

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par

Dominique Nelson Gruel

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPECIALITE : AUTOMATIQUE ET PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

EXTENSION DE LA COMMANDE CRONE MULTIVARIABLE AUX SYSTEMES NON CARRÉS : APPLICATION A UN SYSTEME D'AIR DE MOTEURS ESSENCE ET DIESEL

Soutenue le 10 Décembre 2009

Après avis de : MM. M. M'SAAD *Rapporteurs*

T.M. GUERRA

Devant la commission d'examen formée de :

MM. A. ZOLGHADRI	Professeur de l'Université Bordeaux 1	<i>Président</i>
M. M'SAAD	Professeur à l'ENSICAEN	<i>Rapporteur</i>
T.M. GUERRA	Professeur de l'Université de Valenciennes	<i>Rapporteur</i>
Y. CHAMAILLARD	Professeur des Universités à l'IUT d'Orléans	<i>Examineurs</i>
L. GUZZELLA	Professeur de l'École Polytechnique Fédérale de Zurich	
O. COIS	Docteur, Ingénieur de recherche à SB LiMotive (Allemagne)	
P. LANUSSE	Maître de Conférences à l'Institut Polytechnique de Bordeaux	
A. OUSTALOUP	Professeur de l'Institut Polytechnique de Bordeaux	

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS - UMR 5218 CNRS) - Université Bordeaux 1 -

Institut Polytechnique de Bordeaux (IPB)

351 cours de la Libération - 33405 TALENCE cedex - France

A ma mère.

*Certains actes engendrent des torrents,
D'autres engendrent de simples flaques.
Je suis là, à réfléchir à mon passé,
Sans me rendre compte que mon avenir s'enfuit.
On pourrait se persuader que la vie n'est pas simple,
Pourtant, ce n'est pas la vie qui est compliquée,
Mais les hommes qui la compliquent.
En réalité un jour n'est rien si on ne sait pas quoi en faire.*

Nelson Félicien

Remerciements

Mon parcours au sein de l'équipe d'Automatique du laboratoire de l'Intégration du Matériaux aux Systèmes a débuté par un stage de fin d'études. Sous la tutelle de Franck Cazaurang, entre fuzzification, loi d'appartenance et système non-linéaire, j'ai découvert le monde de la recherche; pour avoir su me laisser libre de penser et réfléchir sans trop longtemps me laisser dans le flou.

J'ai poursuivi par une thèse effectuée dans le cadre d'une bourse ministérielle au sein de l'équipe CRONE de ce même laboratoire. Encadré par Patrick Lanusse et Alain Oustaloup, j'ai eu à faire face à la dérivation non entière.

Après une longue période d'adaptation et beaucoup de discussions, j'ai fini par comprendre que cet opérateur était en réalité un "art de vivre". Pour cette étape de ma vie je remercie Patrick Lanusse qui, tout au long de ses quatre années, a su se rendre disponible pour des discussions parfois tendues et houleuses mais qui, avec le recul, s'avéraient nécessaires.

Ensuite, je remercie Alain Oustaloup de m'avoir accueilli au sein de son équipe, pour la confiance et l'autonomie qu'il m'a offertes durant cette thèse.

La partie applicative de ma thèse est le fruit d'un projet initié par l'entreprise Robert Bosch (Allemagne) et plus particulièrement par Alexandre Wagner et Olivier Cois que je remercient. Les acteurs de ce projet étaient l'institut PRISME d'Orléans, l'équipe CRONE du département LAPS du laboratoire IMS et l'entreprise Robert Bosch. Au cours de ce projet j'ai fait la connaissance de personnes extraordinaires d'un point de vue scientifique mais aussi humain. Grâce à eux, je suis maintenant initié au contrôle moteur, je remercie Yann Chamillard pour la confiance qu'il a su me témoigner. Je n'oublierai pas mon acolyte

« testeur » de loi de commande au petit matin (juste avant les premiers cours !), Guillaume ta bonne humeur et ta générosité ont été appréciables et très appréciées.

De plus, je remercie Mohammed M'Saad et Thierry-Marie Guerra d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit. Vos remarques et vos questions pertinentes ont été fortement appréciées.

Je remercie également tous les membres du jury de thèse pour leur participation et tous ceux du laboratoire qui ont participé, de près ou de loin, à ce travail.

Avant et pendant cette thèse, j'ai eu l'occasion de rencontrer beaucoup de monde et quelques une de ses personnes m'ont donné la chance de devenir leur ami : Pellette « le beau gosse », Teuteu « le grincheux », Nico « le tombeur », Stef « le choriste », « l'arabe » Firas, la belle Audrey. Nos soirées C . . . E me manqueront. Je n'oublierai pas Chris mon grand noir !! et, mon poulet Cyrilou : nos discussions et nos délires basket m'ont aidé souvent à prendre beaucoup de recul.

Je vous apprécie tous, très sincèrement, et vous remercie pour votre soutien.

Enfin je remercie ma Mère sans qui je ne serai pas là (je réitère et cette fois personne ne sourira!) C'est sans aucun doute la femme que j'admire le plus. Elle m'a offert mes rêves sur un plateau d'argent, m'a montré que la persévérance était la clé, a toujours su me soutenir et me pousser quand je baissais les bras.

Comment parler de ma Mère sans parler de ma sœur : merci Audrey pour ta présence au quotidien. Tu es toujours dans mes pensées. Sache que « la rue du loup » aura marqué le tournant le plus important de ma vie.

J'ai aussi une pensée profonde pour mes frères Laurent et Bruno pour leur soutien, vous savez jouer à merveille votre rôle de grands frères. Ne changez rien !. Durant mes dix années d'études vous avez été là pour m'écouter, me soutenir.

Pour finir, je remercie mon « Namour », Hinerava, qui m'a soutenu dans les prises de décisions ardues et durant les mois précédant la soutenance de thèse. Je remercie le hasard de nous avoir réunis et ce pour la vie.

Table des matières

Remerciements	7
Table des matières	9
Introduction générale et organisation de la thèse	13
Bibliographie de l'auteur	17
Introduction à la Commande CRONE multivariable	19
1.1. Introduction	20
1.2. La dérivation non-entière.	21
1.2.1. Définition	21
1.2.2. Existence et propriétés	22
1.2.3. Interprétation géométrique	22
1.2.4. Interprétation système	24
1.2.5. Etude fréquentielle	26
1.3. Loi de commande robuste d'ordre non entier pour les systèmes scalaires	31
1.3.1. Stratégie CRONE de première génération	33
1.3.2. Stratégie CRONE de deuxième et troisième génération	41
1.3.3. Stratégie CRONE de deuxième génération	44
1.3.4. Stratégie CRONE de troisième génération	49
1.4. Commande CRONE des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties carrés ...	56
1.4.1. Commande CRONE multi-SISO [Sutter, 1997]	57
1.4.2. Commande Crone multivariable des systèmes carrée [Mathieu, 1997]	58
1.5. Conclusion	63
Généralisation de la commande CRONE des systèmes multi-entrées multi-sorties carrés	65
2.1. Introduction	66
2.2. Les systèmes multi-entrées multi-sorties et leur commande	68
2.2.1. Gain et orientation	68
2.2.2. Réponse fréquentielle	74

2.2.3.	Commande des systèmes multivariables	74
2.2.4.	Sous-espace des matrices rationnelles	75
2.2.5.	Stabilité des systèmes bouclés multivariable	77
2.3.	Reformulation et extension de la commande CRONE des systèmes MIMO carrés, stables et à minimum de phase	79
2.3.1.	Positionnement du problème	80
2.3.2.	Existence du régulateur	82
2.3.3.	Découplage	83
2.3.4.	Optimisation	85
2.4.	Commande CRONE des systèmes multivariables instables et retardés	86
2.4.1.	Première étape : Retards	88
2.4.2.	Deuxième étape: recherche des zéros et pôles à partie réelle positive	88
2.4.3.	Application	95
2.5.	Commande CRONE des systèmes MIMO possédant des modes résonants	109
2.5.1.	Les modes résonants	110
2.5.2.	Application	113
2.6.	Conclusion	119
	Commande CRONE des systèmes multi-entrées multi-sorties non carrés	121
3.1.	Introduction aux systèmes multi-entrées multi- sorties non carrés	123
3.2.	Inversion de matrice de transfert non-carrée	126
3.2.1.	Définition	126
3.2.2.	Inversion d'une matrice de transfert non carrée et retardée	128
3.3.	Pôles et zéros de transmission d'un système multivariable	131
3.3.1.	Pôles	131
3.3.2.	Zéros	134
3.3.3.	Cas complet d'étude	137
3.4.	Stratégie CRONE des systèmes multivariables non carrés instables, retardés, à minimum de phase et possédant des modes résonants	138
3.4.1.	Principe	139
3.4.2.	Régulateur idéal découplant	139
3.4.3.	Recherche du terme de retard	141
3.4.4.	Stabilité des systèmes multivariables non carré bouclés	142
3.4.5.	Optimisation et robustesse de la loi de commande	146
3.5.	Application	151

3.5.1.	Préparamétrisation de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire et nominale.....	153
3.5.2.	Spécifications.....	154
3.5.3.	Optimisation.....	155
3.5.4.	Résultats.....	156
3.6.	Synthèse CRONE MIMO décentralisée.....	158
3.6.1.	Outils d'analyse des phénomènes de couplage pour les systèmes multivariables.....	160
3.6.2.	Conception de régulateur décentralisé pour les systèmes MIMO.....	164
3.6.3.	Choix de la structure et de la méthodologie de synthèse du régulateur.....	165
3.6.4.	Application à un système multivariable carré.....	168
3.6.5.	Application à un système multivariable non-carré.....	180
3.7.	Conclusion.....	185
	Commande CRONE multivariable appliquée au contrôle moteur.....	187
4.1.	Introduction.....	188
4.2.	Moteur à allumage commandé.....	190
4.2.1	Principe de fonctionnement.....	190
4.2.2.	Les enjeux.....	194
4.2.3.	La suralimentation.....	200
4.3.	Commande CRONE d'un moteur à allumage commandé.....	206
4.3.1.	Identification et analyse du système.....	211
4.3.2.	Commande du système.....	218
4.3.3.	Validation de la loi de commande sur simulateur et banc d'essai.....	225
4.4.	Moteur Diesel.....	232
4.4.1.	Principe de fonctionnement.....	232
4.4.2.	Les enjeux.....	234
4.4.3.	La recirculation des gaz brûlés.....	235
4.5.	Commande CRONE d'un moteur Diesel.....	240
4.5.1.	Identification et analyse du système.....	242
4.5.2.	Calcul de la loi de commande.....	253
4.6.	Conclusion.....	261
	Conclusion générale et perspectives.....	263
	Bibliographie.....	267

Introduction générale et organisation de la thèse

Si le concept et le formalisme mathématique de la dérivation non entière (réelle ou complexe) sont issus des travaux de mathématiciens célèbres tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy et remontent ainsi au début du XIX^{ème} siècle, sa synthèse et ses applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur relèvent des contributions scientifiques de la seconde moitié de ce siècle.

L'opération scientifique "Systèmes à dérivées non entières" que supporte l'équipe CRONE concerne à la fois la théorie des systèmes, l'automatique, la robotique et, d'une manière plus annexe, le traitement du signal et de l'image.

