrázek, podle informací ze zadání.



$5b + 10a + 5 \cdot 10 = 625$ $\qquad\qquad$ $5a + 10b + 5 \cdot 10 = 67$

Sestavíme rovnice podle obrázku a tuto soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých řešíme.

$5b + 10a = 575$ /:5

$\underline{5a + 10b = 625}$ /:5

$2a + b = 115$

$\underline{a + 2b = 125} \;\Rightarrow\; a = 125 - 2b$

$2(125 - 2b) + b = 115$

$250 - 4b + b = 115$

$-3b = -135$

$\underline{\underline{b = 45\text{ m}}}$

$a = 125 - 2 \cdot 45$

$\underline{\underline{a = 35\text{ m}}}$

Nyní už stačí jen zformulovat slovní odpověď.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

2. Řešení soustavou nelineárních rovnic

Čtyři žáci z 2. skupiny úspěšně vyřešili tuto slovní úlohu soustavou nelineárních rovnic. Všechna řešení byla velice podobná, proto jsem je shrnula do následujícího postupu řešení. Všichni čtyři žáci, než začali sestavovat rovnice, nakreslili si obrázek, který však měl pouze ilustrativní charakter.

Nejprve slovní výrazy nahradíme algebraickými a zvolíme neznámé x a y, kde x je šířka a y délka původního obdélníka. Sestavíme nelineární rovnice o dvou neznámých, které musí platit současně. Převedeme soustavu dvou nelineárních rovnic na soustavu dvou lineárních rovnic a tuto soustavu řešíme.

šířka ....$(x + 5)$ m .... $(x + 10)$ m

délka ....$(y + 10)$ m .... $(y + 5)$ m

obsah..........$(xy + 625)$ m^2 ...... $(xy + 675)$ m^2

$(x + 5)(y + 10) = xy + 625$

$(x + 10)(y + 5) = xy + 675$

$xy + 10x + 5y + 50 = xy + 625$

$xy + 5x + 10y + 50 = xy + 675$

$10x + 5y = 575$

$5x + 10y = 625 \quad /\cdot(-2)$

$10x + 5y = 575$

$-10x - 20y = -1250$

$15y = 675$

$y = 45$ m

$10x + 5 \cdot 45 = 575$

$10x = 350$

$x = 35$ m

Výpočty zformulujeme do slovní odpovědi.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

3. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Uvádím zde pouze mnou předpokládané řešení úsudkem, které nikdo z žáků nepoužil.

Vytvoříme tabulku, kam do sloupců budeme zapisovat rozměry útvarů. Šířku a délku původního obdélníka libovolně volíme a dopočítáváme zbylé hodnoty.

š (m)	d (m)	S (m^2)	š + 5 (m)	d + 10 (m)	S_1 (m^2)	š + 10 (m)	d + 5 (m)	S_2 (m^2)	$S_1 – S$ (m^2)	$S_2 – S$ (m^2)
10	20	200	15	30	450	20	25	500	250	300
20	30	600	25	40	1000	30	35	1050	400	450
30	40	1200	35	50	1750	40	45	1800	550	600
40	50	2000	45	60	2700	50	55	2750	700	750

Z posledních dvou sloupců vidíme, že šířka původního obdélníka je mezi 30 m a 40 m a délka 40 m a 50 m. Proto zkusíme například různé možnosti po pěti, teprve pokud nezjistíme výsledek, zkusíme měnit rozměry po jedné.

š (m)	d (m)	S (m^2)	š + 5 (m)	d + 10 (m)	S_1 (m^2)	š + 10 (m)	d + 5 (m)	S_2 (m^2)	$S_1 – S$ (m^2)	$S_2 – S$ (m^2)
35	40	1400	40	50	2000	45	45	2025	600	625
40	45	1800	45	55	2475	50	50	2500	675	700
35	45	1575	40	55	2200	45	50	2250	625	675

Z prvního řádku vidíme, že je jeden rozměr správný, ale nevíme který. Proto zvětšíme oba rozměry například o 5 m a opět vidíme, že je jen jeden rozměr správný. Nyní již z prvního a druhého řádku známe výsledek, ale ještě ho ověříme.

Známe tedy rozměry původního obdélníka a můžeme zformulovat slovní odpověď.

Odpověď: Rozměry obdélníka jsou 35 m a 45 m.

