

時系列データのみからの
パラメータ空間推定と
決定論的ダイナミクスの解析

2019年3月

東京電機大学大学院 先端科学技術研究科
電気電子システム工学専攻 (指導教員 安達 雅春)
伊藤 佳卓

謝辞

本研究を進めるにあたり終始あたたかいご指導と激励を賜りました東京電機大学工学部 安達 雅春教授に心から感謝の意を表します。大学学部学生，修士学生時代の私に，研究の楽しさと難しさを教えてくださり，今の私がいます。特に，私が株式会社 NEC 情報システムズ在職中の研究生時代に進路について相談させていただきましたことを感謝いたします。

東京電機大学工学部 植野 彰規教授には研究に関してディスカッションを通して多大なるご意見を頂きました。深く感謝いたします。東北大学 電気通信研究所の堀尾 喜彦教授には多大なるご意見を頂き，深く感謝いたします。東京大学 情報理工学系研究科の平田 祥人准教授には今後の研究について多大なるご指導を頂きました。ここに深く感謝いたします。

私が株式会社 NEC 情報システムズ在職中，学術研究の道に進むことを許してくださいました，NEC ソリューションイノベータ株式会社（旧株式会社 NEC 情報システムズ）の大塚剛史氏に心よりお礼を申し上げます。

私が大学学部学生時代に，研究室の先輩の佐藤 倫久氏と加藤 昌徳氏には研究の楽しさを教えてくださり，感謝いたします。現在でも研究仲間として両氏と連絡を取り合っているからこそ，私は学術研究の道に進むことができました。

最後に，これまで私をあたたかく応援してくれた両親と祖母，私のわがままに付き合い支えてくれた妻 友理恵に心から感謝します。

目次

謝辞	i
図目次	vi
表目次	vii
第1章 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	4
1.3 研究内容	6
1.4 本論文の構成	7
第2章 カオス力学系	9
2.1 カオス時系列	9
2.2 1次元写像の分岐現象	10
2.2.1 トランスクリティカル分岐	11
2.2.2 周期倍分岐	12
2.2.3 接線分岐 (サドル-ノード分岐)	13
2.3 2次元写像の分岐現象	13
2.4 リアプノフ指数	14
第3章 エクストリーム学習器	16
3.1 エクストリーム学習器	16
3.2 センシティビティ解析による刈込を行った ELM	18
3.3 ELMによるカオスニューロンの時系列予測	19
3.3.1 カオスニューロンモデル	19
3.3.2 カオスニューロンモデルの時系列予測	20
3.3.3 隠れ層ニューロンの入出力関係	21
3.3.4 カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係	22
第4章 パラメータに基づいた分岐図再構成	25
4.1 パラメータに基づいた分岐図再構成 (PBR) のアルゴリズム	25
4.2 ELMを用いた PBR アルゴリズムの分岐図再構成	28
4.3 SAP-ELMを用いた PBR アルゴリズムの分岐図再構成	28
4.4 再構成した分岐図のリアプノフ指数推定	28

4.5	再構成した1次元の分岐図の評価方法	29
4.5.1	評価方法	29
4.5.2	レーベンシュタイン距離	30
4.5.3	パラメータ範囲の設定	32
4.6	PBR アルゴリズムを用いた分岐図再構成のシミュレーション実験	32
4.6.1	ロジスティック写像の分岐図再構成	32
4.6.2	1次元パラメータ空間のエノン写像の分岐図再構成	41
4.6.3	レスラー方程式の分岐図再構成	46
第5章	主成分分析を用いない分岐図再構成の新しい手法	56
5.1	予測器に基づいた分岐図再構成	56
5.2	SAP-ELM の結合荷重の分布	58
5.3	分岐パラメータ次元推定	59
5.4	主成分分析を用いない新手法の要約	61
5.5	主成分分析を用いない新手法による分岐図再構成のシミュレーション 実験	62
5.5.1	様々な時系列データの組み合わせによる分岐図再構成	62
5.5.2	2次元パラメータ空間の分岐図再構成	65
5.6	non-LIP の系の分岐図再構成	68
5.6.1	レスラー方程式の分岐図再構成	68
5.6.2	モータードライブの数理モデルの分岐図再構成	71
5.6.3	生態系の植生バイオマスのモデルの分岐図再構成	72
第6章	推定したパラメータ空間の分岐点探索	76
6.1	分岐点探索の基本	77
6.2	分岐パラメータと固定点の探索	78
6.3	推定したパラメータ空間上での分岐曲線の追跡	79
6.4	分岐曲線に関するシミュレーション実験	81
6.4.1	実験条件	81
6.4.2	真の分岐図と再構成分岐図の比較	81
6.4.3	真の分岐図と再構成分岐図に対する分岐曲線	82
6.5	分岐点曲線追跡への減速ニュートン法の適用	84
第7章	結論	85
7.1	ELM を用いたパラメータ空間の推定	85
7.2	再構成した分岐図の定量的な比較方法	86
7.3	主成分分析を用いない分岐図再構成の新しい手法	87
7.4	推定したパラメータ空間の分岐点探索	87
7.5	今後の課題と展望	87
Appendix		94

付録A	刈込手法を用いた ELM に対する考察	95
A.1	ELM と SAP-ELM によるサイン写像の分岐図再構成の成功率の比較 .	95
A.2	ELM と SAP-ELM によるロジスティック写像の時系列予測	96
A.3	分岐図再構成に対する ELM の隠れ層の最適なニューロン数	97
A.4	刈込後の ELM の出力層の結合荷重	98
付録B	その他のカオス力学系の分岐図再構成	101
B.1	ELM を用いたカオスニューロンモデルの分岐図再構成	101
B.2	ダフィング方程式の分岐図再構成	103
B.3	モータードライブの数理モデルの分岐図再構成	108
付録C	真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の対応関係	110
付録D	出力行列のランクと学習した結合荷重の絶対値の関係	112

目次

2.1	ロジスティック写像の時系列信号	10
2.2	ロジスティック写像の分岐図	11
2.3	トランスクリティカル分岐	12
2.4	周期倍分岐	12
2.5	接線分岐	13
3.1	ELM の構造	17
3.2	SAP-ELM の構造	18
3.3	隠れ層ニューロンの入出力関係	22
3.4	カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係 (8 周期時系列)	23
3.5	カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係 (カオス時系列)	24
4.1	周期数とカオス領域の取得方法	30
4.2	レーベンシュタイン距離の例	31
4.3	ロジスティック写像の結果	34
4.4	ロジスティック写像の分岐図とリアプノフ指数	35
4.5	ロジスティック写像の再構成した分岐図とリアプノフ指数の拡大図	36
4.6	負のパラメータ範囲まで含めたロジスティック写像の分岐図とリアプノフ指数	37
4.7	エノン写像の結果	42
4.8	エノン写像の分岐図とリアプノフ指数	44
4.9	エノン写像の分岐図	45
4.10	レスラー方程式の結果	48
4.11	レスラー方程式の分岐図とリアプノフ指数	49
4.12	レスラー方程式の分岐図	51
4.13	レスラー方程式の回路図	54
4.14	計測したレスラー方程式の分岐図とリアプノフ指数	55
5.1	10 組のロジスティック写像の時系列を学習した結合荷重の分布	58
5.2	10 組の学習した結合荷重の差 $\Delta\beta_{(i,j)}$ の平均と標準偏差	59
5.3	特異値を用いたロジスティック写像の寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)	60
5.4	特異値によるエノン写像の寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)	61
5.5	真のロジスティック写像の分岐図	62
5.6	様々な時系列の組合せによる分岐図再構成の結果	63

5.7	様々な時系列の組合せによる分岐図再構成の結果 (広域のパラメータ範囲)	64
5.8	エノン写像の2次元パラメータ空間の分岐図再構成	66
5.9	エノン写像の2次元パラメータ空間の分岐図再構成に対するリアプノフ指数	67
5.10	レスラー方程式のシミュレーション結果	69
5.11	3パラメータを使用したレスラー方程式に対する寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)	70
5.12	モータードライブの数理モデルのシミュレーション結果	73
5.13	ガウシアンノイズを含めた植生バイオマスのモデルの時系列の予測結果	74
5.14	植生バイオマスのモデルのシミュレーション結果	75
6.1	エノン写像の2次元パラメータ空間の分岐図	82
6.2	エノン写像の分岐曲線	83
6.3	図 6.2(b) の 5 周期解と 6 周期解が重なるパラメータ領域の拡大図	83
A.1	ELM の出力層ニューロンの結合荷重の分布	100
A.2	隠れ層のニューロン数を 14 から 8 に刈込を行った時の SAP-ELM の出力層ニューロンの結合荷重の分布	100
B.1	カオスニューロンモデルの結果	102
B.2	カオスニューロンモデルの分岐図とリアプノフ指数	104
B.3	広域のカオスニューロンモデルの分岐図とリアプノフ指数	105
B.4	ダフィング方程式の分岐図とリアプノフ指数	106
B.5	周期解からカオス解への分岐点周辺のだフィング方程式の分岐図とリアプノフ指数	107
B.6	モータードライブの数理モデルの分岐図とリアプノフ指数	109
C.1	ロジスティック写像の入出力関係	111
C.2	ELM の入出力関係	111

表目次

1.1	先行研究 (○) と本研究の対象の系 (★)	7
2.1	固定点の安定性	14
3.1	周期時系列の予測結果	21
3.2	カオス時系列の予測結果	21
4.1	ロジスティック写像のリアプノフ指数の比較	38
4.2	隠れ層のニューロン数を変化させた時の ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率	40
4.3	隠れ層の初期ニューロン数を変化させた時の SAP-ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率	41
4.4	エノン写像の最大リアプノフ指数の比較	43
4.5	エノン写像のレーベンシュタイン距離	46
4.6	誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークによる再構成した分岐図のレーベンシュタイン距離	46
4.7	レスラー方程式の最大リアプノフ指数の比較	50
4.8	レスラー方程式のレーベンシュタイン距離	51
A.1	隠れ層のニューロン数を変化させた時の ELM を用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率	96
A.2	隠れ層の初期ニューロン数を変化させた時の SAP-ELM を用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率	97
A.3	ELM と SAP-ELM を用いたロジスティック写像の時系列予測の平均平方二乗誤差	98
A.4	隠れ層ニューロン数を 4 個に設定した ELM を用いた時系列予測の平均平方二乗誤差	99

第1章 序論

1.1 研究背景

時間と共に変化するデータである時系列は様々な用途のために計測されている。計測される時系列の例として、気温・降水量・風速などの気象データ、株価・為替などの経済活動を表す指標、感染者の数、電子回路の電圧や電流、脳波・心電図・脈波などの生体信号などが挙げられる [1]。これらの時系列の中でも気象データは天気予報という形で毎日目にする。天気予報は、大気等の変動を表す流体力学や熱力学の方程式から、スーパーコンピュータを用いて数値計算することで、将来の天候の状態を予測する [2]。他にも近年、震度 6 以上の地震が日本国内だけで、2008 年の岩手・宮城内陸地震、2011 年の東北地方太平洋沖地震、2016 年の熊本地震、2018 年の北海道胆振東部地震と多く起こり、地震の解析・予測にも注目が集まっている。既に、地震予測のサービスも開始されており、例えば JESEA 地震科学探査機構のサービスでは電子基準点データを時系列解析している [3]。

また、近年は Internet of Things (IoT) に注目が集まっている [4]。IoT は「モノ (人以外) のインターネット」と呼ばれ、人と人のコミュニケーションツールであるインターネットを「人のインターネット」と呼び、区別される。IoT の先行して取り組みが行われている分野として、工作機械、建設機械などの産業機械、電力や水道サービスにおける計量器などの社会インフラが挙げられる。身近な例として、省エネの活動の一つである電力使用量を「見える化」して活動を促進している [5]。IoT の普及と共にデータを取得するためのセンサー技術が発達し、様々なデータを手軽に測定できるようになった。普及が進んでいるスマートフォンには、GPS センサー、磁気センサー、地磁気センサー、磁力センサー、加速度センサー、ジャイロセンサーなどの機能が搭載されているため、スマートフォン一つで様々なデータが取得可能である。また、スマートウォッチを通して日々の生体信号を記録できるようになり、健康管理に活かされている。現状は計測したデータを見える化する事が中心であるが、これからはデータを解析し制御や予測に使用されていくと考えられる。すでに活用されている例として、製造業では不良品を判別するための変化検知や、人工衛星など機器の故障が致命的な場合はセンサー情報を生かした異常検知、高齢化社会の解決策として期待されている在宅医療 [6] などが挙げられる。

計測される時系列は、周期的ではない事が多い。決定論的な系に支配されているにも関わらず、系が持つ非線形性により、確率的な振舞のように見える時系列が存在し、カオス時系列と呼ばれている。カオス時系列の特徴として、「軌道不安

定性」,「長期予測不可能性」,「有界性」,「アトラクタのフラクタル性」,「非線形性」が挙げられる。実在の系のカオスとして,電気・電子回路,化学振動,光学システム,人工膜などが挙げられる [7]。確率的な振舞に見える信号だが決定論性に従っているため,予測や制御が可能である。一方,軌道不安定性という特徴があるため長期の予測は不可能である。従って,対象の時系列がカオス時系列なら,予測や制御を行うことができる。計測された時系列がカオス時系列かを判定する必要があり,この判定のためにリアプノフ指数解析 [8, 9, 10] やフラクタル次元解析 [11] 等の手法が提案されてきた。しかし,これらの手法も万能ではなくノイズの種類によってはカオス時系列と判定される事があり,計測された時系列が決定論的な性質を持つかの判定が難しい場合がある [12]。従って,時系列解析のさらなる発展が求められる。

カオス時系列の予測は,古くから行われていて,1927年のYuleによる自己回帰モデル [13] まで遡る。時系列予測をテーマにした研究はその後も続けられ,例えば,ニューラルネットワークによる時系列を学習した予測器の作成,過去の時系列の軌道から未来を予測するローレンツの類推法などが挙げられる。時系列の予測精度が高いニューラルネットワークとして,2004年にJaegerとHaasによるエコーステートネットワーク [14] や,2006年にHuangらによるエクストリーム学習器 (ELM:Extreme Learning Machine) [15] などが提案されている。また,2015年には実データで精度の高い例が示された長期の過去の時系列の特徴を使用する無限次元の時系列予測などがHirataらにより提案されている [16]。これらの事から,時系列の予測が今尚活発に行われている事がわかる。

しかし,これらの時系列予測は対象の系のパラメータ値が変わると,生成した予測器は使えなくなってしまう。このパラメータを考慮した系の同定方法が,1994年に「時系列のみからの分岐図再構成」としてTokunagaらにより提案された [17]。ここで,分岐図とは,分岐現象(パラメータ値が変わったときの状態値の振舞の変化)をプロットした図である。一次元パラメータの系の場合,横軸にパラメータ値,縦軸に状態値をプロットする。分岐図再構成は,パラメータ値が異なる同一の系から計測された複数の時系列のみから,対象の系のパラメータ空間を推定する。分岐図再構成の条件としてパラメータ次元とパラメータ値は未知であるため,分岐図再構成はパラメータ次元の推定も行う。つまり,時系列の振舞が変化した時に,系が影響を受けたパラメータ数を推定する。推定したパラメータ空間上で分岐図をプロットする事により,時系列のみからパラメータ値が変わった時の系の振舞が推定できる。ここで,分岐図再構成の手順を簡単に紹介する。本手法は同一の系から計測された複数組の時系列のみを用いる。初めにニューラルネットワークなどの予測器により各時系列を学習する。Tokunagaらは,予測器として3層のニューラルネットワークを使用し,学習方法は誤差逆伝播法を用いた。次に,学習した結合荷重とバイアスに対して,主成分分析を適用する。主成分分析により,結合荷重とバイアスの次元圧縮を行い,最適な次元数を推定する。この推定した次元数は対象の系のパラメータ空間の次元数と対応する。そして,圧縮した次元の主成分と真のパラメータ空間を対応させて時系列を生成する事により,パ

ラメータ値が変化した時の振舞を推定する事ができる。

Tokunaga らが分岐図再構成を提案後、様々な研究グループが分岐図再構成の研究を行った。1996年、Tokuda らは連続時間の代表的なカオス力学系であるレスラー方程式の分岐図を再構成した [18]。この研究はノイズを付加した時系列から分岐図を再構成するため、前処理として与えられた時系列に対して移動平均のフィルタリングを行った。また、分岐図再構成を行うと、しばしば、パラメータ空間が元のパラメータ空間に比べて伸縮してしまう。この問題への対応として、元のパラメータ値を考慮して推定したパラメータ空間の伸縮の調整も行っている。ただし、この調整を行うには元のパラメータ値が既知である必要がある。

その後、Ogawa らが Tokunaga らとは別の手法でカオスニューロンの分岐図再構成を行った [19]。本手法は、予測器として動径基底関数ネットワークを用いた。また、パラメータを加算的なパラメータと仮定しているため、適用できる系は加算的なパラメータを有するものに限られる。

1999年、Bagarinao らは Linear-in-parameter (LIP) の系に限り適用できる分岐図再構成の新しいアルゴリズムを提案した [20]。ここで、Bagarinao らは、Tokunaga らの手法をパラメータに基づいた分岐図再構成 (PBR:Parameter-Based Reconstruction) アルゴリズム、Bagarinao らの手法を予測器に基づいた分岐図再構成 (PFB:Predictor function-Based Reconstruction) アルゴリズムと呼んだ。PFB アルゴリズムは、 $(P+1)$ 組の時系列のみを必要とする。ここで、 P は対象の系のパラメータ空間の次元数である。

次に、PFB アルゴリズムを簡単に紹介する。初めに予測器により、各時系列を学習する。この手法は、出力層の結合荷重のみを学習するニューラルネットワークを使用する。時系列 i と時系列 $i+1$ を学習したニューラルネットワークの出力値の差を計算する。ここで、パラメータ空間の次元数を推定するために、アトラクタのレンジ外の入力を含めて出力値の差を計算する。計算した複数の出力値の差に対して主成分分析を適用し、固有値の寄与率からパラメータ空間の次元数を推定する。次に、2組の予測器の結合荷重の差を計算する。そして、結合荷重の差を基に結合荷重を変更しながら予測器を用いて時系列を生成する事により、パラメータ値が変化した時の振舞を推定し、分岐図を再構成できる。上記の通り、PBR アルゴリズムと PFB アルゴリズムの違いは、パラメータ空間の推定方法に違いがある。PBR アルゴリズムは学習した結合荷重に対して主成分分析を行い、寄与率の高い主成分が対象の系のパラメータと対応する。一方、PFB アルゴリズムは学習した予測器の差分をパラメータ空間と対応させる。その後、Bagarinao らは多項式モデルを用いて分岐図再構成を行った [21, 22]。ニューラルネットワークの逐次学習はノイズの影響を受けやすい等の欠点があるためである。

2004年、Langer らは時系列を計測した時のパラメータ値を既知として分岐図再構成を行った [23]。この研究では、コルピッツ発信機を電子回路で作成し、その回路から計測したデータを用いて分岐図再構成を行なっている。しかし、パラメータ値を予測器の入力値として使用しているため、Langer らの手法は他の研究グループの分岐図再構成と条件が違う。また、Langer らは時系列の過渡期を用いた時と

用いない時の比較を行い、過渡期を用いた方が精度が高いことを示した。しかし、計測される時系列は過渡期を含まない事が多いため、本研究では過渡期を含まない時系列を用いる。

上記の通り、分岐図再構成は様々な方法、様々な予測器で研究がされてきた。しかし、パラメータが未知の条件の分岐図再構成は実データへの応用例がない。この条件下の先行研究は、数値シミュレーションで得られたカオス力学系の時系列から、分岐図再構成を行なっている。実データへの適用を考えると、パラメータが未知の条件の分岐図再構成で計測データを含めて様々な系への適用を試みる必要がある。

先行研究ではパラメータ値が変化した時の振舞の変化、つまり分岐図をプロットする事を目的とした。本研究では、振舞の変化を推定だけでなく推定されたパラメータ空間においてダイナミクス解析を行う。パラメータ空間のダイナミクス解析として、リアプノフ指数の推定や分岐解析を行う。特に分岐解析が可能であれば、分岐図をプロットせずに分岐が起こるパラメータを推定する事が可能である。また、分岐現象の種類がわかれば不安定固定点を容易に推定する事が可能になり、系の制御などへの応用が期待できる。

1.2 研究目的

分岐図再構成が実問題に適用できるようになれば有用であると考えられるが、時系列予測と比べ分岐図再構成の研究は現在まで盛んに行われていない。この理由として、計算コストが高い点、パラメータが多く調整が困難な点や分岐図再構成の成功率が低い点などの問題点が挙げられる。従って本研究では分岐図再構成の問題点を解決する事と分岐図再構成の有用性を示す事を目的とする。この目的のために下記の項目に分けてそれぞれ対応する。

- 計算コストの削減
- 予測器の過学習と局所解に陥るのを防ぐ対応
- 様々なカオス力学系の分岐図再構成
- 計測した時系列データからの分岐図再構成
- 再構成した分岐図の定量的な評価
- 推定したパラメータ空間の解析

計算コストの削減と過学習と局所解に陥るのを防ぐために、時系列を学習する予測器の変更を行う。Tokunagaらは、学習方法に誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークを使用している。誤差逆伝播法は、逐次学習のため時間がかかり、過学習を防ぐためにパラメータの調整が必要であり、さらに、局所解にしばしば陥るのでこの対処も必要である。複数の時系列を学習する必要がある分岐図再構成は、これらの対応がさらに困難になると考えられる。逐次学習ではなく、線形

演算などで計算コストもかからず、過学習や局所解などを避ける方法を検討することは有用である。

パラメータが未知の条件下での分岐図再構成の先行研究で対象となったカオス力学系は、ロジスティック写像 [24]、結合ロジスティック写像 [17]、エノン写像 [25]、サイン写像 [26]、レスラー方程式 [27]、ローレンツ方程式 [28]、周期解の分岐現象を再構成したキュービック写像 [29]、フィッツヒュー南雲モデル [30, 31] が挙げられる。これらは、3変数以下の離散時間系、連続時間の自励系にまとめる事ができる。本研究では、様々なカオス力学系の分岐図再構成の適用例を示すために、4変数の力学系や連続時間の非自励系も対象として分岐図再構成を行う。

Tokuda らがノイズを含んだ連続時間の自励系の時系列から分岐図再構成 [18] を行ったが、微小なノイズのため実データとは差異があると考えられる。ここで、使用したノイズは時系列のレンジが約 10 の時系列に対して平均が 0、標準偏差が 0.01 のガウシアンノイズである。さらに、このノイズは観測ノイズしか考慮されていない。実データを対象とする場合は、系に直接影響を与えるダイナミカルノイズとパラメータが変動するパラメータノイズも考慮しなければいけない。従って、本研究では数値計算で得られた時系列ではなく、実問題と同等のノイズが含まれる時系列を取得するためカオス力学系を電子回路で作成し、その電子回路から計測した時系列を用いて対象の分岐図の再構成を行い、実データへ適用できる事を示す。

先行研究は真の分岐図と再構成した分岐図の比較が定性的に行われた。定量的な比較方法がないため、分岐図が見た目での比較となってしまう。本研究では、推定したパラメータ空間に対してダイナミクス解析を行い、真のパラメータ空間と定量的に比較を行う。ダイナミクス解析はリアプノフ指数の推定を行い、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の対応する点でリアプノフ指数の比較を行う。リアプノフ指数は、カオスの定量的な指標で近傍の軌道の伸び率を計算する。リアプノフ指数の特徴は、近傍の軌道が時間経過と共に離れる時はリアプノフ指数が正となりカオス、近づく時は負となり周期軌道とリアプノフ指数から判断する事ができる。

対応する点のリアプノフ指数の比較は、最初に与えられた時系列のパラメータ値のみが対応点のため、局所的な評価方法となる。別の評価方法として、分岐現象の比較も行う事とする。本評価方法は、周期数やカオス領域が現れる順番を比較する。

パラメータ空間の解析として、Kawakami が提案した分岐曲線の追跡 [32] を推定したパラメータ空間上で行う。分岐曲線の追従を行うと、分岐現象が起こるパラメータ値を計算で求める事ができる。さらに、分岐の種類もわかる。また、絨毯爆撃法を用いて分岐図を作成すると、分岐図の解像度や時系列を生成する時の初期値、周期数の計測方法などの影響で分岐図が変化する事がある。推定したパラメータ空間上で分岐曲線の追跡を行う事で、絨毯爆撃法を用いて作成した分岐図より精度が高い分岐構造を得られる。

1.3 研究内容

Tokunaga らの先行研究では、予測器として誤差逆伝播法で学習を行うニューラルネットワークを用いたが、本研究では ELM を使用する。ELM は 3 層のフィードフォワードニューラルネットワークで、結合荷重の学習は出力層ニューロンのみであり行列演算により計算する。中間層の結合荷重とバイアス値は一様分布乱数により生成する。出力層の結合荷重のみを学習する ELM を使用する事により、計算コストが大幅に削減できる。また、逐次学習ではなく行列演算により一度の計算で結合荷重の最適値を計算するため局所解に陥る事もなくなる。加えて、ELM の特長として汎化性が高いとされるため、過学習も避けられると考えられる。

本研究では、ELM のヤコビ行列を計算するため入力層と出力層のニューロン数は同一とする。また、本研究は既知の系を対象とするため、入力層と出力層のニューロン数は真の系の次元を設定する。未知の系を対象とする場合は、入力層と出力層のニューロン数の決定方法として、誤り最近傍法 [33] 等の Takens の定理 [34] を基にした手法が一般的な時系列予測手法と同様に使用できると考えられる。

他のニューラルネットワークと比べて ELM は設定するパラメータ数は少ないが、適切な中間層のニューロン数を設定する事が性能に大きな影響を与える。中間層のニューロン数の決定は難しく、ニューロン数が少ないとモデリングができず、多すぎると過学習になってしまい ELM の特徴である汎化性能が得られなくなる。最適な中間層のニューロン数の設定方法は多く提案されているが、本研究では 2013 年に Li Yeng と Li Fan-jun が提案したセンシティビティ解析による刈込を行った ELM(SAP-ELM:the Pruned ELM based on Sensitivity Analysis) [35] を用いて最適な中間層のニューロン数を決定する。

本研究では、様々な系で分岐図の再構成が可能な事を示す。カオス力学系の種類を表 1.1 にまとめる。表 1.1 は、カオス力学系を「離散時間系」、「連続時間系(自励系)」、「連続時間系(非自励系)」に大きく分類し、さらにそれぞれにノイズの有無を項目として追加した。本研究で対象とするノイズ有の時系列は、系に直接影響を与えるダイナミカルノイズ、パラメータ値に影響を与えるパラメータノイズ、計測時に付加される観測ノイズが含まれた時系列とする。ここで、ダイナミカルノイズ DN 、パラメータノイズ PN 、観測ノイズ ON を含めた対象の系の状態 \mathbf{x} の更新式と観測したデータ $x^{(observed)}$ は

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{p} + PN, DN) \quad (1.1)$$

$$x^{(observed)}(t) = g(\mathbf{x}(t)) + ON \quad (1.2)$$

と書ける。従って、Tokuda らの観測ノイズのみを含んだ時系列からの分岐図再構成は、本研究のノイズ有の時系列に含めない。

表 1.1 で示す通り、先行研究ではノイズ無の離散時間系と連続時間系(自励系)のみを対象とした。本研究では、先行研究で対象にしてきた系に加えて連続時間の非自励系のダフィング方程式と 4 変数の連続時間系で実在系のモータードライブの数理モデルを対象とする。また、ノイズ有の時系列を計測するために、レスラー

表 1.1: 先行研究 (○) と本研究の対象の系 (★)

	ノイズ無	ノイズ有
離散時間系	○★	
連続時間系 (自励系)	○★	★
連続時間系 (非自励系)	★	

方程式の電子回路を作成する。この電子回路から計測した時系列のみを使用して分岐図を再構成する事により、ノイズ有の時系列へ適用できることを示す。

局所的線形モデルを用いたリアプノフ指数の推定方法が様々提案されている [8, 9, 36, 10, 37]。これらを基に、Adachiらは学習後のニューラルネットワークのヤコビ行列からリアプノフ指数の推定を行った [38]。本手法を ELM に適用し、リアプノフ指数を推定する。真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間のリアプノフ指数をそれぞれ推定し分岐図の定量的な比較を行う。また、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の分岐現象を比較するために、分岐構造の定量的評価も行う。本手法は、真の分岐図と再構成した分岐図の周期数、または、カオス解の移り変わりを比較する。また、リアプノフ指数の特性を活かして、周期数を判定するパラメータ値はリアプノフ指数が負の局所最小値、カオス解を判定するパラメータ値はリアプノフ指数が 0 以上になった点とする。ここで、局所最小値はリアプノフ指数が 0 に近いパラメータ値から次のゼロに近くなるパラメータ値の範囲の最小値の事である。リアプノフ指数が局所最小値のパラメータ値を使用する理由として、周期倍分岐などの分岐現象が起こるパラメータ値付近では不安定になるため、安定した周期解のパラメータ値を得るためである。これらを推移をレーベンシュタイン距離 [39] を用いて比較する。

推定したパラメータ空間の解析として、分岐曲線の追跡を推定したパラメータ空間で行う。Kawakamiらが既知の系に対して対象の分岐が起こるパラメータ値をニュートン法により求める分岐曲線の追跡を提案した。本手法は既知の系が前提であるが、推定したパラメータ空間を用いる事により、未知の系への拡張を行う。しかし、初期値の影響を大きく受けるニュートン法の特徴により、しばしば、ニュートン法の更新式が、収束しない、または、発散してしまう。この問題の解決のために、ニュートン法に比べて収束するための計算コストは増えるが解が収束しやすい減速ニュートン法を用いる。Kawakamiの方法で求めた真のパラメータ空間の分岐曲線と、時系列のみから推定したパラメータ空間の分岐曲線を比較し本手法の有用性を示す。また、絨毯爆撃法を用いた分岐図と比較し、より精度が高い分岐構造を得られる事を確認する。

1.4 本論文の構成

本論文は、下記の 7 章で構成されている。

第1章は、本研究の背景、目的、内容について述べる。

第2章は、本研究の解析対象であるカオス力学系について詳述する。

第3章は、本研究で予測器として用いるエクストリーム学習器 (ELM) について述べる。標準的な ELM について述べた後、最適な隠れ層のニューロン数を設定するために刈込手法をエクストリーム学習器に適用する方法について詳述する。また、標準的なエクストリーム学習器が学習できない時系列への対応方法を提案し、学習できるようになった理由についてシミュレーション実験の結果から考察を行う。

第4章は、Tokunaga らの先行研究の分岐図再構成の方法と本研究の提案手法である ELM を用いた分岐図再構成の方法を述べる。また、再構成した分岐図に対してリアプノフ指数を推定する方法と、再構成した1次元分岐図の定量的な評価方法を提案した。次に、提案方法による分岐図再構成のシミュレーション実験の結果を示す。本章で対象とするカオス力学系は、1次元離散時間系のロジスティック写像、2次元離散時間系のエノン写像、連続時間系のレスラー方程式とする。

第5章は、1999年に Bagarinao らが提案した予測器に基づいた分岐図再構成のアルゴリズムを基にした新しい分岐図再構成の方法を提案し、その有用性をシミュレーション実験により示す。シミュレーション実験では、第4章で対象としたカオス力学系、実在の non-LIP の系であるモータドライブの数値モデルと生態系の植生バイオマスのモデルに対して分岐図再構成を行った。

第6章は、Kawakami が提案したパラメータ空間上で分岐曲線を追跡する方法を基に未知の力学系へ適用する。シミュレーション実験では、エノン写像の2次元パラメータ空間に対して分岐曲線の追跡を行った。

第7章は、本研究の結論と今後の課題と展望をまとめた。

第2章 カオス力学系

本研究では、パラメータによって様々な振舞を示すカオス力学系を対象の系とする。本章では、カオス時系列の説明とカオス力学系の特徴の一つのパラメータによる振舞の変化である分岐現象についての説明を行う。分岐現象は、初めに離散時間のカオス力学系の1次元写像であるロジスティック写像を例に説明する。その後、2次元写像に拡張して説明を行う。

2.1 カオス時系列

カオス時系列は一見するとランダムに変動しているように見えるが、決定論的ダイナミクスに従い生成された時系列である [40, 1]。例えば、神経応答や脳波信号、音声信号、心電図などの生体システムや、工学システム、経済活動を表す指標などの様々な実データにカオス時系列は存在すると言われている。しかし、決定論的な系にも関わらず、カオス力学系が持つ非線形性から工学的応用で重要な予測・制御が難しいとされている。

カオス時系列の特徴は下記が挙げられる。

1. 軌道不安定性：カオス力学系が持つ非線形性により微小な誤差が指数関数的に増大して、最終的にはアトラクタのサイズまで拡大される。この特徴は、リアプノフ指数によって定量化される。
2. 長期予測不可能性：軌道不安定性により、観測誤差が指数関数的に増大するため無限大の精度で観測する必要がある。しかし、決定論的ダイナミクスのため精度の高いモデルであれば誤差が増大するまでの短期間なら予測が可能である。
3. 有界性：軌道不安定性のみでは、系の状態はすぐ発散してしまう。しかし非線形折返しという特徴があるため、系の状態値は有界な領域で運動する。
4. アトラクタのフラクタル性：カオス力学系のアトラクタは、多くの場合フラクタル構造を持つ。
5. 非線形性：時系列を観測した時に、非周期的な挙動を示す。例えば、1変数の差分方程式の系を考えた時に出力値が入力値の1次式で表せない系から生成された時系列信号である。

カオス時系列の一例を図 2.1 に示す。時系列信号の学習を行う上で重要な特徴である長期予測不可能性を示すため、初期値を変えた 2 組の時系列信号を示す。ここで、実線と破線が、それぞれ、 3.0 と $3.0+10^{-10}$ を初期値とした時の時系列である。実線と破線の時系列信号を比べると、 $t=30$ まではほぼ同一の振舞をしているにも関わらず、 $t=30$ 以降は少しずつ離れ $t=40$ 辺りでは全く違う振舞を示している事がわかる。この結果からわかる通り、初期値の 10^{-10} の違いがたった 30 ステップ後に全く違う振舞を示すために、長期の予測は難しい。一方、精度の高い予測器が作れば短期の予測は可能である事がわかる。

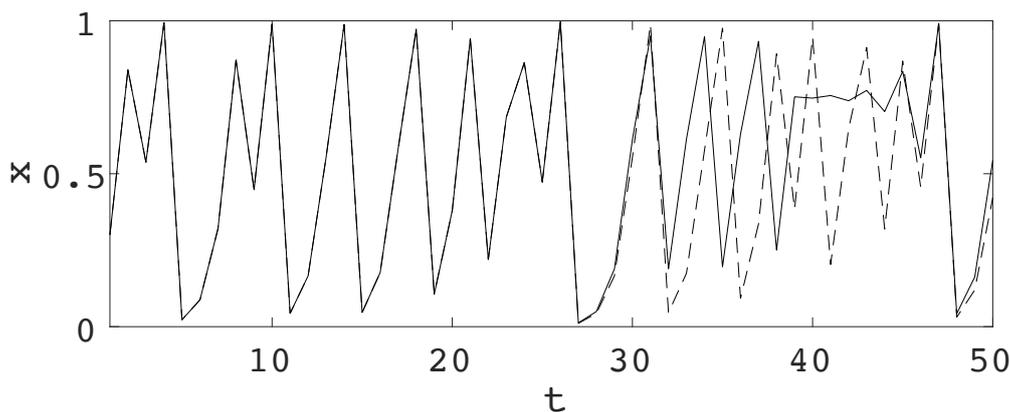


図 2.1: ロジスティック写像の時系列信号

2.2 1次元写像の分岐現象

力学系のパラメータの値を変化させた時に系の振舞が変化することがある。これを分岐現象と呼ぶ。本節では、離散時間のカオス力学系の 1 次元写像であるロジスティック写像を例に分岐現象の紹介を行う。ロジスティック写像 [24] は

$$x^{(l)}(t+1) = f(x^{(l)}(t), p^{(l)}) = p^{(l)} x^{(l)}(t) (1 - x^{(l)}(t)) \quad (2.1)$$

で表す力学系である。ここで、 $p^{(l)}$ がロジスティック写像のパラメータである。図 2.2 の上段にパラメータ $p^{(l)}$ を 0 から 4 まで変化させた時の分岐図、下段に分岐図と対応するリアプノフ指数を示す。リアプノフ指数については、2.4 節で説明する。分岐図とは、パラメータを変化させたときの系の振舞を可視化した図である。ロジスティック写像は、1 次元状態値、1 次元パラメータ空間を持つ力学系のため、横軸にパラメータ、縦軸に状態値をプロットする。ここで、分岐図には過渡期を除いてプロットする。

図 2.2 から、ロジスティック写像の振舞は下記の 3 種類に分類される事がわかる。

1. $p^{(l)}$ が 0 から 3 の範囲のように固定点 u に収束する。過渡期を経てある一点に収束する点であり、安定固定点という。安定固定点の条件は $|\frac{df(u)}{dx^{(l)}}| < 1$ である。つまり、 u から多少ずれた点からでも時間と共に u に収束する。

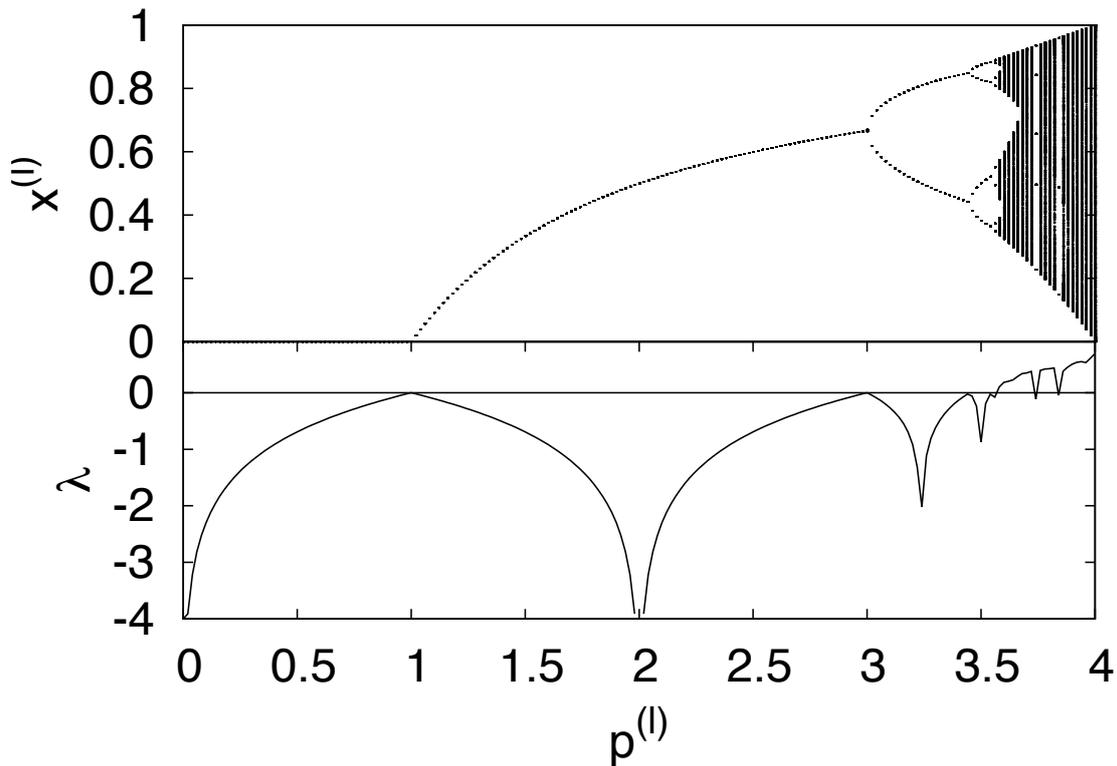


図 2.2: ロジスティック写像の分岐図

2. 周期振動 $u_1, \dots, u_M, u_1, \dots, u_M, \dots$ を繰り返す. つまり, M 周期の場合, $f^M(u_1) = u_1$ となる振動であり, 安定周期解と呼ぶ. 安定周期解の条件は $|\frac{df^M(u)}{dx^{(l)}}| < 1$ である. 安定固定点と同様に, u_1, \dots, u_M から多少ずれた点からでも時間と共に周期振動 $u_1, \dots, u_M, u_1, \dots, u_M, \dots$ となる.
3. 非周期的なカオスの振舞をする.

