Jurnal Diferensial, Volume 03, Nomor 01, April 2021
E-ISSN: 2775-9644

Analisis Kepositifan, Terbatas dan Stabil Global Model Matematika Interaksi Antar Mahasiswa di Perguruan Tinggi

Ariyanto[1], Noldi K. Kasse[2]
[1,2]Program Studi Matematika, FST, Universitas Nusa Cendana

Abstrak

Interaksi mahasiswa di perguruan tinggi merupakan suatu dinamika kehidupan sosial dalam suatu selang waktu tertentu. Interaksi antar mahasiswa tersebut bisa berdampak positif maupun negatif. Salah satu contoh dampak positif adalah mahasiswa yang memiliki prestasi standar ketika berinteraksi dengan mahasiswa memiliki prestasi bagus maka ia mengalami kenaikan IPK yang signifikan. Fenome dari interaksi antar mahasiswa telah berhasil dikonstruksi suatu model matematika dalam tulisan ini. Selanjutnya, model matematika tersebut telah dibuktikan secara analisis tentang kepositifan, terbatas dan stabil global.

Kata kunci: Mahasiswa, Model Matematika, stabil global.

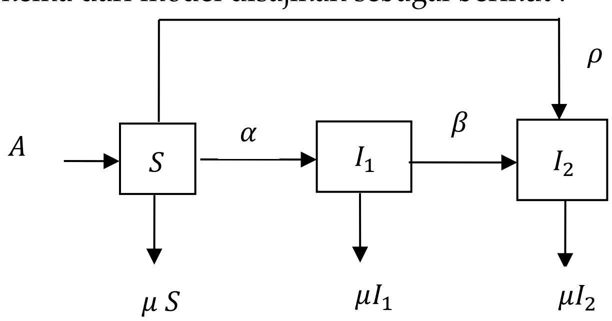
1. PENDAHULUAN

Selama menempuh kuliah di perguruan tinggi mahasiswa sebagai makhluk sosial pasti melakukan interaksi dengan sesama mahasiswa, sebab fitrahnya sebagai manusia maka mahasiswa membutuhkan peran dan bantuan orang lain. Lebih khusus, mahasiswa berinteraksi dengan teman sekelas, teman seangkatan, dan teman satu program studi. Dalam interaksi tersebut tentu saja ada pengaruh positif maupun negatif. Pengaruh positif dari interaksi tersebut adalah mahasiswa yang memiliki prestasi standar (IPK rendah) ketika berinteraksi dengan mahasiswa memiliki prestasi bagus (IPK tinggi) maka mahasiswa memiliki prestasi standar secara signifikan akan mengalami kenaikan IPK. Hal ini disebakan mahasiswa yang memiliki prestasi bagus (IPK tinggi) dapat "menularkan" pengetahuannya kepada mahasiswa memiliki prestasi standar melalui proses belajar bersama di lingkungan kost maupun lingkungan kampus. Ini sejalan dengan penelitian telah dilakukan Putriaji Hendikawati [2] bahwa salah satu yang mempengaruhi IPK mahasiswa adalah pergaulan dan kemampuan sosialisasi diri. Dinamika interaksi mahasiswa prestasi standar dengan mahasiswa prestasi bagus akan dikonstruksi dalam suatu model matematika berdasarkan referensi awal dari model SIR pada penyebaran penyakit menular. Tulisan ini bertujuan mengkonstruksi model matematika teoritis mengenai dinamika interaksi mahasiswa di perguruan tinggi, membuktikan model secara analisis tentang positif invariant, terbatas dan stabil global dari titik kesetimbangan bebas interaksi mahasiswa maupun titik kesetimbangan endemik interaksi mahasiswa. Bukti stabil global yang menjadi rujukan dalam tulisan ini adalah prinsip invariant LaSalle yang terdapat di kertas kerja Jafaruddin dkk [1] dan Yuni Yulida dkk [3].

