

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ

УДК 519.725

ПИРАМИДАЛЬНАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ  
ВЕЙВЛЕТ-КОДОВ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Д. В. Литичевский

*Челябинский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

Конструктивным образом доказывается существование биортогонального разбиения векторного пространства  $V$  размерности  $n$  над полем  $\text{GF}(q)$ , а именно двух его представлений в виде прямых сумм подпространств  $V = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J$  и  $V = \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J$ , таких, что на  $j$ -м уровне разложения ( $0 < j \leq J$ )  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ,  $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ , подпространство  $V_j$  ортогонально  $\tilde{W}_j$ , а подпространство  $W_j$  ортогонально  $V_j$ . Для этого используются пары биортогональных фильтров  $(h, g)$  и  $(\tilde{h}, \tilde{g})$ . Разбиение пространства на  $j$ -м уровне разложения осуществляется при помощи пар уровневых фильтров  $(h^j, g^j)$  и  $(\tilde{h}^j, \tilde{g}^j)$ , для построения которых разработаны и теоретически обоснованы соответствующие алгоритмы. На основе многоуровневой схемы вейвлет-разложения строится новое семейство биортогональных вейвлет-кодов со скоростью кодирования  $2^{-L}$ , где  $L$  — количество использованных уровней разложения, и приводятся примеры таких кодов.

**Ключевые слова:** дискретные биортогональные вейвлет-преобразования, мультиразрешения, вейвлет-коды.

DOI 10.17223/20710410/51/5

PYRAMID SCHEME FOR CONSTRUCTING BIORTHOGONAL  
WAVELET CODES OVER FINITE FIELDS

D. V. Litichevskiy

*Chelyabinsk state university, Chelyabinsk, Russia***E-mail:** litichevskiydv@gmail.com

The existence of a biorthogonal decomposition of the space  $V$  of dimension  $n$  over the field  $\text{GF}(q)$  is constructively proved, namely, two representations of it are obtained as direct sums of subspaces  $V = W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J$  and  $V = \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J$ , such that at the  $j$ -th level of the decomposition, for  $0 < j \leq J$ ,  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ ,  $\tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ , the subspace  $V_j$  is orthogonal to  $\tilde{W}_j$ , and the subspace  $W_j$  is orthogonal to  $V_j$ . The partition of the space at the  $j$ -th level is made with the help of pairs of level filters  $(h^j, g^j)$  and  $(\tilde{h}^j, \tilde{g}^j)$ , for the construction of which the corresponding algorithms have been developed and theoretically proved. A new family of biorthogonal wavelet codes is built on the basis of the multilevel wavelet decomposition scheme with coding rate  $2^{-L}$ , where  $L$  is the number of used decomposition levels, and examples of such codes are given.

**Keywords:** discrete biorthogonal wavelet transforms, multiresolutions, wavelet codes.

## Введение

В то время как теории непрерывных и дискретных вейвлет-преобразований над полями вещественных и комплексных чисел интенсивно разрабатываются в течение многих лет [1, 2] и широко применяются для анализа сигналов различной природы во многих областях науки, теории вейвлет-преобразований над конечными полями уделяется не слишком много внимания ввиду ограниченности возможностей её применения. Первое видение теории ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями представлено в [3], однако случай конечных полей характеристики два в данной работе считается исключительным и потому не рассмотрен. Дальнейшее развитие представленная теория получила в [4], где учитывается также и случай полей характеристики два. Однако, в отличие от [3], авторы [4] не строят описанную в [1] цепочку вложенных подпространств и ограничиваются лишь одним уровнем разложения.

Первые прикладные результаты использования построенной теории ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями представлены в [5, 6], где описан подход к построению кодов, корректирующих ошибки и названных ортогональными вейвлет-кодами. Этот подход базируется на одном уровне вейвлет-разложения и имеет ряд конструктивных особенностей, ограничивших впоследствии практическое применение ортогональных вейвлет-кодов. Кроме того, построение ортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями является вычислительно сложной задачей, эффективное решение для её упрощенной версии было в дальнейшем представлено в [7].

Помимо ортогональных вейвлет-преобразований, в теории цифровой обработки сигналов существует более гибкая конструкция биортогональных вейвлет-преобразований, адаптация которой для случая конечных полей произведена в [8]. Термин «биортогональное вейвлет-преобразование» введён в [1], хотя и в [8], и в данной работе предлагается иная конструкция биортогональных вейвлетов. Отметим, что, так же как в [4], автор в [8] не строит цепочку вложенных подпространств, ограничиваясь одним уровнем вейвлет-разложения. Полученные результаты, тем не менее, позволили расширить класс вейвлет-кодов биортогональными вейвлет-кодами, схема помехоустойчивого кодирования которых изображена на рис. 1. Данная схема описывает код с длиной кодовых и информационных слов  $n$  и  $n/2$ , определённый над полем  $\text{GF}(q)$ ,  $q = p^m$ , где  $p$  — простое число,  $m$  — натуральное. Основная идея, лежащая в её основе, заключается в том, что кодовое слово  $c$  восстанавливается по векторам вейвлет-коэффициентов  $a$  и  $d$ :

$$c = H^T a + G^T d,$$

которые, в свою очередь, получают из информационного слова  $v$  при помощи соотношений

$$a = v, \quad d = \lambda_1 P v.$$

Матрицы  $H$ ,  $G$ ,  $\tilde{H}$ ,  $\tilde{G}$  являются 2-циркулянтными матрицами размера  $n/2 \times n$ , определяемыми как

$$\begin{aligned} H &= \text{cir}_2(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}), & G &= \text{cir}_2(g_0, g_1, \dots, g_{n-1}), \\ \tilde{H} &= \text{cir}_2(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1}), & \tilde{G} &= \text{cir}_2(\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-1}). \end{aligned}$$

2-Циркулянтная матрица задаётся первой строкой, последующая строка получается из предыдущей циклическим сдвигом на две позиции вправо. Последовательности элементов поля  $\text{GF}(q)$  длины  $n$ ,  $h = (h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ ,  $g = (g_0, g_1, \dots, g_{n-1})$  и  $\tilde{h} = (\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{n-1})$ ,  $\tilde{g} = (\tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_{n-1})$ , далее именуемые фильтрами синтеза и

анализа соответственно, задают две масштабирующие последовательности и два вейвлета биортогонального вейвлет-преобразования. Матрица  $\Pi$  — циркулянтная матрица размера  $n/2 \times n/2$ , первая строка которой имеет вид  $(0, 0, 0, \dots, 1)$ . Условие биортогональности, которому должны удовлетворять фильтры анализа и синтеза, записанное с использованием введённых матриц, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}H^T &= I_{n/2}, & \tilde{G}G^T &= I_{n/2}, \\ \tilde{H}G^T &= O_{n/2}, & \tilde{G}H^T &= O_{n/2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Условие точного восстановления записывается в виде

$$\begin{bmatrix} H^T & G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{G} \end{bmatrix} = I_n. \quad (2)$$

Символами  $I$  и  $O$  обозначены единичная и нулевая матрицы соответственно, нижний индекс указывает их размерность. В [8] доказано, что фильтры анализа и синтеза удовлетворяют условию биортогональности (1) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию точного восстановления (2).

