Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Lipková

Konvergence Fourierových řad

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Studijní program: Obecná matematika

2009

Rada by som sa poďakovala vedúcemu práce Doc. RNDr. Miroslavovi Zelenému, Ph.D. za ochotu pri mojích častých návštevách, za cenné pripomienky a za pomoc pri písaní tejto práce. Ďalej by som sa chcela poďakovať mojej rodine za podporu a možnosť študovať na Karlovej Univerzite.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných zdrojov. Súhlasím so zapožičiavaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa Jana Lipková

Obsah

Název práce: Konvergence Fourierových řad
Autor: Jana Lipková
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
e-mail vedoucího: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V predloženej práci sa budeme zaoberať konvergenciou Fourierových radov, pričom budeme vychádzať z knihy Y. Katznelsona, *An Introduction to Harmonic Analysis*. Najskôr sa zoznámime s definíciou Fourierových koeficientov, Fourierových radov a ich základnými vlastnosťami. Potom budeme skúmať konvergenciu Fourierových radov v norme Banachovho priestoru $L^1(\mathbb{T})$. Sformulujeme a dokážeme Riemann-Lebesgueovo lemma, Weierstrassovu vetu a ukážeme, že Fourierove koeficienty určujú funkciu jednoznačne. Na záver sa budeme zaoberať bodovou konvergenciou. Pri tejto príležitosti sformulujeme a dokážeme Féjerovu a Lebesgueovu vetu.

Klíčová slova: Fourierové koeficienty, Fourierov rad, sumačné jadro, Banachov priestor

Title: Convergence of Fourier series
Author: Jana Lipková
Department: Department of Mathematical analysis
Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present thesis we investigate the convergence of Fourier series, based on *An Introduction to Harmonic Analysis*, a classic text by Y. Katznelson. First, the definitions of Fourier coefficients, Fourier series and their properties are introduced. Second, we study the convergence of Fourier series in the norm of the Banach space $L^1(\mathbb{T})$. Riemann-Lebesgue lemma and Weierstrass's theorem are formulated and proved. We show that a function can be unambiguously determined by Fourier coefficients. Eventually, we treat the pointwise convergence. On that occasion, Féjer's and Lebesgue's theorems are both formulated and proved.

Keywords: the Fourier series and coefficients, the summability kernel, the Banach Space

Kapitola 1

Úvod

Cieľom tejto práce je oboznámiť čitateľa s teóriou konvergencie Fourierových radov. Túto teóriu začneme budovať od základných definícií a vzťahov. Postupne vytvoríme aparát, pomocou ktorého budeme schopný sformulovať a dokázať hlbšie vety pojednávajúce o konvergencii Fourierových radov. Budeme sa zaoberať hlavne konvergenciou v norme homogénneho Banachovho priestoru $L^1(\mathbb{T})$ a bodovou konvergenciou.
Pri budovaní tejto teórie budeme vychádzať z knihy [Y].

V druhej kapitole sa zoznámime so základnými pojmami teórie Fourierových radov ako, sú trigonometrický polynóm a trigonometrický rad, konvolúcia, Fourierové koeficienty a Fourierov rad.

V tretej kapitole zadefinujeme sumačné jadro a dokážeme si niektoré jeho vlastnosti. Potom sa zoznámime s homogénnym Banachovým priestorom a pozrieme sa na konvergenciu Fourierových radov v jeho norme.

V poslednej kapitole sa budeme zaoberať bodovou konvergenciou Fourierových radov. Sformulujeme a dokážeme niektoré hlbšie vety, ako napr. Féjerovu a Lebesgueovu vetu.

Kapitola 2

Fourierové koeficienty

V tejto kapitole zadefinujeme základné pojmy súvisiace s teóriou Fourierových radov ako napríklad trigonometrický polynóm a trigonometrický rad, Fourierové koeficienty, konvolúciu a v neposlednom rade uvedieme definíciu Fourierovho radu. Ďalej dokážeme niektoré ich vlastnosti a vzťahy medzi nimi. Najskôr si však povieme niečo k značeniu, ktoré budeme v tomto texte používať.

Značenie.

(i) Symbolom $\mathbb{T}$ budeme značiť interval $[0, 2\pi]$, ktorého koncové body sú stotožnené. Nech f je 2π-periodická funkcia na $\mathbb{R}$, tzn. $f(t+2\pi) = f(t)$ pre každé $t \in \mathbb{R}$. Potom funkcie definované na $\mathbb{T}$ môžeme stotožniť s 2π-periodickými funkciami na $\mathbb{R}$.

(ii) Definujeme $L^1(\mathbb{T})$ ako priestor všetkých komplexných lebesgueovsky merateľných funkcií s periódou 2π na $\mathbb{R}$, ktoré majú konečnú normu

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt.$$

Inak povedané, uvažujeme $L^1(\mu)$, kde μ je Lebesgueova miera na intervale $[0, 2\pi]$ delená číslom 2π.
Činiteľ $\frac{1}{2\pi}$ v norme $||f||_1$ slúži po formálnej stránke na zjednodušenie uvažovaných výrazov. Napríklad konštantná funkcia 1 ma L^1-normu rovnú 1.

(iii) Symbolom $\int$ budeme značiť $\int_{\mathbb{T}}$, (tj. $\int := \int_{\mathbb{T}}$), pokiaľ nebude určené inak.

Definícia 2.1. Na $\mathbb{T}$ definujeme *trigonometrický polynóm* predpisom

$$P(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}, \tag{2.1}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{T}$ a $n \in \mathbb{N}$. Číslo n vo výraze (2.1) sa nazýva *frekvencia polynómu* P. Najväčšie $n \in \mathbb{N}$ také, že $|a_n| + |a_{-n}| \neq 0$ sa nazýva *stupeň polynómu* P.

Poznámka. Každý trigonometrický polynóm má periódu 2π.

Lemma 2.2. *Nech P je definované vzťahom* (2.1)*. Potom koeficienty a_n splňujú rovnicu*

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int P(t) e^{-int} dt. \tag{2.2}$$

Dôkaz. Pre každé $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ijt} dt = \begin{cases} 1 & \text{pre } j = 0, \\ 0 & \text{pre } j \neq 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Vynásobením $P(t)$, ktorý je definovaný vzťahom (2.1), výrazom e^{-ikt} dostaneme

$$P(t)e^{-ikt} = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{i(n-k)t}.$$

Vynásobením obidvoch strán rovnice výrazom $\frac{1}{2\pi}$ a zintegrovaním podľa t dostaneme

$$\frac{1}{2\pi} \int P(t) e^{-ikt} dt = \sum_{n=-N}^{N} a_n \frac{1}{2\pi} \int e^{i(n-k)t}.$$

Potom zo vzťahu (2.3) plynie

$$\frac{1}{2\pi} \int P(t) e^{-ikt} dt = a_k.$$

$\square$

Definícia 2.3. *Trigonometrickým radom* na $\mathbb{T}$ nazveme výraz

$$S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \tag{2.4}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$. Symbolom $\tilde{\mathrm{S}}$ označíme *konjugovaný rad* k S a definujeme ho predpisom

$$\widetilde{S} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int},$$

kde $\operatorname{sgn}(n) = \begin{cases} 0 & \text{pre } n = 0, \\ \frac{n}{|n|} & \text{inak.} \end{cases}$

Poznámka. Pripomeňme *Eulerove vzorce*:

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Aby sme si ozrejmili pojem konjugovaného radu, pozrime sa na naledujúci príklad.

Príklad. Nech $S \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$. Potom $\widetilde{S} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt)$.

Dôkaz. S ohľadom na Eulerove vzorce, môžeme rad S zapísať ako trigonometrický rad $S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{int}$, kde

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n & \text{pre } n \geq 0, \\ \frac{1}{2} a_{-n} & \text{pre } n < 0. \end{cases}$$

A rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt)$ ako $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{int}$, kde

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{2i} a_n = -\frac{1}{2} i a_n & \text{pre } n > 0, \\ 0 & \text{pre } n = 0, \\ -\frac{1}{2i} a_{-n} = \frac{1}{2} i a_{-n} & \text{pre } n < 0. \end{cases}$$

K dôkazu ďalej stačí, ak si uvedomíme, že konjugovaný rad $\widetilde{S}$ dostaneme, keď vynásobíme koeficienty radu S výrazom $-i \operatorname{sgn}(n)$. Teda stačí, ak ukážeme, že $-i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n = \beta_n$. Ale to platí, pretože

$$-i \operatorname{sgn}(n) \alpha_n = \begin{cases} -\frac{1}{2} i a_n = \beta_n & \text{pre } n > 0, \\ 0 = \beta_n & \text{pre } n = 0, \\ \frac{1}{2} i a_{-n} = \beta_n & \text{pre } n < 0. \end{cases}$$

A teda $\widetilde{S} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(nt)$ je konjugovaným radom k radu $S \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt)$. $\square$

Definícia 2.4. Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$, potom definujeme *n-tý Fourierov koeficient funkcie f* ($n \in \mathbb{Z}$) predpisom

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt. \tag{2.5}$$

Teraz si uvedieme dve vety, ktoré budeme v ďalšiom texte často potrebovať. Dôkaz prvej z nich možno nájsť napr. v [R, Veta 3.14] a druhú vetu si dokážeme v nasledujúcej kapitole.

Veta 2.5. *Pre $1 \leq p < \infty$ je $C(\mathbb{T})$ hustá podmnožina priestoru $L^p(\mu)$, kde μ je Lebesgueova miera na $\mathbb{T}$.*

Veta 2.6 (Weierstrassova veta pre 2π-periodické funkcie)**.** *Nech f je spojitá, 2π-periodická funkcia, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje trigonometrický polynóm P taký, že:*

$$\|f - P\|_{C(\mathbb{T})} := \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t) - P(t)| < \varepsilon.$$

Pomocou práve uvedených viet môžeme dokázať nasledujúce tvrdenie o Fourierových koeficientoch.