5.1.3.1.2 Závěr části o soustavách lineárních rovnic

Výzkum potvrdil to, že má-li žák zvládnutou problematiku soustav rovnic, uchýlí se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy soustavou rovnic. Všichni žáci, kteří již tuto problematiku mají zvládnutou (2. skupina), se pokusili řešit úlohu soustavou rovnic, buď lineární či nelineární.

Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text úlohy, správně určil vztahy mezi danými a hledanými údaji. K prvním dvěma způsobům řešení slovní úlohy je třeba, aby měl řešitel zvládnutou problematiku řešení soustavy rovnic. Pokud ji řešitel zvládnutou má, tak tyto způsoby řešení ho bez velkých problému dovedou ke správnému výsledku řešení slovní úlohy. Většina žáků, kteří zvolili řešení soustavou rovnic a nedobrali se ke správnému výsledku, udělala numerické chyby a chyby při úpravě rovnic. Po získání vhledu do problematiky slovní úlohy je způsob řešení obrázkem a soustavou dvou lineárních rovnic časově výhodnější než řešení soustavou dvou nelineárních rovnic bez nakreslení obrázku.

Použije-li řešitel mnou uvedené aritmetické řešení, je nutné, aby zvolil vhodný způsob řešení a zápisu dílčích výsledků. Řešení úsudkem je časově náročné a často vede k chybnému řešení slovní úlohy.

5.1.3.2 Soustavy nelineárních rovnic

Soustava rovnic, kde alespoň jedna rovnice není lineární, se nazývá soustavou nelineárních rovnic. Soustavy nelineárních rovnic mohou obsahovat i rovnice nealgebraické.

Otázka řešitelnosti soustav nelineárních rovnic je složitá. Může nastat případ, kdy daná soustava nemá žádné řešení, nebo také může mít 1, 2, 3, 4, … až nekonečně mnoho řešení.

Při řešení soustavy dvou algebraických rovnic o dvou neznámých se můžeme řídit tímto tvrzením: *„Počet řešení soustavy dvou algebraických rovnic o dvou neznámých je roven nejvýše součinu stupňů obou rovnic nebo je nekonečný.“* (Jarník, Šisler, 1969, s. 221)

5.1.3.2.1 Výzkum

Výzkumný vzorek

První experimentální skupinou jsou žáci 3. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří ještě soustavy nelineárních rovnic neprobírali (dále 1. skupina). Druhou experimentální skupinou jsou žáci 4. ročníku šestiletého gymnázia Čakovice, kteří již soustavy nelineárních rovnic mají zvládnuty (dále 2. skupina).

Gymnázium Čakovice je šestileté gymnázium v Praze 9 Čakovicích, ve kterém probíhá vyučování podle Školního vzdělávacího programu – Dveře ke vzdělání otevřené. V tomto ŠVP není uvedeno učivo soustav nelineárních rovnic, ale vyučuje se únor – březen ve 3. ročníku.

Rozbor zjištěných údajů

Oběma zkoumaným skupinám jsem zadala následující slovní úlohu, která lze řešit pomocí soustavy nelineárních rovnic (v dalším textu budu psát zkráceně „slovní úloha na soustavu nelineárních rovnic“). Tuto úlohu jsem zvolila z toho důvodu, že lze řešit mnoha způsoby, může podpořit využití grafických prvků. Tyto způsoby lze dobře zaznamenat, popsat a jejich rozbor lze detailně analyzovat. Kontext úlohy je z geometrického prostředí, což může zvýšit její motivační potenciál pro některé žáky.

<u>Úloha:</u> Jsou dány dva čtverce: rozdíl délek jejich stran je 3 cm a součet jejich obsahů je 65 cm^2. Určete délky stran čtverců.

(Benda, 1979, s. 32)

Seznam správných postupů řešení, které jsem očekávala:

1. řešení soustavou nelineárních rovnic
2. řešení úsudkem
   a. aritmeticky
   b. obrázkem
3. řešení úvahou

Výsledky výzkumu

Hypotéza H1 se potvrdila. Soudím tak z počtu úspěšně vyřešených slovních úloh u jednotlivých skupin. Z 1. skupiny úlohu úspěšně vyřešilo 50 % žáků a z 2. skupiny 81,82 % žáků.