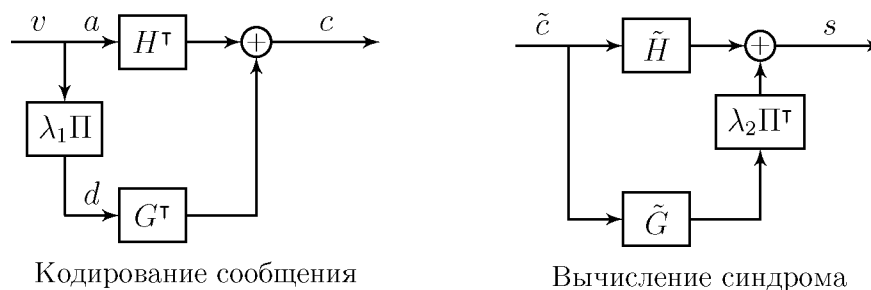


Рис. 1. Схема помехоустойчивого кодирования биортогональных вейвлет-кодов

Биортогональные вейвлет-коды, определяемые схемой помехоустойчивого кодирования на рис. 1, являются линейными кодами, порождающая и проверочная матрицы которых равны

$$H^T + \lambda_1 G^T \Pi \quad \text{и} \quad \tilde{H} + \lambda_2 \Pi^T \tilde{G}$$

соответственно, параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — элементы поля  $\text{GF}(q)$ , такие, что

$$\lambda_1 \lambda_2 = (p - 1) \bmod p.$$

Кодовое слово  $c$  получается из информационного слова  $v$  при помощи соотношения

$$c = (H^T + \lambda_1 G^T \Pi) v,$$

синдром  $s$  принятого зашумлённого кодового слова  $\tilde{c}$  находится как

$$s = (\tilde{H} + \lambda_2 \Pi^T \tilde{G}) \tilde{c}.$$

Согласно [9], описанные биортогональные вейвлет-коды относятся к подклассу квазициклических кодов с циклическим сдвигом кодовых слов на две позиции.

Дальнейшие исследования биортогональных вейвлет-кодов были связаны с изучением их отдельных подклассов, а именно представленных в [10–12] кодов с максимально возможным и заданным кодовым расстоянием, в которых также используется один уровень вейвлет-разложения. Целью данной работы является углубление теории биортогональных вейвлет-преобразований над конечными полями, а именно построение описанной в [1] цепочки вложенных подпространств и создание биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения.

### 1. Биортогональные вейвлет-преобразования над конечными полями

Через  $V = (\text{GF}(q))^n$  обозначим векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\text{GF}(q)$ . Тогда, согласно результатам [8], векторное пространство  $V$  представимо в виде прямой суммы подпространств

$$V = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 = V_0 \oplus W_0, \quad (3)$$

при этом базисы подпространств  $V_0, W_0$  и  $\tilde{V}_0, \tilde{W}_0$  образуют строки ранее упомянутых 2-циркулянтных матриц  $H, G$  и  $\tilde{H}, \tilde{G}$  соответственно, удовлетворяющих условию биортогональности (1). Согласно [1], для построения цепочки вложенных подпространств при использовании биортогональных вейвлет-преобразований для каждого допустимого значения  $j$  необходимо уметь строить представления

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \text{и} \quad \tilde{V}_{j-1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j,$$

такие, что подпространство  $W_j$  ортогонально  $\tilde{V}_j$ , тогда как подпространство  $\tilde{W}_j$  ортогонально  $V_j$ .

В классической схеме биортогонального вейвлет-преобразования (рис. 2) векторы вейвлет-коэффициентов  $a^j$  и  $d^j$  вычисляются по  $a^{j-1}$  с помощью пары фильтров анализа  $\tilde{h}$  и  $\tilde{g}$  с последующей двоичной неполной выборкой (операция обозначена символом « $\downarrow$ »), вектор вейвлет-коэффициентов  $a^{j-1}$  восстанавливается при помощи пары фильтров синтеза  $h$  и  $g$  по векторам  $a^j$  и  $d^j$ , между компонентами которых подставлены нули (операция обозначена символом « $\uparrow$ »). Исходный сигнал имеет бесконечную длину, а его компоненты являются вещественными либо комплексными числами, поэтому для построения указанных представлений используются пары фильтров синтеза и анализа  $h, g$  и  $\tilde{h}, \tilde{g}$  соответственно. Однако в рассматриваемом случае исходный сигнал имеет конечную длину и состоит из элементов поля  $\text{GF}(q)$ , поэтому на каждом уровне разложения последовательности вейвлет-коэффициентов имеют половинную длину. Это означает, что на  $j$ -м уровне разложения необходимо использовать свои пары фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  длины  $n_j = n/2^j$ , удовлетворяющие условию биортогональности,  $h^0 = h, g^0 = g$  и  $\tilde{h}^0 = \tilde{h}, \tilde{g}^0 = \tilde{g}$ .

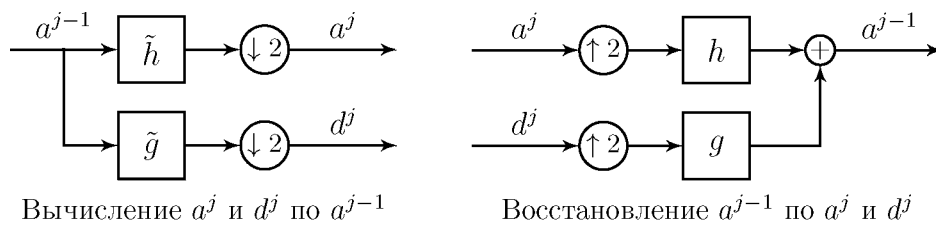


Рис. 2. Схема быстрого биортогонального вейвлет-преобразования

Для того чтобы описать процедуры вычисления вейвлет-коэффициентов и восстановления сигнала на  $j$ -м уровне вейвлет-разложения, парам фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  поставим в соответствие 2-циркулянтные матрицы  $H_j, G_j$  и  $\tilde{H}_j, \tilde{G}_j$  размера  $n_j/2 \times n_j$ , являющиеся аналогами матриц  $H, G$  и  $\tilde{H}, \tilde{G}$  для  $j$ -го уровня разложения. Тогда векторы вейвлет-коэффициентов  $a^j$  и  $d^j$  вычисляются по  $a^{j-1}$  при помощи соотношений

$$a^j = \tilde{H}_j a^{j-1}, \quad d^j = \tilde{G}_j a^{j-1}, \quad (4)$$

вектор вейвлет-коэффициентов  $a^{j-1}$  восстанавливается по  $a^j$  и  $d^j$  по формуле

$$a^{j-1} = H_j^T a^j + G_j^T d^j. \quad (5)$$

Записанное с использованием введённых матриц условие биортогональности для пар фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j H_j^T &= I_{n_j/2}, & \tilde{G}_j G_j^T &= I_{n_j/2}, \\ \tilde{H}_j G_j^T &= O_{n_j/2}, & \tilde{G}_j H_j^T &= O_{n_j/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условие точного восстановления для  $j$ -го уровня разложения записывается как

$$\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix} = I_{n_j}. \quad (7)$$

Воспользовавшись результатами работы [8], получаем, что фильтры анализа и синтеза для  $j$ -го уровня вейвлет-разложения удовлетворяют условию биортогональности (6) тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию точного восстановления (7). Стоит также отметить, что из условия (7) следует обратимость матриц

$$\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \tilde{H}_j \\ \tilde{G}_j \end{bmatrix},$$

из чего, в свою очередь, следует линейная независимость их столбцов и строк соответственно, а также то, что ранг матриц  $H_j, G_j$  и  $\tilde{H}_j, \tilde{G}_j$  равен  $n_j/2$ .