Le thème général des recherches de l'équipe CRONE relève d'un projet à vocation unitaire initialisé en 1975, à savoir la dérivation non entière en tant qu'opérateur et outil de modélisation, sa synthèse étendue au corps des complexes ainsi que ses applications dans les sciences pour l'ingénieur. Plus spécifiquement, en raison de l'appartenance de l'équipe CRONE au Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (UMR 5218 CNRS), un axe de recherche particulièrement privilégié est celui de l'application de la dérivation non entière en automatique à travers la commande des systèmes, la méthodologie développée portant le nom de commande CRONE, abréviation de Commande Robuste d'Ordre Non Entier.

Les motivations d'une telle thématique sont dictées par le souci constant de défendre la thèse suivante : étant données les propriétés de compacité paramétrique et de robustesse qu'offre l'opérateur de dérivation non entière, la commande CRONE constitue l'outil idéal pour concevoir des lois de commande robustes et obtenues avec un minimum de paramètres à optimiser. Pour défendre cette thèse, l'équipe s'attache à développer un corpus théorique puis, par souci applicatif, à le concrétiser par des transferts technologiques relevant d'une véritable valorisation de la recherche amont. Les travaux qui font l'objet de ce mémoire s'inscrivent

dans cet axe de recherche, le contexte d'étude étant plus particulièrement celui de la commande des systèmes multivariables possédant un nombre d'entrées de commande différent de celui des sorties à contrôler.

La progression de la thèse est ponctuée par quatre chapitres dont le contenu est présenté ici de manière introductive.

Le chapitre 1 fait état de l'art des travaux de l'équipe CRONE dans le domaine de la commande robuste. Après avoir rappelé les définitions, les principales propriétés et l'interprétation de l'opérateur de dérivation d'ordre non entier réel ou complexe, ce chapitre propose une application de l'opérateur mathématique de dérivation non entière, en l'occurrence la commande CRONE. Les différents niveaux de généralisation de cette commande sont présentés partant de la simple commande robuste d'un système scalaire stable à la commande multivariable des systèmes carrés, c'est-à-dire possédant un même nombre d'entrées et de sorties.

Le chapitre 2 est consacré à la reformulation de la méthodologie CRONE des systèmes multivariables carrés. En effet, la méthodologie proposée initialement répondait de façon partielle aux différentes conditions de stabilité nécessaires et son champ d'application restait malgré tout restreint à la seule classe des systèmes multivariables carrés éventuellement instables. La première partie de ce chapitre présente les outils permettant d'analyser les systèmes multivariables carrés. On y propose un certain nombre de propriétés importantes, permettant notamment l'étude de leur stabilité, de leurs gain et phase, et la détermination de leurs zéros et pôles à partie réelle positive. Après avoir reformulé des conditions de stabilité, la deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'extension du champ d'application de l'approche CRONE à la classe plus générale des systèmes multivariables carrés instables, retardés, possédant des zéros à partie réelle positive et des modes résonants.

Le chapitre 3 traite de l'extension de la commande CRONE aux systèmes multivariables non carrés, instables et à non minimum de phase. La problématique de ce chapitre est dans un premier temps de prouver l'existence d'un régulateur robuste permettant la commande de ce type de système puis de démontrer un certain nombre de théorèmes assurant la stabilité du bouclage constitué par un régulateur robuste et de l'ensemble des procédés $G(s)$ modélisant un système incertain. La deuxième partie de ce chapitre part du postulat que la difficulté d'application des approches proposées augmente avec le nombre de sorties à réguler. Pour atténuer cette difficulté, deux méthodologies seront proposées afin de concevoir des régulateurs robustes et décentralisés, c'est-à-dire des régulateurs dont la matrice de transfert

comporte un certain nombre d'éléments nuls, les autres éléments étant tout de même conçus sur la base de l'approche multivariable développée au chapitre 2 et en première partie du chapitre 3.

Le chapitre 4 propose deux applications de la commande CRONE multivariable. Les exemples d'illustration concernent la commande du système d'air d'un moteur à allumage commandé puis d'un moteur Diesel. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser une loi de commande robuste multivariable pour permettre à ces moteurs de satisfaire leurs différents objectifs et notamment ceux relatifs au durcissement des réglementations édictées pour en réduire la génération des éléments polluants.

Bibliographie de l'auteur

- [Nelson Gruel *et al*, 2007] D. Nelson Gruel, P. Lanusse, V. Pommier-Budinger et A. Oustaloup, Développement et mise en œuvre de la commande CRONE pour les systèmes multivariables peu amortis, Journées Nationales/Doctorales MACS, Session stabilité et stabilisation (2007).
- [Nelson Gruel *et al*, 2007] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Robust control system design for multivariable plants with lightly damped modes, 3rd ASME/IEEE International Conference on Mechatronics Control and Automation (2007).
- [Nelson Gruel *et al*, 2008] D. Nelson Gruel, P. Lanusse, et A. Oustaloup, Robust control design for multivariable plants with time-delays, Chemical Engineering Journal (2008).
- [Pommier *et al*, 2008] V. Pommier-Budinger, Y. Janat, D. Nelson-Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, CRONE control of a multivariable lightly damped plant, 14th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference (2008).
- [Pommier *et al*, 2008] V. Pommier-Budinger, Y. Janat, D. Nelson-Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Fractional robust control with iso-damping property, American control conference (2008).
- [Lanusse *et al*, 2008] P. Lanusse, D. Nelson Gruel, J. Sabatier, R. Lasnier et A. Oustaloup, Synthèse multivariable d'une commande CRONE décentralisée, 4ème IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique (2008).
- [Nelson Gruel *et al*, 2008] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Commande robuste des systèmes multi-entrées multi-sorties non-carrés retardés, 4ème

- IEEE Conférence Internationale Francophone d'Automatique (2008).
- [Nelson Gruel et al, 2008] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Decentralised CRONE control of $m \times n$ multivariable system with time-delay, 3rd IFAC Workshop on "Fractional Differentiation and its Applications" (FDA'08) (2008).
- [Victor et al, 2008] S. Victor, P. Melchior, D. Nelson-Gruel et A. Oustaloup, Flatness Control for Linear Fractional MIMO Systems: thermal application, 3rd IFAC Workshop on "Fractional Differentiation and its Applications" (FDA'08) (2008).
- [Lanusse et al, 2008] P. Lanusse, D. Nelson Gruel, H. Benlaoukli et A. Oustaloup, Fractional-order control and interval analysis of SISO systems with time-delayed state, Control Theory & Applications 2 (2008).
- [Pommier et al, 2008] V. Pommier-Budinger, Y. Janat, D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Control of lightly-damped plants using the isodamping contours and the CRONE approach, Journal européen des systèmes automatisés (2008).
- [Nelson Gruel et al, 2009] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Commande CRONE de systèmes multi-entrées multi-sorties non-carrés retardés, Revue e-STA 6 (2009).
- [Nelson Gruel et al, 2009] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Decentralised CRONE control of $m \times n$ multivariable system with time-delay, Springer Book entitled " New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications", 2009.
- [Lanusse et al, 2009] P. Lanusse, D. Nelson Gruel, J. Sabatier, R.Lasnier et A. Oustaloup, Synthèse multivariable d'une commande CRONE décentralisée, Automatique et Informatique Appliquée, éditions de l'Académie Roumaine (2009).
- [Nelson Gruel et al, 2009] D. Nelson Gruel, P. Lanusse et A. Oustaloup, Robust CRONE control of non square multivariable system with time-delay, IEEE European Control Conference (2009).

Chapitre 1

Introduction à la Commande CRONE multivariable

Sommaire

1.1.	Introduction.....	20
1.2.	La dérivation non-entière.....	21
1.2.1.	Définition	21
1.2.2.	Existence et propriétés	22
1.2.3.	Interprétation géométrique	22
1.2.4.	Interprétation système	24
1.2.5.	Etude fréquentielle	26
1.3.	Loi de commande robuste d'ordre non entier pour les systèmes scalaires.....	31
1.3.1.	Stratégie CRONE de première génération	33
1.3.2.	Stratégie CRONE de deuxième et troisième génération.....	41
1.3.3.	Stratégie CRONE de deuxième génération.....	44
1.3.4.	Stratégie CRONE de troisième génération.....	49
1.4.	Commande CRONE des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties carrés	56
1.4.1.	Commande CRONE multi-SISO [Sutter, 1997]	57
1.4.2.	Commande Crone multivariable des systèmes carrés [Mathieu, 1997]	58
1.5.	Conclusion	63

1.1. Introduction

La dérivation non-entière est un formalisme mathématique datant de la fin du XIX^{ème} siècle et issu des travaux de mathématiciens célèbres tels que Laplace, Liouville, Abel, Riemann et Cauchy. Compte tenu de la difficulté de le mettre en œuvre ou même de l'appréhender, il fallut attendre la fin du XX^{ème} siècle pour voir naître ses premières applications dans les sciences physiques et les sciences pour l'ingénieur [Bode, 1945][Tustin et *al*, 1958][Manabe, 1960, 1961, 1962] [Oldham, 1974], [Miller, 1993], [Samko, 1993], [Oustaloup, 1995], [Lin, 2001], et [Cois, 2002].

Dans le domaine de la commande des systèmes, une des applications les plus pertinentes fut l'élaboration d'une loi de commande robuste d'ordre non-entier, aussi appelée commande CRONE [Oustaloup, 1991a, 1991b, 1994]. La commande CRONE est une méthode fréquentielle, basée sur la dérivation d'ordre non-entier, permettant de construire une loi de commande assurant la robustesse du degré de stabilité d'un système bouclé. Trois générations de cette loi de commande ont vu le jour, offrant ainsi la possibilité de commander un grand nombre de systèmes.

L'objet de ce chapitre est de faire un état de l'art de ces contributions scientifiques, la finalité de notre travail étant plus particulièrement celle de la synthèse de lois de commande permettant d'asservir les systèmes multivariables (MIMO) c'est-à-dire possédant plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties à commander.

La première partie de ce chapitre présente de manière synthétique la dérivation et l'intégration d'ordre non entière (définition, interprétation géométrique, interprétation système...) ; puis les deuxième et troisième parties de ce chapitre proposent une application de l'opérateur mathématique de dérivation non entière, en l'occurrence la commande CRONE.

1.2. La dérivation non-entière.

1.2.1. Définition

Une première définition de la dérivée généralisée peut être introduite à partir de la formule intégrale de Cauchy [Erdely, 1962], [Oldham, 1974], [Miller, 1993] et [Samko, 1993] :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad (1.1)$$

avec :

- U sous ensemble ouvert de \mathbb{C}
- $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ fonction holomorphe
- $D = \{z / |z - z_0| \leq r\} \subset U$
- C cercle formant la frontière de D .