次にロジスティック写像の状態が変化する点 (分岐点) について述べる. 分岐現象は安定固定点不安定になった時などに起こる.

2.2.1 トランスクリティカル分岐

トランスクリティカル分岐は, 安定固定点不安定固定点に, 不安定固定点安定固定点に変化する分岐現象である. 図 2.2 では, $p^{(l)} = 1$ がトランスクリティカル分岐の分岐点である. 式 (2.1) について $u = f(u, p^{(l)})$ を解くと, 0 と $1 - \frac{1}{p^{(l)}}$ が固定点になる事がわかる. 図 2.3 に $p^{(l)} = 1$ 周辺のロジスティック写像の固定点を示す. ここで, 実線が安定固定点, 破線が不安定固定点である. $0 \leq p^{(l)} < 1$ の時, $x^{(l)} = 0$ は安定固定点, $x^{(l)} = 1 - \frac{1}{p^{(l)}}$ が不安定固定点である. $1 < p^{(l)} \leq 3$ の時は反転して, $x^{(l)} = 0$ が不安定固定点, $x^{(l)} = 1 - \frac{1}{p^{(l)}}$ が安定固定点となる.

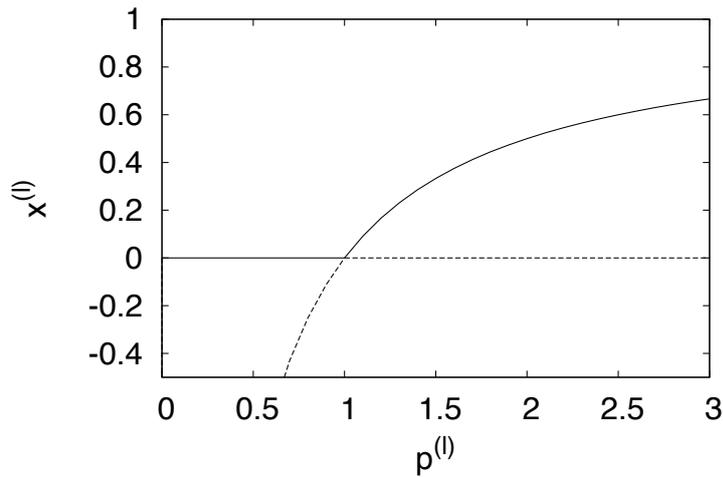


図 2.3: トランスクリティカル分岐

2.2.2 周期倍分岐

周期倍分岐は，固定点 \rightarrow 2 周期 \rightarrow 4 周期 \rightarrow 8 周期 $\rightarrow \dots$ のように安定周期解の周期数が倍に増えていくような分岐である．周期倍分岐が繰り返される事により，カオスに至る．例えば，図 2.2 では， $p^{(l)} = 3$ が固定点から 2 周期への分岐点である． $p^{(l)} = 3$ 周辺を拡大した図を図 2.2 に示す．ここで，実線が安定固定点，または，安定周期解，破線が不安定固定点である．この図では，周期倍分岐点を境に安定固定点が不安定固定点に変化している．同様に，2 周期から 4 周期への周期倍分岐では安定 2 周期解が不安定 2 周期解に変化する．

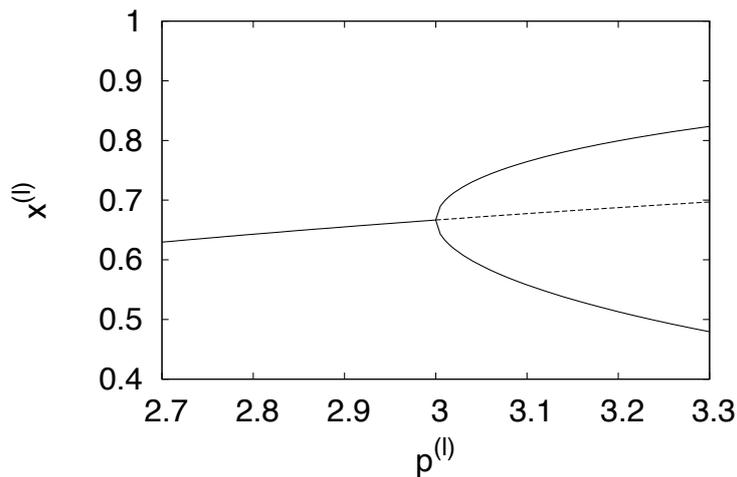


図 2.4: 周期倍分岐

2.2.3 接線分岐 (サドル-ノード分岐)

接線分岐 (サドル-ノード分岐) は, カオス解から周期解に変化する分岐現象である. 分岐図上のカオス領域に現れる周期解の窓は, 接線分岐により生成される機構である. 従って, 図 2.2 では $p^{(l)} = 3.83$ 付近でカオスから突然 3 周期解に変化する点が分岐点である. 図 2.5 に $p^{(l)} = 3.83$ 周辺を拡大した図を示す. この分岐は, 安定な n 周期解と不安定な n 周期解がペアになって, 新しく発生するか消滅する分岐現象である.

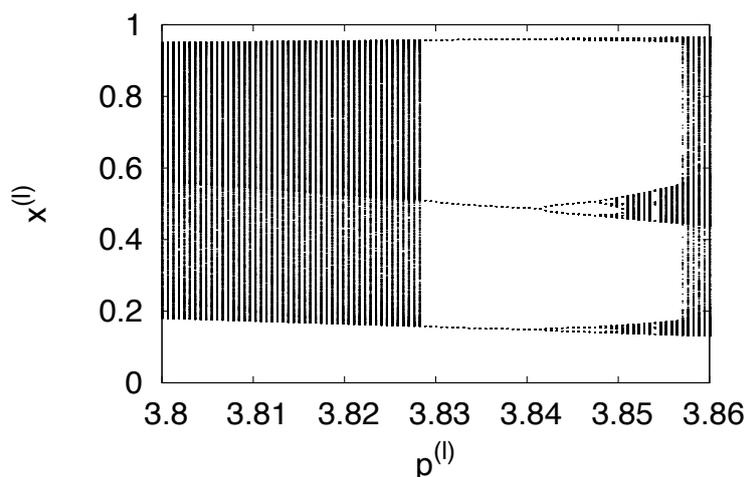


図 2.5: 接線分岐

2.3 2次元写像の分岐現象

離散時間力学系の 2 次元写像は,

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{x}(t), p) \quad (2.2)$$

と表す. ここで, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 = [x_1(t), x_2(t)]^T$ は状態値ベクトル, $f = [f_1(\cdot, \cdot), f_2(\cdot, \cdot)]^T$ は関数ベクトル, p はパラメータとする. 1次元写像と同様に下記の振舞をする.

1. 固定点ベクトル \mathbf{u} に収束する. 過渡期を経てある一点に収束する点であり, 安定固定点という.
2. 周期振動 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M, \dots$ を繰り返す. つまり, M 周期の場合, $f^M(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1$ となる振動であり, 安定周期解と呼ぶ.
3. 非周期的なカオスの振舞をする.

表 2.1: 固定点の安定性

$\eta_1\eta_2 > 0$: 向きを保つ固定点		$\eta_1\eta_2 < 0$: 向きを反転する固定点	
状態	特性	状態	特性
$ \eta_1 < 1, \eta_2 < 1$	完全安定固定点	$ \eta_1 < 1, \eta_2 < 1$	完全安定固定点
$ \eta_1 > 1, \eta_2 > 1$	完全不安定固定点	$ \eta_1 > 1, \eta_2 > 1$	完全不安定固定点
$0 < \eta_1 < 1 < \eta_2$	正不安定固定点	$-1 < \eta_1 < 0, 1 < \eta_2$	正不安定固定点
$\eta_1 < -1 < \eta_2 < 0$	逆不安定固定点	$\eta_1 < -1, 0 < \eta_2 < 1$	逆不安定固定点

力学系のヤコビ行列の固有値を用いた安定固定点と安定周期解の条件を表 2.1 にまとめる。ここでヤコビ行列は

$$Df(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

から求められる。ヤコビ行列の固有値は、

$$\det[Df(\mathbf{u}) - \eta I] = 0 \quad (2.4)$$

の 2 根 η_1, η_2 を求める事により得られる。

2次元写像の分岐現象の種類と条件は下記の 3 種類が挙げられる。

1. 接線分岐 (サドル-ノード分岐) : 一つの固有値が $\eta = 1$ となる。完全安定不動点と正不安定不動点のペアが分岐点で発生もしくは消滅する。完全不安定不動点と正不安定不動点のペアが分岐点で発生もしくは消滅する。
2. 周期倍分岐 : 一つの固有値が $\eta = -1$ となる。完全安定不動点が逆不安定不動点となり、近傍に完全安定 2 周期点が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。完全不安定不動点が逆不安定不動点となり、近傍に完全不安定 2 周期点が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。逆不安定不動点が完全安定不動点となり、近傍に正不安定 2 周期点が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。逆不安定不動点が完全不安定不動点となり、近傍に正不安定 2 周期点が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。
3. ネイマルク-サッカー分岐 (ホップ分岐) : 一つの固有値が $\eta = |1|, (\eta \neq 1, \eta \neq -1)$ 完全安定不動点は完全不安定不動点になり、その近傍に安定な不変閉曲線が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。完全不安定不動点は完全安定不動点になり、その近傍に不安定な不変閉曲線が発生する。もしくはこの逆の過程が生じる。

2.4 リアプノフ指数

リアプノフ指数 μ は、カオスを定量的に評価する。カオス時系列は微小誤差が指数関数的に大きくなるを考えるため、初期微小誤差 $e(0)$ と t ステップ後の誤差

$e(t)$ の関係は

$$e(t) = e(0) \exp(\mu t) \quad (2.5)$$

である。従って、状態値の変化量の大きさからリアプノフ指数が計算ができるため、

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^t(x(0))}{dx(0)} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln \left| \frac{df(x(i+1))}{dx(i)} \right| \end{aligned} \quad (2.6)$$

から求められる。 $\mu < 0$ の時に安定周期解を表し、 $\mu > 0$ の時にカオス解を表す。また、 $\mu = 0$ は分岐点を意味する。式 (2.6) からわかる通り、正のリアプノフ指数を持つカオス力学系はわずかな誤差が指数関数的に拡大する。この性質が軌道不安定性であり、長期予測を不可能にしている。

図 2.2 の下段に、上段の分岐図と対応するリアプノフ指数を表す。図から、安定固定点や安定周期解は $\mu < 0$ 、分岐点は $\mu = 0$ 、カオス解は $\mu > 0$ を示すことがわかる。

第3章 エクストリーム学習器

エクストリーム学習器 (ELM) [15] は, 2006 年に Huang らにより提案された 3 層構造のニューラルネットワークである. 現在までに ELM は, 多くの研究者により様々な問題に適用され有用性が示されている [41, 42, 43]. ELM が注目された理由として, 単純な構造に関わらず汎化性能に優れている点, 出力層ニューロンのみが学習対象のため高速な学習が可能である点が挙げられる. これらの特徴は複数の時系列を繰り返し学習する分岐図再構成に適しているため, 本研究では ELM を予測器として使用する. 加えて, ELM は設定するパラメータが少ない点も長所の一つだが, パラメータの一つである ELM の隠れ層のニューロン数を適切に設定しないと, 分岐図再構成の成功率が極端に下がってしまう. 適切な隠れ層のニューロン数を設定するために, ELM に刈込手法を適用する. 現在まで, 刈込手法を適用した ELM は様々な手法が提案されてきた [44, 45, 46, 47]. 2013 年, Ying と Fan-jun がセンシティブティ解析による刈込を行った ELM (SAP-ELM: the Pruned ELM based on Sensitivity Analysis) [35] を提案した. この手法は, 隠れ層ニューロンを多めに設定した ELM を生成してからセンシティブティが低い隠れ層ニューロンを刈込む. Ying と Fan-jun は回帰問題とクラス分類問題に対してシミュレーション実験を行い, 刈込手法を適用した ELM が標準的な ELM と比べて精度が向上する事を示した. 最適な隠れ層ニューロン数に刈込を行い, 精度が向上する事は分岐図再構成に適しているため SAP-ELM を本研究で使用する. 本研究では, ELM と SAP-ELM を用いて分岐図再構成を行う.

また, 標準的な ELM や SAP-ELM がカオスニューロンモデルの周期信号を含めた時系列を学習できない事を確認した. ELM の特徴を変えずにカオスニューロンモデルの時系列を学習する方法を示す. 本節では時系列予測の結果を示し, この結果を用いた分岐図再構成の結果は B 項に示す.

3.1 エクストリーム学習器

ELM の構造を図 3.1 に示す. 図中の U , V , Y は, それぞれ入力層, 隠れ層, 出力層のニューロン数である. ELM の i 番目の隠れ層ニューロンの出力 $o_i^{(h)}(t)$ は,

$$o_i^{(h)}(t) = \text{sig}(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{o}^{(i)}(t) + b_i) \quad (3.1)$$

で得られる. ここで, $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^U$ と b は i 番目の隠れ層ニューロンの結合荷重ベクトルとバイアス値, $\mathbf{o}^{(i)}(t) \in \mathbb{R}^U$ は入力ベクトルである. 隠れ層ニューロンの結合荷

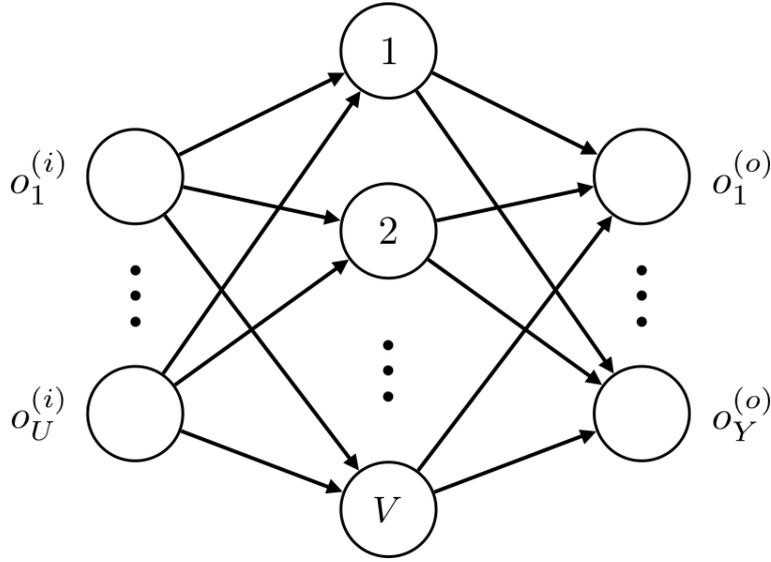


図 3.1: ELM の構造

重とバイアスは $[-1, 1]$ の範囲の乱数を生成し固定する. ELM は, 標準的なシグモイド関数:

$$\text{sig}^{(\text{general})}(\chi) = \frac{1}{1 - \exp(\chi)} \quad (3.2)$$

が用いられるが, これを用いると隠れ層が 0 から 1 の範囲の出力となるため絶対値の大きい時系列が対象の場合に 0 または 1 に収束してしまう. 従って, 本研究ではシグモイド関数を

$$\text{sig}(\chi) = \frac{v_1}{1 - \exp(\chi/v_3)} - v_2 \quad (3.3)$$

に変更し, 出力レンジが調整できるシグモイド関数を使用する. ここで, v_1, v_2, v_3 はシグモイド関数の出力レンジを調整するためのパラメータである. j 番目の出力層ニューロンの出力 $o_j(t)$ は,

$$o_j^{(o)}(t) = \boldsymbol{\beta}_j \cdot \mathbf{o}^{(h)}(t) \quad (3.4)$$

で得られる. ここで, $\mathbf{o}^{(h)}(t) = [o_1^{(h)}(t) \ o_2^{(h)}(t) \ \dots \ o_V^{(h)}(t)]$ は隠れ層ニューロンの出力ベクトル, $\boldsymbol{\beta}_j$ は j 番目の出力層ニューロンの結合荷重ベクトルである. 出力層の結合荷重行列 $\mathbf{B} = [\boldsymbol{\beta}_1 \ \boldsymbol{\beta}_2 \ \dots \ \boldsymbol{\beta}_Y]$ は下記の行列演算によって得る.

$$\mathbf{B} = \mathbf{O}^{(h)\dagger} \mathbf{D} \quad (3.5)$$

ここで, $\mathbf{O}^{(h)\dagger}$ は隠れ層ニューロンの出力行列 $\mathbf{O}^{(h)} = [\mathbf{o}^{(h)}(1) \ \mathbf{o}^{(h)}(2) \ \dots \ \mathbf{o}^{(h)}(L)]$ の擬似逆行列, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{L \times Y}$ は教師データの行列である. L は学習を行う入力パターン数である.

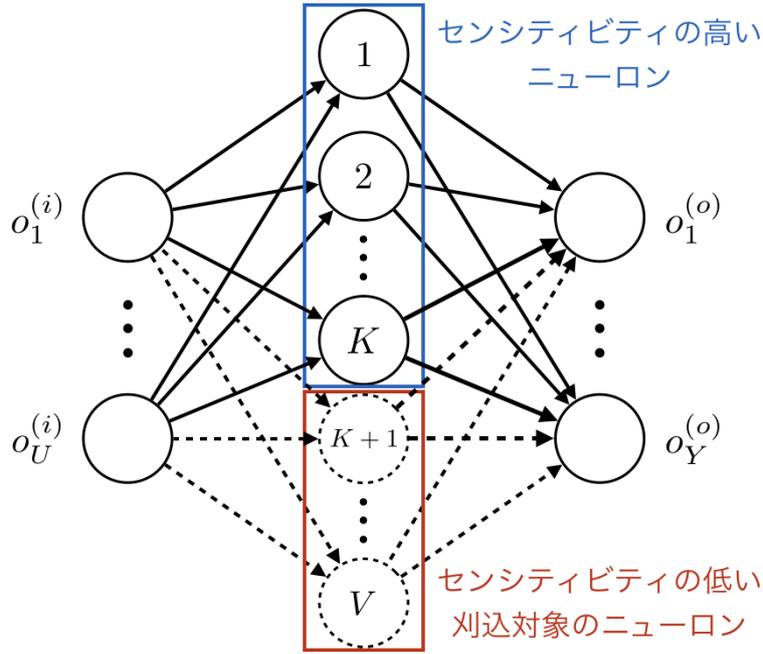


図 3.2: SAP-ELM の構造

3.2 センシティブリティ解析による刈込を行った ELM

SAP-ELM は、刈込手法により最適な隠れ層ニューロン数を ELM に設定する。本手法は、隠れ層ニューロンを多めに設定した ELM を生成してからセンシティブリティが低い隠れ層ニューロンを刈込む。ここで、センシティブリティとは隠れ層ニューロン毎に計算され、隠れ層ニューロンの出力が出力層ニューロンの出力に与える影響度を指す。図 3.2 に SAP-ELM の構造を示す。SAP-ELM のアルゴリズムを下記に示す。

1. 隠れ層ニューロンを多めに設定した ELM の学習を行う。
2. 隠れ層ニューロン毎にセンシティブリティを計算する。センシティブリティは対象の隠れ層ニューロンの出力値と出力層ニューロンの結合荷重から計算できるため、 i 番目の隠れ層ニューロンのセンシティブリティは、

$$\Psi_i = \frac{1}{YL} \sum_{j=1}^Y \sum_{n=1}^L |o_i^{(h)}(n)| |\beta_{ji}|, \quad (1 \leq i \leq V) \quad (3.6)$$

により計算できる。ここで、 β_{ji} は i 番目の隠れ層ニューロンと接続されている j 番目の出力ニューロンの結合荷重である。

3. 隠れ層ニューロンをセンシティブリティの大きい順に並べる。

$$\Psi'_1 \geq \Psi'_2 \geq \dots \geq \Psi'_V \quad (3.7)$$

4. k 番目の隠れ層ニューロンのセンシティブリティの寄与率 ζ_k を

$$CR_k^{(sensitivity)} = \frac{\sum_{i=1}^k \Psi'_i}{\sum_{j=1}^V \Psi'_j}, \quad (1 \leq k \leq V) \quad (3.8)$$

により計算する.

5. 必要な隠れ層ニューロン数 K はしきい値 θ をセンシティブリティの寄与率が超えた時の k とする. 本研究では, しきい値を 0.9 とする.

6. 刈込対象の隠れ層ニューロンの結合荷重を基にして必要な隠れ層ニューロンの結合荷重を更新する.

$$\mathbf{w}'_i := \mathbf{w}'_i + \mathbf{w}^{(del)}, \quad (1 \leq i \leq K) \quad (3.9)$$

ここで \mathbf{w}'_i は並び替え後のセンシティブリティ Ψ'_i と対応する. また, 刈込対象の隠れ層ニューロンの平均値 $\mathbf{w}^{(del)}$ は下記により計算する.

$$\mathbf{w}^{(del)} = \frac{1}{V-K} \sum_{i=K+1}^V \mathbf{w}'_i \quad (3.10)$$

7. 必要な隠れ層ニューロンの出力値を用いて出力層ニューロンの結合荷重を計算し直す.

3.3 ELM によるカオスニューロンの時系列予測

ELM を様々な系の時系列に対して適用している中で, 標準的な ELM がカオスニューロンモデルの周期信号を含めた時系列を学習できない事を確認した. 本節では, ELM を用いたカオスニューロンの時系列予測の数値実験結果を示す. 本節で示す方法を用いれば, カオスニューロンの入出力関係と同等の特徴を持つ系に対しても有効であると考えられる. 隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を変更することにより, カオスニューロンの時系列予測が可能になる事を示す.

3.3.1 カオスニューロンモデル

1990 年, 合原らはカオス応答を示す複雑なニューロンの非線形応答が, 定性的に

$$\begin{aligned} x^{(c)}(t+1) &= p_1^{(c)} x^{(c)}(t) - p_2^{(c)} f(x^{(c)}(t)) + p_3^{(c)} \\ f(\chi) &= \frac{1}{1 + \exp(-\chi/p_4^{(c)})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

による簡単な離散時間力学系モデルで近似できることを示した [48]. ここで, $x^{(c)}$ はニューロンの出力, $p_1^{(c)}$ は不応性の減衰定数, $p_2^{(c)}$ は不応性のスケーリング定数,

$p_3^{(c)}$ は外部入力, $p_4^{(c)}$ はシグモイド関数の傾きを調整するパラメータである. 本数値実験では, $p_1^{(c)} = 0.7$, $p_2^{(c)} = 1.0$ と $p_4^{(c)} = 0.02$ で固定する. 多数のカオスニューロンを結合させたネットワークであるカオスニューラルネットワークを構成することで, 連想記憶や組合せ最適化といった応用が可能である [49].

カオスニューラルネットワークの解析が可能であれば, 脳のニューロンのカオス応答の解析にも繋がると考えられる. 本研究では単一のカオスニューロンモデルの解析として, 分岐図再構成を行う. 分岐図再構成の結果は, B 項で示す. 本節では, 分岐図再構成を行う過程で重要なカオスニューロンモデルの時系列の学習を行う.

3.3.2 カオスニューロンモデルの時系列予測

カオスニューロンモデルの 10 周期の時系列 ($p_3^{(c)} = 0.2$) とカオス時系列 ($p_3^{(c)} = 0.1$) の予測結果を示す. 隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を, $[-1, 1]$, $[-5, 5]$, $[-10, 10]$, $[-20, 20]$, $[-50, 50]$ と設定し比較を行う. 予測の評価指標は, 平均平方二乗誤差 (RMSE:Root Mean Square Error):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{t=1}^L (o^{(o)}(t) - d(t))^2} \quad (3.12)$$

を使用する. ここで, d は期待するネットワークの出力値である. 分岐図再構成は, 前処理として ELM を複数個作成しそれぞれ学習を行い, 単一時系列の予測精度が高い ELM を使用する. そのため, 本数値実験では 100 試行し, 予測期間の RMSE が最小値のデータを結果として示す. 予測に用いた ELM の入力層, 隠れ層, 出力層のニューロン数は, それぞれ, 1, 10, 1 個とする.

表 3.1 に周期時系列の予測結果を示す. 学習期間 $L = 1000$, 予測期間 1000 とし, RMSE は学習期間 (RMSE-t) とフリーランによる予測期間 (RMSE-p) の評価を行った. また, 予測期間の RMSE が最小値である隠れ層ニューロンの出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ のランクを示す. 本研究で使用するランクは, 隠れ層ニューロンの出力行列の特異値が 10^{-3} 以上の特異値の数とする. 表 3.2 にカオス時系列の予測結果を示す. カオス時系列の予測は, 学習期間 $L = 1000$, 予測期間 30 とした.

表 3.1 と表 3.2 の結果から, 隠れ層ニューロンの結合荷重に標準的な ELM に設定する乱数生成の範囲 $[-1, 1]$ を設定すると, 周期時系列は予測精度が低く, カオス時系列の予測は 100 試行全てのフリーラン予測で発散してしまう. また, 乱数生成の範囲を広げていくと, RMSE が下がり予測精度が向上する. 表 3.1 では, 10 周期の時系列のためランクは 10 になる事が望ましいが, 結合荷重の範囲を $[-1, 1]$, $[-5, 5]$ に設定した時は特にランクが小さくなり, 予測精度が低い結果となった. 特異値が非常に小さい隠れ層ニューロンの出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ の擬似逆行列は値が非常に大きくなるため, 出力層ニューロンの結合荷重 \mathbf{B} の値も大きくなる. これにより, 汎化性能が低い ELM となってしまう [15] [50], 予測精度が下がり最終的に時系列が発散してしまう. これは, 表 3.2 からカオス時系列の予測結果も同様の事がいえる

表 3.1: 周期時系列の予測結果

乱数の範囲	RMSE-t	RMSE-p	ランク
[-1, 1]	4.84×10^{-3}	0.0164	4
[-5, 5]	4.53×10^{-3}	0.394	5
[-10, 10]	7.69×10^{-10}	8.00×10^{-3}	7
[-20, 20]	4.54×10^{-14}	7.94×10^{-14}	8
[-50, 50]	5.08×10^{-13}	1.74×10^{-13}	10

表 3.2: カオス時系列の予測結果

乱数の範囲	RMSE-t($\times 10^{-3}$)	RMSE-p	ランク
[-1, 1]	-	-	-
[-5, 5]	8.02	0.253	6
[-10, 10]	3.34	0.209	7
[-20, 20]	1.73	0.0466	8
[-50, 50]	0.861	0.0455	10

と考えられる。本数値実験の隠れ層ニューロンは 10 個のため、カオス時系列予測の場合もランクは 10 となる事が望ましい。

3.3.3 隠れ層ニューロンの入出力関係

ELM の隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成範囲を広げる事により、カオスニューロンモデルの時系列の予測精度が向上した。乱数生成範囲を広げる事により結合荷重の絶対値が大きくなるため、結合荷重を大きくした時の隠れ層ニューロンの入出力関係の変化を確認し、乱数生成範囲を広げる事により予測精度が向上した理由について考察する。図 3.3 に、単一の隠れ層ニューロンの結合荷重を時系列予測の数値実験で使用した乱数範囲のそれぞれの最小値 $-1, -5, -10, -20, -50$ に設定した時の隠れ層ニューロンの入出力関係を示す。ここで、隠れ層ニューロンのバイアス値は全て 0 とした。また、入力値の範囲はカオスニューロンモデルのダイナミックレンジ $[-0.8, 0.8]$ とした。図 3.3 から、隠れ層ニューロンの入出力関係は結合荷重を大きくすると入出力関数の傾きが大きくなり、0 または 1 への収束が早くなる事がわかる。

$[-1, 1], [-5, 5]$ などの結合荷重の絶対値が小さい時は、入出力関数の傾きが小さいため入力データ間の差が小さくなり隠れ層ニューロンの出力行列のランクが下がり、 $[-20, 20], [-50, 50]$ などの結合荷重の絶対値が大きい時は、傾きが大きいため入力データ間の差が大きくなり、隠れ層ニューロンの出力行列のランクも大きな値をとると考えられる。これは、表 3.1 と表 3.2 の結果と一致する。結合荷重の乱数生成範囲を広く設定すると結合荷重の絶対値が大きくなり、隠れ層ニューロンの出力行列のランクが大きくなる (付録 D 参照)。ランクが大きくなる事により

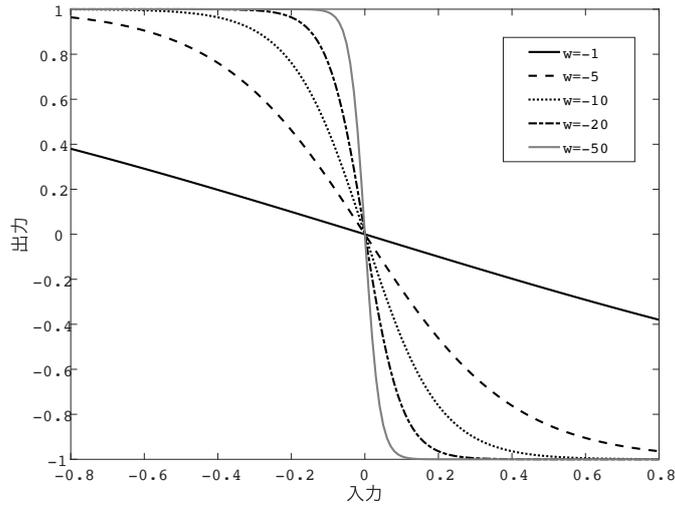


図 3.3: 隠れ層ニューロンの入出力関係

出力層ニューロンの結合荷重の値が小さくなり汎化性能が向上し，予測精度が高くなったと考えられる。

3.3.4 カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係

図 3.4 と図 3.5 に，カオスニューロンモデルと学習後の ELM の入出力関係を示す。ここで，図中の実線がカオスニューロンモデルの入出力関係，破線，点線，一点鎖線が，それぞれ，乱数生成の範囲 $[-1, 1]$ ， $[-20, 20]$ ， $[-50, 50]$ を用いた ELM の入出力関係を示す。乱数生成の範囲を広げていくと，学習に使用していない入力領域もカオスニューロンモデルの入出力関係に近づく事がわかる。破線や点線のような勾配の大きい（発散しやすい）入出力関係になるのは，3.2 節で述べたように出力ニューロンの結合荷重の値が大きいためである。

一点鎖線の ELM の入出力関係に注目すると，カオスニューロンモデルの入出力関係と重なっている箇所が多く入力のダイナミックレンジ全体にわたって入出力関係が一致している事がわかる。分岐図再構成において，図 3.4 と図 3.5 の $[-50, 50]$ の結果のように学習に使用していない領域まで近似できている事が望ましいと考えている。これまで，時系列の予測精度が高い ELM が分岐図再構成の精度が高いと仮定していたが，表 3.1 と表 3.2 中の $[-20, 20]$ と $[-50, 50]$ の RMSE に差は現れていないため，RMSE では最適な結合荷重の乱数生成範囲を選択できない。一方，隠れ層ニューロンの出力行列のランクでは差が現れているため，隠れ層ニューロンの出力行列のランクは，分岐図再構成を行う上で最適な隠れ層の結合荷重の乱数生成の範囲を決める一つの指標になると考えられる。

また，本実験では隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を $[-50, 50]$ まで広げたが，これは $\text{sig}(-50 \cdot y(t))$ と表す事ができ，カオスニューロンモデルの第 2 項のシグモイド関数部 ($\epsilon = 0.02$) に相当する。この事と，乱数生成の範囲 $[-50, 50]$

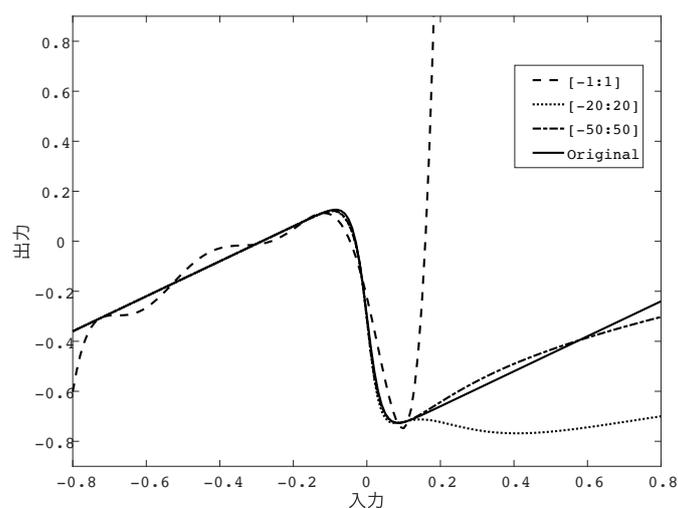


図 3.4: カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係 (8 周期時系列)

の時に予測精度が向上し入出力関係が一致するようになった事は関係があると考えられ、予測対象システムに合わせて隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を調整する事は有用であるといえる。

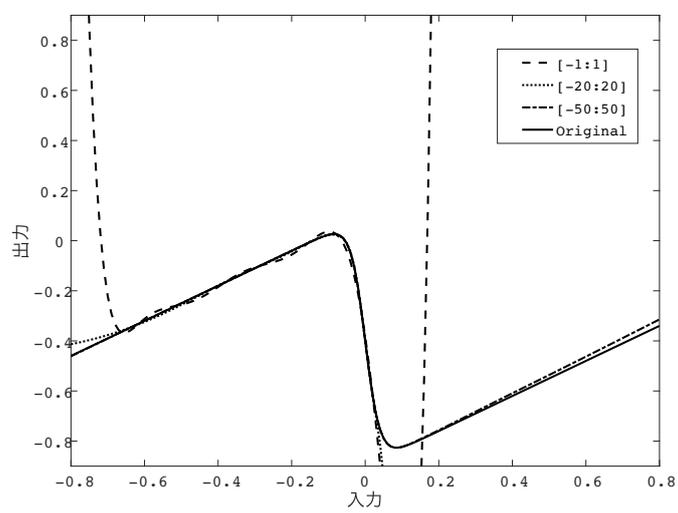


図 3.5: カオスニューロンモデルと ELM の入出力関係 (カオス時系列)

第4章 パラメータに基づいた分岐図再構成

本章では、Tokunaga らが提案した時系列からの分岐図再構成の手法であるパラメータに基づいた分岐図再構成 (PBR: Parameter-Based Reconstruction algorithm) のアルゴリズム [17] の概要について述べる。本章では PBR アルゴリズムに基づく下記的手法について提案する。すなわち、再構成した分岐図のリアプノフ指数推定、定量的な評価指標を導入し再構成した分岐図同士の比較、刈込手法を適用した ELM による分岐図再構成、様々なカオス力学系の分岐図再構成を行う。

4.1 パラメータに基づいた分岐図再構成 (PBR) のアルゴリズム

対象システムの入出力関係を表した非線形写像を

$$\mathbf{x}(t+1) = f(\mathbf{p}_n, \mathbf{x}(t)), (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.1)$$

と表す。ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^Y$ と $\mathbf{x}(t+1) \in \mathbb{R}^Y$ は非線形写像の入力ベクトルと出力ベクトル、 P は分岐図再構成のために与えられた時系列の数、 $f(\cdot)$ は非線形写像、 $\mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^C$ は n 番目の時系列を生成した時のパラメータを表す。 Y, C は、それぞれ、非線形写像の入出力ベクトルの次元、パラメータベクトルの次元である。各パラメータ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_P$ から生成された時系列を S_1, S_2, \dots, S_P で表す。それぞれの時系列に対して、時系列予測器：

$$\mathbf{x}(t+1) = g(\boldsymbol{\omega}_n, \mathbf{x}(t)), (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.2)$$

を生成する。ここで、 $g(\cdot)$ は非線形関数、 $\boldsymbol{\omega}_n \in \mathbb{R}^A$ は n 番目の時系列を学習した結合荷重ベクトルを表す。 A は学習した結合荷重の総数である。すなわち、時系列 S_1, S_2, \dots, S_P と学習した結合荷重 $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \dots, \boldsymbol{\omega}_P$ が対応する。

$\boldsymbol{\omega}_n$ に主成分分析を適用するために、学習した結合荷重の偏差ベクトル:

$$\delta \boldsymbol{\omega}_n = \boldsymbol{\omega}_n - \boldsymbol{\omega}_0, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P \boldsymbol{\omega}_n \quad (4.4)$$

を計算する。ここで、 ω_0 は学習した結合荷重の平均ベクトルである。次に、偏差ベクトル $\delta\omega_n$ の分散共分散行列に対して主成分分析を適用し、固有値と固有ベクトルを得る。降順に並べ替えた固有値を

$$\phi_1 \geq \phi_2 \geq \dots \geq \phi_A \quad (4.5)$$

と表し、固有値 ϕ_i に対応する固有ベクトルを $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^A$ と表す。固有ベクトルを用いて偏差ベクトル $\delta\omega_n$ を表すと、

$$\delta\omega_n = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_A] \boldsymbol{\gamma}_n, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.6)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\gamma}_n \in \mathbb{R}^A$ は主成分得点に対応するベクトルであり、本研究では推定ベクトルと呼ぶ。次に、次元縮約のために固有値から寄与率と累積寄与率を求める。第 n 主成分の寄与率 CR_n と累積寄与率 CCR_n は、

$$CR_n = \frac{\phi_n}{\sum_{i=1}^A \phi_i} \times 100, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.7)$$

$$CCR_n = \sum_{i=1}^n CR_i, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.8)$$

によってそれぞれ求められる。本研究では累積寄与率 CCR_n が 80% 以上で十分に情報があり、それ以降はほとんど情報を持たないと仮定する。累積寄与率から E 次元に縮約が可能であると推定した時、 E 個の固有ベクトル $\mathbf{v}_i (i = 1, \dots, E)$ と推定次元 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_i \in \mathbb{R}^E = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_E]^T$ を用いて偏差ベクトルを表すと、

$$\delta\omega_n \approx [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_E] \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_n, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.9)$$

となる。ここで、時系列 S_1, S_2, \dots, S_P と対応する推定ベクトルは、

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_n = ([\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_E])^{-1} \delta\omega_n, (n = 1, 2, \dots, P) \quad (4.10)$$

で求められる。この推定ベクトルの推移 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}_1 \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_P$ を分岐ローカスと呼ぶ。また、時系列 S_1, S_2, \dots, S_P を生成した時のパラメータ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_P$ の推移 $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{p}_P$ を分岐パスと呼ぶ。分岐パスと分岐ローカスの形が一致している時、分岐パスと分岐ローカスの空間は対応していると考えられる。固有ベクトル、推定ベクトル、学習した結合荷重の平均ベクトルから予測器の結合荷重は、

$$\tilde{\omega} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_E] \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \omega_0 \quad (4.11)$$

によって求められるので、分岐ローカスの空間上で $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ の値を変えながら、

$$\mathbf{x}(t+1) = g(\tilde{\omega}, \mathbf{x}(t)) \quad (4.12)$$

を用いて時系列を生成する事により、分岐図を再構成できる。

Algorithm 4.1 Reconstruct bifurcation diagrams using ELM

Require: S_1, S_2, \dots, S_P **Ensure:** \mathbf{x} {1. ELM を用いて時系列信号 S_1, S_2, \dots, S_P を学習}中間層の結合荷重 \mathbf{w}_i とバイアス b_i を生成**for** $n = 1$ to V **do** $\mathbf{w}_i \leftarrow$ 一様乱数により生成 $b_i \leftarrow$ 一様乱数により生成**end for**生成した \mathbf{w}_i と b_i を設定した ELM により時系列信号 S_1, S_2, \dots, S_P を学習**for** $n = 1$ to P **do** $\mathbf{B}_n \leftarrow S_n$ を学習した出力層の結合荷重**end for**

{2. 学習した出力層の結合荷重に対して主成分分析を適用}

本研究は出力層ニューロンを2個以上に設定するため出力層ニューロンの結合荷重行列をベクトル化

for $n = 1$ to P **do** $\boldsymbol{\omega}_n \leftarrow [\boldsymbol{\beta}_{1,n}^T, \boldsymbol{\beta}_{2,n}^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_{Y,n}^T]^T \in \mathbb{R}^{AY}$ ここで $\boldsymbol{\beta}_{i,n}^T$ は S_n を学習した出力層の i 番目ニューロンの結合荷重である**end for** $\boldsymbol{\omega}_0 \leftarrow \frac{1}{P} \sum_{n=1}^P \boldsymbol{\omega}_n$ **for** $n = 1$ to P **do** $\delta \boldsymbol{\omega}_n \leftarrow \boldsymbol{\omega}_n - \boldsymbol{\omega}_0$ **end for**偏差ベクトル $\delta \boldsymbol{\omega}_n$ に対し主成分分析を適用し固有値 ϕ_n と固有ベクトル \mathbf{v}_n を得る**for** $n = 1$ to AY **do** $\phi_n \leftarrow$ 第 n 主成分に対応する固有値 $\mathbf{v}_n \leftarrow$ 第 n 主成分に対応する固有ベクトル**end for**固有値から寄与率 CR_n と累積寄与率 CCR_n を求め, パラメータ次元を推定する $E \leftarrow \arg \min_{1 \leq n \leq AY} CCR_n > 80[\%]$

{3. 分岐図の再構成}

for 再構成分岐図のパラメータ $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ の範囲 **do** $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \leftarrow [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_{AY}] \tilde{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega}_0$ **for** 1 to L **do** $\mathbf{x}(t+1) \leftarrow g(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{x}(t))$ **end for****end for**

4.2 ELMを用いたPBRアルゴリズムの分岐図再構成

4.1節で説明したPBRアルゴリズムにELMを用いた場合のアルゴリズムを **Algorithm 4.1** に示す.

