QUATÉRNIOS: INDO ALÉM DOS NÚMEROS COMPLEXOS

QUATERNES: GOING BEYOND COMPLEX NUMBERS

Ricardo José de Oliveira Almeida
ricardoalmeidapesqueria@gmail.com

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima
airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

O presente trabalho discute, sob uma perspectiva histórica, a existência dos quatérnios, um campo numérico mais amplo que os números complexos. O trabalho também apresenta conceitos e um resgate histórico dos números complexos, além de entrar no debate sobre uma possível relevância do estudo dos quatérnios em cursos de licenciatura em Matemática. Mais especificamente, são objetivos deste trabalho: sintetizar materiais bibliográficos relacionados ao nosso objeto de estudo, construir uma compreensão inicial sobre os quatérnios, incluindo aspectos matemáticos e aplicações e refletir sobre papel dos quatérnios no desenvolvimento do conhecimento matemático. Considerando os objetivos elencados, nossos procedimentos metodológicos estão ancorados em um tipo descritivo de abordagem qualitativa, por meio de uma revisão bibliográfica da literatura. Como resultados centrais, evidenciamos que a criação dos quatérnios ampliou e consolidou a abstração matemática, particularmente no campo da Álgebra, além de permitir aplicações em diversas áreas como computação gráfica e mecânica quântica.

Palavras-chave: Quarténios. Números Complexos. Resgate Histórico.

ABSTRACT

The present work discusses, from a historical perspective, the existence of quatérnios, a numerical field broader than complex numbers. The work also presents concepts and a historical rescue of complex numbers, in addition to entering into the debate about a possible relevance of the study of quatérnios in mathematics courses. More specifically, the objectives of this work are: to synthesize bibliographic materials related to our object of study, to build an initial understanding of quatérnios, including mathematical aspects and applications, and to reflect on the role of quatérnios in the development of mathematical knowledge. Considering the listed objectives, our methodological procedures are anchored in a descriptive type of qualitative approach, through a literature review of the literature. As central results, we show that the creation of quatérnios expanded and consolidated mathematical abstraction, particularly in the field of Algebra, in addition to allowing applications in several areas such as computer graphics and quantum mechanics.

Keywords: Quartens. Complex numbers. Historical Rescue.

1 INTRODUÇÃO

É notório que a matemática surgiu impulsionada pela necessidade de resolução de problemas relevantes para sociedades antigas. Ao longo dos séculos, o método axiomático e o caráter essencialmente abstrato tornaram-se eixos centrais do conhecimento matemático.

Os elementos até aqui citados também estão presentes no ensino de matemática, em diferentes graus de intensidade. Um desafio primordial, particularmente no atual contexto brasileiro, consiste em encontrar um equilíbrio adequado entre aplicações, exploração da intuição e rigor no ensino de matemática em seus diversos níveis.

Em linhas gerais, no campo do ensino de matemática, encontra-se uma tensão entre a importância que a disciplina detém para a vida das pessoas e os conflitos inerentes a sua aprendizagem. Não raro, o senso comum da analise dessa disciplina matemática e os achados da pesquisa apontam uma insatisfação em relação a sua abordagem em sala de aula, tanto para alunos, quanto para professores, situando-a a matemática como uma complicada, desprovida de sentido e desnecessária.

Nessa perspectiva, a matemática é percebida como um amontoado de cálculos laboriosos, regras que devem ser memorizadas, conteúdos que servem apenas dentro da sala de aula e não possuem aplicações na atualidade, dentre outros aspectos, pouco virtuosos. Ao mesmo tempo, o modelo tradicional de ensino, centrado no professor e fortemente baseado na exposição de conteúdos seguindo a conhecida e criticada fórmula: definição, exemplos e exercícios de fixação, parecem contribuir para ocultar os modos de produção do conhecimento matemático e dificultar a aprendizagem.

Nossos estudos e reflexões realizados ao longo da formação inicial no curso de licenciatura em matemática indicam que a abstração e o rigor matemático são fatores primordiais para a matemática enquanto ciência, mas podem apresentar forte potencial para dificultar a aprendizagem e a problematização dos conceitos estudados.