	Celkový počet žáků	Úspěšné řešení		Neúspěšné řešení	
		počet	procent (%)	počet	procent (%)
1. skupina	24	12	50,00	12	50,00
2. skupina	22	18	81,82	4	18,18

Hypotéza H2 se potvrdila. Mohu tak soudit ze zjištěných údajů o 2. skupině, které jsou v následující tabulce. Úlohu úspěšně vyřešilo 18 žáků 2. skupiny, z nichž 66,67 % použilo strategii řešení soustavou nelineárních rovnic.

2. skupina	Úspěšná řešení	Řešení soustavou rovnic	Ostatní strategie
Počet	18	12	6
Procent (%)	100	66,67	33,33

Hypotéza H3 se nepotvrdila. Pouze 33,33 % žáků z 1. skupiny vyřešilo slovní úlohu úspěšně strategií náhodně nalezeného řešení.

1. skupina	Úspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
Počet	12	8	4
Procent (%)	100	66,67	33,33

V 1. skupině řešilo tuto úlohu 24 žáků. 12 žáků vyřešilo úlohu úspěšně a 12 nedospělo ke správnému výsledku:

- 4 žáci se pokusili sestavit soustavu nelineárních rovnic
- 3 žáci řešili úlohu úsudkem – aritmeticky
- 3 žáci řešili slovní úlohu úsudkem – obrázkem
- 2 žáci se pokusili řešit úlohu úsudkem

Ve 2. skupině bylo 22 žáků, z nichž 18 dospělo ke správnému výsledku. 4 žáci úlohu nevyřešili správně. Všichni čtyři se pokusili slovní úlohu řešit pomocí soustavy nelineárních rovnic. Z 18 úspěšných řešení bylo:

- 12 řešení bylo soustavou dvou nelineárních rovnic
- 4 řešení úsudkem – obrázkem
- 2 žáci řešili úlohu úvahou

Jednotlivé řešitelské postupy dále popisuji a analyzuji v následujícím textu.

1. Řešení soustavou rovnic

Čtyři žáci z 1. skupiny a 12 z 2. skupiny vyřešilo úspěšně slovní úlohu pomocí soustavy dvou nelineárních rovnic. Všechna žákovská řešení byla velmi podobná, proto jsem je mohla shrnout do následujícího postupu řešení.

Ze zadání vypíšeme, co víme a co máme zjistit. Sestavíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, z nichž jedna je lineární a druhá kvadratická, a řešíme ji.

1. čtverec: délka strany............ a (cm)

obsah .... a^2 (cm^2)

2. čtverec: délka strany............ b (cm)

obsah .... b^2 (cm^2)

$a - b = 3 \Rightarrow a = 3 + b$

$a^2 + b^2 = 65$

$(3 + b)^2 + b^2 = 65$

$9 + 6b + b^2 + b^2 = 65$

$2b^2 + 6b - 56 = 0$ /:2

$b^2 + 3b - 28 = 0$

$(b - 4)(b + 7) = 0$

$b_1 = -7$ (nevyhovuje kontextu úlohy, délka nemůže být záporná)

$b_2 = 4$ cm

$a = 3 + b$

$a = 3 + 4$

$a = 7$ cm

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

2. Řešení úsudkem (aritmeticky)

Nikdo z 2. skupiny neřešil slovní úlohu úsudkem – aritmeticky. Dva žáci z 1. skupiny vyřešili úlohu úspěšně tímto způsobem. Pro přehlednost jsem postup řešení zapsala do tabulky, přestože ani jeden žák tak neučinil (Příloha 12).

Sestavíme tabulku, ve které budeme mít délky stran a obsahy obou čtverců a také součet jejich obsahů. Délku strany jednoho čtverce volíme a ostatní dopočítáváme.

a (cm)	***b*** (cm)	S_a (cm^2)	S_b (cm^2)	$S_a + S_b$ (cm^2)
1	4	1	16	17
2	5	4	25	29
3	6	9	36	45
4	7	16	49	65
5	8	25	64	89
6	9	36	81	117
7	10	49	100	149
8	11	64	121	185
9	12	81	144	225
10	13	100	169	269

