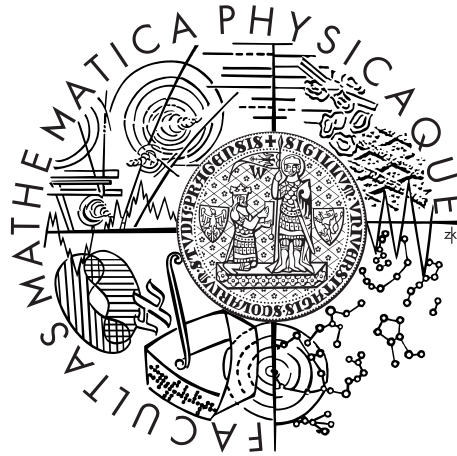


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Michal Rušin

## Statistické ověření modifikovaného Smithova modelu

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Na tomto mieste sa chcem veľmi poďakovať RNDr. Martinovi Šmídovi, Ph.D. za odborné vedenie, značnú mieru trpezlivosti a rozsiahle a hlavne prínosné pripomienky a komentáre, ktoré výrazne prispeli ku skvalitneniu práce. Rovnako sa chcem poďakovať všetkým, ktorí ma povzbudzovali a dodávali mi silu pri písaní.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Statistické ověření modifikovaného Smithova modelu

Autor: Michal Rušín

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v. v. i.

Abstrakt:

Předložená práce se zabývá mechanismem spojitě dvojitě aukce a modely knihy objednávek. Po stručném popisu vybraných modelů následuje obsáhlejší obeznámení s obecným modelem spojitě dvojitě aukce z názvu práce. Následně je uvedena struktura dat z britského trhu a postup jejich zpracování. Na těchto datech je ověřována validita Smithova Farmerova modelu a Contova Stoikova modelu v kontextu obecného modelu prostřednictvím lineární regrese. v závěrečné části je na základě předešlých výsledků navržen vlastní model knihy objednávek a testována jeho validita.

Klíčová slova: kniha objednávek, spojitá dvojitá aukce, lineární regrese

Title: Statistical inference of the Modified Smith's model

Author: Michal Rušín

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Šmíd, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v. v. i.

Abstract:

The present work discuss the continuous double auction mechanisms and the order book models. After a brief introduction to selected models, a general model of the the continuous double auction from the thesis title is described. Further, a structure of british market data is given as well as an approach to them. Based on these data the validity of Smith Farmer's model and Cont Stoikov's model is tested in the context of general model by linear regression. Finally, based on the previous results, the own order book model is suggested and its validity tested.

Keywords: order book, continuous double auction, linear regression



# Obsah

Úvod	2
<b>1 Spojitá dvojitá aukcia</b>	<b>3</b>
<b>2 Princípy vybraných modelov knihy objednávok</b>	<b>5</b>
2.1 Stigler . . . . .	5
2.2 Bak, Paczuski, Shubik . . . . .	5
2.3 Maslov . . . . .	6
2.4 Smith Farmer . . . . .	6
<b>3 Zobecnený Smithov Farmerov model</b>	<b>9</b>
3.1 Úvod do matematického popisu ZSF modelu . . . . .	10
3.2 Definícia modelu . . . . .	10
3.3 Dynamika modelu . . . . .	11
3.4 Základné vlastnosti procesu $\Xi$ . . . . .	13
3.5 Rozdelenie $\Xi \xi$ . . . . .	13
3.6 Rozdelenie $\xi$ . . . . .	16
3.7 Diskrétna verzia modelu . . . . .	17
3.8 Smithov Farmerov model v rámci ZSF modelu . . . . .	18
3.9 Intenzita rušenia objednávok . . . . .	19
<b>4 Dáta</b>	<b>21</b>
4.1 Dáta . . . . .	21
4.2 Lukoil (inštrument A) . . . . .	22
4.3 Gazprom (inštrument B) . . . . .	23
4.4 Uralkali (inštrument C) . . . . .	23
<b>5 Prístup k dátam</b>	<b>24</b>
<b>6 Validita modelu</b>	<b>27</b>
6.1 SF model . . . . .	27
6.2 Poissonovo rozdelenie objemu objednávok . . . . .	28
6.3 CS model . . . . .	29
<b>7 Vlastný generálny model</b>	<b>33</b>
<b>8 Nenulová vetva</b>	<b>38</b>
<b>9 Nulová vetva</b>	<b>41</b>
Záver	44
Zoznam použitej literatúry	45
Zoznam tabuliek	46
Zoznam grafov	47

# Úvod

Cieľom tejto práce je popísať mechanizmus fungovania trhu limitných objednávok, predstaviť zobecnený Smithov Farmerov model knihy objednávok pokrývajúci viaceré známe modely a overiť jeho validitu na základe reálnych dát z britského trhu.

Práca je preto členená do viacerých kapitol, úvodné kapitoly sú venované mechanizmu spojitaj dvojitej aukcie a vybraným modelom knihy objednávok. Na ne nadväzuje rozsiahlejší popis zobecneného Smithovho Farmerovho modelu, tj. modifikovaného Smithovho modelu, a jeho vlastností. Účelom týchto kapitol je oboznámiť čitateľa s modelom, s ktorým budeme ďalej pracovať.

Jadro práce tvorí dátová časť, v ktorej sa overuje validita modelu knihy objednávok na reálnych dátach. Tomu predchádza popis štruktúry dát a návod ako k nim pristupovať vrátane ich označenia. Samotné overenie modelu je založené na overení Smithovho Farmerovho modelu, resp. Contovho Stoikovho modelu, ktoré zobecnený Smithov Farmerov model pokrýva. Model je overovaný pomocou metódy lineárnej regresie, ktorej „vedľajším produktom“ je odhad parametrov modelu.

V rámci zobecneného Smithovho Farmerovho modelu je napokon navrhnutý vlastný generálny model knihy objednávok, ktorý sa snaží využiť poznatky získané z predchádzajúcich overovaní a je testovaná jeho validita.

Práca je doplnená o tabuľkové a grafické výsledky, predovšetkým o výsledky lineárnych regresí, z ktorých vychádzajú jednotlivé závery práce.

# 1. Spojitá dvojitá aukcia

Za jeden z najfrekventovanejších mechanizmov používaných v dnešnej dobe na väčšine moderných finančných trhov môžeme považovať model spojitej dvojitej aukcie. Na trhoch sa spravidla obchoduje spojite a účastníci trhu môžu operovať v ľubovoľnom okamihu počas obchodovacieho dňa, čím samozrejme môže dôjsť a dochádza k nesúladu medzi ponukou a dopytom (napr. ak kupujúci požaduje nákup akcií, ktoré za požadovaných podmienok nie sú práve k dispozícii). Aby sa tento nesúlad eliminoval, používajú sa tzv. objednávky akcií. Objednávka môže byť dvojakého druhu:

- **tržná objednávka** — objednávka na predaj, resp. nákup určitého množstva akcií okamžite za najvyššiu, resp. najnižšiu dostupnú cenu, tj. za najlepšiu cenu pre predávajúceho, resp. kupujúceho
- **limitná objednávka** — objednávka na predaj, resp. nákup určitého množstva akcií za cenu nie menšiu, resp. nie väčšiu než je limitná cena tejto objednávky

Limitné objednávky na predaj budeme nazývať asky, limitné objednávky na nákup budeme nazývať bidy. Pod pojmom najlepší ask budeme rozumieť ask s najnižšou limitnou cenou  $P_{a,t,1}$  v danom čase  $t$  a ako najlepší bid budeme označovať bid s najvyššou limitnou cenou  $P_{b,t,1}$  v danom čase  $t$ .<sup>1</sup> Rozdiel  $S_t = P_{a,t,1} - P_{b,t,1}$  medzi nimi sa nazýva spread a je spravidla nenulový kladný.

Cena, na rozdiel od času, nie je spojitá veličina, ale nadobúda diskkrétne hodnoty v istých cenových úrovniach, ktoré budeme nazývať ticky. Vzďialenosť medzi dvoma susednými tickmi, čiže cenovými úrovňami, pre daný inštrument na trhu je konštantná a budeme ju nazývať veľkosť ticku. Teda ak je veľkosť ticku napríklad 5 CJ<sup>2</sup>, tick môže byť 5 CJ, 10 CJ, 15 CJ, ...

Na trhu môžu nastať tri typy operácií:

- zadanie limitnej objednávky
- zadanie tržnej objednávky
- zrušenie (predtým zadanej) čakajúcej, tj. zatiaľ nevyrovnanej limitnej objednávky

Limitné objednávky obyčajne nevedú k okamžitému obchodu, ale hromadia sa v knihe limitných objednávok. Kniha limitných objednávok je teda súhrn všetkých nevyrovnaných limitných objednávok.

---

<sup>1</sup>Všeobecne sa pojmom ask, resp. bid nenazýva ktorákoľvek limitná objednávka na predaj, resp. na nákup, ale obyčajne len najlepšia limitná objednávka na predaj, resp. nákup. My však z praktických dôvodov budeme používať namiesto „limitná objednávka na predaj“ pojem ask a namiesto „ask“ pojem najlepší ask, resp. analogicky pojmy bid a najlepší bid.

<sup>2</sup>cenových jednotiek, napr. CZK, EUR, USD, GBP atď.

Výnimkou sú tzv. krížne limitné objednávky, čo sú asky s limitnou cenou menšou než je cena najlepšieho bidu  $P_{b,t,1}$ , resp. bidy s limitnou cenou väčšou než je cena najlepšieho asku  $P_{a,t,1}$ . Tieto objednávky vedú k bezprostrednému vyrovnaniu buď celej krížnej objednávky alebo aspoň jej časti ak je dostatočne veľká.

V prípade príchodu tržnej objednávky sa táto spáruje s v poradí prvou limitnou objednávkou opačného znamienka, pričom poradie limitných objednávok je určené ich cenou a v prípade zhodnej ceny časom príchodu, tj. cena má väčšiu prioritu ako čas príchodu. Pokiaľ ide o množstvo akcií, tj. veľkosť spárovaných objednávok, objednávky nemusia byť rovnako veľké. V dôsledku toho sa, podľa veľkosti prichodzej tržnej objednávky, z limitnej objednávky môže vyrovať len jej časť (ak je tržná objednávka menšia než limitná) alebo sa limitná objednávka vyrovná celá (ak je tržná objednávka rovnako veľká ako limitná). Ak je tržná objednávka väčšia než limitná, nevyrovnaná časť tržnej objednávky, ktorá ostane po vyrovnaní celej limitnej objednávky, sa následne ďalej páruje s ďalšou limitnou objednávkou v poradí, resp. jej časťou. Tento postup sa opakuje, až kým sa tržná objednávka nevyrovná celá a môže spôsobiť, že v niektorom ticku či viacerých sa vyrovnajú všetky limitné objednávky.

Zároveň tiež zmena v cene najlepšieho asku, resp. bidu, môže nastať (aj o viacero tickov), ale nemusí, podľa toho, či sa v rámci (postupného) vyrovnávania tržnej objednávky vyrovnajú všetky limitné objednávky v niektorom ticku, prípadne viacerých tickoch. Ak sa tak stane, cena najlepšieho asku, resp. bidu, sa zmení, tzv. skočí. Dosah (angl. price impact) tržnej objednávky na cenu najlepšieho asku, resp. bidu, teda závisí ako na veľkosti tržnej objednávky (priamo úmerne), tak na objeme (počte a veľkosti) limitných objednávok v jednotlivých tickoch (nepriamo úmerne).

## 2. Princípy vybraných modelov knihy objednávok

Modelov knihy objednávok existuje viacero, v tejto časti niektoré z nich pre názornosť uvedieme. Tieto popisované modely zároveň modelujú tiež správanie kotácií. Popíšeme tiež princíp Smithovho Farmerovho modelu [3] (ďalej len SF model), známeho skôr ako Smithov model,<sup>1</sup> ktorý je pravdepodobne najznámejším prípadom modelu spojitej dvojitej aukcie. Modely uvedené v tejto časti môžeme považovať za modely nulovej inteligencie – neposkytujú priestor na strategické správanie a ľudí je možné nahradiť generátorom náhodných čísel.

### 2.1 Stigler

Podľa dostupných informácií za jeden z prvých numerických modelov knihy objednávok sa dá považovať Stiglerov model [10], na základe ktorého bola uskutočnená tiež jedna z prvých simulácií trhu s limitnými objednávkami. Tento model je relatívne jednoduchý, uvažuje len limitné objednávky jednotkového objemu, u ktorých je ich limitná cena z pevne zvoleného cenového intervalu a limitná cena má rovnomerné rozdelenie.

Princíp modelu ukážeme na jednoduchom príklade: Nech nová objednávka je napríklad bid. Ak v momente príchodu tohto bidu existuje ask s nižšou cenou než je cena príchodzieho bidu, tj. krížna objednávka, potom bid je spárovaný s najnižším askom a obe objednávky zanikajú. Ak je limitná cena bidu naopak nižšia než cena najnižšieho asku, bid sa dostáva do knihy objednávok a ostáva tam až kým nepríde ask, s ktorým by sa, v súlade s popísaným princípom, spároval.

### 2.2 Bak, Paczuski, Shubik

Model Bak, Paczuski, Shubik [11] (ďalej len BPS model) je relatívne jednoduché formulovať, avšak o to zložitejšie riešiť. Model predpokladá Jeho princíp spočíva v tom, že na cenovú os sú umiestňované dva druhy limitných objednávok, bid a ask, pričom pozícia objednávky je cena, za ktorú objednávka bude uspokojená. Obchod nastáva len v prípade, že sa stretnú dve objednávky opačného typu, tj. bid a ask. Ak sa tak stane, objednávky sú vyrovnané a odstránené z knihy, je to teda anihilačný proces (detaily pozri [11]).

---

<sup>1</sup>Model budeme nazývať Smithov Farmerov, aby sme poukázali na podiel ostatných autorov na modeli a aby bol názov zároveň praktický.

## 2.3 Maslov

Pre Maslovov model [12] je príznačné zohľadnenie významu tržných objednávok. Model predpokladá spojitú cenu a jednotkový objem objednávok. Pravdepodobnosť, že prichodia objednávka bude limitná na predaj, limitná na nákup, tržná na predaj alebo tržná na nákup je v každom kroku štvrtinová a rozdelenie limitnej ceny u limitných objednávok je rovnomerné. Môže teda dôjsť ku stretnutiu bidu a asku s rovnakou cenou – v tomto modeli sa však nikdy nevysporiadajú dve limitné objednávky proti sebe, ani ak majú rovnakú cenu. Vysporiadanie prebieha zásadne prostredníctvom tržných objednávok, a to anihiláciou tržnej objednávky s najvyšším bidom, resp. najnižším askom v závislosti od typu tržnej objednávky.

## 2.4 Smith Farmer

Ani Maslovov model však stále neuvažuje rušenie objednávok, ku ktorému v skutočnej knihe objednávok dochádza, obyčajne v dôsledku dlhého čakania a následnej zmeny rozhodnutia učatníka trhu. Skupina autorov okolo D. Farmera preto vytvorila hneď niekoľko variantov modelov, v ktorých toto rušenie objednávok zohľadňujú. Okrem toho sa tieto modely od Maslovovho líšia tým, že uvažujú diskkrétne ceny a objednávky umiestňujú rovnomerne v prípustnom cenovom rozsahu, tj. bidy smerom dole od ceny najlepšieho asku (ale nie do ticku s najlepším askom) a asky smerom hore od najlepšieho bidu (ale nie do ticku s najlepším bidom).

Ako už bolo uvedené, pravdepodobne najznámejším modelom spojitaj dvojitej aukcie je nekonečný SF model popísaný v [3]. Tento model predpokladá konštantnú intenzitu príchodu tržných objednávok, ktorá je naviac rovnaká pre oba typy tržných objednávok (na nákup a na predaj), konštantnú intenzitu príchodu oboch typov limitných objednávok v jednotlivých tickoch a konštantnú intenzitu rušenia objednávok. Pre jednoduchosť predpokladá tiež jednotkový objem všetkých objednávok.