2. METODE

2.1 Formulasi Matematika

Pada tulisan ini, populasi (N) dibagi menjadi tiga kelompok yaitu kelompok mahasiswa prestasi standar (S), kelompok mahasiswa prestasi bagus (I_1) dan kelompok mahasiswa prestasi super bagus (I_2). Skenario dan asumsi model sebagai berikut : Kelompok S adalah mahasiswa memiliki prestasi standar akan rentan terpengaruh menjadi mahasiswa prestasi bagus (I_1) atau menjadi mahasiswa prestasi super bagus (I_2) ketika antar mahasiswa tersebut melakukan interaksi. Begitu juga dengan mahasiswa prestasi bagus (I_1) akan rentan terpengaruh menjadi mahasiswa prestasi super bagus (I_2). Pada model ini dibatasi bahwa kelompok mahasiswa prestasi bagus dan kelompok mahasiswa prestasi super bagus tidak akan menjadi kelompok mahasiswa prestasi standar ketika terjadi interaksi antar mereka. Rombongan mahasiswa baru (A) akan langsung berkontribusi menambah kelompok S. Jumlah total populasi (N) diasumsikan konstan. Laju trasnmisi dari kelompok S ke kelompok I_1 lebih besar dari laju trasnmisi dari kelompok S ke kelompok I_2.
Skema dari model disajikan sebagai berikut :



Gambar 1

Berdasarkan skema gambar 1 di atas maka diperoleh model sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= A - \alpha\,\frac{S\,I_1}{N} - \rho\,\frac{S\,I_2}{N} - \mu\,S \\
\frac{dI_1}{dt} &= \alpha\,\frac{S\,I_1}{N} - \beta\,\frac{I_1\,I_2}{N} - \mu\,I_1 \\
\frac{dI_2}{dt} &= \rho\,\frac{S\,I_2}{N} + \beta\,\frac{I_1\,I_2}{N} - \mu\,I_2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dimana :
α : laju transmisi dari S ke I_1
β : laju transmisi dari I_1 ke I_2
ρ : laju transmisi dari S ke I_2
Titik kesetimbangan bebas interaksi antar mahasiswa dari persamaan (1) ada tiga yaitu $E_0 = (N\,,\ 0,\ 0)$, $E_1 = \left(\frac{uN}{\rho}, 0, \frac{N\,(\rho-\mu)}{\rho}\right)$, dan $E_2 = \left(\frac{\mu N}{\alpha}, \frac{N\,(\alpha-\mu)}{\alpha}, 0\right)$ (2)
Sedangkan titik kesetimbangan endemik interaksi antar mahasiswa berdasarkan persamaan (1) adalah sebagai berikut:
$E_3 = (S^*\,, I_1^*,\ I_2^*)$

di mana $S^* = \frac{\beta\,N}{\alpha+\beta-\rho}$, $I_1^* = \frac{N\,(\alpha\mu-\rho\beta+\mu\beta-\mu\rho)}{(\alpha+\beta-\rho)\,\beta}$, $I_2^* = \frac{N\,(\alpha\beta-\alpha\mu-\beta\mu+\rho\mu)}{(\alpha+\beta-\rho)\,\beta}$ (3)

2.1 Formula Bilangan Reproduksi Dasar Model

Akan dicari nilai bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$) dengan menggunakan *next generation matrix* sebagai berikut:

Selanjutnya *next generation matrix* di titik E_0 dari model (1) adalah

$$\text{NGM} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{\mu} \end{bmatrix} \quad (4)$$

NGM pada persamaan (4) memiliki dua nilai eigen, yaitu $\frac{\alpha}{\mu}$ dan $\frac{\rho}{\mu}$ sehingga bilangan reproduksi dasar adalah $\mathcal{R}_0 =$ maks $\left\{ \frac{\alpha}{\mu}\ ,\ \frac{\rho}{\mu} \right\}$ (5)

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Analisis Matematika Model

Lemma 3.1.1 Pada kondisi awal non-negatif sistem persamaan (1) dapat disajikan sebagai berikut: $S(0) \geq 0$, $I_1(0) \geq 0$, dan $I_2(0) \geq 0$, maka penyelesaian dari $S(t)$, $I_1(t)$, dan $I_2(t)$ dari model (1) selalu non-negatif untuk setiap waktu $t > 0$.