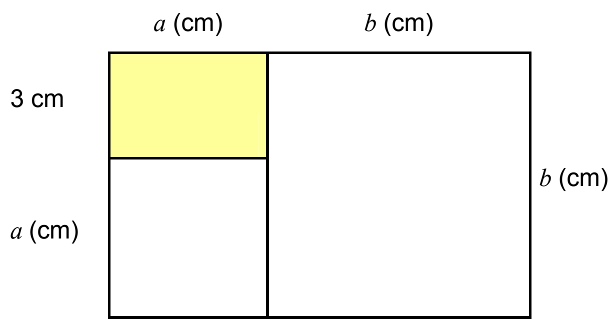
Ze zadání víme, že součet obsahů čtverců má být 65 cm^2. Z tabulky vyčteme, že to platí pro čtverce o stranách délek 4 cm a 7 cm.

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

3. Řešení úsudkem (obrázkem)

Dva žáci z 1. skupiny a 4 z 2. skupiny vyřešili slovní úlohu úspěšně úsudkem – obrázkem (Příloha 13). Většina řešení lze shrnout do následujícího postupu řešení.

Nakreslíme obrázek podle informací ze zadání.



Z obrázku můžeme vyčíst různé vztahy, které zapíšeme pomocí vzorců.

$S = (b - 3 + b) \cdot b$

$S = 2b^2 - 3b$

$\underline{a = b - 3}$

$S - 3a = 65$

$S - 3(b - 3) = 65$

$2b^2 - 3b - 3b + 9 = 65$

$b^2 - 3b - 28 = 0$

$(b + 4)(b - 7) = 0$

$b_1 = -4$ nevyhovuje (délka nemůže být záporná)

$\underline{\underline{b_2 = 7\text{ cm}}}$

$a = b - 3$

$\underline{\underline{a = 4\text{ cm}}}$

Zformulujeme slovní odpověď.

Odpověď: Délky stran čtverců jsou 4 cm a 7 cm.

4. Řešení úvahou

Čtyři žáci z 1. skupiny a dva z 2. skupiny použili řešení úvahou. Řešení úvahou probíhá většinou jen v hlavě žáka, který je jen omezeně schopen tyto své myšlenky (úvahy) interpretovat. Ani v jednom z těchto šesti řešení nejsem schopna vystihnout a pochopit myšlenkové postupy žáků, proto zde neuvádím žádné souhrnné řešení. Čtyři žáci uvedli jen velmi krátké řešení, napsali většinou dvě až tři čísla a výsledek. Proto nemohu ani vyloučit, zda správný výsledek někde neopsali

5.1.3.2.2 Závěr části o soustavách nelineárních rovnic

Ve výzkumu se potvrdilo, že má-li žák již zvládnutou problematiku soustav nelineárních rovnic, uchyluje se nejčastěji ke způsobu řešení slovní úlohy soustavou rovnic.

Předpokládáme, že řešitel správně pochopil text úlohy, správně určil vztahy mezi danými a hledanými údaji. Řešení soustavou rovnic vyžaduje, aby měl řešitel zvládnutou problematiku řešení soustav nelineárních rovnic. Po získání vhledu do problematiky této slovní úlohy je řešení soustavou rovnic nejefektivnějším způsobem řešení.

Aritmetické řešení je v této úloze neúčelné a zdlouhavé. Je důležité, aby řešitel zvolil přehlednou grafickou úpravu postupu řešení. Pokud tak neučiní, je zde velká pravděpodobnost, že nedospěje k výsledku nebo k němu dospěje za dlouhou dobu.

Řešení pomocí obrázku je pro řešitele nenáročné, pokud ovšem správně zapíše vztahy mezi údaji do vzorců.

5.1.4 Závěr výzkumu

Výzkumu se zúčastnilo 12 tříd, kde 10 tříd (1. – 4. ročník) bylo z šestiletého Gymnázia Čakovice. Toto gymnázium se nachází v Praze 9 Čakovicích a probíhá v něm vyučování podle Školního vzdělávacího programu „Dveře ke vzdělání otevřené“. Dvě třídy žáků 7. ročníku byly ze základní školy Dr. Edvarda Beneše. Tato škola je klasická základní škola v Praze 9 Čakovicích, ve které se vyučuje podle Školního vzdělávacího programu „Škola – perspektiva pro život“.