Tvrdenie 2.7. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$, $m \in \mathbb{N}$ a nech $f_{(m)}(t) = f(mt)$. Potom platí:*

$$\widehat{f_{(m)}}(n) = \begin{cases} \widehat{f}(\frac{n}{m}) & \text{pre } m \mid n, \\ 0 & m \nmid n. \end{cases}$$

Dôkaz. Ak $m \mid n$, potom platí:

$$\widehat{f_{(m)}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{(m)}(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(mt) e^{-int} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi m} f(y) e^{-i\frac{n}{m}y} dy = \widehat{f}\Big(\frac{n}{m}\Big).$$

Kde predposlednú rovnosť sme získali substitúciou $mt = y$ a $dt = \frac{1}{m}dy$.
Ďalej dokážeme prípad kedy $m \nmid n$.
Vieme, že $C(\mathbb{T})$ je hustá podmnožina $L^1(\mathbb{T})$ a z Weierstrassovej vety vieme, že trigonometrické polynómy su husté v $C(\mathbb{T})$. To znamená, že pre $\varepsilon > 0$ a funkciu $f \in L^1(\mathbb{T})$ existuje funkcia $g \in C(\mathbb{T})$ a trigonometrický polynóm P, $P(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx}$ tak, že $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\|g - P\|_{C(\mathbb{T})} < \frac{\varepsilon}{2}$.
Teda

$$\|f - P\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - P\|_1 < \varepsilon,$$

pretože $\|g - P\|_1 \leq \|g - P\|_{C(\mathbb{T})}$.
Potom platí

$$\widehat{f_{(m)}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(mx) e^{-inx} dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int (f(mx) - P(mx)) e^{-inx} dx}_{I_1}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int P(mx)e^{-inx}dx}_{I_2} = I_1 + I_2.$$

Pre výrazy I_1 a I_2 platí:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(mx) - P(mx)\Big|.\left|e^{-inx}\right|dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(mx) - P(mx)\Big|dx,$$

pretože $|e^{-inx}| \leq 1$.

Substitúciou $mx = y$, $mdx = dy$ dostaneme:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi m}\Big|f(y) - P(y)\Big|\frac{1}{m}dy = ||f - P||_1 < \varepsilon$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikmx}\ e^{-inx}dx = \sum_{k=-N}^{N} a_k \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix(km-n)}dx.$$

Kde druhá rovnosť platí, pretože suma vo výraze I_2 je konečná, teda môžeme zameniť sumu a integrál.

Podľa vzťahu (2.3) platí, že

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{ix(km-n)}dx = \begin{cases} 1 & \text{pre } km - n = 0, \\ 0 & \text{pre } km - n \neq 0. \end{cases}$$

pretože $m \nmid n$ je $km - n \neq 0$, a teda $I_2 = 0$. A tým sme dokázali, že $\widehat{f_{(m)}}(n) = 0$ pre $m \nmid n$. $\square$

Definícia 2.8. Trigonometrický rad

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{int} \tag{2.6}$$

sa nazýva *Fourierovým radom* funkcie $f \in L^1(\mathbb{T})$ v *komplexnom tvare. Fourierov rad funkcie* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *v reálnom tvare* je definovaný predpisom

$$R[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt),$$

kde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ a sú definované predpisom:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int f(t)\cos(nt)dt, \qquad \textit{pre } n \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int f(t) \sin(nt) dt, \qquad \textit{pre } n \in \mathbb{N}.$$

Konjugovaný rad k radu $S[f]$ označíme symbolom $\widetilde{S}[f]$ a nazveme *konjugovaným Fourierovým radom* funkcie f.

Poznámka (Vzťah medzi Fourierovými koeficientami v reálnom a komplexnom tvare). Nech a_n a b_n sú koeficienty Fourierovho radu funkcie $f \in L^1\mathbb{T}$ v reálnom tvare. Potom pomocou Eulerových vzorcov ich môžeme vyjadriť následovne:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int f(x) e^{inx} dx + \int f(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= \widehat{f}(-n) + \widehat{f}(n), \qquad \textit{pre } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi i} \left(\int f(x) e^{inx} dx - \int f(x) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \left(\int f(x) e^{-inx} dx - \int f(x) e^{inx} dx \right) = i \Big(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \Big), \ \textit{pre } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A teda

$$a_n = \widehat{f}(-n) + \widehat{f}(n), \qquad \textit{pre } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2.7}$$

$$b_n = i \Big(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n) \Big), \qquad \textit{pre } n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

V nasledujúcom tvrdení si ukážeme ako závisí tvar Fourierovho radu na párnosti či nepárnosti príslušnej funkcie.

Tvrdenie 2.9. *Nech f je reálna funkcia, potom koeficienty a_n, b_n, ktoré sú definované Fourierovými vzorcami, sú reálne pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Ďalej platí,*

(i) Ak f je párna, potom $b_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$,

(ii) Ak f je nepárna, potom $a_n = 0$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Dôkaz. Najskôr dokážeme reálnosť koeficientov a_n a b_n. Z definície plynie, že

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

kde f je reálna funkcia podľa predpokladu a $\cos(nt) \in \mathbb{R}$ pre $t \in \mathbb{T}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pretože súčin $f(t)\cos(nt)$ je reálny, je aj koeficient a_n reálny.
Analogicky pre b_n.

Ďalej dokážeme tvrdenie (i).

Nech f je párna, tj. $f(t) = f(-t)$, potom:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-int}dt.$$

Po substitúcii $t = -u$ dostaneme:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}du = \widehat{f}(-n).$$

Teda $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ a zo vzťahu (2.8) plynie:

$$b_n = i\big(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)\big) = 0.$$

Nech f je nepárna, tj. $f(t) = -f(-t)$. Potom platí:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-int}dt$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}du = -\widehat{f}(-n).$$

Potom zo vzťahu (2.7) plynie:

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) = 0.$$

A tým je dokázané tvrdenie (ii).

$\square$

Pozrime sa teraz na niektoré vlastnosti a vzťahy Fourierových koeficientov.

Veta 2.10. *Nech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$.*

a) Pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platí $(\widehat{f+g})(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$.

b) Pre každé komplexné číslo α platí $(\widehat{\alpha f})(n) = \alpha\widehat{f}(n)$.

c) Ak $\bar{f}$ je komplexne združenou funkciou k funkcii f, potom platí

$$\widehat{\bar{f}}(n) = \overline{\widehat{f}(-n)}.$$

d) Označme $f_\tau(t) = f(t-\tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$, potom platí

$$\widehat{f_\tau}(n) = \widehat{f}(n)e^{-in\tau}.$$

e) Pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|dt = ||f||_1.$$

Dôkaz. a) Z definície Fourierových koeficientov plynie, že

$$\widehat{(f+g)}(n) = \frac{1}{2\pi} \int (f+g)(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-int}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi} \int g(t)e^{-int}dt = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n),$$

kde druhá rovnosť plynie z linearity integrálu.

b) Pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\widehat{(\alpha f)}(n) = \frac{1}{2\pi} \int (\alpha f)(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\alpha \int f(t)e^{-int}dt = \alpha\widehat{f}(n).$$

c) Nech $n \in \mathbb{Z}$, potom platí:

$$\overline{\widehat{f}(-n)} = \frac{1}{2\pi} \int \overline{f(t)e^{int}}dt = \frac{1}{2\pi} \int \overline{f(t)}e^{-int}dt = \widehat{\overline{f}}(n).$$

d) Pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$\widehat{f}(n)e^{-in\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-in(t+\tau)}dt = \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} f(u-\tau)e^{-inu}du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\tau^{2\pi+\tau} f_\tau(u)e^{-inu}du = \widehat{f_\tau}(n),$$

kde druhú rovnosť sme získali substitúciou $u = t + \tau$ a $dt = du$.

e) Nech $n \in \mathbb{Z}$, potom platí:

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi} \int f(t)e^{-int}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)e^{-int}|dt \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|dt = ||f||_1.$$

□

Z časti e) predchádzajúcej vety plynie:

Dôsledok 2.11. *Nech $f, f_j \in L^1(\mathbb{T})$, j=1,2... a $||f_j - f||_1 \to 0$.*
Potom $\widehat{f_j}$ konverguje k $\widehat{f}$ rovnomerne na $\mathbb{Z}$.

V ďalšiom dôkaze budeme potrebovať nasledujúce dve vety. Dôkaz prvej z nich možno nájsť napr. v [R, Veta 8.17] a druhej v [L, Veta 23.13].

Veta 2.12. *Funkcia f je absolútne spojitá na intervale $[a,b]$ práve vtedy, keď existuje $\varphi \in L^1\big([a,b]\big)$ tak, že*

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt + f(a), \qquad x \in [a,b].$$

Poznámka. Každá absolútne spojitá funkcia je spojitá.

Veta 2.13 (Per partes pre absolútne spojité funkcie)**.** *Nech f a g sú lokálne absolútne spojité funkcie na intervale $[a,b]$, $(a<b)$. Potom platí:*

$$\int_a^b fg' = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f'g.$$

Veta 2.14. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(0) = 0$ a definujeme funkciu*

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Potom F je spojitá, 2π-periodická a

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n), \qquad n \neq 0. \tag{2.9}$$

Dôkaz. Z Vety 2.12 plynie, že F je absolútne spojitá funkcia na $\mathbb{T}$, a teda F je spojitá. Ďalej, pretože platí

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau)d\tau = \int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau = 2\pi\widehat{f}(0) = 0,$$

je funkcia F $2\pi-$periodická.
Potom pre $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ máme

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}dt = \underbrace{\left[\frac{-F(t)e^{-int}}{2\pi in}\right]_0^{2\pi}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F'(t)\frac{e^{-int}}{in}dt}_{B},$$

kde druhú rovnosť sme získali integráciou per partes.
Na záver určíme výrazy A a B:

$$A = \frac{-1}{2\pi in}\big[F(2\pi)e^{-in2\pi} - F(0)\big] = \frac{-1}{2\pi in}\big[F(2\pi) - F(0)\big] = 0,$$

kde posledná rovnosť plynie z periodickosti F. Z derivácie integrálu podľa hornej medze dostaneme, že $F'(t) = f(t)$ s.v. a teda

$$B = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} F'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi in} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{in} \widehat{f}(n),$$

čím sme dokázali rovnosť $\widehat{F}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f}(n)$. □

Definícia 2.15. Nech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, potom definujeme *konvolúciu* funkcií f a g na $L^1(\mathbb{T})$, značíme $f * g$, predpisom

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

V nasledujúcej poznámke si uvedieme malú motiváciu k ďalšej vete, ktorá okrem iného hovorí, že práve uvedená definícia konvolúcie je korektná.

Poznámka. Nech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ a na chvíľu predpokladajme, že $f \geq 0$, $g \geq 0$. Ďalej uvažujme integrál

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{2.10}$$

Pre každé zvolené t je integrand v (2.10) merateľná funkcia s oborom hodnôt v intervale $[0, \infty]$, takže h je pomocou vzťahu (2.10) korektne definované a $0 \leq h(t) \leq \infty$.
Existujú však nejaké t, pre ktoré je $h(t) < \infty$?
Poznamenajme, že pre pevne zvolené t je integrand v (2.10) súčinom dvoch prvkov z priestoru L^1, taký súčin ale nemusí nutne ležať v L^1.

Príklad.

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{pre } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{všade inde.} \end{cases}$$

V nasledujúcej vete si však ukážeme, že $h \in L^1(\mathbb{T})$, a teda $h(t) \in \mathbb{R}$ s.v.