4.3 SAP-ELMを用いたPBRアルゴリズムの分岐図再構成

本節では, 3.2節で紹介したSAP-ELMを用いた場合のアルゴリズムを **Algorithm 4.2** に示す.

Algorithm 4.2 Reconstruct bifurcation diagrams using SAP-ELM

Require: S_1, S_2, \dots, S_P

Ensure: x

{1. SAP-ELM を用いて時系列信号 S_1, S_2, \dots, S_P を学習}

for $n = 1$ to V **do**

$\mu_n \leftarrow$ 時系列 S_n の最大リアプノフ指数

end for

一般的にリアプノフ指数が大きい時系列の方が予測が難しいため, リアプノフ指数が一番大きい時系列を用いて刈込手法を適用した ELM を生成

for $n = 1$ to K **do**

$w_i \leftarrow$ 刈込手法を適用した中間層ニューロンの結合荷重

$b_i \leftarrow$ 刈込手法を適用した中間層ニューロンのバイアス

end for

刈込手法を適用した w_i と b_i を設定した ELM により時系列信号 S_1, S_2, \dots, S_P を学習

for $n = 1$ to P **do**

$B_n \leftarrow$ S_n を学習した出力層の結合荷重

end for

{2. 学習した出力層の結合荷重に対して主成分分析を適用}

Algorithm 4.1 と同様

{3. 分岐図の再構成}

Algorithm 4.1 と同様

4.4 再構成した分岐図のリアプノフ指数推定

局所的線形モデルを用いたリアプノフ指数の推定方法が様々提案された [8, 9, 36, 10, 37]. これらを基に, Adachi らは学習後のニューラルネットワークのヤコビ行

列からリアプノフ指数の推定を行った [38]. Adachi らはこの手法を用いて, エノン写像と 2 個のカオスニューラルネットワークを対象にシミュレーション実験を行い, ニューラルネットワークから推定したリアプノフ指数が学習対象の系のリアプノフ指数と対応する事を示した.

本研究では, Adachi らと同様にエクストリーム学習器の Y 次元非線形写像のヤコビ行列を用いて再構成した分岐図のリアプノフ指数を推定する [55]. 式 (4.12) のヤコビ行列 $Jg(\omega_n, \mathbf{x}(t))$ に対して, QR 分解:

$$Jg(\omega_n, \mathbf{x}(t))\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}(t+1)\mathbf{R}(t+1), (t = 1, \dots, L) \quad (4.13)$$

を適用し, 直交行列 \mathbf{Q} と右上三角行列 \mathbf{R} に分解する. 右上三角行列 \mathbf{R} の対角成分 $r_{jj} \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\mu = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \log r_{jj} (j = 1, \dots, Y) \quad (4.14)$$

により, リアプノフ指数を推定する.

4.5 再構成した 1 次元の分岐図の評価方法

2011 年, 著者らは 2 次元パラメータ空間を対象とした分岐図再構成の定量的評価方法を提案した [51, 52]. この評価手法は 2 値で表現した 2 次元パラメータ空間の分岐図を対象とする. ここで, 2 値の 2 次元分岐図とは 20 周期以下の領域は白, 21 周期以上またはカオスの領域を黒としてプロットした分岐図の事である. 2 次元分岐図の再構成はパラメータ空間の回転や伸縮が考えられるため, フラクタル性を考慮した構造的な類似度を比較する手法 [53] を用いて真の分岐図と再構成した分岐図に対して適用した.

本節では, 1 次元の分岐図を対象とした定量的評価方法の提案を行う [54]. 1 次元分岐図は, 2 次元分岐図を再構成した時に起こる回転を考慮する必要がないため 2 次元分岐図の定量的評価より詳細な情報を扱える. 従って, 周期解からカオス解へのルートやカオス領域に現れる周期解の窓の周期数を比較し分岐構造の比較を行う. 再構成した 1 次元分岐図は, 主成分分析を行う過程で真の分岐図に比べてパラメータ空間が伸縮する. 分岐図再構成は未知の力学系の分岐構造を再構成する事が目的のため, 本評価方法はパラメータ空間の伸縮を評価の対象としない. 従って, 各周期解とカオス解のパラメータ範囲の大きさは考慮せず分岐構造のみに着目して比較を行う.

4.5.1 評価方法

初めに, 分岐図のリアプノフ指数が負の局所最小値のパラメータにおける周期数を図 4.1 のように取得する. ここで, 局所最小値は図 4.1 下段のようにリアプノフ指数が 0 に近いパラメータから次のゼロに近くなるパラメータ範囲の最小値の

事である。リアプノフ指数が局所最小値のパラメータを使用する理由として、周期倍分岐などの分岐現象が起こるパラメータ付近では周期解が不安定になるため、安定した周期解のパラメータから周期数を判定するためである。さらに、本手法は周期数だけでなくカオス領域の比較も行う。カオス領域の判定は、分岐図のリアプノフ指数が0を超えた点とする。図4.1は $p^{(l)} = 2.8$ から $p^{(l)} = 3.6$ 付近のカオス領域までの周期数とカオス領域を取得して、このパラメータ範囲の推移は『2周期 → 4周期 → 8周期 → カオス領域』となる。

真の分岐図と再構成した分岐図の周期数とカオス領域の推移を抽出できたら、それらの推移をレーベンシュタイン距離を用いて比較する。レーベンシュタイン距離を本比較法の結果とするため、分岐構造が完全に一致していれば結果は0となる。

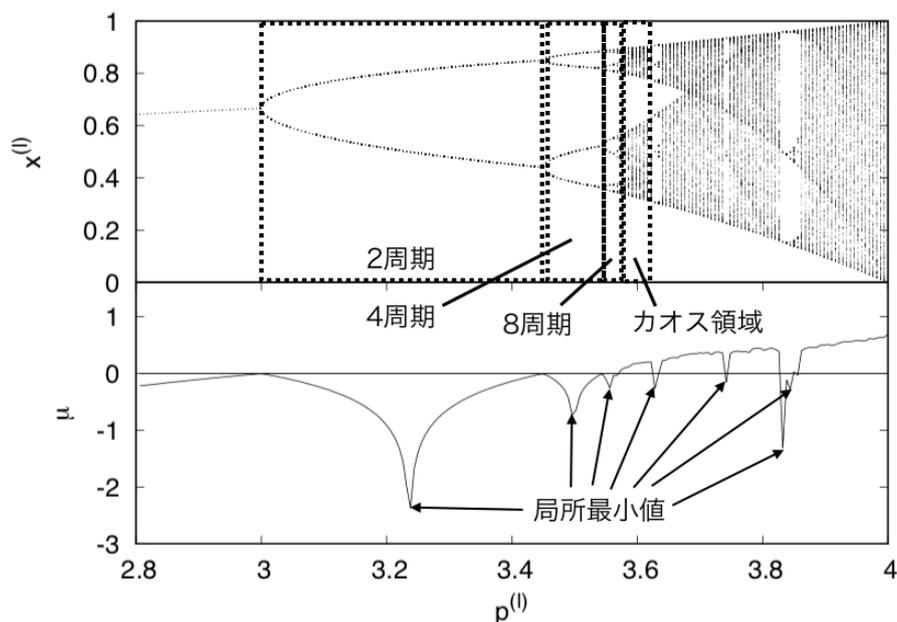


図 4.1: 周期数とカオス領域の取得方法

4.5.2 レーベンシュタイン距離

レーベンシュタイン距離 [39] は、二つの文字列間の距離を計測する方法である。二つの文字列間の距離は、片方の文字列から別の文字列へ変化させる編集回数の最小数とする。ここで、編集は文字の挿入、置換、削除を指す。「walk」から「aruku」に変換した時のレーベンシュタイン距離を計測した時の例を図4.2に示す。また、本アルゴリズムを **Algorithm 4.3** に示す。ここで真の分岐図と再構成した分岐図の周期数、カオス領域の推移をベクトル $\iota^{(1)} = [\iota_1^{(1)} \iota_2^{(1)} \dots \iota_{L_1}^{(1)}]$ と $\iota^{(2)} = [\iota_1^{(2)} \iota_2^{(2)} \dots \iota_{L_2}^{(2)}]$ で表す。本比較手法では、編集回数の挿入、置換、削除は、再構成した分岐図の周期数またはカオス領域の欠落、過誤、余分を意味する。

walkをarukuに変換

1. alk : 「w」を削除
 2. ark : 「l」を「r」に置換
 3. ark : 「u」を挿入
 4. aruku : 「u」を挿入
- 最小手順数は『4』となる

図 4.2: レーベンシュタイン距離の例

Algorithm 4.3 Calculate Levenshtein distance

Require: $\iota^{(1)}, \iota^{(2)}$

Ensure: LD

$L_1 \leftarrow$ ベクトル $\iota^{(1)}$ の次元

$L_2 \leftarrow$ ベクトル $\iota^{(2)}$ の次元

$\Upsilon \leftarrow (L_1 + 1) \times (L_2 + 1)$ のゼロ行列

for $i = 1$ to L_1 **do**

$\Upsilon[i + 1][1] = i$

end for

for $j = 1$ to L_2 **do**

$\Upsilon[1][j + 1] = j$

end for

for $i = 1$ to L_1 **do**

for $j = 1$ to L_2 **do**

 挿入コスト $\leftarrow \Upsilon[i][j + 1] + 1$

 削除コスト $\leftarrow \Upsilon[i + 1][j] + 1$

if $\iota^{(1)}[i]$ と $\iota^{(2)}[j]$ が一致 **then**

 置換コスト $\leftarrow \Upsilon[i][j]$

else

 置換コスト $\leftarrow \Upsilon[i][j] + 1$

end if

$\Upsilon[i + 1][j + 1] \leftarrow$ 挿入コスト, 削除コスト, 置換コストの中から最小値

end for

end for

$LD \leftarrow \Upsilon[L_1 + 1][L_2 + 1]$

4.5.3 パラメータ範囲の設定

真の分岐図と再構成した分岐図の分岐構造を比較する際に対応するパラメータ範囲を定義する必要がある。比較するパラメータ範囲は周期解からカオス解へのルートと窓が含まれるように、開始点 $p^{(start)}$ と終了点 $p^{(end)}$ を決める。パラメータの刻み幅 $\Delta p \in \mathbb{R}$ を

$$\Delta p = \frac{p^{(end)} - p^{(start)}}{L^{(parameter)}} \quad (4.15)$$

と定義する。ここで、 $L^{(parameter)}$ は分岐図をプロットするパラメータ数である。

4.6 PBRアルゴリズムを用いた分岐図再構成のシミュレーション実験

本節では、ELMを予測器として用いたPBRアルゴリズムのシミュレーション実験の結果を示す。本節で対象とするカオス力学系は、1次元離散時間系のロジスティック写像、2次元離散時間系のエノン写像、連続時間系のレスラー方程式を対象とする。他のカオス力学系の結果に関しては付録Bに記載する。

各カオス力学系の結果は推定したパラメータ空間の分岐図とリアプノフ指数を示す [55]。また、4.5節で提案した1次元の再構成分岐図に対する評価方法を用いて、分岐図再構成に使用する時系列の数を変えた場合の再構成分岐図同士の比較、Tokunagaらの手法 [17] とELMを用いた分岐図再構成の比較を行う [54]。しかし、ロジスティック写像に関しては定量的な評価で優位な差が出なかったため結果を省略する。上記に加えてロジスティック写像は、Tokunagaらの手法とELMを用いた分岐図再構成の計算コストの比較 [55]、刈込手法を適用した時の分岐図再構成の成功率 [56] を示す。レスラー方程式は、電子回路から計測したデータを用いて分岐図を再構成した結果も示す。

4.6.1 ロジスティック写像の分岐図再構成

ロジスティック写像の分岐図を下記に再喝する式 (2.1) により生成した時系列から再構成する。

$$x^{(l)}(t+1) = f(x^{(l)}(t), p^{(l)}) = p^{(l)} x^{(l)}(t) (1 - x^{(l)}(t)) \quad (2.1)$$

$p^{(l)} = p_n^{(l)}$ として、時系列 S_n ($n = 1, \dots, P = 9$) を生成するパラメータ $p^{(l)}$ は、

$$p_n^{(l)} = -0.15 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 3.7 \quad (4.16)$$

とし、各時系列は1000点取得した。ロジスティック写像の時系列の学習に用いたELMの入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、1個、15個、1個とした。この場合、予測器の出力 $o^{(o)}(t)$ は、 $x^{(l)}(t)$ を入力とした時、 $x^{(l)}(t+1)$ を出力するように学習を行う。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1 , v_2 , v_3 は、それぞれ、1, 0, 1 に設定した。

4.6.1.1 推定したパラメータ空間の分岐図とリアプノフ指数

図 4.3 (a) に寄与率 CR を示す。それぞれの主成分に対応する寄与率を比較すると、第 1 主成分の寄与率のみが大きいため、パラメータ数は 1 と推定する事ができる。図 4.3 (b) と (c) に、それぞれ、分岐パスと分岐ローカスを示す。これらの図を比較すると、分岐パスのパラメータ推移と分岐ローカスの推定パラメータの推移は一致する。寄与率が高く、分岐ローカスのパラメータ推移が分岐パスと一致するため、第 1 主成分は十分な情報を持ち真のパラメータ空間と対応すると考えられる。

図 4.4 (a) と (b) に真の分岐図と再構成した分岐図、それぞれの分岐図に対して推定したリアプノフ指数を示す。ここで、図中の上段と下段は、それぞれ、分岐図とリアプノフ指数を示す。再構成した分岐図は真の分岐図と同様の分岐構造を持つため、これらの分岐図は対応している。分岐構造を比較すると、例えば周期倍分岐が連続して起こるカオスへのルートや図 4.4 (a) の $p^{(l)} = 8.3$ 付近と図 4.4 (b) の $\gamma_1 = -300$ 付近の窓の周期数が一致している。真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の対応するパラメータ値を用いた時のロジスティック写像と ELM の入出力関係を比較した結果は付録 C に示す。さらに、図 4.4 (a) と (b) のリアプノフ指数を比較すると、最大値や最小値が対応している事がわかる。

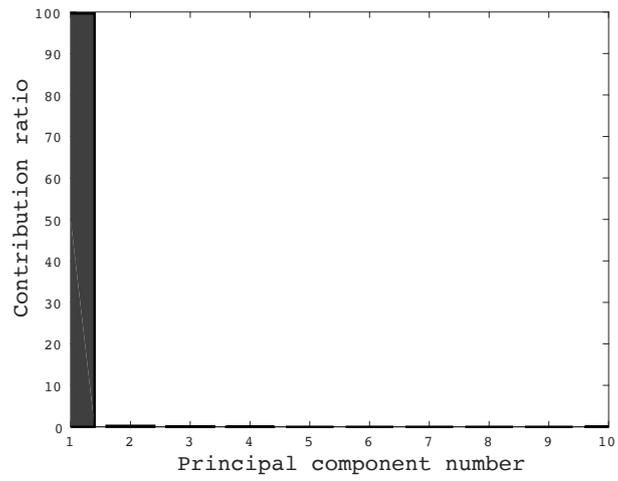
次に、分岐図とリアプノフ指数の関係を詳細に調査するために再構成した分岐図の拡大図を示す。図 4.5 (a) は周期解からカオス解に分岐するパラメータ周辺を拡大する。また、図 4.5 (b) は再構成した分岐図の窓のパラメータ周辺を拡大する。これらの図から、リアプノフ指数が周期解の時に負の値、カオス解の時に正の値を取る事がわかり、リアプノフ指数の特徴と一致する。また、分岐パラメータに近づくに連れてリアプノフ指数が 0 に近づく事もリアプノフ指数の特徴と一致する。さらに、拡大した分岐図から、分岐図の特徴であるフラクタル構造も再現されている事がわかる。

図 4.6 (a) と (b) は、それぞれ、パラメータ範囲を負の値まで含めた真の分岐図と再構成した分岐図を示す。図 4.6 (a) に示す通り、ロジスティック写像の分岐図のパラメータ $p^{(l)}$ の値を負の方向に進めると正の方向と同様に分岐現象が発生する。図 4.6 (b) は、式 (4.16) のパラメータ $p^{(l)}$ の値が正の時の時系列のみを用いて分岐図再構成を行ったにも関わらず、負のパラメータ範囲の分岐図の再構成に成功した事を示す。本結果は、本手法がパラメータ間の情報を補完して分岐図を再構成しているだけでなく外挿のパラメータにおける分岐現象を再構成できる事を示す。

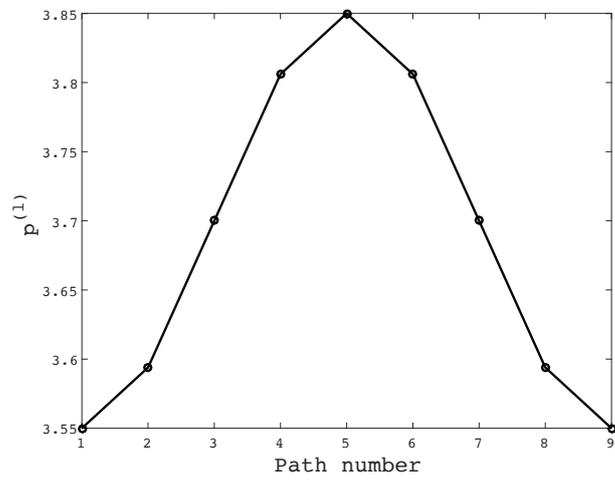
4.6.1.2 リアプノフ指数の比較

4.6.1.1 の結果を用いて、ロジスティック写像の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数を定量的に比較する。分岐パスと分岐ローカスのパラメータは対応しているため、これらのパラメータにおけるリアプノフ指数を比較する。

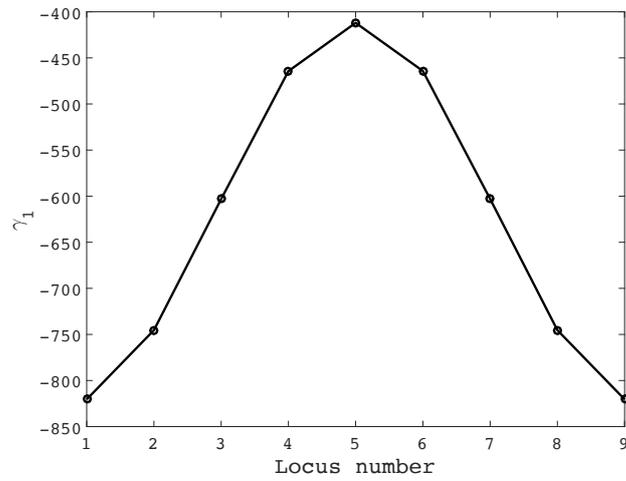
表 4.1 にロジスティック写像の分岐パスと分岐ローカスのパラメータのリアプノフ指数を示す。図 4.3 (a) と (b) の分岐パスと分岐ローカスのインデックスが表 4.1



(a) 寄与率

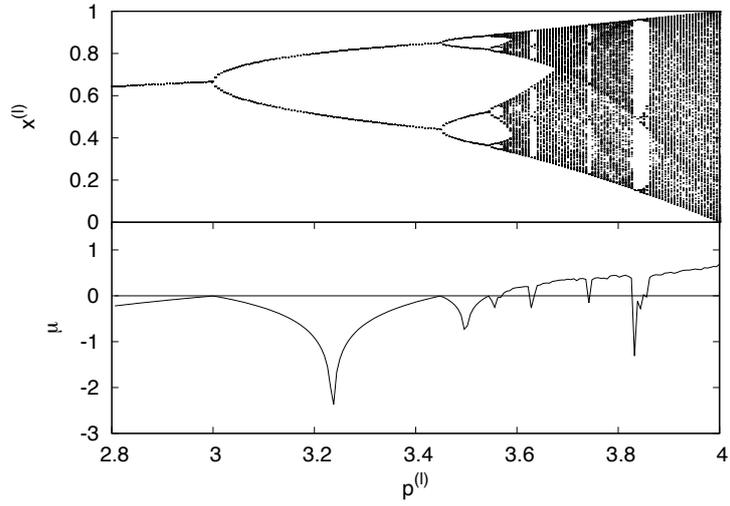


(b) 分岐パス

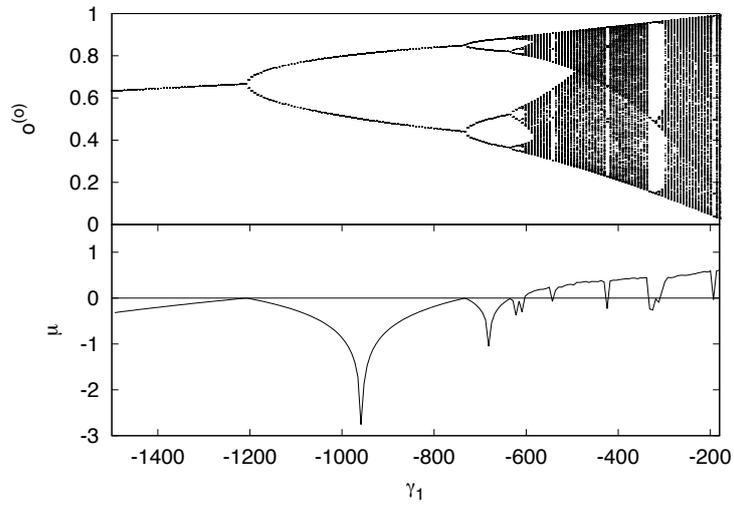


(c) 分岐ローカス

図 4.3: ロジスティック写像の結果

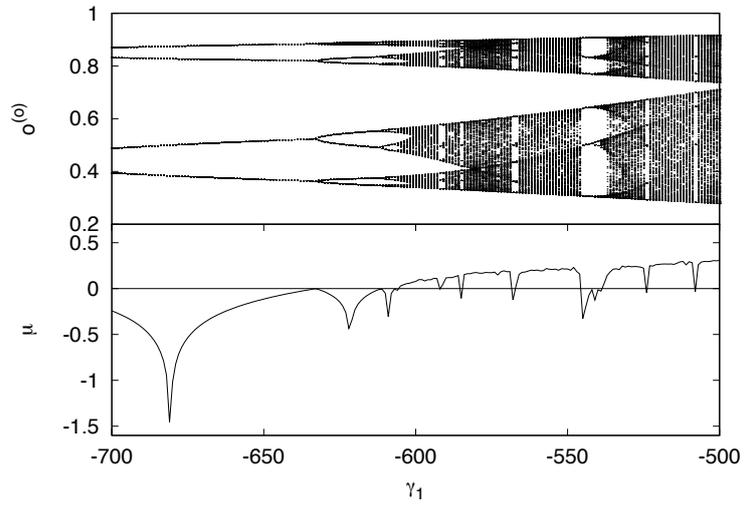


(a) 真の分岐図

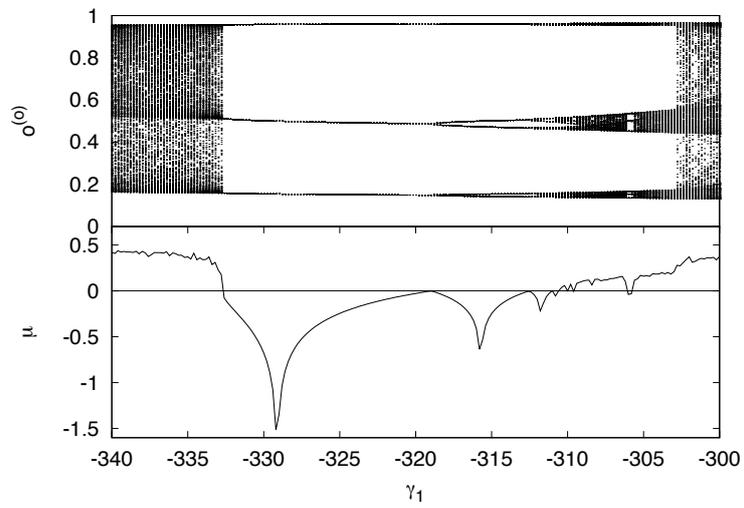


(b) 再構成した分岐図

図 4.4: ロジスティック写像の分岐図とリアプノフ指数

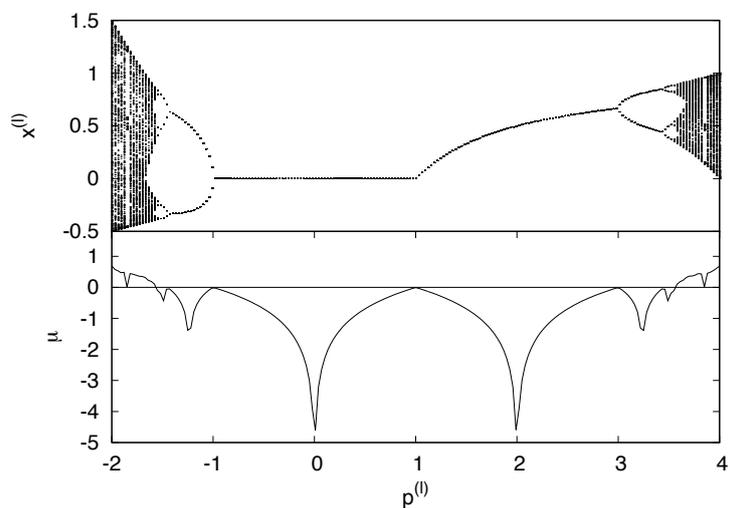


(a) 周期解からカオス解に分岐するパラメータ周辺

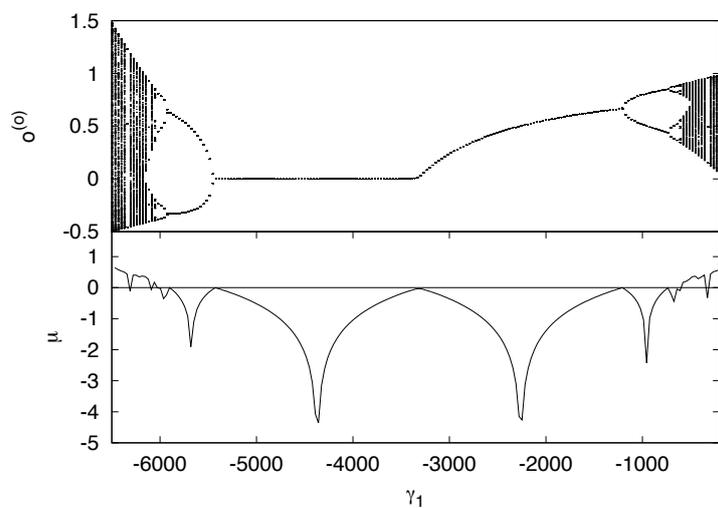


(b) 分岐図の窓のパラメータ周辺

図 4.5: ロジスティック写像の再構成した分岐図とリアプノフ指数の拡大図



(a) 真のパラメータ空間



(b) 推定したパラメータ空間

図 4.6: 負のパラメータ範囲まで含めたロジスティック写像の分岐図とリアプノフ指数

表 4.1: ロジスティック写像のリアプノフ指数の比較

インデックス	真の分岐図		再構成した分岐図	
	パラメータ	リアプノフ指数	パラメータ	リアプノフ指数
1	3.550	-0.09972 ± 0.00004	-632.3	-0.00456
2	3.594	0.1753 ± 0.0004	-585.7	0.144 ± 0.001
3	3.700	0.353 ± 0.002	-471.7	0.351 ± 0.001
4	3.806	0.425 ± 0.002	-358.3	0.429 ± 0.003
5	3.850	0.022 ± 0.006	-322.1	-0.0985 ± 0.0003
6	3.806	0.425 ± 0.002	-358.5	0.429 ± 0.003
7	3.700	0.353 ± 0.002	-471.7	0.351 ± 0.001
8	3.594	0.1753 ± 0.0004	-585.7	0.144 ± 0.001
9	3.550	-0.09972 ± 0.00004	-632.3	-0.00456

の1列目のインデックスとそれぞれ対応している。表 4.1 の灰色の行は真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数が対応していない事を示す。

インデックス 2, 3, 4, 6, 7, 8 のリアプノフ指数を比較するとおおよそ一致している。インデックス 5 のリアプノフ指数は対応していない。さらに、真の分岐図のリアプノフ指数は正であるが、再構成した分岐図のリアプノフ指数は負の値を示した。しかし、これらのパラメータは図 4.4 (a) と (b) から窓に属している事がわかり、リアプノフ指数が 0.022 ± 0.006 のパラメータがインデックス 5 のパラメータ付近の $\gamma_1 = -332.9$ に存在する事から対応するパラメータがインデックス 5 のパラメータ付近に存在する。また、インデックス 1 と 9 のリアプノフ指数も対応していないが、これらのリアプノフ指数は共に負であり、図 4.4 (a) と (b) から共に 4 周期の周期解である事がわかる。また、周期解は高精度でリアプノフ指数の絶対値を推定する事は難しいとされる。

これらの結果から、カオス領域の対応するパラメータにおけるリアプノフ指数を比較する事により、真の分岐図と再構成した分岐図の定量的な評価ができると考えられる。さらに、分岐パスと分岐ローカスの各パラメータのリアプノフ指数が対応しない場合でも、リアプノフ指数が一致する点を近傍から探索できるため、真の分岐図と再構成した分岐図の対応点を確認する事ができる。

4.6.1.3 ELM と 3 層のニューラルネットワークの学習法に誤差逆伝播法を用いた分岐図再構成の計算コストの比較

ここでは、ELM を用いた場合と 3 層のニューラルネットワークの学習法に誤差逆伝播法 [57] を用いた場合の分岐図再構成の計算コストを比較する。計算に用いた計算機を下記に示す。

- OS: Mac OSX

- CPU: Intel Core i5 1.3GHz
- メインメモリ: 4.00GB
- 数値計算ソフトウェア: MATLAB®

ここで、計算コストは式 (4.12) を導くまでの実行時間とする。

ELM を用いた場合の計算コストは 1.833 秒、3 層のニューラルネットワークの学習法に誤差逆伝播法を用いた場合の計算コストは 1947.271 秒であった。本結果から、誤差逆伝播法のニューラルネットワークに比べて、ELM は 1000 倍程度計算が速くなった事がわかる。ここで、3 層のニューラルネットワークの構造は ELM と同一に設定した。誤差逆伝播法の学習回数は 1000 回、分岐パスのパラメータ数は 18 組とした。従って、式 (4.16) は $P = 18$ となるが、時系列 $S_{10}, S_{11}, \dots, S_{18}$ を学習した時の結合荷重を主成分分析に適用するため、主成分分析に適用した結合荷重は 9 組となり ELM のシミュレーション実験と同条件となる。その他の実験条件は、ELM と同一である。

本実験条件での理論上の誤差逆伝播法の計算コストは、ELM の 200 倍である。ここで、分岐図再構成のための ELM と誤差逆伝播法の学習アルゴリズムの計算コストは、それぞれ、 $O(PLV^2)$ と $O(PTLV)$ である。 V は隠れ層ニューロン数、 L は学習対象の時系列の長さ、 T は誤差逆伝播法の繰り返し学習数である。この見積りより、実際の実験結果と理論上の計算コストの差は定数倍のため妥当であるといえる。

4.6.1.4 ELM と SAP-ELM によるロジスティック写像の分岐図再構成の成功率の比較

本シミュレーション実験では、ロジスティック写像の隠れ層のニューロン数の最適値を確認するために、ELM の隠れ層ニューロン数を変更して分岐図再構成を行い、それぞれの成功率を示す。SAP-ELM も同様に、隠れ層の初期ニューロン数を変更して分岐図再構成を行い、その成功率を示す。また、4.5 項の分岐図再構成の定量的な評価方法を用いて刈込手法を適用しない標準的な ELM と SAP-ELM の分岐図再構成の精度を比較する。

表 4.2 に ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率を示す。本シミュレーション実験は、隠れ層のニューロン数を 4, 6, 8, 10 個に設定した ELM を用いて比較を行う。また、分岐図再構成が成功した時のレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差も示す。本シミュレーション実験の分岐図再構成の成功条件は、レーベンシュタイン距離が 12 以下とした。レーベンシュタイン距離が 12 以下の時、ロジスティック写像の分岐図が十分に再構成できている事を定性的に確認した。ここで分岐パラメータの範囲は、開始点 $p^{(start)}$ を $p_1^{(l)}$ 、終了点 $p^{(end)}$ を $p_5^{(l)}$ とし、式 (4.15) の分岐図をプロットするパラメータ数 $L^{(parameter)}$ は 100 に設定した。

未知の力学系に対して分岐図再構成を行う時は成功率が高い事が重要であるため、表 4.2 から最適な隠れ層のニューロン数は 4 個である。表 4.2 から、隠れ層

ニューロンを増やすほど分岐図再構成の成功率が下がり、特に隠れ層のニューロン数が4個から6個に増やした時に成功率が急激に下がる事がわかる。また、隠れ層ニューロン数の違いによるレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差の優位な差はみられないため、分岐図再構成の精度は隠れ層のニューロン数の変化による影響は無いといえる。

表 4.2: 隠れ層のニューロン数を変化させた時の ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率

	隠れ層のニューロン数			
	4	6	8	10
分岐図再構成の成功率 (%)	88	27	25	11
レーベンシュタイン距離の平均	7.09	7.07	6.80	6.27
レーベンシュタイン距離の標準偏差	1.54	1.65	1.47	1.71

次に SAP-ELM を用いた場合の結果を示す。表 4.3 に SAP-ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率を示す。本シミュレーション実験は、隠れ層の初期ニューロン数を 8, 10, 12, 14 個に設定した SAP-ELM を使用し比較を行う。その他の実験条件は ELM と同様である。ELM と同様、分岐図再構成が成功した時のレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差も示す。SAP-ELM の実験結果では、刈込手法を適用した後の隠れ層のニューロン数の平均も示す。

表 4.3 から、SAP-ELM を用いた分岐図再構成は全体的に ELM を用いた場合より成功率が高くなった。ELM を用いると成功率が 0.5 以上の隠れ層ニューロン数は 4 個の時のみであるが、SAP-ELM を用いると隠れ層の初期ニューロン数が 10 個以下の時に成功率が 0.5 以上となる。また、隠れ層の初期ニューロン数を増やしても分岐図再構成の成功率が徐々に下がるため最適なニューロン数を探索する必要がない。特に隠れ層の初期ニューロン数を 14 個に設定しても隠れ層のニューロン数を 6 個に設定した ELM より成功率が高いため、ELM に比べて SAP-ELM の方が隠れ層ニューロンの設定が容易である事がわかる。

表 4.2 と表 4.3 から、ロジスティック写像の分岐図再構成において成功率が最も高い隠れ層ニューロン数は 4 個である事がわかる。しかし、未知の力学系の学習を行う際に最適な隠れ層ニューロン数を見つける事は難しいため、分岐図再構成において最適なニューロン数を設定しなくても成功率が高い SAP-ELM は ELM に比べて優れている。ELM と SAP-ELM の間にレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差の優位な差はみられないため、分岐図再構成の精度は ELM と SAP-ELM を変える事による影響は無いといえる。

隠れ層の初期ニューロン数を 4 個に設定した SAP-ELM の成功率は低かった。この理由として、刈込後の隠れ層ニューロン数ではニューロン数が少ないため、対象の時系列を学習できないためである。従って、SAP-ELM を分岐図再構成に用いる場合の隠れ層ニューロンの初期数は多めに設定する必要がある。

表 4.3: 隠れ層の初期ニューロン数を変化させた時の SAP-ELM を用いたロジスティック写像の分岐図再構成の成功率

	隠れ層の初期ニューロン数			
	8	10	12	14
刈込後の隠れ層ニューロン数	3.65	5.07	6.57	7.75
分岐図再構成の成功率 (%)	64	53	46	32
レーベンシュタイン距離の平均	7.22	7.54	6.85	6.78
レーベンシュタイン距離の標準偏差	1.67	1.74	1.32	1.78

4.6.2 1次元パラメータ空間のエノン写像の分岐図再構成

エノン写像の分岐図を

$$\begin{aligned} x_1^{(h)}(t+1) &= x_2^{(h)}(t) + 1 - p_1^{(h)} \left(x_1^{(h)}(t) \right)^2 \\ x_2^{(h)}(t+1) &= p_2^{(h)} x_1^{(h)}(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

により生成した時系列から再構成する。実データを想定すると対象の系の時系列が全て得られる事は少ないため、 $x_1^{(h)}(t)$ の時系列のみを得られると仮定して本シミュレーションの分岐図再構成を行う。また、エノン写像は $p_1^{(h)}$ と $p_2^{(h)}$ の2パラメータを持つが、本シミュレーション実験では1次元パラメータ空間の分岐図再構成を行うため、 $p_2^{(h)}$ を0.3に固定する。 $p_1^{(h)} = p_{1,n}^{(h)}$ として、時系列 $S_n (n=1, \dots, P=9)$ を生成するパラメータ $p_1^{(h)}$ は、

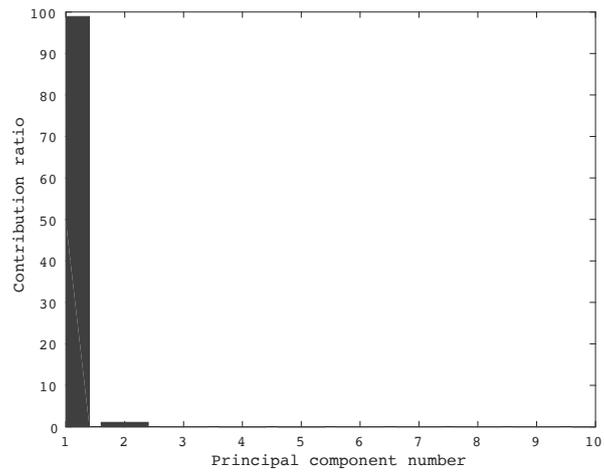
$$p_{1,n}^{(h)} = -0.2 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 1.2 \quad (4.18)$$