**Лемма 1.** При помощи пар фильтров анализа и синтеза для уровней вейвлет-разложения с 0 по  $j$ , удовлетворяющих условию биортогональности (6), могут быть построены представления подпространств  $V_{j-1}$  и  $\tilde{V}_{j-1}$  размерности  $n_j$  в виде прямой суммы подпространств  $V_j, W_j$  и  $\tilde{V}_j, \tilde{W}_j$  соответственно размерности  $n_j/2$ , таких, что подпространство  $W_j$  ортогонально  $\tilde{V}_j$ , подпространство  $\tilde{W}_j$  ортогонально  $V_j$ , кроме того,  $V_j \subset V_{j-1}$  и  $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j-1}$ .

*Доказательство.* Из (5) получаем, что вектор  $v \in V$  представим в виде

$$v = H_0^T a^0 + G_0^T d^0 = v^0 + w^0,$$

где  $v^0 \in V_0, w^0 \in W_0$ . Ещё раз воспользовавшись соотношением (5), заменим в этом выражении вектор  $a^0$  на его представление через векторы  $a^1$  и  $d^1$ :

$$\begin{aligned} v &= H_0^T a^0 + G_0^T d^0 = H_0^T (H_1^T a^1 + G_1^T d^1) + G_0^T d^0 = H_0^T \cdot H_1^T a^1 + H_0^T \cdot G_1^T d^1 + G_0^T d^0 = \\ &= v^1 + w^1 + w^0, \end{aligned}$$

где  $v^1 \in V_1, w^1 \in W_1$ . Применив аналогичную процедуру к векторам вейвлет-коэффициентов  $a^1, \dots, a^{j-1}$ , получим соотношение

$$v = H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T a^j + H_0^T \cdot \dots \cdot H_{j-1}^T \cdot G_j^T d^j + \dots + G_0^T d^0 = v^j + w^j + \dots + v^0,$$

где  $v^j \in V_j, w^j \in W_j$ . Примем, что базисами  $V_j$  и  $W_j$  являются строки матриц  $H_j \cdot \dots \cdot H_0$  и  $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$  соответственно размера  $n_j/2 \times n$ .

Из соотношений (4) для векторов вейвлет-коэффициентов  $a^j, \dots, a^0$  и  $d^j, \dots, d^0$  получаем, что

$$a^j = \tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 v, \quad d^j = \tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 v.$$

Примем, что базисами  $\tilde{V}_j$  и  $\tilde{W}_j$  являются строки матриц  $\tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$  и  $\tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$  соответственно размера  $n_j/2 \times n$ .

Ранги матриц  $H_j, H_{j-1}, \dots, H_0$  равны  $n_j/2, n_j, \dots, n$  соответственно, все строки каждой из них линейно независимы, следовательно, все строки матрицы  $H_j \cdot \dots \cdot H_0$  также линейно независимы, а это значит, что её строки могут являться базисом подпространства  $V_j$ . Схожие утверждения для матриц  $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0, \tilde{H}_j \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$  и  $\tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0$  доказываются аналогичным образом.

В силу того, что столбцы матрицы  $\begin{bmatrix} H_j^T & G_j^T \end{bmatrix}$  линейно независимы, строки матрицы

$$\begin{bmatrix} H_j \\ G_j \end{bmatrix} \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$$

также линейно независимы. Поскольку базисами подпространств  $V_j$  и  $W_j$  являются строки матриц  $H_j \cdot \dots \cdot H_0$  и  $G_j \cdot H_{j-1} \cdot \dots \cdot H_0$  соответственно, их пересечение — нулевое подпространство, что означает, что  $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ . Поскольку базисные векторы подпространства  $V_j$  суть невырожденные линейные комбинации базисных векторов подпространства  $V_{j-1}$ , то  $V_j \subset V_{j-1}$ . Схожие утверждения для подпространств  $\tilde{V}_{j-1}, \tilde{V}_j$  и  $\tilde{W}_j$  доказываются аналогично.

Без ограничения общности докажем ортогональность подпространств  $V_j$  и  $\tilde{W}_j$ , ортогональность подпространств  $\tilde{V}_j$  и  $W_j$  доказывается аналогично. Рассмотрим скалярное произведение произвольных векторов  $v^j \in V_j, \tilde{w}^j \in \tilde{W}_j$  и покажем, что оно равно нулю. Согласно выбору базиса подпространств  $V_j$  и  $\tilde{W}_j$ , векторы  $v^j$  и  $\tilde{w}^j$  представимы в виде

$$v^j = H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x, \quad \tilde{w}^j = \tilde{H}_0^T \cdot \dots \cdot \tilde{H}_{j-1}^T \cdot \tilde{G}_j^T y,$$

где  $x$  и  $y$  — векторы длины  $n_j/2$ , состоящие из элементов поля  $\text{GF}(q)$ . Тогда

$$\langle \tilde{w}^j, v^j \rangle = \left\langle \tilde{H}_0^T \cdot \dots \cdot \tilde{H}_{j-1}^T \cdot \tilde{G}_j^T y, H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x \right\rangle = y^T \tilde{G}_j \cdot \tilde{H}_{j-1} \cdot \dots \cdot \tilde{H}_0 \cdot H_0^T \cdot \dots \cdot H_j^T x = 0$$

в силу того, что пары фильтров анализа и синтеза каждого из уровней разложения удовлетворяют условию биортогональности (6). ■

Не освещённым остался единственный вопрос, а именно: какое количество уровней вейвлет-разложения может быть построено или, другими словами, каков диапазон допустимых значений для параметра  $j$ . Согласно (3), разложение начинается с нулевого шага, поэтому наименьшим значением для  $j$  является 0. С другой стороны, длина последовательностей вейвлет-коэффициентов на  $j$ -м шаге разложения равна  $n_j/2$ , поэтому максимально возможное значение  $j$  должно быть таким, что  $2^{j+1}$  делит  $n$ , обозначим это значение через  $J$ . Таким образом, номер уровня разложения  $j$  удовлетворяет условию

$$0 \leq j \leq J. \quad (8)$$

На основании сказанного приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1** (о биортогональном разбиении векторного пространства).

Существуют представления векторного пространства  $V$

$$\begin{aligned} V &= W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_J \oplus V_J, \\ V &= \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{W}_J \oplus \tilde{V}_J, \end{aligned}$$

такие, что для каждого  $j$ , удовлетворяющего условию (8), подпространство  $V_j$  ортогонально  $\tilde{W}_j$ , а подпространство  $W_j$  ортогонально  $\tilde{V}_j$ .

**Доказательство.** Имея для каждого уровня вейвлет-разложения от 0 до  $J$  пары фильтров анализа и синтеза, удовлетворяющие условию биортогональности (6), и применяя на каждом из уровней лемму 1, в явном виде строим представления, описанные в условии теоремы. ■

Таким образом, задача построения цепочки вложенных подпространств сводится к задаче построения фильтров  $h^j$ ,  $g^j$  и  $\tilde{h}^j$ ,  $\tilde{g}^j$   $j$ -го уровня вейвлет-разложения, для решения которой автором разработаны два подхода. В первом из них фильтр  $h^j$  выбирается заново для каждого уровня разложения, а фильтры  $g^j$ ,  $\tilde{h}^j$ ,  $\tilde{g}^j$  достраиваются по нему при помощи методики, описанной в [10]. Второй подход основывается на использовании модифицированной версии алгоритма построения фильтров  $j$ -го уровня разложения, представленного в [3] для ортогональных вейвлет-преобразований. Суть модификации заключается в отказе от использования преобразования Фурье. Доказана корректность проделанной модификации, а также применимость модифицированного алгоритма для построения фильтров  $j$ -го уровня разложения биортогональных вейвлет-преобразований. Далее оба подхода рассмотрены более подробно.