Veta 2.16. *Nech $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, potom pre s.v. t je funkcia $f(t-\tau)g(\tau)$ integrovateľná (ako funkcia τ na $\mathbb{T}$) tj.,*

$$\int |f(t-\tau) g(\tau)| d\tau < \infty. \tag{2.11}$$

Pre tieto t definujeme funkciu

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t-\tau) g(\tau) d\tau. \tag{2.12}$$

Potom $h \in L^1(\mathbb{T})$ *a platí*

$$||h||_1 \leq ||f||_1||g||_1 \tag{2.13}$$

a naviac platí

$$\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n) \quad \textit{pre všetky } n \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Poznámka. Skôr než dokážeme Vetu 2.16, pripomeňme si ešte dva poznatky z teórie miery, ktoré budeme v dôkaze potrebovať.

i) Nech $\mathfrak{M}$ je σ-algebra na X, nech Y a Z sú topologické priestory, nech f je merateľné zobrazenie X do Y a zobrazenie $g : Y \to Z$ je borelovské. Potom zložené zobrazenie $h = g \circ f$, $h : X \to Z$ je merateľné.

ii) Každá borelovská podmnožina $\mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky merateľná.

Dôkaz. (Vety 2.16):
Existujú borelovské funkcie f_0, g_0 tak, že $f_0 = f$ s.v. a $g_0 = g$ s.v. Integrály (2.11) a (2.12) sa pre žiadne t nezmenia, ak nahradíme funkciu f funkciou f_0 a g funkciou g_0. Preto môžeme od začiatku predpokladať, že f a g sú borelovské funkcie.
Aby sme mohli použiť Fubíniovu vetu, ukážeme najprv, že funkcia

$$F(t, \tau) := f(t - \tau)g(\tau)$$

je borelovská na $\mathbb{T}^2$.
Definujeme funkcie $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ a $\psi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}$ predpisom:

$$\varphi(t, \tau) = t - \tau; \qquad \psi(t, \tau) = \tau.$$

Potom

$$f(t - \tau) = (f \circ \varphi)(t, \tau), \qquad g(\tau) = (g \circ \psi)(t, \tau).$$

Pretože φ a ψ sú borelovské, z poznámky $i)$ plynie, že $f \circ \varphi$ a $g \circ \psi$ sú borelovské na $\mathbb{T}^2$ a to isté platí aj pre ich súčiny. A teda

$$\frac{1}{2\pi} \int \Big(\frac{1}{2\pi} \int |F(t, \tau)| dt \Big) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int |g(\tau)|.||f||_1 d\tau = ||f||_1||g||_1, \tag{2.15}$$

kde v prvej rovnosti sme využili invariantnosť Lebesgueovej miery voči posunutiu teda, že pre každé $\tau \in \mathbb{T}$ platí

$$\frac{1}{2\pi} \int |f(t - \tau)| dt = ||f||_1.$$

A teda $F \in L^1(\mathbb{T}^2)$ a z Fubíniovej vety plynie, že integrál (2.12) existuje pre skoro všetky $t \in \mathbb{T}$ a že $h \in L^1(\mathbb{T})$.

Zo vzťahu (2.15) plynie, že

$$||h||_1 = \frac{1}{2\pi}\int |h(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int \left|\frac{1}{2\pi}\int F(t,\tau)d\tau\right| dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int \Big(\frac{1}{2\pi}\int |F(t,\tau)|d\tau\Big) dt = ||f||_1||g||_1.$$

A tým je dokázaný vzťah (2.13).
Pretože

$$\widehat{h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int h(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int \Big(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau\Big)e^{-int}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int \underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)e^{-in(t-\tau)}dt\Big)}_{\widehat{f}(n)} g(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n).$$

A teda platí (2.15) a tým je dôkaz dokončený. □

Poznámka. Vzťah (2.14) môžeme zapísať v tvare $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$.

Na záver tejto kapitoly si ešte ukážeme niektoré vlastnosti konvolúcie.

Veta 2.17. *Konvolúcia na $L^1(\mathbb{T})$ je komutatívna, asociatívna a distributívna vzhľadom na sčítanie.*

Dôkaz. Najskôr dokážeme komutatívnosť. Zo substitúcie $\nu = t - \tau$ plynie, že

$$\frac{1}{2\pi}\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int f(\nu)g(t-\nu)d\nu$$

a teda $(f * g)(t) = (g * f)(t)$ pre s.v. t.
Ďalej dokážeme asociatívnosť. Nech $f_1,\ f_2,\ f_3 \in L^1(\mathbb{T})$, potom

$$\Big[(f_1 * f_2) * f_3\Big](t) = \frac{1}{2\pi}\int (f_1 * f_2)(t-\tau)f_3(\tau)d\tau$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\int f_1(t-\tau-u)f_2(u)f_3(\tau)dud\tau$$

a po substitúcii $\omega = u + \tau$ a $du = d\omega$ dostaneme:

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\int f_1(t-\omega)f_2(\omega-\tau)f_3(\tau)d\omega d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int f_1(t-\omega)\frac{1}{2\pi}\int f_2(\omega-\tau)f_3(\tau)d\tau d\omega = \Big[f_1 * (f_2 * f_3)\Big](t), \;\; pre\ s.v.\ t.$$

A na záver dokážeme distributívnosť konvolúcie vzhľadom na sčítanie.

$$\Big[f_1 * (f_2 + f_3)\Big](t) = \frac{1}{2\pi}\int f_1(t-\tau)\big(f_2+f_3\big)(\tau)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int f_1(t-\tau)f_3(\tau)d\tau$$

$$= \big(f_1 * f_2\big)(t) + \big(f_1 * f_3\big)(t), \qquad pre\ s.v.\ t.$$

□

Lemma 2.18. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$ a nech $\varphi(t) = e^{-int}$ pre $n \in \mathbb{N}$, potom*

$$(\varphi * f)(t) = \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Dôkaz.

$$(\varphi * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{in(t-\tau)}f(\tau)d\tau = e^{int}\frac{1}{2\pi}\int f(\tau)e^{-in\tau}d\tau = \widehat{f}(n)e^{int}.$$

□

Dôsledok 2.19. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$ a $k(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, potom*

$$(k * f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \widehat{f}(n)e^{int}.$$

Kapitola 3

Konvergencia v norme

V tejto kapitole zadefinujeme sumačné jadro, uvedieme pár príkladov a ich vlastnosti. Potom sa budeme zaoberať homogénnymi Banachovými priestormi a konvergenciou v ich norme. Ďalej zformulujeme a dokážeme niektoré významné tvrdenia ako napríklad Riemann-Lebesgueovo lemma, vetu o hustote trigonometrických polynómov v $L^1(\mathbb{T})$, ukážeme, že $\hat{f}$ určuje f jednoznačne a splatíme si dlh z predchádzajúcej kapitoly v podobe dôkazu Weierstrassovej vety. Najskôr však uvedieme dve dôležité vlastnosti Banachovho priestoru $L^1(\mathbb{T})$.

Lemma 3.1. *V Banchovom priestore $L^1(\mathbb{T})$ platí:*

(A-1) *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$ a $\tau \in \mathbb{T}$, potom $f_\tau \in L^1(\mathbb{T})$ a $\|f_\tau\|_1 = \|f\|_1$.*

(A-2) *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$, potom zobrazenie $\tau \mapsto f_\tau$ je spojité na $\mathbb{T}$. To znamená, že pre $f \in L^1(\mathbb{T})$ a $\tau_0 \in \mathbb{T}$ platí:*

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 = 0. \tag{3.1}$$

Dôkaz. Vzťah *(A-1)* hovorí, že normy funkcií z $L^1(\mathbb{T})$ sú invariantné voči posunutiu, čo je priamy dôsledok invariantnosti miery voči posunutiu.

Dokážeme ďalej tvrdenie *(A-2)*. Najprv si všimnime, že vzťah (3.1) platí, ak f je spojitá funkcia. A to pretože:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &= \lim_{\tau \to \tau_0} \int \Big| f(t-\tau) - f(t-\tau_0)) \Big| d\tau \\ &= \int \lim_{\tau \to \tau_0} \Big| f(t-\tau) - f(t-\tau_0) \Big| = 0. \end{aligned}$$

Kde v predposlednej rovnosti sme podľa Lebesgueovej vety zamenili limitu a integrál. Pretože f je spojitá na $\mathbb{T}$, je f na $\mathbb{T}$ ohraničená, a teda za integrovateľnú majorantu stačí zvoliť vhodnú konštantu.
Ďalej, nech f je ľubovoľná funkcia z $L^1(\mathbb{T})$ a nech $\varepsilon > 0$. Potom, pretože spojité funkcie sú husté v $L^1(\mathbb{T})$, existuje spojitá funkcia g na $L^1(\mathbb{T})$ tak, že $\|g - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. A teda platí:

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 \leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1$$

$$= \|(f-g)_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|(g-f)_{\tau_0}\|_1$$

$$= \|f - g\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g - f\|_1 < \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 .$$

A teda $\limsup_{\tau \to \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 < \varepsilon$.

□

Definícia 3.2. *Sumačné jadro* je postupnosť $\{k_n\}$ spojitých, 2π-periodických funkcií, ktoré splňujú:

(S-1) Pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí
$$\frac{1}{2\pi} \int k_n(t) dt = 1.$$

(S-2) Existuje konštanta $C > 0$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je
$$\frac{1}{2\pi} \int |k_n(t)|\, dt \leq C.$$

(S-3) Pre všetky $\delta \in (0, \pi)$ platí:
$$\lim_{n \to \infty} \int_\delta^{2\pi - \delta} |k_n(t)|\, dt = 0.$$

Jadro, pre ktoré $k_n(t) \geq 0$ pre všetky t a n, sa nazýva *nezáporné sumačné jadro.*

Poznámka. Pre nezáporné sumačné jadro je predpoklad (S-2) zbytočný.

Sumačné jadro je významným elementom v teórii konvergencie Fourierových radov. Skôr než sa však začneme zaoberať spomínanou konvergenciou, uvedieme si ešte pár tvrdení a viet ktoré budeme k tomu potrebovať.

Poznámka. Nasledujúce lemma je uvedené za podmienky, že uvažujeme vektorový integrál. Pripomeňme si preto ešte najskôr definíciu Riemannovho integrálu.

Definícia 3.3. Nech $[a,b]$ je uzavretý interval. Potom konečnú postupnosť bodov $\{x_i\}_{i=0}^n$ nazveme *delením intervalu* $[a,b]$, ak

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a značíme $D = \{x_i\}_{i=0}^n$. Normu delenia $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ definujeme predpisom

$$\nu(D) := \max_i \{x_i - x_{i-1}\}.$$

Ďalej nech B je Banachov priestor a nech $f : [a,b] \to B$ je spojitá funkcia na $[a,b]$. Potom definujeme *Riemannov integrál* I funkcie f na intervale $[a,b]$, ak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé delenie $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ s normou $\nu(D) < \delta$ a pre každé $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, platí

$$\left\| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\|_B < \varepsilon$$

a značí sa symbolom $\int_a^b f(x)dx$.