とし、各時系列は1000点取得した。エノン写像の時系列の学習に用いたELMの入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、2個、10個、2個とした。この場合、予測器の出力 $o_1^{(o)}(t)$, $o_2^{(o)}(t)$ は、 $x_1^{(h)}(t)$ と $x_1^{(h)}(t-1)$ を入力とした時、 $x_1^{(h)}(t+1)$ と $x_1^{(h)}(t)$ を出力するように学習を行う。式(3.3)のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、3, 1.5, 1と設定した。

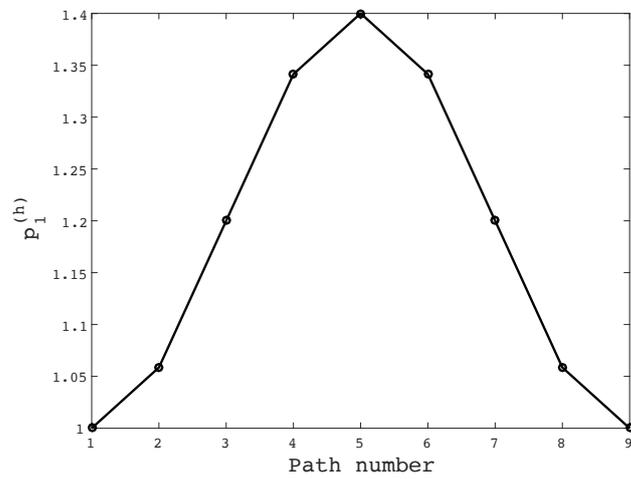
4.6.2.1 推定したパラメータ空間の分岐図とリアプノフ指数

図 4.7 (a) に寄与率 CR を示す。それぞれの主成分に対応する寄与率を比較すると、第1主成分の寄与率のみが大きいため、パラメータ数は1と推定する事ができる。図 4.7 (b) と (c) に、それぞれ、分岐パスと分岐ローカスを示す。これらの図を比較すると、分岐パスのパラメータ推移と分岐ローカスの推定パラメータの推移は一致する。寄与率が高く、分岐ローカスのパラメータ推移が一致するため、第1主成分は十分な情報を持ち真のパラメータ空間と対応していると考えられる。

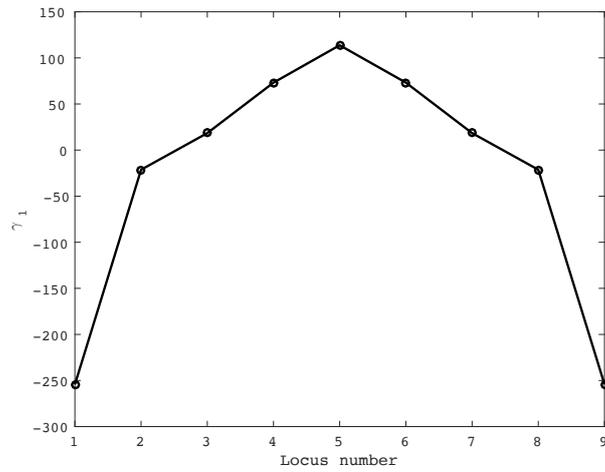
図 4.8 (a) と (b) に真の分岐図と再構成した分岐図、それぞれの分岐図に対して推定したリアプノフスペクトラムを示す。ここで、図中の上段と下段は、それぞれ、



(a) 寄与率



(b) 分岐パス



(c) 分岐ローカス

図 4.7: エノン写像の結果

分岐図とリアプノフ指数を示す。また、下段の実線と破線は、それぞれ、最大リアプノフ指数と第2リアプノフ指数を示す。再構成した分岐図は真の分岐図と同様の分岐構造を持つため、これらの分岐図は対応している。分岐構造を比較すると、周期倍分岐が連続して起こるカオスへのルートや、各窓(例えば、図4.8(a)の $p^{(h)} = 1.26$ 付近と図4.8(b)の $\gamma_1 = 50$ 付近の窓)が同じ周期数を持つため、これらの分岐図は対応している。さらに、最大リアプノフ指数の最小値と最大値が対応している事がわかる。第2リアプノフ指数はパラメータが大きくなるに従って真のリアプノフ指数より小さくなるが、ほぼ真のリアプノフ指数と対応している。

4.6.2.2 リアプノフ指数の比較

4.6.2.1の結果を用いて、エノン写像の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数を定量的に比較する。分岐パスと分岐ローカスのパラメータは対応しているため、これらのパラメータにおけるリアプノフ指数を比較する。

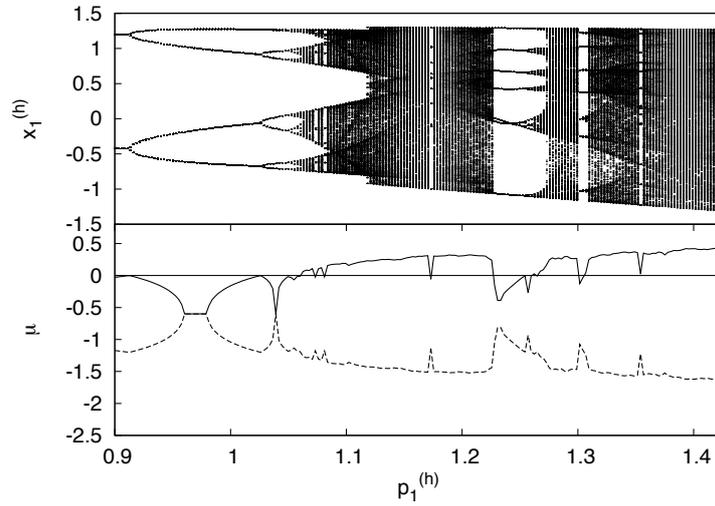
表4.1と同様に、表4.4にエノン写像の結果を示す。インデックス2から8の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数は、おおよそ一致している。インデックス1と9の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数は対応していないが、これらのリアプノフ指数は共に負であり、図4.8(a)と(b)から共に4周期の周期解である事がわかる。

表4.4: エノン写像の最大リアプノフ指数の比較

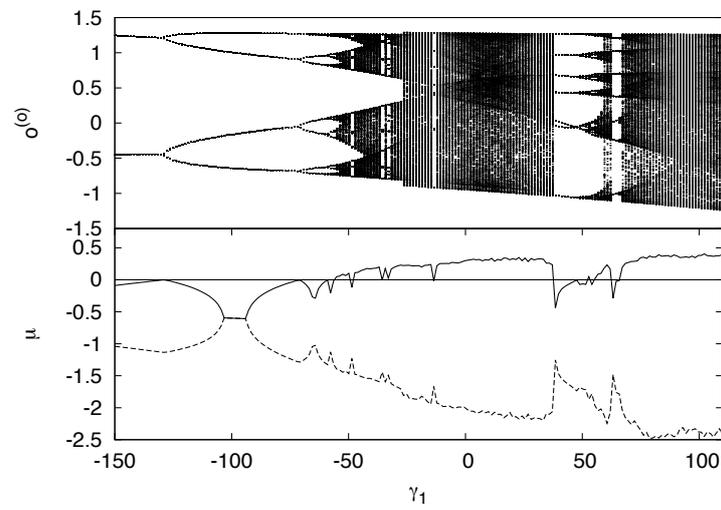
インデックス	真の分岐図		再構成した分岐図	
	パラメータ	最大リアプノフ指数	パラメータ	最大リアプノフ指数
1	1.000	-0.161 ± 0.001	-97.41	-0.6027 ± 0.0002
2	1.058	0.0248 ± 0.0004	-53.21	0.0759 ± 0.0007
3	1.200	0.308 ± 0.002	31.48	0.315 ± 0.003
4	1.341	0.367 ± 0.001	70.10	0.2562 ± 0.0009
5	1.400	0.418 ± 0.002	98.06	0.382 ± 0.003
6	1.341	0.367 ± 0.001	70.10	0.2562 ± 0.0009
7	1.200	0.307 ± 0.002	31.48	0.315 ± 0.003
8	1.058	0.0248 ± 0.0004	-53.21	0.0759 ± 0.0007
9	1.000	-0.161 ± 0.001	-97.41	-0.6027 ± 0.0002

4.6.2.3 再構成分岐図の定量的な比較

本シミュレーション実験では、真の分岐図と再構成した分岐図を比較した時のレーベンシュタイン距離を示す。分岐パスの点数を5,7,9に設定した時の再構成し



(a) 真のパラメータ空間



(b) 推定したパラメータ空間

図 4.8: エノン写像の分岐図とリアプノフ指数

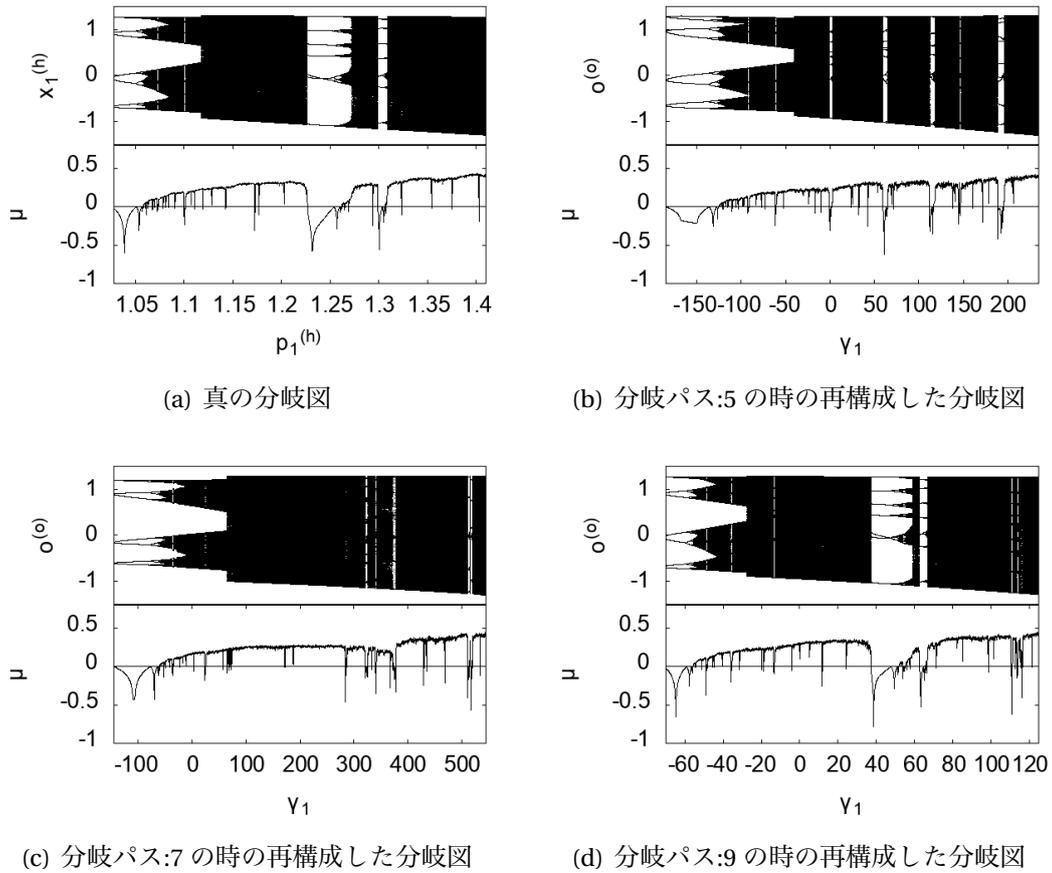


図 4.9: エノン写像の分岐図

た分岐図のレーベンシュタイン距離を比較する。分岐パスの点数が多いと分岐図再構成に使用する時系列の数が増えるため、再構成した分岐図の精度が高くなる事が期待できる。

エノン写像の時系列は式 (4.17) から生成する。本シミュレーション実験は式 (4.18) の P を 5, 7, 9 に変更してシミュレーション実験を行い、再構成した分岐図を比較する。

真の分岐図と再構成した分岐図の分岐構造を比較するために、対応するパラメータ範囲を定義する。比較するパラメータ範囲は、周期解からカオス解へのルートと窓が含まれるようにする。エノン写像の場合、4周期から8周期に分岐するパラメータを開始点、時系列の最小値が -1.3 以下になる最小のパラメータを終了点とする。本シミュレーション実験では、式 (4.15) の $L(\text{parameter})$ は 3000 に設定する。

図 4.9 (a) に真の分岐図、図 4.9 (b), (c), (d) に、それぞれ、分岐点の点数を 5, 7, 9 に設定した時の再構成分岐図を示す。ここで、それぞれの図中の上部と下部は、それぞれ、分岐図とリアプノフ指数を示す。また、各図下段の実線と破線は、それぞれ、最大リアプノフ指数と第 2 リアプノフ指数を示す。

表 4.5 に図 4.9 (a) の真の分岐図と図 4.9 (b), (c), (d) の再構成した分岐図を比較したレーベンシュタイン距離を示す。この結果から、分岐パスの点数が多いほど

再構成した分岐図の精度が高くなる事がわかる。この結果は、図 4.9 (a), (b), (c), (d) を見ると明らかで図 4.9 (d) が図 4.9 (a) に最も近い事が定性的にもわかる。

表 4.5: エノン写像のレーベンシュタイン距離

分岐パス:5	分岐パス:7	分岐パス:9
29	27	23

次に、Tokunaga らの先行研究で使用された学習法に誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークを予測器として再構成した分岐図のレーベンシュタイン距離を示し、ELM の結果と比較する。表 4.6 に、学習法に誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークを用いた場合の再構成した分岐図のレーベンシュタイン距離を示す。ここで、実験条件とニューラルネットワークの構造は ELM と同様とした。表 4.5 と表 4.6 の結果から、誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークの再構成した分岐図より ELM を用いた再構成した分岐図の方が精度が高い事がわかる。本結果から、分岐図再構成に ELM を用いる事で先行研究と比較して計算コストが削減されるだけでなく再構成精度が高くなる事がわかる。

表 4.6: 誤差逆伝播法を用いたニューラルネットワークによる再構成した分岐図のレーベンシュタイン距離

	分岐パス:9
エノン写像	27

4.6.3 レスラー方程式の分岐図再構成

レスラー方程式の分岐図を

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1^{(r)}}{d\tau} &= -x_2^{(r)} - x_3^{(r)} \\
 \frac{dx_2^{(r)}}{d\tau} &= x_1^{(r)} + p_1^{(r)} x_2^{(r)} \\
 \frac{dx_3^{(r)}}{d\tau} &= p_2^{(r)} x_1^{(r)} - (p_3^{(r)} - x_1^{(r)}) x_3^{(r)}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

により生成した時系列から再構成する。レスラー方程式は $p_1^{(r)}$, $p_2^{(r)}$, $p_3^{(r)}$ の 3 パラメータを持つが、本シミュレーション実験では 1 次元パラメータ空間の分岐図再構成を行うため、 $p_1^{(r)}$ と $p_2^{(r)}$ を、それぞれ、0.33 と 0.3 に固定する。 $p_3^{(r)} = p_{3,n}^{(r)}$ として、時系列 $S_n (n=1, \dots, P=9)$ を生成するパラメータ $p_3^{(r)}$ は、

$$p_{3,n}^{(r)} = -0.5 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 3.7
 \tag{4.20}$$

とし、各時系列の長さは 5000 点取得した。3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した。ここで時間刻み幅を $\Delta\tau = 0.01$ とした。本シミュレーション実験では、 $x_2^{(r)}$ 要素の時系列の $5\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした。レスラー方程式の時系列の学習に用いた ELM の入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、3 個、50 個、3 個とした。この場合、予測器の出力 $o_1^{(o)}(t)$, $o_2^{(o)}(t)$, $o_3^{(o)}(t)$ は、 $x_2^{(r)}(\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 16 \cdot 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 32 \cdot 5\Delta\tau)$ を入力とした時、 $x_2^{(r)}(\tau + 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 15 \cdot 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 31 \cdot 5\Delta\tau)$ を出力するように学習を行う。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1 , v_2 , v_3 は、それぞれ、16, 8, 0.1 と設定した。

4.6.3.1 推定したパラメータ空間の分岐図とリアプノフ指数

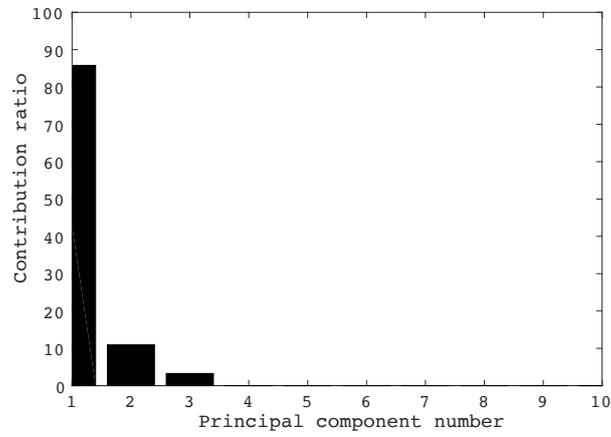
図 4.10 (a) に寄与率 CR を示す。第 1 主成分の寄与率が 80% 以上であるため、第 1 主成分は十分な情報を持つと考えパラメータ数は 1 と推定する事ができる。図 4.10 (b) と (c) に、それぞれ、分岐パスと分岐ローカスを示す。これらの図を比較すると、分岐ローカスの 3 と 4, 6 と 7 の点の差が分岐パスに比べて小さい。分岐ローカスの 3 と 4, 6 と 7 の点の差が分岐パスに比べて小さい理由として、図 4.10 (a) の第 2 主成分と第 3 主成分の寄与率が、図 4.3 (a) と図 4.7 (a) に比べて大きい事があげられる。しかし、分岐パスと分岐ローカスの点の関係は一致しているため、本結果の第 1 主成分を用いて分岐図の再構成は可能であると考えられる。

図 4.11 (a) と (b) に真の分岐図と再構成した分岐図、それぞれの分岐図に対して推定したリアプノフスペクトラムを示す。ここで、それぞれの図中の上段、中段、下段は、それぞれ、分岐図、最大と第 2 リアプノフ指数、第 3 リアプノフ指数を示す。また、中段の実線と破線は、それぞれ、最大リアプノフ指数と第 2 リアプノフ指数を示す。再構成した分岐図は真の分岐図と同様の分岐構造を持つため、これらの分岐図は対応している。分岐構造を比較すると、周期倍分岐が連続して起こるカオスへのルートや、各窓 (例えば、図 4.11 (a) の $p^{(r)} = 4$ 付近と図 4.11 (b) の $\gamma_1 = 2700$ 付近の窓) が同じ周期数を持つため、これらの分岐図は対応している。さらに、最大と第 2 リアプノフ指数は、ほぼ同じ値を推定できている。第 3 リアプノフ指数は、真のリアプノフ指数と比べると値は小さいが右肩下がりの特徴は一致している。

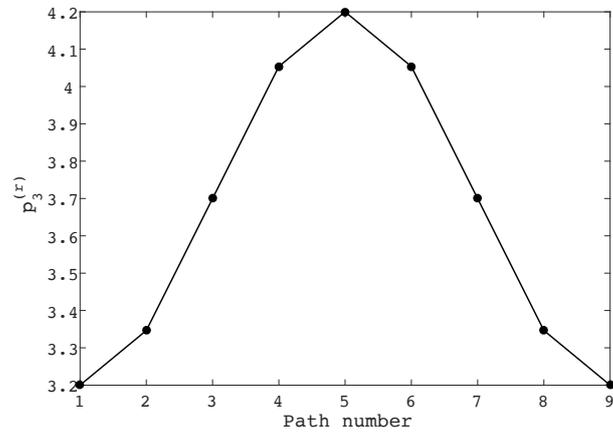
4.6.3.2 リアプノフ指数の比較

4.6.3.1 の結果を用いて、レスラー方程式の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数を定量的に比較する。分岐パスと分岐ローカスのパラメータは対応しているため、これらのパラメータにおけるリアプノフ指数を比較する。

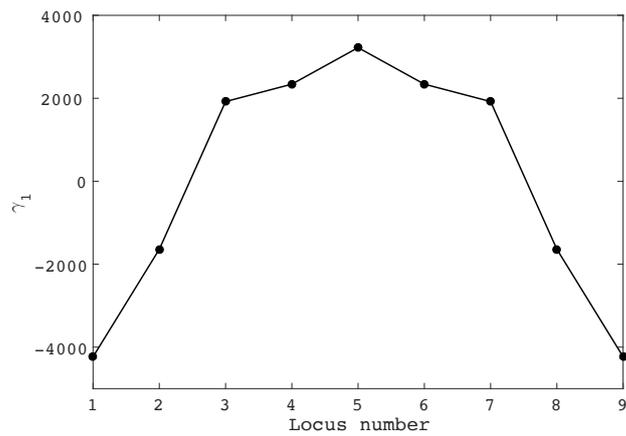
表 4.1 と同様に、表 4.7 にレスラー方程式の結果を示す。インデックス 1, 3, 5, 7, 9 の真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数は、おおよそ一致している。インデックス 2 と 8 のリアプノフ指数は対応していないが、これらのパラメータは図 4.11 (a) と (b) から共に周期解からカオス解に変わるパラメータ周辺であり、



(a) 寄与率

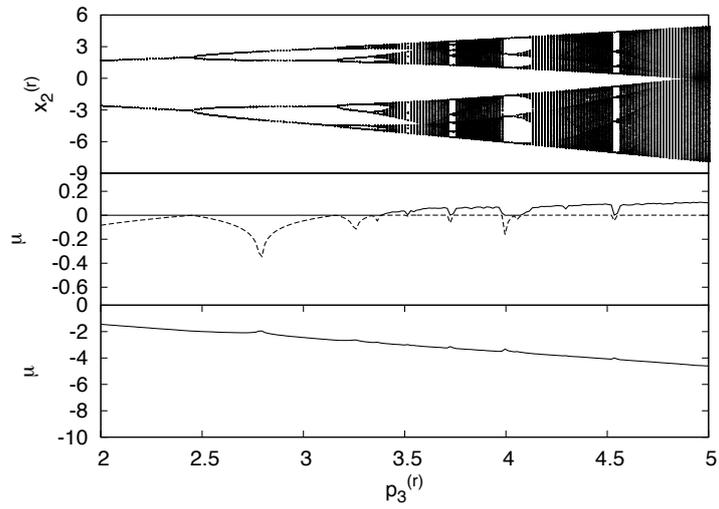


(b) 分岐パス

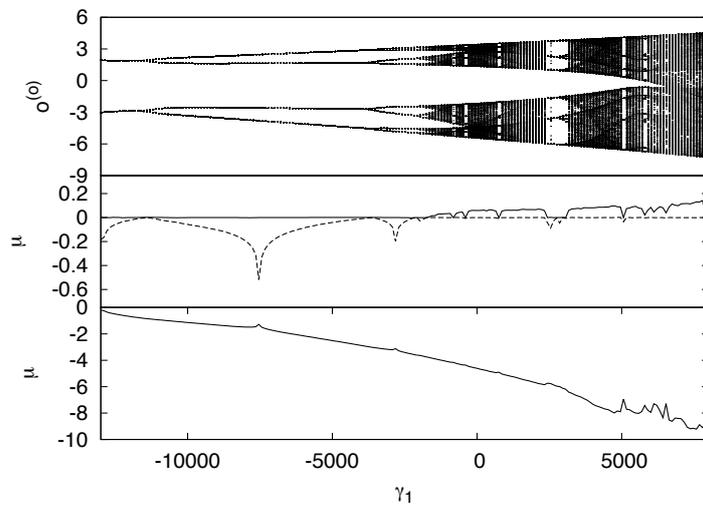


(c) 分岐ローカス

図 4.10: レスラー方程式の結果



(a) 真のパラメータ空間



(b) 推定したパラメータ空間

図 4.11: レスラー方程式の分岐図とリアプノフ指数

表 4.7: レスラー方程式の最大リアプノフ指数の比較

インデックス	真の分岐図		再構成した分岐図	
	パラメータ	最大リアプノフ指数	パラメータ	最大リアプノフ指数
1	3.200	0.0006 ± 0.0007	-4232	0.00025 ± 0.00008
2	3.346	0.0006 ± 0.0008	-1640	0.0125 ± 0.0004
3	3.700	0.056 ± 0.002	1921	0.0682 ± 0.0005
4	4.053	0.001 ± 0.002	2340	0.0619 ± 0.0006
5	4.200	0.077 ± 0.002	3221	0.0631 ± 0.0008
6	4.053	0.001 ± 0.002	2340	0.0609 ± 0.0008
7	3.700	0.057 ± 0.002	1921	0.0731 ± 0.0009
8	3.346	0.0006 ± 0.0008	-1640	0.0109 ± 0.0005
9	3.200	0.0006 ± 0.0007	-4232	0.00025 ± 0.00008

リアプノフ指数が 0.0006 ± 0.0008 のパラメータがインデックス 2 と 8 のパラメータ付近の $\gamma_1 = -1596$ に存在する事から対応するパラメータがインデックス 2 と 8 のパラメータ付近に存在する。ここで、図 4.11 (b) の再構成した分岐図のパラメータ範囲は約 20000 であるため、-1640 と -1596 のパラメータは近いとした。インデックス 4 と 6 のリアプノフ指数も対応していないが、これらのパラメータは図 4.11 (a) と (b) の窓に属しており、リアプノフ指数が 0.001 ± 0.002 のパラメータがインデックス 4 と 6 のパラメータ付近の $\gamma_1 = 2396$ に存在する事から対応するパラメータがインデックス 4 と 6 のパラメータ付近に存在する。さらに、インデックス 2, 4, 6, 8 の時系列は周期解であるため、式 (4.14) を無限回繰返せば 0 に収束すると考えられるため、真の分岐図のリアプノフ指数に近づく事が考えられる。

これらの結果から、カオス領域の対応するパラメータにおけるリアプノフ指数を比較する事により、真の分岐図と再構成した分岐図の定量的な評価ができると考えられる。さらに、分岐パスと分岐ローカスの各パラメータのリアプノフ指数が対応しない場合でも、リアプノフ指数が一致する点を近傍から探索できるため、真の分岐図と再構成した分岐図の対応点を確認する事ができる。

4.6.3.3 再構成分岐図の定量的な比較

本シミュレーション実験では、真の分岐図と再構成した分岐図を比較した時のレーベンシュタイン距離を示す。分岐パスの点数を 5,7,9 に設定してシミュレーション実験を行なった。

エノン写像と同様に、比較するパラメータ範囲は周期解からカオス解へのルートと窓が含まれるようにする。レスラー方程式の場合、4 周期から 8 周期に分岐するパラメータを開始点、時系列の最大値が 4.5 以上になる最小のパラメータを終了点とする。

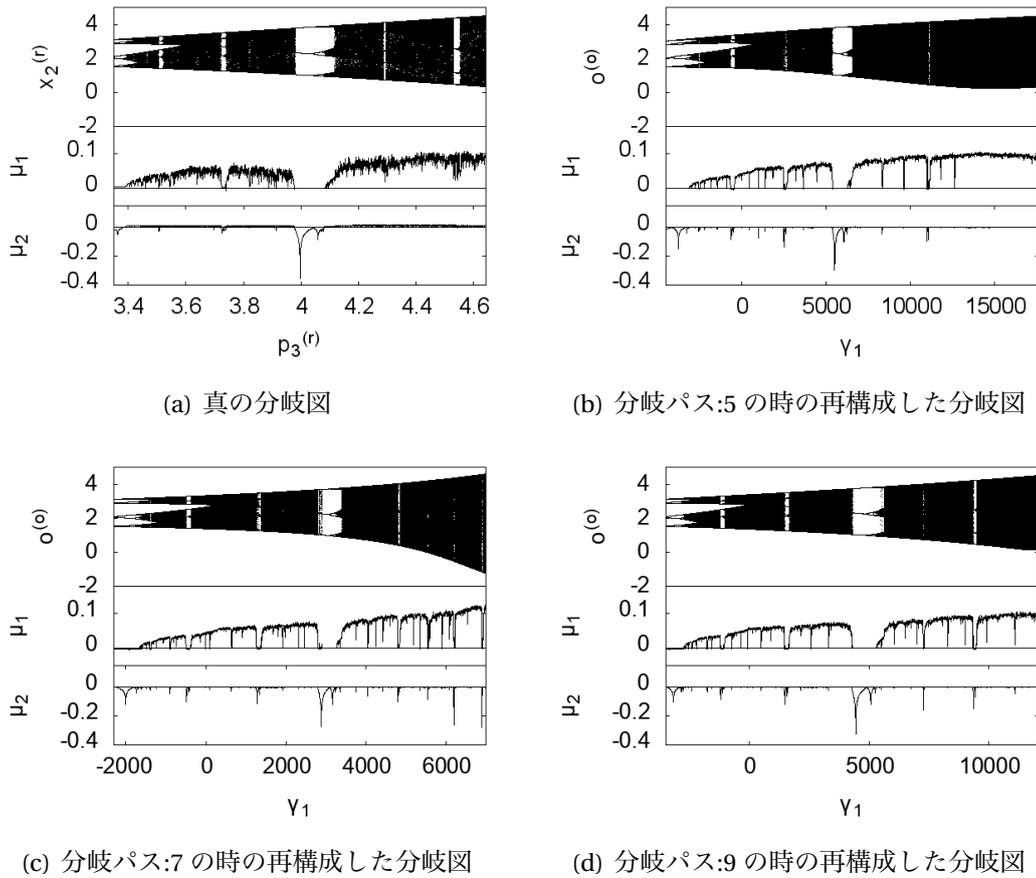


図 4.12: レスラー方程式の分岐図

図 4.12 (a) に真の分岐図, 図 4.12 (b), (c), (d) に, それぞれ, 分岐点の点数 5, 7, 9 を使用した時の再構成分岐図を示す. ここで, それぞれの図中の上部, 中部, 下部は, それぞれ, 分岐図, 最大リアプノフ指数, 第 2 リアプノフ指数を示す.

表 4.8 に図 4.12 (a) の真の分岐図と図 4.12 (b), (c), (d) の再構成した分岐図を比較したレーベンシュタイン距離を示す. この結果から, エノン写像と同様, 分岐パスの点数が多いほど, 再構成した分岐図の精度が高くなる事がわかる.

表 4.8: レスラー方程式のレーベンシュタイン距離

分岐パス:5	分岐パス:7	分岐パス:9
17	16	11

エノン写像と同様, Tokunaga らの先行研究と ELM の結果を比較を試みたが, 本条件では先行研究の手法による再構成が成功しなかった. 定量的な比較は出来なかったが, 本結果からも分岐図再構成に ELM を用いた方が有用である事がわかる.

4.6.3.4 電子回路から計測した時系列からの分岐図再構成

本シミュレーション実験では，レスラー方程式の電子回路を作成しその回路から計測した時系列を用いて分岐図を再構成する．分岐図再構成を実問題に応用するためにノイズが含まれたデータへの適用例は非常に重要である．Tokudaらがノイズを含んだ連続時間の自励系の時系列から分岐図再構成 [18] を行ったが，レンジが約 10 の時系列に対して平均が 0，標準偏差が 0.01 のガウシアンノイズを用いたため微小なノイズであり実データとは差異があると考えられる．さらに，このノイズは観測ノイズしか考慮されていない．実データを対象とする場合は，系に直接影響を与えるダイナミカルノイズとパラメータ値に影響を与えるパラメータノイズも含まれた時系列が計測されると考えられるため，これらのノイズも想定しなければならない．従って，本シミュレーション実験では数値計算で得られた時系列ではなく，実問題と同等のノイズが含まれる時系列を取得するため，電子回路から計測した時系列を用いて分岐図再構成を行い，実データへ適用できる事を示す．

図 4.13 に本研究で使用したレスラー方程式の回路図を示す．本回路図は [58] を参考にして作成したため，

$$\begin{aligned}\frac{dx_1^{(r2)}}{d\tau} &= -x_2^{(r2)} - x_3^{(r2)} \\ \frac{dx_2^{(r2)}}{d\tau} &= x_1^{(r2)} + p_1^{(r2)} x_2^{(r2)} \\ \frac{dx_3^{(r2)}}{d\tau} &= p_3^{(r2)} - (p_3^{(r2)} - x_1^{(r2)}) x_3^{(r2)}\end{aligned}\quad (4.21)$$

が基になっている．[58] からの変更点は，パラメータ $p_1^{(r2)}$ ， $p_2^{(r2)}$ ， $p_3^{(r2)}$ を電圧 $V(p_1^{(r2)})$ ， $V(p_2^{(r2)})$ ， $V(p_3^{(r2)})$ により調整できるようにした．本シミュレーション実験では 1次元パラメータ空間の分岐図再構成を行うため， $p_1^{(r2)}$ と $p_3^{(r2)}$ を，それぞれ，0.3 と 0.31 に固定する．分岐図再構成に使用する時系列は，サンプリング周波数 25 kHz にて $x_1^{(r2)}$ を計測した．本条件で計測した分岐図を 4.14(a) 上段に示す．リアプノフ指数は wolf らが提案した方法 [10] を用いて時系列信号から推定した．

次に，計測データと同条件でシミュレーション実験を行い作成した分岐図を示す．ここで，電子回路の時定数を考慮し，式 (4.21) を

$$\begin{aligned}\frac{dx_1^{(r2)}}{d\tau} &= \rho \left(-x_2^{(r2)} - x_3^{(r2)} \right) \\ \frac{dx_2^{(r2)}}{d\tau} &= \rho \left(x_1^{(r2)} + p_1^{(r2)} x_2^{(r2)} \right) \\ \frac{dx_3^{(r2)}}{d\tau} &= \rho \left(p_3^{(r2)} - (p_3^{(r2)} - x_1^{(r2)}) x_3^{(r2)} \right)\end{aligned}\quad (4.22)$$

に変更する．ここで，時定数 ρ は積分回路のコンデンサ 2.2nF と抵抗 100k Ω から 220×10^3 を設定した．3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した．ここで

時間刻み幅を $\Delta\tau = 10^{-6}$ とした。本シミュレーション実験では、 $x_1^{(r2)}$ 要素の時系列の $40\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした。図 4.14(b) 上段にシミュレーション実験で作成した分岐図を示す。ここで、下段のリアプノフ指数は計測データと同様、wolf の方法で推定した。図 4.14(a) と (b) を比較すると、3.0 から 3.5 付近までの周期が 2 周期が 4 周期になっている事や窓の位置がずれている事から図 4.14(a) の計測データはノイズの影響を大きく受けていると考えられる。

次に分岐図再構成の実験条件を示す。 $p_2^{(r2)} = p_{2,n}^{(r2)}$ として、時系列 $S_n (n = 1, \dots, P = 9)$ を生成するパラメータ $p_2^{(r2)}$ は、

$$p_{2,n}^{(r2)} = -0.2 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 3.7 \quad (4.23)$$

とし、各時系列の長さは 5000 点取得した。レスラー方程式の時系列の学習に用いた ELM の入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、3 個、20 個、1 個とした。この場合、予測器の出力 $o^{(o)}(t)$ は、 $x_2^{(r2)}(t)$, $x_2^{(r2)}(t-5)$, $x_2^{(r)}(t-10)$ を入力とした時、 $x_2^{(r2)}(t+1)$ を出力するように学習を行う。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、20, 10, 0.05 と設定した。

図 4.14(c) 上段に再構成した分岐図、下段に wolf の方法により推定したリアプノフ指数を示す。図 4.14(a) と (c) を比較すると、分岐パラメータが対応している事がわかる。図 4.14(a) の分岐構造はノイズで潰されていて $p_2^{(r2)} = 3.5$ 付近でカオスが 4 周期から突然現れているが、図 4.14(c) の分岐構造は周期倍分岐が連続して起こりカオスに至ることがわかる。しかし、図 4.14(a) の $p_2^{(r2)} = 3.9$ 以上の 3 周期解のパラメータ領域は再構成できなかつた。これらの結果から、広い範囲のパラメータ領域の再構成はできなかつたが、分岐構造を理解できる程度の再構成に成功した。本シミュレーション実験では時系列のノイズに対してフィルタリングを行わなかつたため、今後の課題としてフィルタリングなどを適用して実データによる分岐図の再構成精度を挙げたい。

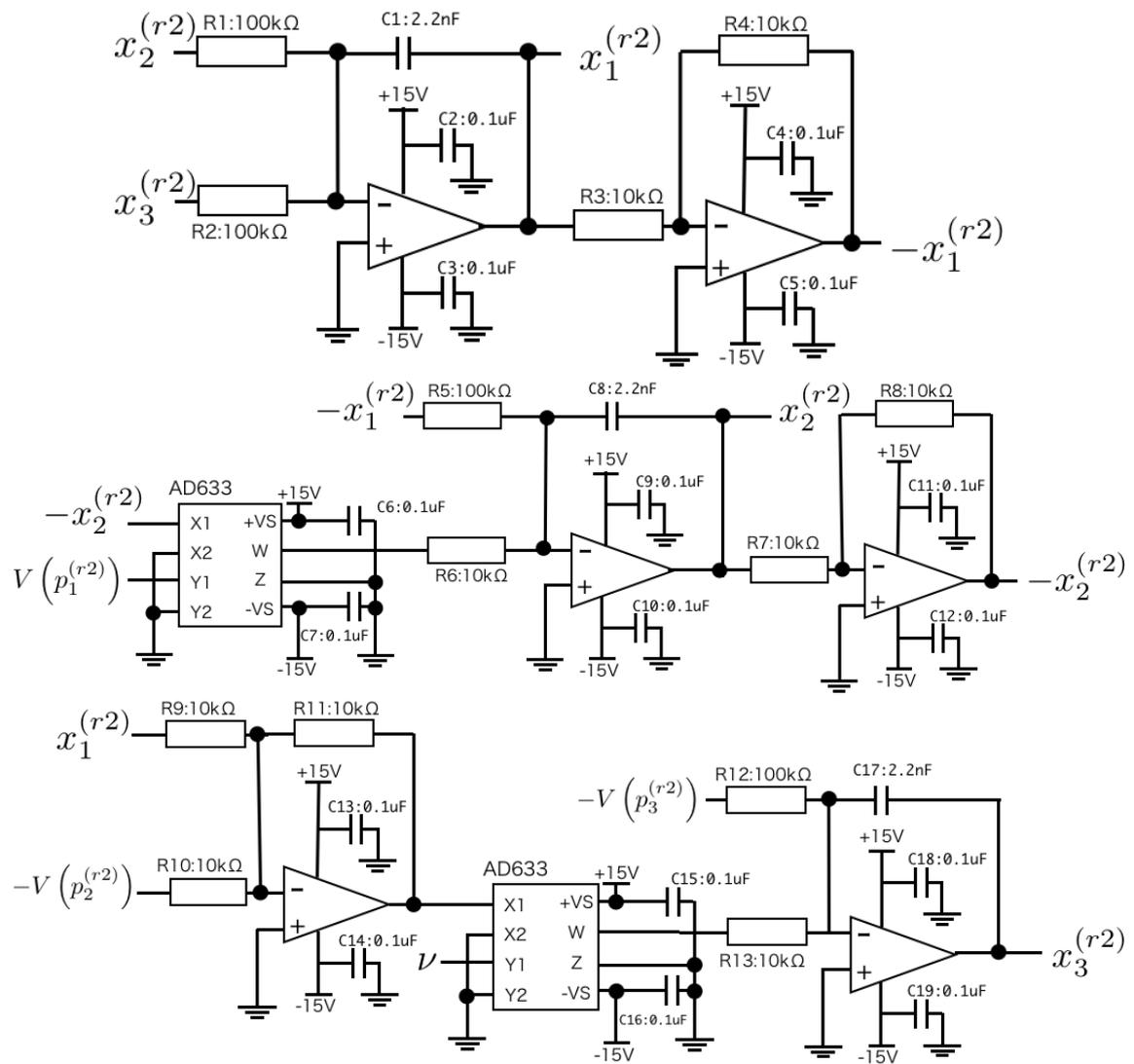
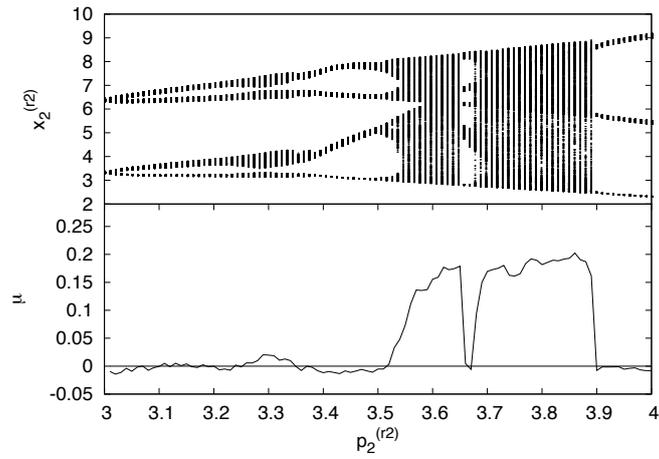
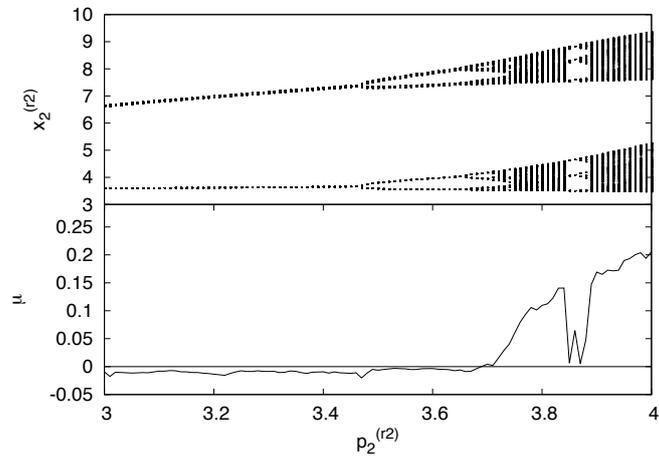