Výzkumu se zúčastnilo 254 žáků, 126 žáků 1. skupiny a 128 žáků 2. skupiny. Z 1. skupiny vyřešilo danou úlohu úspěšně 21,43 % žáků a z 2. skupiny 51,56 % žáků. Z uvedených dat je vidět, že se i obecně potvrdila hypotéza H1, kterou jsem zkoumala u jednotlivých typů rovnic. Hypotézu H1 lze obecně vyjádřit takto: Žáci, kteří již daný typ rovnice mají zvládnutý, jsou úspěšnější při řešení slovních úloh na tento typ rovnice.

Pouze 27 žáků, což je 21,43 % žáků, z 1. skupiny vyřešilo úspěšně slovní úlohu na daný typ rovnice či soustavu rovnic. Z následující tabulky 5.1.4.1 můžeme zjistit, že žáci 1. skupiny preferují řešení úsudkem při řešení slovních úloh. Tímto způsobem úspěšně vyřešilo slovní úlohu na daný typ rovnice 51, 85 % žáků.

1. skupina	úspěšná řešení	řešení rovnicí	řešení úsudkem	řešení úvahou
lineární rovnice	5	0	3	2
kvadratická rovnice	7	0	4	3
r. s neznámou ve jmenovateli	0	0	0	0
iracionální rovnice	3	0	3	0
soustava lineárních rovnic	0	0	0	0
soustava nelineárních rovnic	12	4	4	4
počet žáků	27	4	14	9
počet žáků v %	100,00	14,81	51,85	33,33

Tabulka 5.1.4. 1

66 žáků z 2. skupiny vyřešilo úspěšně slovní úlohu, z toho 53,03 % žáků použilo strategii řešení rovnicí či soustavou rovnic. Z následující tabulky 5.1.4.2 můžeme vidět, že se obecně potvrdila i hypotéza H2. Hypotéza H2 je formulována: Žáci, kteří již daný typ rovnice mají zvládnuty a úspěšně vyřešili úlohu, preferují při řešení slovních úloh na tento typ rovnice strategii řešení rovnicí.

2. skupina	úspěšná řešení	řešení rovnicí	řešení úsudkem	řešení úvahou
lineární rovnice	15	10	4	1
kvadratická rovnice	14	0	10	4
r. s neznámou ve jmenovateli	5	3	1	1
iracionální rovnice	8	4	2	2
soustava lineárních rovnic	6	6	0	0
soustava nelineárních rovnic	18	12	4	2
počet žáků	66	35	21	10
počet žáků v %	100,00	53,03	31,82	15,15

Tabulka 5.1.4. 2

27 žáků z 1. skupiny vyřešilo úspěšně slovní úlohu, z toho 33,33 % žáků správné řešení nalezlo náhodně. Z následující tabulky 5.1.4.3 můžeme vidět, že se hypotéza H3 nepotvrdila. Hypotéza H2 je formulována: Žáci, kteří ještě daný typ rovnice neprobírali a úspěšně vyřešili úlohu, preferují při řešení slovních úloh na tento typ rovnice náhodné nalezení řešení.

1. skupina	Úspěšná řešení	Řešení vhledem	Náhodně nalezené řešení
lineární rovnice	5	3	2
kvadratická rovnice	7	4	3
r. s neznámou ve jmenovateli	0	0	0
iracionální rovnice	3	3	0
soustava lineárních rovnic	0	0	0
soustava nelineárních rovnic	12	8	4
počet žáků	27	18	9
počet žáků v %	100,00	66,67	33,33

Tabulka 5.1.4. 3

Pokud žáci nemají ještě probraný daný typ rovnice, uchylují se častěji k řešení slovní úlohy úsudkem než žáci, kteří již daný typ rovnice mají zvládnutý. Potvrzuje to i tento výzkum, který ukázal, že 51,85 % žáků z 1. skupiny řešilo úspěšně úlohu úsudkem. Pouze 31,82 % žáků z 2. skupiny řešilo úspěšně slovní úlohy tímto způsobem.

Žáci, kteří již daný typ rovnice mají probraný, se méně často uchylují ke strategii řešení úvahou při řešení slovní úlohy na daný typ rovnice než žáci, kteří daný typ rovnice ještě neznají. Potvrzuje to i můj výzkum, který ukázal, že pouze 15,15 % žáků z 2. skupiny vyřešilo úspěšně slovní úlohu úvahou. Dvakrát tolik žáků (33,33 %) z 1. skupiny úspěšně řešilo slovní úlohy úvahou.