Príchod tržnej objednávky vyvolá transakciu – tržná objednávka na nákup sa spáruje s najlepším askom s cenou  $P_{a,t,1}$  a pokiaľ to bola posledná limitná objednávka s touto cenou, novým najlepším askom sa stane ask na najbližšom vyššom ticku, tj. najlepší ask vzrastie. Obdobne to platí pre tržnú objednávku na predaj: spáruje sa s najlepším bidom s cenou  $P_{b,t,1}$  a pokiaľ to bola posledná limitná objednávka s touto cenou, novým najlepším bidom sa stane bid na najbližšom nižšom ticku, tj. najlepší bid poklesne.

Čo sa týka krížnych limitných objednávok, SF model používa zjednodušenie na (efektívne) tržné a limitné objednávky. Pri príchode krížnej limitnej objednávky môže byť okamžite vyrovnaná vždy aspoň nejaká jej časť. Táto časť má na cenu rovnaký efekt ako príchod tržnej objednávky o veľkosti tejto časti. Druhá, ostávajúca časť, ak sa krížna objednávka nevyrovná okamžite celá, má zase rovnaký účinok ako obyčajná, tj. nekrížna limitná objednávka o veľkosti tejto ostávajúcej časti. Preto s krížnou objednávkou môžeme pracovať ako s tržnou objednávkou nasledovanou nekrížnou limitnou objednávkou.

Ostatné limitné objednávky, tj. nekrížne, sú umiestňované rovnomerne v tickoch, ktoré sú celočíselnými násobkami veľičiny veľkosť ticku. Keďže sú nekrížne, asky sú z definície umiestňované v tickoch s cenou väčšou než  $P_{b,t,1}$  a bidy analogicky v tickoch s cenou menšou než  $P_{a,t,1}$ . Asky a bidy okrem toho môžu byť z knihy objednávok odstránené, a to aj bez uskutočnenia transakcie, buď kvôli vypršaniu doby, po ktorú je objednávka platná, alebo zrušením objednávky zo strany zadávateľa.

Predpoklad zadávania limitných objednávok v celom nekonečnom intervale je síce nerealistický, v okolí stredovej ceny  $P_{m,t} = (P_{a,t,1} - P_{b,t,1})/2$ , tj. v oblasti, kde dochádza k obchodom, nám však dáva užitočnú okrajovú podmienku pre modelovanie správania knihy limitných objednávok. Mimo túto oblasť, tj. od istej vzdialenosti od tejto stredovej ceny jednak dochádza zvyčajne ku zrušeniu limitnej objednávky ešte pred jej vyrovnaním a jednak proces príchodu a proces rušenia týchto objednávok je charakterizovaný jednoduchým Poissonovým rozdelením. A teda hoci je celkový počet objednávok zadaných za jednotku času nekonečný, počet objednávok v jednotlivých tickoch je obmedzený a teda predpoklad nekonečného intervalu je v poriadku. Naopak zabezpečuje nám to, že v knihe objednávok vždy budeme mať nekonečný počet askov aj bidov, že tieto budú vždy dobre definované a že kniha objednávok sa nikdy nevyprázdni.

Hoci je model relatívne jednoducho definovaný, jeho dynamika je zložitejšia. V zásade ju môžeme rozdeliť na tri oblasti:

1. vzájomné pôsobenie asku a tržnej objednávky na nákup, ktoré priamo ovplyvňuje hodnotu najlepšieho asku
2. vzájomné pôsobenie bidu a tržnej objednávky na predaj, ktoré priamo ovplyvňuje hodnotu najlepšieho bidu
3. proces náhodného rušenia objednávok

Navyše, prvý a druhý proces si navzájom vymedzujú okrajové podmienky, presnejšie, prvý proces určuje hodnotu najlepšieho asku, ktorý je ďalej okrajovou podmienkou pre zadávanie bidov v druhom procese a druhý proces určuje hodnotu najlepšieho bidu, ktorý je ďalej

okrajovou podmienkou pre zadávanie askov v prvom procese. Táto vzájomná závislosť spôsobuje, že bidy a asky ostávajú blízko pri sebe a že spread  $S_t = P_{a,t,1} - P_{b,t,1}$  je stacionárna náhodná veličina.

SF model na rozdiel od podobných modelov tohto typu, o cenách uvažuje ako o náhodných prechádzkach, vďaka čomu sú tieto ceny reálnejšie. Zaoberanie sa vzťahom medzi umiestňovaním objednávok a pohybom cien model značne komplikuje, avšak je kľúčovým pre dosiahnutie výsledkov odpovedajúcich realite.



# 3. Zobecnený Smithov Farmerov model

Všetky vyššie uvedené modely, ktoré majú diskkrétne ceny, je možné popísať obecným modelom spojitaj dvojitej aukcie [1], ktorý nazveme Zobecnený Smithov Farmerov model (ďalej len ZSF model, ide o modifikovaný Smithov model z názvu práce). Z definície ZSF modelu je teda špeciálnym prípadom ZSF modelu tiež SF model [3] a tiež Contov Stoikov model [4] (ďalej len CS model), CS model sa však od SF modelu odlišuje tým, že predpokladá intenzity príchodu a rušenia objednávok závislé na vzdialenosti od najlepších kotácií, tj. od najlepších askov a bidov. V rámci ZSF modelu sa zameriame práve na tieto dva modely.

Pokiaľ ide o značenie modelu, na dostatočne presný matematický popis je potrebné použiť pomerne rozsiahlu sadu premenných. Počas práce s dátami v nasledujúcej dátovej časti sa však z týchto premenných používa len malá časť, nakoľko zvyšná (prevažná) časť premenných slúži predovšetkým na matematický popis modelu a jeho vlastností.

Takisto dáta majú danú istú štruktúru, ktorá je navyše dosť elementárna. Aj z premenných používaných v dátovej časti sa teda len časť bude používať tiež v súvislosti s matematickým popisom modelu, zvyšná časť premenných bude slúžiť viacmenej na získanie tých prvých.

Máme teda skupinu premenných potrebných pre matematický popis modelu a skupinu premenných potrebných pre dátovú časť, pričom do prieniku patrí len malá časť premenných z oboch skupín. Práve tento prienik premenných nám však spôsobuje komplikácie v značení.

Značenie premenných z prvej skupiny, vzhľadom na rozsiahlosť značenia v matematickom popise, musí byť totiž čo najjednoduchšie kvôli prehľadnosti. Značenie premenných z druhej skupiny, vzhľadom na to, že ide o dátovú časť, by zase malo byť čo najintuitívnejšie. Ak by sme však použili značenie prvej skupiny, prišli by sme o intuitívnosť značenia v dátovej časti. Ak by sme použili naopak značenie druhej skupiny, značenie v matematickom popise by utrpelo na prehľadnosti.

S ohľadom na čitateľa a z praktických dôvodov sa preto najvhodnejšie javí zachovať prehľadnosť v matematickom popise a tiež intuitívnosť v dátovej časti aj za cenu toho, že premenné v prieniku oboch skupín budú mať dvojité značenie, nakoľko takýchto je len malé množstvo premenných.

Nasledujúce pasáže, v ktorých popíšeme ZSF model a jeho základné vlastnosti, sú voľným prekladom z [1], odkiaľ prevezmeme tiež značenie:

## 3.1 Úvod do matematického popisu ZSF modelu

Keďže množstvo limitných objednávok prítomných na trhu nie je ohraničené, tento fakt musíme zohľadniť aj pri voľbe matematických objektov, ktorými budeme knihu objednávok popisovať. Tieto teda musia byť tiež nekonečne dimenzionálne. Spomedzi niekoľkých možností preto na popis knihy objednávok použijeme teóriu jednoduchých bodových procesov, ktorá sa dá považovať za najviac rozvinutú a najintuitívnejšiu.

**Definícia 3.1.** Pre každú postupnosť  $\eta_0, \eta_1, \dots$  definujeme a označme  $\Delta\eta_i := \eta_i - \eta_{i-1}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ .

**Definícia 3.2.** Pre každý proces  $(x_t)_{t \geq 0}$  a každé  $t \in \mathbb{R}_+$  definujeme a označme  $\bar{x}_t := (x_s)_{s \leq t}$  históriu procesu až do času  $t$ .

**Definícia 3.3.** Pod označením  $X = [x_1, x_2, \dots]$  budeme rozumieť jednoduchý bodový proces  $X$  tvorený bodmi  $x_1 < x_2 < \dots$

**Definícia 3.4.** Poissonovým bodovým procesom  $X$  s hustotou  $\nu$  nazveme Poissonov bodový proces  $X$  s intenzitou, ktorej hustota je  $\nu$  (v zmysle Lebesgueovej miery).

**Definícia 3.5.**  $Y$  nazveme heterogénnym zúžením jednoduchého bodového procesu  $X = [x_1, x_2, \dots]$  s parametrami  $p_1, p_2, \dots$ , ak  $Y \subseteq X$  a pre každé  $n \in \mathbb{N}$  a každé  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ ,  $i_j \leq |X|$ ,  $j \leq n$  platí

$$\mathbb{P}[x_{i_1} \in Y, \dots, x_{i_n} \in Y | X] = \prod_{j=1}^n p_{i_j}.$$

## 3.2 Definícia modelu

Stav trhu v danom čase  $t \in \mathbb{R}_+$  popíšeme dvojicou

$$\Xi_t = (A_t, B_t),$$

kde  $A_t$  a  $B_t$  sú jednoduché bodové procesy, konečné alebo nekonečné, s hodnotami v  $\mathbb{R}$ . Každý bod procesov  $A_t$  a  $B_t$  predstavuje limitnú objednávku s limitnou cenou zodpovedajúcou polohe bodu, pričom ak pripustíme prácu s logaritmickejšími cenami, zároveň tým pripúšťame záporné hodnoty bodov.

---

<sup>1</sup>Aby definícia mala zmysel,  $p_1, p_2, \dots$  musia byť  $\sigma(X)$ -merateľné.

Ďalej označíme  $i$ -tý najmenší bod procesu  $A_t$  symbolom  $a_{t,i}$ ,  $i$ -tý najväčší bod procesu  $B_t$  symbolom  $b_{t,i}$  a položíme  $a_{t,i} = \infty$  pre  $|A_t| < i$  a  $b_{t,i} = -\infty$  pre  $|B_t| < i$ . Osobitne budeme značiť  $a_t := a_{t,1}$ , resp.  $b_t := b_{t,1}$  cenu (najlepšieho) asku, resp. bidu a budeme požadovať

$$b_t < a_t. \quad (3.1)$$

### 3.3 Dynamika modelu

Predtým, než sa budeme zaoberať dynamikou modelu, pripomeňme, že príchod tržnej objednávky má rovnaký účinok ako zrušenie asku, a teda s obidvoma úkonmi môžeme zaobchádzať rovnako a nazývať ich efektívne tržné objednávky na nákup. Analogicky to platí pre efektívne tržné objednávky na predaj. Užitočné bude tiež rozlišovať spreadové limitné objednávky a mimospreadové limitné objednávky. Tie prvé sú také, ktorých limitná cena leží medzi aktuálnou bid a ask, tie druhé sú všetky ostatné limitné objednávky.

Pre popis dynamiky modelu nech je dané:

- počiatočná hodnota  $\Xi_0 = (A_0, B_0)$ , kde  $A_0$  a  $B_0$  sú jednoduché bodové procesy na  $\mathbb{R}$  spĺňajúce (3.1) pre  $t = 0$

- postupnosť

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots$$

taká, že  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty$ , predstavujúca časy skokov procesu najlepších kotácií

- postupnosť

$$\chi_i \in \{a^+, a^-, b^+, b^-\}, \quad i \in \mathbb{N},$$

označujúca typ udalosti v čase  $\tau_i$ , kde význam symbolov je nasledovný:

$a^+$  – príchod efektívnej tržnej objednávky na nákup

$a^-$  – príchod spreadovej limitnej objednávky na predaj

$b^+$  – príchod spreadovej limitnej objednávky na nákup

$b^-$  – príchod efektívnej tržnej objednávky na predaj

- postupnosti

$$(y_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad (z_i)_{i \in \mathbb{N}},$$

kde každé  $y_i$ , resp.  $z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , označuje relatívnu limitnú cenu spreadovej limitnej objednávky na predaj, resp. na nákup (pre  $\chi_i \neq a^-$  je  $y_i = 0$ , podobne pre  $\chi_i \neq b^+$  je  $z_i = 0$ )

- postupnosť značkových bodových procesov popisujúca toky mimospreadových limitných objednávok medzi  $\tau_{i-1}$  a  $\tau_i$

$$(\mathcal{Y}_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad (\mathcal{Z}_i)_{i \in \mathbb{N}},$$

definovaná na  $(0, \Delta\tau_i) \times \mathbb{R}_+$ , resp.  $(0, \Delta\tau_i) \times \mathbb{R}_-$ , so značkami v  $\mathbb{R}_+$ . Každý bod  $(\theta, p, c) \in \mathcal{Y}_i$  predstavuje limitnú objednávku

na predaj zadanú v čase  $\tau_{i-1} + \theta$  s limitnou cenou  $a_{\tau_{i-1}} + p$  a so životnosťou  $c$ , tj.  $c < \Delta\tau_i - \theta$  znamená zrušenie objednávky v čase  $\tau_{i-1} + \theta + c$ , zatiaľ čo  $c \geq \Delta\tau_i - \theta$  znamená, že v čase  $\tau_i$  je objednávka stále platná. Analogicky bod  $(\theta, p, d) \in \mathcal{Z}_i$  predstavuje limitnú objednávku na nákup zadanú v čase  $\tau_{i-1} + \theta$  s limitnou cenou  $b_{\tau_{i-1}} + p$  a životnosťou  $d$ .

- pre každé  $i \in \mathbb{N}$  kladné postupnosti

$$e_i = (e_{i,\nu+1})_{\nu \in \mathbb{N}}, \quad f_i = (f_{i,\nu+1})_{\nu \in \mathbb{N}}$$

kde pre každé  $i, \nu \in \mathbb{N}$  premenná  $e_{i,\nu}$  predstavuje životnosť  $\nu$ -tej najnižšej limitnej objednávky na predaj (vrátane ask) nachádzajúcej sa v knihe objednávok v čase  $\tau_{i-1}$ , kde životnosti sú merané od času  $\tau_{i-1}$ . Podobne  $f_{i,\nu}$  predstavuje životnosť  $\nu$ -tej najvyššej limitnej objednávky na nákup (vrátane bid) nachádzajúcej sa v knihe objednávok v čase  $\tau_{i-1}$ .

Samotná dynamika je potom definovaná nasledovne: pre každé  $i \in \mathbb{N}$  a  $t \in (\tau_{i-1}, \tau_i)$ ,

$$\begin{aligned} A_t &= \{a_{\tau_{i-1}}\} \\ &\cup \{a_{\tau_{i-1}} + p : \exists(\theta, p, c) \in \mathcal{Y}_i, \tau_{i-1} + \theta < t < \tau_{i-1} + \theta + c\} \\ &\cup \{a_{\tau_{i-1},\nu} : \nu > 1, t < \tau_{i-1} + e_{i,\nu}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_t &= \{b_{\tau_{i-1}}\} \\ &\cup \{b_{\tau_{i-1}} + p : \exists(\theta, p, d) \in \mathcal{Z}_i, \tau_{i-1} + \theta < t < \tau_{i-1} + \theta + d\} \\ &\cup \{b_{\tau_{i-1},\nu} : \nu > 1, t < \tau_{i-1} + f_{i,\nu}\} \end{aligned}$$

a pre každé  $i \in \mathbb{N}$

$$A_{\tau_i} = \begin{cases} A_{\tau_i-} \cup \{a_{\tau_{i-1}} + y_i\} & \text{pre } \chi_i = a^- \\ A_{\tau_i-} \setminus \{a_{\tau_{i-1}}\} & \text{pre } \chi_i = a^+ \\ A_{\tau_i-} & \text{inak} \end{cases}$$

$$B_{\tau_i} = \begin{cases} B_{\tau_i-} \cup \{b_{\tau_{i-1}} + z_i\} & \text{pre } \chi_i = b^+ \\ B_{\tau_i-} \setminus \{b_{\tau_{i-1}}\} & \text{pre } \chi_i = b^- \\ B_{\tau_i-} & \text{inak} \end{cases}$$

kde  $A_{t-}$  je limita  $A$  v bode  $t$  zľava, symetricky pre  $B$ .