Ainda sobre a problematização de conceitos, durante uma aula de Álgebra (componente curricular de natureza essencialmente abstrata e obrigatória em nossa formação inicial) indagamos sobre a necessidade da existência de um campo numérico mais amplo que os números complexos, na medida em que este foi criado para dar conta da resolução de certos tipos de equações polinomiais, ampliando os limites da aritmética conhecida até meados do século XVI. Em breve diálogo com o professor, ouvimos que, em torno da segunda metade do século XIX, os quatérnios foram criados como uma espécie de generalização dos números complexos. Porém, como os quatérnios não faziam parte do programa da disciplina, a discussão não foi aprofundada naquele momento.

Tal episódio constituiu-se na motivação inicial para a construção deste trabalho. Desta forma, buscamos ampliar nossa compreensão sobre os quatérnios e suas relações com os números complexos. Em razão da complexidade matemática envolvida e do tempo disponível, realizamos um estudo introdutório da nossa temática, contemplando aspectos históricos e matemáticos.

No que compete aos números complexos, convém destacar que estes possuem interessantes conexões com conceitos de trigonometria, geometria analítica e álgebra e podem contribuir com o enriquecimento da cultura matemática dos alunos da Educação Básica. Porém, é fato que, atualmente, os números complexos raramente são abordados no ensino médio. Acreditamos que não é exagero dizer que, via de regra, os números complexos quando inseridos na Educação Básica, são abordados de modo extremamente abstrato, dificultando o desenvolvimento e aprendizagem dos conceitos relacionados.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não trata de modo explicito o ensino dos Números Complexos no ensino médio, mas traz algumas abordagens desse conteúdo como no caso de vetores, rotação, translação e etc. estão aliadas fortemente aos Números complexos.

Desse modo, para que o ensino dos Números Complexos tenha sentido para os estudantes, defendemos que esteja atrelado a outros elementos, como: à História da Matemática; às várias representações do número complexo; as interpretações e representações geométricas das operações e algumas aplicações.

Destarte, ao aludir acerca destas temáticas, se torna possível proporcionar aos alunos a abertura de um aprendizado que seja significativo, enquanto o professor realiza as orientações determinadas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

> “Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano”. (OCEM, 2002, pág.93-94).

Desta forma, defendemos que os Números Complexos sejam abordados como conteúdos regulares no ensino médio e nos cursos de licenciatura em matemática no ensino superior, são de grande importância teórica e prática para resoluções de problemas que também podem ser aplicados em diversas áreas de conhecimento, tais como: Engenharia, Eletromagnetismo, Física Quântica, Arquitetura e etc. Além da própria matemática, em que são estudados ramos complexos, como: Álgebra Linear, Álgebra de Lie, Equações Algébricas e Equações Diferenciais (LIMA,1991).

> Não se julgue, entretanto, que a importância dos Números Complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos

> Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais. (LIMA,1991, p.01).

Considerando a discussão apresentada até aqui, pensamos que, ao apresentar uma introdução ao estudo dos quatérnios, este trabalho pode aprimorar o conhecimento desse conteúdo através de uma revisão bibliográfica, de modo sistemático que busque trazer contribuições significativas para o curso de licenciatura em Matemática do IFPE – *Campus* Pesqueira e ademais.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho trata-se de um estudo descritivo, de abordagem qualitativa, que adota como método o uso da Revisão Bibliográfica da literatura. A escolha por esse método justifica-se por:

> Possibilita ao interessado reconhecer os profissionais que mais investigam um assunto, suas áreas de atuação e suas contribuições mais relevantes; permite separar o achado científico de opiniões e ideias; permite descrever o conhecimento no seu estado atual; e promove o impacto da pesquisa sobre a prática profissional. Este método permite fazer generalizações sobre determinados assuntos estudados por vários pesquisadores, em diferentes lugares e momentos, mantendo os interessados atualizados e facilitando as modificações da prática cotidiana como consequência da pesquisa. Este método de pesquisa permite a síntese de múltiplos estudos publicados e possibilita conclusões gerais a respeito de uma particular área de estudo (ROMAN; FRIEDLANDER, 1998, p. 109).