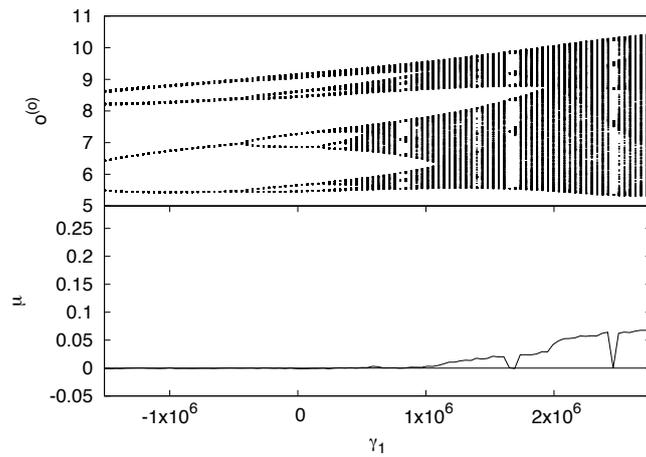
図 4.13: レスラー方程式の回路図



(a) 計測した分岐図



(b) 真の分岐図



(c) 再構成した分岐図

図 4.14: 計測したレスラー方程式の分岐図とリアプノフ指数

第5章 主成分分析を用いない分岐図再構成の新しい手法

本章では、1999年に Bagarinao らが提案した予測器に基づいた分岐図再構成のアルゴリズム (PFB アルゴリズム: Predictor function-based reconstruction Algorithm [20]) を基にした新しい分岐図再構成の方法を提案 [59] し、その有用性をシミュレーション実験により示す。本手法の特徴は、主成分分析を使用せずに分岐図再構成を行う事により手順を簡略化させた事である。また、Bagarinao らの手法では Linear-In-Parameter (LIP) の系に対象が限定されていたが、本手法は non-LIP の系に対しても適用可能な事を示す。

本章の構成は、初めに Bagarinao らが提案した PFB アルゴリズムについて述べる。次に、SAP-ELM が PFB アルゴリズムに適している事を説明し、パラメータ次元の推定方法を示す。その後、提案手法を要約し、シミュレーション実験の結果を示す。

5.1 予測器に基づいた分岐図再構成

本節では、PFB アルゴリズムの説明を行う。PFB アルゴリズムは、一つの力学系から異なるパラメータを用いて生成された $(P+1)$ 組の時系列のみから分岐図を再構成できる。本手法のアルゴリズムは、モデリング、パラメータ推定、分岐図再構成プロセスに分けられる。

モデリングプロセスでは、対象の系の各時系列を予測器により学習する。本手法は出力層のニューロン数を 1 とし、線形関数を用いる事を前提とする。従って本手法では、予測器の関数を式 (4.2) から

$$x(t+1) = g^{(l)}(\omega_n, \mathbf{h}(t)), (1 \leq n \leq P) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{h}(t) = g^{(m)}(\mathbf{x}(t)) \quad (5.2)$$

に変更する。ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^U$, $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^V$, $x(t+1) \in \mathbb{R}$ は、入力ベクトル、関数 $g^{(m)}(\cdot)$ の出力ベクトル、関数 $g^{(l)}(\cdot, \cdot)$ の出力値である。 $g^{(l)}(\cdot, \cdot)$ と $g^{(m)}(\cdot)$ は線形関数と非線形関数、 P は時系列の数、 ω_n は n 番目の時系列 S_n を学習した時に得られた出力ニューロンの結合荷重である。

パラメータ推定プロセスでは、 i 番目の時系列と $j (\neq i)$ 番目の時系列のモデリングを行った学習済みの予測器の出力値の差を PCA に適用する。出力値の差は、

$$g_{i,j}^{(dif)}(\mathbf{h}(t)) = g^{(l)}(\omega_i, \mathbf{h}(t)) - g^{(l)}(\omega_j, \mathbf{h}(t)) \quad (5.3)$$

により計算する。また、出力値の差分行列は、

$$X = \left[\mathbf{x}_{1,2}^{(dif)}, \mathbf{x}_{2,3}^{(dif)}, \dots, \mathbf{x}_{P-1,P}^{(dif)} \right] \quad (5.4)$$

と表す。ここで、

$$\mathbf{x}_{i,j}^{(dif)} = \left[g_{i,j}^{(dif)}(\mathbf{h}(1)), g_{i,j}^{(dif)}(\mathbf{h}(2)), \dots, g_{i,j}^{(dif)}(\mathbf{h}(L)) \right]^T \quad (5.5)$$

(1 ≤ i ≤ P-1), (j = i+1)

である。Lは入力のパターン数である。出力値の差分行列XをPCAに適用した結果から、Xの固有値と固有ベクトルを得る。固有値を用いて対象の系のパラメータ次元を推定するために、下記によりn番目の寄与率と累積寄与率を計算する。

$$CR_n^{(s)} = \frac{\phi_n}{\sum_{i=1}^A \phi_i} \times 100[\%], (n = 1, 2, \dots, A) \quad (5.6)$$

$$CCR_n^{(s)} = \sum_{i=1}^n CR_i^{(s)}, (n = 1, 2, \dots, A) \quad (5.7)$$

ここで、 ϕ_i はi番目の固有値、Aは学習した結合荷重の数である。本研究では、推定パラメータ次元Eは

$$E = \arg \min_{1 \leq n \leq A} CCR_n^{(s)} > 80[\%] \quad (5.8)$$

により推定する。

分岐図再構成プロセスでは、(E+1)個の予測器を用いて分岐図を再構成する。分岐図再構成のための関数は、

$$\begin{aligned} g^{(l)}(\hat{\omega}, \mathbf{h}(t)) &= g^{(l)}(\omega_1, \mathbf{h}(t)) + \sum_{i=2}^{E+1} \alpha_{(i-1)} \left(g^{(l)}(\omega_i, \mathbf{h}(t)) - g^{(l)}(\omega_1, \mathbf{h}(t)) \right) \\ &= g^{(l)} \left(\omega_1 + \sum_{i=2}^{E+1} \alpha_{(i-1)} (\omega_i - \omega_1), \mathbf{h}(t) \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

により得られる。ここで $\alpha_i (i = 1, \dots, E)$ は分岐パラメータである。従って、出力ニューロンの新しい結合荷重 $\hat{\omega}$ は

$$\hat{\omega} = \omega_1 + \sum_{i=2}^{E+1} \alpha_{(i-1)} (\omega_i - \omega_1) \quad (5.10)$$

により得られる。出力ニューロンの新しい結合荷重を用いて、

$$y(t+1) = g^{(l)}(\hat{\omega}, g^{(n)}(\mathbf{x}(t))) \quad (5.11)$$

により時系列を生成する。分岐パラメータ $\alpha_i (i = 1, \dots, E)$ を変更しながら、時系列を生成し分岐図を再構成する。

5.2 SAP-ELM の結合荷重の分布

本節では学習後の結合荷重の分布を示し、時系列 S_1, S_2, \dots, S_P を生成した際に使用したパラメータ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_P$ と SAP-ELM の学習した結合荷重 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_P$ の関係を示す。本シミュレーション実験では、対象の系として式 (2.1) のロジスティック写像を使用する。本シミュレーション実験では、予測器として SAP-ELM を使用する。SAP-ELM の入力層と出力層のニューロン数は 1 個とし、列込後の中間層のニューロン数は 4 個であった。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、1, 0, 1 に設定した。

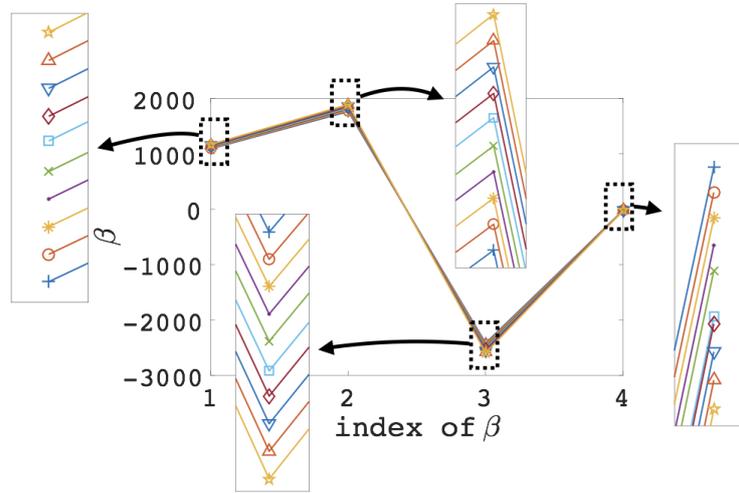


図 5.1: 10 組のロジスティック写像の時系列を学習した結合荷重の分布

図 5.1 は、10 組の時系列を学習した時の出力層ニューロンの結合荷重の分布を示す。10 組の時系列を生成したパラメータは、

$$p_n^{(l)} = 3.7 + 0.3(n-1), (n=1, \dots, 10) \quad (5.12)$$

により決定した。ここで、図 5.1 の横軸と縦軸は学習した結合荷重のインデックスと結合荷重の値である。図 5.1 は、学習した結合荷重の分布がほぼ同一であることを示す。さらに、時系列を生成したパラメータと同様に学習した結合荷重の絶対値が徐々に増加している事がわかる。図 5.1 中の +, ○, *, ·, ×, □, ◇, ▽, △, ☆ は、それぞれ、 $p=1, 2, \dots, 10$ により生成した時系列を学習した結合荷重を示す。

次に、図 5.1 では学習した結合荷重の関係が徐々に増加しているだけでなく、それらは時系列を生成したパラメータの関係を保存している事を示す。下記の式を用いて、結合荷重の差を比較する。

$$\Delta \beta_{(i,j)} = \beta_i - \beta_j, (1 \leq i \leq P-1), (j = i+1) \quad (5.13)$$

図 5.2 は、結合荷重の差 $\Delta \beta_{(i,j)}$ の平均値と標準偏差を示す。ここで、図 5.2 の横軸と縦軸は、 $\Delta \beta_{(i,j)}$ のインデックスとその絶対値を示す。図 5.2 から、標準偏差が

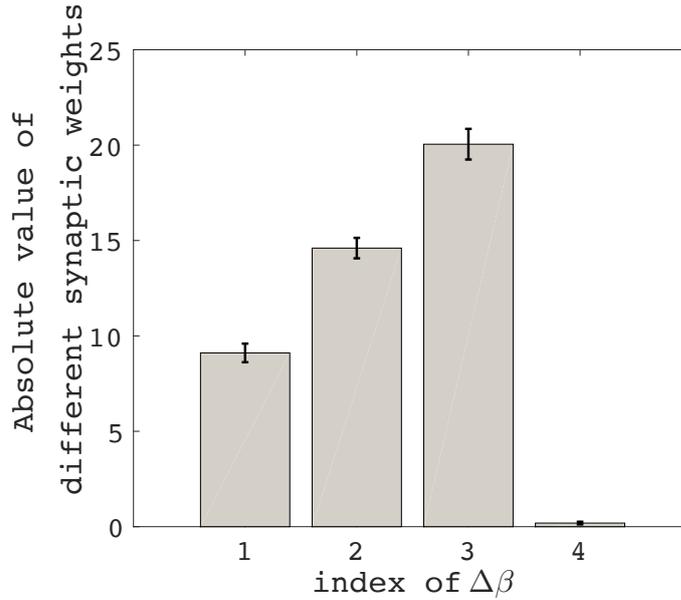


図 5.2: 10 組の学習した結合荷重の差 $\Delta\beta_{(i,j)}$ の平均と標準偏差

非常に小さいため $\Delta\beta_{(i,j)}$ は全てほぼ同一である事がわかる. 式 (5.12) からわかる通り, 時系列を生成したパラメータの差 $\Delta\eta_{(p,p+1)} = \eta_{p+1} - \eta_p, (p = 1, \dots, P-1)$ は全て同じである. すなわち, ロジスティック写像の時系列を生成した時のパラメータが大きいほど, 学習した結合荷重の絶対値も比例して大きくなる. この特徴は, PFB アルゴリズムに適用する上で重要な利点になると考えられる. また, この特徴を得るためには付録 A で示す通り, 最適な隠れ層のニューロン数を設定する必要があるため, PFB アルゴリズムに SAP-ELM を用いる必要がある.

5.3 分岐パラメータ次元推定

5.2 節の結果より, 対象の系のパラメータ空間と結合荷重の差 $\Delta\beta_{(i,j)}$ に関係がある事を確認した. 本節は, 結合荷重の差分行列 $[\Delta\beta_{(1,2)} \Delta\beta_{(2,3)} \dots \Delta\beta_{(P-1,P)}]$ の特異値分解を行い, 対象の系のパラメータ次元を推定する. 結合荷重の差分行列の寄与率が高い特異値の数と対象の系のパラメータ次元が対応していると考えられる. 推定方法を下記に示す.

初めに, 結合荷重の差分行列の特異値を計算する. 次に, i 番目の特異値 σ_i の寄与率と累積寄与率を

$$CR_n^{(s)} = \frac{\sigma_n}{\sum_{i=1}^A \sigma_i} \times 100[\%], (n = 1, 2, \dots, A) \quad (5.14)$$

$$CCR_n^{(s)} = \sum_{i=1}^n CR_i^{(s)}[\%], (n = 1, 2, \dots, A) \quad (5.15)$$

により計算する。本研究では、パラメータ次元の推定は

$$E = \arg \min_{1 \leq n \leq A} CCR_n^{(s)} > 80[\%] \quad (5.16)$$

により行う。

本節では、1パラメータのロジスティック写像と2パラメータのエノン写像を対象の系としてシミュレーション実験により本手法の有用性を示す。5.2節の実験条件を用いてロジスティック写像のシミュレーション実験を行い、その結果の寄与率 $CR^{(s)}$ と累積寄与率 $CCR^{(s)}$ を図 5.3 に示す。ここで、実線が寄与率、破線が累積寄与率を示す。結合荷重の差の寄与率 $CR_1^{(s)}$ は 99.5% のため、第 2 成分以降はほとんど情報が無いといえる。従って、パラメータの次元数は 1 と推定できる。

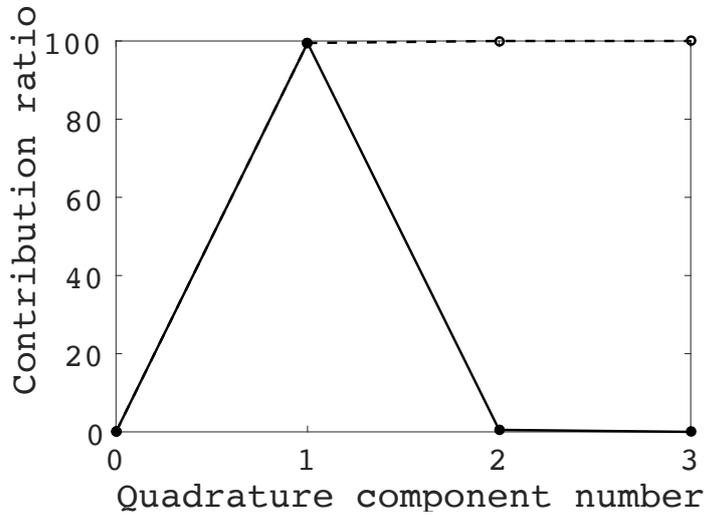


図 5.3: 特異値を用いたロジスティック写像の寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)

次に式 (4.17) のエノン写像のパラメータ次元を推定する。本シミュレーションの実験条件として、時系列は $x_1^{(h)}$ のみ計測されたと仮定してパラメータ次元推定を行う。時系列の学習に使用した ELM の入力層と出力層のニューロン数は共に 2 個とし、刈込後の中間層のニューロン数は 6 個であった。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、3, 1.5, 1 に設定した。本実験は、6 組の時系列を使用する。これらの時系列は下記のパラメータを用いて生成した。

$$\begin{aligned} p_1^{(h)} &= 0.12 \sin(2\pi(n-1)/P) + 1.345, \quad (n = 1, 2, \dots, 6) \\ p_2^{(h)} &= 0.12 \cos(2\pi(n-1)/P) + 0.2, \quad (n = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \quad (5.17)$$

図 5.4 にエノン写像の結果を示す。結合荷重の差の累積寄与率 $CCR_2^{(s)}$ は 92.3% のため、パラメータ次元は 2 と推定できる。

これらの結果から、結合荷重の差分行列の特異値からパラメータ次元推定が可能である事がわかる。

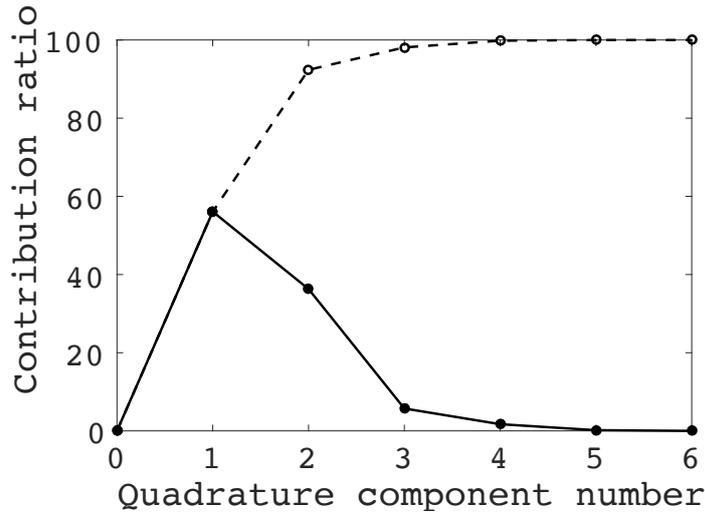


図 5.4: 特異値によるエノン写像の寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)

5.4 主成分分析を用いない新手法の要約

本節では、提案手法の要約を行う。提案手法のアルゴリズムは、刈込、モデリング、パラメータ推定、分岐図再構成プロセスに分けられる。

刈込プロセスでは、隠れ層の最適なニューロン数を設定するために SAP-ELM を用いて ELM に刈込手法を適用する。分岐図再構成のために与えられた複数組の時系列 S_1, S_2, \dots, S_p の中から、刈込手法を適用する対象の時系列はカオス時系列を選択する。もし、複数のカオス時系列が得られている場合は、最大リアプノフ指数が最も大きいカオス時系列を選択する。一般的に、最大リアプノフ指数が大きいカオス時系列ほど予測が難しいためである。提案手法では、入力層と出力層のニューロン数は対象の系の状態数と同じに設定する。対象が未知の系の場合一般的な時系列予測と同様のニューロン数の決定方法が使えると考えられる。例えば、フラクタル次元解析 [60] や誤り近傍点法 [33] などの Takens の埋込法 [34] を基にした手法を用いて入出力次元を推定できる。

モデリングプロセスでは、与えられた時系列 S_1, S_2, \dots, S_p に対して刈込プロセスで生成した SAP-ELM の出力ニューロンの結合荷重の学習を行う。ここで、2 組目以降の時系列の学習を行う時も刈込プロセスで生成した同じ SAP-ELM を用いる。

パラメータ推定プロセスでは、結合荷重の差分行列 $[\Delta \boldsymbol{\beta}_{(1,2)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(2,3)} \dots \Delta \boldsymbol{\beta}_{(p-1,p)}]$ に対して特異値分解を行う。特異値の寄与率 $CR^{(s)}$ と累積寄与率 $CCR^{(s)}$ から対象の系のパラメータ次元を推定する。

分岐図再構成プロセスでは、 $(E+1)$ 組の時系列を用いて分岐図再構成を行う。分岐パラメータ α_i を変更しながら式 (5.10) と式 (5.11) を用いて時系列を生成する。

また、本提案手法の再構成した分岐図に対して、4.4 節で説明したりアプノフ指数の推定方法が適用できる。

5.5 主成分分析を用いない新手法による分岐図再構成のシミュレーション実験

本シミュレーション実験は、初めに様々な時系列の組み合わせによる分岐図再構成の結果を示す。次に、2次元パラメータ空間を持つ系の分岐図再構成の結果を示す。その後、Bagarinaoらが提案したPFBアルゴリズムでは適用できなかったnon-LIPの系の分岐図に対して再構成した結果を示す。

5.5.1 様々な時系列データの組み合わせによる分岐図再構成

本シミュレーション実験は、対象の力学系をロジスティック写像として5.2節で行った実験と同条件で、3パターンの時系列データの組合せ(周期と周期, 周期とカオス, カオスとカオス)を用いて分岐図を再構成した結果を示す。

分岐図再構成のための時系列を生成したパラメータは下記の通りである。

- 2組の周期時系列を用いた実験1: $p_{(E1-1)}^{(l)} = 3.4, p_{(E1-2)}^{(l)} = 3.5$
- 周期とカオス時系列を用いた実験2: $p_{(E2-1)}^{(l)} = 3.5, p_{(E2-2)}^{(l)} = 4.0$
- 2組のカオス時系列を用いた実験3: $p_{(E3-1)}^{(l)} = 3.95, p_{(E3-2)}^{(l)} = 4.0$

図5.5にロジスティック写像の分岐図, 図6.2に実験1-3の条件で再構成した分岐図を示す。ここで, 図中の上段と下段に, それぞれ, 分岐図とリアプノフ指数を示す。

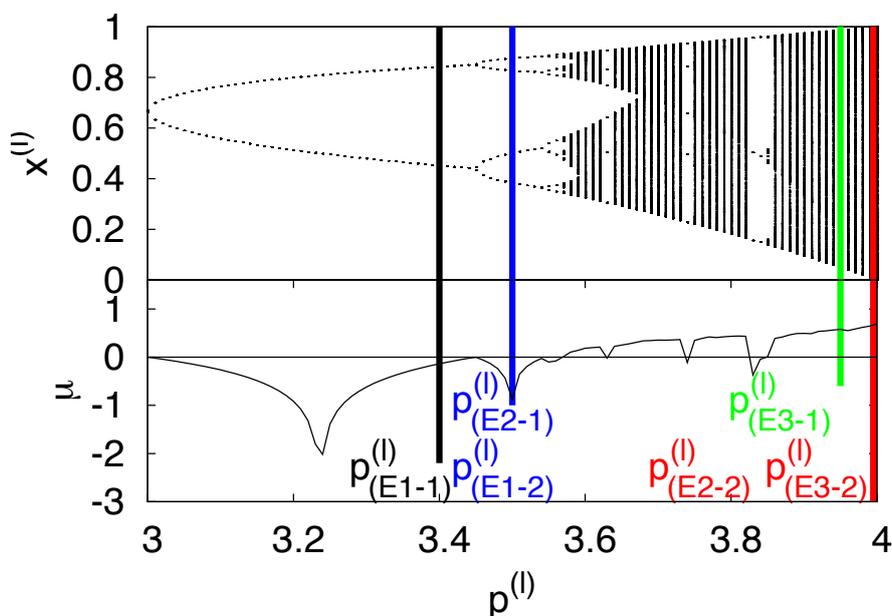
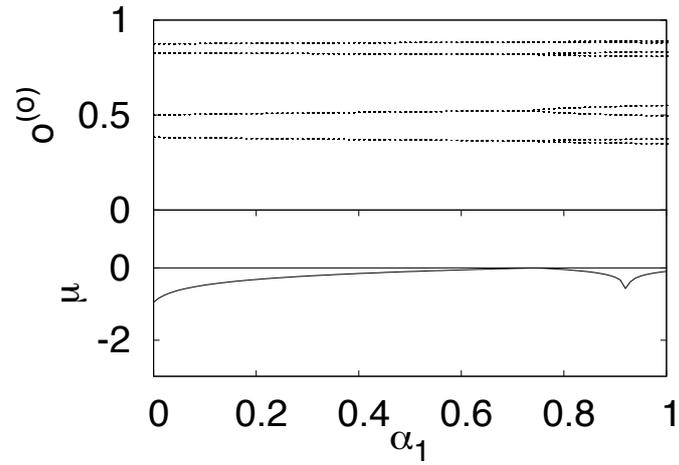
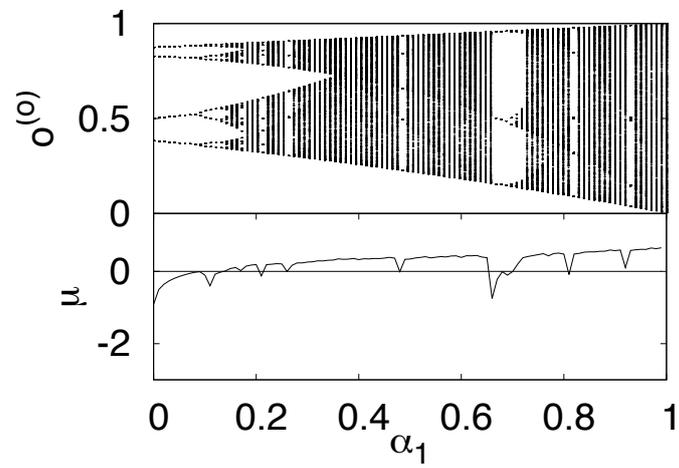


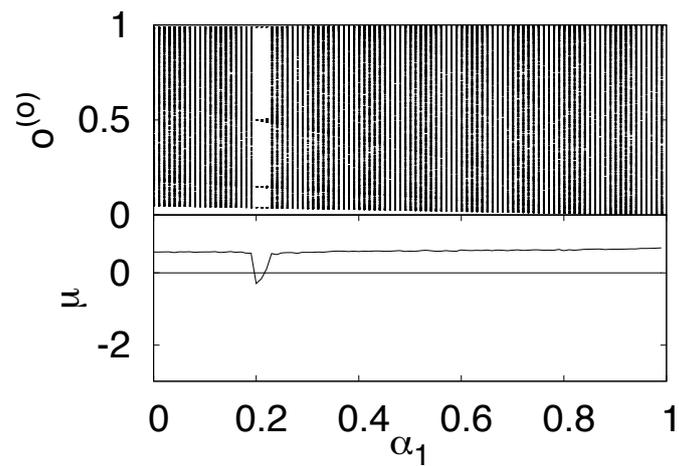
図5.5: 真のロジスティック写像の分岐図



(a) 実験条件 1

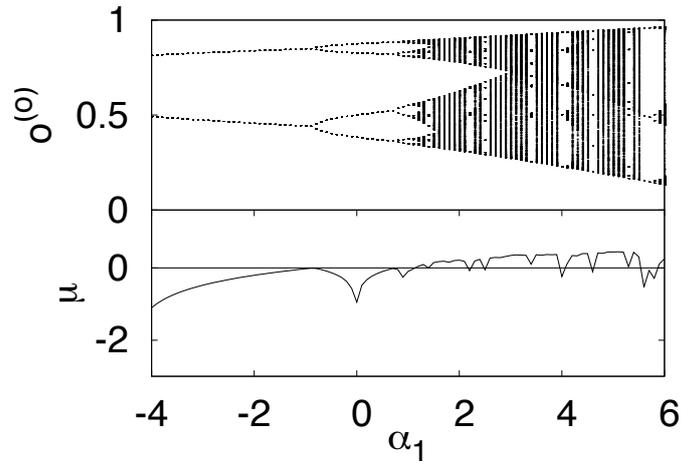


(b) 実験条件 2

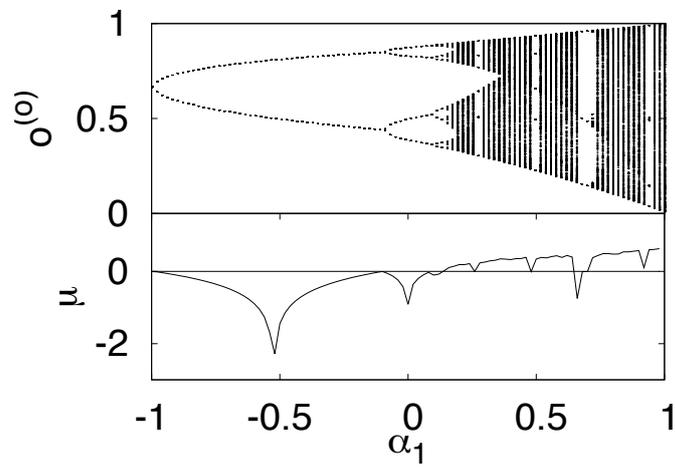


(c) 実験条件 3

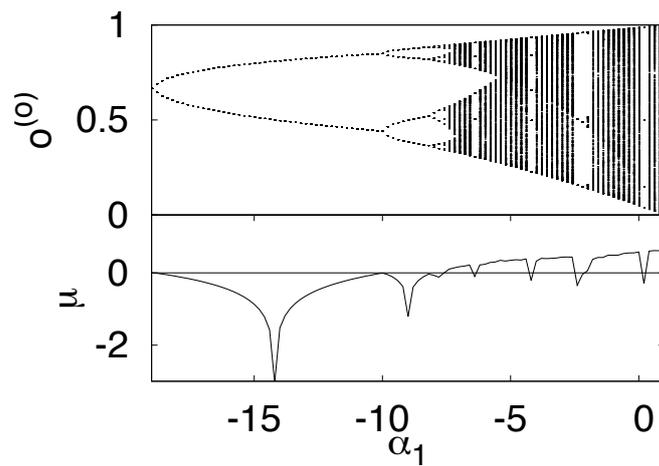
図 5.6: 様々な時系列の組合せによる分岐図再構成の結果



(a) 実験条件 1



(b) 実験条件 2



(c) 実験条件 3

図 5.7: 様々な時系列の組合せによる分岐図再構成の結果 (広域のパラメータ範囲)

図 5.6(a) – (c) に分岐パラメータ α_1 を 0 から 1 の範囲で再構成した分岐図を示す。従って、分岐パラメータ α_1 の範囲は時系列を生成したパラメータの範囲と対応するため、図 5.6(a), (b), (c) のパラメータ範囲は、それぞれ、図 5.5 の黒線から青線、青線から赤線、緑線から赤線の範囲に対応する。図 5.6(a) は 4 周期から 8 周期の周期倍分岐、図 5.6(b) は 8 周期からカオス領域、図 5.6(c) はカオス領域を再構成している事がわかる。これらの再構成した分岐図は図 5.5 の真の分岐図と対応しているため、全ての実験で再構成が成功した。また、それぞれのリアプノフ指数は再構成した分岐図に対応している事がわかる。例えば、リアプノフ指数が周期倍分岐で 0、カオス領域で正の値を示している。

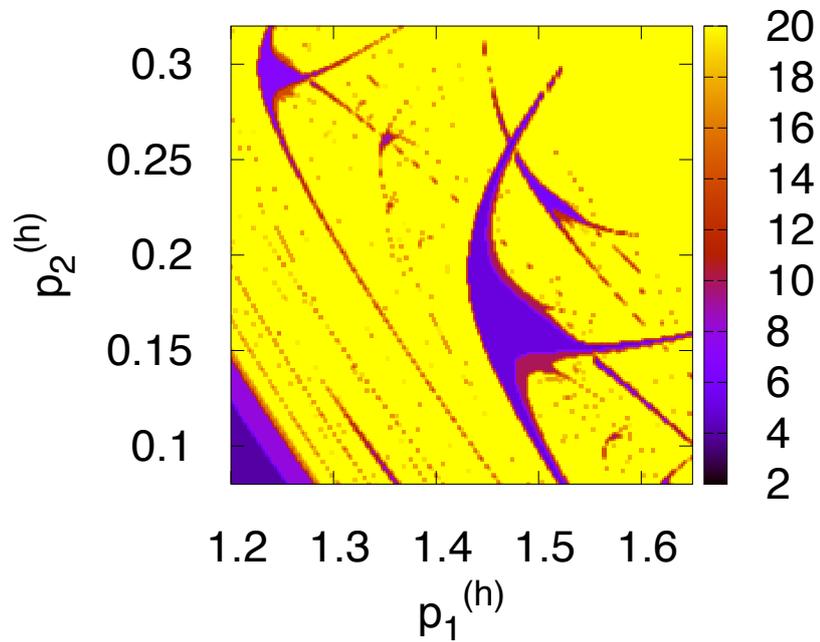
図 5.7(a) – (c) は、高域のパラメータ範囲に設定し再構成した分岐図を示す。広域のパラメータ範囲は、図 5.5 の真の分岐図のパラメータ範囲 $p^{(l)} = [3.0, 4.0]$ に対応するように設定する。図 5.5 と比較すると、真の分岐図と図 5.7(a) – (c) の再構成した分岐図は対応している事がわかる。実験 1 の結果から、提案手法は周期時系列のみから分岐図再構成が可能である事を示す。しかし、他の実験の結果と比べると、図 5.7(a) はパラメータ空間の伸縮がある。図 5.7(a) の分岐パラメータ $\alpha_1 = -4$ は周期 1 から周期 2 の周期倍分岐、分岐パラメータ $\alpha_1 = 6$ は状態値が $[0, 1]$ の範囲を取るカオスが望まれるが、どちらの特徴も満たしていない。従って、広域の分岐図再構成を行うためには、学習する時系列にカオス時系列を用いた方が精度が高くなると考えられる。

5.5.2 2次元パラメータ空間の分岐図再構成

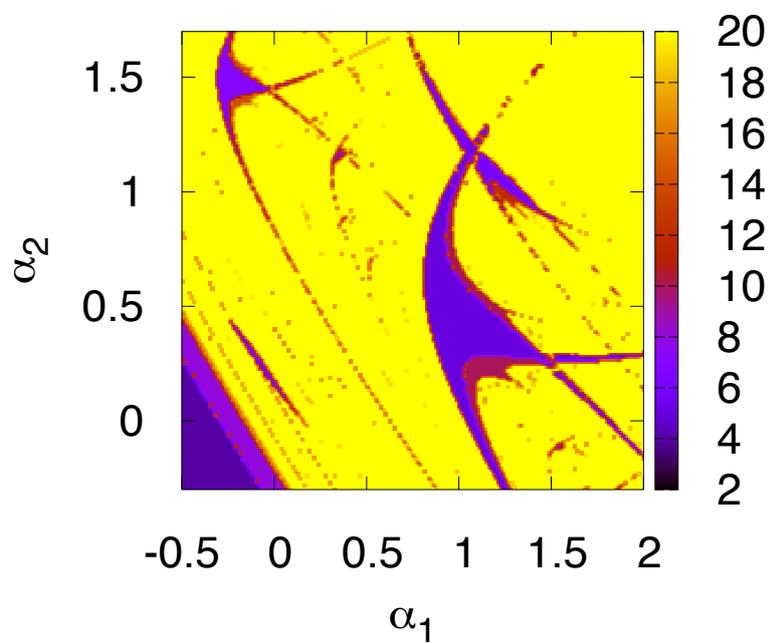
本節では、エノン写像の 2 次元パラメータ空間の分岐図再構成を行う。シミュレーションの実験条件は、5.3 節と同様である。

5.3 節でパラメータの次元数は 2 と推定したため、3 組の時系列を用いて分岐図再構成を行う。3 組の時系列を生成したパラメータは、式 (5.17) の $i = 3, 5, 6$ により決定した。ここで、時系列を生成したパラメータ $i = 3, 5, 6$ は、それぞれ、再構成した分岐図のパラメータ $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1), (0, 0), (1, 0)$ に対応する。生成した 3 組の時系列は全てカオス時系列である。

図 5.8(a) と (b) に、真の分岐図と再構成した分岐図を示す。これらの図中、黄色の点は 20 周期以上、カオス、または発散する点を表す。これらの図から、再構成した分岐図は真の分岐図と定性的に対応している事がわかる。図 5.9(a) と (b) に、真の分岐図と再構成した分岐図に対する最大リアプノフ指数を示す。これらの図中、時系列が発散してしまうパラメータは、それぞれの図中の最大値のリアプノフ指数と同色をプロットしている。これらの図から、最大リアプノフ指数は対応する分岐図と同様の特徴が推定できている事がわかる。