## 2. Построение уровневых фильтров при помощи алгоритма Евклида

Пусть  $j$  удовлетворяет условию (8). Поставим уровневым фильтрам  $h^j$ ,  $g^j$  и  $\tilde{h}^j$ ,  $\tilde{g}^j$  длины  $n_j$  в соответствие многочлены

$$\begin{aligned} h^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} h_i^j x^i, & g^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} g_i^j x^i, \\ \tilde{h}^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} \tilde{h}_i^j x^i, & \tilde{g}^j(x) &= \sum_{i=0}^{n_j-1} \tilde{g}_i^j x^i, \end{aligned}$$

степени которых не превосходят  $n_j - 1$ , и представим эти многочлены в виде суммы полифазных компонент. Многочлены  $h_e^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j/2-1} h_{2k}^j x^k$  и  $h_o^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j/2-1} h_{2k+1}^j x^k$  называются полифазными компонентами многочлена  $h^j(x)$  и содержат только его чётные и нечётные компоненты соответственно. Тогда многочлен  $h^j(x)$  представим в виде суммы полифазных компонент  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$ :

$$h^j(x) = h_e^j(x^2) + x h_o^j(x^2).$$

Аналогичное представление существует и для многочленов  $g^j(x)$ ,  $\tilde{h}^j(x)$ ,  $\tilde{g}^j(x)$ . Степени полифазных компонент не превосходят  $n_j/2 - 1$ , и в дальнейшем эти компоненты рассматриваются как элементы кольца многочленов  $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$ .

По аналогии с [8], при помощи полифазных компонент для пар фильтров  $h^j$ ,  $g^j$  и  $\tilde{h}^j$ ,  $\tilde{g}^j$  введём полифазные матрицы

$$P_j(x) = \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \tilde{P}_j(x) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^j(x) & \tilde{g}_e^j(x) \\ \tilde{h}_o^j(x) & \tilde{g}_o^j(x) \end{bmatrix}.$$

Как уже было отмечено, пары фильтров  $h^j$ ,  $g^j$  и  $\tilde{h}^j$ ,  $\tilde{g}^j$  должны удовлетворять условию биортогональности (6), которое эквивалентно условию точного восстановления (7). Для полифазных матриц, согласно [8], условие точного восстановления (7) переписывается в виде

$$P_j(x) \tilde{P}_j^T(x^{n_j/2-1}) = I_2. \quad (9)$$

На основании результатов работы [10], пара фильтров  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  может быть построена по паре  $h^j, g^j$  при помощи соотношений

$$\tilde{h}^j(x) = -xg(-x^{n_j-1}), \quad \tilde{g}^j(x) = xh(-x^{n_j-1}). \quad (10)$$

Таким образом, задача построения уровневых фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  сводится к задаче построения пары фильтров  $h^j, g^j$ , которая решается при помощи алгоритма построения комплементарных фильтров над конечными полями [10]. Пара фильтров называется комплементарной, если определитель соответствующей им полифазной матрицы равен единице. Согласно [10], полифазные компоненты  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$  многочлена  $h^j(x)$  при помощи алгоритма Евклида нахождения НОД из [13] представимы в виде

$$\begin{bmatrix} h_e^j(x) \\ h_o^j(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{L_j} \begin{bmatrix} q_i^j(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $q_i^j(x)$ ,  $i = 1, \dots, L_j$ , — неполные частные;  $K_j$  — наибольший общий делитель многочленов  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$ . Заметим, что в силу специфики определения операции деления в кольце  $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$  ответ, возвращаемый алгоритмом, не является единственным возможным. Таким образом, если  $K_j$  является обратимым в  $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$ , то при помощи полученного представления для фильтра  $h^j$  всегда может быть построен комплементарный ему фильтр  $g^j$ , причём их полифазная матрица  $P_j(x)$  определяется как

$$P_j(x) = \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{L_j} \begin{bmatrix} q_i^j(x) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j & 0 \\ 0 & (-1)^{L_j}(1/K_j) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где  $(-1)$  — элемент, обратный 1 по сложению в поле  $\text{GF}(q)$ ;  $(1/K_j)$  — элемент, обратный  $K_j$  по умножению в кольце  $\text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$ . Стоит отметить, что фильтр  $g^j$ , комплементарный фильтру  $h^j$ , определяется не однозначно. В самом деле, пусть  $s^j(x) \in \text{GF}(q)[x]/(x^{n_j/2} - 1)$  — некоторый многочлен, тогда фильтр  $g_s^j$ , которому соответствует многочлен  $g_s^j(x) = g^j(x) + h^j(x)s^j(x^2) \bmod (x^{n_j} - 1)$ , также комплементарен фильтру  $h^j$ .

Таким образом, алгоритм, позволяющий генерировать пары уровневых фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  длины  $n_j$ , состоит из следующих шагов:

- 1) в качестве фильтра  $h^j$  выбрать последовательность произвольных элементов поля  $\text{GF}(q)$  длины  $n_j$ , такую, что наибольший общий делитель полифазных компонент  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$  многочлена  $h^j(x)$  является одночленом;
- 2) при помощи полученного алгоритмом Евклида представления (11), воспользовавшись соотношением (12), построить фильтр  $g^j$ , комплементарный  $h^j$ ;
- 3) при помощи соотношений (10) построить пару фильтров  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$ .

### 3. Построение уровневых фильтров при помощи модифицированного алгоритма Кайре — Гроссмана — Пура

Обратимся к описанию второго подхода к построению уровневых фильтров, который, в отличие от первого, для построения пар фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  использует исходные фильтры  $h, g$  и  $\tilde{h}, \tilde{g}$  и основан на модифицированной версии алгоритма [3]. Пусть  $j$  удовлетворяет условию (8), проиллюстрируем шаги исходного алгоритма Кайре — Гроссмана — Пура на примере построения фильтра  $h^j$  с длиной  $n_j$ :

- 1) построить поле  $\text{GF}(q^r)$ , такое, что оно содержит элемент  $\alpha_0$  порядка  $n/2$ ;



- 2) для полифазных компонент  $h_e(x)$  и  $h_o(x)$  фильтра  $h$  вычислить последовательности значений

$$\left\{ h_e \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} i} \right) \right\}_{i=0}^{n_j/2-1} \quad \text{и} \quad \left\{ h_o \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} i} \right) \right\}_{i=0}^{n_j/2-1}; \quad (13)$$

- 3) применить обратное преобразование Фурье к полученным последовательностям и с его помощью вычислить полифазные компоненты  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$  фильтра  $h^j$ ;  
 4) восстановить фильтр  $h^j$  по его полифазным компонентам  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$ .

Несмотря на простоту шагов, применимость данного алгоритма ограничена, так как используемое в нём преобразование Фурье не существует для исходных фильтров произвольной длины  $n$ , поэтому основная цель проделанных модификаций заключается в отказе от преобразования Фурье.