Limité à des ordres de dérivation à partie réelle négative, le formalisme de Cauchy ne s'applique en fait, qu'à l'intégration généralisée. Les travaux de Riemann-Liouville ont permis d'établir une définition de l'intégrale d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\nu) > 0$) d'une fonction $f(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} :

$$I_t^\nu f(t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\theta)^{1-\nu}} f(\theta) d\theta, \quad (1.2)$$

avec $t > 0$ et où $\Gamma(\nu)$ est la fonction gamma définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx. \quad (1.3)$$

Son applicabilité à la dérivation généralisée, sans restriction sur la partie réelle de l'ordre de dérivation, est néanmoins assurée en prenant la partie finie de l'intégrale de Cauchy ce qui revient à dériver à l'ordre entier α tel que $\alpha = \text{Ent}[\text{Re}(\nu)] + 1$ (où $\text{Ent}[\text{Re}(\nu)]$ correspond à la partie entière de la partie réelle de l'ordre de dérivation non-entier), l'intégrale d'ordre $(\alpha - \nu) > 0$, soit :

$$D_t^\nu f(t) = D_t^{\nu-\alpha+\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{(\alpha)} D_t^{-(\alpha-\nu)} f(t), \quad (1.4)$$

sachant que $D_t^{-(\alpha-\nu)} f(t) = I_t^{(\alpha-\nu)} f(t)$.

On obtient finalement :

$$D_t^\nu f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha - \nu)(t - \theta)^{1 - (\alpha - \nu)}} f(\theta) d\theta. \quad (1.5)$$

Ainsi, la dérivée d'ordre $\nu \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\nu) > 0$) d'une fonction $f(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est définie par la dérivée entière d'une intégrale non-entière dont la partie réelle de l'ordre d'intégration est comprise entre 0 et 1. En 1869 Sonin étend la formule intégrale de Cauchy aux ordres d'intégration non entiers appuyant ainsi la définition de Riemann-Liouville [Liouville, 1832].

1.2.2. Existence et propriétés

Les conditions d'existence de ces concepts mathématiques sont les suivantes :

- $I_{t_0}^\nu f(t)$ existe si $f(t)$ est continu par morceaux sur $]t; +\infty[$ et intégrable sur $[t_0; t]$ pour $t > t_0$,
- $D_{t_0}^\nu f(t)$ existe si $f(t)$ peut s'écrire [Cois, 2002] :

$$f(t) = (t - t_0)^\lambda \eta(t - t_0),$$

ou

$$f(t) = (t - t_0)^\lambda \ln(t - t_0) \eta(t - t_0),$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\lambda) > -1$ et $f(t)$ fonction analytique de \mathbb{C} pour $t \geq 0$.

Le calcul de la dérivation non-entière d'ordre ν de la fonction f à l'instant t nécessite de connaître cette fonction sur l'intervalle $[t_0; t]$ et donc la connaissance du paramètre t_0 . Alors que pour dériver à un ordre entier il suffit de connaître la fonction $f(t)$ à l'instant t . Ces deux particularités permettent d'interpréter les systèmes non-entiers comme des systèmes à mémoire longue.

1.2.3. Interprétation géométrique

Dans le cas où l'ordre non entier ν est réel, l'intégration ou dérivation non-entière peut être interprétée comme l'aire que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)(t-\theta)^{1-\nu}}. \quad (1.6)$$

Le cas ν égal à 1 représente le cas général d'une intégration entière, toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même poids ($h(t) = 1$). Pour ν compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de poids que les plus anciennes (Figure 1. 1). Cette figure met en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.

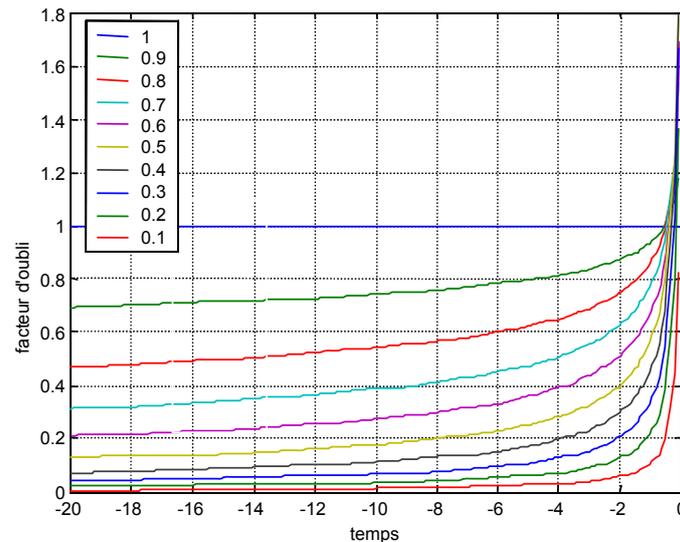


Figure 1. 1 : Variation du facteur d'oubli $h(t)$ pour des valeurs de ν allant de 0.1 à 1

Par ailleurs, la dérivation et l'intégration d'ordre non-entier complexe sont encore peu connues à cause notamment d'une interprétation géométrique ou physique difficile à établir. En effet dans ce cas l'image de « l'aire sous la courbe sujette à des pondérations » ou de « la charge d'un condensateur » perd son sens, le facteur d'oubli devenant complexe. Ce facteur agit donc sur le module (Figure 1. 2) et l'argument (Figure 1. 3) de la fonction $f(t)$. De plus il est à noter que dans ce cas la dérivation non-entière d'une fonction réelle sera complexe.

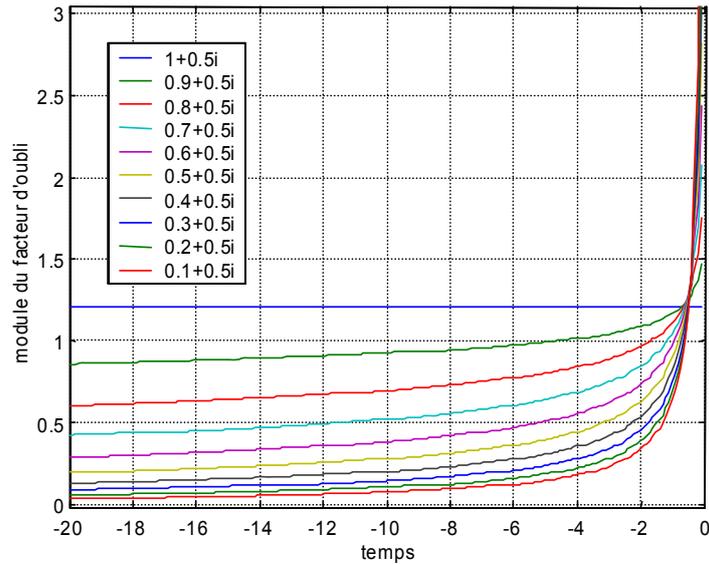


Figure 1. 2 : Courbes représentatives des variations du module du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5

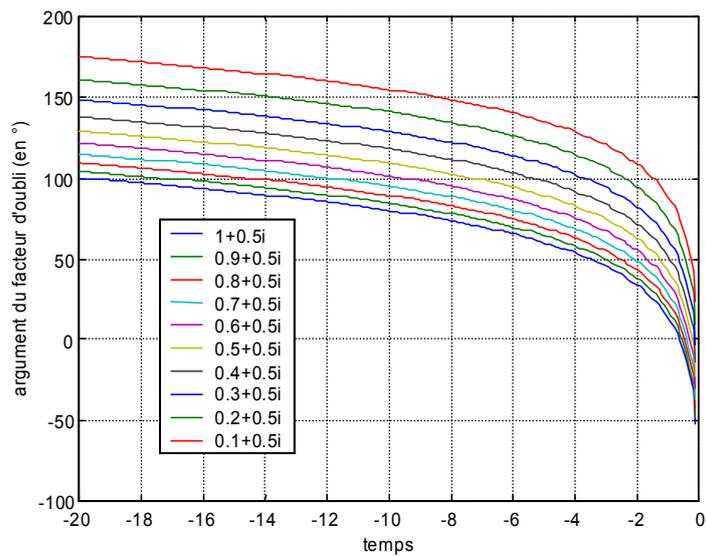


Figure 1. 3 : Courbes représentatives des variations de l'argument du facteur d'oubli pour des ordres d'intégration dont la partie réelle est comprise entre 0.1 et 1 et dont la partie imaginaire est fixée à 0.5

1.2.4. Interprétation système

Un dérivateur d'ordre ν quelconque, appelé dérivateur généralisé, est tel que sa grandeur de sortie $s(t)$ est proportionnelle à la dérivée $\nu^{\text{ème}}$ de sa grandeur d'entrée $e(t)$, soit :

$$s(t) = \tau^\nu e^{(\nu)}(t) = \tau^\nu D^\nu e(t), \quad (1.7)$$

où $D=d/dt$, ν est un entier ou non entier (réel ou complexe) et τ la constante de temps de différentiation. Lorsque la partie réelle de ν est négative, on parle indifféremment de dérivateur généralisé ou d'intégrateur généralisé, sachant qu'une dérivation à un ordre à partie réelle négative constitue en fait une intégration à l'ordre $-\nu$.

Sous l'hypothèse de conditions initiales nulles, la traduction opérationnelle de l'équation temporelle (1. 7) détermine l'équation symbolique :

$$S(s) = (\tau \cdot s)^\nu E(s). \quad (1. 8)$$

Soit en posant $\omega_u=1/\tau$ la pulsation au gain unité :

$$S(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^\nu E(s), \quad (1. 9)$$

de laquelle se déduit la transmittance :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^\nu. \quad (1. 10)$$

Donnée par l'original de la transmittance $D(s)$, la réponse impulsionnelle s'exprime par la relation :

$$s_{imp}(t) = \left(\frac{1}{\omega_u} \right)^\nu L^{-1}[D(s)] = \left(\frac{1}{\omega_u} \right)^\nu L^{-1}[s^\nu] = \left(\frac{1}{\omega_u} \right)^\nu \frac{t^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} u(t) \quad \text{si } \text{Re}[\nu] \in \mathbb{R}^* \quad (1. 11)$$

$u(t)$ étant la fonction de Heaviside.

Donnée par le produit de convolution de l'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $s_{imp}(t)$, la réponse $s(t)$ à une entrée quelconque $e(t)$ (causale) s'exprime par la relation :

$$s(t) = s_{imp}(t) * e(t). \quad (1. 12)$$

Soit,

$$s(t) = \left(\frac{1}{\omega_u} \right)^\nu \int_{-\infty}^t \frac{(t-\theta)^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} e(\theta) d\theta \quad \text{si } \text{Re}[\nu] \in \mathbb{R}^*. \quad (1. 13)$$

Un tel formalisme n'est autre que celui établi par Cauchy au début du XIX^{ème} siècle. Une première définition de la dérivée généralisée d'une fonction causale $f(t)$ résulte d'une transposition directe à $f(t)$ de la formule intégrale tirée de l'identité des relations (1. 7) et (1. 13), soit :

$$D^{\nu} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\theta)^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} f(\theta) d\theta \quad \text{si } \operatorname{Re}[\nu] \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(t)=0 < 0 \text{ pour } t < 0. \quad (1.14)$$

Sachant que cette définition se limite à l'intégrale généralisée de $f(t)$ à l'ordre ν complexe avec $\operatorname{Re}[\nu] < 0$, elle mérite d'être complétée par son extension à ν complexe avec $\operatorname{Re}[\nu] > 0$, soit si on prend la partie finie (PF) du membre de droite de l'équation (1.14) [Oustaloup, 1995a] :

$$D^{\nu} f(t) = \text{PF} \left[\int_0^t \frac{(t-\theta)^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} f(\theta) d\theta \right] \quad \text{si } \operatorname{Re}[\nu] \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}^*, \quad (1.15)$$

on a :

$$D^{\nu} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha} \int_0^t \frac{\theta^{\alpha-\nu-1}}{\Gamma(\alpha-\nu)} f(t-\theta) d\theta \quad \text{si } \operatorname{Re}[\nu] \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}^*, \quad (1.16)$$

avec $\alpha = \operatorname{Ent}[\operatorname{Re}(\nu)] + 1$. Là aussi, cette définition révèle que contrairement à la dérivation entière, la dérivation non entière d'une fonction à un instant donné prend en compte tout le passé de la fonction.