Lemma 3.4. *Nech B je Banachov priestor s normou $\|.\|_B$, φ je spojitá funkcia na $\mathbb{T}$ s oborom hodnôt v B a $\{k_n\}$ je sumačné jadro. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau = \varphi(0).$$

Dôkaz. Zvoľme $\delta \in (0,\pi)$, potom z vlastnosti (S-1) dostaneme:

$$I := \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau)\varphi(\tau)d\tau - \varphi(0) = \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau)\Big(\varphi(\tau) - \varphi(0)\Big)d\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)\Big(\varphi(\tau) - \varphi(0)\Big)d\tau}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(\tau)\Big(\varphi(\tau) - \varphi(0)\Big)d\tau}_{I_2}.$$

Potom

$$\|I_1\|_B = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau)\Big(\varphi(\tau) - \varphi(0)\Big)d\tau \right\|_B \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)|.||\varphi(\tau) - \varphi(0)||_B d\tau$$

$$\le \max_{|\tau|\le\delta} \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \, \|k_n\|_1,$$

$$\begin{aligned}|I_2|_B &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} k_n(\tau)\big(\varphi(\tau) - \varphi(0)\big) d\tau \right\|_B \\ &\leq \max \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |k_n(\tau)|\, d\tau.\end{aligned}$$

A pretože φ je spojitá funkcia na $\mathbb{T}$, je $\max_\tau \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B < \infty$.
Zvoľme $\varepsilon > 0$. K nemu nájdeme $\delta > 0$ tak, že $||\varphi(\tau) - \varphi(0)||_B < \varepsilon$, pre $|\tau| \leq \delta$. Z vlastnosti (S-2) vieme, že existuje konštanta $C > 0$ tak, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $||k_n||_1 \leq C$.
Z predchádzajúcich úvah plynie, že $\|I_1\|_B < C\varepsilon$.
Ak pre dané δ použijeme vlastnosť (S-3), dostaneme $\|I_2\|_B \to 0$ pre $n \to \infty$.
A teda

$$\|I\|_B \leq \|I_1\|_B + \|I_2\|_B < \varepsilon(C+1)$$

pre n dostatočne veľké. □

Poznámka. Ak pre $f \in L^1(\mathbb{T})$ položíme $\varphi(\tau) = f_\tau$, potom podľa (A-1) a (A-2) je φ spojitá funkcia na $\mathbb{T}$, s hodnotami v $L^1(\mathbb{T})$ a $\varphi(0) = f$. Aplikáciou Lemmatu 3.4 dostaneme nasledujúcu vetu.

Veta 3.5. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$ a $\{k_n\}$ je sumačné jadro, potom*

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau \tag{3.2}$$

v $L^1(\mathbb{T})$ norme.

Nasledujúce lemma hovorí o konvolúcii spojitej funkcie a funkcie z $L^1(\mathbb{T})$

Lemma 3.6. *Nech k je spojitá funkcia na $\mathbb{T}$ a nech $f \in L^1(\mathbb{T})$, potom*

$$\frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau = k * f. \tag{3.3}$$

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že f je spojitá funkcia na $\mathbb{T}$, teda f je na $\mathbb{T}$ integrovateľná. Zvoľme $\varepsilon > 0$. K nemu podľa definície Riemannovho integrálu nájdeme $\delta_1 > 0$ tak, že pre ľubovoľné delenie $D = \{\tau_j\}_{j=0}^n$ intervalu $[a, b]$ s normou $\nu(D) < \delta_1$ platí:

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi} k(\tau_j) f_{\tau_j} (\tau_j - \tau_{j-1})}_{A_j} \right\|_1 < \varepsilon.$$

Pretože funkcie f a k sú spojité na $\mathbb{T}$, existuje $\delta_2 > 0$ a $\delta_3 > 0$ tak, že:

$$|k(t_1) - k(t_2)| < \varepsilon, \qquad pre\ |t_1 - t_2| < \delta_2,$$

$$|f(t_3) - f(t_4)| < \varepsilon, \qquad pre\ |t_1 - t_2| < \delta_3.$$

Položme $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Ďalej z definície konvolúcie dostaneme:

$$(k * f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int k(\tau)f(t-\tau)d\tau = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} k(\tau)f(t-\tau)d\tau}_{B_j}.$$

Ukážeme, že $||\sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{j=1}^{n} A_j||_1 < \varepsilon$.
Počítajme:

$$||B_j - A_j||_1 = \frac{1}{2\pi}\int \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} k(\tau)f(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi}k(\tau_j)f_{\tau_j}(t)\big(\tau_j - \tau_{j-1}\big)\right| dt,$$

kde integrand si môžeme upraviť následovne:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} k(\tau)f(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi}k(\tau_j)f_{\tau_j}(t)\big(\tau_j - \tau_{j-1}\big)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Big(k(\tau) - k(\tau_j)\Big)f(t-\tau)d\tau}_{X(t)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2\pi}k(\tau_j)\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f(t-\tau)d\tau - \frac{1}{2\pi}k(\tau_j)f_{\tau_j}(t)\big(\tau_j - \tau_{j-1}\big)}_{Y(t)} := X(t) + Y(t).$$

Výrazy $X(t)$ a $Y(t)$ odhadneme následovne:

$$|X(t)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \underbrace{\Big|k(\tau) - k(\tau_j)\Big|}_{<\varepsilon} . \Big|f(t-\tau)\Big| d\tau < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} |f(t-\tau)|d\tau.$$

$$|Y(t)| = |k(\tau_j)|.\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \big(f_\tau(t) - f_{\tau_j}(t)\big)d\tau\right| \leq |k(\tau_j)|\frac{1}{2\pi}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \underbrace{\Big|f_\tau(t) - f_{\tau_j}(t)\Big|}_{<\varepsilon} d\tau$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi}|k(\tau_j)|(\tau_j - \tau_{j-1}).$$

Položme $C := \max\{|k(\tau)|, \tau \in \mathbb{T}\} + M$, kde $|f(t-\tau)| < M$, pre každé $t \in \mathbb{T}$.
Potom platí:

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} B_j - \sum_{j=1}^{n} A_j\right|\right|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\left|A_j - B_j\right|\right|_1 < \sum_{j=1}^{n} \frac{C\varepsilon}{2\pi}(\tau_j - \tau_{j-1}) = C\varepsilon.$$

A teda lemma je dokázané pre spojité funkcie.
Ďalej nech f je ľubovoľná funkcia na $L^1(\mathbb{T})$ a nech $\varepsilon > 0$. Potom, pretože spojité funkcie sú husté v $L^1(\mathbb{T})$, existuje g spojitá funkcia na $\mathbb{T}$ tak, že $\|f-g\|_1 < \varepsilon$.
Z prvej časti dôkazu vieme, že (3.3) platí pre g a teda:

$$\frac{1}{2\pi}\int k(\tau) f_\tau d\tau - k * f = \frac{1}{2\pi}\int k(\tau)(f-g)_\tau d\tau + \frac{1}{2\pi}\int k(\tau) g_\tau d\tau - k * f$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int k(\tau)(f-g)_\tau d\tau + k*(g-f) := I,$$

kde druhá rovnosť plynie z distributívnosti konvolúcie.
Ďalej platí:

$$\|I\|_1 \leq \frac{1}{2\pi}\int |k(\tau)|.||(f-g)_\tau||_1 d\tau + ||k*(g-f)||_1$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int |k(\tau)|.||(f-g)_\tau||_1 d\tau + ||k||_1.||g-f||_1.$$

V dôsledku čoho platí:

$$\left|\left|\frac{1}{2\pi}\int k(\tau) f_\tau d\tau - k*f\right|\right|_1 \leq 2\,\|k\|_1\,\varepsilon.$$

□

Poznámka. Ak použijeme Lemma 3.6 môžeme vzťah (3.2) vyjadriť ako

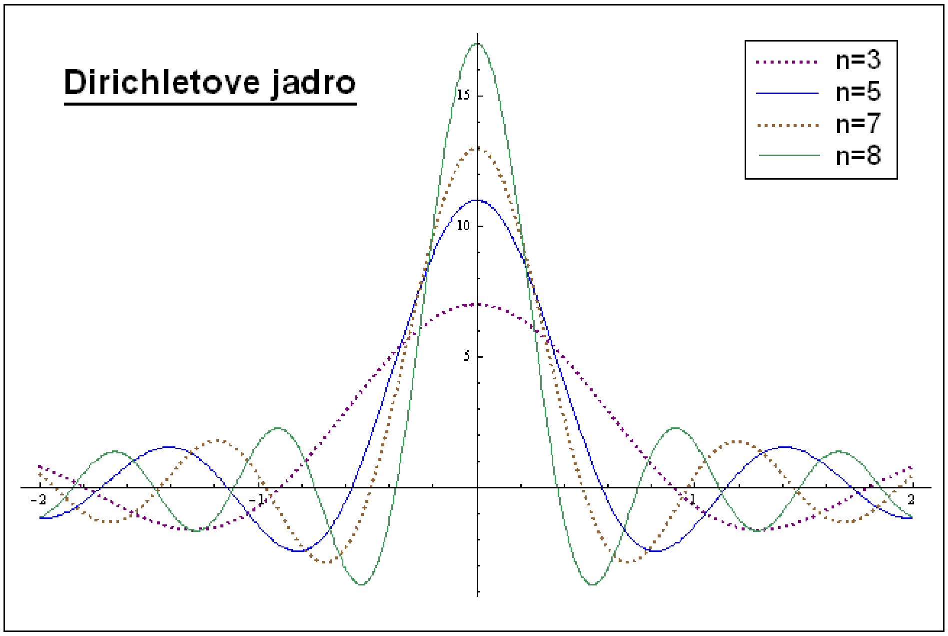
$$f = \lim_{n\to\infty} k_n * f \tag{3.4}$$

v L^1-norme.

Teraz si zadefinujeme dve známe sumačné jadrá, sformulujeme a dokážeme si niektoré ich vlastnosti a tým si pripravíme pôdu na dokázanie významných tvrdení a viet ako vetu o jednoznačnosti Fourierových koeficientov, Riemann-Lebesgueovo lemma či vetu o hustote trigonometrických polynómov v $L^1(\mathbb{T})$.