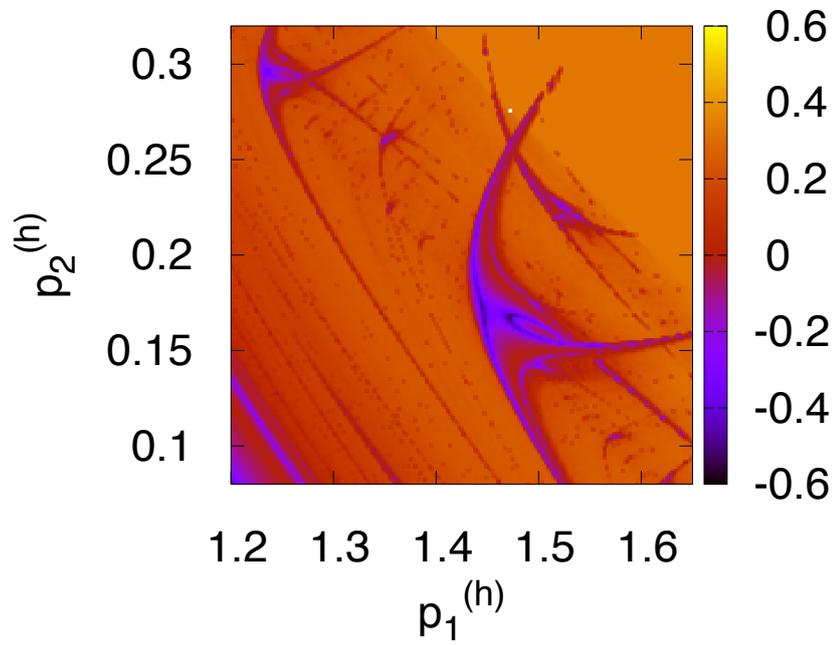


(a) 真のパラメータ空間

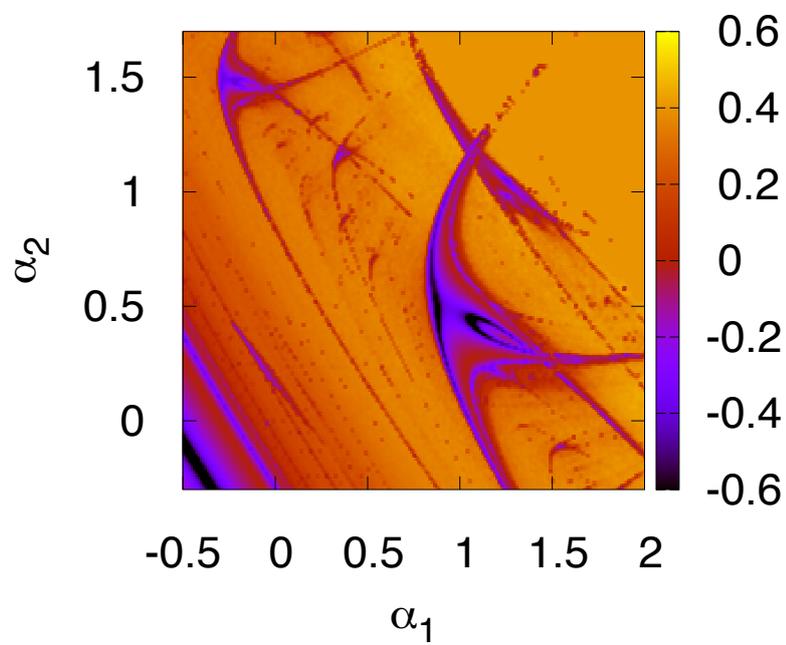


(b) 再構成したパラメータ空間

図 5.8: エノン写像の 2 次元パラメータ空間の分岐図再構成



(a) 真のパラメータ空間



(b) 再構成したパラメータ空間

図 5.9: エノン写像の 2 次元パラメータ空間の分岐図再構成に対するリアプノフ指数

5.6 non-LIP の系の分岐図再構成

Bagarinao ら [20] が提案した PFB アルゴリズムは、LIP の系に限定して分岐図再構成が可能である。Bagarinao らは、non-LIP の系であるローレンツ方程式 [28] の分岐図再構成の適用例を示したが、カオス領域が含まれない狭いパラメータ範囲の分岐図である。

本節のシミュレーション実験では、non-LIP の系であるレスラー方程式のカオス領域を含めた分岐図再構成を行う。さらに、実在の non-LIP の系であるモータドライブの数値モデル [61] と生態系の植生バイオマスのモデル [62] の分岐図再構成を行う。生態系の植生バイオマスのモデル [62] では、分岐図再構成により状態が突然切替る分岐点を推定する。状態が突然切替る分岐点の推定は異常検知として様々な研究が行われている [63, 64, 65, 66]。

5.6.1 レスラー方程式の分岐図再構成

レスラー方程式の分岐図を式 (4.19) により生成した時系列から再構成する。レスラー方程式は $p_1^{(r)}$, $p_2^{(r)}$, $p_3^{(r)}$ の 3 パラメータを持つが、本シミュレーション実験では 1 次元パラメータ空間の分岐図再構成を行うため、 $p_1^{(r)}$ と $p_2^{(r)}$ を、それぞれ、0.33 と 0.3 に固定する。 $p_3^{(r)} = p_{3,n}^{(r)}$ として、時系列 $S_n (n = 1, \dots, P = 5)$ を生成するパラメータ $p_3^{(r)}$ は、

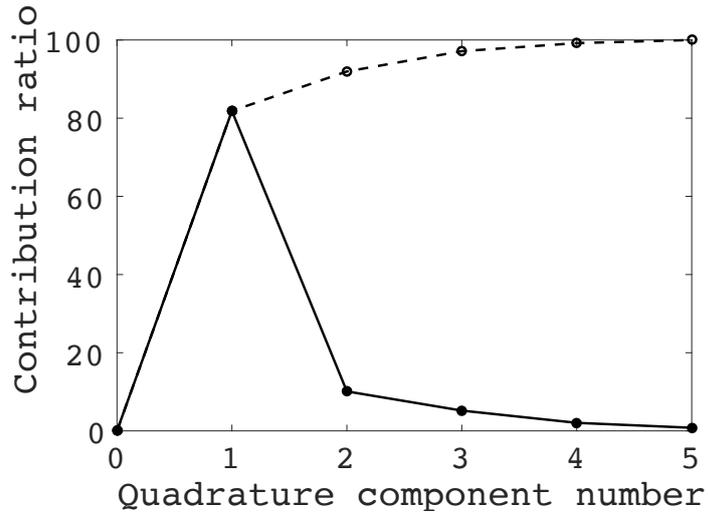
$$p_{3,n}^{(r)} = -0.5 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 3.8 \quad (5.18)$$

とし、各時系列の長さは 5000 点取得した。生成した時系列には、周期とカオス時系列が含まれている。3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した。ここで時間刻み幅を $\Delta\tau = 0.01$ とした。本シミュレーション実験では、 $x_2^{(r)}$ 要素の時系列の $5\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした。レスラー方程式の時系列の学習に用いた ELM の入力層と出力層のニューロン数は共に 3 個とした。また、刈込後の隠れ層のニューロン数は 30 個であった。この場合、予測器の出力 $o_1^{(o)}(t)$, $o_2^{(o)}(t)$, $o_3^{(o)}(t)$ は、 $x_2^{(r)}(\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 16 \cdot 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 32 \cdot 5\Delta\tau)$ を入力とした時、 $x_2^{(r)}(\tau + 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 15 \cdot 5\Delta\tau)$, $x_2^{(r)}(\tau - 31 \cdot 5\Delta\tau)$ を出力するように学習を行う。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1 , v_2 , v_3 は、それぞれ、16, 8, 0.1 に設定した。

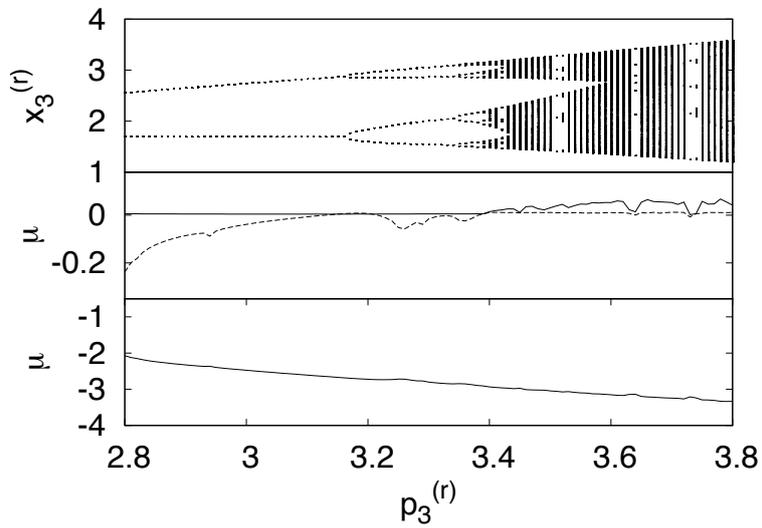
図 5.10(a) にレスラー方程式に対する寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線) を示す。第一成分の寄与率が $CR_1^{(s)} = 81.9\%$ のため、パラメータ次元は 1 と推定できる。従って、提案手法のパラメータ次元推定は non-LIP の系に対しても有効である事がわかる。

パラメータ次元を 1 と推定したため、2 組の時系列を使用する。2 組の時系列を生成したパラメータは、式 (5.18) の $i = 2, 3$ により決定した。ここで、時系列を生成したパラメータ $i = 2, 3$ は、それぞれ、再構成した分岐図のパラメータ $\alpha_1 = 0, 1$ に対応する。生成した 2 組の時系列は共にカオス時系列である。

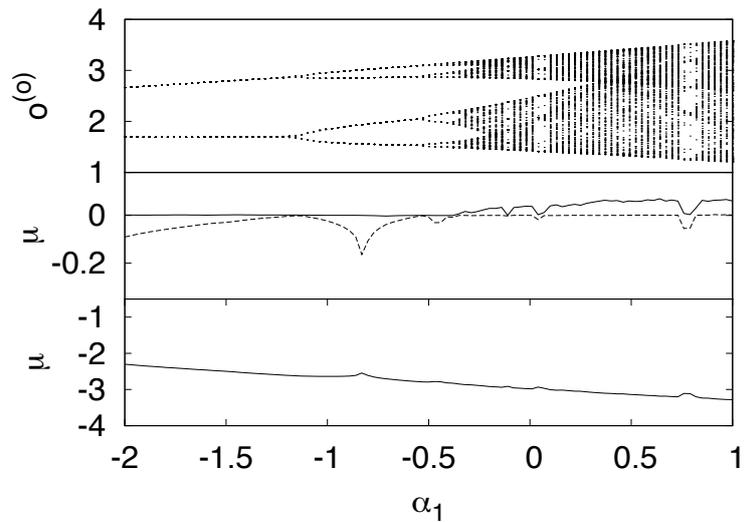
図 5.10(b) と (c) に、真の分岐図と再構成した分岐図、分岐図に対応するリアプノフ指数を示す。これらの図の上段に分岐図、中段に最大リアプノフ指数と第 2 リ



(a) 寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)



(b) 真の分岐図



(c) 再構成した分岐図

図 5.10: レスラー方程式のシミュレーション結果

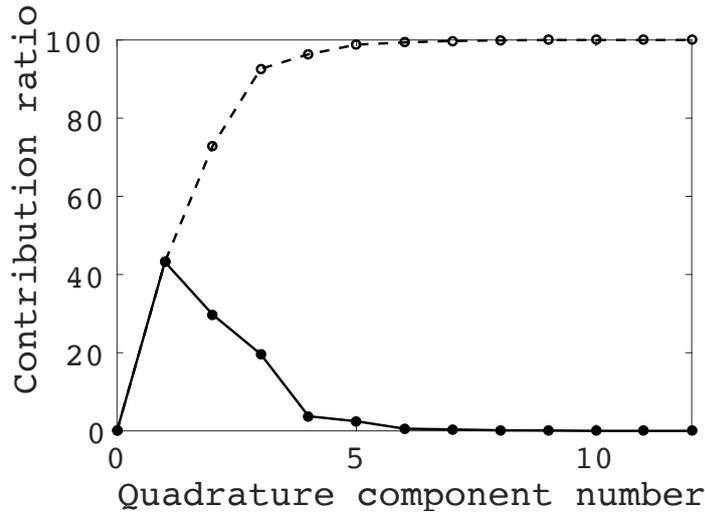


図 5.11: 3 パラメータを使用したレスラー方程式に対する寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)

アップノフ指数, 下段に第 3 リアップノフ指数を示す. 中段の実線は最大リアップノフ指数, 破線は第 2 リアップノフ指数を示す. 真の分岐図と再構成した分岐図を比較すると, カオス領域を含めて対応している事がわかる. さらに, 真の分岐図と再構成した分岐図の最大リアップノフ指数は同等の値を示している.

次に, 3 パラメータを用いたレスラー方程式のパラメータ次元推定を行う. 本シミュレーション実験に用いた ELM の入力層は 3 個, 出力層のニューロン数は 1 個とした. また, 刈込後の隠れ層のニューロン数は 25 個であった. 次元推定のために下記のパラメータを用いて 12 組の時系列を生成した.

$$\begin{aligned}
 & \text{for } 1 \leq n \leq 6 \\
 & \quad p_1^{(r)} = 0.33 \\
 & \quad p_2^{(r)} = 0.05 \sin(2\pi(n-1)/6) + 0.3 \\
 & \quad p_3^{(r)} = 0.7 \cos(2\pi(n-1)/6) + 5.0 \\
 & \text{for } 7 \leq n \leq 12 \\
 & \quad p_1^{(r)} = 0.03 \sin(2\pi(n-1)/6) + 0.33 \\
 & \quad p_2^{(r)} = 0.3 \\
 & \quad p_3^{(r)} = 0.7 \cos(2\pi(n-1)/6) + 5.0
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

図 5.11 に 3 パラメータを使用したレスラー方程式に対する寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線) を示す. 第 3 成分の累積寄与率が $CCR_3^{(s)} = 92.8\%$ のため, パラメータ次元は 3 と推定する事ができる.

5.6.2 モータードライブの数理モデルの分岐図再構成

モータードライブの数理モデルの分岐図を

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1^{(m)}}{d\tau} &= -p_1^{(m)} x_1^{(m)} + p_2^{(m)} x_4 - \frac{p_{10}^{(m)} p_1^{(m)}}{p_9^{(m)}} x_2^{(m)} x_4^{(m)} \\
 \frac{dx_2^{(m)}}{d\tau} &= -p_1^{(m)} x_2^{(m)} + p_2^{(m)} p_9^{(m)} + \frac{p_{10}^{(m)} p_1^{(m)}}{p_9^{(m)}} x_1^{(m)} x_4^{(m)} \\
 \frac{dx_3^{(m)}}{d\tau} &= -p_3^{(m)} x_3^{(m)} - p_4^{(m)} \left[p_5^{(m)} (x_2^{(m)} x_4^{(m)} - x_1 p_9^{(m)}) - p_{11}^{(m)} - \frac{p_3^{(m)}}{p_4^{(m)}} p_8^{(m)} \right] \\
 \frac{dx_4^{(m)}}{d\tau} &= \left(p_7^{(m)} - p_6^{(m)} p_3^{(m)} \right) x_3^{(m)} \\
 &\quad - p_6^{(m)} p_4^{(m)} \left[p_5^{(m)} (x_2^{(m)} x_4^{(m)} - x_1 p_9^{(m)}) - p_{11}^{(m)} - \frac{p_3^{(m)}}{p_4^{(m)}} p_8^{(m)} \right]
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

により生成した時系列から再構成する．ここで、 $x_1^{(m)}$ と $x_2^{(m)}$ は、それぞれ、ローターの直軸と横軸の鎖交磁束、 $x_3^{(m)}$ はローターの角速度と参照スピードの誤差、 $x_4^{(m)}$ はローターの横軸の固定子電流である．文献 [61] を参考にパラメータは、 $p_1^{(m)} = 13.67$, $p_2^{(m)} = 1.56$, $p_3^{(m)} = 0.59$, $p_4^{(m)} = 1176$, $p_5^{(m)} = 2.86$, $p_6^{(m)} = 0.001$, $p_7^{(m)} = 0.5$, $p_8^{(m)} = 181.1$, $p_9^{(m)} = 4.1$, $p_{10}^{(m)} = 3.0$ で設定した． $p_{11}^{(m)} = p_{11,n}^{(m)}$ として、時系列 $S_n (n = 1, \dots, P = 5)$ を生成するパラメータ $p_{11}^{(m)}$ は、

$$p_{11,n}^{(m)} = 0.04 \cos(2\pi(i-1)/8) + 0.54 \tag{5.21}$$

とし、各時系列の長さは 5000 点取得した．生成した時系列には、周期とカオス時系列が含まれている．3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した．ここで時間刻み幅を $\Delta\tau = 0.01$ とした．本シミュレーション実験では、 $x_4^{(m)}$ 要素の時系列の $\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした．モータードライブの数理モデルの時系列の学習に用いた ELM の入力層と出力層のニューロン数は共に 4 個とした．また、刈込後の隠れ層のニューロン数は 28 個であった．この場合、予測器の出力 $o_1^{(o)}(t)$, $o_2^{(o)}(t)$, $o_3^{(o)}(t)$, $o_4^{(o)}(t)$ は、 $x_4^{(m)}(\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 5\Delta\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 10\Delta\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 15\Delta\tau)$ を入力とした時、 $x_4^{(m)}(\tau + \Delta\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 4\Delta\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 9\Delta\tau)$, $x_4^{(m)}(\tau - 14\Delta\tau)$ を出力するように学習を行う．式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1 , v_2 , v_3 は、それぞれ、10, 4, 0.1 に設定した．

図 5.12(a) にモータードライブの数理モデルに対する寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線) を示す．第一成分の寄与率が $CR_1^{(s)} = 85.7\%$ のため、パラメータ次元は 1 と推定できる．従って、提案手法のパラメータ次元推定は実在の non-LIP の系に対しても有効である事がわかる．

パラメータ次元を 1 と推定したため、2 組の時系列を使用する．2 組の時系列を生成したパラメータは、式 (5.21) の $i = 3, 4$ により決定した．ここで、時系列を生成したパラメータ $i = 3, 4$ は、それぞれ、再構成した分岐図のパラメータ $\alpha_1 = 0, 1$ に対応する．生成した 2 組の時系列は共にカオス時系列である．

図 5.12(b) と (c) に、真の分岐図と再構成した分岐図、分岐図に対応するリアプノフ指数を示す。これらの図の上段に分岐図、中段に最大リアプノフ指数と第 2 リアプノフ指数、下段に第 3 リアプノフ指数と第 4 リアプノフ指数を示す。中段の実線と破線はそれぞれ最大リアプノフ指数と第 2 リアプノフ指数、下段の実線と破線はそれぞれ第 3 リアプノフ指数と第 4 リアプノフ指数を示す。真の分岐図と再構成した分岐図を比較すると、カオス領域を含めて対応している事がわかる。さらに、真の分岐図と再構成した分岐図の最大リアプノフ指数は同等の値を示している。

5.6.3 生態系の植生バイオマスのモデルの分岐図再構成

生態系の植生バイオマスのモデルの分岐図を

$$\frac{dx^{(v)}}{d\tau} = -p_2^{(v)}x^{(v)} + \left(1 - \frac{x^{(v)}}{p_3^{(v)}}\right) - p_1^{(v)} \frac{(x^{(v)})^2}{(p_4^{(v)})^2 + (x^{(v)})^2} + noise^{(wg)} \quad (5.22)$$

により生成した時系列から再構成する。ここで、 $p_1^{(v)}, p_2^{(v)}, p_3^{(v)}, p_4^{(v)}$ は、それぞれ、摂食率、成長率、環境収容力、摂食率が半減するバイオマス、 $noise^{(wg)}$ は分散 0.75 のホワイトガウシアンノイズである。文献 [62] を参考にパラメータは、 $p_2^{(v)} = 1$, $p_3^{(v)} = 10$, $p_4^{(v)} = 0.1$ に設定した。 $p_1^{(v)} = p_{1,n}^{(v)}$ として、時系列 $S_n (n = 1, \dots, P = 5)$ を生成するパラメータ $p_1^{(v)}$ は、

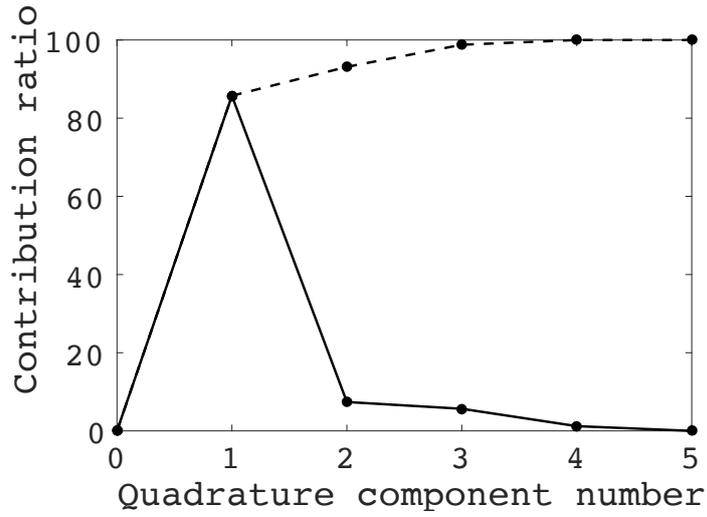
$$p_1^{(v)} = -0.3 \cos(2\pi(i-1)/8) + 1.8, \quad (i = 1, \dots, 5). \quad (5.23)$$

とし、各時系列の長さは 5000 点取得した。生成した時系列には、周期とカオス時系列が含まれている。3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した。ここで時間刻み幅を $\Delta\tau = 0.01$ とした。本シミュレーション実験では、 $x^{(v)}$ 要素の時系列の $\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした。生態系の植生バイオマスの数理モデルの時系列の学習に用いた ELM の入力層と出力層のニューロン数は共に 1 個とした。また、刈込後の隠れ層のニューロン数は 3 個であった。式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、10, 0, 0.01 に設定した。

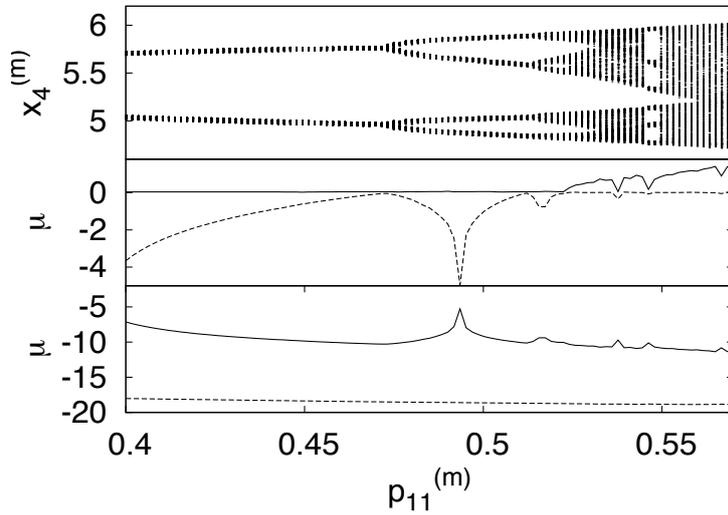
ガウシアンノイズを含めた植生バイオマスのモデルの時系列の予測結果を図 5.13 に示す。図 5.13(a) と (b) は、それぞれ、パラメータ $p_1^{(v)} = 1.5$ と 2.1 を設定して生成した時系列を学習した SAP-ELM の出力結果を示す。ここで、学習期間と予測期間は、それぞれ、5000 と 1000 ステップとした。これら図の予測期間から、SAP-ELM はノイズを含んだ時系列から安定固定点を学習できる事がわかる。

結合荷重の差分行列の特異値分解の結果から第一成分の寄与率が $CR_1^{(s)} = 99.9\%$ のため、パラメータ次元は 1 と推定できる。パラメータ次元を 1 と推定したため、2 組の時系列を使用する。2 組の時系列を生成したパラメータは、式 (5.23) の $i = 1, 5$ により決定した。ここで、時系列を生成したパラメータ $i = 1, 5$ は、それぞれ、再構成した分岐図のパラメータ $\alpha_1 = 0, 1$ に対応する。

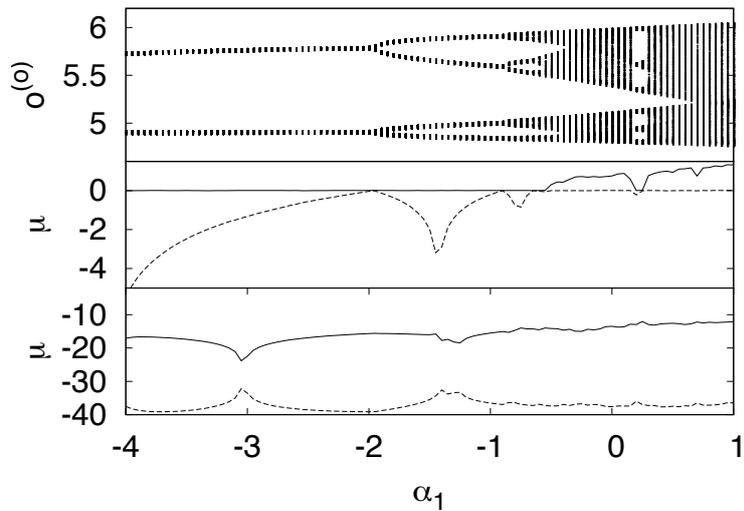
図 5.14(a) と (b) に、真の分岐図と再構成した分岐図、分岐図に対応するリアプノフ指数を示す。これらの図の上段と下段は、それぞれ、分岐図とリアプノフ指



(a) 寄与率 (実線) と累積寄与率 (破線)

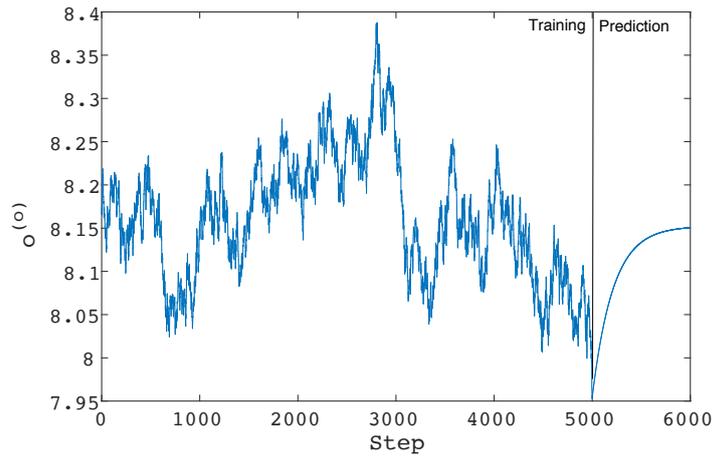


(b) 真の分岐図

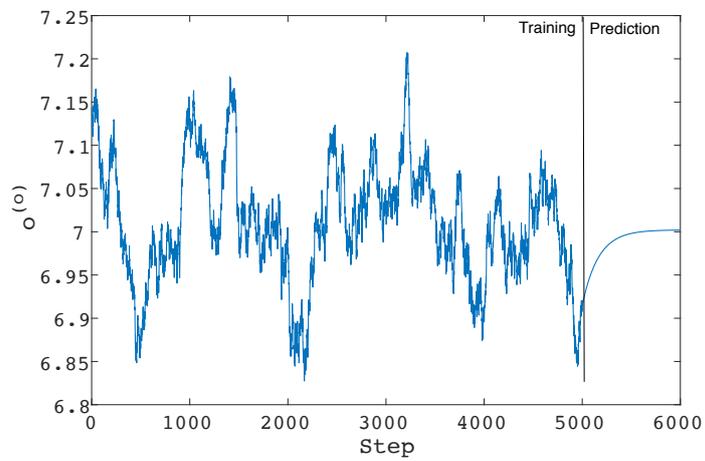


(c) 再構成した分岐図

図 5.12: モータードライブの数理モデルのシミュレーション結果



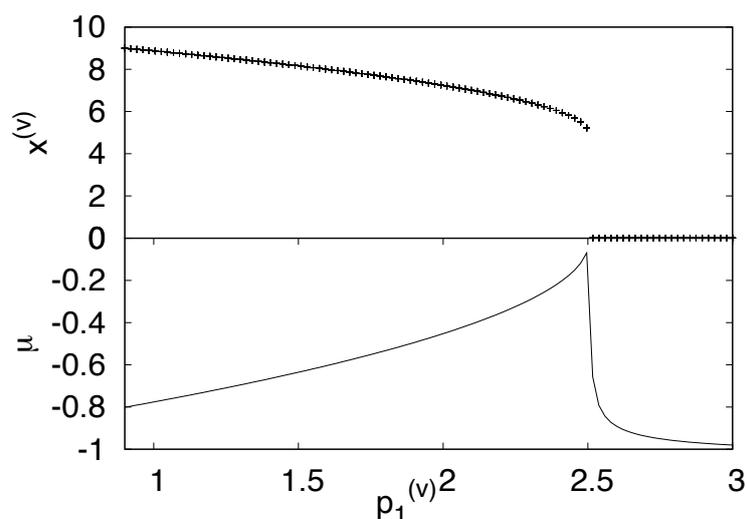
(a) $p_1^{(v)} = 1.5$



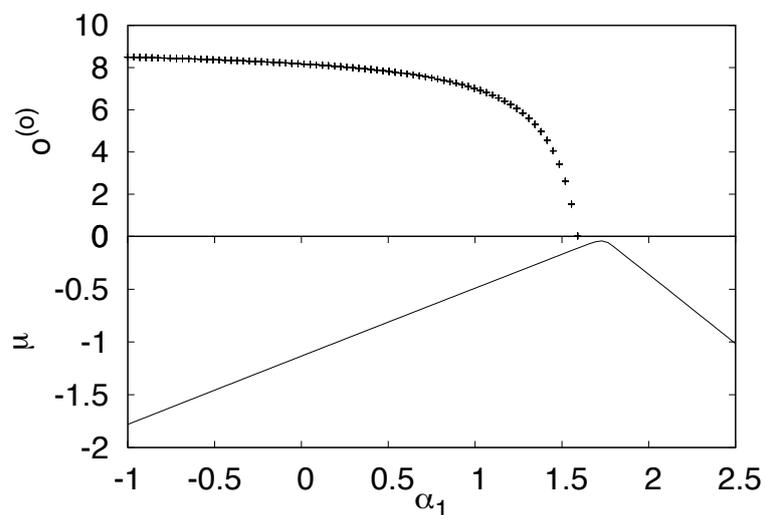
(b) $p_1^{(v)} = 2.1$

図 5.13: ガウシアンノイズを含めた植生バイオマスのモデルの時系列の予測結果

数を示す。ここで真の分岐図はガウシアンノイズを含めずに作成した。ここで、図 5.14(a) の植生バイオマスモデルの分岐図は $p_1^{(v)} = 2.5$ 周辺でサドル-ノード分岐によるレジームシフトが特徴である。真の分岐図と再構成した分岐図を比較すると、分岐パラメータ $\alpha_1 > 1.72$ で 0 に収束しないが再構成した分岐図によりレジームシフトが起こるパラメータが推定できる。また、真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数を比較するとレジームシフトまでは対応が取れている。これらの図から、リアプノフ指数が 0 に近付くとレジームシフトが起こる事がわかるので、再構成した分岐図とリアプノフ指数からレジームシフトを予測する事ができると考えられる。



(a) 真の分岐図



(b) 再構成した分岐図

図 5.14: 植生バイオマスのモデルのシミュレーション結果

第6章 推定したパラメータ空間の分岐点探索

1984年、Kawakami は対象の力学系の2次元パラメータ空間上で分岐曲線を追跡する方法を提案した [32, 67, 68, 69]. この方法は、対象の力学系のパラメータ空間上の分岐点を数値計算により特定し、その分岐点の近傍にある他の分岐点の探索を繰り返す事で分岐曲線の追跡を行う。本手法を用いる事により、パラメータ空間上で時系列信号の振舞が変わるパラメータ値がわかる。絨毯爆撃法を用いる事で分岐図をプロットする事はできるが、計算コストが高い、精度が低い等の問題点が挙げられる。Kawakami が提案した分岐曲線の追跡を行う事で、計算コストが低く精度が高い分岐図を作成する事ができる。また、この手法を用いる事で2.3節で紹介した分岐の種類も特定できるため、パラメータを使った制御などへの応用が期待できる。Kawakami が分岐点探索を提案後、様々な研究 [70, 71, 72] が行われてきたが既知の系が対象であった。

本章では、Kawakami により提案されたパラメータ空間上で分岐曲線を追跡する方法を未知の力学系へ適用する。ここで、未知の力学系のパラメータ空間は分岐図再構成で推定したパラメータ空間と対応するため、推定したパラメータ空間上でKawakami の方法を適用する事により真の系と対応した分岐曲線を得られる事が期待できる。分岐点探索を行う事で計算により分岐点を得られるため、絨毯爆撃法を用いて作成した分岐図と比べて精度が高い分岐図が得られる。さらに、周期倍分岐などの分岐の種類も特定できるため、本手法の結果を基にパラメータを用いた制御への応用も期待できる。

本章では、初めに分岐点探索を行う上で必要な基本的事項の説明を述べる。次に、対象とする分岐の分岐パラメータと固定点を探索するアルゴリズムを説明する。ここで得られた分岐パラメータと固定点は、分岐曲線を追跡するための初期値となる。次に、推定したパラメータ空間上で分岐曲線を追跡するアルゴリズムについて述べる。その後、エノン写像に対して本手法を適用したシミュレーション実験の結果を示す。最後に既知の系にニュートン法が適用可能であるが本手法にニュートン法が使えない理由を考察する。ここで、分岐点追跡のための更新式にKawakami らはニュートン法を用いたが、ニュートン法を本手法に適用すると更新式が発散、または、収束しない結果となるため、本手法では減速ニュートン法を適用した。

6.1 分岐点探索の基本

分岐図再構成の分岐パラメータである推定ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ を用いて式 (4.12) の入出力関数を

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{g}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{x}(t)) = G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x}(t)) \quad (6.1)$$

に変更する。本章では、離散時間の力学系を対象とするが、式 (6.1) をポアンカレ写像と考える事で連続時間の力学系に対しても本手法が適用が可能である。

式 (6.1) の H 周期点を

$$F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = G^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) - \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

とする。ここで、 \mathbf{s} は初期状態ベクトルである。式 (6.1) の固定点の特性方程式は

$$\kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) - \eta I\right) = 0 \quad (6.3)$$

である。ここで、 $\boldsymbol{\varphi}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})$ は、 $G(\boldsymbol{\gamma}, \cdot)$ により初期状態ベクトル \mathbf{s} が n 回写像されたベクトルである。また、 I は単位行列である。固有値 η_1 と η_2 は式 (6.3) の 2 根を求める事により得られる。表 2.1 を参照すると、固有値 η_1 と η_2 から固定点の特性がわかる。さらに、 $|\eta_1| = 1$ 、または、 $|\eta_2| = 1$ の時に分岐現象が発生する。ここで、対象の分岐により式 (6.3) の η は下記のように設定する。

- $\eta = 1$: 周期倍分岐
- $\eta = -1$: 接線分岐
- $\eta = e^{i\theta}$: ホップ分岐, または, ネイマルク-サッカ-分岐

初期状態ベクトル \mathbf{s} と推定ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ の偏微分の 1 次と 2 次の変分方程式は下記から得られる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n+1, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(n+1, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) + \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}^2}(n+1, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}^2}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})\right)^2 \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s} \partial \boldsymbol{\gamma}}(n+1, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) &= \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s} \partial \boldsymbol{\gamma}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) \\ &+ \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2}(n+1, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) &= \frac{\partial G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})\right)^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\gamma}} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(n, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) + \frac{\partial^2 G(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

ここで、変分方程式の初期値は下記を設定する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(0, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) &= I, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(0, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}^2}(0, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s} \partial \boldsymbol{\gamma}}(0, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) &= \mathbf{0}, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2}(0, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

6.2 分岐パラメータと固定点の探索

減速ニュートン法を用いた分岐パラメータと固定点の探索方法を示す。本手法が基にしている Kawakami の探索法はニュートン法を用いたが、ニュートン法を分岐図再構成で推定したパラメータ空間上で適用すると発散、または、収束しない結果となるため、本手法では減速ニュートン法を用いる。本節で求めた分岐パラメータと固定点は、次節の分岐曲線を追跡するための初期値として使用する。

式 (6.2) の固定点の条件式を満たすように固定点を計算する。減速ニュートン法のためのヤコビ行列は、

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial f^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} - I \quad (6.9)$$

により求める。ここで、 $\frac{\partial f^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}}$ は式 (6.4) の変分方程式を H 回繰り返す事により得られる。すなわち、 $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(H, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})$ である。減速ニュートン法の更新式は

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(k+1) &= \mathbf{s}(k) + \epsilon(k) \mathbf{u}(k), \quad (n = 1, 2, \dots) \\ \mathbf{u}(k) &= - \left(\frac{\partial F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}(k))}{\partial \mathbf{s}(k)} \right)^{-1} \cdot F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}(k)) \\ \epsilon(k) &= \frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned} \quad (6.10)$$

とする。また、減速ニュートン法の収束条件は

$$|F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}(k+1))| < \left(1 - \frac{\epsilon(k)}{4} |F(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}(k))| \right) \quad (6.11)$$

とする。

本手法のアルゴリズムを下記に示す。

1. 再構成した分岐図のパラメータである推定ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ と状態ベクトル \mathbf{x} の初期値を設定する。本研究では、推定ベクトルの初期値は分岐点の近くで設定する。また、状態ベクトルの初期値は初期値に設定した推定ベクトルで生成した時系列の状態値を使用する。
2. 推定ベクトルの一つの要素を微小変化させる。
3. 式 (6.4) の $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(H, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})$ を計算する。
4. 減速ニュートン法により、式 (6.10) を用いて状態ベクトルを固定点に近付くように更新する。

5. 式 (6.11) の収束条件を満たすまで 3. と 4. を繰り返す.
6. 式 (6.3) を満たしていない場合, 2. に戻る. 式 (6.3) を満たしている場合, その時の推定ベクトルと状態値を $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ と $\hat{\mathbf{s}}$ とし, 次節の分岐曲線の追跡の初期値に使用する.

6.3 推定したパラメータ空間上での分岐曲線の追跡

分岐図再構成により推定したパラメータ空間上での減速ニュートン法を用いた分岐曲線の追跡方法を示す. 本節では, 本章で対象とする力学系のエノン写像へ適用する事を考え, 2次元パラメータ空間を持つ2次元写像の力学系を対象として説明を行う.

H 周期点と特性方程式の条件式は式 (6.2) と式 (6.3) である. これらの式は合わせて3個になるため未知の変数を3個とする. 従って, 3個の未知変数は, 2個の状態値と1個のパラメータとする. 本章では2次元パラメータ空間を対象とするため, 2個のパラメータのうち1個を固定し別のパラメータを未知変数 γ_j とし, 分岐曲線を追跡する. 減速ニュートン法のためのヤコビ行列は

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} & \frac{\partial F_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial F_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} & \frac{\partial F_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} & \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} - 1 & \frac{\partial f_1^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} & \frac{\partial f_1^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial f_2^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} - 1 & \frac{\partial f_2^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} & \frac{\partial \kappa(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.12)$$

である. $G_i(\cdot, \cdot)$ は i 番目の出力ニューロンの出力を計算するための関数である. $\frac{\partial f_i^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_j}$ と $\frac{\partial f_i^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j}$ は式 (6.4) と式 (6.5) の変分方程式を H 回繰り返す事により得られる. ここで, $\frac{\partial f_i^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_j}$ と $\frac{\partial f_i^H(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j}$ は, それぞれ, 式 (6.4) の $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{s}}(H, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})$ と式 (6.5)

の $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\gamma}}(H, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})$ の i 列 j 行の要素と対応する。式 (6.3) から、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_j} &= \frac{\partial}{\partial s_j} \det(Df(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s}) - \eta I) \\
&= \frac{\partial}{\partial s_j} \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} - \eta & \frac{\partial G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} \\ \frac{\partial G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} & \frac{\partial G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} - \eta \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\eta^2 - \eta \left(\frac{\partial G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} + \frac{\partial G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} \frac{\partial G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} - \frac{\partial G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2} \frac{\partial G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1} \right) \\
&= -\eta \left(\frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial s_j} + \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial s_j} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial s_j} \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial s_j} - \frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial s_j} \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial s_j} \quad (6.13)
\end{aligned}$$

同様に, $\frac{\partial \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial \gamma_j} &= -\eta \left(\frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial \gamma_j} + \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial \gamma_j} \right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial \gamma_j} \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial \gamma_j} - \frac{\partial^2 G_1(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_2 \partial \gamma_j} \frac{\partial^2 G_2(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{s})}{\partial s_1 \partial \gamma_j} \quad (6.14)
\end{aligned}$$

である。これらの式は、式 (6.6)–(6.8) の 2 次の変分方程式を用いることにより計算できる。減速ニュートン法の更新式は、

$$\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ \gamma_j(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \gamma_j(k) \end{bmatrix} + \epsilon(k) \mathbf{u}(k) \quad (6.15)$$

$$\mathbf{u}(k) = -\Phi^{-1}(\boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \cdot \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \\ F_2(\boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \\ \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \end{bmatrix}$$

$$\epsilon(k) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

である。収束条件は、

$$\begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{\gamma}(k+1), \mathbf{s}(k+1)) \\ F_2(\boldsymbol{\gamma}(k+1), \mathbf{s}(k+1)) \\ \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}(k+1), \mathbf{s}(k+1)) \end{bmatrix} < \left(1 - \frac{\epsilon(k)}{4} \begin{bmatrix} F_1(\boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \\ F_2(\boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \\ \kappa(\eta, \boldsymbol{\gamma}(k), \mathbf{s}(k)) \end{bmatrix} \right) \quad (6.16)$$

とする。

本手法のアルゴリズムを下記に示す。

1. 6.2 節で計算した推定ベクトル $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ と状態ベクトル $\hat{\mathbf{s}}$ を初期値として設定する。

2. 推定ベクトル $\boldsymbol{\gamma}$ から未知変数とする分岐パラメータ γ_j を決定し、もう一方のパラメータを微小変化させる.
3. 式 (6.4)–(6.8) を H 回繰り返して変分方程式を更新する.
4. 減速ニュートン法により、式 (6.15) を用いて状態値と推定ベクトルを更新する.
5. 式 (6.16) の収束条件を満たすまで 3. と 4. を繰り返す.
6. 対象のパラメータレンジに到達しない場合、2. に戻る.