1.2.5. Etude fréquentielle

Rappelons la transmittance de l'opérateur de dérivation non entière :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^{\nu}. \quad (1.17)$$

L'étude fréquentielle de cet opérateur est tout d'abord réalisée pour des ν réels puis complexes.

a. Etude fréquentielle d'un dérivateur non entier réel

La réponse fréquentielle de la transmittance (1.17) se déduit en remplaçant s par $j\omega$, soit :

$$D(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u} \right)^{\nu} \quad (1.18)$$

Le gain et la phase de l'opérateur s'écrivent :

$$|D(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^{\nu} \quad (1.19)$$

$$\operatorname{Arg}(D(j\omega)) = \nu \frac{\pi}{2} \quad (1.20)$$

Ainsi grâce à cet ordre de dérivation non entier réel :

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente 20ν dB par décade ce qui assure une variation continue de la pente de la droite de gain ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi=\nu\pi/2$ rad ce qui assure une variation continue de l'ordonnée de la droite de phase.

La Figure 1. 4 présente les réponses fréquentielles et impulsionnelles d'un dérivateur généralisé pour des ordres ν compris entre 0 et -2 et une fréquence au gain unité ω_u égale à 1 rad/s.

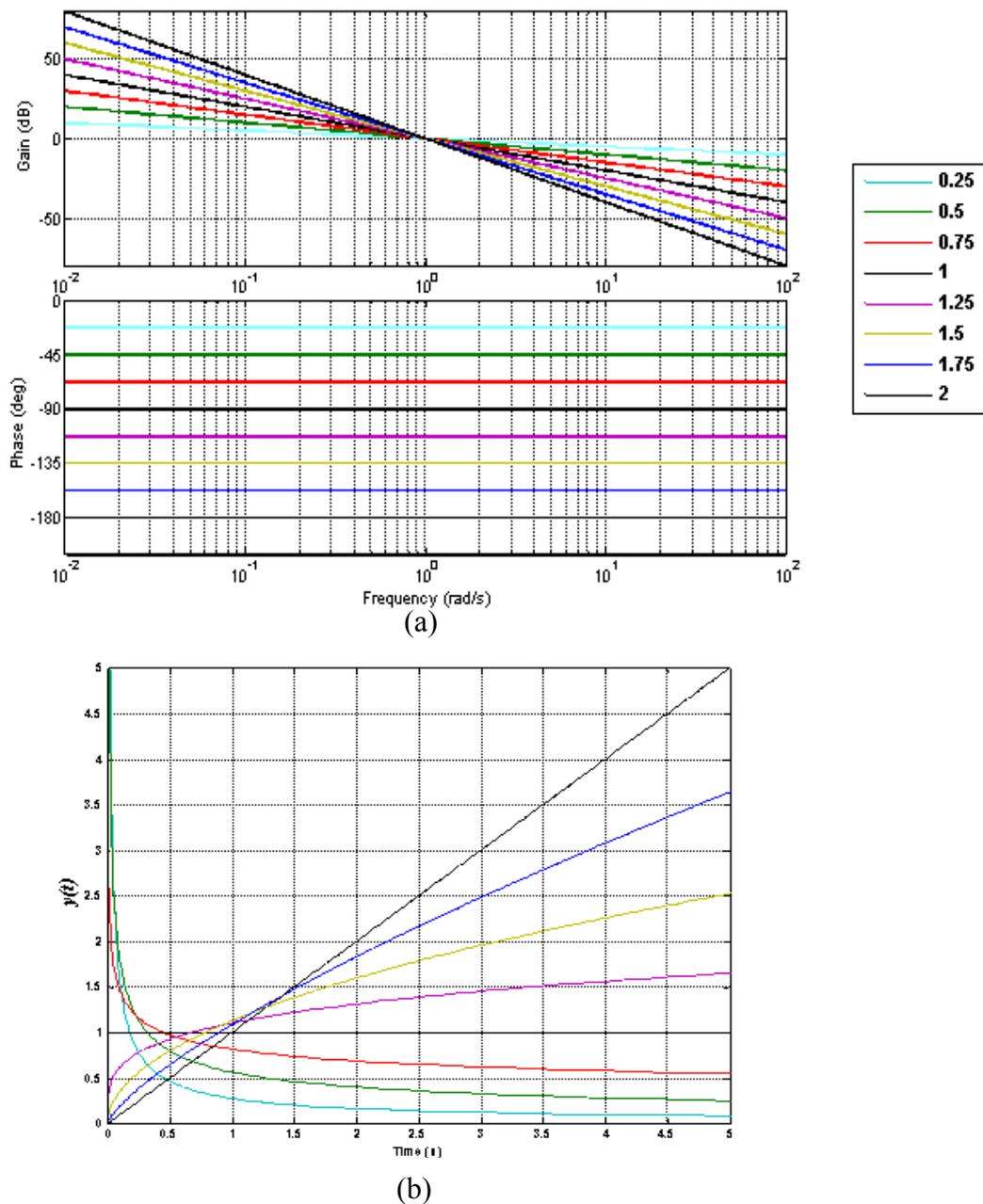


Figure 1. 4 : Réponses fréquentielles (a) et impulsionnelles (b) d'un dérivateur généralisé pour des ordres compris entre 0 et -2

b. Etude fréquentielle d'un dérivateur non entier complexe

Pour un ordre de dérivation non entier complexe, $v=a+ib$ avec a et b éléments de \mathfrak{R} , le gain et la phase de l'opérateur $D(s)$ ne correspondent pas au module et à l'argument de sa transmittance calculée pour $s=j\omega$. La grandeur de sortie $y(t)$ d'un dérivateur non entier complexe étant une grandeur complexe, l'opérateur $D(s)$ s'écrit :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^v = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^{a+ib} = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a e^{ib \ln \left(\frac{s}{\omega_u} \right)} \quad (1.21)$$

$$= \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \left[\cos \left(b \ln \left(\frac{s}{\omega_u} \right) \right) + i \sin \left(b \ln \left(\frac{s}{\omega_u} \right) \right) \right]. \quad (1.22)$$

Ainsi la transmittance opérationnelle se décompose intuitivement en :

$$D(s) = \Re_{e_i}(D(s)) + i \Im_{i_i}(D(s)) = D_{réel}(s) + i D_{imag}(s), \quad (1.23)$$

avec :

$$D_{réel}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \cos \left(b \ln \left(\frac{s}{\omega_u} \right) \right), \quad (1.24)$$

$$D_{imag}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^a \sin \left(b \ln \left(\frac{s}{\omega_u} \right) \right). \quad (1.25)$$

Les fonctions $D_{réel}(s)$ et $D_{imag}(s)$ représentant les transmittances relatives aux sorties réelles $y_i(t)$ et imaginaires $y_i(t)$ du dérivateur non entier complexe.

Il est parfois utile de remarquer que :

$$\Re_{e_i}(D(s)) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{s}{\omega_u} \right)^{a+ib} + \left(\frac{s}{\omega_u} \right)^{a-ib} \right] \quad (1.26)$$

Une distinction est faite entre le plan de Laplace \mathbb{C}_j avec $s = \sigma + j\omega$ et le plan de dérivation \mathbb{C}_i avec $v = a + ib$. Cette distinction, nous conduit à travailler dans un nouvel espace nommé espace bi-complexe $\mathbb{C} = \mathbb{C}_j + \mathbb{C}_i$ [Le Lay, 1998], et permet d'exprimer les réponses en fréquences correspondant aux parties réelles et imaginaires de la transmittance d'un dérivateur non entier complexe :

$$D_{réel}(s) = \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right)^a e^{ja \frac{\pi}{2}} \left[\cos \left(b \ln \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right) \right) \cosh \left(b \frac{\pi}{2} \right) - j \sin \left(b \ln \left(\frac{\omega}{\omega_u} \right) \right) \sinh \left(b \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (1.27)$$

$$D_{imag}(s) = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a e^{ja\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \cosh\left(b \frac{\pi}{2}\right) - j \cos\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \sinh\left(b \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (1.28)$$

Les gains et phases du dérivateur se déduisent ensuite des modules et arguments de ces deux réponses en fréquence, soit, pour $D_{réel}(s)$:

$$|D_{réel}(s)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \sqrt{\cos^2\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) + \sinh^2\left(b \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(D_{réel}(s)) &= a \frac{\pi}{2} + \arctan \left[\frac{\sin\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \sinh\left(b \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \cosh\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \right] \\ &= a \frac{\pi}{2} + \arctan \left[\tan\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \tanh\left(b \frac{\pi}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.30)$$

puis, pour $D_{imag}(s)$:

$$|D_{imag}(s)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^a \sqrt{\sin^2\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) + \sinh^2\left(b \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(D_{imag}(s)) &= a \frac{\pi}{2} + \arctan \left[\frac{\cos\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \sinh\left(b \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right) \cosh\left(b \frac{\pi}{2}\right)} \right] \\ &= a \frac{\pi}{2} + \arctan \left[\frac{\tanh\left(b \frac{\pi}{2}\right)}{\tan\left(b \ln\left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)\right)} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

A la pulsation ω_u , les valeurs et les pentes des gains de $D_{réel}$ et D_{imag} ont pour expressions :

$$|D_{réel}(j\omega_u)| = \cosh\left(b \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.33)$$

et
$$|D_{imag}(j\omega_u)| = \sinh\left(b \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.34)$$

puis
$$\left. \frac{\partial |D_{réel}(j\omega_u)|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 20a, \quad (1.35)$$

et
$$\left. \frac{\partial |D_{imag}(j\omega_u)|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = 20a. \quad (1.36)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- les valeurs de gains sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation,
- les pentes des gains sont exclusivement liées à la partie réelle a de l'ordre de dérivation.

Toujours à ω_u , les valeurs et les pentes des phases ont pour expressions:

$$Arg(D_{réel}(j\omega_u)) = a \frac{\pi}{2}, \quad (1.37)$$

et
$$Arg(D_{imag}(j\omega_u)) = a \frac{\pi}{2} + sign(b) \frac{\pi}{2}, \quad (1.38)$$

puis
$$\left. \frac{\partial |Arg(D_{réel}(j\omega_u))|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = -b \tanh\left(b \frac{\pi}{2}\right), \quad (1.39)$$

$$\left. \frac{\partial |Arg(D_{imag}(j\omega_u))|_{dB}}{\partial \log \omega} \right|_{\omega=\omega_u} = \frac{-b}{\tanh\left(b \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (1.40)$$

Les quatre dernières relations expriment qu'à la fréquence ω_u :

- la phase de $D_{réel}(s)$ est exclusivement liée à la partie réelle a de l'ordre de dérivation, alors que la phase de $D_{imag}(s)$ subit un saut lié au signe de b quand celui-ci change,
- les pentes des phases sont exclusivement liées à la partie imaginaire b de l'ordre de dérivation avec une pente continûment décroissante en fonction de b pour $D_{réel}(s)$ avec par ailleurs une pente nulle pour $b = 0$.