3 RESULTADOS E ANÁLISE

Por conseguinte, ao realizar as devidas buscas, tornou-se possível a estruturação dos achados na categoria discursiva abaixo:

3.1 Os números complexos e quatérnios: breve resgate histórico

Ocorreram grandes avanços no vasto campo da matemática, como, por exemplo, a evolução números negativos e dos números irracionais que contribuíram significativamente para o aparecimento dos Números Complexos. Algo que justifica essa afirmação deriva da existência de alguns problemas matemáticos, que de modo geral, se caracterizavam por serem problemas concretos, como quando algum matemático deparando-se deparava com equações cuja raiz era negativa, ele simplesmente argumentava que o problema não tinha solução.

Neste contexto, os números complexos surgiram por volta de 1570, quando o matemático Rafael Bombelli[1] estava tentando resolver a equação $\mathrm{x}^3 - 15\mathrm{x} - 4 \ = 0$ utilizando a fórmula de Cardano[2]. Diante do desenvolvimento dos cálculos, Bombelli chegou na expressão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Por um lado, a expressão acima contém raízes quadradas de radicandos negativos, indicando que x não pode ser um número real, e por outro, não é difícil constatar que a equação possui uma raiz real igual a 4. Diante deste fato, ao invés de proceder como os matemáticos que o antecederam e abandonar a resolução da equação, Bombelli seguiu efetuando cálculos, lidando com as raízes quadradas de modo análogo ao caso onde o radicando é positivo. Deste modo, Bombelli supôs que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b}, \text{ e}$$
$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}$$

Então, como 4 é raiz da equação dada, devemos ter:

$$a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$$

Ou seja, $a = 2$. Mas

$$\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Na igualdade acima, fazendo $a = 2$ e executando os cálculos, obtém-se que b = 1, e, portanto,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

Sobre esse fato, Milies (1993) destaca que Bombelli compreendeu a relevância do seu achado, afirmando que:

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número. ... A princípio, a

[1] - Rafael Bombelli (1526-1572) foi um matemático e engenheiro hidráulico italiano, o mesmo foi um grande pioneiro na determinação de regras para a álgebra dos números negativos e dos números complexos.

[2] - As fórmulas de Cardano são fórmulas para a solução de equações cúbicas (equações do terceiro grau) reduzidas.

> coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... . Isto pode parecer muito sofisticado mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos(BOMBELLI, 1572, citado por MILIES, 1993, p. 7)

Com relação às regras utilizadas para manipular as raízes quadradas de radicandos negativos, Milies (1993, p. 8) destaca que:

> Ele [Bombelli] utiliza a expressão *piú di meno* para se referir ao que nós denotaríamos como + *i* e *meno di meno* para *i*. Ele enuncia então o que chama de regras do produto que citamos abaixo junto com sua tradução na nossa simbologia:
>
> Più via piú di meno fa più di meno, + **.** (+ *i*) = + *i*
>
> Meno via più di meno fa meno di meno, **.** (+ *i*) = *i*
>
> Più via meno di meno fa meno di meno, + **.** (*i*) = *i*
>
> Meno via meno di meno fa più di meno, **.** (*i*) = + *i*
>
> Più di meno via più di meno fa meno, (+ *i*) **.** (+ *i*) = -
>
> Meno di meno via più di meno fa più, (*i*) **.** (+ *i*) = +
>
> Meno di meno via meno di meno fa meno. (*i*) **.** (*i*) = -

Note-se que as regras acima explicitadas são exatamente as mesmas que utilizamos atualmente, nos cálculos com números complexos.

Com o decorrer dos anos, os avanços continuaram a acontecer e durante o século XVIII matemáticos como Wessel[3], Argand[4] e Gauss[5] contribuíram no desenvolvimento dos Números Complexos. Em especial, Gauss deu uma contribuição fundamental para a aceitação definitiva dos números complexos como legítimos objetos matemáticos, consolidando a representação geométrica dos destes números como pares ordenados de números reais, conforme podemos ver na figura a seguir:

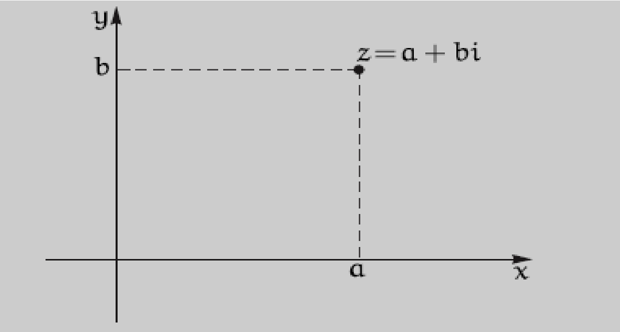
Figura 1 − Representação geométrica dos números complexos

---

[3] - Caspar Wessel (1745 – 1818) Foi um agrimessor norueguês, primeiro a formular uma representação geométrica para os números complexos.

[4] - Jean-Robert Argand (1768 – 1822) foi um livreiro e matemático suíço, grande percursor dos avanços dos números complexos, conhecido pelo Diagrama de Argand.

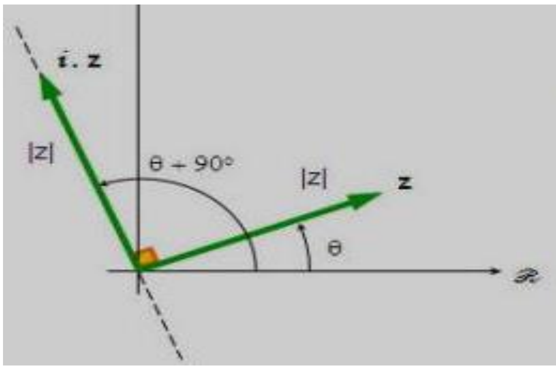
[5] - Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica.



Fonte: (HEFEZ e VILLELA, 2012, p. 10)

A representação geométrica dos números complexos, aliada às propriedades intrínsecas destes números possui uma ampla gama de aplicações. Em especial, identificando os complexos com vetores no plano, é possível demonstrar que a multiplicação de dois números complexos equivale a uma rotação de vetores no plano. Não detalharemos os pormenores deste fato[6], mas a figura a seguir apresenta como caso particular que a multiplicação de um complexo $z \neq 0$ por i equivale a efetuar uma rotação de 90º no sentido trigonométrico positivo e em torno da origem.

Figura 2 – Interpretação geométrica da multiplicação por i.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme Eves (2004) destaca, até meados do século XIX, a álgebra era concebida como uma aritmética simbólica, onde letras substituem os números e as operações de adição e multiplicação obedecem as regras usuais da aritmética dos números inteiros positivos. Assim, se a, b e c representam inteiros positivos, tem-se:

1) $a + b = b + a$(propriedade comutativa da adição).
2) $a\ .\ b = b\ .\ a$ (propriedade comutativa da multiplicação).
3) $0 + a = a$ (existência de elemento neutro para a adição).
4) $1\ .\ a = a$ (existência de elemento neutro para a multiplicação).
5) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (propriedade associativa da adição).

[6] Mais detalhes podem ser consultados, por exemplo, em Hefez e Villela (2012).

6) $(a \,.\, b)\ x\ c\ =\ a\ (b\ c)$ (propriedade associativa da multiplicação).

7) $a.(b\ +\ c)\ =\ (a\,.\,b)\ +\ (a\,.\,c)$ (propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição).

Em 1830, com a publicação do trabalho intitulado *Treatise on Algebra,* Peacock[7] procura estruturar a álgebra a partir de um tratamento lógico-dedutivo semelhante ao que pode ser encontrado nos Elementos de Euclides. Em particular, Peacock criou uma distinção entre dois tipos de álgebra: aritmética e simbólica. O primeiro caso detinha-se sobre o estudo da utilização de símbolos para representar números decimais positivos, submetidos às operações, restrições e propriedades usuais da aritmética (conforme elencamos no parágrafo anterior). Já a álgebra simbólica adotava as mesmas operações da álgebra aritmética, mas não considerava suas restrições. Por exemplo: na álgebra aritmética de Peacock, a subtração a – b é definida apenas quando a > b. Na álgebra simbólica, a subtração a – b sempre pode ser definida (EVES, 2004).