Definícia 3.7. *Dirichletove jadro* označujeme symbolom D_n a definujeme nasledujúcim predpisom:

$$D_n(t) := \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$



Lemma 3.8. *Nech D_n je Dirichletove jadro a nech $t \neq 0$, potom platí*

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}.$$

Dôkaz. Pre konečný geometrický rad a pre $r \neq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Špeciálne platí:

$$\sum_{k=-n}^{n} r^k = r^{-n}\frac{1-r^{2n+1}}{1-r}$$

a po vynásobení čitateľa aj menovateľa výrazom $r^{-1/2}$ dostaneme:

$$\sum_{k=-n}^{n} r^k = \frac{r^{-n-1/2}}{r^{-1/2}}.\frac{1-r^{2n+1}}{1-r} = \frac{r^{-n-1/2}-r^{n+1/2}}{r^{-1/2}+r^{1/2}}.$$

V našom prípade, tj. pre $r = e^{it}$, dostaneme:

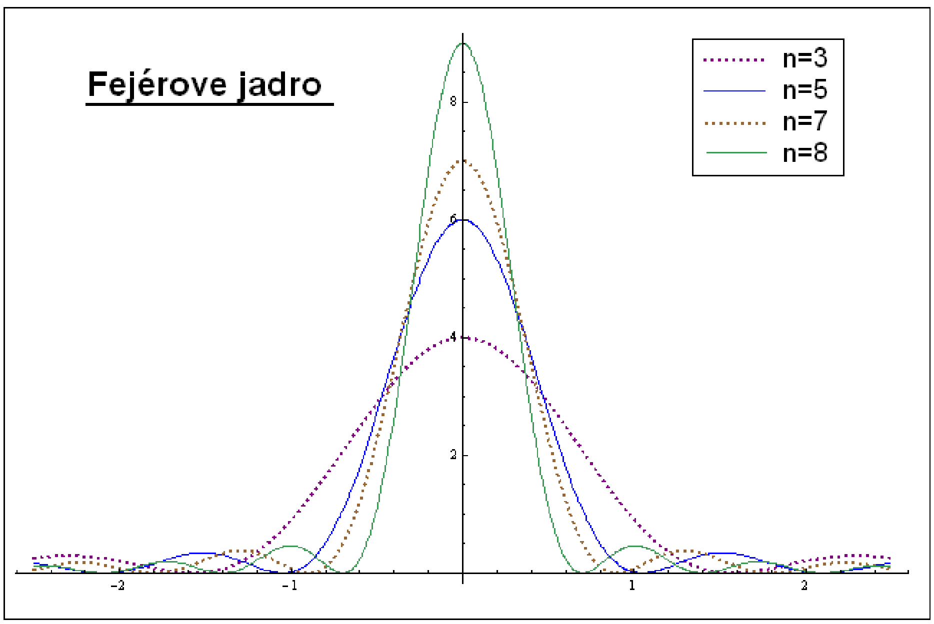
$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{-(n+1/2)it} - e^{(n+1/2)it}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} = \frac{-2i.\sin((n+\frac{1}{2})t)}{-2i.\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

□

Poznámka. Dirichletove jadro nie je sumačné jadro v zmysle Definície 3.2. Pretože nesplňuje (S-2).

Definícia 3.9. *Féjerove jadro* označujeme symbolom K_n a definujeme predpisom:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t). \tag{3.5}$$



Lemma 3.10. *Pre Féjerove jadro platí*

$$(i) \qquad K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n}\Big(1 - \frac{|j|}{n+1}\Big)e^{ijt}, \tag{3.6}$$

$$(ii) \qquad K_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2. \tag{3.7}$$

Dôkaz. V dôkaze časti (i) výjdeme z výrazu (3.5):

$$(n+1)K_n(t) = \sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} e^{ijt} = \sum_{j=-n}^{n} (n+1-|j|)e^{ijt}.$$

Odkiaľ plynie, že

$$K_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|j|}{n+1}\Big) e^{ijt}.$$

V dôkaze časti (ii) vyjdeme zo vzťahu (3.6) a použijeme nasledujúcu rovnosť:

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos(t)) = -\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}.$$

Potom priamym výpočtom jednotlivých členov súčinu dostaneme:

$$\left(-\frac{1}{4}e^{-it} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{it}\right) \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{4}e^{-i(n+1)t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i(n+1)t}\right).$$

□

Lemma 3.11. *Féjerove jadro je nezáporné sumačné jadro v zmysle Definície 3.2.*

Dôkaz. Najprv ukážeme, že K_n spĺňuje vlastnosť (S-1), teda že $\frac{1}{2\pi}\int K_n(\tau)d\tau = 1$. Vyjdeme zo vzťahu (3.5) a dosadíme za Dirichletove jadro:

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} e^{imt}.$$

Potom integráciou $K_n(t)$ dostaneme

$$\frac{1}{2\pi}\int K_n(\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} e^{im\tau}\right) d\tau$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=-k}^{k} \left(\frac{1}{2\pi}\int e^{im\tau} d\tau\right).$$

Zo vzťahu (2.3) plynie, že

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{im\tau}d\tau = \begin{cases} 1 & \text{pre } m = 0, \\ 0 & \text{pre } m \neq 0. \end{cases}$$

A teda
$$\frac{1}{2\pi}\int K_n(\tau)d\tau = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$
Ďalej zo vzťahu (3.7) okamžite plynie, že $K_n(\tau)$ je kladné.

V dôkaze vlastnosti (S-3) vyjdeme opäť zo vzťahu (3.7). Nech $0 < \delta < \pi$, potom pre $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ platí:
$$\frac{1}{\sin^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}.$$
A teda
$$0 \leq K_n(t) \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}, \qquad \textit{pre } t \in [\delta, 2\pi - \delta],$$
kde horný odhad $K_n(t)$ konverguje rovnomerne do 0 pre $n \to \infty$.

A teda $\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t)dt \to 0$ pre $n \to \infty$.

□

Definícia 3.12. Označme symbolom $S_n(f)$ *n-tý čiastočný súčet* Fourierovho radu $S[f]$ a symbolom $\sigma_n(f)$ *n-tý Cesàrovský súčet*, kde
$$S_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)e^{ijt}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_n(f) := \frac{1}{n+1}(S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)). \tag{3.9}$$

Pretože $\sigma_n(f)$ je aritmetickým priemerom z čiastočných súčtov $S_n(f)$, bude sa nám v úvahách o konvergencii hodiť nasledujúca veta:

Veta 3.13 (O konvergencii aritmetických priemerov)**.** *Nech B je Banachov priestor s normou $||.||_B$ a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť v B. Ak $x_n \to y$, kde $y \in B$, potom $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \to y$ v norme B.*

Dôkaz. Zvoľme $\varepsilon > 0$. K nemu nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre každé $n > n_0$ platí $||x_n - y||_B < \varepsilon$. Potom
$$\left|\left|\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) - y\right|\right|_B = \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y)\right|\right|_B \leq \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_0}(x_i - y)\right|\right|_B$$
$$+ \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}(x_i - y)\right|\right|_B \leq \frac{1}{n}\left|\left|\sum_{i=1}^{n_0}(x_i - y)\right|\right|_B + \frac{1}{n}\sum_{i=n_0+1}^{n}\underbrace{||(x_i - y)||_B}_{<\varepsilon}$$

$$< \frac{C}{n} + \frac{n-(n_0+1)\varepsilon}{n} \to \varepsilon \qquad \textit{pre } n \to \infty.$$

A teda $\limsup_{n\to\infty} \left|\left|\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)-y\right|\right|_B < \varepsilon.$ □

V nasledujúcej poznámke si ukážeme niektoré vlastnosti $S_n(f)$ a $\sigma_n(f)$.

Poznámka. Z Dôsledku 2.19 plynú nasledujúce tvrdenia:

i) $S_n(f) = D_n * f$, tj.:

$$S_n(f,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)D_n(\tau)d\tau.$$

ii) $\sigma_n = K_n * f$, čo možno odvodiť aj priamym výpočtom:

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)D_k(\tau)d\tau\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(\tau)\right)d\tau\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-\tau)K_n(\tau)d\tau = (K_n * f)(t).\end{aligned}$$

iii) Z Lemmatu 3.10 a z Dôsledku 2.19 plynie:

$$\sigma_n(f,t) = \sum_{j=-n}^{n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)\widehat{f}(j)e^{ijt}. \tag{3.10}$$

Konečne nastal čas, aby sme uviedli a dokázali sľúbené tvrdenia a vety.

Tvrdenie 3.14. *Trigonometrické polynómy su husté v $L^1(\mathbb{T})$.*

Dôkaz. Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$. Chceme ukázať, že potom existuje postupnosť trigonometrických polynómov, ktoré konvergujú k f v $L^1(\mathbb{T})$. Stačí ak si uvedomíme, že $\sigma_n(f)$ je trigonometrický polynóm a že podľa vzťahu (3.4) platí, že $\sigma_n \to f$ v $L^1(\mathbb{T})$. □

Tvrdenie 3.15. *Keď Fourierov rad $S[f]$ konverguje v $L^1(\mathbb{T})$ (tzn. $S_n(f)$ konverguje pre $n\to\infty$) je jeho limitou nevyhnutne f.*

Dôkaz. Plynie z predchádzajúceho tvrdenia, pretože $\sigma_n(f)$ je aritmetickým prie-merom z čiastočných súčtov $S_n(f)$ a z vety o kovergencii aritmetických priemerov. □

Veta 3.16 (Veta o jednoznačnosti)**.** *Nech* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *a nech* $\widehat{f}(n) = 0$ *pre každé* n*. Potom* $f = 0$*.*

Dôkaz. Zo vzťahu (3.10) plynie, že $\sigma_n(f) = 0$ pre každé $n \in \mathbb{Z}$. Pretože $\sigma_n(f) \to f$ platí, že $f = 0$. □

Ekvivalentným tvarom vety o jednoznačnosti je nasledujúca veta:

Veta 3.17. *Nech* $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ *a nech* $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ *pre každé* $n \in \mathbb{Z}$*, potom* $f = g$*.*

Veta 3.18 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** *Nech* $f \in L^1(\mathbb{T})$*, potom*

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Dôkaz. Z Tvrdenia 3.14 vieme, že trigonometrické polynómy sú husté v $L^1(\mathbb{T})$. To znamená že pre každé $\varepsilon > 0$ a $f \in L^1(\mathbb{T})$ existuje trigonometrický polynóm P tak, že $\|f - P\|_1 < \varepsilon$.
Ak $|n| >$ (stupeň P), potom

$$|\widehat{f}(n)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right| \le \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - P(t))e^{-int}dt\right|$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt\right| \le \|f - P\|_1 < \varepsilon.$$

Kde predposledná nerovnosť platí, pretože $|n| >$ (stupeň P) a zo vzťahu (2.3) plynie, že

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)e^{-int}dt\right| = 0.$$

A teda $\widehat{f}(n) \to 0$ pre $n \to \pm\infty$. □

Ďalej si zadefinujeme homogénny Banachov priestor, uvedieme pár príkladov, dokážeme si niektoré jeho vlastnosti a pozrieme sa na konvergenciu v norme tohoto priestoru.

Definícia 3.19. *Homogénny Banachov priestor* B na $\mathbb{T}$ je lineárny podpriestor $L^1(\mathbb{T})$ s normou $\|.\|_B \ge \|.\|_1$ a s nasledujúcimi vlastnosťami:

(H-1) Keď $f \in B$ a $\tau \in \mathbb{T}$, potom $f_\tau \in B$ a $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$, kde $f_\tau(t) = f(t - \tau)$.