6.4 分岐曲線に関するシミュレーション実験

本節では、PBR アルゴリズムを用いたエノン写像の 2 次元パラメータ空間の再構成した分岐図とその分岐曲線の結果を示す. 初めにシミュレーション条件の説明をする. その後、エノン写像の 2 次元パラメータ空間の真の分岐図と再構成した分岐図を示す. 最後に、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間上で分岐曲線を追跡した結果を示す.

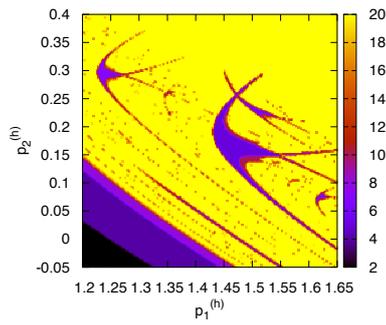
6.4.1 実験条件

式 (4.17) のエノン写像を対象とし時系列のみからパラメータ空間を推定し、その分岐曲線を探索する. 本シミュレーションの実験条件として、時系列は $x_1^{(h)}$ のみ計測されたと仮定してパラメータ次元推定を行う. 本実験は、式 (5.17) によりパラメータを決定し 6 組の時系列を生成する. また、各時系列の長さは 1000 ステップとした.

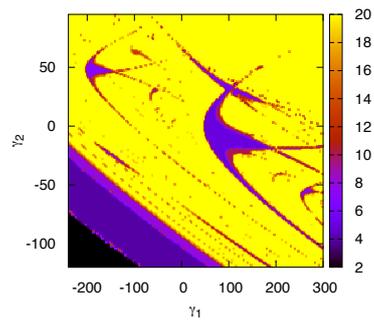
時系列の学習に使用した ELM の入力層と出力層のニューロン数は共に 2 個、中間層のニューロン数は 6 個とした. この場合、ELM は入力が $x_1^{(h)}(t)$ と $x_1^{(h)}(t-1)$ の時、 $x_1^{(h)}(t+1)$ と $x_1^{(h)}(t)$ を出力するように学習を行う. 式 (3.3) のシグモイド関数のパラメータ v_1 , v_2 , v_3 は、それぞれ、3, 1.5, 1 に設定した.

6.4.2 真の分岐図と再構成分岐図の比較

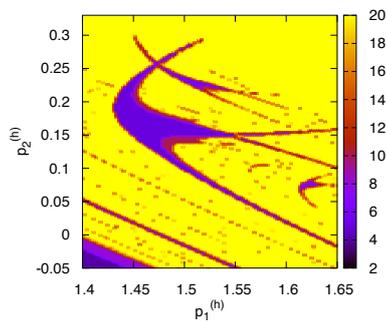
図 6.1(a) と (b) は、それぞれ、絨毯爆撃法で作成した真の分岐図と再構成した分岐図を示す. ここで、20 周期以上の周期解、カオス解、発散するパラメータは 20 周期解としてプロットした. 図 6.1(c) と (d) は、それぞれ、分岐曲線を追跡する対象のパラメータ空間の範囲の真の分岐図と再構成した分岐図を示す. 対象のパラメータ空間の範囲は、5 周期解のフィッシュフックを中心とした.



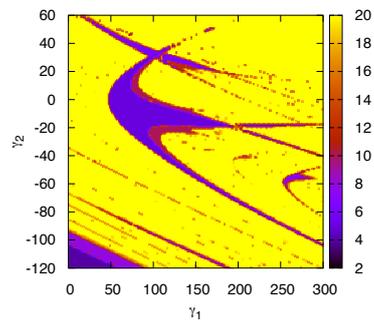
(a) 真のパラメータ空間



(b) 推定したパラメータ空間



(c) 対象範囲の真のパラメータ空間



(d) 対象範囲の推定したパラメータ空間

図 6.1: エノン写像の 2 次元パラメータ空間の分岐図

6.4.3 真の分岐図と再構成分岐図に対する分岐曲線

本研究では、以下の分岐曲線を追跡する。

- 5 周期の接線分岐: 黒線
- 6 周期の接線分岐: 青線
- 7 周期の接線分岐: 緑線
- 5 周期から 10 周期の周期倍分岐: 黒破線
- 6 周期から 12 周期の周期倍分岐: 青破線
- 7 周期から 14 周期の周期倍分岐: 緑破線
- 10 周期から 20 周期の周期倍分岐: 赤破線
- 20 周期から 40 周期の周期倍分岐: 黄破線

図 6.2(a) と (b) に真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間上での分岐曲線を示す。ここで、図 6.2(a) は Kawakami [32] により提案された既知の系に対する探

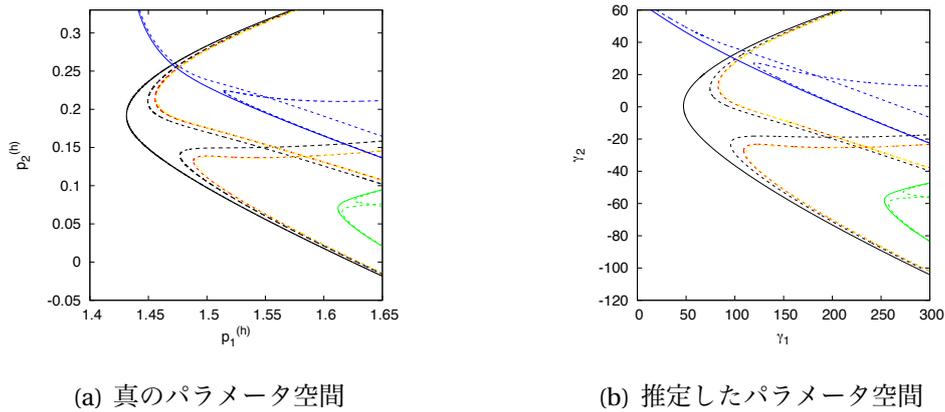


図 6.2: エノン写像の分岐曲線

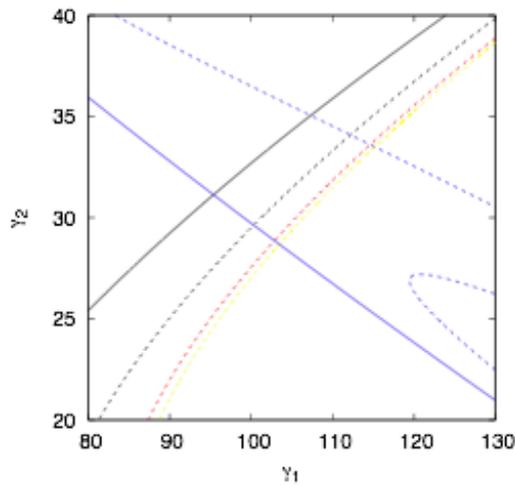


図 6.3: 図 6.2(b) の 5 周期解と 6 周期解が重なるパラメータ領域の拡大図

索方法により分岐曲線を作成した。これらの図を比較すると、分岐曲線が対応している事がわかる。さらに、図 6.2(b) の分岐曲線と図 6.1(d) の分岐図を比較すると、推定したパラメータ空間上の分岐図と分岐曲線も対応している事がわかる。

分岐曲線を示すことにより、絨毯爆撃法を用いた分岐図と比べてより詳細な分岐曲線を得る事ができる。図 6.2(b) のフィッシュフックは、接線分岐と周期倍分岐から構成されていて、接線分岐と周期倍分岐によりカオス領域が発生している事がわかる。周期倍分岐の分岐曲線から、 $5 \rightarrow 10 \rightarrow 20 \rightarrow 40$ 周期と変化している事がわかる。また、図 6.1(d) の分岐点は途中で切れているが、図 6.2(b) の分岐曲線は途中で切れる事なく対象の範囲で追跡できている事がわかる。

次に、5 周期と 6 周期の解の共存について述べる。図 6.3 に、図 6.2(b) の 5 周期解と 6 周期解が重なるパラメータ領域を拡大する。分岐曲線から、5 周期と 6 周期の解が共存している事がわかる。この結果は、絨毯爆撃法によって作成した分岐図では得られなかった。これらの結果から、分岐曲線の追跡は対象の系の分岐構造を理解するのに非常に役立つ事がわかる。

6.5 分岐点曲線追跡への減速ニュートン法の適用

本研究では，推定したパラメータ空間上の分岐曲線の追跡のために減速ニュートン法を使用した．式 (6.10) と式 (6.15) の更新式にニュートン法を使用すると，収束しないか発散してしまう事が多くあった．収束しないか発散してしまう理由として，初期値が結果に大きな影響を与えるニュートン法の特徴が原因と考えられる．しかし，真の力学系の分岐曲線はニュートン法により追跡が可能のため，本節では真の力学系と分岐図再構成に用いた ELM の違いについて考察を行う．

真の力学系と分岐図再構成に用いた ELM のヤコビ行列の行列式を比較する．初めに，真の力学系のヤコビ行列の行列式は下記により計算できる．

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_1}{\partial a_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_1^2(t) & 0 \\ 0 & x_1(t) \end{vmatrix} = -x_1^3(t) \quad (6.17)$$

状態値 $x_1(t)$ の範囲を $[-1.5, 1.5]$ とした時の行列式の最大値は 3.375 となる．同様に，分岐図再構成のための ELM のヤコビ行列の行列式は下記により計算できる．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \gamma_2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \gamma_1} (\boldsymbol{\beta}_1^T \cdot \mathbf{h}(t)) & \frac{\partial}{\partial \gamma_2} (\boldsymbol{\beta}_1^T \cdot \mathbf{h}(t)) \\ \frac{\partial}{\partial \gamma_1} (\boldsymbol{\beta}_2^T \cdot \mathbf{h}(t)) & \frac{\partial}{\partial \gamma_2} (\boldsymbol{\beta}_2^T \cdot \mathbf{h}(t)) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{v}_1^{(1)})^T \cdot \mathbf{h}(t) & (\mathbf{v}_2^{(1)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \\ (\mathbf{v}_1^{(2)})^T \cdot \mathbf{h}(t) & (\mathbf{v}_2^{(2)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \end{vmatrix} \\ &= \left((\mathbf{v}_1^{(1)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \right) \left((\mathbf{v}_2^{(2)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \right) \\ &\quad - \left((\mathbf{v}_2^{(1)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \right) \left((\mathbf{v}_1^{(2)})^T \cdot \mathbf{h}(t) \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

隠れ層ニューロンの出力値 $\mathbf{h}(t)$ を最大値になるように設定した時，行列式の最大値は 0.685 となる．ここで状態ベクトルの範囲は $[-1.5, 1.5]$ とした．

真の力学系と分岐図再構成に用いた ELM のヤコビ行列の行列式を比較すると，エノン写像のヤコビ行列の行列式は，ELM のヤコビ行列の行列式より大きくなる事がわかる．しかし，対象の推定したパラメータ空間の範囲はエノン写像のパラメータ空間の範囲より値が非常に大きい．エノン写像のパラメータ空間の横軸と縦軸の範囲は，それぞれ， $[1.4, 1.63]$ と $[-0.05, 3.2]$ である．対応する推定したパラメータ空間の範囲の横軸と縦軸は，それぞれ， $[0, 300]$ と $[-120, 60]$ である．従って，推定したパラメータ空間の面積はエノン写像のパラメータ空間の面積より約 1.7×10^6 倍大きい．

これらの結果から，更新式の式 (6.10) と式 (6.15) は，初期値の影響によりニュートン法を使用するとしばしば発散または収束しないと考えられる．従って，減速ニュートン法は推定したパラメータ空間上の分岐曲線を追跡するために有用である．

第7章 結論

本研究は分岐図再構成の問題点を解決する事と分岐図再構成の有用性を示す事を目的とした。分岐図再構成の問題点である計算コストが高い点やパラメータ数が多い点は予測器としてELMを用いる事により解決した。また、SAP-ELMを用いる事で成功率の向上も達成した。さらに、手順を簡略化する主成分分析を用いない分岐図再構成の新しい手法の提案も行った。これらにより、初めて分岐図再構成を行う人に対しての難易度は下がったと考えられる。また、提案手法を用いた様々なカオス力学系の分岐図再構成、推定したパラメータ空間のダイナミクス解析を行い分岐図再構成の有用性を示した。本章では、本研究の成果および今後の課題についてまとめる。

7.1 ELMを用いたパラメータ空間の推定

学習が高速で汎化性の高いニューラルネットワークであるELMを用いて分岐図再構成を行った。分岐図再構成は対象の力学系のパラメータ空間を推定し、推定したパラメータ空間上で分岐図をプロットする。この推定したパラメータ空間と真のパラメータ空間が対応するため、プロットした分岐図も真の分岐図と対応する。

1994年にTokunagaらが時系列のみからの分岐図再構成を提案した。この手法は、時系列信号を学習したニューラルネットワークの結合荷重に対して主成分分析を行い、寄与率の高い主成分が真のパラメータ空間に対応する。この主成分上で分岐図をプロットすると、真の分岐図と定性的に同等の分岐図が得られる。しかし、この手法は誤差逆伝播法を学習則としたニューラルネットワークを予測器として用いるため学習に時間がかかる。また、誤差逆伝播法は逐次学習のため局所解にしばしば陥るといった問題点が挙げられる。分岐図再構成は複数の時系列を学習する必要があるため、局所解の問題を解決する事は非常に重要である。

本研究は、予測器としてELMを用いて分岐図再構成を行った。ELMの学習法は行列演算により結合荷重を決定するため、学習が高速になり局所解に陥る事もない。同条件下でTokunagaらの手法とELMを用いた提案手法の分岐図再構成を行い計算コストを比較すると、約1000倍程度の高速化に成功した。離散時間の力学系、連続時間の自励系、連続時間の非自励系の分岐図再構成を行い、ELMを用いて様々な力学系に対して分岐図を再構成できる事を示した。様々な系に対して分岐図再構成を行う中で、標準的なELMが時系列信号を学習できない力学系も存在した。例えばカオスニューロンモデルである。カオスニューロンモデルの入出力関係は0付近に勾配が大きい事が特徴である。カオスニューロンモデルを学習でき

ない理由として、ELMの特徴である隠れ層ニューロンの結合荷重を学習しない事が原因と考えられ、勾配の大きい入出力関係を出力層ニューロンの結合荷重のみを学習する事で汎化性が低いモデリングになると考えられる。本研究では、ELMの特徴を変えずにカオスニューロンモデルの時系列を学習するために隠れ層の結合荷重の乱数生成の範囲を変更しカオスニューロンの時系列予測が可能になる事を示した。乱数生成の範囲を変更する事により様々な勾配の入出力関係を持った隠れ層ニューロンが生成できるため、汎化性が高いモデリングが可能となる。この結果を用いて分岐図再構成を行い、真の分岐図と対応した再構成分岐図を得られた。

また、ELMは他のニューラルネットワークと比較するとパラメータ数が少ないが、最適な隠れ層のニューロン数を設定しないと分岐図再構成の成功率が極端に下がる事を確認した。最適な隠れ層ニューロン数を設定するためにYingとFan-junが提案したセンシティブティ解析による刈込を行ったELMを用いて分岐図再構成を行った。刈込手法を適用しない標準的なELMを用いて分岐図再構成を行うと最適な隠れ層のニューロン数を設定した時だけ成功率が高いが、刈込を行う事により刈込前の隠れ層のニューロン数を最適な数に設定しないでも高い成功率が得られた。

推定したパラメータ空間のダイナミクス解析としてリアプノフ指数を推定した。リアプノフ指数を推定する事によりダイナミクスを定量的に評価できるため、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間のリアプノフ指数を比較した。対応するパラメータのリアプノフ指数を比較し、同等の値を得られる、または、対応点付近に同等の値が存在する事を確認した。対応する点で同等のリアプノフ指数を得られると分岐図の再構成精度が高くなると考えられるため再構成精度の一つの指標になる。また、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間のリアプノフ指数は全体的にほぼ同等の値を得られたため、推定したパラメータ空間は真の分岐図と定性的に同等の分岐図が得られるだけでなくパラメータ空間を含めたダイナミクスが同定できているといえる。

7.2 再構成した分岐図の定量的な比較方法

再構成した分岐図同士を定量的に比較するための手法を提案した。本比較手法は分岐構造に着目するため、周期解からカオス解へのルートや窓の周期数を比較する。本比較手法の有用性を示すために、分岐パスの点数を5,7,9に設定した時の再構成分岐図の比較とTokunagaらの手法により再構成した分岐図とELMを用いて再構成した分岐図の比較を行った。分岐パスの点数を変更した結果は、使用する分岐パスの点数を増やした時の再構成分岐図の方が再構成精度が高い結果を得られた。また、本結果は再構成した分岐図同士の定性的な比較とも一致した。Tokunagaらの手法とELMを用いた時の比較は、本研究で行った実験条件ではELMの方が再構成精度が高い結果を得られた。この結果より、ELMを用いた分岐図再構成はTokunagaらの手法と比べて計算が高速なだけでなく再構成精度も高い事を示せた。

7.3 主成分分析を用いない分岐図再構成の新しい手法

1999年に Bagarinao らが提案した PFB アルゴリズムを基にした新しい分岐図再構成の手法を提案した。本手法の特徴は、主成分分析を使用せずに分岐図再構成を行う事により手順を簡略化させた事である。本手法の有用性を示すために、様々な系に対して分岐図再構成を行った。特に、Bagarinao らの手法では LIP の系に対象が限定されていたが、本手法は non-LIP の系であるレスラー方程式に対しても適用できる事を示した。さらに、実在の non-LIP の系であるモータドライブの数値モデルと生態系の植生バイオマスのモデルの分岐図再構成を行った。生態系の植生バイオマスのモデルの分岐図は、他の系と違いカオス領域を持たないがサドル-ノード分岐により状態が突然切替る分岐現象が特徴である。この分岐図を再構成できる事が示されたため、状態値が突然切替るパラメータを推定する異常検知への応用が期待できる。

7.4 推定したパラメータ空間の分岐点探索

Kawakami により提案されたパラメータ空間上で分岐曲線を追跡する方法を未知の力学系へ適用した。未知の力学系へ適応するために、分岐図再構成で推定したパラメータ空間上で分岐曲線を追跡する。本手法の有用性を示すために、エノン写像の2次元パラメータ空間を推定し、その推定したパラメータ空間の分岐曲線を追跡した。分岐曲線を示す事により、絨毯爆撃法を用いた分岐図と比べてより詳細な分岐構造が得られた。例えば、分岐図の特徴であるフィッシュフックは接線分岐と周期倍分岐から構成されていて接線分岐と周期倍分岐によりカオス領域が発生している事がわかる。特に、絨毯爆撃法ではプロットできていない小さい周期領域が分岐曲線を追跡する事で確認できた。また、絨毯爆撃法では確認できない解が共存する領域も確認できた。これらの結果から、分岐曲線の追跡は対象の系の分岐構造を理解するために非常に役立つ事がわかる。さらに、周期倍分岐などの分岐の種類も特定できるため、本手法の結果を基にパラメータを用いた制御への応用が期待できる。

7.5 今後の課題と展望

本研究では離散時間の力学系、連続時間の自励系、連続時間の非自励系の分岐図再構成を行い、様々な系に対して分岐図を再構成できる事を示した。今後は実問題への適用を考慮し、実データを用いて分岐図再構成を行う。本研究の計測データを用いた分岐図再構成は連続時間の自励系であるレスラー方程式を対象としたが、今後は離散時間の力学系と連続時間の非自励系を対象にする予定である。さらに、未知の系への適用も行いたい。

本研究で対象とした系の中では、3次元パラメータ空間を持つ3次の系であるレスラー方程式、1次元パラメータ空間を持つ4次の系であるモータドライブの数

理モデルが複雑な系といえる。しかし、実問題の系はより複雑であると考えられるため、実問題に適用するためにさらに複雑な系に対応できるようなモデルを提案する必要がある。

様々な系へ適用する中で標準的な ELM では時系列を学習できない系が見つかった。本研究では、隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を変更する事により ELM の特徴を変えずに学習できる方法を提案した。本研究では試行錯誤して最適な乱数生成範囲を決定したが、未知の系に対して適用するために乱数生成の範囲の決定方法を提案する必要がある。本研究のシミュレーション実験から最適な結合荷重の範囲を設定した場合、出力ニューロンの出力行列のランクが大きくなる傾向にある事を確認した。この結果を応用して乱数生成の範囲を決定する事ができると考えられる。例えば、出力ニューロンの出力行列のランクが大きくなる事を目的関数とした遺伝的アルゴリズム [73] 等の最適化手法が考えられる。最適な乱数生成範囲を決定できる事は非常に有用であるため、決定方法を提案する。

本研究にて分岐図再構成の新しい手法を提案したが、Tokunaga らの手法と比較ができていない。主成分分析を行わない事や分岐図再構成に必要な時系列信号が減っているため計算コストが減る事が期待できる。また、Tokunaga らの手法は結合荷重を主成分分析により次元縮約するが、提案手法は学習した結合荷重の値を次元縮約する事なく使用できるため再構成精度の向上も期待できる。しかし、主成分分析により次元縮約した方がパラメータ空間に対する汎化性が向上する可能性があるため再構成精度の比較が必要であり、今後の課題としたい。

実在のデータを考えると、未知の外部入力の変動しながら計測された 1 組の時系列である事が多い。外部入力は数学的にパラメータと同等と考える事ができるので本研究を用いて未知の外部入力を推定する事が可能だと考えられる。従って、今後は外部入力（パラメータ）が変動する 1 組の時系列信号のみから外部入力を推定してその動特性を明らかにする。外部入力を受ける系から観測される時系列信号は数多く存在する。例えば、地球規模の変化で徐々に外部入力が増加する系である。気候変動を例にすると、気候変動の要因として、「内部変動」、「自然由来の外部要因」、「人間活動に由来する外部要因」が挙げられる [74] が、これらがどの程度影響を及ぼしているかわかっていない [75]。本手法を用いて、外部入力を推定できれば、どの要因が強いのかのかわかり、気候変動に対する対策が進むと考えられる。今後の研究は、このような状況を想定して進めたいと考えている。

関連図書

- [1] 池口徹, 山田泰司, 小室元政. カオス時系列解析の基礎と応用. 産業図書, 2000.
- [2] 気象庁. <https://www.jma.go.jp>.
- [3] JESEA 地震科学探査機構. <https://www.jesea.co.jp>.
- [4] 桑津浩太郎. 2030 年の IoT. 東洋経済新報社, 2015.
- [5] TEPCO 東京電力ホールディングス. <http://www.tepco.co.jp>.
- [6] 前田俊輔. 遠隔医療が高齢者医療を救う AI が開く個別化医療の時代. 株式会社 PHP 研究所, 2017.
- [7] 合原一幸. 応用カオス カオスそして複雑系へ挑む. サイエンス社, 1994.
- [8] I. Shimada and T. Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 61, No. 6, pp. 1605–1616, 1979.
- [9] M. Sano and Y. Sawada. Measurement of the lyapunov spectrum from chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 55, No. 10, pp. 1082–1085, 1985.
- [10] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica*, Vol. 16D, pp. 285–317, 1985.
- [11] 高安秀樹. フラクタル科学. 朝倉書店, 1987.
- [12] 松本隆, 徳永隆治, 宮野尚哉, 徳田功. カオスと時系列. 培風館, 2002.
- [13] G. Undy Yule. On a method of investigating periodicities in distributed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, Vol. 226, pp. 267–298, 4 1927.
- [14] H. Jaeger. *A tutorial on training recurrent neural networks, covering BPPT, RTRL, EKF and the "echo state network" approach*. GMD-Report 159, German National Research Institute for Computer Science, 2002.
- [15] G. B. Huang, Q. Y Zhu, and C. K. Siew. Extreme learning machine: Theory and applications. *Neurocomputing*, Vol. 70, pp. 489–501, 2006.

- [16] Yoshito Hirata, Tomoya Takeuchi, Shunsuke Horai, Hideyuki Suzuki, and Kazuyuki Aihara. Parsimonious description for predicting high-dimensional dynamics. *Scientific Reports*, Vol. 5, p. 15736, 2015.
- [17] R. Tokunaga, S. Kajiwara, and S. Matsumoto. Reconstructing bifurcation diagrams only from time-waveforms. *Physica D*, Vol. 79, pp. 348–360, 1994.
- [18] I. Tokuda, S. Kajiwara, R. Tokunaga, and T. Matsumoto. Recognizing chaotic time-waveforms in terms of a parametrized family of nonlinear predictors. *Physica D*, Vol. 95, pp. 380–395, 1996.
- [19] Satoshi Ogawa, Tohru Ikeguchi, Takeshi Matozaki, and Kazuyuki Aihara. Non-linear modeling by radial basis function networks. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E79-A, No. 130, pp. 1608–1617, 1996.
- [20] E. Bagarinao, K. Pakdaman, T. Nomura, and S. Sato. Time series-based bifurcation diagram reconstruction. *Physica D*, Vol. 130, pp. 211–231, 1999.
- [21] E. Bagarinao, K. Pakdaman, T. Nomura, and S. Sato. Reconstructing bifurcation diagrams from noisy time series using nonlinear autoregressive models. *Phys. Rev. E*, Vol. 60, No. 1, pp. 1073–1076, 1999.
- [22] E. Bagarinao, K. Pakdaman, T. Nomura, and S. Sato. Reconstructing bifurcation diagrams of dynamical systems using measured time series. *Method Inform Med*, Vol. 39, pp. 146–149, 2000.
- [23] G. Langer and U. Parlitz. Modeling parameter dependence from time series. *Phys. Rev. E*, Vol. 70, p. 056217, 2004.
- [24] R. M. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, Vol. 261(5569), pp. 459–467, 1976.
- [25] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 50(1), pp. 69–77, 1976.
- [26] Cristian Constantin Lalescu. Patterns in the sine map bifurcation diagram. *arXiv preprint arXiv:1011.6552*, 2010.
- [27] O.E.Rössler. Continuous chaos. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*31, Vol. 35, pp. 376–392, 1979.
- [28] E.N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130–141, 1963.
- [29] Thomas D. Rogers and David C. Whitley. Chaos in the cubic mapping. *Mathematical Modelling*, Vol. 4, No. 1, pp. 9–25, 1983.

- [30] FitzHugh Richard. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical journal*, Vol. 1, No. 6, pp. 445–466, 1961.
- [31] J. Nagumo, J. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, Vol. 50, No. 10, pp. 2016–2070, 1962.
- [32] H. Kawakami. Bifurcation of periodic responses in forced dynamic nonlinear circuits: Computation of bifurcation values of the system parameters. *IEEE Trans. Circuits and systems*, Vol. CAS031, No. 3, pp. 248–260, 1984.
- [33] M. B. Kennel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Phys. Rev. A*, Vol. 45, No. 6, pp. 3403–3411, 1992.
- [34] Florias Takens. *Detecting strange attractors in turbulence*, Vol. 898. Springer, 1981.
- [35] L. Ying and L. Fan-jun. A pruning algorithm for extreme learning machine. In *Proceedings of International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning*, pp. 1–7, 2013.
- [36] Andrea R. Zeni and Jason A.C. Gallas. Lyapunov exponents for a duffing oscillator. *Physica D*, Vol. 89, pp. 71–82, 1995.
- [37] Tian-Liang Yao, Hai-Feng Liu, Jian-Liang Xu, and Wei-Feng Li. Estimating the largest lyapunov exponent and noise level from chaotic time series. *Chaos*, Vol. 22, pp. 033102–1–9, 2012.
- [38] M. Adachi and M. Kotani. Identification of chaotic dynamical systems with back-propagation neural networks. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E77-A, No. 1, pp. 324–334, 1994.
- [39] V. I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions and reversals. *Soviet physics doklady*, Vol. 10, pp. 707–710, 1966.
- [40] 合原一幸. カオス学入門. 放送大学教材, 2001.
- [41] Y. Lan, Z. Hu, Y. C. Soh, and G. B. Huang. An extreme learning machine approach for speaker recognition. *Neural Computing and Applications, Springer*, Vol. 22, No. 3, pp. 417–425, 2013.
- [42] S. Poria, E. Cambria, N. Howard, G. B. Huang, and A. Hussain. Fusing audio, visual and textual clues for sentiment analysis from multimodal content. *Neurocomputing*, Vol. 174, pp. 50–59, 2016.

- [43] S. Wang, C. Deng, B. Zhao, G. B. Huang, and B. Wang. Gradient-based no-reference image blur assessment using extreme learning machine. *Neurocomputing*, Vol. 174, pp. 310–321, 2016.
- [44] K. Sum, Y. Yu, and Z. Huang. A generalizaed pruning algorithm for extreme learning machine. In *2015 IEEE International Conference on Information and Automation*, 2015.
- [45] Y. Miche, A. Sorjamaa, P. Bas, O. Simula, C. Jutten, and A. Lendasse. Op-elm: optimally pruned extreme learning machine. In *IEEE Transactions on Neural networks*, pp. 158–162, 2010.
- [46] A. Casta no, F. Fernández-Navarro, and C. Hervás-Martínez. Pca-elm: a robust and pruned extreme learning machine approach based on principal component analysis. *Neural processing letters*, pp. 377–392, 2013.
- [47] F. M. Pousols and A. Lendasse. Evolving fuzzy optimally pruned extreme learning machine: a comparative analysis. In *International Conference on Fuzzy Systems*, 2010.
- [48] K. Aihara, T. Takabe, and M. Toyoda. Chaotic neural networks. *Physics Letters A*, Vol. 144, pp. 333–340, 1990.
- [49] 堀尾喜彦, 安達雅治, 池口徹. カオスニューロ計算. 近代科学社, 2012.
- [50] P. L. Bartlett. For valid generalization, the size of the weights is more important than the size of the network. *Advances in neural information processing systems*, pp. 134–140, 1997.
- [51] 伊藤佳卓. エコーステートネットワークを用いた分岐図再構成. 東京電機大学大学院工学研究科修士論文, 2011.
- [52] Y. Tada and M. Adachi. Reconstruction of bifurcation diagrams using extreme learning machines. *2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*, 2013.
- [53] 横山貴紀, 渡辺俊典, 菅原研, 上野芳郎. フラクタル符号に基づく構造的な類似性抽出手法の提案. 電子情報通信学会技術研究報告 : 信学技報, Vol. 101, No. 713, pp. 105–112, 2002.
- [54] Y. Itoh and M. Adachi. A quantitative method for evaluating reconstructed one-dimensional bifurcation diagrams. *Journal of Computers*, Vol. 13, No. 3, pp. 271–278, 2018.

- [55] Y. Itoh, Y. Tada, and M. Adachi. Reconstructing bifurcation diagrams with Lyapunov exponents from only time-series data using an extreme learning machine. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, Vol. 8, No. 1, pp. 2–14, 2017.
- [56] Y. Itoh and M. Adachi. Reconstruction of bifurcation diagrams using an extreme learning machine with a pruning algorithm. In *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks*, pp. 1809–1816, 2017.
- [57] D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, Vol. 323(6088), pp. 533–536, 1986.
- [58] A Rössler Attractor Circuit. <http://www.glenstuff.com/rosslerattractor/rossler.htm>.
- [59] Y. Itoh and M. Adachi. Bifurcation diagrams in estimated parameter space using a pruned extreme learning machine. *Physical Review E*, Vol. 98, pp. 013301–1–12, 2018.
- [60] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, Vol. 9D, pp. 189–208, 1983.
- [61] K. Chakrabarty and U. Kar. Bifurcation and control of chaos in induction motor drives. *Cornell University Library, Nonlinear Sciences: Chaotic Dynamics, arXiv*, 2014.
- [62] R. M. May. Thresholds and breakpoints in ecosystems with a multiplicity of stable states. *Nature*, Vol. 269, No. 6, pp. 471–477, 1977.
- [63] Guttal V. and Jayaprakash C. Changing skewness: an early warning signal of regime shifts in ecosystems. *Ecology Letters*, Vol. 11, pp. 450–460, 2008.
- [64] S. J. Lade and T. Gloss. Early warning signals for critical transitions: A generalized modeling approach. *PLoS Computational Biology*, Vol. 8, No. 2, 2012.
- [65] Rui Liu, Pei Chen, Kazuyuki Aihara, and Luonan Chen. Identifying early-warning signals of critical transitions with strong noise by dynamical network markers. *Scientific Reports*, Vol. 5, pp. 17501 1–13, 2015.
- [66] Reinette Biggs, Stephen R Carpenter, and William A Brock. Turning back from the brink: detecting an impending regime shift in time to avert it. *Proceedings of the National academy of Sciences*, Vol. 106, No. 3, pp. 826–831, 2009.
- [67] 北島博之, 川上博. 接線分岐曲線を自動追跡できるアルゴリズムとその duffing 方程式への応用. 電子情報通信学会論文誌. A, 基礎・境界, Vol. 78, No. 7, pp. 806–810, 1995.

- [68] 川上博, 松尾次郎. ダフティング方程式にみられる周期解の分岐集合. 電子通信学会論文誌 A, Vol. 64, No. 12, pp. 1018–1025, 1981.
- [69] 川上博, 上田哲史. C によるカオス CG. サイエンス社, 1995.
- [70] T. Ueta, M. Tsueike, H. Kawakami, T. Toshinaga, and Y. Katsura. A computation of bifurcation parameter values for limit cycles. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol. E80-A, No. 9, pp. 1725–1728, 1997.
- [71] T. Kousaka, T. Ueta, and H. Kawakami. Bifurcation of switched nonlinear dynamical systems. *IEEE Trans. Circuits and systems-II*, Vol. 46, No. 7, pp. 878–885, 1999.
- [72] H. Matsushita, Y. Tomimura, H. Kurokawa, and T. Kousaka. Period doubling bifurcation point detection strategy with nested layer particle swarm optimization. *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 27, No. 7, pp. 1750101–1–16, 2017.
- [73] 伊庭斉志. 遺伝的アルゴリズムの基礎. オーム社, 1994.
- [74] 田家康. 異常気象で読み解く現代史. 日本経済新聞出版社, 2016.
- [75] IPCC. 5th assessment report. *WG1 10.3.1.1.3*, 2013.
- [76] Y. Itoh and M. Adachi. Reconstructing bifurcation diagrams of chaotic neuron model using an extreme learning machine. *The 9th International Conference on Extreme Learning Machines*, 2018.
- [77] Y. Itoh and M. Adachi. Reconstructing bifurcation diagrams of the duffing equations. *2018 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, pp. 243–246, 2018.
- [78] A.R. Zeni and J.A.C. Gallas. Lyapunov exponents for a duffing oscillator. *Physica D*, Vol. 89, pp. 71–82, 1995.
- [79] Y. Itoh and M. Adachi. Reconstructing bifurcation diagrams of induction motor drives using an extreme learning machine. *The 8th International Conference on Extreme Learning Machines*, 2018.