Ao longo da segunda metade do século XIX, com contribuições de diversos matemáticos, a álgebra ia assumindo um caráter cada vez mais axiomático e abstrato, libertando-se da aritmética. Um fato de extraordinária importância para o avanço da abstração na álgebra ocorreu em 1843 quando Hamilton[8], motivado por questões de natureza física[9], criou os quatérnios: um campo numérico que contém os números reais e complexos como casos particulares, e, na sua forma mais geral, possui uma multiplicação que não é comutativa. Salientamos que é muito provável que este tenha sido o primeiro caso registrado da criação de uma álgebra coerente do ponto de vista lógico, onde a multiplicação não é comutativa (BOYER, 1996).

Segundo Eves (2004), Hamilton buscava criar um sistema de números útil para o estudo de vetores e rotações no espaço tridimensional, em situação análoga ao que ocorre com os números complexos e os vetores no espaço bidimensional.

Avançando em suas pesquisas, Hamilton percebeu que era necessário considerar quádruplas ordenadas de números reais, sujeitas às seguintes condições:

a) $(a, b, c\ , d)\ =\ (e, f, g, h)$ se e somente se: $a\ =\ e, b\ =\ f;\ c\ =\ g;\ d\ =\ f;$

b) $(a, 0, 0, 0)\ +\ (b, 0, 0, 0)\ =\ (a\ +\ b, 0, 0, 0);$

c) $(a, 0, 0, 0)\,.\,(b, 0, 0, 0)\ =\ (ab, 0, 0, 0);$

d) $(a, b, 0, 0)\ +\ (c, d, 0, 0)\ =\ (a\ +\ c, b\ +\ d, 0, 0);$

e) $(a, b, 0, 0)\,.\,(c, d, 0, 0)\ =\ (ac\ -\ bd, ad\ +\ bc, 0, 0).$

---

[7] - Georg Peacock (1791 – 1858) foi professor da universidade de Cambridge.

[8] - William Rowan Hamilton (1805-1865) foi um grande matemático, físico, astrólogo irlândes, o mesmo teve muitas contribuições para óptica, dinâmica **e** álgebra. O mesmo teve grande desdobramento sobre a matemática, sendo criador dos quatérnios.

[9] A discussão destas questões fica inteiramente fora dos objetivos deste trabalho.

A partir das condições acima, e considerando todos os seus propósitos, Eves (2004) esclarece que Hamilton definiu a adição e a multiplicação de complexos do seguinte modo:

- $(a, b, c, d) + (e, f, g, h) = (a + e, b + f, c + g, d + h)$,
- $(a, b, c, d).(e, f, g, h) = (ae - bf - cg - dh, af + be + ch - dg, ag + ce + df - bh, ah + bg + de - cf)$.

Com estas definições, o número real x pode ser identificado com os quatérnio $(x, 0, 0, 0)$ e o número complexo $x + yi$ é identificado com o quatérnio $(x, y, 0, 0)$. Desta forma, pode-se dizer que os números reais e complexos estão contidos[10] nos quatérnios.

É possível verificar que a adição de quatérnios possui elemento neutro e simétrico, é associativa e comutativa. Já a multiplicação não é comutativa, possui elemento neutro, é associativa e distributiva em relação a adição e os todos os quatérnios não nulos admitem inverso.

Usualmente, denotam-se os quatérnios unitários[11] $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0),$ $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ por, respectivamente, 1, i, j, e k. Desta forma, o quartérnio (a, b, c, d) também pode ser representando como $a + bi + cj + dk$.

Ainda sobre os elementos i, j e k, utilizando a definição de multiplicação de quatérnios, temos a relação notável:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Segundo Eves (2004, p. 551),

Hamilton contava a historia de que a ideia de abandonar a lei comutativa da multiplicação ocorreu-lhe num átimo, após 15 anos de cogitações infrutíferas, enquanto caminhava com a esposa ao longo do Royal Canal perto de Dublin, pouco antes do escurecer. Essa ideia tão pouco ortodoxa impressionou-o tanto que pegou de seu canivete e com ele gravou a parte fundamental da tabua de multiplicação dos quatérnios numa das pedras da Ponte Broughm.