Pre korektnosť definície musí ešte platiť

$$a_{\tau_{i-1}} + y_i > b_{\tau_{i-1}}, \quad b_{\tau_{i-1}} + z_i < a_{\tau_{i-1}}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

### 3.4 Základné vlastnosti procesu $\Xi$

Sformulujme niekoľko základných vlastností procesu  $\Xi$ . Prvé dve nám zaručia korektnosť definície modelu, tretia je dôležitá najmä pre aplikácie:

- Tvrdenie 3.6.**
1. Ak sú  $A_0, B_0$  jednoduché bodové procesy, potom tiež  $A_t$  a  $B_t$  sú jednoduché bodové procesy pre každé  $t \in \mathbb{R}_+$  s pravdepodobnosťou jeden.
  2. Pravdepodobnosť, že nastanú dve udalosti v rovnakom čase, vrátane
    - skokov kotácií  $\xi$ ,
    - príchodov limitných objednávok,
    - zrušení limitných objednávok,
 je nulová.
  3. Proces  $\dot{\Xi}_t := (\Xi_t, \bar{\xi}_t)$  je Markovský.

*Dôkaz.* Pozri [1], Appendix A.4 Proofs, Proof of Proposition 3.1.  $\square$

Označme ešte

$$\xi_t = (a_t, b_t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

proces najlepších kotácií a budeme predpokladať, že podmienené rozdelenie

$$x_i := (\Delta\tau_i, \chi_i, y_i, z_i)$$

za podmienky  $\bar{\xi}_{\tau_{i-1}}$  je ľubovoľné, avšak spĺňajúce (3.2) pre každé  $i \in \mathbb{N}$ .

### 3.5 Rozdelenie $\Xi|\xi$

V tejto časti sa budeme zaoberať podmieneným rozdelením  $\Xi_\theta$ . Pretože  $A_\theta$  a  $B_\theta$  sú symetrické, stačí sa zaoberať podmieneným rozdelením  $A_\theta$ , podmienené rozdelenie  $B_\theta$  by sa odvodilo analogicky. Presnejšie budeme teda skúmať podmienené rozdelenie  $A_\theta$  za podmienky počiatočného stavu trhu  $\Xi_0$  a histórie najlepších kotácií  $\bar{\xi}_\theta$ .

**Lemma 3.7.** Limitná objednávka s limitnou cenou  $p$  zadaná v čase  $t$  je nevyrovnaná v čase  $\theta$  práve vtedy, keď jej cena  $p$  je od zadania objednávky v čase  $t$  až do času  $\theta$  vždy väčšia alebo rovná než cena najlepšieho asku, tj.

$$p \geq \tilde{a}_{I(t)}, \quad I(t) := \max\{i : \tau_i \in [0, t]\}, \quad (3.3)$$

kde

$$\tilde{a}_i = \tilde{a}_i^\theta := \max_{i \leq \nu \leq \tilde{I}} a_{\tau_\nu}, \quad 0 \leq i \leq \tilde{I}, \quad \tilde{I} := I(\theta).$$

*Dôkaz.* Pre nevyrovnanú objednávku (3.3) musí platiť, pretože inak by existovala nevyrovnaná objednávka s limitnou cenou menšou než cena najlepšieho asku. Ak by naopak objednávka spĺňajúca (3.3) bola vyrovnaná, vyrovnanie by viedlo ku skoku  $a$  nad jej limitnú cenu v momente jej vyrovnanania, čo je spor s (3.3).  $\square$

O bodovom procese  $A_\theta$ , čo je množina všetkých nezrušených a nevyrovnaných limitných objednávok, ktoré prišli do času  $\theta$ , môžeme teda uvažovať ako o štyroch disjunktných bodových procesoch:

- $\{a_\theta\}$  – aktuálny ask
- $D$  – množina nezrušených limitných objednávok spĺňajúcich (3.3) so znamienkom " $>$ " prítomných v čase 0
- $L$  – množina nezrušených limitných objednávok spĺňajúcich (3.3) so znamienkom " $>$ " s časom príchodu väčším než 0
- $E$  – množina nezrušených limitných objednávok spĺňajúcich (3.3) so znamienkom " $=$ " (prítomných v čase 0 alebo s časom príchodu väčším než 0) rôznych od  $a_\theta$

Bodový proces  $L$  je možné ďalej rozpadnúť na

$$L = L_1 + \dots + L_{\tilde{I}+1},$$

kde pre každé  $1 \leq i \leq \tilde{I} + 1$  je  $L_i$  bodový proces limitných cien nezrušených objednávok, ktorých čas príchodu a limitná cena patrí do

$$[\tilde{\tau}_{i-1}, \tilde{\tau}_i) \times (\tilde{a}_{i-1}, \infty),$$

kde

$$\tilde{\tau}_i = \tilde{\tau}_i^\theta := \begin{cases} \tau_i & \text{pre } i \leq \tilde{I}, \\ \theta & \text{pre } i = \tilde{I} + 1. \end{cases}$$

**Definícia 3.8.** Náhodnú veličinu  $\theta$ , kde  $0 < \theta < \infty$ , nazveme  $\sigma(\xi_t)_{t \geq 0}$ -voliteľný čas, ak pre túto veličinu je postačujúce poznať  $\bar{\xi}_t$ , aby sme vedeli určiť, či  $\theta \leq t$  pre každé  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definícia 3.9.** Pre každé  $i$  definujme a označme

$$f_i(p) = f_i^\theta(p) := \begin{cases} \phi_i(p) \Delta \tilde{\tau}_i & \text{pre } \rho_i(p) = 0, \\ \frac{\phi_i(p)}{\rho_i(p)} [1 - e^{-\Delta \tilde{\tau}_i \rho_i(p)}] & \text{pre } \rho_i(p) > 0 \end{cases}$$

a

$$\epsilon(i, x) = \epsilon^\theta(i, x) := \exp \left\{ - \sum_{j=i}^{I(\theta)} \rho_{j+1}(x - a_{\tau_j}) \Delta \tilde{\tau}_{j+1} \right\}.$$

Ďalej označme a definujme

$$\dot{A}_i = \dot{A}_i^\theta := A_{\tilde{\tau}_i} |_{(\tilde{a}_i, \infty)}.$$

Taktiež označme a definujme

$$\check{A} = \check{A}^\theta := [\check{a}_1, \dots, \check{a}_J]$$

množinu predchádzajúcich askov, ktoré môžu pretrvať až do času  $\theta$ , tj.  $\{\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_{\bar{I}}\} \setminus \{a_\theta\}$  a

$$\gamma_\nu = \gamma_\nu^\theta = \min\{k : \tilde{a}_k < \check{a}_\nu\}, \quad 1 \leq \nu \leq J$$

index času, kedy  $\check{a}_\nu$  prestala byť askom.

**Veta 3.10.** (Podmienené rozdelenie knihy objednávok) Označme  $C = C^\theta = (\Xi_0, \theta, \bar{\xi}_\theta)$ . Pre každé  $\theta$ , kde  $0 < \theta < \infty$  a  $\theta$  je  $\sigma(\xi_t)$ -voliteľný čas, potom platí:

$$(\diamond) A_\theta = \{a_\theta\} + L + D + E$$

( $\square$ )  $a_\theta$  je podmienené konštantná za podmienky  $C$

(a)  $L|C$  je Poissonov bodový proces s hustotou

$$F(p) := \sum_{i=1}^{\bar{I}+1} \mathbf{1}_{(\tilde{a}_{i-1}, \infty)}(p) f_i(p - a_{\tau_{i-1}}) \epsilon(i, p),$$

(b)  $D|C$  je heterogénne zúženie procesu  $\dot{A}_0 = \{\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots\}$  s parametrami

$$\epsilon(0, \dot{a}_1), \epsilon(0, \dot{a}_2), \dots,$$

(c)  $E|C$  je heterogénne zúženie procesu  $\check{A} = [\check{a}_1, \dots, \check{a}_J]$  s parametrami

$$\epsilon(\gamma_1, \check{a}_1), \dots, \epsilon(\gamma_J, \check{a}_J)$$

(d)  $L, D, E$  sú vzájomne podmienené nezávislé za podmienky  $C$ .

Ak  $A_0$  je navyše Poissonov bodový proces s hustotou  $\phi_0$  a  $C' := (\theta, \bar{\xi}_\theta)$ , potom všetky tvrdenia ( $\diamond$ ), ( $\square$ ), (a), (c), (d) platia tiež pri použití  $C'$  namiesto  $C$ , a platí

(b')  $D|C'$  je Poissonov proces s hustotou

$$F_0(p) = \mathbf{1}_{(\tilde{a}_0, \infty)}(p) \phi_0(p) \epsilon(0, p).$$

Okrem toho

(b) vzťahy ( $\diamond$ ), ( $\square$ ), (a), (b), (c), (d), (b') platia symetricky pre  $B$

a

(b)  $A_\theta$  je podmienené nezávislé na  $B_\theta$  za podmienky  $C$  a tiež za podmienky  $C'$ .

*Dôkaz.* Pozri [1], Appendix A.4 Proofs, Proof of Proposition 4.1.  $\square$

### 3.6 Rozdelenie $\xi$

**Veta 3.11.** (Rozdelenie  $\xi$ ) Pre každé  $k \in \mathbb{N}$  označme  $C_k := (\Xi_0, \bar{\xi}_{\tau_{k-1}}, \Delta\tau_k, \chi_k)$ .

(a) Rozdelenie  $a_{\tau_k}$  za podmienky  $C_k$  je dané nasledovne: Pre každé  $p < 0$  je

$$\mathbb{P}[\Delta a_{\tau_k} \leq p | C_k] = \begin{cases} \mathbb{P}[y_k < p | C_k] & \text{pre } \chi_k = a^- \\ 0 & \text{pre } \chi_k \neq a^- \end{cases} \quad (3.4)$$

a pre každé  $p \geq 0$  je

$$\mathbb{P}[\Delta a_{\tau_k} > p | C_k] = \begin{cases} 0 & \text{pre } \chi_k \neq a^+ \\ H_k(p) & \text{pre } \chi_k = a^+ \end{cases} \quad (3.5)$$

kde

$$\begin{aligned} H_k(p) := & \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{a_{\tau_{k-1}} + p} \dot{F}(z) dz \right\} \\ & \cdot \prod_{\alpha \in \dot{A}_0^{\tau_{k-1}}, \alpha \leq a_{\tau_{k-1}} + p} [1 - \epsilon^{\tau_k}(0, \alpha)] \\ & \cdot \prod_{1 \leq \nu \leq |\dot{A}^{\tau_{k-1}}|, \check{a}_\nu^{\tau_{k-1}} \leq a_{\tau_{k-1}} + p} [1 - \epsilon^{\tau_k}(\gamma_\nu^{\tau_{k-1}}, \check{a}_\nu^{\tau_{k-1}})], \end{aligned}$$

a

$$\dot{F}(p) := \sum_{\nu=1}^k \mathbf{1}_{(\check{a}_{\nu-1}^{\tau_{k-1}}, \infty)}(p) f_\nu^{\tau_k}(p - a_{\tau_\nu}) \epsilon^{\tau_k}(\nu, p).$$

(a') Ak  $A_0$  je Poissonov bodový proces s hustotou  $\phi_0$  a  $C'_k := (\bar{\xi}_{\tau_{k-1}}, \Delta\tau_k, \chi_k)$ , potom (3.4) platí tiež pri použití  $C'_k$  namiesto  $C_k$ , a pre každé  $p \geq 0$  je

$$\mathbb{P}[\Delta a_{\tau_k} > p | C'_k] = \begin{cases} 0 & \text{pre } \chi_k \neq a^+ \\ H'_k(p) & \text{pre } \chi_k = a^+ \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} H'_k(p) := & \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{a_{\tau_{k-1}} + p} [\dot{F}(z) + \phi_0(z) \epsilon^{\tau_k}(0, z)] dz \right\} \\ & \cdot \prod_{\alpha \in \dot{A}_0^{\tau_{k-1}}, \alpha \leq a_{\tau_{k-1}} + p} [1 - \epsilon^{\tau_k}(0, \alpha)]. \end{aligned}$$

Okrem toho

(b) Vzťahy (a) a (a') platia symetricky pre b

a

(b)  $a_{\tau_k}$  a  $b_{\tau_k}$  sú podmienene nezávislé za podmienky  $C_k$  a tiež za podmienky  $C'_k$ .



*Dôkaz.* Pozri [1], Appendix A.4 Proofs, Proof of Proposition 4.2.  $\square$

Poznamenajme, že 3.10 a 3.11 plne popisujú  $\mathcal{L}(\dot{\Xi}_\theta | \dot{\Xi}_0)$  pre každé  $\theta \in \mathbb{R}_+$ . Ak k tomu pridáme ešte 3.6 (3.), máme plne charakterizované rozdelenie  $\dot{\Xi}$  a teda aj  $\Xi$ .

### 3.7 Diskrétna verzia modelu

Pre prechod od spojitej k diskkrétnej podobe modelu definujme zaokrúhľovaciu funkciu  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  všeobecne tak, že

$$r(p) = \pi_\nu, \quad p \in [\pi_\nu, \pi_{\nu+1}), \quad \nu \in \mathbb{Z},$$

pre nejakú rastúcu (deterministickú) postupnosť  $(\pi_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$  a zavedme funkciu nasledujúceho ticku  $n$  definovanú ako

$$n(\nu) = \pi_{\nu+1}, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Označme

$$\hat{\Xi}_t = \left( (\hat{A}_{t,\nu})_{\nu \in \mathbb{Z}}, (\hat{B}_{t,\nu})_{\nu \in \mathbb{Z}} \right)$$

$$\hat{A}_{t,\nu} := A_t[\pi_\nu, \pi_{\nu+1}), \quad \hat{B}_{t,\nu} := B_t[\pi_\nu, \pi_{\nu+1})$$

a položme

$$\hat{a}_t := \min\{\nu : \hat{A}_{t,\nu} > 0\}, \quad \hat{b}_t := \max\{\nu : \hat{B}_{t,\nu} > 0\}.$$

Ak budeme požadovať, aby pre  $y_\bullet, z_\bullet$  platilo  $\hat{b}_{\tau_i} < \hat{a}_{\tau_i}$  pre každé  $i \in \mathbb{N}$ , potom proces  $\hat{\Xi}$  sa bude riadiť dymanikou, akú by mal trh limitných objednávok s diskrétnymi cenami  $(\pi_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ , pričom  $\hat{A}_{\bullet,\nu}$  predstavuje množstvo limitných objednávok na predaj s cenou  $\nu$ , resp. analogicky pre  $\hat{B}$ .