(H-2) Pre každé $f \in B$, $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$ platí $\lim_{\tau\to\tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0$.

Poznámka. i) Vlastnosť (H-1) hovorí, že normy funkcií $f \in B$ sú invariantné voči posunutiu, a (H-2) hovorí o spojitosti tohoto posunutia.

ii) Vlastnosť (H-2) môžeme zjednodušiť, ak budeme namiesto spojitosti v každom bode $\tau_0 \in \mathbb{T}$ požadovať spojitosť v jednom konkrétnom bode, napr. $\tau_0 = 0$, potom z (H-1) plynie:

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|.$$

iii) Z metódy dôkazu (A-2) plynie, že ak máme priestor B splňujúci (H-1) a chceme ukázať že splňuje (H-2), stačí overiť spojitosť posunutia na hustej podmnožine B. Podobné tvrdenie nám dáva nasledujúce lemma.

Lemma 3.20. *Nech $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ je Banachov priestor splňujúci (H-1). Označme B_c množinu všetkých $f \in B$ takých že zobrazenie $\tau \mapsto f_\tau$ je spojitá funkcia s oborom hodnôt v B. Potom B_c je uzavretý podpriestor B.*

Poznámka. Nasledujúce priestory sú homogénne Banachove priestory.

a) $C(\mathbb{T})$ -priestor všetkých spojitých, 2π-periodických funkcií s normou

$$\|f\|_\infty = \max_t |f(t)|.$$

b) $C^n(\mathbb{T})$, (podmnožina $C(\mathbb{T})$), -priestor všetkých n-krát diferencovateľných funkcií s normou

$$\|f\|_{C^n} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \max_t |f^{(j)}(t)|.$$

c) $L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, priestor všetkých funkcií f, pre ktoré platí: $\int |f(t)|^p dt < \infty$ s normou

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\frac{1}{2\pi} \int |f(t))|^p dt\Big)^{1/p}.$$

Pretože $\mathbb{T}$ je množina konečnej miery, je $L^p(\mathbb{T})$ podpriestorom $L^1(\mathbb{T})$.

Dôkaz. Vlastnosť (H-1) je zrejmá pre všetky tri príklady. Dokážme teda vlastnosť (H-2). Pretože spojité funkcie na $\mathbb{T}$ sú rovnomerne spojité, tzn., že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre každé $\tau, \tau_0 \in \mathbb{T}$ také, že $|\tau - \tau_0| < \delta$ platí že $|f(\tau) - f(\tau_0)| < \varepsilon$. Potom platí:

$$||f_\tau - f_{\tau_0}||_\infty = \sup_t |f_\tau - f_{\tau_0}| < \varepsilon, \qquad \textit{pre } |\tau - \tau_0| < \delta.$$

A teda vlastnosť (H-2) je splnená pre $f \in C(\mathbb{T}), (C^n(\mathbb{T}))$.

Dôkaz vlastnosti (H-2) pre priestor $L^p(\mathbb{T})$ je analogický dôkazu (A-2).

K dokončeniu dôkazu ostáva ukázať, že $||.||_B \geq ||.||_1$.

Pre priestor $C(\mathbb{T}), (C^n(\mathbb{T}))$, daná nerovnosť plynie priamo z definície noriem, pretože

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| dt \leq \max_t |f(t)| = ||f||_\infty.$$

A k dokázaniu nerovnosti $||f||_p \geq ||f||_1$ použijeme nasledujúci odhad, ktorý odvodíme pomocou Hölderovej nerovnosti:

$$\int |f| \leq \left(\int |1|^q\right)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = (2\pi)^{1/q} \left(\int |f|^p\right)^{1/p},$$

kde $p, q \in (1, \infty)$ a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A teda

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/q} \int |f| \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p}.$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} ||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f|^p\right)^{1/p} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p} \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \\ \geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/p+1/q} \int |f| &= \frac{1}{2\pi} \int |f| = ||f||_1. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Príkladom nehomogénneho Banachovho priestoru je $L^\infty(\mathbb{T})$, priestor tvorený všetkými essenciálne ohraničenými funkciami na $\mathbb{T}$.

Povieme, že f je essenciálne ohraničená na $\mathbb{T}$, ak existuje konštanta $M > 0$ tak, že $|f(t)| < M$ pre μ-s.v. $t \in \mathbb{T}$. Normu tejto funkcie definujeme ako najmenšie zo všetkých takých M a značíme $ess \sup f$, tj.

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|.$$

Priestor $L^\infty(\mathbb{T})$ nie je homogénnym Banachovým priestorom, pretože hoci splňuje (H-1), nesplňuje (H-2).

Dôkaz. Najprv ukážeme, že je splnená podmienka (H-1).

Nech $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, tj. f je essenciálne ohraničená, tj. existuje $M > 0$ tak, že $|f(t)| < M$

pre μ-s.v. $t \in \mathbb{T}$. A nech $\tau \in \mathbb{T}$.
Potom, pretože $t - \tau =: u \in \mathbb{T}$ a $|f(u)| < M$, platí, že $f_\tau \in L^\infty(\mathbb{T})$ a

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| = ess \sup_{u \in \mathbb{T}} |f(u)| = \|f_\tau\|_\infty .$$

Ďalej ukážeme, že neplatí (H-2).
Položme $f := \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}$, potom $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Nech $\tau_0 = 0$, potom platí:

$$||f_\tau - f||_\infty = 1, \qquad \textit{pre každé } \tau \neq 0.$$

□

V nasledujúcej vete zovšeobecníme Vetu 3.5 pre homogénny Banachov priestor na $\mathbb{T}$.

Veta 3.21. *Nech B je homogénny Banachov priestor na $\mathbb{T}$, nech $f \in B$ a $\{k_n\}$ je sumačné jadro. Potom*

$$\|k_n * f - f\|_B \to 0 \qquad \text{pre } n \to \infty.$$

Dôkaz. Pretože $\|.\|_B \geq \|.\|_{L^1}$ a B je lineárny podpriestor $L^1(\mathbb{T})$ platí, že integrál $\frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau$ s oborom hodnôt v B je rovnaký ako ten istý integrál s oborom hodnôt v $L^1(\mathbb{T})$, pre ktorý podľa Lemmatu 3.6 platí, že $\frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau = k_n * f$. Dôkaz tvrdenia potom plynie z Lemmatu 3.4, tj.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f(t - \tau) d\tau = f(t).$$

□

Veta 3.22. *Nech B je homogénny Banachov priestor na $\mathbb{T}$. Potom trigonometrické polynómy sú všade v B husté.*

Dôkaz. Z Vety 3.21 plynie, že pre každé $f \in B$ platí, že $\sigma_n(f) \to f$ v norme B. □

Dôsledok 3.23 (Weierstrassova veta pre 2π-periodické funkcie)**.** *Každú spojitú 2π-periodickú funkciu možno rovnomerne aproximovať trigonometrickým polynómom.*

Na záver tejto kapitoly si ešte ukážeme dve zaujímavé tvrdenia a definujeme si ďalšie dve sumačné jadrá.

Tvrdenie 3.24. *Nech B je Banachov priestor na $\mathbb{T}$ splňujúci (H-1). Potom B_c je uzáver množiny trigonometrických polynómov v B.*

Dôkaz. Označme P_B množinu všetkých trigonometrických polynómov v B.
Potom z Lemmatu 3.20 vieme, že B_c je uzavretý podpriestor Banachovho priestoru B splňujúceho podmienku (H-1). Ďalej, pretože B_c je tvorený všetkými funkciami $f \in B$ takými, že zobrazenie $\tau \mapsto f_\tau$ je spojitá funkcia s oborom hodnôt v B, je pre funkcie $f \in B_c$ splnená aj podmienka (H-2). Teda B_c je homogénnym Banachovým priestorom na $\mathbb{T}$ a môžeme naň aplikovať Lemma 3.22, z ktorého plynie, že trigonometrické polynómy sú husté v B_c. A teda $B_c = \overline{P}_B$. □

Tvrdenie 3.25. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$ a nech operátor $F : L^1 \to L^1$ je definovaný predpisom $F : g \mapsto f * g$. Potom $\|F\|_1 = \|f\|_1$.*

Dôkaz. Norma operátora F je definovaná ako

$$\|F\| := \sup \{\|F(g)\| : \|g\| \leq 1\}$$

a teda pre $g \in L^1(\mathbb{T})$ také, že $\|g\|_1 \leq 1$ platí:

$$\|F\|_1 \leq \|F(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \leq \|f\|_1 .$$

Kde druhá nerovnosť plynie zo vzťahu (2.13).
Ďalej vieme, že $K_n \in L^1(\mathbb{T})$ a $\|K_n\|_1 = 1$ a teda

$$\|F\| = \|F\| \|K_n\| \geq \|F(K_n)\| = \|f * K_n\| .$$

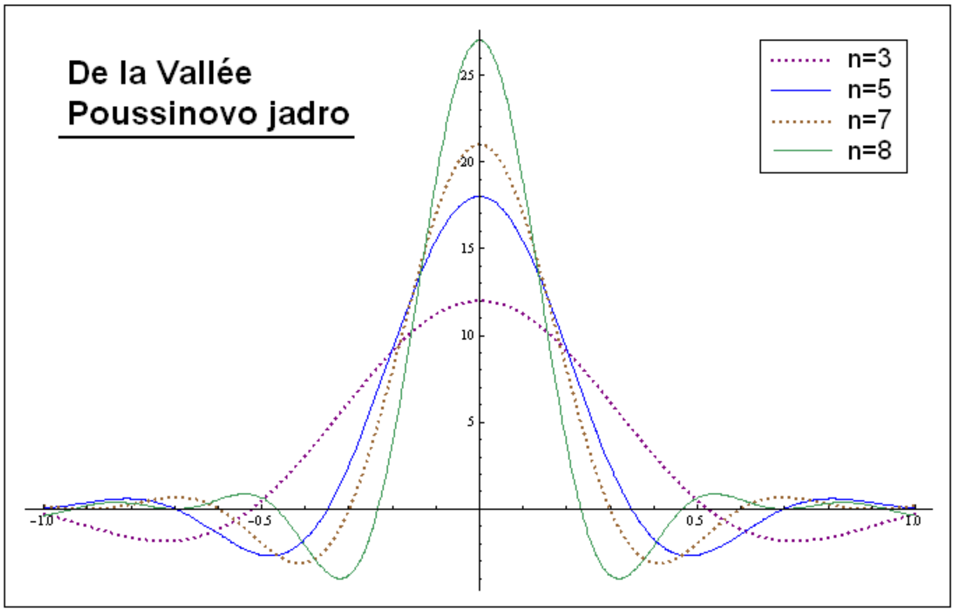
Potom zo vzťahu (3.4) plynie, že $\|K_n * f\|_1 \to \|f\|_1$ a to pretože

$$\Big| ||f||_1 - ||K_n * f||_1 \Big| \leq ||f - K_n(f)||_1 < \varepsilon.$$

A teda platí, že $\|F\| \geq \|f\|_1$. □

Definícia 3.26. *De la Vallée Poussinovo jadro* označujeme symbolom V_n a definujeme nasledujúcim predpisom:

$$V_n(t) = 2K_{2n+1}(t) - K_n(t). \tag{3.11}$$



Poznámka. Platnosť (S-1), (S-2) a (S-3) plynie priamo zo vzťahu (3.11) a z vlastností K_n. Ďalej platí, že V_n je trigonometrický polynóm stupňa $(2n+1)$ a $\widehat{V_n}(j) = 1$ pre $|j| \leq n+1$.
To býva užitočné, keď chceme aproximovať funkciu f polynómom, ktorý ma rovnaké Fourierové koeficienty ako f na predpísanom intervale.