Рассмотрим сумму  $\sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik}$ , где  $a_k, k = 0, \dots, n/2 - 1$ , — элементы расширения поля  $\text{GF}(q)$ , в котором находится  $\alpha_0$ . С учётом того, что элемент  $\alpha_0^{n/n_j}$  имеет порядок  $n_j/2$ , в последовательности значений

$$\left\{ \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik} \right\}_{k=0}^{n/2-1}$$

можно выделить повторяющиеся участки длиной  $n_j/2$ , что позволяет представить исходную сумму в виде двух сумм:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik} &= \sum_{k=0}^{n/2-1} a_k \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} k} \right)^i = a_0 \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n_j/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \\ &+ a_{n_j/2} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} n_j/2} \right)^i + \dots + a_{2n_j/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (2n_j/2-1)} \right)^i + \dots + \\ &+ a_{n/2-n_j/2} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n/2-n_j/2)} \right)^i + \dots + a_{n/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n/2-1)} \right)^i = \\ &= a_0 \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n_j/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \\ &+ a_{n_j/2} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{2n_j/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i + \dots + \\ &+ a_{n/2-n_j/2} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} 0} \right)^i + \dots + a_{n/2-1} \left( \alpha_0^{\frac{n}{n_j} (n_j/2-1)} \right)^i = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} a_{(n_j/2)k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами выкладок, получаем, что последовательности значений (13) могут быть записаны как

$$\left\{ \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} \right\}_{i=0}^{n_j/2-1} \quad \text{и} \quad \left\{ \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} \alpha_0^{\frac{n}{n_j} ik_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1} \right\}_{i=0}^{n_j/2-1}$$

и являются спектрами многочленов

$$\sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} \quad \text{и} \quad \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1}$$

соответственно, степени которых не превосходят  $n_j/2 - 1$ ; через  $h_{e,k}$  и  $h_{o,k}$  обозначены коэффициенты многочленов  $h_e(x)$  и  $h_o(x)$  при степени  $k$ . Это означает, что многочлены  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$ , соответствующие спектрам (13), могут быть получены в виде

$$\begin{aligned} h_e^j(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{e,(n_j/2)k_2+k_1} = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)}, \\ h_o^j(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{o,(n_j/2)k_2+k_1} = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)+1}. \end{aligned}$$

Восстановим многочлен  $h^j(x)$  по его полифазным компонентам  $h_e^j(x)$  и  $h_o^j(x)$ :

$$h^j(x) = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \quad (14)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} h^j(x) &= h_e^j(x^2) + x h_o^j(x^2) = \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)} + \\ &+ x \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{2((n_j/2)k_2+k_1)+1} = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+2k_1} + \sum_{k_1=0}^{n_j/2-1} x^{2k_1+1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+2k_1+1} = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Построение уровневых фильтров  $g^j, \tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  описывается аналогичными соотношениями. Отметим, что в (14) для построения уровневого фильтра  $h^j$  используется фильтр  $h$ , однако его можно переписать таким образом, чтобы для построения  $h^j$  использовался фильтр  $h^{j-1}$ :

$$h^j(x) = \sum_{k=0}^{n_j-1} \left( h_k^{j-1} + h_{n_j+k}^{j-1} \right) x^k. \quad (15)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n_j-1} \left( h_k^{j-1} + h_{n_j+k}^{j-1} \right) x^k = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left( h_{k_1}^{j-1} + h_{n_j+k_1}^{j-1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left( \sum_{k_2=0}^{(n/n_j)-1} h_{n_{j-1}k_2+k_1} + \sum_{k_2=0}^{(n/n_j)-1} h_{n_{j-1}k_2+n_j+k_1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \left( \sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} h_{2n_j k_2+k_1} + \sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} h_{2n_j k_2+n_j+k_1} \right) = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{(n/(2n_j))-1} \left( h_{2n_j k_2+k_1} + h_{n_j(2k_2+1)+k_1} \right) = \sum_{k_1=0}^{n_j-1} x^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n/n_j-1} h_{n_j k_2+k_1}. \end{aligned}$$

Докажем две леммы, обосновывающих корректность использования описанного подхода для построения уровневых фильтров биортогонального вейвлет-преобразования.

**Лемма 2.** Если пары фильтров  $h^{j-1}, g^{j-1}$  и  $\tilde{h}^{j-1}, \tilde{g}^{j-1}$  являются комплементарными, то полученные из них при помощи соотношения (15) пары  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  также являются комплементарными.

**Доказательство.** Без ограничения общности докажем утверждение только для пары фильтров  $h^j, g^j$ , доказательство для пары  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  аналогично. В связи с использованием соотношения (15) представим полифазные компоненты фильтров  $h^{j-1}, g^{j-1}$  в виде

$$\begin{aligned} h_e^{j-1}(x) &= h_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{e,1}^{j-1}(x), & h_o^{j-1}(x) &= h_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{o,1}^{j-1}(x), \\ g_e^{j-1}(x) &= g_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{e,1}^{j-1}(x), & g_o^{j-1}(x) &= g_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{o,1}^{j-1}(x). \end{aligned} \quad (16)$$

По условию фильтры  $h^{j-1}$  и  $g^{j-1}$  являются комплементарными, поэтому, с учётом введённых обозначений, условие комплементарности для них запишется как

$$\begin{aligned} \det P_{j-1}(x) &= h_e^{j-1}(x)g_o^{j-1}(x) - h_o^{j-1}(x)g_e^{j-1}(x) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{e,1}^{j-1}(x)) (g_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{o,1}^{j-1}(x)) - \\ &\quad - (h_{o,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} h_{o,1}^{j-1}(x)) (g_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2} g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x)g_{o,0}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x)g_{e,0}^{j-1}(x)) + x^{n_j/2} (h_{e,1}^{j-1}(x)g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,0}^{j-1}(x)g_{o,1}^{j-1}(x) - \\ &\quad - h_{o,1}^{j-1}(x)g_{e,0}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x)g_{e,1}^{j-1}(x)) + x^{n_j} (h_{e,1}^{j-1}(x)g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x)g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x)g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,1}^{j-1}(x)g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,0}^{j-1}(x)g_{e,0}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x)g_{e,1}^{j-1}(x)) + \\ &\quad + x^{n_j/2} (h_{e,1}^{j-1}(x)g_{o,0}^{j-1}(x) + h_{e,0}^{j-1}(x)g_{o,1}^{j-1}(x) - h_{o,1}^{j-1}(x)g_{e,0}^{j-1}(x) - \\ &\quad - h_{o,0}^{j-1}(x)g_{e,1}^{j-1}(x)) \bmod (x^{n_j} - 1) = p_0(x) + x^{n_j/2} p_1(x) \bmod (x^{n_j} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j} - 1). \end{aligned}$$

Теперь проверим выполнимость условия комплементарности для пары фильтров  $h^j, g^j$ :

$$\begin{aligned} \det P_j(x) &= h_e^j(x)g_o^j(x) - h_o^j(x)g_e^j(x) = \\ &= (h_{e,0}^{j-1}(x) + h_{e,1}^{j-1}(x)) (g_{o,0}^{j-1}(x) + g_{o,1}^{j-1}(x)) - (h_{o,0}^{j-1}(x) + h_{o,1}^{j-1}(x)) (g_{e,0}^{j-1}(x) + g_{e,1}^{j-1}(x)) = \\ &= p_0(x) + p_1(x) = p_0(x) + x^{n_j/2} p_1(x) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j/2} - 1). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана. ■

**Замечание 1.** Пары фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$ , полученные из комплементарных пар  $h, g$  и  $\tilde{h}, \tilde{g}$  соответственно при помощи соотношения (14), являются комплементарными для любого  $j$ , удовлетворяющего условию (8).