Ak teda  $\dots, \hat{\phi}_{i,-1}, \hat{\phi}_{i,0}, \hat{\phi}_{i,1}, \dots$  je náhodná postupnosť pre každé  $i$  a požadujeme, aby intenzita príchodu limitných objednávok na predaj s limitnou cenou  $\pi_\nu$  medzi časmi  $\tau_{i-1}$  a  $\tau_i$  bola  $\hat{\phi}_{i,\nu}$  pre každé  $i \in \mathbb{N}, \nu > \hat{a}_{\tau_{i-1}}$ , potom stačí položiť

$$\phi_i(p) = \sum_{\nu > \hat{a}_{\tau_{i-1}}} (\pi_{\nu+1} - \pi_\nu)^{-1} \mathbf{1}_{[\pi_\nu, \pi_{\nu+1})}(a_{\tau_{i-1}} + p) \hat{\phi}_{i,\nu}.$$

Podobne ak požadujeme, aby podmienená intenzita rušenia limitných objednávok na predaj s limitnou cenou  $\nu \geq \hat{a}_{\tau_{i-1}}$  bola  $\hat{\rho}_{i,\nu}$ , stačí položiť

$$\rho_i(p) = \sum_{\nu \geq \hat{a}_{\tau_{i-1}}} \mathbf{1}_{[\pi_\nu, \pi_{\nu+1})}(a_{\tau_{i-1}} + p) \hat{\rho}_{i,\nu}.$$

Symetrické vzťahy platia samozrejme aj pre limitné objednávky na nákup.

Ako náprotivok ku  $\xi$  pre diskrétnu verziu modelu zavedme

$$\hat{X} := (\hat{a}, \hat{b}, \hat{p}, \hat{q}), \quad \hat{p}_t := \hat{A}_{t, \hat{a}}, \quad \hat{q}_t := \hat{B}_{t, \hat{b}}, \quad t \geq 0$$

a označme

$$0 < \hat{\tau}_0 < \hat{\tau}_1 < \dots$$

časy skokov  $\hat{X}$ . Takýto skok nastane, ak v podkladovom modeli buď dôjde ku skoku  $\xi$ , príde alebo je zrušená limitná objednávka na predaj s cenou medzi  $a$  a  $n(\hat{a})$  alebo príde alebo je zrušená limitná objednávka na nákup s cenou medzi  $r(\hat{b})$  a  $b$ .

### 3.8 Smithov Farmerov model v rámci ZSF modelu

SF model predpokladá konštantnú intenzitu  $\mu$  príchodu oboch typov tržných objednávok, v jednotlivých tickoch konštantnú intenzitu  $\lambda$  príchodu oboch typov limitných objednávok a konštantnú intenzitu rušenia objednávok  $\kappa$ .

V terminológii definície modelu spojitej dvojitej aukcie to znamená, že  $r(p) = \lfloor p \rfloor$  (tj. celá časť  $p$ ) a pre každé  $i \in \mathbb{N}$

$$\Delta\tau_i | \bar{\xi}_{\tau_{i-1}} \sim \text{Exp}(\omega_i), \quad \omega_i = 2(\mu + \kappa) + [s_i^a + s_i^b]\lambda$$

$$\chi_i | \bar{\xi}_{\tau_{i-1}} = \left\{ \frac{\mu + \kappa}{\omega_i}, \frac{s_i^a \lambda}{\omega_i}, \frac{s_i^b \lambda}{\omega_i}, \frac{\mu + \kappa}{\omega_i} \right\}$$

kde

$$s_i^a = a_{\tau_{i-1}} - (\hat{b}_{\tau_{i-1}} + 1), \quad s_i^b = \hat{a}_{\tau_{i-1}} - b_{\tau_{i-1}}$$

a ďalej

$$y_i | \bar{\xi}_{\tau_{i-1}} \sim \text{U}(-s_i^a, 0), \quad \phi_i \equiv \lambda, \quad \rho_i \equiv \kappa,$$

$$z_i | \bar{\xi}_{\tau_{i-1}} \sim \text{U}(0, s_i^b), \quad \psi_i \equiv \lambda, \quad \sigma_i \equiv \kappa.$$

Keďže pre každé  $i \in \mathbb{N}$  je  $\Delta\tau_i$  podmienene exponenciálne, je celkom jednoduché určiť rozdelenie  $\Delta\hat{\tau}_i$ , pretože prvý skok  $\hat{X}$  po čase  $\hat{\tau}_{i-1}$  nastáva práve vtedy, keď nastane niektorá a nasledujúcich udalostí v podkladovom modeli:

- $\xi$  skočí (to nastane s intenzitou  $\omega_j$  kde  $j$  je index posledného  $\tau_\bullet$ ) alebo
- príde limitná objednávka na predaj s cenou medzi  $a$  a  $\hat{a}$  (s intenzitou  $(a - \hat{a})\lambda$ ) alebo
- dôjde ku zrušeniu limitnej objednávky na predaj (okrem asku) s cenou medzi  $\hat{a}$  a  $\hat{a} + 1$  (s intenzitou  $(\hat{p} - 1)\kappa$ ) alebo
- príde limitná objednávka na nákup s cenou medzi  $b$  a  $\hat{b} + 1$  (s intenzitou  $(\hat{b} + 1 - b)\lambda$ ) alebo

- dôjde ku zrušeniu limitnej objednávky na nákup (okrem bidu) s cenou medzi  $\hat{b}$  a  $\hat{b} + 1$  (s intenzitou  $(\hat{q} - 1)\kappa$ ),

čo môžeme zhrnúť do

$$\Delta \hat{\tau}_i | \bar{\Xi}_{\hat{\tau}_{i-1}} \sim \text{Exp}(\hat{\omega}_i), \quad (3.6)$$

kde

$$\hat{\omega} := 2\mu + (\hat{p}_{\hat{\tau}_{i-1}} + \hat{q}_{\hat{\tau}_{i-1}})\kappa + (\hat{a}_{\hat{\tau}_{i-1}} - \hat{b}_{\hat{\tau}_{i-1}})\lambda.$$

### 3.9 Intenzita rušenia objednávok

Na rozdiel od intenzity príchodu limitných objednávok a tvaru ich rozdelenia, ktoré môžu byť odhadované priamo za predpokladu dostupnosti dostatočne detailných dát, nemáme žiadny štatisticky korektný spôsob ako priamo odhadovať intenzity rušenia objednávok. Je to z toho dôvodu, že objednávky môžu byť vyrovnané ešte predtým, než by mohli byť eventuálne zrušené.

Preto podobne ako v prípade SF modelu použijeme postup umožňujúci zahrnúť štatistický dôsledok intenzity rušenia objednávok.

Buď  $\delta > 0$ . Po úprave vzťahov z vety 3.10 dostávame, že pre každé  $p > \max_{t \in [0, \delta]} \tilde{a}_t$  platí

$$F^\delta(p) = \gamma, \quad \gamma := \frac{\lambda}{\kappa}(1 - \zeta),$$

a

$$\epsilon^\delta(0, p) = \zeta, \quad \zeta := e^{-\kappa\delta},$$

teda podľa tvrdenia 3.6 (3.) a vety 3.10

$$\hat{A}_{s+\delta, \pi} | \bar{\Xi}_s \sim \text{Po}(\gamma) \circ \text{Bi}(\hat{A}_{s, \pi}, \zeta)$$

( $\circ$  značí konvolúciu) pre každé  $s \in \mathbb{R}_+$  a každé

$$\pi > \max_{t \in [s, s+\delta]} \hat{a}_t, \quad (3.7)$$

čo môžeme prepísať ako

$$\hat{A}_{s+\delta, \pi} = \gamma + \hat{A}_{s, \pi}\zeta + \epsilon_{s, \pi}, \quad \mathbb{E}(\epsilon_{s, \pi} | \bar{\Xi}_s) = 0, \quad (3.8)$$

tj. ako rovnicu lineárnej regresie.

**Tvrdenie 3.12.** Odhad najmenších štvorcov, založený na

$$(\hat{A}_{(i+1)\delta, \pi}, \hat{A}_{i\delta, \pi})_{i \in \mathbb{N}_0, \hat{A}_{i\delta, \pi} < M}, \quad (3.9)$$

kde  $M$  je nejaká vopred zvolená konštanta a  $\pi$  spĺňa (3.7) s  $s = i\delta$ , dáva konzistentný odhad  $(\gamma, \zeta)$ .

*Dôkaz.* [2], Appendix A.2 Proofs, Proof of Proposition 5. □

Z odhadnutých parametrov  $(\gamma, \zeta)$  získame konzistentý odhad intenzity rušenia objednávok  $\kappa$  transformáciou  $f(\zeta) = -\frac{\ln \zeta}{\delta}$ . Navyše, ak nemôžeme pozorovať prichádzajúce limitné objednávky priamo a máme k dispozícii len periodické snímky časti knihy objednávok, okrem  $\kappa$  môžeme konzistentne odhadovať tiež  $\lambda$ , a to pomocou transformácie  $g(\gamma, \zeta) = -\frac{\gamma \ln \zeta}{(1-\zeta)\delta}$  parametrov  $(\gamma, \zeta)$ .

Poznamenajme, že v skutočnosti intenzita príchodu objednávok klesá so vzdialenosťou od najlepších kotácií. Ak sa však obmedzíme na použitie tejto (lineárnej) metódy na tie časti knihy objednávok, ktoré sú blízko najlepších kotácií (a ktorých analýza je najdôležitejšia z praktického hľadiska, napr. na výpočet cenového dopadu), pokles intenzity príchodu objednávok nebude tak významný. Preto teda výsledky tejto metódy môžu slúžiť ako aproximácia v blízkosti najlepších kotácií.

# 4. Dáta

## 4.1 Dáta

Dáta, s ktorými budeme pracovať, pochádzajú z londýnskej burzy LSE (London Stock Exchange), presnejšie z produktu Rebuild Order Book (ROB) na [www.londonstockexchange.com](http://www.londonstockexchange.com). Ich najväčšou prednosťou je, že obsahujú každú objednávku a každé zrušenie objednávky, čo umožňuje rekonštrukciu inak ťažko prístupnej knihy objednávok. ROB obsahuje pre všetky akcie v nej zaznamenané podrobnosti o všetkých:

- objednávkach nachádzajúcich sa v knihe na začiatku daného obchodovacieho dňa, tj. snímok otváracích pozícií
- objednávkach zadaných počas daného obchodovacieho dňa
- úpravách objednávok a zmenách objednávok vyplývajúcich z ich vysporiadania (čiastočného aj úplného)
- zrušeníach objednávok (zadávatelia sa rozhodne zrušia svoju objednávku, angl. deleted) a zmazaníach objednávok (vyprší platnosť objednávky, angl. expired) počas daného obchodovacieho dňa
- obchodoch uskutočnených počas daného obchodovacieho dňa

V ROB máme teda záznam o každej udalosti, ku ktorej na burze došlo. Na základe týchto záznamov vieme zreplikovať dianie na burze počas daného obchodovacieho dňa a po každej udalosti zaznamenať stav na burze, tj. vytvoriť snímok (angl. snapshot) stavu na burze. Snímky nebudeme vytvárať preto, že by sme nemohli jednotlivé dáta nemohli štatisticky analyzovať, potrebujeme ich však pre regresiu popísanú v predchádzajúcej časti práce.

Aby sme mohli modelovať stav burzy v čase, nemôžeme použiť tak detailný súbor pozorovaní. Zároveň však vzorka pozorovaní musí byť dostatočne rozsiahla pre štatistické účely a rovnomerná v čase. Preto budeme pracovať so snímkami nie po každej zmene, ale v určitých (diskrétnych) časoch (s intervalom  $\Delta t$ ), pričom snímok v danom čase  $\tau$  je snímok po poslednej udalosti v čase  $\tau$  (podľa ID udalosti), prípadne po udalosti bezprostredne predchádzajúcej času  $\tau$ .

Väčšina inštrumentov je pomerne nelikvidných. V ďalšom preto budeme pracovať s inštrumentami ISIN US6778621044 spoločnosti Lukoil (inštrument  $A$ ), ISIN US3682872078 spoločnosti Gazprom (inštrument  $B$ ) a ISIN US91688E2063 spoločnosti Uralkali (inštrument  $C$ ), ktoré sú dostatočne likvidné na to, aby generovali primeraný rozsah pozorovaní. Tieto inštrumenty majú charakteristiky: <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Pre detailný technický popis dát z LSE pozri [14].

<b>Segment description</b>	International Order Book
<b>Segment code</b>	IOB
<b>Sector code</b>	LLIS
<b>Sector description</b>	London Listed Intl. Securities
<b>Trade type indicator</b>	Ordinary Trade
<b>Country of share register</b>	US
<b>Currency code</b>	USD

	<b>Inštrumenty A, B</b>	<b>Inštrument C</b>
<b>FTSE index</b>	FTSE Russia IOB	FTSE Russia IOB
<b>FTSE sector</b>	Oil & Gas Producers	Chemicals
<b>FTSE sub-sector</b>	Integrated Oil & Gas	Specialty Chemicals

Na burze sa obchoduje každý pracovný deň okrem štátnych sviatkov a dní pracovného pokoja v Anglicku a Walese. Za normálnych okolností môžeme pre konkrétny inštrument v krátkodobom horizonte predpokladať podobný vývoj, preto pre naše účely postačí zvoliť jeden obchodovací deň. S ohľadom na dostupnosť dát a na porovnateľnosť výsledkov zvolíme pre všetky tri inštrumenty dátum 20.10.2008. Obchodovací deň na burze trvá spravidla od 7:00:00 do 17:15:00, na jeho začiatku a konci je však intenzita obchodovania výrazne nižšia ako v priebehu dňa, preto sa ďalej obmedzíme na obchody medzi 9:00:00 a 16:00:00.

Časový krok zvolíme  $\Delta t = 10s$ . Pre jednotlivé inštrumenty tak dostaneme primerane rozsiahlu vzorku snímok, v ktorých máme zachytené stavy objednávok na burze (v diskretných časoch  $t = 0, \dots, 2520$ ), ako na strane ask, tak na strane bid. Keďže medzi stranou ask a stranou bid je možné pozorovať istú analógiu či v istom zmysle zrkadlosť, budeme sa ďalej podrobnejšie venovať asku a bid rozoberať nebudeme.

Ako už bolo uvedené, cena nie je spojitá veličina, ale nadobúda hodnoty v tickoch. Veľkosť ticku pre všetky tri inštrumenty je 0,01 (USD). Dá sa predpokladať, že najintenzívnejšie sa bude obchodovať v okolí najlepšieho asku, resp. bidu, z tohto dôvodu sa zameriame na objednávky v prvých dvesto tickoch (vrátane najlepšieho asku), pričom cenou v prvom ticku budeme rozumieť cenu najlepšieho asku.

## 4.2 Lukoil (inštrument A)

Spoločnosť LUKOIL so sídlom 11 Stretenski Boulevard, Moscow, 101000, Russian Federation je na londýnskej burze kótovaná od 7.5.1997, obchoduje sa na Hlavnom trhu a jej tržná kapitalizácia na LSE je 30 451,51 mil. GBP (porov. [15]).

LUKOIL patrí medzi popredné svetové ropné a plynárenské spoločnosti, hlavným predmetom činnosti je teda prieskum a ťažba ropy a plynu a tiež výroba a predaj petrochemických produktov. Prevažná časť jeho kapacít sa nachádza na

území Ruska, avšak spoločnosť má závody a predajnú sieť aj v mnohých ďalších krajinách (napr. v Českej republike prevádzkuje sieť 43 čerpacích staníc).

Podiel spoločnosti je 17,8% na produkcii surovej ropy Ruska a 2,2% na svetovej produkcii, je to tretia najväčšia neštátna verejne obchodovaná ropná spoločnosť na svete podľa preukázateľných uhľovodíkových rezerv a šiesta podľa produkcie uhľovodíkov. Je najväčšou ropnou obchodnou skupinou v Rusku s obratom vyše 100 mld. USD a čistým ziskom viac než 9 mld. USD, prvou ruskou spoločnosťou zapísanou na LSE a jedinou súkromnou ruskou ropnou spoločnosťou, ktorej akciový kapitál je držaný prevažne minoritnými akcionármi. V neposlednom rade je to jeden z najväčších platcov dane v Rusku s celkovou sumou zaplatenou na daniach okolo 30 mld. USD za rok 2010 (porov. [16]).