Definícia 3.27. *Poissonove jadro* označujeme symbolom $P(r,t)$, kde $0 \leq r < 1$ a definujeme nasledujúcim predpisom:

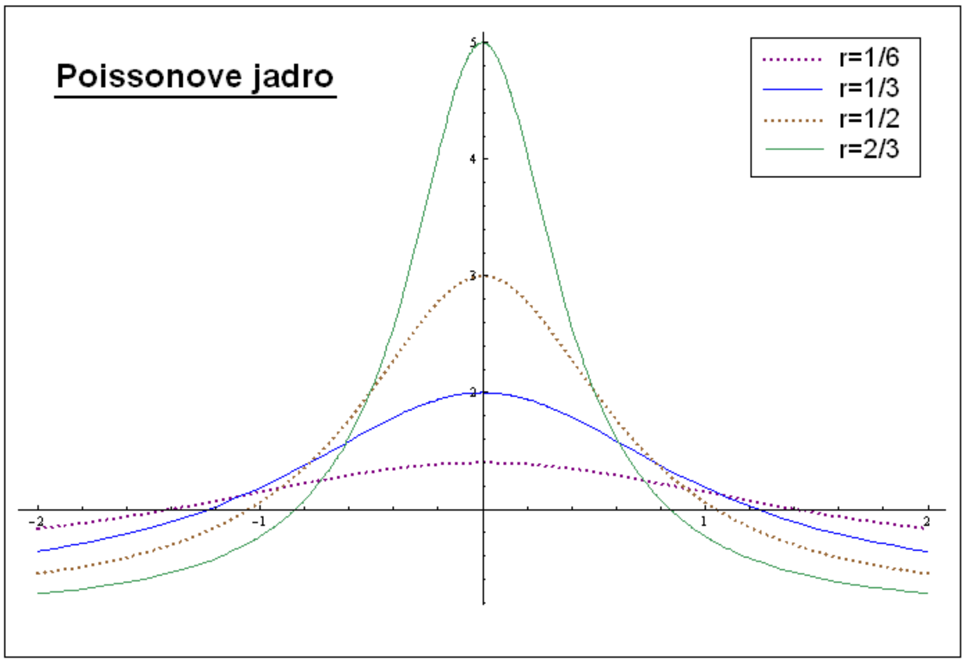
$$P(r,t) = 1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos(jt) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}. \tag{3.12}$$

Poznámka. V prípade Poissonovho jadra nahradíme vo vzťahu (S-3) " $\lim_{n\to\infty}$ " predpisom " $\lim_{r\to 1-}$ ".

Poznámka. Platí:

- $P(r,t)$ je klesajúca funkcia pre $0 \leq t \leq \pi$.
- Poissonove jadro na rozdiel od Féjerovho jadra nie je polynomiálne.
- Z dôsledku 2.19 plynie, že

$$P(r,t) * f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) r^{|n|} e^{int}.$$


Poissonove jadro
r=1/6
r=1/3
r=1/2
r=2/3
5
4
3
2
−2
−1
1
2

Kapitola 4

Bodová konvergencia

V predchádzajúcej kapitole sme ukázali, že keď $f \in L^1(\mathbb{T})$, potom $\sigma_n(f)$ konverguje k f v topológii každého homogénneho Banachovho priestoru, ktorý obsahuje f. Špeciálne, keď $f \in C(\mathbb{T})$, potom $\sigma_n(f)$ konverguje k f rovnomerne. Avšak, ak f nie je spojitá, nemôžeme odvodiť bodovú konvergenciu $\sigma_n(f)$ z konvergenicie v norme a ani nemôžeme spájať limitu $\sigma_n(f, t_0)$, ak existuje, s $f(t_0)$. Preto, keď chceme preskúmať bodovú konvergenciu $\sigma_n(f)$, musíme zvoliť iný prístup a ten si ukážeme v tejto kapitole.

Poznámka. Pretože v tejto kapitole budeme pojednávať o bodovej konvergencii funkcií, musíme rozlišovať medzi priestorom $\mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ (priestorom lebesgueovsky merateľných funkcií na $\mathbb{T}$) a $L^1(\mathbb{T})$ (priestorom tried navzájom ekvivalentných prvkov). V ďalšiom texte budeme namiesto týchto dvoch priestorov používa len jeden priestor značený L^1, ktorého prvkami budú funkcie.

Veta 4.1 (Féjerova veta)**.** *Nech* $f \in L^1(\mathbb{T})$.

a) Predpokladajme, že $\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h)+f(t_0-h)\Big)$ *existuje (môže byť aj* $\pm\infty$*), potom*

$$\sigma_n(f, t_0) \to \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\Big(f(t_0+h)+f(t_0-h)\Big). \tag{4.1}$$

Špeciálne, ak je f *spojitá v bode* t_0*, potom* $\sigma_n(f, t_0) \to f(t_0)$.

b) Ak je f *spojitá v každom bode otvoreného intervalu* I*, potom* $\sigma_n(f, t) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(t)$ *na* I.

Poznámka. Dôkaz Féjerovej vety bude založený na skutočnosti, že $\{K_n(t)\}$ je nezáporné sumačné jadro s nasedujúcimi vlastnosťami:

i) Pre $0 < \delta < \pi$ platí:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{\delta<t<2\pi-\delta} K_n(t)\Big) = 0. \tag{4.2}$$

ii) Pre $t \in \mathbb{T}$ platí

$$K_n(t) = K_n(-t). \tag{4.3}$$

iii) Pre $\delta \in (0,\pi)$ platí

$$\int_0^\delta K_n(t)dt \le \pi.$$

Kde posledná vlastnosť plynie zo vzťahu (S-1) a (4.3), pretože

$$\int_0^\delta K_n(t)dt \le \int_0^\pi K_n(t)dt = \pi.$$

Poznámka. Tvrdenie vety (4.1) sa nezmení, ak $\sigma_n(f)$ nahradíme $k_n * f$, kde $\{k_n\}$ je kladné sumačné jadro splňujúce (4.2) a (4.3).

Dôkaz. (Vety 4.1). Najskôr dokážeme tvrdenie a). Označme

$$\check{f}(t_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)+f(t_0-h)}{2}$$

a predpokladajme, že $\check{f}(t_0) < \infty$. Pre $\check{f}(t_0) = \pm\,\infty$ sa tvrdenie ukáže podobne.
Počítajme

$$\sigma_n(f,t_0) - \check{f}(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau}_{I_2}.$$

Potom

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\Big(f(t_0+\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} K_n(\tau)\Big[\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\Big]d\tau,$$

pričom v predposlednej rovnosti sme využili vlastnosť (4.3).
Zvoľme $\varepsilon > 0$. K nemu nájdeme $\delta > 0$ tak malé, že pre každé $|\tau| < \delta$ platí

$$\left| \frac{f(t_0 + \tau) + f(t_0 - \tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| < \varepsilon \tag{4.4}$$

a n_0 tak veľké, že pre $n > n_0$ platí

$$\sup_{\delta \le \tau \le 2\pi - \delta} K_n(\tau) < \varepsilon.$$

Potom

$$|I_1| \le \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\delta K_n(\tau) d\tau \le \varepsilon,$$

$$|I_2| \le \frac{1}{2\pi} \int_\delta^{2\pi - \delta} \left| f(t_0 - \tau) - \check{f}(t_0) \right| . \sup \{K_n(\nu), \nu \in [\delta, 2\pi - \delta]\} \, d\tau.$$

A teda

$$\left| \sigma_n(f, t_0) - \check{f}(t_0) \right| < \varepsilon + \varepsilon \left\| f - \check{f}(t_0) \right\|_1 .$$

A tým je dokázaná časť a).
Ďalej dokážeme tvrdenie b). Nech $J \subset I$ je uzavretý interval. Pretože f je spojitá funkcia na uzavretom intervale J, je f na J rovnomerne spojitá a teda nájdeme $\delta > 0$ tak, že (4.4) platí pre každé $t_0 \in I$ a n_0 závisí len na δ a ε. □

Z časti a) predchádzajúcej vety a z Vety o konvergencii aritmetických priemerov plynie nasledujúci dôsledok:

Dôsledok 4.2. *Keď $f \in L^1(\mathbb{T})$ je spojitá v bode t_0, a keď Fourierova rada funkcie f konverguje v bode t_0, potom jej súčtom je $f(t_0)$.*

V nasledujúcej vete si ukážeme, že z ohraničenosti funkcie f plynie ohraničenosť $\sigma_n(f)$.

Veta 4.3. *Nech $f \in L^1(\mathbb{T})$.*

(i) Ak pre každé t platí, že $m \le f(t)$, potom $m \le \sigma_n(f, t)$.

(ii) Ak pre každé t platí, že $f(t) \le M$, potom $\sigma_n(f, t) \le M$.

Dôkaz. Stačí ak si uvedomíme, že $K_n(t) \geq 0$.
Potom platí

$$\sigma_n(f,t) - m = \frac{1}{2\pi} \int K_n(t)\Big(f(t-\tau) - m\Big) d\tau \geq 0,$$

pretože integrand je nezáporný.
Pre $f \leq M$ platí

$$M - \sigma_n(f,t) = \frac{1}{2\pi} \int K_n(\tau)\Big(M - f(t-\tau)\Big) d\tau \geq 0,$$

pretože integrand je nezáporný. □

Definícia 4.4. Nech $f \in L^1([a,b])$, $x \in (a,b)$. Povieme, že x je *Lebesgueovým bodom* funkcie f, ak

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \Big|f(t) - f(x)\Big| dt = 0.$$

Poznámka. Spojitá funkcia má všetky body Lebesgueove.

V dôkaze nasledujúcej vety budeme potrebovať vetu o Lebesgueových bodoch, ktorej dôkaz možno nájsť napr. v [L, Veta 23.9].