Ces particularités expliquent pourquoi $D_{réel}(s)$ est d'un intérêt applicatif plus important que $D_{imag}(s)$ quand on utilise ses ordres a et b pour modifier continûment les caractéristiques fréquentielles.

Pour $D_{réel}(s)$, les paramètres a et b de l'ordre de dérivation v ont ainsi des actions bien distinctes sur le comportement du gain et de la phase à la fréquence ω_u :

- a agit sur la **valeur de phase** et sur la **pente de gain**,
- b agit sur la **valeur du gain** et sur la **pente de la phase**.

De telles propriétés, illustrées par la Figure 1. 5, sont à l'origine de la stratégie de commande CRONE [Oustaloup, 1995] présentée au paragraphe suivant.

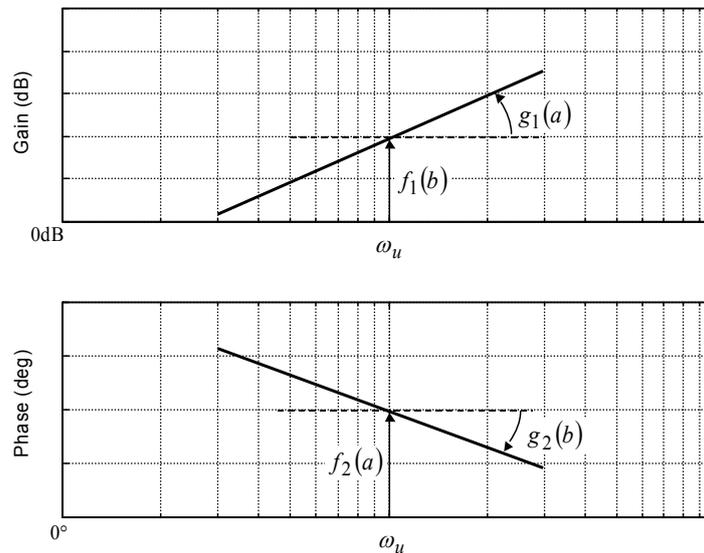


Figure 1. 5 : Actions des paramètres a et b de l'ordre de dérivation sur le gain et la phase du dérivateur réel

1.3. Loi de commande robuste d'ordre non entier pour les systèmes scalaires

Notre objectif est la synthèse du régulateur $K(s)$ (Figure 1. 6) qui permet au système ou procédé régulé G (de modèle $G(s)$) d'atteindre les performances énoncées par un cahier des charges tout en faisant face aux compromis entre ces exigences et les contraintes portant sur le système.

Pour diverses raisons (variations des paramètres du procédé, erreur de modélisation ou d'identification...) le procédé à réguler peut être caractérisé par un ensemble de modèles. $G(s)$ est alors défini par un ensemble de fonctions de transfert si G possède une seule entrée de commande et une seule sortie à commander ou par un ensemble de matrices de fonctions de transfert si G possède plusieurs entrées de commande et/ou plusieurs sorties à réguler. La conception du régulateur est effectuée à partir d'un état paramétrique donné du procédé que l'on appellera procédé nominal ou état paramétrique nominal et sera noté $G_o(s)$.

La propriété de robustesse d'un régulateur se traduit par la conservation des différentes performances de la boucle d'asservissement lors de l'implémentation de $K(s)$ sur l'ensemble des fonctions ou matrices de transfert $G(s)$. La particularité de la commande robuste d'ordre non entier (CRONE) est de chercher la **robustesse du degré de stabilité** là où d'autre loi de commande ne recherche que la **robustesse de la stabilité**. La robustesse du degré de stabilité est une robustesse plus sévère que la robustesse de la stabilité seule et on s'intéressera au maintien de la performance dynamique que constitue le facteur de résonance ou le facteur d'amortissement en asservissement vis-à-vis des variations paramétriques du procédé. Les facteurs de résonance et d'amortissement en asservissement sont en effet généralement liés au premier dépassement réduit de la réponse libre ou indicielle en asservissement et donc permettent une estimation de la robustesse du degré de stabilité des systèmes bouclés sans qu'aucune simulation temporelle ne soit nécessaire.

La fréquence propre amortie est un autre paramètre allant de paire avec le facteur de résonance en asservissement. Contrairement à d'autres lois de commande (commande à modèle interne (IMC), commande adaptative, commande à grand gain, etc.), la loi de commande CRONE ne cherche pas particulièrement à robustifier cette fréquence. Ce degré de liberté supplémentaire permet de limiter les efforts de commande en ne tentant pas d'aller contre la dynamique naturelle du système. En découplant robustesse de l'amortissement et la robustesse de la rapidité, la commande CRONE permet d'assurer un amortissement robuste sans que celui-ci se paie au prix de la robustesse de la rapidité et donc à des efforts de commande trop élevés.

Dans la suite de ce chapitre nous supposerons dans un premier temps que la marge de gain est suffisamment grande pour que la marge de phase chiffre à elle seule et de façon simplifiée le degré de stabilité. Conjointement, on se limitera aussi à l'étude d'un système monovarié.

Considérons le schéma de commande élémentaire donné par la Figure 1. 6 et, dans le contexte de la robustesse du degré de stabilité, précisons la nature des variations de phase qui contribuent à celles de la marge de phase.

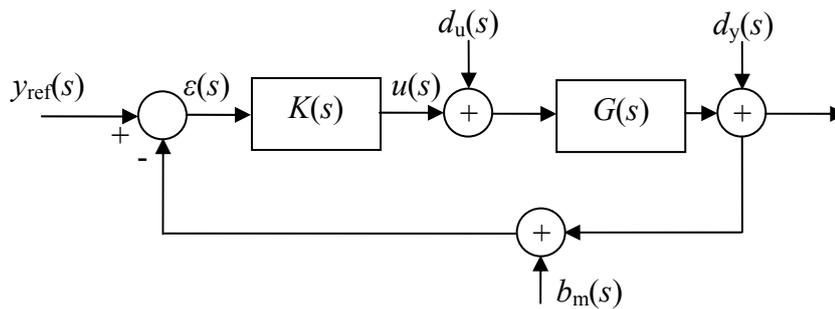


Figure 1. 6 : Schéma fonctionnel élémentaire utilisé par la commande CRONE

Les variations de la marge de phase peuvent résulter :

- des variations de la phase du procédé à la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u (elle-même susceptible de varier),
- des variations de la phase du régulateur autour de la fréquence ω_u .

Une façon de rendre robuste le degré de stabilité de la commande vis-à-vis des variations des paramètres du procédé, consiste notamment à réduire les variations de la marge de phase. Ceci pourra se faire soit en diminuant les variations de phase dues au régulateur (Figure 1. 7), soit en faisant en sorte que le produit $G(s)K(s)$ c'est-à-dire la fonction de transfert en la boucle ouverte, ait une phase constante quel que soit l'état paramétrique du procédé. Cette idée est à la base des deux premières générations de la commande CRONE.

1.3.1. Stratégie CRONE de première génération

a. Principe

La stratégie la plus immédiate pour rendre robuste la boucle fermée de la Figure 1. 6 est de choisir une pulsation ω_u se situant dans une plage de fréquence où les variations de phase du procédé ne sont pas excessives et de réduire au maximum les variations de phase du régulateur. En adoptant cette stratégie, la variation de la marge de phase ne sera plus qu'égale à la variation de la phase du procédé. La Figure 1. 7 illustre le cas où la variation de la pulsation ω_u dans la plage de fréquence $[\omega_A, \omega_B]$ est due à une variation du gain du procédé G .

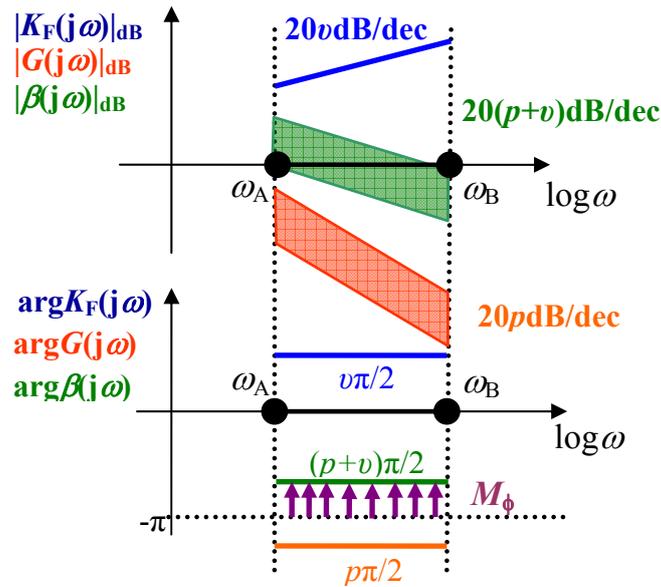


Figure 1. 7 : Diagramme de Bode du régulateur, du procédé et de la boucle ouverte

La recherche d'un régulateur CRONE à phase constante $K(s)$ définit l'approche initiale de la commande CRONE qu'utilise, notamment, la commande CRONE de première génération. Le régulateur fractionnaire CRONE défini par la transmittance d'ordre non entier réel bornée en fréquence

$$K_F(s) = C_0 \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^v \quad \text{avec } \omega_l < \omega_A \text{ et } \omega_h > \omega_B, \quad (1.41)$$

est approximé par une version réelle et entière de ce même régulateur obtenu grâce à une distribution récursive de N zéros et de N pôles réels (Figure 1. 8), soit :

$$K_R(s) = C_0 \prod_{k=N-1}^N \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}} \right) \quad (1.42)$$

avec :

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta, \quad (1.43)$$

$$\frac{\omega_k}{\omega_k} = \alpha \text{ et } \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \eta, \quad (1.44)$$

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{v}{(2N+1)}}, \tag{1.45}$$

$$\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{(1-v)}{(2N+1)}}, \tag{1.46}$$

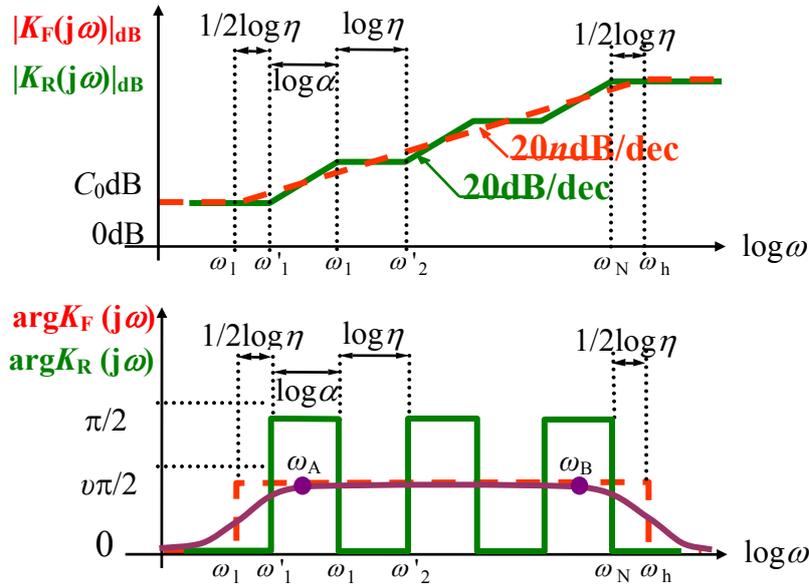


Figure 1. 8 : Réponse fréquentielle de la version fractionnaire de K_F et réelle K_R d'un régulateur CRONE à phase constante d'ordre non entier v

La particularité de la commande CRONE de première génération se situe dans l'apport de phase constant qu'apporte le régulateur (Figure 1. 8) dans la plage de fréquence où est susceptible d'évoluer la pulsation au gain unité en boucle ouverte. En effet, quand la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_u se situe dans la plage de fréquences $[\omega_A, \omega_B]$, le blocage de phase à $v\pi/2$ du régulateur assure alors l'invariance de la phase de ce dernier autour de la fréquence ω_u . Le régulateur ne participe donc pas aux variations de la marge de phase. Si le procédé a un comportement asymptotique d'ordre p , la marge de phase sera alors égale à $(v+p+2)\pi/2$ (Figure 1. 7).