### **4.3 Gazprom (inštrument B)**

Spoločnosť GAZPROM so sídlom 16 Nametkina St, Moscow, 117884, Russian Federation je na londýnskej burze kótovaná od 28.10.1996, obchoduje sa na Hlavnom trhu a jej tržná kapitalizácia na LSE je 71 314,48 mil. GBP (porov. [15]).

### **4.4 Uralkali (inštrument C)**

Spoločnosť URALKALI so sídlom Butikovskiy per., 7, Moscow, 119034, Russian Federation je na londýnskej burze kótovaná od 19.10.2007, obchoduje sa na Hlavnom trhu a jej tržná kapitalizácia na LSE je 15 839,51 mil. GBP (porov. [15]).

## 5. Prístup k dátam

Zreplikovať dianie na burze počas zvoleného obchodovacieho dňa je v skutočnosti veľmi náročné. Na prvotné spracovanie dát, tj. na vytváranie snímok stavu na burze preto použijeme špeciálny software – aplikáciu Book Accessor, ktorá bola pre potreby Ústavu teorie informace a automatizace AV ČR, v. v. i., vyvinutá Mgr. Danielom Benčíkom, a to so súhlasom ako jej autora, tak zadávateľa jej vývoja.

Vstupom tejto aplikácie sú dáta z ROB (.csv súbory) obsahujúce pre zvolený deň podrobnosti o jednotlivých novozadaných objednávkach, o histórii jednotlivých objednávk a o jednotlivých transakciách s objednávkami. Výstupom je súbor obsahujúci pre zvolený inštrument snímky (po každej zmene na burze jeden snímok) so zadanou hĺbkou 200 tickov a zadanou veľkosťou ticku 0,01.

Druhým použitým softwarom je výpočtový systém Wolfram Mathematica<sup>®</sup> 8.0 for Students od Wolfram Research, Inc., v ktorom budeme ďalej spracovávať výstup spomínanej aplikácie. Ak v súvislosti s výsledkami výpočtov budeme hovoriť o významnosti, budeme tým myslieť významnosť na hladine 95%.

Najprv zredukujeme počet snímok v súlade s predchádzajúcou kapitolou, tj. dostaneme snímok po každých desiatich sekundách od 9:00:00 do 16:00:00. Zároveň budeme sledovať vývoj najlepšieho asku a spolu s jednotlivými snímkami zaznamenávať najlepší ask za predchádzajúcich 10 sekúnd.

Jednotlivé snímky, tj. pre jednotlivé časy  $t = 0, \dots, 2520$ , majú formu

$$(C_t, D_t), \quad (5.1)$$

kde

$$C_t = (P_{a,t,1}, n_{a,t,1}, n_{a,t,2}, \dots, n_{a,t,200}), \quad (5.2)$$

$$D_t = (P_{b,t,1}, n_{b,t,1}, n_{b,t,2}, \dots, n_{b,t,200}), \quad (5.3)$$

kde  $P_{a,t,1}$  je najlepší ask v čase  $t$ ,  $P_{b,t,1}$  je najlepší bid v čase  $t$ , a pre každé  $i = 1, \dots, 200$  je  $n_{a,t,i}$  objem objednávok (askov) v cene  $P_{a,t,1} + (i - 1)/100$  (označme túto cenu  $P_{a,t,i}$ ) a  $n_{b,t,i}$  je objem objednávok (bidov) v cene  $P_{b,t,1} + (i - 1)/100$  (označme túto cenu  $P_{b,t,i}$ ).

Ako sme už uviedli, ďalej sa budeme venovať askom s poukazom na symetriu medzi askmi a bidmi.

Označme ešte

$$d_i = P_{a,t,i} - P_{a,t,1} = (i - 1)/100 \quad (5.4)$$

vzdialenosť ceny  $P_{a,t,i}$  od najlepšieho asku.

Zo všetkých dvojíc  $(t, i)$ , kde  $t = 0, \dots, 2520$  a  $i = 1, \dots, 200$  vyberme ešte dvojice prípustné pre účely lineárnej regresie, tj. spĺňajúce (3.7). Sú to dvojice,



pre ktoré  $n_{a,t,i}$  a  $n_{a,(t-1),i}$  sú definované a pre ktoré je cena  $P_{a,t,i}$  väčšia než najväčší z najlepších askov za posledných 10 sekúnd. Označme  $M$  množinu týchto dvojíc. Formálne teda

$$M := \left\{ (t, i) : \max_{s \in [(t-1), t]} P_{a,s,1} < P_{a,t,i} < \min_{s \in \{(t-1), t\}} P_{a,s,200}, \right. \quad (5.5)$$

$$\left. t = 1, \dots, 2520, \quad i = 1, \dots, 200 \right\}. \quad (5.6)$$

Práve s touto množinou  $M$ , resp. s hodnotami  $n_{a,t,i}$ ,  $P_{a,t,i}$ ,  $P_{a,t,1}$  a  $d_i$  pre  $(t, i) \in M$  budeme ďalej pracovať.

Označme

$$H := \{P_{a,t,i} : (t, i) \in M\} \quad (5.7)$$

množinu všetkých cien pre prípustné dvojice  $(t, i)$  a zvolíme cenu  $p \in H$ . Je zrejmé, že hodnotu  $p$  musí nadobúdať aspoň jedna (môže ich byť aj viacero) cena  $P_{a,t,i}$ ,  $(t, i) \in M$ . Označme  $M_p$  množinu všetkých prípustných dvojíc  $(t, i) \in M$ , pre ktoré je  $P_{a,t,i} = p$ , tj.

$$M_p := \{(t, i) \in M : P_{a,t,i} = p\}. \quad (5.8)$$

Následne označme  $N_{a,t,p}$  objem objednávok (askov) včase  $t$  a pevne zvolenej cene  $p$  a položme

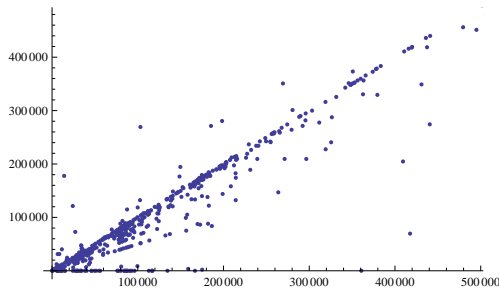
$$N_{a,t,p} := \begin{cases} n_{a,t,i} & \text{pre } (t, i) \in M_p \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.9)$$

Pre nahliadnutie na dáta posluži nasledovný postup: pre dvojice  $(t, i) \in M$  nadobúda veličina  $n_{a,(t-1),i}$  nejaké hodnoty. Pre každú z týchto hodnôt zistíme, aké hodnoty nadobúda veličina  $n_{a,t,i}$  a spočítame ich priemer. Túto závislosť, tj. závislosť priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme objednávok  $n_{a,(t-1),i}$  v čase  $(t-1)$ , znázorníme graficky.

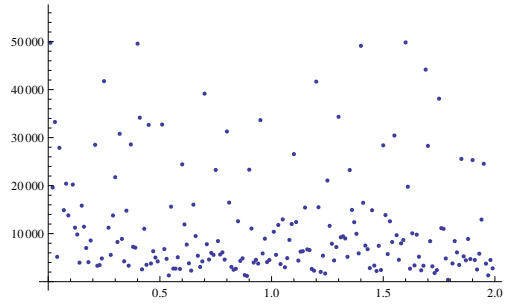
Vzdialenosť  $d_i$  má pre dvojice  $(t, i) \in M$  obor hodnôt  $\{0, \dots, 1, 99\}$ . Podobne pre každú z nich zistíme, aké hodnoty nadobúda veličina  $n_{a,t,i}$ , spočítame ich priemer a znázorníme závislosť priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$ .

Na základe znázornených závislostí na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  (obr. č. 5.1, 5.3 a 5.5) sa pre všetky tri inštrumenty dá predpokladať, že je pomerne mnoho prípadov, kedy objednávka ostane tzv. "visieť", teda závislosť na  $n_{a,(t-1),i}$  môžeme predbežne považovať za lineárnu. Závislosti na vzdialenosti  $d_i$  (obr. č. 5.2, 5.4 a 5.6) zrejmé nie sú, resp. pre inštrument  $B$  je ťažšie odhadnuteľná.

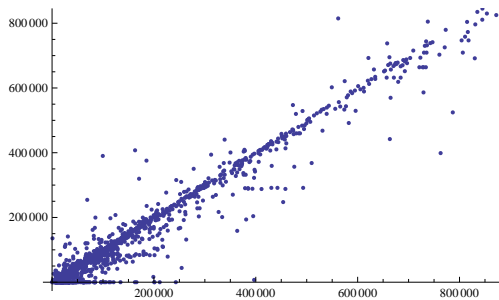
Na skutočné overenie nielen týchto závislostí použijeme lineárnu regresiu v ďalších častiach práce.



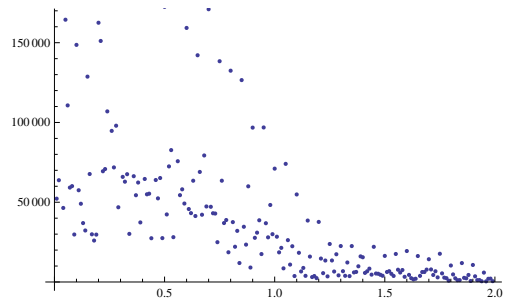
Obr. 5.1: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument A



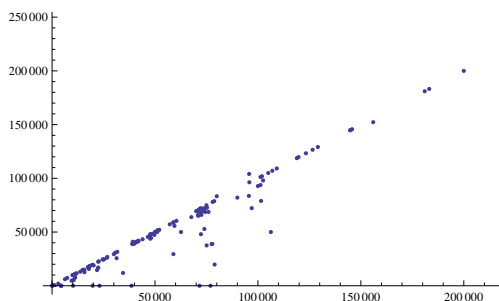
Obr. 5.2: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument A



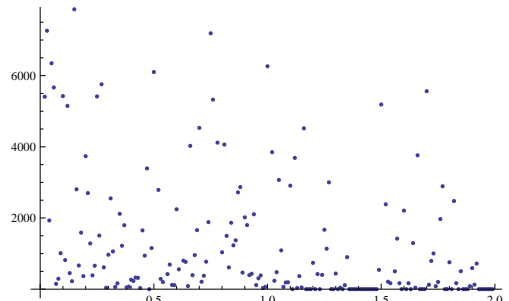
Obr. 5.3: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument B



Obr. 5.4: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument B



Obr. 5.5: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument C



Obr. 5.6: Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument C

# 6. Validita modelu

V tejto časti na základe skutočných dát otestujeme validitu SF modelu a následne CS modelu v rámci ZSF modelu.

## 6.1 SF model

SF model (pozri sekciu 3.8) pre svoje účely skutočnosť značne zjednodušuje a podľa neho (rovnice (3.8) a nerovnosti (3.7)) by pre naše dáta malo platiť

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 N_{a,(t-1),p} + e_{(t-1),p}^1 \quad (6.1)$$

pre každé  $(t, i) \in M$ , kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$  a  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované.

Ukážeme, že pre skutočné dáta, s ktorými pracujeme, to neplatí. Do rovnice lineárnej regresie pridáme ďalší regresor, a to nulovosť objemu objednávok v čase  $(t - 1)$ , tj.  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}$ . Ak tento vyjde štatisticky významne, potvrdí sa tým závislosť  $N_{a,t,p}$  tiež na  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}$ , čo je spor so SF modelom, podľa ktorého  $N_{a,t,p}$  závisí len na  $N_{a,(t-1),p}$ . Po pridaní nulovosti do rovnice lineárnej regresie sa (6.1) zmení na

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 N_{a,(t-1),p} + \beta_2 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} + e_{(t-1),p} \quad (6.2)$$

pre každé  $(t, i) \in M$ , kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$  a  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované.

Použitím tejto regresie pre všetky tri inštrumenty  $A, B, C$  dostaneme postupne modely

$$N_{a,t,p} = -573,354 + 0,9982N_{a,(t-1),p} + 630,524 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}, \quad (6.3)$$

$$N_{a,t,p} = -504,245 + 0,999577N_{a,(t-1),p} + 588,622 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}, \quad (6.4)$$

$$N_{a,t,p} = -149,271 + 0,996683N_{a,(t-1),p} + 159,006 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}. \quad (6.5)$$

Pre každý z týchto troch modelov je t-štatistika odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  dostatočne veľká a jeho p-hodnota dostatočne malá (pozri tab. č. 6.1, 6.2 a 6.3). Nulovosť objemu objednávok v čase  $(t - 1)$  je teda štatisticky významná pre všetky tri inštrumenty a SF model pre ne neplatí.

---

<sup>1</sup>v nerovnosti (3.7) a v rovnici (3.8) stačí položiť  $\pi := p$ ,  $s := t - 1$ ,  $s + \delta := t$ ,  $\hat{a}_t := P_{a,t,1}$  a  $\hat{A}_{t,p} := N_{a,t,p}$

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-573.354	50.6987	-11.3091	$1.19346 \times 10^{-29}$
x1	0.9982	0.000158072	6314.86	$1.188564632 \times 10^{-474365}$
x2	630.524	51.9176	12.1447	$6.1884 \times 10^{-34}$

Tabuľka 6.1: Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument  $A$

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-504.245	67.9679	-7.41887	$1.18314 \times 10^{-13}$
x1	0.999577	0.000100183	9977.46	$6.29978941 \times 10^{-573940}$
x2	588.622	71.3506	8.24971	$1.59161 \times 10^{-16}$

Tabuľka 6.2: Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument  $B$

## 6.2 Poissonovo rozdelenie objemu objednávok

Z [1] vyplýva, že ak by SF model pre naše dáta skutočne platil, vyplývali by z toho nasledovné konzekvencie:

- platila by lineárna regresia (rovnica (3.8), resp. (6.1))
- pre objednávky spĺňajúce  $N_{a,(t-1),p} = 0$  by mal objem objednávok  $N_{a,t,p}$  v čase  $t$  Poissonovo rozdelenie

Platnosťou lineárnej regresie sme sa zaoberali v predchádzajúcej časti, v tejto časti sa pozrieme na druhý z dôsledkov.

Pre overenie hypotézy  $H_0$ , že (nejaký) výber  $\xi_1, \dots, \xi_n$  pochádza z Poissonovho rozdelenia, použijeme metódu popísanú v [13].<sup>2</sup> Táto metóda je v podstate založená na tom, že veličina

$$Q = \frac{\sum (\xi_i - \bar{\xi})^2}{\bar{\xi}}$$

má približne  $\chi_{n-1}^2$  rozdelenie, teda ak pre  $Q$  bude platiť

$$Q \leq \chi_{n-1}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{alebo} \quad Q \geq \chi_{n-1}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

hypotézu  $H_0$ , že ide o výber z Poissonovho rozdelenia, zamietneme.

Pre všetky tri inštrumenty vyšla veličina  $Q$  rádovo  $10^1$ , čiže hypotézu  $H_0$ , že ide o výber z Poissonovho rozdelenia, zamietneme.

<sup>2</sup>Pre použitie tejto metódy by malo platiť, že  $\bar{\xi} \geq 5$ , čo v našom prípade platí.

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-149.271	24.9955	-5.9719	$2.3466 \times 10^{-9}$
x1	0.996683	0.000312087	3193.6	$3.66923312 \times 10^{-332370}$
x2	159.006	25.0682	6.34293	$2.25632 \times 10^{-10}$

Tabuľka 6.3: Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument  $C$

## 6.3 CS model

Vzhľadom k evidentnej nerealistickej SF modelu sa objavili jeho rôzne modifikácie, my sa, ako už bolo uvedené, zameriame na CS model [4]. Tento model sa od SF modelu líši predpokladom, že ako intenzita príjmu, tak intenzita rušenia objednávok s určitou cenou závisí na vzdialenosti tejto ceny od najlepších kotácií. Preto musíme skúmať v jednej regresii len pozorovania s rovnakou vzdialenosťou od najlepšieho asku. Ak by tento model platil a ak by sa cena najlepšieho asku  $P_{a,t,1}$  od času  $(t-1)$  do času  $t$  nezmenila, potom by regresia (6.1) platila lokálne, tj. s koeficientami závislými na relatívnej cene. Hoci v našich dátach, s ktorými pracujeme, sa môže cena najlepšieho asku  $P_{a,t,1}$  od času  $(t-1)$  do času  $t$  zmeniť, zanedbáme to s poukazom na spojitost' funkcií intenzít v CS modeli.