**Лемма 3.** Если пары фильтров  $h^{j-1}, g^{j-1}$  и  $\tilde{h}^{j-1}, \tilde{g}^{j-1}$  удовлетворяют условию точного восстановления (9), то полученные из них при помощи соотношения (15) пары  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$  также ему удовлетворяют.

**Доказательство.** Пары фильтров  $h^{j-1}, g^{j-1}$  и  $\tilde{h}^{j-1}, \tilde{g}^{j-1}$ , по условию леммы, удовлетворяют условию точного восстановления, которое для них записывается в виде

$$\begin{aligned} P_{j-1}(x) \tilde{P}_{j-1}^T(x^{(n_{j-1}/2)-1}) &= \begin{bmatrix} h_e^{j-1}(x) & g_e^{j-1}(x) \\ h_o^{j-1}(x) & g_o^{j-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & \tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \\ \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & \tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \\ h_o^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_o^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) & h_o^{j-1}(x)\tilde{h}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_o^{j-1}(x)\tilde{g}_o^{j-1}(x^{n_j-1}) \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Выполнимость условия точного восстановления для пар фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$ , в свою очередь, означает выполнимость равенства

$$\begin{aligned} P_j(x) \tilde{P}_j^T(x^{(n_j/2)-1}) &= \begin{bmatrix} h_e^j(x) & g_e^j(x) \\ h_o^j(x) & g_o^j(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & \tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \\ \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & \tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} h_e^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & h_e^j(x)\tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \\ h_o^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_o^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) & h_o^j(x)\tilde{h}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_o^j(x)\tilde{g}_o^j(x^{(n_j/2)-1}) \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Без ограничения общности докажем, что из условия

$$h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) = 1 \pmod{(x^{n_j} - 1)}$$

следует равенство

$$h_e^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) = 1 \pmod{(x^{n_j/2} - 1)},$$

три аналогичных утверждения доказываются схожим образом.

По аналогии с (16), представим полифазные компоненты  $\tilde{h}_e^{j-1}(x)$  и  $\tilde{g}_e^{j-1}(x)$  в виде

$$\tilde{h}_e^{j-1}(x) = \tilde{h}_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2}\tilde{h}_{e,1}^{j-1}(x), \quad \tilde{g}_e^{j-1}(x) = \tilde{g}_{e,0}^{j-1}(x) + x^{n_j/2}\tilde{g}_{e,1}^{j-1}(x).$$

Рассмотрим многочлен  $a(x) = \sum_{k=0}^{n_j-1} a_k x^k$  степени  $n_j - 1$  над полем  $\text{GF}(q)$ , представимый

как  $a(x) = a_0(x) + x^{n_j/2}a_1(x)$ , где  $a_0(x) = \sum_{k=0}^{(n_j/2)-1} a_k x^k$  и  $a_1(x) = \sum_{k=0}^{(n_j/2)-1} a_{(n_j/2)+k} x^k$  — многочлены над полем  $\text{GF}(q)$ , степени которых не превосходят  $n_j/2 - 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} a_0(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2)(k-1) + (n_j/2) - k} \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2) - k} = a_0 + a_{0,1}^*(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= a_{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2)(k-1) + (n_j/2) - k} \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} = \\ &= a_{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2) - k} = a_{n_j/2} + a_{1,1}^*(x), \end{aligned}$$

где  $a_{0,1}^*(x)$  и  $a_{1,1}^*(x)$  — многочлены над полем  $\text{GF}(q)$ , свободный член которых равен нулю, а степени не превосходят  $n_j/2 - 1$ . В свою очередь, по аналогии получим

$$\begin{aligned} a(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= a_0 + \sum_{k=1}^{n_j-1} a_k x^{n_j-k} = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{n_j-k} + a_{n_j/2} x^{n_j/2} + \sum_{k=(n_j/2)+1}^{n_j-1} a_k x^{n_j-k} = \\ &= a_0 + x^{n_j/2} \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_k x^{(n_j/2)-k} + a_{n_j/2} x^{n_j/2} + \sum_{k=1}^{(n_j/2)-1} a_{n_j/2+k} x^{(n_j/2)-k} = \\ &= a_0 + a_{1,1}^*(x) + x^{n_j/2} (a_{n_j/2} + a_{0,1}^*(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= \tilde{h}'_{e,0}(x) + x^{n_j/2}\tilde{h}'_{e,1}(x), \\ \tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= \tilde{h}'_{e,0}(x) + \tilde{h}'_{e,1}(x), \\ \tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \pmod{(x^{n_j} - 1)} &= \tilde{g}'_{e,0}(x) + x^{n_j/2}\tilde{g}'_{e,1}(x), \\ \tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \pmod{(x^{n_j/2} - 1)} &= \tilde{g}'_{e,0}(x) + \tilde{g}'_{e,1}(x), \end{aligned} \tag{17}$$

степени многочленов  $\tilde{h}'_{e,0}(x)$ ,  $\tilde{h}'_{e,1}(x)$ ,  $\tilde{g}'_{e,0}(x)$  и  $\tilde{g}'_{e,1}(x)$  не превосходят  $n_j/2 - 1$ .

На основании соотношений (16) и (17), осуществив выкладки, аналогичные проделанным при доказательстве леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} h_e^{j-1}(x)\tilde{h}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) + g_e^{j-1}(x)\tilde{g}_e^{j-1}(x^{n_j-1}) \bmod (x^{n_j} - 1) = \\ = p_0(x) + x^{n_j/2}p_1(x) \bmod (x^{n_j} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j} - 1) \end{aligned}$$

и, в свою очередь,

$$\begin{aligned} h_e^j(x)\tilde{h}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) + g_e^j(x)\tilde{g}_e^j(x^{(n_j/2)-1}) \bmod (x^{n_j/2}-1) = p_0(x) + p_1(x) \bmod (x^{n_j/2}-1) = \\ = p_0(x) + x^{n_j/2}p_1(x) \bmod (x^{n_j/2} - 1) = 1 \bmod (x^{n_j/2} - 1). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана. ■

**Замечание 2.** Пары фильтров  $h^j, g^j$  и  $\tilde{h}^j, \tilde{g}^j$ , полученные из удовлетворяющих условию точного восстановления (9) пар  $h, g$  и  $\tilde{h}, \tilde{g}$  при помощи соотношения (14), также удовлетворяют условию точного восстановления для любого  $j$ , подпадающего под ограничение (8).

Таким образом, описанный подход позволяет генерировать фильтры  $j$ -го уровня разложения как по исходным фильтрам при помощи соотношения (14), так и по фильтрам  $(j-1)$ -го уровня разложения при помощи соотношения (15).

#### 4. Схема построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения

Изложенные подходы к построению уровневых фильтров дают возможность построить на их основе новое семейство биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения. Основная идея, лежащая в основе нового семейства кодов, заключается в применении на  $j$ -м уровне разложения представленной на рис. 1 процедуры кодирования сообщений, использующей уровневые фильтры  $h^j$  и  $g^j$ . При этом на вход подаётся результат кодирования, полученный на  $(j+1)$ -м уровне разложения. Схему построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения, будем называть пирамидальной. Рассмотрим её подробнее.