Bukti:

Berdasarkan persamaan (1) maka diperoleh
$\frac{dS}{dt} = A - \alpha\,\frac{S\,I_1}{N} - \rho\,\frac{S\,I_2}{N} - \mu\,S \Leftrightarrow \frac{dS}{dt}\,e^P + \left(\alpha\,\frac{I_1}{N} + \rho\,\frac{I_2}{N} + \mu\right) S\,e^P = A\,e^p$
Di mana $P = \int_0^t \alpha\,\frac{I_1(\tau)}{N}\,d\tau + \rho\,\frac{I_2(\tau)}{N}\,d\tau + \mu t.$
Akibatya $S(t) = S(0) + \int_0^t A\,e^{\left[\int_0^t \alpha\,\frac{I_1(\tau)}{N}\,d\tau + \rho\,\frac{I_2(\tau)}{N}\,d\tau + \mu t\right]}\,d\tau.$

Jadi, terbukti bahwa $S(t) \geq 0$, untuk setiap waktu $t > 0$.
Bukti $I_1(t) \geq 0$ sebagai berikut:
Dari persamaan (1) diperoleh bahwa $\frac{dI_1}{dt} = \alpha \frac{S I_1}{N} - \beta \frac{I_1 I_2}{N} - \mu I_1$ dan $I_1(t) = I_1(0) + e^{\int_0^t \left(\alpha \frac{S(\tau)}{N} - \beta \frac{I_2(\tau)}{N} - \mu\right) d\tau}$. Jadi, terbukti bahwa $I_1(t) \geq 0$, untuk setiap waktu $t > 0$.
Bukti $I_2(t) \geq 0$ sejalan dengan bukti $S(t) \geq 0$ dan $I_1(t) \geq 0$. ■

Lemma 3.1.2 The *feasible region* Ω yang didefinisikan sebagai berikut:
$\Omega = \left\{(S, I_1, I_2) \in \mathbb{R}_+^3 : S, I_1, I_2 \geq 0,\ S + I_1 + I_2 \leq \frac{A}{\mu}\right\}$ adalah *positif invariant* terhadap persamaan (1).
Bukti:
$N = S + I_1 + I_2$, di mana $N =$ jumlah total populasi = konstan. Jadi, diperoleh $\frac{dN}{dt} + \mu N = A \Leftrightarrow N(t) = \frac{A}{\mu} + N(0)\, e^{-\mu t} - \frac{A}{\mu}\, e^{-\mu t}$, untuk $t \to \infty$ berakibat $N \to \frac{A}{\mu}$, jumlah total populasi dalam jangka waktu panjang akan terbatas oleh $\frac{A}{\mu}$. ■

3.2 Analisis kestabilan Global

Pada bagian ini akan dibuktikan bahwa titik kesetimbangan bebas interaksi mahasiswa $E_0 = (N, 0, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik interaksi antar mahasiswa $E_3 = (S^*, I_1^*, I_2^*)$ masing-masing merupakan titik stabil asimtok global di Ω.

Teorema 3.2.1: Kestabilan Global titik kesetimbangan
(i) Jika $\mathcal{R}_0 \leq 1$ maka $E_0 = (N, 0, 0)$ stabil asimtotik global
(ii) Jika $\mathcal{R}_0 > 1$ maka $E_3 = (S^*, I_1^*, I_2^*)$ stabil asimtotik global
Bukti :
(i) Dibentuk fungsi Lyapunov $U : \{ (S, I_1, I_2) \in \Omega : S, I_1, I_2 > 0\} \to \mathbb{R}$ dengan rumus sebagai berikut :
$U(S, I_1, I_2) = \left[S - N - N \ln\left(\frac{S}{N}\right)\right] + I_1 + I_2$ maka diperoleh $U(E_0) = 0$, dan

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{dS}{dt} - \frac{N}{S}\frac{dS}{dt}\right) + \frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} \tag{6}$$

Substitusi persamaan (1) dan (5) ke persamaan (6) maka diperoleh,

$$\frac{dU}{dt} = A - \mu S - \frac{N}{S} A + \alpha I_1 + \rho I_2 + \mu N - \mu I_1 - \mu I_2 \tag{7}$$

atau ekuivalen dengan

$$\frac{dU}{dt} = -\mu S - \left(\frac{N}{S} - 1\right) A + (\mathcal{R}_0 - 1)\, \mu I_1 + (\mathcal{R}_0 - 1)\, \mu I_2 \tag{8}$$

Subtitusi titik E_0 ke persamaan (8) maka diperoleh $\frac{dU}{dt} < 0$ bila $\mathcal{R}_0 \leq 1$.
Dari persamaan (7) , yaitu $\frac{dU}{dt} = 0$ jika hanya jika $S = N, I_1 = 0$, dan $I_2 = 0$.