CS model falzifikujeme podobne ako SF model. Dáta si rozdelíme podľa relatívnych cien a pre každú z nich skúsime odhadnúť rovnicu lineárnej regresie s pridaným indikátorom nulovosti. Ukážeme, že po pridaní nulovosti objemu objednávok do rovnice lineárnej regresie bude tento štatisticky významný a teda že CS model pre skutočné dáta neplatí.

Množinu dvojíc  $(t, i) \in M$  rozdelíme na  $j = 1, \dots, 200$  disjunktných podmnožín  $M_j$  podľa hodnoty  $i$ , tj.

$$M_j := \{(t, i) \in M : i = j\}. \quad (6.6)$$

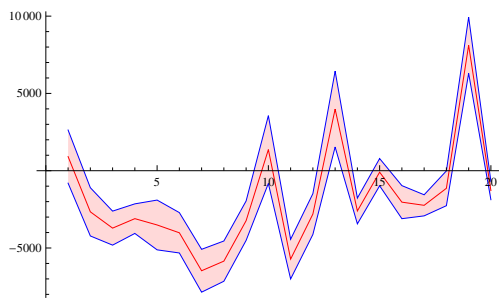
Na každú  $M_j$ , resp. na objemy objednávok  $n_{a,t,i}$ ,  $(t, i) \in M_j$  následne aplikujeme lineárnu regresiu s pridaným regresorom pre nulovosť samostatne. Budeme teda mať  $j = 1, \dots, 200$  rovníc lineárnej regresie, každú v tvare

$$n_{a,t,i}^j = \beta_0^j + \beta_1^j n_{a,(t-1),i}^j + \beta_2^j \mathbf{1}_{(n_{a,(t-1),i}^j=0)} + e_{(t-1),i}^j, \quad (6.7)$$

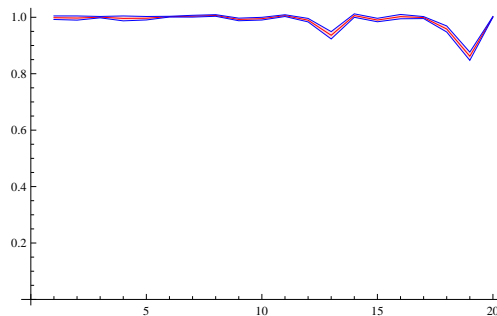
kde  $(t, i) \in M_j$ ,  $\mathbb{E}(e_{(t-1),i}^j) = 0$  a  $e_{(t-1),i}^j$  sú navzájom nekorelované.

Výsledky regresii pre  $j = 1, \dots, 20$  pre každý inštrument  $A, B, C$  sú zhrnuté z praktických dôvodov vo forme grafov závislosti na číslach príslušnej lineárnej regresie  $j = 1, \dots, 200$ . V jednotlivých grafoch sú znázornené odhad  $b_k$  parametra  $\beta_k$  spolu s konfidenčným intervalom pre každé  $k = 0, 1, 2$  (obr. č. 6.1, obr. č. 6.2 a obr. č. 6.3 pre inštrument  $A$ ; obr. č. 6.6, obr. č. 6.7 a obr. č. 6.8 pre inštrument  $B$ ; obr. č. 6.11, obr. č. 6.12 a obr. č. 6.13 pre inštrument  $C$ ), ďalej t-štatistika odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  (obr. č. 6.4 pre inštrument  $A$ , obr. č. 6.9 pre inštrument  $B$  a obr. č. 6.14 pre inštrument  $C$ ) a jeho p-hodnota (obr. č. 6.5 pre inštrument  $A$ , obr. č. 6.10 pre inštrument  $B$  a obr. č. 6.15 pre inštrument  $C$ ).

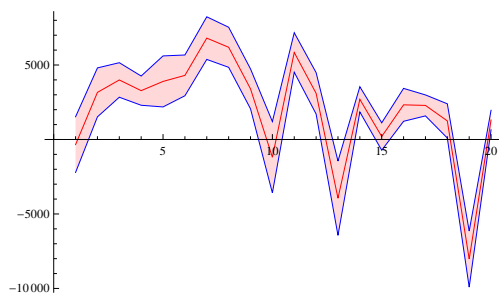
Z výsledku vyplýva, že t-štatistika odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  bola významná pre inštrument  $A$  v 85% prípadov, pre inštrument  $B$  v 60% prípadov a pre inštrument  $C$  v 55% prípadov; rovnako tak p-hodnota. Teda aj nulovosť objemu objednávok v čase  $(t-1)$  je v týchto prípadoch štatisticky významná a tým sme ukázali, že ani CS model pre skutočné dáta nie je vhodný.



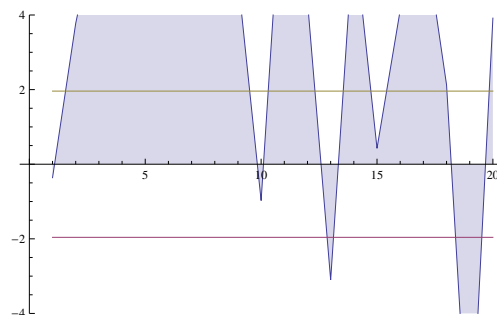
Obr. 6.1: Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



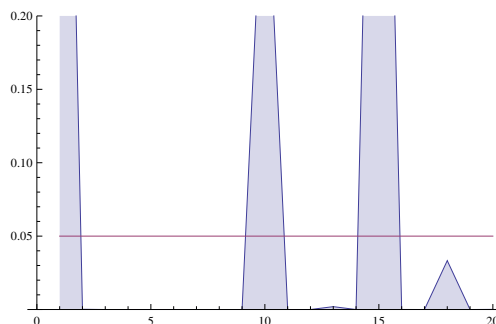
Obr. 6.2: Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



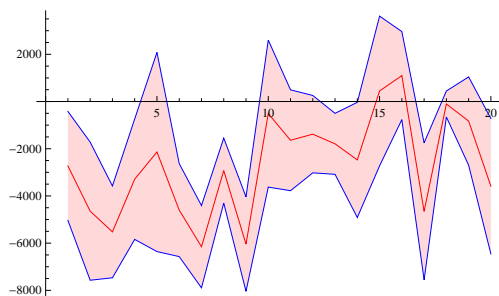
Obr. 6.3: Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



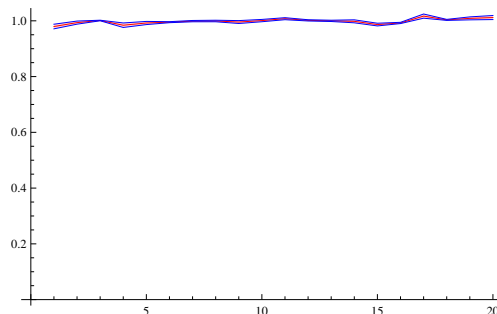
Obr. 6.4: Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



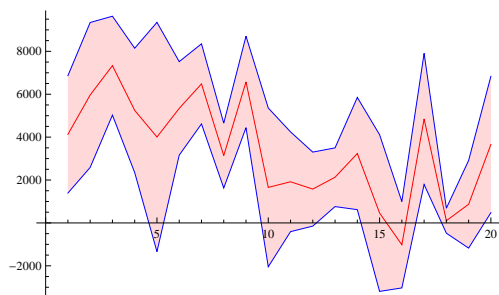
Obr. 6.5: Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



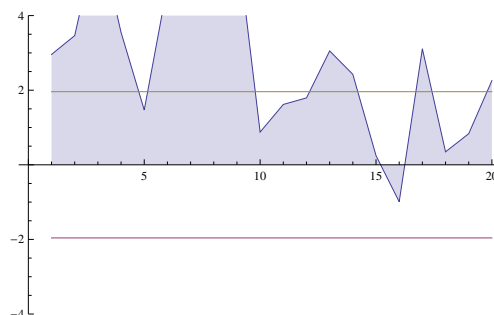
Obr. 6.6: Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



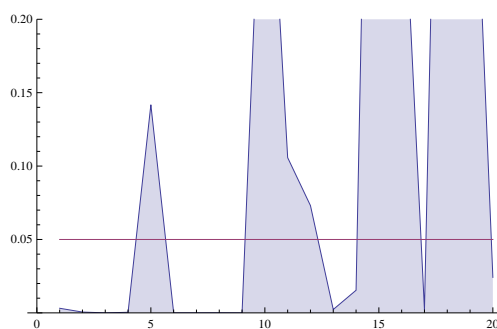
Obr. 6.7: Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



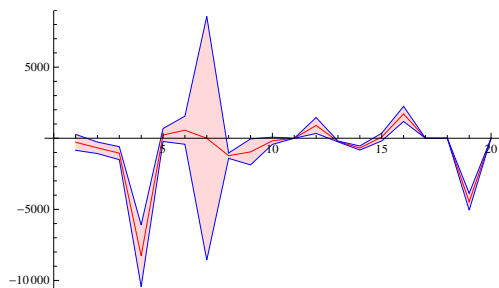
Obr. 6.8: Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



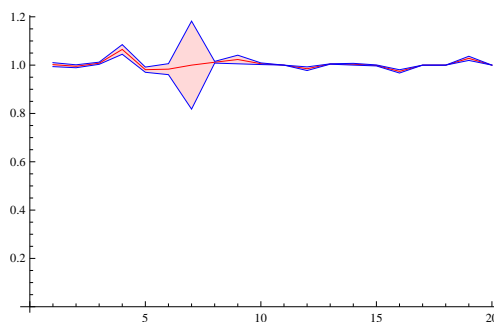
Obr. 6.9: Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



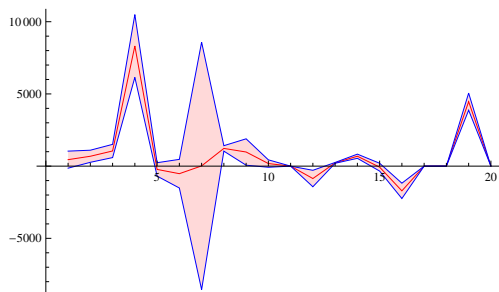
Obr. 6.10: Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



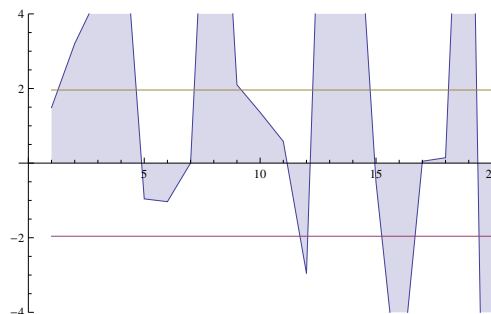
Obr. 6.11: Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



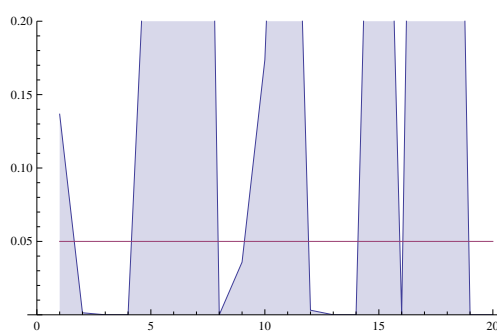
Obr. 6.12: Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



Obr. 6.13: Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



Obr. 6.14: Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



Obr. 6.15: Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$



## 7. Vlastný generálny model

Ako sme v predchádzajúcej časti ukázali, SF model ani CS model pre inštrumenty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  neplatia. V tejto časti sa preto pokúsime navrhnúť v rámci ZSF modelu vlastný model knihy objednávok a otestovať jeho validitu. Na rozdiel od uvedených predchádzajúcich modelov sa nebudeme zaoberať modelovaním najlepších kotácií, teda pôjde čisto o model knihy objednávok.

V priebehu overovania predchádzajúcich modelov sme zistili, že objem objednávok  $N_{a,t,p}$  v čase  $t$  závisí ako na objeme objednávok  $N_{a,(t-1),p}$  v čase  $(t-1)$ , tak na nulovosti objemu objednávok  $N_{a,(t-1),p}$  v čase  $(t-1)$ . Intuitívne je však možné predpokladať navyše tiež závislosť objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  v čase  $t$  na vzdialenosti  $d_i$  od ceny najlepšieho asku  $P_{a,t,1}$  v čase  $t$ , preto v modeli budeme uvažovať nerovnomerné intenzity príchodu a tiež rušenia objednávok. Vlastný generálny model preto nech má tvar

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 N_{a,(t-1),p} + \beta_2 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} + \beta_3 d_i + \beta_4 d_i^2 + e_{(t-1),p}, \quad (7.1)$$

pre všetky dvojice  $(t, i) \in M$ , kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$  a  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované. Pre tento model budeme odhadovať parametre a testovať jeho validitu.

Parametre pre jednotlivé inštrumenty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  odhadneme pomocou lineárnej regresie, dosadíme do (7.1) a dostaneme postupne

$$\begin{aligned} N_{a,t,p} &= -568,008 + 0,9982 N_{a,(t-1),p} + 630,857 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} \\ &\quad -14,5078 d_i + 6,68362 d_i^2, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} N_{a,t,p} &= -500,355 + 0,999566 N_{a,(t-1),p} + 603,937 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} \\ &\quad +80,1434 d_i - 73,0766 d_i^2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} N_{a,t,p} &= -152,974 + 0,996707 N_{a,(t-1),p} + 163,072 \mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} \\ &\quad +13,5389 d_i - 10,4148 d_i^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$

U všetkých troch inštrumentov F-štatistika aj jej p-hodnota svedčí v prospech modelu rovnako ako koeficient determinácie  $R^2$  (pozri tab. č. 7.1, 7.3 a 7.5). Na základe t-štatistík a ich p-hodnôt postupne pre odhady  $b_k$  parametrov  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  (pozri tab. č. 7.2, 7.4 a 7.6) sú však posledné dve premenné štatisticky nevýznamné pre všetky tri inštrumenty, čiže závislosť  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  od najlepšieho asku  $P_{a,t,1}$  ani na jej druhej mocnине sa nepreukázala.