Nejvíce žáků, kteří ještě daný typ rovnice neprobírali, zvolilo k řešení slovní úlohy strategii řešení úsudkem, které uvádím v následující tabulce 5.1.4.4. Zvolil-li žák strategii řešení úsudkem, pouze ve 28,57 % dospěl ke správnému výsledku. Žáci volili různé strategie řešení úsudkem, bylo to řešení obrázkem, aproximací, aritmetické a systematickým pokusem.

Pokud žák zvolil řešení rovnicí, dospěl k úspěšnému řešení pouze v 16 %. Bylo to nejčastěji z důvodu špatného sestavení rovnice a také nesprávných postupů při řešení sestavené rovnice. Zvolil-li žák řešení úvahou, dospěl ve 27,27 % případu ke správnému řešení slovní úlohy.

Z výsledků výzkumu vyplývá, že žáci, kteří ještě daný typ rovnice neprobírali, nejčastěji dospěli ke správnému výsledku slovní úlohy, pokud ji řešili úsudkem. Řešení rovnicí pro ně je nejméně vhodným způsobem pro řešení slovní úlohy na daný typ rovnice.

1. skupina	počet řešení	úspěšná řešení	úspěšná řešení v %	neúspěšná řešení	neúspěšná řešení v %
řešení rovnicí	25	4	16,00	21	84,00
řešení úsudkem	49	14	28,57	35	71,43
řešení úvahou	33	9	27,27	24	72,73

Tabulka 5.1.4. 4

Nejvíce žáků, kteří mají již daný typ rovnice probraný, zvolilo k řešení slovní úlohy strategii řešení rovnicí, které uvádím v následující tabulce 5.1.4.5. Pokud žák řešil slovní úlohu rovnicí, dospěl ve 47,95 % ke správnému výsledku. Žáci, kteří řešili úlohu rovnicí a nedospěli k úspěšnému řešení, nejčastěji špatně sestavili rovnici a někteří z toho důvodu, že špatně sestavenou rovnici řešili.

Pokud žák zvolil strategii řešení úsudkem, dospěl k úspěšnému řešení v 72,41 %. Žáci používali různé strategie řešení úsudkem, bylo to řešení aritmetické, aproximací, obrázkem a systematickým pokusem. Zvolil-li žák řešení úvahou, dospěl v 58,82 % ke správnému vyřešení slovní úlohy.

2. skupina	počet řešení	úspěšná řešení	úspěšná řešení v %	neúspěšná řešení	neúspěšná řešení v %
řešení rovnicí	73	35	47,95	38	52,05
řešení úsudkem	29	21	72,41	8	27,59
řešení úvahou	17	10	58,82	7	41,18

Tabulka 5.1.4. 5

Dalo by se předpokládat, že žáci, kteří již mají daný typ rovnice probraný, použijí při řešení slovní úlohy na daný typ rovnice strategii řešení rovnicí a že tato strategie je dovede nejčastěji ke správnému řešení úlohy. Z výsledků výzkumu vyplývá, že žáci nejčastěji použili strategii řešení rovnicí, která je však nedovedla vždy ke správnému výsledku. Bylo to převážně z důvodu nesprávného sestavení rovnice. Žáci nejčastěji dospěli ke správnému řešení slovní úlohy, pokud ji řešili úsudkem.

Závěr

Cíl práce, který jsem si vytyčila v úvodu, tj. vytvořit ucelenou představu o řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi a zjištění a analyzování strategií řešení, které jednotliví žáci volí, považuji za splněný. Zpracovala jsem téma, které se dotýká různých postupů strategií řešení slovních úloh řešitelných rovnicemi.

Nejprve jsem uvedla různé pohledy na problematiku slovních úloh a jejich řešení. Více pozornosti jsem věnovala různým strategiím řešení slovních úloh. V dalších částech práce jsem uvedla základní typy rovnic a soustav rovnic. Ke každému typu rovnice jsem uvedla jednu typickou slovní úlohu, která vedla k řešení tímto typem rovnice. U každého typu rovnice jsem zjistila, jakou strategii řešení nejčastěji žáci zvolili. Jednotlivé strategie řešení jsem porovnala z různých pohledů.