Oleh karena itu , himpunan kompak invariant terbesar dalam $\left\{ (S, I_1, I_2) \in \Omega \, : \, \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dt}} = 0 \right\}$ adalah singleton $\{ E_0 \}$ sehingga berdasarkan prinsip invariant LaSalle titik kesetimbangan bebas interaksi mahasiswa $E_0 = (N, 0, 0)$ merupakan titik stabil asimtok global di Ω.

(ii) Didefinisikan fungsi Lyapunov $L : \{ (S, I_1, I_2) \in \Omega : S, I_1, I_2 > 0 \} \to \mathbb{R}$ dengan rumus:

$$L(S, I_1, I_2) = \left[S - S^* - S^* \ln \left(\frac{S}{S^*} \right) \right] + \frac{\mu}{\alpha} \left[I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \left(\frac{I_1}{I_1^*} \right) \right] + \frac{\mu}{\beta} \left[I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \left(\frac{I_2}{I_2^*} \right) \right]$$

maka diperoleh,

$$\frac{dL}{dt} = \left[\frac{dS}{dt} - \frac{S^*}{S} \frac{dS}{dt} \right] + \frac{\mu}{\alpha} \left[\frac{dI_1}{dt} - \frac{I_1^*}{I_1} \frac{dI_1}{dt} \right] + \frac{\mu}{\beta} \left[\frac{dI_2}{dt} - \frac{I_2^*}{I_2} \frac{dI_2}{dt} \right] \tag{9}$$

Matriks *Hesssian* $H(E_3)$ sebagai berikut :

$$H(E_3) = \begin{pmatrix} \frac{S^*}{S^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\alpha} \frac{I_1^*}{I_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\beta} \frac{I_2^*}{I_2^2} \end{pmatrix}$$, dan matriks Hesssian $H(E_3)$ adalah definit positif karena

$$\frac{\partial^2 L}{\partial S^2} = \frac{S^*}{S^2} > 0, \ \left(\frac{\partial^2 L}{\partial S^2} \right) \left(\frac{\partial^2 L}{\partial I_1^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial S \, \partial I_1} \right)^2 = \frac{S^*}{S^2} \frac{\mu}{\alpha} \frac{I_1^*}{I_1^2} > 0, \text{ dan , } \det\big(H(E_3) \big) = \frac{S^*}{S^2} \frac{\mu}{\alpha} \frac{I_1^*}{I_1^2} \frac{\mu}{\beta} \frac{I_2^*}{I_2^2} > 0.$$

sebab $S^* = \frac{\beta N}{\alpha + \beta - \rho} > 0$, $I_1^* = \frac{N \, (\alpha\mu - \rho\beta + \mu\beta - \mu\rho)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta} > 0$, dan $I_2^* = \frac{N \, (\alpha\beta - \alpha\mu - \beta\mu + \rho\mu)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta} > 0$.

Oleh karena itu L merupakan fungsi konveks tegas, dan berdasarkan persamaan (9), yaitu $\frac{dL}{dt} = 0$ jika dan hanya jika $S = S^*$, $I_1 = I_1^*$, dan $I_2 = I_2^*$.

Jadi, titik E_3 merupakan titik minimum global pada Ω.