Tieto premenné preto z modelu (7.1) odstránime, čím dostaneme opäť model (6.2) (pomocou neho sme ukázali, že SF model nie je vhodný). Výsledkom (6.2) sú rovnice (6.3), (6.4) a (6.5), pričom F-štatistika aj jej p-hodnota opäť svedčí v prospech modelu rovnako ako koeficient determinácie  $R^2$  (pozri tab. č. 7.7, 7.8 a 7.9) pre všetky tri inštrumenty. Odhady  $b_k$  parametrov  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, 2$  sú štatisticky významné ako sme ukázali pri SF modeli a teda tento model (6.2), ku

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$3.48176 \times 10^{15}$	$3.48176 \times 10^{15}$	$6.02769 \times 10^7$	$4.01785853 \times 10^{-518475}$
x2	1	$8.51962 \times 10^9$	$8.51962 \times 10^9$	147.493	$6.19022 \times 10^{-34}$
x3	1	199404.	199404.	0.00345211	0.953148
x4	1	$1.89327 \times 10^6$	$1.89327 \times 10^6$	0.0327767	0.856334
Error	496713	$2.86915 \times 10^{13}$	$5.77628 \times 10^7$		
Total	496717	$3.51046 \times 10^{15}$			

Tabuľka 7.1: Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *A*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0,991826855$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-568.008	58.662	-9.68273	$3.58686 \times 10^{-22}$
x1	0.9982	0.000158085	6314.34	$1.118227484 \times 10^{-474346}$
x2	630.857	51.9646	12.1401	$6.54479 \times 10^{-34}$
x3	-14.5078	76.3748	-0.189956	0.849344
x4	6.68362	36.9172	0.181043	0.856334

Tabuľka 7.2: Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *A*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$2.6962 \times 10^{16}$	$2.6962 \times 10^{16}$	$1.30644 \times 10^8$	$8.01410836 \times 10^{-603235}$
x2	1	$1.40457 \times 10^{10}$	$1.40457 \times 10^{10}$	68.058	$1.59135 \times 10^{-16}$
x3	1	$6.91576 \times 10^8$	$6.91576 \times 10^8$	3.35102	0.0671638
x4	1	$2.27203 \times 10^8$	$2.27203 \times 10^8$	1.10091	0.294068
Error	498527	$1.02885 \times 10^{14}$	$2.06378 \times 10^8$		
Total	498531	$2.70649 \times 10^{16}$			

Tabuľka 7.3: Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *B*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0,996198582$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-500.355	86.5702	-5.77976	$7.48522 \times 10^{-9}$
x1	0.999566	0.000100376	9958.21	$5.17570811 \times 10^{-573522}$
x2	603.937	72.0119	8.38663	$5.01554 \times 10^{-17}$
x3	80.1434	144.353	0.55519	0.578765
x4	-73.0766	69.647	-1.04924	0.294068

Tabuľka 7.4: Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *B*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$8.65027 \times 10^{13}$	$8.65027 \times 10^{13}$	$4.89677 \times 10^7$	$4.78090203 \times 10^{-498451}$
x2	1	$7.10729 \times 10^7$	$7.10729 \times 10^7$	40.2332	$2.25581 \times 10^{-10}$
x3	1	$8.65202 \times 10^6$	$8.65202 \times 10^6$	4.89776	0.0268919
x4	1	$4.69015 \times 10^6$	$4.69015 \times 10^6$	2.65501	0.103224
Error	499501	$8.82381 \times 10^{11}$	$1.76652 \times 10^6$		
Total	499505	$8.73852 \times 10^{13}$			

Tabuľka 7.5: Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *C*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0,989902397$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-152.974	25.3287	-6.03955	$1.54649 \times 10^{-9}$
x1	0.996707	0.000312505	3189.41	$8.69417953 \times 10^{-332.098}$
x2	163.072	25.1606	6.48123	$9.10609 \times 10^{-11}$
x3	13.5389	13.2089	1.02499	0.305369
x4	-10.4148	6.39169	-1.62942	0.103224

Tabuľka 7.6: Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *C*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$3.48176 \times 10^{15}$	$3.48176 \times 10^{15}$	$6.02772 \times 10^7$	$3.34338758 \times 10^{-518.477}$
x2	1	$8.51962 \times 10^9$	$8.51962 \times 10^9$	147.494	$6.1884 \times 10^{-34}$
Error	496 715	$2.86915 \times 10^{13}$	$5.77625 \times 10^7$		
Total	496 717	$3.51046 \times 10^{15}$			

Tabuľka 7.7: Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *A*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.991826855$ .

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$2.6962 \times 10^{16}$	$2.6962 \times 10^{16}$	$1.30643 \times 10^8$	$2.798011321 \times 10^{-603.236}$
x2	1	$1.40457 \times 10^{10}$	$1.40457 \times 10^{10}$	68.0577	$1.59162 \times 10^{-16}$
Error	498 529	$1.02886 \times 10^{14}$	$2.06379 \times 10^8$		
Total	498 531	$2.70649 \times 10^{16}$			

Tabuľka 7.8: Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *B*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.996198548$ .

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$8.65027 \times 10^{13}$	$8.65027 \times 10^{13}$	$4.89672 \times 10^7$	$2.028738430 \times 10^{-498.451}$
x2	1	$7.10729 \times 10^7$	$7.10729 \times 10^7$	40.2327	$2.25632 \times 10^{-10}$
Error	499 503	$8.82394 \times 10^{11}$	$1.76654 \times 10^6$		
Total	499 505	$8.73852 \times 10^{13}$			

Tabuľka 7.9: Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *C*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.989902244$ .

ktorému sme dospeli, je vierohodným modelom pre všetky tri inštrumenty a zároveň je na základe koeficientu determinácie  $R^2$  vhodný pre účely predikcie.

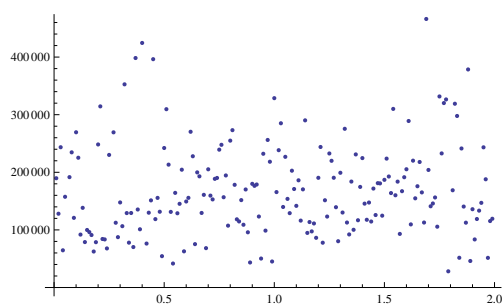
Objem objednávok  $N_{a,t,p}$  teda pre všetky tri inštrumenty závisí ako na predchádzajúcom objeme  $N_{a,(t-1),p}$ , tak na nulovosti objemu objednávok  $N_{a,(t-1),p}$  v čase  $(t-1)$ . Závislosť na vzdialenosti  $d_i$  ani na jej druhej mocnine  $d_i^2$  sa nepreukázala.

V dátach si však môžeme všimnúť, že len malú časť tvoria dáta, pre ktoré je objem objednávok v čase  $(t-1)$  nenulový (pre inštrument  $A$  je to 12,16%, pre  $B$  7,03% a pre inštrument  $C$  dokonca len 2,79%). V ďalšej časti preto dáta rozdelíme na dve disjunktné množiny, v jednej budú dáta, pre ktoré  $N_{a,(t-1),p} \neq 0$  (nenulová vetva) a v druhej dáta, pre ktoré  $N_{a,(t-1),p} = 0$  (nulová vetva). Pre obe vetvy následne zopakujeme postup použitý pre vlastný generálny model.

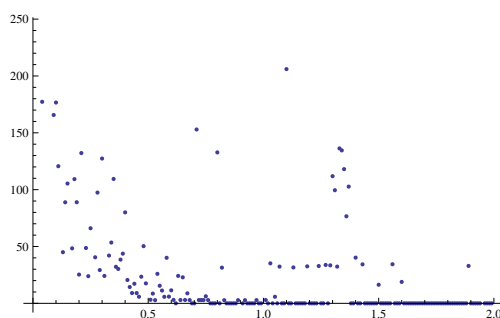
Okrem toho, ako vyplýva z rovníc (6.3), (6.4) a (6.5), predikovaný objem objednávok  $N_{a,t,p}$  je záporný pre  $N_{a,(t-1),p} \in (0; 574, 388)$  pre inštrument  $A$ , pre  $N_{a,(t-1),p} \in (0; 504, 459)$  pre inštrument  $B$  a pre  $N_{a,(t-1),p} \in (0; 149, 768)$  pre inštrument  $C$ . Model (6.2) teda dáva zmysluplné predikcie pre nulový  $N_{a,(t-1),p}$  a potom až od určitého objemu  $N_{a,(t-1),p}$ , čo môže podporiť myšlienku rozdelenia dát na dve vetvy.

Než sa pustíme do regresie, pozrime sa na závislosti objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na objeme  $N_{a,(t-1),p}$  a na vzdialenosti  $d_i$  podobne, ako sme to urobili pred použitím regresie predtým, avšak tento raz to urobíme pre obe vetvy zvlášť. Pre závislosť priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na objeme objednávok  $N_{a,(t-1),p}$  v čase  $(t-1)$  sa v podstate nič nemení – rozdelením dát na dve vetvy sa aj graf závislosti rozdelí na dva. V jednom bude len jediná hodnota, a to priemerná hodnota  $N_{a,t,p}$  pre nulový objem  $N_{a,(t-1),p}$ , a v druhom všetky ostatné hodnoty priemerného objemu  $N_{a,t,p}$ .

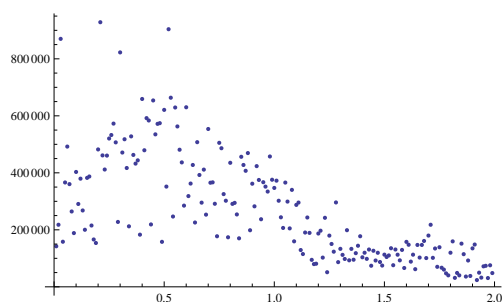
Pokiaľ ide o závislosť priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre nenulovú, resp. nulovú vetvu, pre každú vzdialenosť sa do priemerného objemu budú započítavať len niektoré hodnoty podľa toho, či  $N_{a,(t-1),p}$  bol nenulový alebo nulový. Čiže graf závislosti sa môže podstatne zmeniť. Graf tejto závislosti pre inštrument  $A$  je znázornený na obr. č. 7.1 pre nenulovú a na obr. č. 7.2 pre nulovú vetvu. Analogicky je znázornený na obr. č. 7.3 a na obr. č. 7.4 pre nenulovú a nulovú vetvu inštrumentu  $B$  a na obr. č. 7.5 a na obr. č. 7.6 pre nenulovú a nulovú vetvu inštrumentu  $C$ . Závislosť je najvýraznejšia na obr. č. 7.3 a na obr. č. 7.2, v ostatných prípadoch nie je až tak zjavná, resp. je ťažšie odhadnuteľná.



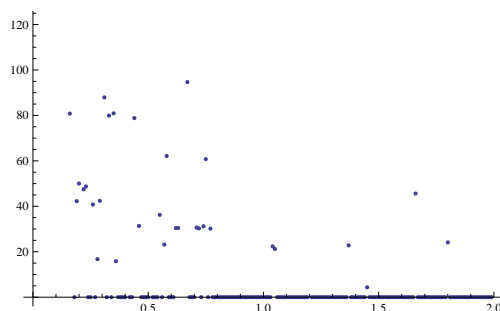
Obr. 7.1: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $A$ , ne-  
nulová vetva



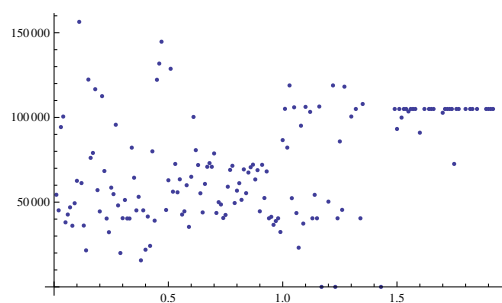
Obr. 7.2: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $A$ , nu-  
lová vetva



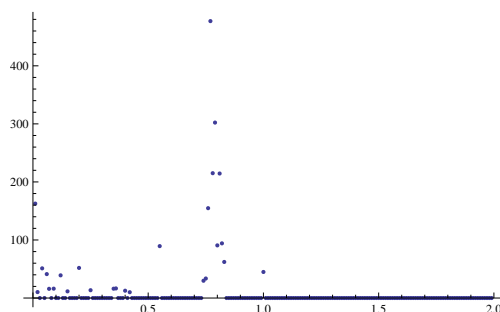
Obr. 7.3: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $B$ , ne-  
nulová vetva



Obr. 7.4: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $B$ , nu-  
lová vetva



Obr. 7.5: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $C$ , ne-  
nulová vetva



Obr. 7.6: Graf závislosti priemer-  
ného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na  
vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $C$ , nu-  
lová vetva

## 8. Nenulová vetva

V nenulovej vetve pre všetky pozorovania platí  $N_{a,(t-1),c} > 0$ , z čoho vyplýva  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} = 0$ . v dôsledku toho stĺpce matice daných čísel  $\mathbf{X}$  modelu (7.1) nie sú lineárne nezávislé,  $\mathbf{X}$  nemá plnú hodnotu a teda vysvetľujúca premenná  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}$  je nadbytočná. Rovnica modelu (7.1) sa preto zmení na tvar

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 N_{a,(t-1),p} + \beta_2 d_i + \beta_3 d_i^2 + e_{(t-1),p}, \quad (8.1)$$

kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$ ,  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované a  $(t, i) \in M$ ,  $N_{a,(t-1),p} > 0$ .

Použitím tejto regresie a následným dosadením odhadnutých parametrov  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  do (8.1) pre inštrumenty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dostaneme postupne

$$N_{a,t,p} = -2095,36 + 0,998295N_{a,(t-1),p} + 2937,63d_i - 981,653d_i^2, \quad (8.2)$$

$$N_{a,t,p} = -2703 + 0,999695N_{a,(t-1),p} + 5906,93d_i - 2644,58d_i^2, \quad (8.3)$$

$$N_{a,t,p} = -62,1464 + 0,995415N_{a,(t-1),p} - 352,221d_i + 347,494d_i^2. \quad (8.4)$$

V tomto prípade pre všetky tri inštrumenty F-štatistika a jej p-hodnota svedčí v prospech modelu a koeficient determinácie  $R^2$  takisto (pozri tab. č. 8.1, 8.3 a 8.5). Pre inštrumenty  $A$  a  $B$  sú t-štatistiky a ich P-hodnoty pre odhady  $b_i$  parametrov  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  významné (pozri tab. č. 8.2 a 8.4), tj. všetky odhady sú štatisticky významné a vierohodným modelom pre nenulovú vetvu týchto inštrumentov je (8.1), ktorý je, na základe koeficientu determinácie  $R^2$ , vhodný tiež na predikovanie.

Pre inštrument  $C$  je t-štatistika a jej p-hodnota významná len pre odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$  (pozri tab. č. 8.6). Premenné  $d_i$  a  $d_i^2$  preto z modelu (8.1) odstránime (čím dostaneme SF model) a regresiu zopakujeme pre

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 N_{a,(t-1),p} + e_{(t-1),p}, \quad (8.5)$$

kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$ ,  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované a  $(t, i) \in M$ ,  $N_{a,(t-1),p} > 0$ .

Výsledkom je model

$$N_{a,t,c} = -149,271 + 0,996683N_{a,(t-1),p}, \quad (8.6)$$

v ktorom F-štatistika a jej p-hodnota ako aj koeficient determinácie  $R^2$  naďalej svedčia v prospech modelu (pozri tab. č. 8.7). Pokiaľ ide o t-štatistiku a jej p-hodnotu pre odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$ , táto je významná (pozri tab. č. 8.8), teda odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$  je štatisticky významný a vierohodným modelom pre nenulovú vetvu inštrumentu  $C$  je model (8.5). Aj tento model je na základe koeficientu determinácie  $R^2$  vhodný na predikovanie.