付録A 刈込手法を用いたELMに対する考察

本付録では、ELMとSAP-ELMの時系列予測の精度を比較してSAP-ELMを用いた分岐図再構成の精度が向上した事に対する考察を行う [56]。4.6.1.4の結果から、ELMを用いた分岐図再構成は適切な隠れ層のニューロン数を設定しない場合に成功率が急激に下がる事がわかる。ELMに対してSAP-ELMは隠れ層のニューロン数を多めに設定してから刈込手法を適用するため、刈込後のELMが最適なネットワーク構造になるため成功率が向上したと考えられる。ELMとSAP-ELMを用いた時系列予測の結果を示し、本結果を考察する。また、本付録の初めにロジスティック写像と同様の結果が得られるか確かめるためにサイン写像に対して4.6.1.4と同様のシミュレーション実験を行う。

A.1 ELMとSAP-ELMによるサイン写像の分岐図再構成の成功率の比較

サイン写像 [26] は、

$$x^{(s)}(t+1) = \sin\left(p_1^{(s)} x^{(s)}(t)\right) + p_2^{(s)} \quad (\text{A.1})$$

で表され、 $p_1^{(s)}$ と $p_2^{(s)}$ はパラメータである。本シミュレーション実験は1次元の分岐図を対象とするため $p_1^{(s)} = 2$ で固定し、 $p_2^{(s)}$ を分岐パラメータとして使用する。 $p_2^{(s)} = p_{2,n}^{(s)}$ として、分岐図再構成に使用する時系列 $S_n (n = 1, \dots, P = 9)$ を生成するパラメータは、

$$p_{2,n}^{(s)} = -0.1 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 0.8, (n = 1, \dots, P) \quad (\text{A.2})$$

とする。サイン写像の時系列の学習に用いたELMの入力層と出力層のニューロン数は、共に1個とした。式(3.3)のシグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、2, 1, 1に設定した。

表A.1にELMを用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率を示す。本シミュレーション実験は、隠れ層のニューロン数を4, 6, 8, 10個に設定したELMを使用し比較を行う。ロジスティック写像のシミュレーション実験と同様に、分岐図再構成が成功した時のレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差も示す。サイン写像の分岐図再構成の成功条件は、レーベンシュタイン距離が10以下とした。レーベンシュ

タイム距離が10以下の時、サイン写像の分岐図が十分に再構成できている事を定性的に確認した。ここで、分岐パラメータの範囲は開始点 $p^{(start)}$ を $p_{1,1}^{(s)}$ 、終了点 $p^{(end)}$ を $p_{1,5}^{(s)}$ とし、式 (4.15) の分岐図をプロットするパラメータ数 $L^{(parameter)}$ は100とした。

表 A.1 から最適な隠れ層ニューロン数は成功率が高い6個である。隠れ層ニューロン数が6個以外の時は成功率が低い事からも、分岐図再構成を行うためには最適な隠れ層ニューロン数を設定する必要があるがサイン写像のシミュレーション実験からもわかる。隠れ層ニューロン数の違いによるレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差の優位な差はみられないため、分岐図再構成の精度は隠れ層のニューロン数の変化による影響は無いといえる。

表 A.1: 隠れ層のニューロン数を変化させた時の ELM を用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率

	隠れ層のニューロン数			
	4	6	8	10
分岐図再構成の成功率 (%)	9	76	15	22
レーベンシュタイン距離の平均	7.25	6.31	6.36	6.55
レーベンシュタイン距離の標準偏差	0.97	1.29	1.23	1.40

次に SAP-ELM を用いた場合の結果を示す。表 A.2 に SAP-ELM を用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率を示す。本シミュレーション実験は、隠れ層の初期ニューロン数を8,10,12,14個に設定した SAP-ELM を用いて比較を行う。その他の実験条件は ELM と同様である。ロジスティック写像のシミュレーション実験と同様、刈込後の隠れ層ニューロンの平均数、分岐図再構成が成功した時のレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差も示す。

表 A.2 から、SAP-ELM を用いた分岐図再構成は全体的に ELM を用いた場合より成功率が高くなった。ELM を用いると成功率が0.5以上の隠れ層ニューロン数は6個の時のみであるが、SAP-ELM を用いると隠れ層の初期ニューロン数が12以下の時に成功率が0.5以上となる。また、ロジスティック写像の結果と同様、ELM と SAP-ELM の間にレーベンシュタイン距離の平均値と標準偏差の優位な差はみられないため、分岐図再構成の精度は ELM と SAP-ELM を変える事による影響は無かった。

本シミュレーション実験により、ロジスティック写像と同様の結果がサイン写像でも得られた。

A.2 ELM と SAP-ELM によるロジスティック写像の時系列予測

本シミュレーション実験では、ELM と SAP-ELM による時系列のフリーラン予測の結果を比較する。時系列の予測精度が低い時に分岐図再構成は失敗するため、分

表 A.2: 隠れ層の初期ニューロン数を变化させた時の SAP-ELM を用いたサイン写像の分岐図再構成の成功率

	隠れ層の初期ニューロン数			
	8	10	12	14
刈込後の隠れ層ニューロン数	4.18	5.06	6.72	8.51
分岐図再構成の成功率 (%)	52	65	67	29
レーベンシュタイン距離の平均	7.17	6.22	4.64	4.72
レーベンシュタイン距離の標準偏差	3.51	1.72	1.51	1.23

岐図再構成を行う時に予測精度は重要となる。

式 (4.16) から得られるパラメータ $p^{(l)}$ を設定したロジスティック写像の時系列を予測対象とし、学習と予測に使用した時系列の長さは、それぞれ、1000 と 10 とした。ELM の隠れ層ニューロン数と SAP-ELM の刈込前の隠れ層ニューロンの数は共に 10 個とした。本予測の評価指標に式 (3.12) の平均平方二乗誤差を用いて、100 試行の実験の平均を比較する。ここで、ELM と SAP-ELM の学習は分岐図再構成の学習と同様の手順で行う。従って ELM を用いる場合、初めに隠れ層ニューロンの結合荷重とバイアスを一様乱数により生成し、その後、固定する。この ELM を用いて、各時系列 S_1, S_2, \dots, S_p の学習と予測を行う。全ての時系列の予測が完了した後、次の予測用に隠れ層ニューロンの結合荷重とバイアスを新しく生成し、次の予測を行う。SAP-ELM を用いる場合、初めに時系列 S_1, S_2, \dots, S_p の中からリアプノフ指数が一番大きい時系列を選択し、選択した時系列に対して刈込手法を ELM に適用する。その後、刈込した ELM を用いて各時系列 S_1, S_2, \dots, S_p の学習と予測を行う。全ての時系列の予測が完了した後、次の予測用に刈込手法を適用した新しい ELM を生成し、次の予測を行う。

表 A.3 にロジスティック写像の時系列に対する予測結果を示す。ELM と SAP-ELM 共に、全ての時系列に対して高い予測精度の結果を得られたが、SAP-ELM の予測精度は ELM より低い。しかし、刈込手法により隠れ層ニューロン数を減らしたにも関わらず、分岐図再構成を行うには十分な予測精度を得られた。

A.3 分岐図再構成に対する ELM の隠れ層の最適なニューロン数

ELM を用いた実験結果の表 4.2 と表 A.1 から、ロジスティック写像とサイン写像の分岐図再構成の成功率は、最適な隠れ層のニューロン数に設定した時に限り高く、最適な隠れ層のニューロン数以外に設定すると分岐図再構成の成功率がかなり低い事がわかる。従って、ELM を用いて分岐図再構成を行う場合、初めに分岐図再構成に適した隠れ層ニューロン数を探索する必要がある。ELM の結果に対して SAP-ELM を用いた実験結果の表 4.3 と表 A.2 から、ロジスティック写像とサイン写像の分岐図再構成の成功率は、ニューロン数を増やすと成功率が徐々に下がる

表 A.3: ELM と SAP-ELM を用いたロジスティック写像の時系列予測の平均平方二乗誤差

パラメータ	ELM($\times 10^{-4}$)	SAP-ELM($\times 10^{-2}$)
$p_1^{(l)}$	0.03	0.13
$p_2^{(l)}$	0.03	0.20
$p_3^{(l)}$	0.39	1.12
$p_4^{(l)}$	0.30	2.04
$p_5^{(l)}$	0.03	1.17
$p_6^{(l)}$	1.09	1.07
$p_7^{(l)}$	0.38	1.12
$p_8^{(l)}$	0.03	0.20
$p_9^{(l)}$	0.03	0.13

傾向である事がわかる。従って、SAP-ELM を用いて分岐図再構成を行う場合、最適な隠れ層ニューロン数を設定しなくても成功率が高いため、最適なニューロン数の探索は不要である。これらの結果から、ELM に刈込手法を適用する事で分岐図再構成に対する汎化性能が高くなったと考えられる。

表 4.2 から、ELM の隠れ層ニューロン数を 6 個以上に設定した場合、対象の一つの時系列に対して過学習になる事が推測できる。表 A.3 は隠れ層ニューロン数を 10 個に設定した ELM が隠れ層の初期ニューロン数を 10 個に設定した時の SAP-ELM より予測精度がかなり高い事を示した。この結果からも、隠れ層ニューロン数を 10 個に設定した ELM が対象の時系列に対して過学習を起こしていると考えられる。表 A.4 に分岐図再構成において最適な数である隠れ層ニューロン数を 4 個に設定した ELM を用いたロジスティック写像の予測精度を示す。本予測実験は表 A.3 と同条件で行った。表 A.4 の結果は表 A.3 の SAP-ELM の予測結果と同等である。従って、隠れ層ニューロン数を 6 個以上にすると ELM は過学習を起こし成功率が下がるため、ロジスティック写像の分岐図再構成の最適なニューロン数は 4 個であると考えられる。

A.4 刈込後の ELM の出力層の結合荷重

図 A.1 は、ロジスティック写像の時系列を学習した ELM の出力層ニューロンの結合荷重 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_v]^T$ の分布である。図 A.1 の横軸と縦軸は、それぞれ、出力層ニューロンの結合荷重のインデックスと学習後の出力層ニューロンの結合荷重 $\boldsymbol{\beta}$ の要素 β_i の値である。図 A.1 は時系列 $S_1, S_2, \dots, S_P (P=9)$ を学習した 9 組の出力層ニューロンの結合荷重の分布を示す。

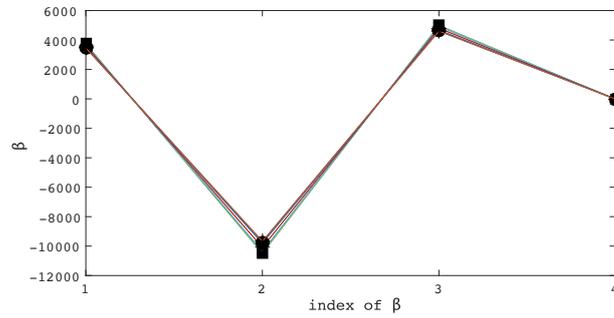
図 A.1 (a) と (b) は、それぞれ、隠れ層ニューロン数を 4 個と 8 個に設定した場合の結果である。図 A.1 (a) は全ての結合荷重が同様の分布を持つが、図 A.1 (b) は「+」のみが他の分布から逸脱している。従って、図 A.1 (a) のように全ての学習後

表 A.4: 隠れ層ニューロン数を 4 個に設定した ELM を用いた時系列予測の平均平方二乗誤差

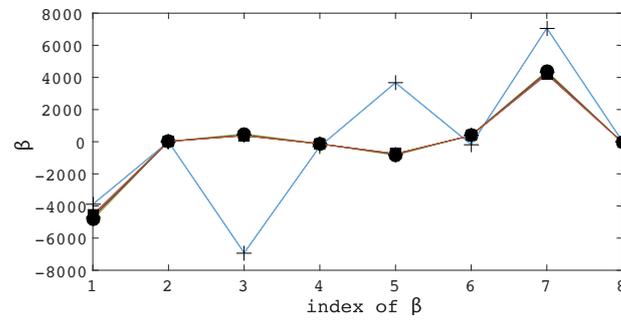
パラメータ	ELM($\times 10^{-2}$)
$p_1^{(l)}$	0.07
$p_2^{(l)}$	0.21
$p_3^{(l)}$	1.31
$p_4^{(l)}$	7.04
$p_5^{(l)}$	0.23
$p_6^{(l)}$	7.05
$p_7^{(l)}$	1.31
$p_8^{(l)}$	0.21
$p_9^{(l)}$	0.07

の出力層ニューロンの結合荷重が同様の分布を持つ場合に分岐図再構成が成功すると考えられる。

図 A.2 に、隠れ層のニューロン数を 14 個から 8 個に刈込が行われた時の SAP-ELM を用いた出力層ニューロンの結合荷重の分布を示す。図 A.2 は隠れ層ニューロン数が 8 個であるが、全ての結合荷重が同様の分布を持つ。従って、分岐図再構成に SAP-ELM を用いると、隠れ層ニューロン数が最適な数に近づくだけでなく、出力層ニューロンの結合荷重が同様の分布を持つと考えられる。これらの結果から、SAP-ELM を用いた分岐図再構成は、最適な隠れ層ニューロン数の探索を行わないでも高い成功率を得られると考えられる。



(a) 隠れ層ニューロン数が4の場合



(b) 隠れ層ニューロン数が8の場合

図 A.1: ELM の出力層ニューロンの結合荷重の分布

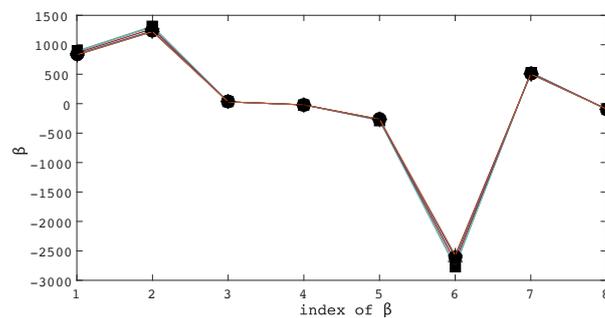


図 A.2: 隠れ層のニューロン数を14から8に刈込を行った時のSAP-ELMの出力層ニューロンの結合荷重の分布

付録B その他のカオス力学系の分岐図再構成

本付録では、PBR アルゴリズムを用いた 4.6 節で扱ったカオス力学系以外を対象として分岐図再構成の結果を示す。初めに、3.3 節の結果を基にしたカオスニューロンモデルの分岐図再構成の結果を示す。次に、非自励系のダフィング方程式と実在の系のモータードライブの数理モデルの分岐図再構成の結果を示す。

B.1 ELM を用いたカオスニューロンモデルの分岐図再構成

ELM を用いたカオスニューロンモデルの分岐図再構成のシミュレーション実験の結果を示す [76]。カオスニューロンに対する分岐図再構成は、Ogawa らにより加算的な分岐パラメータに限定した分岐図再構成の方法を用いて行われた [19]。Ogawa らの手法に対して本研究で行う分岐図再構成は加算的なパラメータに限定しないため、様々な系に適用できる。

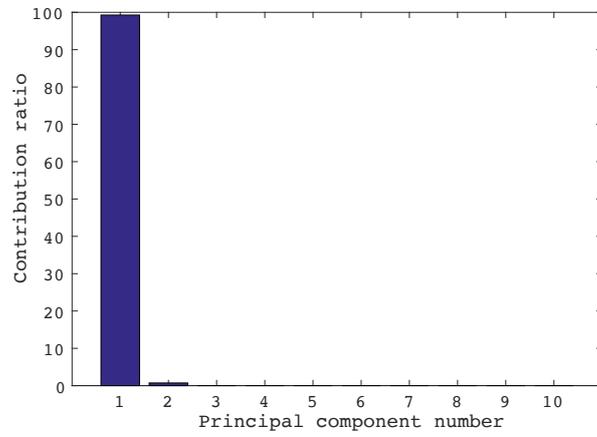
3.3 節で行った時系列予測のシミュレーション実験の結果から、標準的な ELM はカオスニューロンモデルの時系列が学習できない事を示した。従って、本シミュレーション実験にも 3.3 節で示した隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成範囲を変更した ELM を用いて分岐図再構成を行う。

初めに、本シミュレーションの実験条件を示す。カオスニューロンモデルの分岐図を式 (3.11) により生成した時系列から再構成する。 $p_3^{(c)} = p_{3,n}^{(c)}$ として、時系列 S_n ($n = 1, \dots, P = 5$) を生成するパラメータ $p_3^{(c)}$ は、

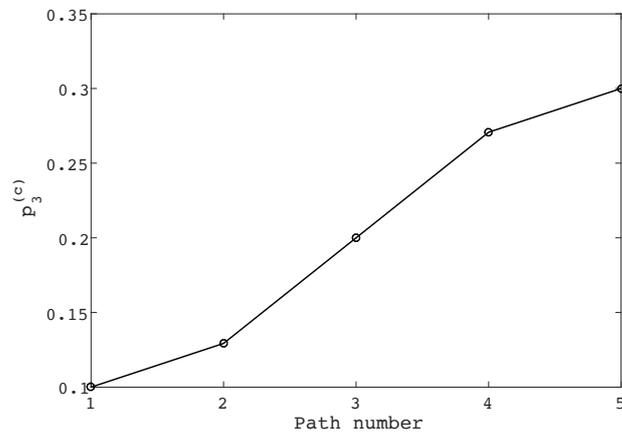
$$p_{3,n}^{(c)} = -0.1 \cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 0.2 \quad (\text{B.1})$$

とし、各時系列は、1000 点取得した。カオスニューロンモデルの時系列の学習に用いた ELM の入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、1 個、10 個、1 個とした。隠れ層の結合荷重の乱数生成の範囲は、 $[-50, 50]$ とした。

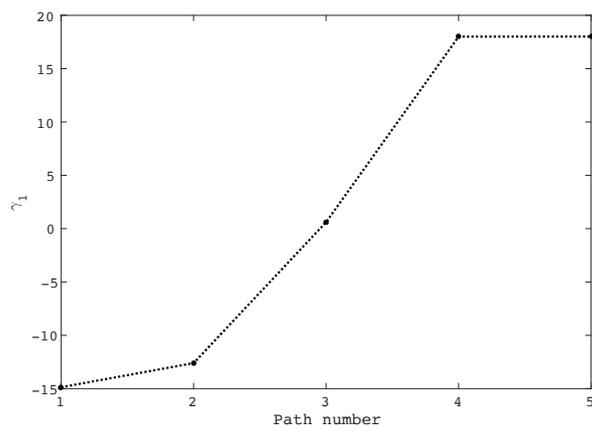
次に、シミュレーション実験の結果を示す。図 B.1(a) に主成分分析によって得られる寄与率を示す。図 B.1(a) の寄与率が第 1 主成分で 80% を超えているため、第 2 主成分以降はほとんど情報を持たない事がわかる。この結果から、対象システムが 1 次元のパラメータシステムと推定する事ができる。次に、図 B.1(b) の分岐パスと図 B.1(c) の分岐ローカスを比較する。図 B.1(b) と (c) を比較すると各点の位置



(a) 寄与率



(b) 分岐パス



(c) 分岐ローカス

図 B.1: カオスニューロンモデルの結果

関係は対応していて、 γ_1 空間で分岐図を再構成すると、真の分岐図と定性的に一致する事が期待できる。

次に $p_3^{(c)}$ のパラメータ空間の真の分岐図と γ_1 空間で再構成した分岐図を比較する。学習に使用したパラメータ領域 $p_3^{(c)}$ を $[0.1, 0.3]$ の真の分岐図を図 B.2(a) の上段、それに対応する再構成した分岐図を図 B.2(b) の上段、各分岐図の下段には推定したリアプノフ指数を示す。図 B.2(a) と (b) を比較すると、分岐パスと分岐ロカスの関係が一致しただけでなく、周辺の分岐構造も一致している事がわかる。また、推定したリアプノフ指数もそれぞれの分岐図と対応している。

図 B.3(a) と (b) に、パラメータ領域を $[0.0, 1.0]$ に広げた真の分岐図とそれに対応する広域の再構成した分岐図を示す。広域の分岐図を比較すると、 $p_3^{(c)} > 0.5$ のパラメータ領域の再構成は失敗しているが、 $p_3^{(c)} < 0.5$ の領域では真の分岐図と再構成した分岐図の $\gamma_1 < 60$ の領域が定性的に対応している事がわかる。

これらの結果より、ELM の隠れ層ニューロンの結合荷重の乱数生成の範囲を $[-50, 50]$ にする事で単一時系列予測が可能になるだけでなく、分岐図の再構成が可能である事を示した。

B.2 ダフィング方程式の分岐図再構成

非自励系のカオス力学系であるダフィング方程式の分岐図再構成の結果を示す [77]。非自励系の分岐図再構成は先行研究で対象とされていないが、電子回路などの応用例が考えられるため非自励系の結果を示す事は重要である。

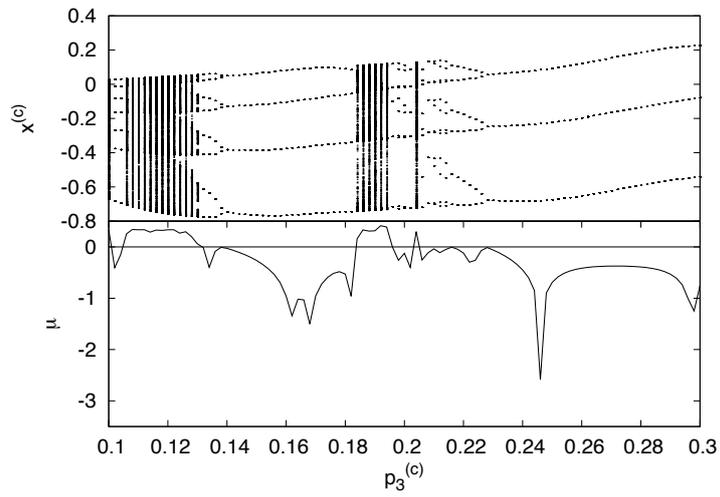
初めに、本シミュレーションの実験条件を示す。ダフィング方程式の分岐図を

$$\begin{aligned}\frac{dx_1^{(d)}}{d\tau} &= x_2^{(d)} \\ \frac{dx_2^{(d)}}{d\tau} &= -p_1^{(d)} x_2^{(d)} - \left(x_1^{(d)}\right)^3 + p_2^{(d)} + p_3^{(d)} \cos(\tau)\end{aligned}\tag{B.2}$$

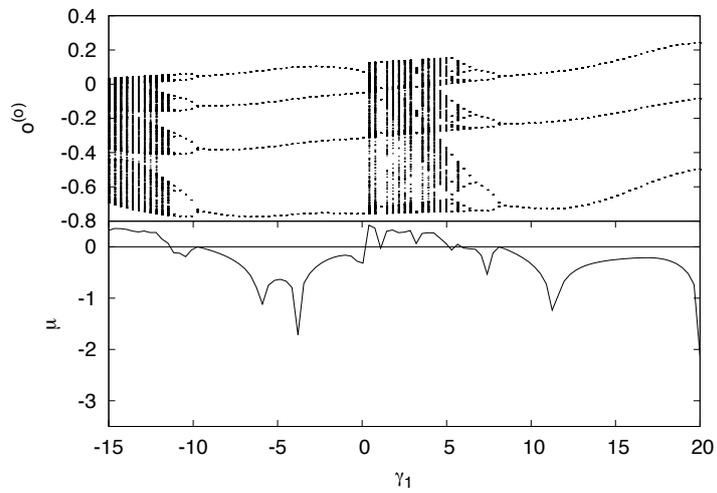
により生成した時系列から再構成する。ダフィング方程式は $p_1^{(d)}$, $p_2^{(d)}$, $p_3^{(d)}$ の3パラメータを持つが、本シミュレーション実験では1次元パラメータ空間の分岐図再構成を行うため、 $p_1^{(d)}$ と $p_2^{(d)}$ を、それぞれ、0.1 と 0 に固定する。 $p_3^{(d)} = p_{3,n}^{(d)}$ として、時系列 $S_n(n=1, \dots, P=9)$ を生成するパラメータ $p_3^{(d)}$ は、

$$p_{3,n}^{(d)} = -\cos(2\pi(n-1)/(P-1)) + 11\tag{B.3}$$

とし、各時系列を 5000 点取得した。3 次の Runge-Kutta 法を用いて時系列を生成した。ここで時間刻み幅を $\Delta\tau = \pi/100$ とした。本シミュレーション実験では、 $x_1^{(d)}$ 要素の時系列の $\Delta\tau$ を 1 ステップとしてサンプルした。ダフィング方程式の時系列の学習に用いた ELM の入力層、隠れ層、出力層のニューロン数は、それぞれ、8 個、50 個、8 個とした。この場合、予測器の出力 $o_1^{(o)}(t)$, $o_2^{(o)}(t)$, \dots , $o_8^{(o)}(t)$ は、 $x_1^{(d)}(\tau)$, $x_1^{(d)}(\tau-5\Delta\tau)$, $x_1^{(d)}(\tau-10\Delta\tau)$, \dots , $x_1^{(d)}(\tau-35\Delta\tau)$ を入力とした時、 $x_1^{(d)}(\tau+\Delta\tau)$, $x_1^{(d)}(\tau-4\Delta\tau)$, $x_1^{(d)}(\tau-9\Delta\tau)$, \dots , $x_1^{(d)}(\tau-34\Delta\tau)$ を出力するように学習を行う。

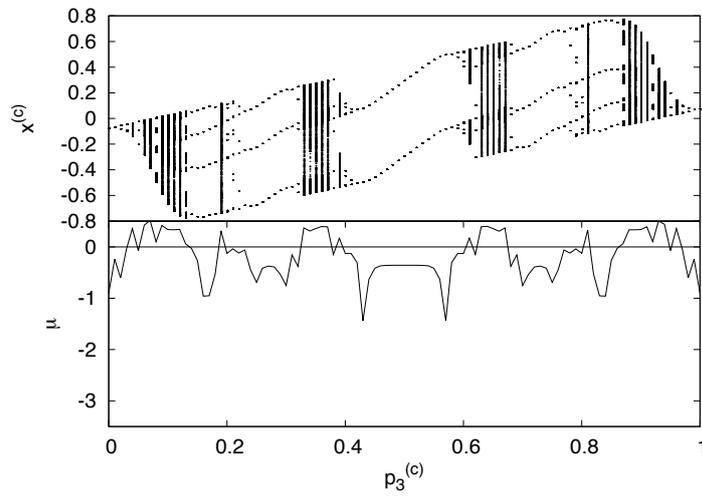


(a) 真のパラメータ空間

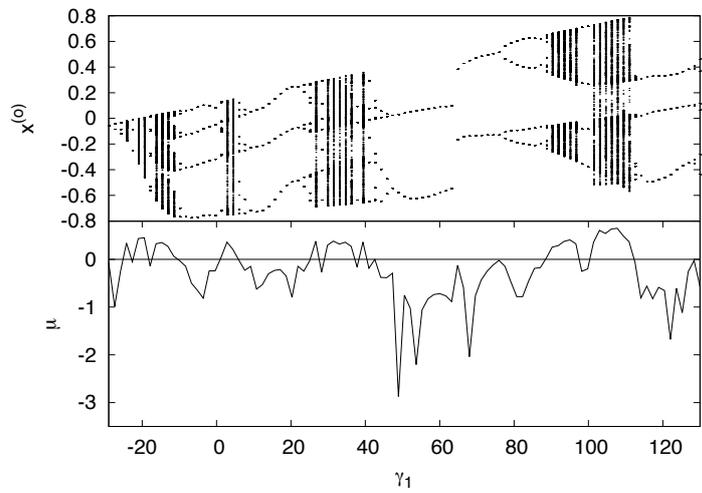


(b) 推定したパラメータ空間

図 B.2: カオスニューロンモデルの分岐図とリアプノフ指数

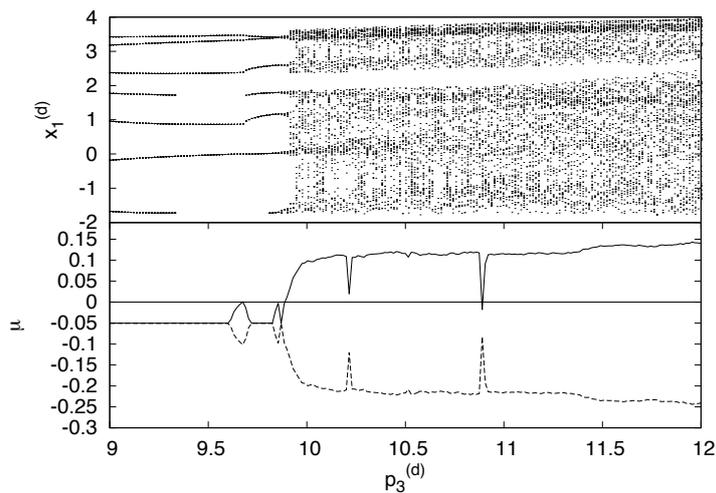


(a) 真のパラメータ空間

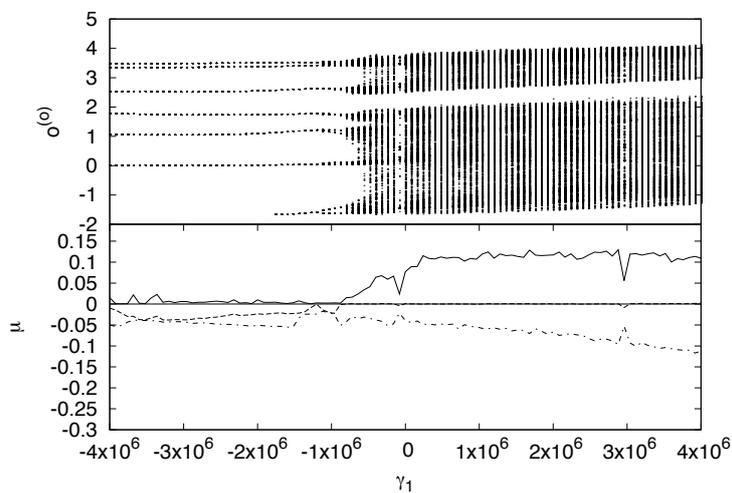


(b) 推定したパラメータ空間

図 B.3: 広域のカオスニューロンモデルの分岐図とリアプノフ指数



(a) 真のパラメータ空間



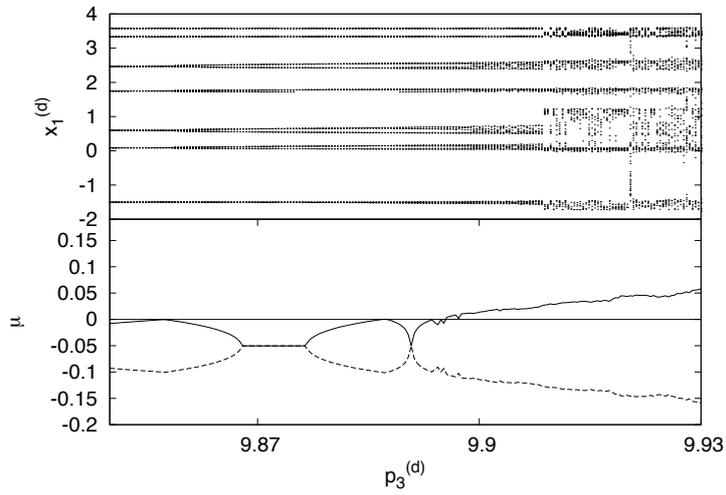
(b) 推定したパラメータ空間

図 B.4: ダフィング方程式の分岐図とリアプノフ指数

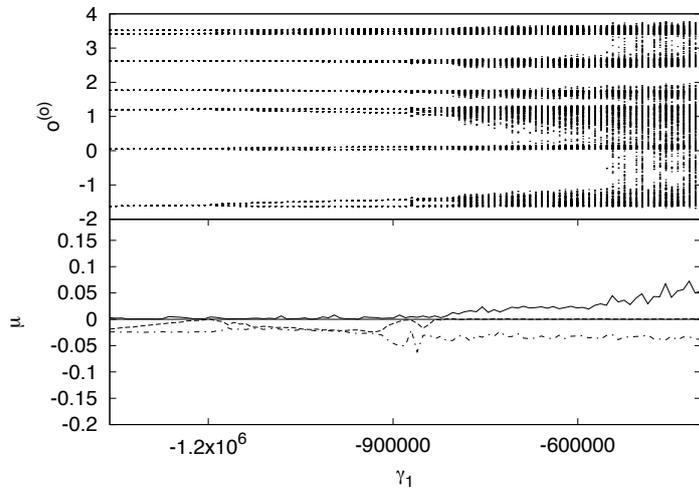
ダフィング方程式は外部入力項 $\cos(\tau)$ があるため、他の力学系と同様に入出力層のニューロン数を対象の力学系の状態値の数と同一にすると ELM による時系列の学習ができない。従って、ダフィング方程式の状態値より多めに入出力層のニューロン数を設定した。シグモイド関数のパラメータ v_1, v_2, v_3 は、それぞれ、10, 5, 0.001 と設定した。

次に、シミュレーション実験の結果を示す。第 1 主成分の寄与率が 93.6% のため、パラメータ数は 1 と推定することができる。

図 B.4(a) と (b) に真の分岐図と再構成分岐図、それぞれの分岐図に対して推定したリアプノフスペクトラムを示す。ここで、それぞれの図中の上段は分岐図、下段は最大リアプノフ指数、第 2 リアプノフ指数、第 3 リアプノフ指数 (図 B.4(b) のみ) を示す。また、実線、破線、一点破線は、それぞれ、最大リアプノフ指数、第 2 リアプノフ指数、第 3 リアプノフ指数を示す。真の分岐図のリアプノフ指数は [78]



(a) 真のパラメータ空間



(b) 再構成した分岐図

図 B.5: 周期解からカオス解への分岐点周辺のダフィング方程式の分岐図とリアプノフ指数

を参照して推定した。ここで、ELMの入出力層のニューロン数は共に8と設定したため、再構成した分岐図の第8リアプノフ指数まで推定できる。しかし、本数値実験では最大リアプノフ指数に着目するため、図B.4(b)は第3リアプノフ指数まで示した。

図B.4(a)と(b)から、再構成した分岐図は真の分岐図と対応している事がわかる。この結果は、分岐図再構成のために使用する時系列を生成するパラメータがカオス領域だけでも、周期解を示すパラメータを推定できることを示す。さらに、リアプノフ指数は再構成した分岐図と対応している。しかし、真の分岐図と再構成した分岐図のリアプノフ指数を比較すると、真の分岐図に比べて再構成した分岐図のリアプノフ指数は全体的に小さい。さらに、図B.4(a)の $A = 10.8$ 周辺の窓が図B.4(b)の $\gamma = 0$ 周辺にずれてしまっている。

次に、図B.5(a)と(b)に、真の分岐図と再構成分岐図の周期解からカオス解への分岐点周辺の拡大図を示す。これらの図から、再構成した分岐図上で、真の分岐図と同様の分岐現象が再現できている事がわかる。

B.3 モータードライブの数理モデルの分岐図再構成

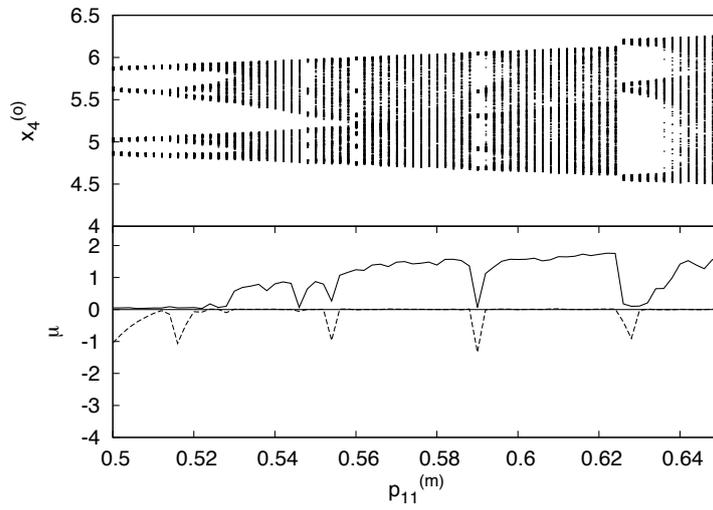
実在の系であるモータードライブの数理モデルの分岐図再構成の結果を示す [79]。また、モータードライブの数理モデルは4変数の力学系であるため今まで対象にした力学系の中で一番変数が多い。

実験条件は、5.6.2項で行った主成分分析を用いない新手法による分岐図再構成のシミュレーション実験によるモータードライブの数理モデルのシミュレーション実験と同様とした。

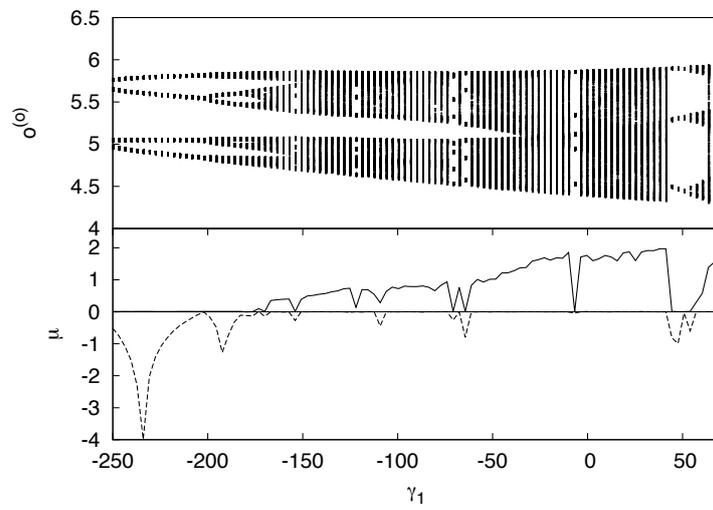
シミュレーション実験の結果を示す。第1主成分の寄与率が95.1%のため、パラメータ数は1と推定する事ができる。

図B.6(a)と(b)に真の分岐図と再構成分岐図、それぞれの分岐図に対して推定したリアプノフスペクトラムを示す。ここで、それぞれの図中の上段は分岐図、下段は最大リアプノフ指数と第2リアプノフ指数を示す。また、下段の実線と破線は最大リアプノフ指数と第2リアプノフ指数を示す。ここで、モータードライブの数理モデルは4変数を持つため第4リアプノフ指数まで推定できるが、本研究ではリアプノフ指数が正の値を取る最大リアプノフ指数に着目するため第2リアプノフ指数までを表示する。

図B.6(a)と(b)から、再構成した分岐図は真の分岐図と対応している事がわかる。さらに、リアプノフ指数は真のパラメータ空間と再構成したパラメータ空間で同等の値を示している。しかし、図B.6(b)の $\gamma_1 = 0$ 周辺の窓が真のパラメータ空間では確認できないため、真のパラメータ空間の極狭の窓が拡大してしまったと考えられる。



(a) 真のパラメータ空間



(b) 推定したパラメータ空間

図 B.6: モータードライブの数理モデルの分岐図とリアプノフ指数

付録C 真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の対応関係

本付録では、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間の対応関係を考察するために、それぞれのパラメータを変化させた時の入出力関係を比較する。

ロジスティック写像のパラメータ値を変化させた時の入出力関係を図 C.1 に示す。ロジスティック写像の入出力関係はパラメータを $p^{(l)} > 0$ に設定した時、入力値 0.5 をピークとした山型となり、パラメータ値 $p^{(l)}$ を大きくすると出力値は大きくなる。

式 (4.11) より、推定したパラメータ値 γ を含めた ELM の入出力関係は、

$$o^{(0)}(t+1) = (\gamma \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_0) \cdot \text{sig}(o^{(0)}(t)\mathbf{w} + \mathbf{b}) \quad (\text{C.1})$$

と表せる。式 (C.1) の γ を変化させた時の ELM の入出力関係を図 C.2 に示す。ここで、 γ は図 C.1 で設定したパラメータ値 $p^{(l)}$ と対応するように設定した。

図 C.1 と図 C.2 を比較すると、パラメータ値を変化させた時のロジスティック写像と ELM の入出力関係の変化（山型の入出力関係はパラメータ値が大きくなるに連れて出力値が大きくなる）が同じである事がわかる。パラメータ値を変化させた時に入出力関係が同様に变化するため、真のパラメータ空間と推定したパラメータ空間が対応していると考えられ、これらのパラメータ空間上でプロットした分岐図が対応する。

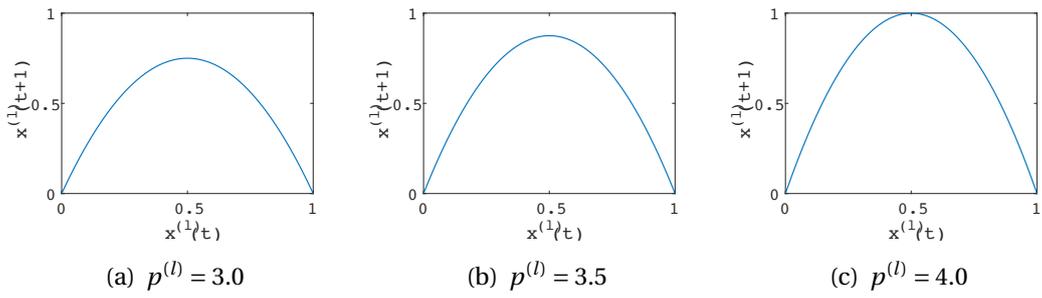


図 C.1: ロジスティック写像の入出力関係

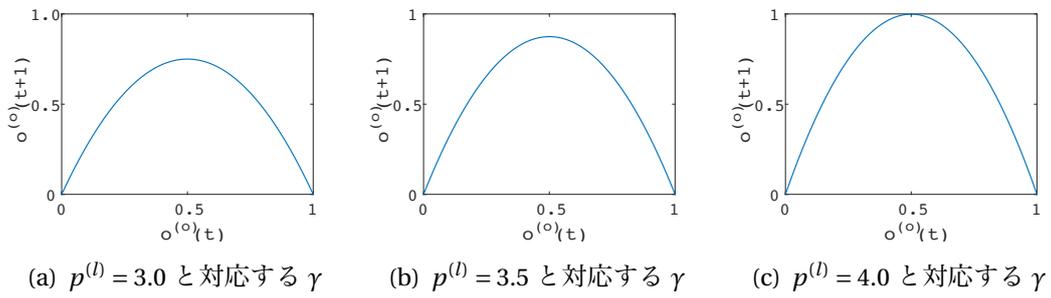


図 C.2: ELM の入出力関係

付録D 出力行列のランクと学習した結合荷重の絶対値の関係

3.3節の時系列予測の評価に隠れ層ニューロンの出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ のランクを用いた。ここで、本研究の出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ のランクは 10^{-3} 以上の特異値の数とする。汎化性能が高い ELM を生成するためには、出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ のランクが大きい方が良くと考えられる。

隠れ層ニューロンの出力行列 $\mathbf{O}^{(h)}$ の特異値分解を、直交行列 Π_1 と Π_2 、対角行列 Σ を用いて下記に示す。

$$\mathbf{O}^{(h)} = \Pi_1 \Sigma \Pi_2^T \quad (\text{D.1})$$

ここで、対角行列 Σ の対角成分 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_V$ が特異値となる。従って、ランクが小さい時は 10^{-3} 以下の対角成分が存在する。

式 (3.5) で示す通り、ELM の出力層ニューロンの結合荷重の学習に $\mathbf{O}^{(h)}$ の擬似逆行列を用いる。擬似逆行列を特異値分解の結果を用いて表すと、

$$\mathbf{O}^{(h)\dagger} = \Pi_2 \Sigma^{-1} \Pi_1^T \quad (\text{D.2})$$

となる。従って、擬似逆行列を計算する過程で Σ の対角成分の逆数を計算する事になるため、特異値が小さいと \mathbf{H}^\dagger が大きい値となり、 \mathbf{H}^\dagger を用いて計算する出力層ニューロンの結合荷重の絶対値も大きくなる。

結合荷重の絶対値が大きくなる事により、ELM の汎化性能が低くなると考えられるため、 \mathbf{H} のランクは大きい方が良く考えられる。