Nos dias atuais, é possível encontrar uma placa inserida na referida pedra, contendo uma homenagem[12] ao extraordinário feito de Hamilton:

---

[10] Com um pouco mais de rigor, dizemos que há um isomorfismo entre os números reais (ou complexos) e o corpo formado pelos quatérnios do tipo (x, 0, 0, 0) (ou, respectivamente, (x, y, 0, 0).

[11] A norma (ou valor absoluto) do quatérnios x = (a, b, c, d) é definida por $\|x\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Se $\|x\| = 1$, dizemos que x é unitário.

[12] "Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir Willian Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1$ & cut it in a stone of this bridge".

Figura 3 – Homenagem a William Rowan Hamilton.

Fonte: http://vigo.ime.unicamp.br/~fismat/placa2.jpg

Não obstante o sucesso obtido por Hamilton na construção dos quatérnios, em 1844 Grassmann[13] publica uma obra onde, dentre outras coisas, é apresentada uma generalização dos quatérnios: os números hipercomplexos, compostos por enuplas de números reais. A criação de Grassmann ampliou consideravelmente a possibilidade de construção de diferentes estruturas algébricas, contribuindo fortemente para consolidar o caráter essencialmente abstrato da álgebra, próximo daquilo que ocorre nos dias atuais.

É conveniente lembrar que, se por um lado, é possível criar estruturas algébricas bastante gerais, por outro, tais criações podem “perder” propriedades importantes, tais como a comutatividade da multiplicação (conforme vimos no caso dos quatérnios) e a relação de ordem compatível com a adição e a multiplicação (fato que ocorre nos complexos), dentre outras.

Não temos a intenção de aprofundar a discussão nesta direção, mas gostaríamos de registrar que, de acordo com Ripoll, Ripoll e Silveira (2010), os números complexos são suficientes para satisfazer duas condições fundamentais na matemática: dar sentido as operações da aritmética[14] e possibilitar a resolução de equações polinomiais, cujos coeficientes pertencem ao próprio corpo dos

[13] Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877) foi um acadêmico alemão, responsável por contribuições extremamente importantes em vários campos da matemática, especialmente na álgebra.
[14] Adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, extração de raízes (quadrada, cúbica, etc), logaritmação e avaliação das funções trigonométricas, tanto diretas quanto inversas.

complexos. Sobre este último aspecto, Ripoll, Ripoll e Silveira (2010), afirmam que a proposição “toda equação polinomial com coeficientes em um corpo K tem ao menos uma raiz em tal corpo” é verdadeira apenas quando K é o corpo dos números complexos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tratando-se de uma temática bastante ampla e densa, nossa intenção foi realizar um estudo introdutório dos quatérnios, sob uma perspectiva histórica.

Considerando a discussão apresentada neste trabalho, foi possível perceber que o estudo dos números complexos e dos quatérnios foi de grande relevância para o desenvolvimento da matemática ao longo de vários séculos.

Constatamos que há certa dualidade no conhecimento matemático: por vezes ele pode ser essencialmente abstrato e distante de aplicações científicas ou tecnológicas e, em outros momentos, pode ser intensamente aplicado nos mais diversos campos científicos. Porém, não raro e no tempo adequado, estes dois aspectos se entrelaçam e culminam na beleza e no poder da matemática.

Por fim, desejamos que o presente trabalho motive os leitores a aprofundar os estudos nas diversas áreas da matemática.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs+): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**, Brasília: MEC/SEF, 2002.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

EVES, H.**, Introdução à História da Matemática.** Campinas: Unicamp, 2004.

HEFEZ, A.; VILLELA, M.L.T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática.1991. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/content/ABAAABogAJ/numeros-complexos>. Acesso em: 10 fev. 2021.

NEVES, R. C. **Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço**. Rio de Janeiro, 2008.

ROMAN, A. R.; FRIEDLANDER, M. R. Revisão integrativa de pesquisa aplicada à enfermagem. **Cogitare Enfermagem**, Curitiba, v. 3, n. 2, p.109–112, jul./dez.1998. Doi: http://dx.doi.org/10.5380/ce.v3i2.44358. Acesso em: 04 dez. 2020.

RIPOLL, J. B. RIPOLL, C. C. C.; SILVEIRA, J. F. P. da. **Números racionais, reais e complexos 2. ed**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011, p. 528.