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$2.30342 \times 10^{15}$	$2.30342 \times 10^{15}$	$6.77773 \times 10^6$	$5.3109781008 \times 10^{-39987}$
x2	1	$1.51269 \times 10^{10}$	$1.51269 \times 10^{10}$	44.5101	$2.56818 \times 10^{-11}$
x3	1	$2.97603 \times 10^9$	$2.97603 \times 10^9$	8.75685	0.00308648
Error	34916	$1.18663 \times 10^{13}$	$3.39852 \times 10^8$		
Total	34919	$2.31531 \times 10^{15}$			

Tabuľka 8.1: Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *A*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.994874866$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-2095.36	261.023	-8.02748	$1.02585 \times 10^{-15}$
x1	0.998295	0.00038375	2601.42	$1.7812174150 \times 10^{-39975}$
x2	2937.63	641.46	4.5796	$4.67474 \times 10^{-6}$
x3	-981.653	331.729	-2.9592	0.00308648

Tabuľka 8.2: Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument *A*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$2.05449 \times 10^{16}$	$2.05449 \times 10^{16}$	$2.24253 \times 10^7$	$8.799019906 \times 10^{-77867}$
x2	1	$2.72552 \times 10^{10}$	$2.72552 \times 10^{10}$	29.7497	$4.93491 \times 10^{-8}$
x3	1	$3.13489 \times 10^{10}$	$3.13489 \times 10^{10}$	34.218	$4.95225 \times 10^{-9}$
Error	60609	$5.5527 \times 10^{13}$	$9.1615 \times 10^8$		
Total	60612	$2.06005 \times 10^{16}$			

Tabuľka 8.3: Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *B*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.997304585$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-2703.	309.978	-8.71997	$2.85159 \times 10^{-18}$
x1	0.999695	0.000215781	4632.92	$9.779745894 \times 10^{-77292}$
x2	5906.93	821.974	7.18627	$6.73502 \times 10^{-13}$
x3	-2644.58	452.094	-5.84962	$4.95225 \times 10^{-9}$

Tabuľka 8.4: Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument *B*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$1.80171 \times 10^{13}$	$1.80171 \times 10^{13}$	487021.	$8.8817435576 \times 10^{-10839}$
x2	1	$1.12392 \times 10^8$	$1.12392 \times 10^8$	3.03805	0.0813554
x3	1	$1.16103 \times 10^8$	$1.16103 \times 10^8$	3.13838	0.0764918
Error	13929	$5.15298 \times 10^{11}$	$3.69946 \times 10^7$		
Total	13932	$1.85327 \times 10^{13}$			

Tabuľka 8.5: Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *C*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.972195173$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-62.1464	151.559	-0.410047	0.681778
x1	0.995415	0.00153434	648.759	$1.52256518747 \times 10^{-10410}$
x2	-352.221	331.219	-1.06341	0.287615
x3	347.494	196.153	1.77155	0.0764918

Tabuľka 8.6: Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument  $C$

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$1.80171 \times 10^{13}$	$1.80171 \times 10^{13}$	486 875.	$4.9703645687 \times 10^{-10839}$
Error	13931	$5.15526 \times 10^{11}$	$3.70057 \times 10^7$		
Total	13932	$1.85327 \times 10^{13}$			

Tabuľka 8.7: Tabuľka ANOVA pre (8.5) pre inštrument  $C$ . Koeficient determinácie  $R^2 = 0.972182844$ .

Objem objednávok  $N_{a,t,p}$  v nenulovej vetve teda závisí ako na predchádzajúcom objeme  $N_{a,(t-1),p}$ , tak na vzdialenosti  $d_i$  a jej druhej mocnine  $d_i^2$  pre inštrumenty  $A$  a  $B$  a pre inštrument  $C$  závisí len na predchádzajúcom objeme  $N_{a,(t-1),p}$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	-149.271	114.402	-1.30479	0.191986
x1	0.996683	0.00142839	697.764	$4.9703645781 \times 10^{-10839}$

Tabuľka 8.8: Tabuľka odhadov parametrov pre (8.5) pre inštrument  $C$



## 9. Nulová vetva

Pre pozorovania v nulovej vetve, ktorých je podstatne viac, na rozdiel od nenulovej vetvy platí  $N_{a,(t-1),p} = 0$ , odkiaľ  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)} = 1$  pre každé pozorovanie. v matici daných čísel  $\mathbf{X}$  modelu (7.1) tak máme opäť lineárne závislé stĺpce, teda premenné  $N_{a,(t-1),p}$  a  $\mathbf{1}_{(N_{a,(t-1),p}=0)}$  musíme z modelu (7.1) odstrániť, čím dostaneme regresný model

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 d_i + \beta_2 d_i^2 + e_{(t-1),p}, \quad (9.1)$$

kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$ ,  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované a  $(t, i) \in M$ ,  $N_{a,(t-1),p} = 0$ .

Pre tento model odhadneme parametre  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  pre inštrumenty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a odhady dosadíme do (9.1). Postupne teda dostaneme

$$N_{a,t,p} = 246,057 - 368,762d_i + 136,687d_i^2, \quad (9.2)$$

$$N_{a,t,p} = 611,806 - 1066,16d_i + 414,504d_i^2, \quad (9.3)$$

$$N_{a,t,p} = 12,0834 + 14,8053d_i - 12,838d_i^2. \quad (9.4)$$

Aj v tomto prípade pre všetky tri inštrumenty F-štatistika a jej p-hodnota svedčí v prospech modelu, avšak koeficient determinácie  $R^2$  má naopak veľmi malé hodnoty, kvôli čomu tieto regresné modely nie sú vhodné ako regresné modely na predpovedanie (pozri tab. č. 9.1, 9.3 a 9.5). Podobne ako v nenulovej vetve, pre inštrumenty  $A$  a  $B$  sú t-štatistiky a ich P-hodnoty odhadov  $b_i$  parametrov  $\beta_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  významné (pozri tab. č. 9.2 a 9.4), teda odhady parametrov sú štatisticky významné a model (9.1) pre nulovú vetvu týchto inštrumentov vierohodný, avšak podľa koeficientu determinácie  $R^2$  nepoužiteľný na predikovanie.

Pre inštrument  $C$  je t-štatistika a jej p-hodnota pre odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$  štatisticky nevýznamná (pozri tab. č. 9.6), preto premennú  $d_i$  z modelu (9.1) odstránime a tento sa týmto zmení na

$$N_{a,t,p} = \beta_0 + \beta_1 d_i^2 + e_{(t-1),p}, \quad (9.5)$$

kde  $\mathbb{E}(e_{(t-1),p}) = 0$ ,  $e_{(t-1),p}$  sú navzájom nekorelované a  $(t, i) \in M$ ,  $N_{a,(t-1),p} = 0$ .

Opätovným použitím regresie dostaneme model

$$N_{a,t,p} = 17,7023 - 5,91628d_i^2, \quad (9.6)$$

v ktorom F-štatistika a jej p-hodnota i koeficient determinácie  $R^2$  svedčia v prospech modelu ako predtým (pozri tab. č. 9.7). Tento raz je však t-štatistika a jej p-hodnota pre odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$  významná (pozri tab. č. 9.8), čiže odhad  $b_1$  parametra  $\beta_1$  je štatisticky významný a model (9.5) je vierohodným modelom pre nulovú vetvu inštrumentu  $C$ , avšak podľa koeficientu determinácie  $R^2$  nepoužiteľným na predikovanie podobne ako pre nulovú vetvu inštrumentov  $A$  a  $B$ .

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$1.29482 \times 10^9$	$1.29482 \times 10^9$	35.5809	$2.44855 \times 10^{-9}$
x2	1	$7.295 \times 10^8$	$7.295 \times 10^8$	20.0462	$7.56107 \times 10^{-6}$
Error	461795	$1.68051 \times 10^{13}$	$3.63909 \times 10^7$		
Total	461797	$1.68072 \times 10^{13}$			

Tabuľka 9.1: Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *A*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.000120444$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	246.057	27.8522	8.8344	$1.00979 \times 10^{-18}$
x1	-368.762	63.4904	-5.80815	$6.32077 \times 10^{-9}$
x2	136.687	30.5289	4.4773	$7.56107 \times 10^{-6}$

Tabuľka 9.2: Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *A*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$6.94059 \times 10^9$	$6.94059 \times 10^9$	64.2756	$1.0844 \times 10^{-15}$
x2	1	$6.3226 \times 10^9$	$6.3226 \times 10^9$	58.5525	$1.9834 \times 10^{-14}$
Error	437916	$4.72869 \times 10^{13}$	$1.07982 \times 10^8$		
Total	437918	$4.73002 \times 10^{13}$			

Tabuľka 9.3: Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *B*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.000280405$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	611.806	50.7654	12.0516	$1.92471 \times 10^{-33}$
x1	-1066.16	113.73	-9.37445	$6.98528 \times 10^{-21}$
x2	414.504	54.1697	7.65196	$1.9834 \times 10^{-14}$

Tabuľka 9.4: Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *B*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$1.92208 \times 10^7$	$1.92208 \times 10^7$	25.4417	$4.56123 \times 10^{-7}$
x2	1	$6.88565 \times 10^6$	$6.88565 \times 10^6$	9.1142	0.00253646
Error	485570	$3.66841 \times 10^{11}$	755486.		
Total	485572	$3.66868 \times 10^{11}$			

Tabuľka 9.5: Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *C*. Koeficient determinácie  $R^2 = 0.0000711605$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	12.0834	3.84008	3.14664	0.00165169
x1	14.8053	8.81401	1.67974	0.0930083
x2	-12.838	4.25244	-3.01897	0.00253646

Tabuľka 9.6: Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *C*

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x1	1	$2.39749 \times 10^7$	$2.39749 \times 10^7$	31.7342	$1.76876 \times 10^{-8}$
Error	485571	$3.66844 \times 10^{11}$	755489.		
Total	485572	$3.66868 \times 10^{11}$			

Tabuľka 9.7: Tabuľka ANOVA pre (9.5) pre inštrument  $C$ . Koeficient determinácie  $R^2 = 0.000065350$ .

	Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
1	17.7023	1.8858	9.38717	$6.18861 \times 10^{-21}$
x1	-5.91628	1.05023	-5.63331	$1.76876 \times 10^{-8}$

Tabuľka 9.8: Tabuľka odhadov parametrov pre (9.5) pre inštrument  $C$

Proti použitiu modelu (9.1) pre nulovú vetvu inštrumentov  $A$  a  $B$ , resp. modelu (9.5) pre nulovú vetvu inštrumentu  $C$  na predikovanie svedčí tiež fakt, že podľa rovníc (9.2), (9.3), (9.6) sú predikované objemy  $N_{a,t,p}$  v nulovej vetve záporné pre vzdialenosti  $d_i \in (1, 20; 1, 49)$  pre inštrument  $A$ , pre  $d_i \in (0, 86; 1, 71)$  pre inštrument  $B$  a pre  $d_i > 1, 72$  pre inštrument  $C$ .

Objem objednávok  $N_{a,t,p}$  v nulovej vetve teda pre inštrumenty  $A$  a  $B$  závisí na vzdialenosti  $d_i$  a jej druhej mocnine  $d_i^2$  a pre inštrument  $C$  závisí len na druhej mocnine vzdialenosti, tj. na  $d_i^2$ .

# Záver

V práci sme sa zaoberali modelom spojitej dvojitej aukcie a Zobecneným SF modelom, ktorého validitu sme testovali pomocou lineárnej regresie. Ako sa ukázalo, ZSF model, resp. jeho špeciálne prípady SF model a CS model, ktoré pokrýva, pre reálne dáta z trhu nie je validný.

V priebehu práce sme na základe výsledkov z predchádzajúcich overovaných modelov odvodili tiež vlastný generálny model, ktorý uvažuje nerovnomerné intenzity príchodu a tiež rušenia objednávok. Ani v tomto prípade sa však závislosť na vzdialenosti od najlepšieho asku nijak nepreukázala, teda model závisí len na predchádzajúcom objeme objednávok, resp. jeho nulovosti.

V ďalšom kroku sme model použili samostatne na nenulovú a nulovú vetvu, nakoľko v dátach mala výraznú prevahu nulová vetva. V nenulovej vetve sa po tomto rozčlenení preukázala závislosť na vzdialenosti, hoci len čiastočne. V nulovej vetve je predchádzajúci objem vždy nulový, preto táto premenná v lineárnej regresii nemá opodstatnenie a model v tomto prípade závisí na vzdialenosti tak, ako sme to zhrnuli na konci kapitoly.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] ŠMÍD M. *Probabilistic properties of the continous double auction*. Kybernetika 48 (2012), 1, 50-82.
- [2] ŠMÍD M. *Probabilistic properties of the continous double auction*. Research Report No. 2304. Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, 2010.
- [3] SMITH E., FARMER J.D., GILLEMOT L., KRISHNAMURTHY S. *Statistical theory of the continuous double auction*. Quantitative Finance 3 (2003), 6, 481-514.
- [4] CONT R., STOIKOV S., TALREJA R. *A stochastic model for order book dynamics*. Operations Research 56 (2010), 3, 549-563.
- [5] SLANINA F. *Critical comparison of several order-book models for stock-market fluctuations*. The European Physical Journal B 61 (2008), 225-240.
- [6] MORAVOVÁ A. *ACD model a český kapitálový trh*. Diplomová práce. Univerzita Karlova, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, 2008.
- [7] ENGLE R., RUSSEL J. *Autoregressive conditional duration: A new model for irregularly spaced transaction data*. Econometrica 66 (1998), 5, 1127-1162.
- [8] COURIEROUX C., MONFORT A., TROGNON A. *Pseudo maximum likelihood methods: Theory*. Econometrica 52 (1984), 3, 681-700.
- [9] MIKE S., FARMER J.D. *An empirical behavioral model of liquidity and volatility*. Journal of Economic Dynamics and Control 32 (2008), 1, 200-234.
- [10] STIGLER G.J. *Public regulation of the securities markets*. J. Business 37, (1964), 2, 117-142.
- [11] BAK P., PACZUSKI M., SHUBIK M. *Price variations in a stock market with many agents*. Physica A 246, (1997), 430.
- [12] MASLOV S. *Simple model of a limit order driven market*. Physica A 278, (2000), 571-578.
- [13] ANDĚL J. *Základy matematické statistiky*. 2. opravené vydání. Matfyzpress, Praha 2007. ISBN 80-7378-001-1.
- [14] LONDON STOCK EXCHANGE *Rebuild Order Book: Service and Technical Description*. London Stock Exchange, October 2008
- [15] <http://www.londonstockexchange.com>
- [16] <http://www.lukoil.com>

# Zoznam tabuliek

- 6.1 Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument *A*
- 6.2 Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument *B*
- 6.3 Tabuľka odhadov parametrov pre (6.2) pre inštrument *C*
- 7.1 Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *A*
- 7.2 Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *A*
- 7.3 Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *B*
- 7.4 Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *B*
- 7.5 Tabuľka ANOVA pre (7.1) pre inštrument *C*
- 7.6 Tabuľka odhadov parametrov pre (7.1) pre inštrument *C*
- 7.7 Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *A*
- 7.8 Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *B*
- 7.9 Tabuľka ANOVA pre (6.2) pre inštrument *C*
- 8.1 Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *A*
- 8.2 Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument *A*
- 8.3 Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *B*
- 8.4 Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument *B*
- 8.5 Tabuľka ANOVA pre (8.1) pre inštrument *C*
- 8.6 Tabuľka odhadov parametrov pre (8.1) pre inštrument *C*
- 8.7 Tabuľka ANOVA pre (8.5) pre inštrument *C*
- 8.8 Tabuľka odhadov parametrov pre (8.5) pre inštrument *C*
- 9.1 Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *A*
- 9.2 Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *A*
- 9.3 Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *B*
- 9.4 Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *B*
- 9.5 Tabuľka ANOVA pre (9.1) pre inštrument *C*
- 9.6 Tabuľka odhadov parametrov pre (9.1) pre inštrument *C*
- 9.7 Tabuľka ANOVA pre (9.5) pre inštrument *C*
- 9.8 Tabuľka odhadov parametrov pre (9.5) pre inštrument *C*

# Zoznam grafov

- 5.1 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument  $A$
- 5.2 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $A$
- 5.3 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument  $B$
- 5.4 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $B$
- 5.5 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na objeme  $n_{a,(t-1),i}$  pre inštrument  $C$
- 5.6 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $n_{a,t,i}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $C$
- 6.1 Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.2 Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.3 Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.4 Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.5 Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.6 Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.7 Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.8 Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.9 Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.10 Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.11 Graf odhadu  $b_0$  parametra  $\beta_0$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.12 Graf odhadu  $b_1$  parametra  $\beta_1$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.13 Graf odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  s konfidenčným intervalom v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.14 Graf t-štatistiky odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 6.15 Graf p-hodnoty odhadu  $b_2$  parametra  $\beta_2$  v závislosti na  $j$  pre inštrument  $A$
- 7.1 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $A$ , nenulová vetva
- 7.2 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $A$ , nulová vetva
- 7.3 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $B$ , nenulová vetva
- 7.4 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $B$ , nulová vetva
- 7.5 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre

inštrument  $C$ , nenulová vetva

7.6 Graf závislosti priemerného objemu objednávok  $N_{a,t,p}$  na vzdialenosti  $d_i$  pre inštrument  $C$ , nulová vetva