Veta 4.5 (O Lebesgueových bodoch)**.** *Nech $f \in L^1([a,b])$, potom skoro všetky $x \in (a,b)$ sú Lebesgueove body.*

Poznámka. Ak existuje vlastná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2} := \check{f}(t_0),$$

potom je splnená nasledujúca podmienka:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0+\tau) + f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right| d\tau = 0. \tag{4.5}$$

Podmienka (4.5) platí tiež, ak t_0 je Lebesgueovým bodom funkcie $\check{f}$. Potom z vety o Lebesgueových bodoch plynie, že podmienka (4.5) platí pre skoro všetky t_0.

Veta 4.6 (Lebesgueova veta)**.** *Ak platí (4.5), potom $\sigma_n(f,t_0) \to \check{f}(t_0)$. Špeciálne $\sigma_n(f,t) \to f(t)$ skoro všade.*

Poznámka. V dôkaze Lebesgueovej vety použijeme nasledujúce dve vlastnosti Féjerovho jadra:

i) $|K_n(t)| \le n+1$.

Čo platí, pretože

$$|K_n(t)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|D_k(t)| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}|e^{imt}| \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=-k}^{k}1$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{1}{n+1}(n+1)^2 = (n+1).$$

ii) Pre $\tau \in (0,\pi)$ platí

$$0 \le K_n(\tau) \le \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2},$$

kde k dôkazu druhého odhadu si stačí uvedomiť, že $\sin\frac{\tau}{2} > \frac{\tau}{\pi}$ pre $\tau \in (0,\pi)$ a teda

$$K_n(\tau) = \frac{1}{n+1}.\frac{\Big(\sin(\frac{n+1}{2}\tau)\Big)^2}{\Big(\sin\frac{\tau}{2}\Big)^2} \le \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}.$$

Obecne môžeme napísať, že

$$K_n(\tau) \le \min\bigg(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\bigg). \tag{4.6}$$

Dôkaz. (Vety 4.6).

Tak ako v dôkaze Féjerovej vety odvodíme, že

$$\sigma_n(f,t_0) - \check{f}(t_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta K_n(\tau)\left[\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right]d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(t)\Big(f(t_0-\tau) - \check{f}(t_0)\Big)d\tau =: I_1 + I_2.$$

Ďalej položme $\delta = n^{-1/4}$ a označme

$$\Phi(h) := \int_0^h \left|\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right|d\tau.$$

Potom

$$|I_1| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta K_n(\tau)\left[\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right]d\tau\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{1/n} K_n(\tau)\left[\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2} - \check{f}(t_0)\right]d\tau\right|$$

$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{1/n}^{\delta} K_n(\tau)\left[\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right]d\tau\right|$$
$$\leq \frac{n+1}{\pi}\Phi\Big(\frac{1}{n}\Big)+\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|\frac{1}{\tau^2}d\tau.$$

Kde $\frac{n+1}{\pi}\Phi\Big(\frac{1}{n}\Big)\to 0$ pre $n\to\infty$.
Pretože:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\pi}\Phi\Big(\frac{1}{n}\Big)=\lim_{u\to 0}\frac{u+1}{\pi u}\int_0^u\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|d\tau$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^u\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|d\tau$$
$$+\lim_{u\to 0}\frac{1}{\pi u}\int_0^u\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|d\tau=0.$$

Kde posledná rovnosť plynie z (4.5).

Integráciou per partes druhého člena výrazu I_1 dostaneme:

$$\frac{\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\left|\frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}-\check{f}(t_0)\right|\frac{1}{\tau^2}d\tau$$
$$=\frac{\pi}{n+1}\left[\frac{\Phi(\tau)}{\tau^2}\right]_{1/n}^{\delta}+\frac{2\pi}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\frac{\Phi(\tau)}{\tau^3}d\tau =: A+B.$$

Zvoľme $\varepsilon>0$. K nemu nájdeme podľa (4.5) $n_0\in\mathbb{N}$ také, že pre každé $\tau\in(0,n_0^{-1/4})$ platí: $\left|\frac{\Phi(\tau)}{\tau}\right|<\varepsilon$.
Potom výrazy A a B odhadneme následovne:

$$|A|=\left|\frac{1}{n+1}\underbrace{\frac{\pi\Phi(\delta)}{\delta^2}}_{M}-\frac{\pi}{n+1}\frac{\Phi(1/n)}{1/n^2}\right|\leq\frac{M}{n+1}+\frac{\pi}{n+1}\frac{\varepsilon}{\frac{1}{n}}\leq\frac{M}{n+1}+\varepsilon\pi.$$

$$|B|\leq\frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\int_{1/n}^{\delta}\frac{1}{\tau^2}d\tau=\frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\left[-\frac{1}{\tau}\right]_{1/n}^{\delta}=\frac{2\pi\varepsilon}{n+1}\Big(n-\frac{1}{\delta}\Big)\leq 2\pi\varepsilon.$$

A teda $|I_1|<3\pi\varepsilon$ pre n dostatočne veľké.
Analogicky ako v dôkaze Féjerovej vety ukážeme, že $|I_2|<\varepsilon\left\|f-\check{f}(t_0)\right\|_1$. □

Dôsledok 4.7. *Ak Fourierov rad funkcie $f\in L^1(\mathbb{T})$ konverguje na množine E, množine kladnej miery, potom jeho súčet splýva s funkciou f skoro všade na E.*
Špeciálne, ak Fourierov rad konverguje k nule skoro všade, potom všetky jeho koeficienty sú nulové.

Poznámka. Posledný výsledok ale neplatí pre všetky trigonometrické rady. Existujú príklady trigonometrických radov, ktoré konvergujú k nule skoro všade, ale nie sú identicky nulové.

Poznámka. Pretože v dôkaze Lebesgueovej vety sme pri integrovaní odhadli $K_n(t)$ monotónnou majorantou $\min\left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}\right)$, museli sme v predpokladoch vety požadovať silnejšiu podmienku (4.5) namiesto slabšej podmienky

$$\Psi(h) = \int_0^h \left(\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau = o(h), \qquad h \to 0. \tag{4.7}$$

Ak by sme chceli dokázať podobné tvrdenie pre $P(r,t)$, bola by podmienka (4.7) postačujúca, viz nasledujúca veta.

Veta 4.8 (Fatou)**.** *Ak platí* (4.7)*, potom*

$$\lim_{r\to 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(j) r^{|j|} e^{ijt_0} = \check{f}(t_0).$$

Poznámka. Podmienka (4.7) s $\check{f}(t_0) = f(t_0)$ je splnená v každom bode t_0, kde $f = F'$, kde F je primitívnou funkciou k f, (čo je skoro všade).

Dôkaz. (Poznámky): Nech $F' = f$ s.v. Potom F je absolútne spojitá funkcia, pretože $f \in L^1(\mathbb{T})$ a absolútne spojité funkcie majú deriváciu skoro všade.

Ďalej pre jednoduchosť predpokladajme, že $t_0 = 0$, potom platí:

$$\int_0^h \left(\frac{f(\tau)+f(-\tau)}{2} - f(0) \right) d\tau = \frac{1}{2}\Big(F(h) - F(0) + F(0) - F(-h) - 2f(0)h \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(F(h) - F(-h) - 2f(0)h \Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(h)-F(0)}{h} - f(0) + \frac{F(-h)-F(0)}{-h} - f(0) \right) h.$$

Daný výraz teda konverguje do 0 pre $h \to 0$. A teda

$$\frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{f(t_0+\tau)+f(t_0-\tau)}{2} - \check{f}(t_0) \right) d\tau \to 0.$$

□

Na záver tejto kapitoly ešte uvedieme jeden odhad $S_n(f,t)$, ktorý môže byť niekedy užitočný, ako ukážeme na nasledujúcom príklade.

Lemma 4.9. *Nech $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ a nech $|\widehat{f}(m)| \leq K|m|^{-1}$, kde $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Potom pre každé $t \in \mathbb{T}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí:*

$$|S_n(f,t)| \leq \|f\|_{\infty} + 2K. \tag{4.8}$$

Dôkaz. Zo vzťahu (3.8) a (3.10) plynie, že

$$S_n(f,t) = \sigma_n(f,t) + \sum_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \frac{|j|}{n+1} \widehat{f}(j) e^{ijt}.$$

Potom

$$|S_n(f,t)| \leq |\sigma_n(f,t)| + \left| \sum_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \frac{|j|}{n+1} \widehat{f}(j) e^{ijt} \right|.$$

Pretože $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$, potom z Vety 4.3 plynie, že $|\sigma_n(f,t)| \leq ||f||_{\infty}$.
A teda

$$|S_n(f,t)| \leq ||f||_{\infty} + \sum_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \frac{|j|}{n+1} |\widehat{f}(j)||e^{ijt}| \leq ||f||_{\infty} + \sum_{\substack{j=-n \\ j\neq 0}}^{n} \frac{|j|}{n+1} \frac{K}{|j|}$$

$$= ||f||_{\infty} + \frac{2nK}{n+1} \leq ||f||_{\infty} + 2K.$$

□

Príklad. Pre každé $t \in \mathbb{T}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(jt)}{j} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

Dôkaz. Uvažujme funkciu $f(t) = \frac{t}{2} - \frac{\pi}{2}$ na $[0, 2\pi))$. Pretože $f \in L^1(\mathbb{T})$ môžeme ju rozvinúť do Fourierovho radu. Potom podľa Lemmatu 4.9 môžeme odhadnúť čiastočné súčty pomocou vzťahu (4.8).
Spočítajme Fourierové koeficienty funkcie f:

$$\widehat{f}(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{2} \right) e^{-ijt} dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} t e^{-ijt} dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ijt} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[-\frac{te^{-ijt}}{ij} \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2ij}, \qquad \textit{pre } j \neq 0,$$

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\right)dt = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Potom

$$|S_n(f,t)| = \left|\sum_{j=-n}^{-1} -\frac{1}{2ij}e^{ijt} + \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{2ij}e^{ijt}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{-ijt}-e^{ijt}}{2ij}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)\sin(jt)}{j}\right|.$$

Pretože (pre $j \neq 0$) platí $|\widehat{f}(j)| = \left|\frac{1}{2ij}\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{|j|} \leq \frac{1}{2}$, volíme $K = \frac{1}{2}$.
Potom z Lemmatu 4.9 plynie

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)\sin(jt)}{j}\right| \leq \|f\|_\infty + 2K.$$

Kde

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t\in[0,2\pi)}\left|\frac{t}{2}-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}.$$

A teda platí

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)\sin(jt)}{j}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(jt)}{j}\right| \leq \frac{\pi}{2} + 1$$

□

Literatúra

[Y] Y. Katznelson, *An introduction to Harmonic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[R] W. Rudin, *Analýza v reálnem a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[L] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 2002.