De manière à limiter les efforts de commandes et l'erreur statique liée à l'effet de signaux exogènes constants, le régulateur est complété d'un intégrateur bornée d'ordre n_i et d'un filtre hautes fréquences d'ordre n_f :

$$K_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{s} + 1 \right)^{n_i} \left(\frac{1+s/\omega_l}{1+s/\omega_h} \right)^v \frac{1}{(1+s/\omega_f)^{n_f}}, \tag{1.47}$$

avec n_i et $n_f \in \mathbb{N}$ et $\omega_l \leq \omega_l$, et $\omega_f \geq \omega_h, \in \mathbb{R}^+$.

$n_f = 0$ assure la constance de la fonction de sensibilité sur l'effort de commande alors que $n_f \geq 1$ assure la décroissance de cette même fonction de sensibilité.

b. Commande CRONE de première génération et régulateur PID

Supposant un système à commander défini par la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{g_o}{s \left(\frac{s}{\omega_o} + 1 \right)} \text{ avec } g_o \in [2 ; 21] \text{ et } \omega_o \in [5 ; 50]. \quad (1.48)$$

Le procédé nominal sera choisi pour $g_o = 2.14$ et $\omega_o = 25$ rad/s. La réponse fréquentielle du procédé est présentée Figure 1. 9. Au voisinage d'une pulsation au gain unité en boucle ouverte définie par $\omega_u = 600$ rad/s (résultant d'un choix arbitraire), les variations de la phase du procédé dues aux variations paramétriques sont relativement faibles et les variations de la réponse fréquentielle de G se réduisent essentiellement à des variations de son module. Les régulateurs CRONE et PID qui sont synthétisés permettent d'obtenir une marge de phase de 50° . Le régulateur PID (Figure 1. 10) est de la forme :

$$K_F(s) = C_o \left(\frac{\omega_l}{s} + 1 \right)^{n_l} \left(\frac{1 + s/\omega_l}{1 + s/\omega_h} \right) \frac{1}{(1 + s/\omega_f)^{n_f}}, \quad (1.49)$$

avec $n_l = n_f = 1$, $\omega_l = 60$ rad/s, $\omega_f = 6000$ rad/s, $\omega_l = 166.2$ rad/s, $\omega_h = 2160$ rad/s et $C_o = 1850$.

Le régulateur CRONE fractionnaire (Figure 1. 10) est de la forme (1. 47) avec $n_l = n_f = 1$, $\omega_l = 40$ rad/s, $\omega_f = 60000$ rad/s, $\omega_l = 46.16$ rad/s, $\omega_h = 1560$ rad/s, $\nu = 0.62$ et $C_o = 1360$.

La Figure 1. 10 est une comparaison fréquentielle des régulateurs (CRONE rationnel et PID) obtenus. On peut observer que contrairement au régulateur PID le placement de fréquence du régulateur CRONE ne présente pas de symétrie par rapport à la pulsation ω_u . Ceci est ici dû au procédé nominal choisi. Cette dissymétrie permet d'une part d'améliorer le compromis robustesse-immunité de l'entrée du procédé et d'autre part d'apporter de la phase à la boucle ouverte sur une plage de fréquence plus grande et plus utile pour assurer la robustesse du degré de stabilité.

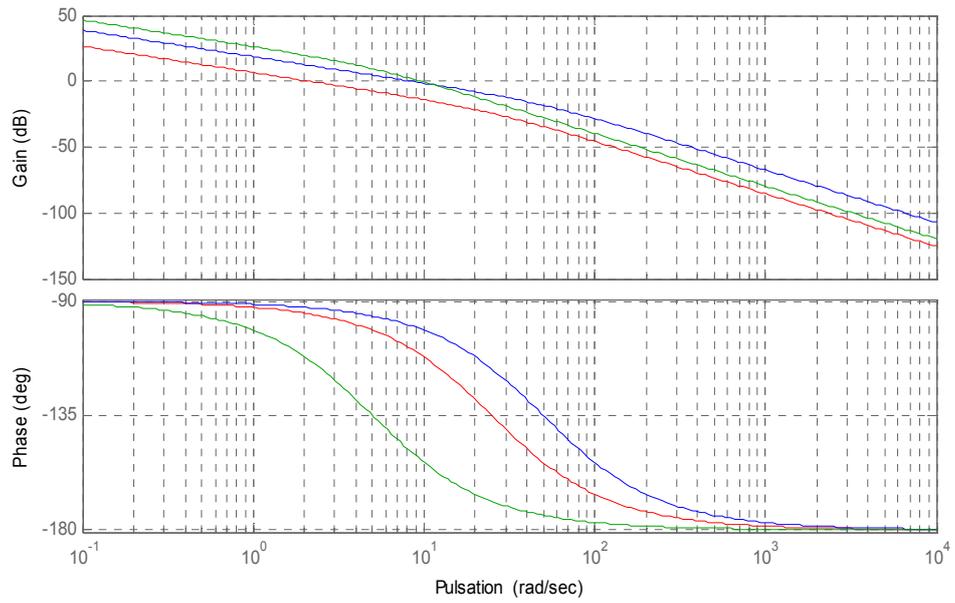


Figure 1. 9 : Réponse fréquentielle du procédé nominal (—) et de deux procédés reparamétrés (— et —)

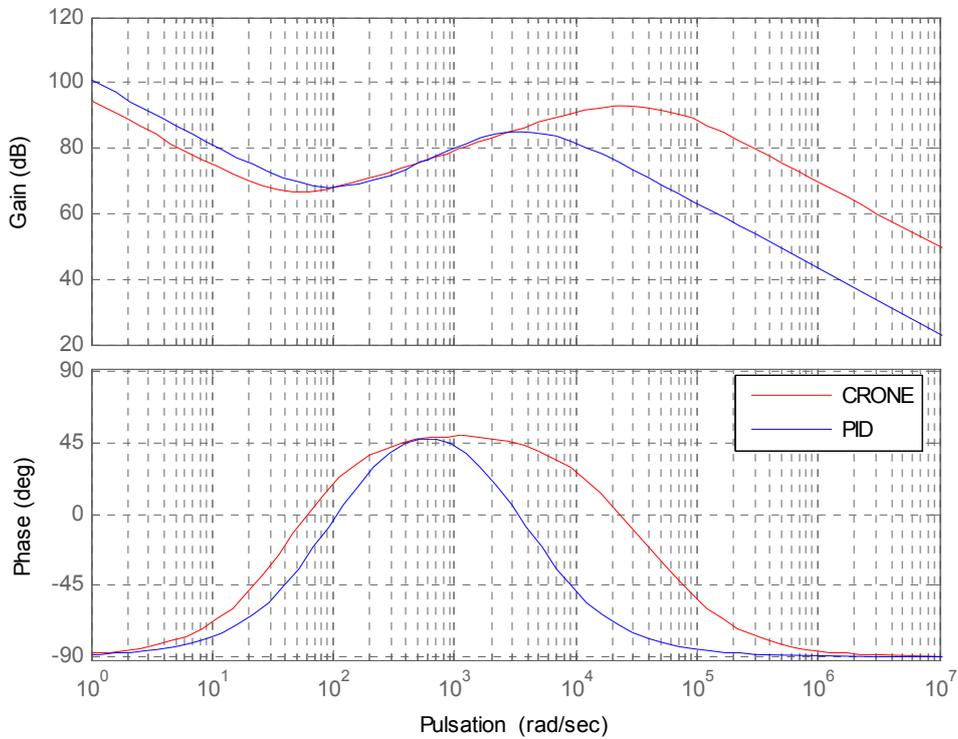


Figure 1. 10 : Comparaison des régulateurs obtenus

La Figure 1. 11 montre que les régulateurs trouvés assurent tous deux la même marge de phase (50°) à la même pulsation au gain unité (600 rad/s). Cependant, lorsqu'on applique ces derniers aux procédés reparamétrés on observe que l'apport de phase constant autour de la valeur nominale de ω_i apporté par le régulateur CRONE permet de conserver un même degré de stabilité quel que soit le procédé (Figure 1. 12). Ce n'est bien évidemment pas le cas avec le régulateur PID appliqué sur les mêmes procédés reparamétrés (Figure 1. 13), le degré de stabilité étant même très faible pour un des procédés reparamétrés. Les simulations temporelles de la réponse en boucle fermée à une variation échelon de la consigne (CRONE Figure 1. 14 et PID Figure 1. 15) permettent de corroborer ses observations.

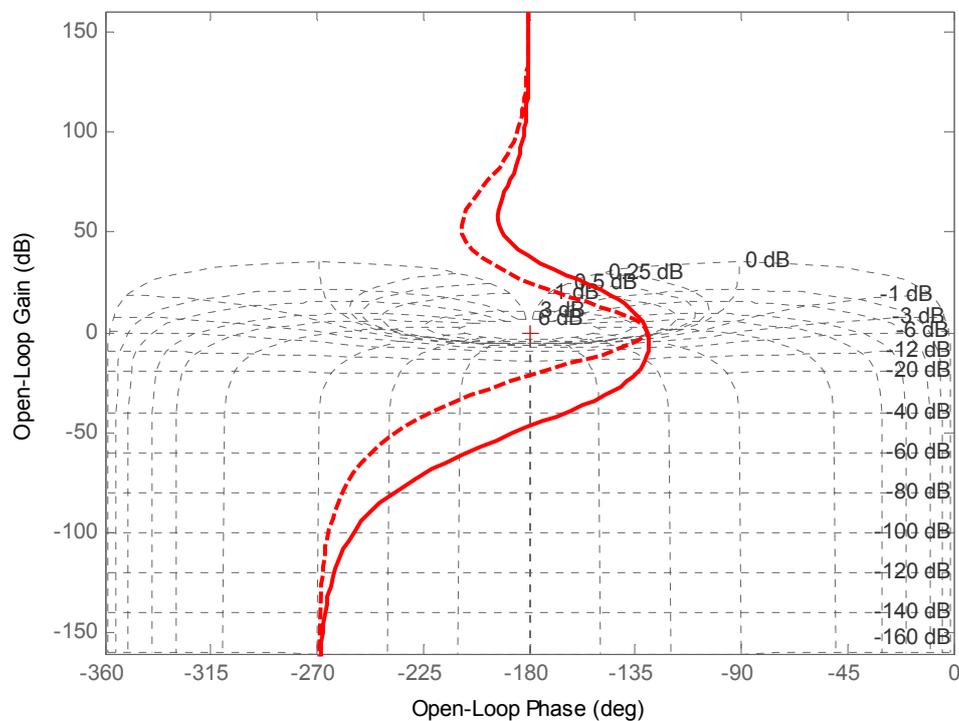


Figure 1. 11 : Diagramme de Nichols des boucles ouvertes nominales liées au régulateur CRONE (—) et au régulateur PID (- -)