Обозначим  $v^j$  — информационное слово, кодируемое на  $j$ -м уровне вейвлет-разложения;  $c^j$  — результат кодирования. Тогда, согласно описанному принципу,  $v^{j-1} = c^j$ ,  $v^J = v$ ,  $c = c^0$ . Кодирование на  $j$ -м уровне разложения осуществляется при помощи матрицы

$$A_j = H_j^T + \lambda_j G_j^T \Pi_j, \quad (18)$$

где  $\Pi_j$  — циркулянтная матрица размера  $n_j/2 \times n_j/2$ , первая строка которой имеет вид  $(0, 0, 0, \dots, 1)$ ;  $\lambda_j$  — произвольный ненулевой элемент поля  $\text{GF}(q)$ . Тогда порождающая матрица кода имеет вид

$$A = \prod_{j=0}^J (H_j^T + \lambda_j G_j^T \Pi_j).$$

Проверочная матрица кода находится стандартным способом [9].

**Лемма 4.** Циклический сдвиг кодового слова  $c$  на  $2^{J+1}$  позиций вправо также является кодовым словом.

**Доказательство.** Покажем, что  $\hat{c}^j = A_j \hat{v}^j$ , где  $\hat{v}^j$  является циклическим сдвигом  $v^j$  на  $\Delta$  позиций вправо, является циклическим сдвигом  $c^j = A_j v^j$  на  $2\Delta$  позиций

вправо. В самом деле,  $c^j = A_j v^j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_i^j \text{col}_i A_j$ , где  $v_i^j$  —  $i$ -я компонента вектора  $v^j$ ;  $\text{col}_i A_j$  —  $i$ -й столбец матрицы  $A_j$ . С другой стороны,

$$\hat{c}^j = A_j \hat{v}^j = \sum_{i=0}^{n_j/2} \hat{v}_i^j \text{col}_i A_j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_{(i+\Delta) \bmod (n_j/2)}^j \text{col}_i A_j = \sum_{i=0}^{n_j/2} v_i^j \text{col}_{(i+\Delta) \bmod (n_j/2)} A_j,$$

где  $\hat{v}_i^j$  —  $i$ -я компонента вектора  $\hat{v}^j$ . По построению  $A_j^T$  является 2-циркулянтной матрицей, следовательно, столбец матрицы  $A_j$  с номером  $(i+\Delta) \bmod (n_j/2)$  является циклическим сдвигом  $i$ -го столбца на  $2\Delta$  позиций вправо; значит,  $\hat{c}_j$  является циклическим сдвигом  $c_j$  на  $2\Delta$  позиций вправо.

Пусть информационное слово  $\hat{v}$  является циклическим сдвигом информационного слова  $v$  на одну позицию вправо. Тогда, согласно доказанному выше,  $\hat{c}^J$  — циклический сдвиг  $c^J$  на 2 позиции вправо,  $\hat{c}^{J-1}$  — циклический сдвиг  $c^{J-1}$  на 4 позиции вправо, и так далее. Кодовое слово  $\hat{c}$  является циклическим сдвигом кодового слова  $c$  на  $2^{J+1}$  позиций вправо. ■

Это означает, что, согласно [9], представленные коды также относятся к подклассу квазициклических кодов, но уже с циклическим сдвигом кодовых слов на  $2^{J+1}$  позиций.

Таким образом, описана пирамидальная схема построения биортогональных вейвлет-кодов над полем  $\text{GF}(q)$ , использующих несколько уровней вейвлет-разложения и имеющих длину кодовых и информационных слов  $n$  и  $n/2^{J+1}$  соответственно и скорость кодирования  $1/2^{J+1}$ . Её ключевым преимуществом является возможность варьировать скорость кодирования путём изменения числа используемых уровней вейвлет-разложения, в то время как в представленных в предшествующих работах схемах скорость кодирования всегда равна  $1/2$ . Для иллюстрации схемы построения кода и непосредственно процесса кодирования рассмотрим несколько примеров. При анализе свойств кодов используется относительное кодовое расстояние, определяемое как отношение кодового расстояния к длине кодовых слов:

$$\delta = \frac{d}{n}.$$

**Пример 1.** Построим биортогональный вейвлет-код над полем  $\text{GF}(2)$  с длиной кодовых и информационных слов  $n = 16$  и  $k = 4$  соответственно, использующий два уровня вейвлет-разложения. Фильтр  $h$  зададим при помощи многочлена

$$h(x) = 1 + x + x^3 + x^4 + x^{13}.$$

Воспользовавшись алгоритмом п. 2, построим фильтры для нулевого и первого уровней вейвлет-разложения. Фильтр  $h^0$  зададим при помощи многочлена  $h^0(x) = h(x)$ , полифазные компоненты которого определяются как

$$h_e^0(x) = 1 + x^2 \quad \text{и} \quad h_o^0(x) = 1 + x + x^6.$$

При помощи алгоритма Евклида находим представление полифазных компонент  $h_e^0(x)$  и  $h_o^0(x)$  в виде (11):

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) \\ h_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + x^2 + x^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда при помощи соотношения (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) & g_e^0(x) \\ h_o^0(x) & g_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+x^2+x^4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр  $g^0$ :

$$g^0(x) = x + x^2 + x^3 + x^7 + x^{11}.$$

В соответствии с (10) находим пару фильтров  $\tilde{h}^0$  и  $\tilde{g}^0$ , она определяется многочленами

$$\begin{aligned} \tilde{h}^0(x) &= 1 + x^6 + x^{10} + x^{14} + x^{15}, \\ \tilde{g}^0(x) &= 1 + x + x^4 + x^{13} + x^{14}. \end{aligned}$$

Фильтр  $h^1$  зададим при помощи многочлена  $h^1(x) = h_o^0(x)$ , полифазные компоненты которого суть

$$h_e^1(x) = 1 + x^3 \quad \text{и} \quad h_o^1(x) = 1.$$

При помощи алгоритма Евклида находим представление полифазных компонент  $h_e^1(x)$  и  $h_o^1(x)$  в виде (11):

$$\begin{bmatrix} h_e^1(x) \\ h_o^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда по соотношению (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^1(x) & g_e^1(x) \\ h_o^1(x) & g_o^1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр  $g^1$  многочленом

$$g^1(x) = 1.$$

Воспользовавшись соотношениями (10), находим пару фильтров  $\tilde{h}^1$  и  $\tilde{g}^1$ , она задаётся многочленами

$$\begin{aligned} \tilde{h}^1(x) &= x, \\ \tilde{g}^1(x) &= 1 + x + x^3. \end{aligned}$$

Теперь, когда найдены фильтры для каждого из уровней разложения, по (18) вычислим матрицы, при помощи которых осуществляется кодирование:

– матрица нулевого уровня вейвлет-разложения:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T;$$

– матрица первого уровня:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Порождающая матрица кода имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Экспериментально установлено, что кодовое расстояние биортогональных вейвлет-кодов с порождающими матрицами  $A_1$  и  $A$  равны 4 и 8 соответственно, относительное кодовое расстояние при этом осталось неизменным. Кодовому слову  $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$  веса 4 соответствует информационное слово  $(0, 0, 0, 1)$ , кодовому слову  $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$  веса 8 также соответствует информационное слово  $(0, 0, 0, 1)$ .