Ve své praxi budu také sledovat a analyzovat různé strategie řešení, které budou žáci volit u jednotlivých druhů slovních úloh, a důvody, které je k tomuto způsobu řešení vedou.

Použitá literatura

BARTSCH, H.: *Matematické vzorce.* Praha, Academia 2006.

BENDA, P. - DAŇKOVÁ, B. - SKÁLA, J.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* Praha, SPN 1979.

BLAŽKOVÁ, R. – MATOUŠKOVÁ, K. – VAŇUROVÁ, M.: *Kapitoly z didaktiky matematiky (slovní úlohy, projekty).* Brno, MU – Pedagogická fakulta 2007.

BUŠEK, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* Praha, SPN 1988.

CALDA, E.: *Matematika pro netechnické obory SOŠ a SOU, 1. díl.* Praha, Prometheus 2006.

DIVÍŠEK, J. a kol.: *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha, SPN 1989.

DRÁBEK, J. – HORA, J.: *Algebra: polynomy a rovnice.* Plzeň, Západočeská univerzita 2001.

FRANK, L. a kol.: *Matematika.* Praha, SNTL 1973.

HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2.* Bratislava, Slovenské pedagogické nakladatel'stvo1990.

HERMAN, J. a kol.: *Matematika – Tercie, Rovnice a nerovnice.* Praha, Prometheus 2006.

HRUŠA, K. a kol.: *Metodika počtů pro pedagogické fakulty.* Praha, SPN 1967.

HRUŠA, K. a kol.: *Úvod do studia matematiky.* Praha, SPN 1977.

CHARVÁT, F. – ŠMELHAUS, J.: *Populární encyklopedie matematiky.* Praha, SNTL 1971.

CHARVÁT, J. – ZHOUF, J. – BOČEK, L.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice.* Praha, Prometheus 2006.

CHROMÁ, S.: *Řešení slovních úloh rovnicemi – Bakalářská práce.* Praha, Pedf UK 2009.

JANEČEK, F.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy.* Praha, Prometheus 2006.

JARNÍK, J. – ŠISLER, M.: *Jak řešit rovnice a jejich soustavy.* Praha, SNTL 1969.

KNÍŽE, G.: *Vztah celku a části při řešení slovních úloh.* Praha, SPN 1966.

KUŘINA, F.: *Umění vidět v matematice.* Praha, SPN 1990.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 3. část – Základy algebry.* Praha, UK v Praze 2004.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 1. část – Lineární algebra.* Praha, UK v Praze 2006.

NOVOTNÁ, J. – TRCH, M.: *Algebra a teoretická aritmetika. Sbírka příkladů. 2. část – Polynomická algebra.* Praha, UK v Praze 2000.

NOVOTNÁ, J. a kol.: *Sbírka úloh z matematiky (nejen) pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha, Scientia 2000.

NOVOTNÁ, J.: *Analýza řešení slovních úloh.* Praha, UK v Praze-Pedagogická fakulta 2000.

ODVÁRKO, O. a kol.: *Metody řešení matematických úloh.* Praha, SPN 1990.

ODVÁRKO, O.: *Matematika pro gymnázia – Goniometrie.* Praha, Prometheus 1997.

ODVÁRKO, O. – KADLEČEK, J.: *Matematika 2 pro 8. ročník základní školy – Lineární rovnice, Základy statistiky.* Praha, Prometheus 2006.

PETÁKOVÁ, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Praha, Prometheus 2003.

POLÁK, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Praha, SPN 1980.

PRŮCHA, J. – WALTEROVÁ, E. – MAREŠ, J.: *Pedagogický slovník.* Praha, Portál 2003.

REKTORYS, K. a kol.: *Přehled užité matematiky.* Praha, SNTL 1981.

ROSSIOVÁ, A.: *Encyklopedie matematiky.* Praha, Mladá fronta 1988.

SEDLÁČEK, J. a kol.: *Slovník školské matematiky.* Praha, SPN 1981.

ŠALÁT, T.: *Malá encyklopédia matematiky.* Bratislava, Obzor 1981.

ŠAROUNOVÁ, A. – RŮŽIČKOVÁ, J. – VÄTEROVÁ, V.: *Matematika 7, 2. díl.* Praha, Prometheus 1998.

VYŠÍN, J.: *Metodika řešení matematických úloh.* Praha, SPN 1962.