Selanjutnya, substitusi persamaan (1) dan (5) ke persamaan (9) maka diperoleh,

$$\frac{dL}{dt} = \underbrace{\left(1 - \frac{S^*}{S} \right)}_{<0} \underbrace{\left[(\mu \, \mathcal{R}_0 \, S - \beta \, I_2) \, \frac{I_1}{N} - \mu \, I_1 \right]}_{>0} + \underbrace{\left(1 - \frac{I_1^*}{I_1} \right)}_{<0} \underbrace{\left[\mu \, \frac{S \, I_1}{N} + \left(\beta \, \frac{I_2}{N} - \mu \right) \frac{I_1}{\mathcal{R}_0} \right]}_{>0} +$$
$$\underbrace{\left(1 - \frac{I_2^*}{I_2} \right)}_{<0} \underbrace{\left[\mu \, \frac{S \, I_2}{N} + \left(\beta \, \frac{I_1}{N} - \mu \right) \frac{I_2}{\mathcal{R}_0} \right]}_{>0} < 0 \text{ berlaku bila } \mathcal{R}_0 > 1.$$

di mana:

$$1 - \frac{S^*}{S} = 1 - \frac{\frac{\beta N}{\alpha + \beta - \rho}}{S} = 1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta - \rho} \frac{N}{S} < 0 \text{ , sebab } N > S \text{ maka } \frac{N}{S} > 1$$

$$1 - \frac{I_1^*}{I_1} = 1 - \frac{\frac{N \, (\alpha\mu - \rho\beta + \mu\beta - \mu\rho)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta}}{I_1} = 1 - \frac{(\alpha\mu - \rho\beta + \mu\beta - \mu\rho)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta} \frac{N}{I_1} < 0, \text{ sebab } N > I_1 \text{ maka } \frac{N}{I_1} > 1$$

$$1 - \frac{I_2^*}{I_2} = 1 - \frac{\frac{N \, (\alpha\beta - \alpha\mu - \beta\mu + \rho\mu)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta}}{I_2} = 1 - \frac{(\alpha\beta - \alpha\mu - \beta\mu + \rho\mu)}{(\alpha + \beta - \rho) \, \beta} \frac{N}{I_2} < 0, \text{ sebab } N > I_2 \text{ maka } \frac{N}{I_2} > 1$$

Oleh karena itu himpunan kompak invariant terbesar dalam $\left\{ (S, I_1, I_2) \in \Omega \, : \, \frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} = 0 \right\}$ adalah singleton $\{ E_3 \}$ sehingga berdasarkan prinsip invariant LaSalle titik kesetimbangan endemik interaksi antar mahasiswa $E_3 = (S^*, I_1^*, I_2^*)$ merupakan titik stabil asimtok global di Ω. ■

4. SIMPULAN

Berdasarkan uraian sebelum maka disimpulkan bahwa model matematika interaksi antar mahasisiwa berhasil dikonstruksi adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = A - \alpha\,\frac{S\,I_1}{N} - \rho\,\frac{S\,I_2}{N} - \mu\,S$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \alpha\,\frac{S\,I_1}{N} - \beta\,\frac{I_1\,I_2}{N} - \mu\,I_1$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \rho\,\frac{S\,I_2}{N} + \beta\,\frac{I_1\,I_2}{N} - \mu\,I_2$$

Model tersebut telah dibuktikan secara analisis positif invariantnya , solusi selalu terbatas, dan titik kesetimbangan bebas interaksi mahasiswa maupun titik kesetimbangan endemik interaksi mahasiswa masing-masing adalah stabil asimtok global.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Jafaruddin, S.W.Indratno, Nuning Nuraini, Asep K Supriatna, E. Soewono, "Kestabilan Model SIR-SI host-vector transmisi demam dengue," ISBN 978-602-14413-0-5 SMNA 2013,pp : 126-131, 2013.

[2] Putri Hendikawati, "Analisis Faktor yang mempegaruhi Indeks Prestasi mahasiswa", Jurnal Matematika Kreatif-Inovatif, Vol.2 , no.1, tahun 2011.

[3] Yuni Yulida, Faisal, Muhammad Ahsar,K, "Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS menggunakan fungsi Lyapunov", Jurnal Matematika Murni dan Terapan, Vol.5, No.2, tahun 2011.

[4] Meksianis Z.Ndii, Fransiska R.Berkanis, David Tambaru, Maria Lobo, Ariyanto, Bertha S. Djahi, "Optimal Control strategy of the effects of hard water consumption on kidney-related diseases", BMC Research, vol.13, 2020.