**Пример 2.** Построим биортогональный вейвлет-код над полем  $\text{GF}(3)$  с длиной кодовых и информационных слов  $n = 12$  и  $k = 3$  соответственно, использующий два уровня вейвлет-разложения. Параметры  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  примем равными единице, фильтр  $h$  зададим при помощи многочлена

$$h(x) = 1 + x^7.$$

По алгоритму п. 2 построим фильтры для нулевого уровня разложения; фильтры для первого уровня построим при помощи алгоритма из п. 3. Фильтр  $h^0$  зададим многочленом  $h^0(x) = h(x)$ , полифазные компоненты которого определяются как

$$h_e^0(x) = 1 \text{ и } h_o^0(x) = x^3.$$

По алгоритму Евклида находим представление полифазных компонент  $h_e^0(x)$  и  $h_o^0(x)$  в виде (11)

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) \\ h_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда по (12) получаем

$$\begin{bmatrix} h_e^0(x) & g_e^0(x) \\ h_o^0(x) & g_o^0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что позволяет задать фильтр  $g^0$  многочленом

$$g^0(x) = x.$$

Воспользовавшись соотношениями (10), находим пару фильтров  $\tilde{h}^0$  и  $\tilde{g}^0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{h}^0(x) &= 1, \\ \tilde{g}^0(x) &= x + 2x^6. \end{aligned}$$

По (15) вычисляем фильтры для первого уровня разложения, они задаются такими многочленами:

$$\begin{aligned} h^1(x) &= 1 + x, \\ g^1(x) &= x, \\ \tilde{h}^1(x) &= 1, \\ \tilde{g}^1(x) &= 2 + x. \end{aligned}$$



Теперь, когда найдены фильтры для каждого из уровней разложения, в соответствии с (18) вычислим матрицы, при помощи которых осуществляется кодирование:  
 – матрица нулевого уровня вейвлет-разложения:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T ;$$

– матрица первого уровня:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Порождающая матрица кода имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T .$$

Экспериментально установлено, что кодовое расстояние биортогональных вейвлет-кодов с порождающими матрицами  $A_1$  и  $A$  равны 3 и 7 соответственно, относительное кодовое расстояние при этом выросло. Кодовому слову  $(0, 1, 0, 0, 1, 1)$  веса 3 соответствует информационное слово  $(0, 0, 1)$ , кодовому слову  $(1, 1, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 2, 0, 1, 1)$  веса 7 также соответствует информационное слово  $(1, 2, 2)$ .

### Заключение

В работе доказана теорема о существовании двух представлений векторного пространства в виде прямых сумм подпространств, связанных условиями биортогональности, и описаны два подхода к построению уровневых фильтров биортогонального вейвлет-преобразования. Первый подход основан на ранее использовавшемся для построения комплементарных фильтров алгоритме Евклида. Второй подход основан на модификации алгоритма [3], цель которой заключалась в отказе от применения преобразования Фурье. Доказана корректность подхода.

Теорема доказана конструктивным образом, что позволило описать пирамидальную схему построения биортогональных вейвлет-кодов, использующих несколько уровней вейвлет-разложения и имеющих скорость кодирования  $2^{-L}$ , где  $L$  — количество уровней. Построены коды  $W[16, 4, 8]$  над полем  $GF(2)$  и  $W[12, 3, 7]$  над полем  $GF(3)$ , численные эксперименты с которыми показали, что при определённом выборе исходных фильтров использование при кодировании нескольких уровней вейвлет-разложения приводит к росту относительного кодового расстояния.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Mallat S. Wavelet Tour of Signal Processing. 2nd ed. Boston: Academic Press, 1999. 799 p.
2. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999. 206 с.
3. Caire G., Grossman R. L., and Poor H. V. Wavelet transforms associated with finite cyclic groups // IEEE Trans. Inform. Theory. 1993. V. 39. No. 4. P. 1157–1166.

4. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of wavelet transform over finite fields // Proc. IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1999. V. 3. P. 1213–1216.
5. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Double circulant self-dual codes using finite-field wavelet transforms // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Berlin: Springer, 1999. P. 355–363.
6. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Error control coding using finite-field wavelet transforms // Atlanta: Center for Signal Image Processing, 1999. P. 1–13.
7. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of paraunitary filter banks over fields of characteristic two // IEEE Trans. Inform. Theory. 2002. V. 48. No. 11. P. 2964–2979.
8. *Черников Д. В.* Помехоустойчивое кодирование с использованием биортогональных наборов фильтров точного восстановления // Труды конференции «Информационные технологии и системы». Светлогорск, 2013. С. 507–512.
9. *Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А.* Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1974. 744 с.
10. *Черников Д. В.* Помехоустойчивое кодирование с использованием биортогональных наборов фильтров // Сибирские электрон. матем. известия. 2015. Т. 12. С. 704–713.
11. *Соловьев А. А., Черников Д. В.* Биортогональные вейвлет-коды с заданным кодовым расстоянием // Дискретная математика. 2017. Т. 29. № 2 С. 96–108.
12. *Соловьев А. А., Черников Д. В.* Биортогональные вейвлет-коды в полях характеристики два // Челяб. физ.-мат. журн. 2017. Т. 2. № 1. С. 66–79.
13. *Doubechies I. and Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps // J. Fourier Analysis Appl. 1998. V. 4. No. 3. P. 247–269.

## REFERENCES

1. *Mallat S.* Wavelet Tour of Signal Processing, 2nd ed. Boston, Academic Press, 1999. 799 p.
2. *Vorobyov V. I. and Gribunin V. G.* Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya [Theory and Practice of Wavelet Transform]. S-Petersburg, VUS Publ., 1999. 206 p. (in Russian)
3. *Caire G., Grossman R. L., and Poor H. V.* Wavelet transforms associated with finite cyclic groups. IEEE Trans. Inform. Theory, 1993. vol. 39, no. 4, pp. 1157–1166.
4. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of wavelet transform over finite fields. Proc. IEEE Intern. Conf. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999, vol. 3, pp. 1213–1216.
5. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Double circulant self-dual codes using finite-field wavelet transforms. Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Berlin, Springer, 1999, pp. 355–363.
6. *Fekri F., McLaughlin S. W., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Error control coding using finite-field wavelet transforms. Atlanta, Center for Signal Image Processing, 1999, pp. 1–13.
7. *Fekri F., Mersereau R. M., and Schafer R. W.* Theory of paraunitary filter banks over fields of characteristic two. IEEE Trans. Inform. Theory, 2002. vol. 48, no. 11, pp. 2964–2979.
8. *Chernikov D. V.* Pomexhoustojchivoe kodirovanie s ispol'zovaniem biortogonal'nyh naborov fil'trov tochnogo vosstanovleniya [Error-correcting codes using biorthogonal perfect reconstruction filter banks]. Proc. Conf. “Information Technologies and Systems”, Svetlogorsk, 2013, pp. 507–512. (in Russian)
9. *MacWilliams F. G. and Sloane N. J. A.* The Theory of Error Correcting Codes. North-Holland, 1977. 796 p.
10. *Chernikov D. V.* Pomexhoustoychivoye kodirovaniye s ispol'zovaniyem biortogonal'nykh naborov fil'trov [Error-correcting codes using biorthogonal filter banks]. Siberian Electronic Math. Rep., 2015, vol. 12, pp. 704–713. (in Russian)

11. *Soloviev A. A. and Chernikov D. V.* Biorthogonal wavelet codes with prescribed code distance. *Discrete Math. Appl.*, 2018, vol. 28, no. 3 pp. 179–188.
12. *Soloviev A. A. and Chernikov D. V.* Biortogonal'nyye veyvlet kody v polyakh kharakteristiki dva [Biorthogonal wavelet codes in the fields of characteristic two]. *Chelyabinsk Physics Math. J.*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 66–79. (in Russian)
13. *Doubechies I. and Sweldens W.* Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Analysis and Appl.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 247–269.