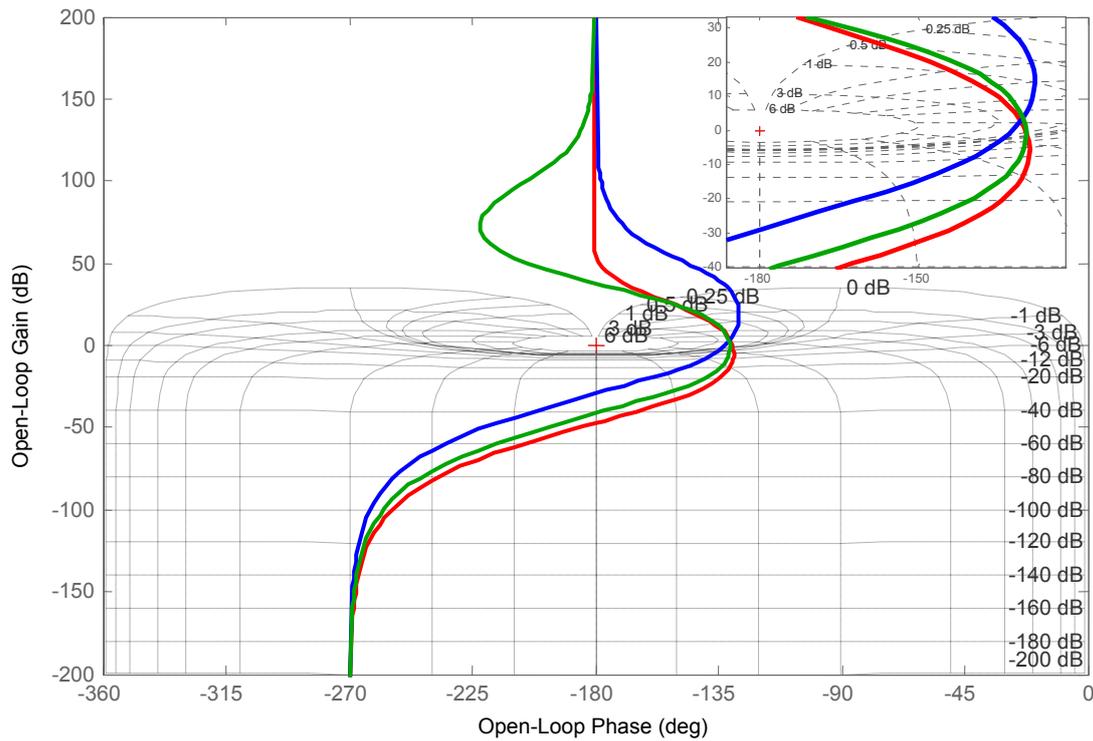


Figure 1. 12 : Diagramme de Nichols de la boucle ouverte CRONE pour les procédés nominal (—) et reparamétrés (— et —)

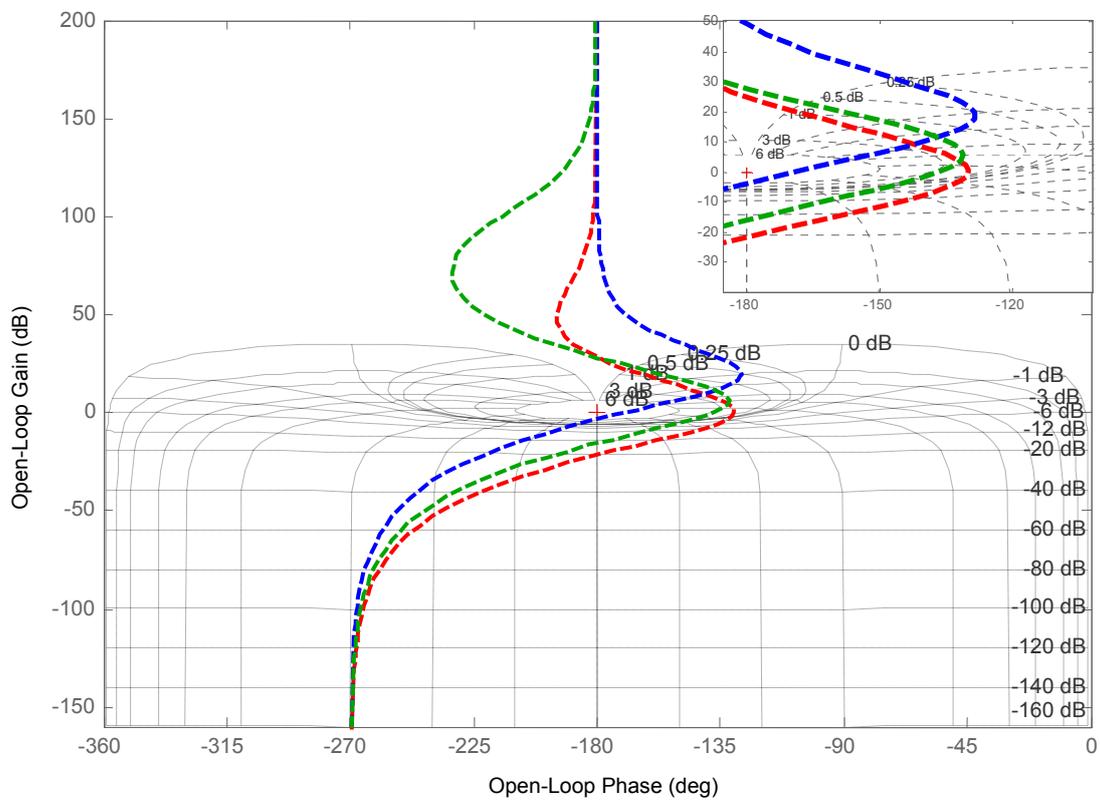


Figure 1. 13 : Diagramme de Nichols de la boucle ouverte PID pour les procédés nominal (--) et reparamétrés (- - et - -)

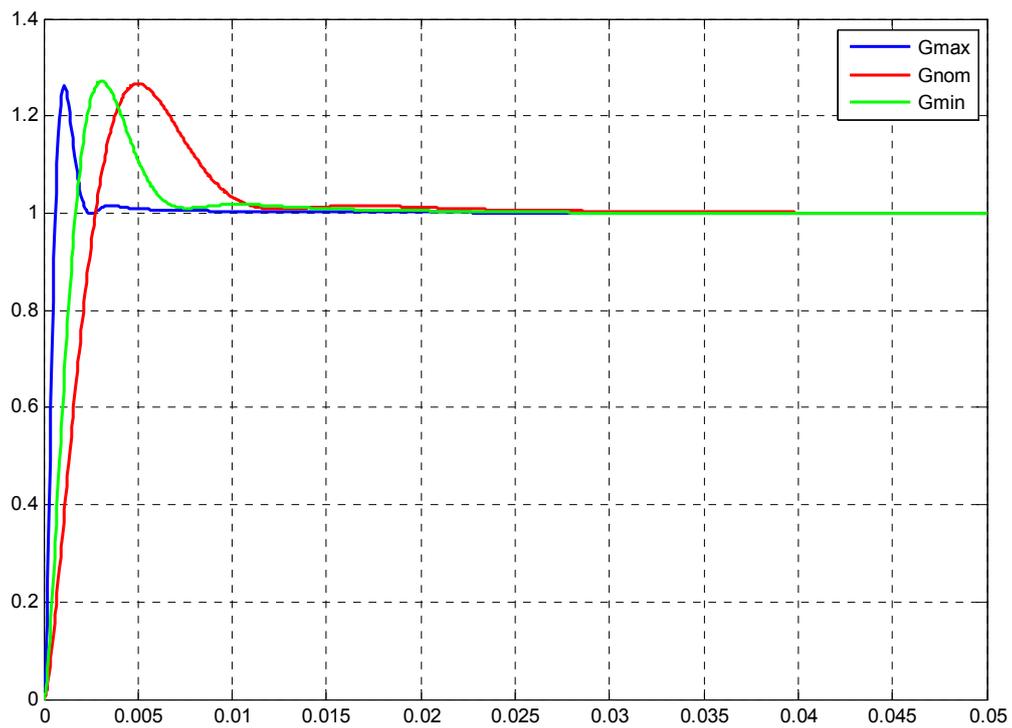


Figure 1. 14 : Réponses indicielles de la boucle fermée CRONE

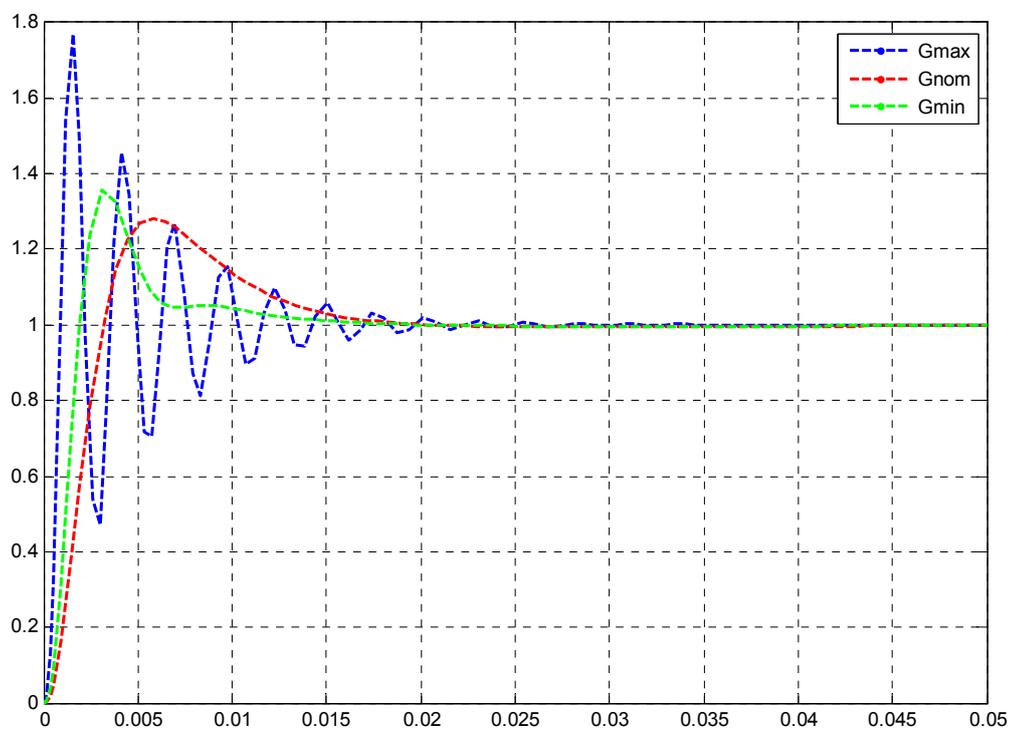


Figure 1. 15 : Réponses indicielles de la boucle fermée PID

1.3.2. Stratégie CRONE de deuxième et troisième génération.

Bien qu'elle ait été développée de façon totalement indépendante, les différentes générations de commande CRONE n'est pas la seule approche de synthèse ayant trait aux systèmes fractionnaires. Avant de décrire les approches CRONE de deuxième et troisième génération qui étendent le domaine d'application de la commande CRONE, notamment en s'intéressant à d'autres types de variations paramétriques, présentons rapidement d'autres approches avec lesquelles elles ont des points communs.

Devant un problème de stabilisation d'amplificateur à lampe dont le gain variait en fonction de la température, Bode fut probablement le premier en 1945 à proposer une solution s'apparentant aux opérateurs fractionnaires. Bode [Bode, 1945] proposa en effet d'adopter une fonction de transfert en boucle ouverte, à travers le logarithme de sa réponse fréquentielle, qui avec le recul correspond parfaitement à une fonction de transfert faisant intervenir des puissances fractionnaires :

$$\beta(s) = \frac{10^{A_0}}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2} + \frac{s}{\omega_0} \right)^{2(1-k)}} \quad (1.50)$$

En choisissant une valeur de k égale à $1/6$ il pu ainsi assurer une marge de phase de l'ordre de 30° et ce malgré une variation importante du gain d'amplification A_0 . Si on définit $\omega_0 = 1$ rad/s et $A_0 = 1$ on obtient le diagramme de Bode de la Figure 1. 16 où l'on voit clairement le « blocage de phase » à partir de la pulsation $\omega_0 = 1$ rad/sec.

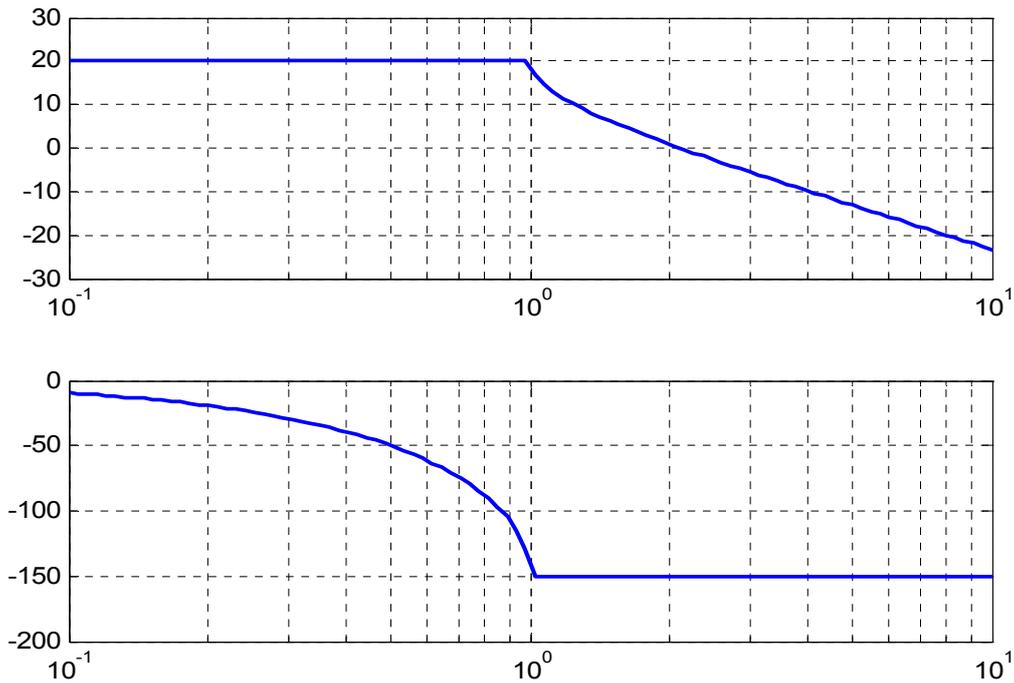


Figure 1. 16 : Diagramme de Bode de la réponse fréquentielle de la boucle ouverte fractionnaire définie par Bode

La fonction de transfert n'étant pas réalisable sous sa forme fractionnaire il l'approxima par une fonction de transfert rationnelle composée d'une alternance de zéros et de pôles sur la bande de fréquence la plus pertinente pour commander le système.

Tustin en 1958 [Tustin, 1958] proposa d'appliquer la solution optimale de Bode sur un problème de contrôle de mouvement. La problématique initiale du problème de Bode fut complétée par une prise en compte des limitations des actionneurs (Figure 1. 17).

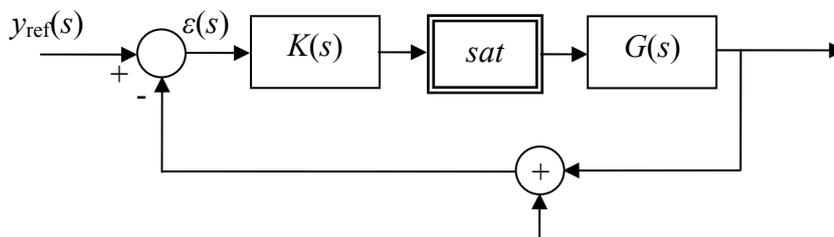


Figure 1. 17 : Schéma de commande équivalent au problème de Tustin

Afin de conserver une marge de phase convenable autour de la fréquence de coupure ω_c du procédé à commander il proposa de concevoir une boucle fermée robuste dont la fonction de transfert en boucle ouverte était fractionnaire.

Dans une communication entre T. Yoshida et S. Manabe l'idée d'une séparation du signal de commande en deux signaux à appliquer avant et après la saturation vu le jour. Il fut prouvé que séparer le signal de commande revenait à faire en sorte que la fonction de transfert en boucle ouverte soit de la forme d'un intégrateur fractionnaire :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_c}{s} \right)^v. \quad (1.51)$$

Manabe [Manabe, 1960, 1961, 1962, 1998 et 2002] fut le premier à réellement et clairement utiliser le comportement fractionnaire d'une réponse fréquentielle. Enfin Podlubny en 1999 proposa de généraliser le traditionnel régulateur PID en proposant un régulateur PID dont à la fois les actions intégrale et dérivée s'effectuent avec des ordres fractionnaires [Podlubny et al, 1999]. On peut considérer ce PID fractionnaire comme une légère extension du régulateur CRONE de première génération dont il étend un peu le domaine d'application.

A contrario de la commande CRONE de première génération, qui avait l'avantage d'être simple d'utilisation, celle de deuxième génération a pour but d'annuler globalement les variations de la phase de la réponse fréquentielle en boucle ouverte et plus uniquement celle du régulateur. Il n'est donc plus nécessaire de chercher une fréquence au gain unité ou les variations paramétriques du procédé se répercutent essentiellement sur le gain. La commande CRONE de troisième génération permettra elle de considérer d'autres types de variations paramétriques.

Le schéma de commande reste identique à celui proposé pour la première génération de commande CRONE (Figure 1. 6) cependant le but n'est plus de rechercher un régulateur $K(s)$ fractionnaire mais de définir une fonction de transfert en boucle ouverte $\beta(s)=G(s)K(s)$ d'ordre fractionnaire réel (deuxième génération) ou complexe (troisième génération) et d'en déduire le régulateur :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s} \right)^v, \quad (1.52)$$

Selon que l'ordre de dérivation v soit réel ou complexe ($v = a + ib$), le lieu de Nichols de $\beta(j\omega)$ sera respectivement une droite verticale ou une droite oblique (Figure 1. 18).

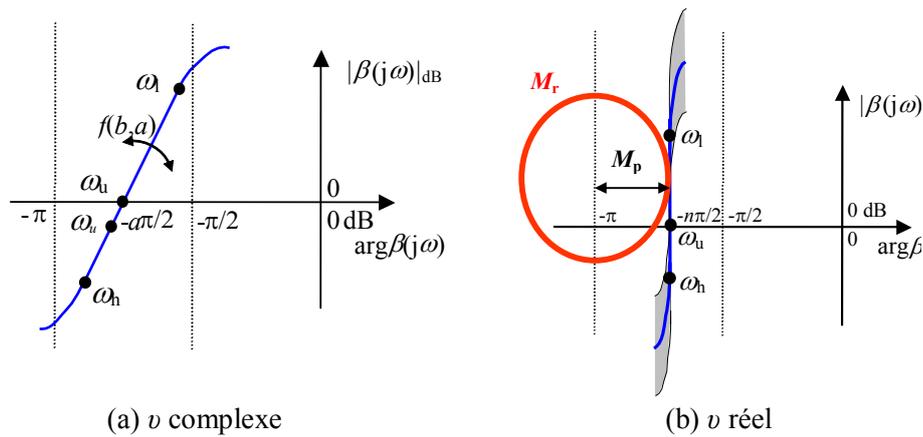


Figure 1. 18 : Lieu de Nichols de $\beta(j\omega)$ pour un ordre de dérivation v complexe (a) et réel (b)

Ces comportements fréquentiels n'étant nécessaires que sur une plage de fréquences située autour de la fréquence au gain unité, la fonction de transfert en boucle ouverte utilisée n'est celle d'un intégrateur d'ordre fractionnaire qu'entre des pulsations ω_l et ω_h . Pour la commande CRONE de deuxième génération, le blocage de phase désirée est ainsi obtenu avec une fonction de transfert définie au voisinage de ω_u par :

$$\beta(s) \approx \left(\frac{\omega_u}{\omega_l} \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_l}} \right)^v \quad \text{avec } \omega_l < \omega_h \quad (1.53)$$

1.3.3. Stratégie CRONE de deuxième génération

La fonction de transfert définie par (1.53) conduit donc à un lieu de Nichols en boucle ouverte qui dessine le gabarit vertical (v réel) pour l'état paramétrique nominal du procédé (Figure 1.18(b)). Lors d'une reparamétrisation du procédé (reparamétrisation conduisant uniquement à des variations de gain de la fonction de transfert en boucle ouverte autour de ω_u pour v réel), ce gabarit vertical glisse alors sur lui-même, assurant ainsi non seulement la constance de la marge de phase M_ϕ , mais également la constance du premier dépassement réduit de la réponse libre et du facteur d'amortissement, à travers la tangence du gabarit à un même contour d'isoamortissement [Oustaloup, 1995b]).

La recherche d'un tel gabarit définit l'approche qu'utilise *la commande CRONE de 2^{ème} génération*.

En effet l'étude du comportement en boucle fermée du gabarit vertical montre qu'il est exclusivement lié au comportement en boucle ouverte au voisinage de la fréquence au gain unité. Les fonctions de sensibilité $S(s)$ et sensibilité complémentaire $T(s)$ admettent comme expression :

$$T(s) = \frac{\beta(s)}{1 + \beta(s)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu}, \quad (1.54)$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + \beta(s)} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu}{1 + \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu}. \quad (1.55)$$

Le gain de ces fonctions de transferts atteint un maximum pour la fréquence de résonance, respectivement :

$$\omega_T = \left(-\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\nu}} \omega_u, \quad (1.56)$$

et

$$\omega_S = \left(-\cos\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\nu}} \omega_u. \quad (1.57)$$

La résonance existe et la stabilité est assurée si $-\cos(\nu\pi/2) > 0$ et $\nu < 2$, c'est-à-dire si et seulement $1 < \nu < 2$. Les facteurs de résonance s'écrivent respectivement :

$$M_T = Q_T = \left| \frac{T(j\omega_T)}{T(j0)} \right| = \frac{1}{\sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (1.58)$$

$$Q_S = \left| \frac{S(j\omega_S)}{S(j\infty)} \right| = \frac{1}{\sin\left(\nu \frac{\pi}{2}\right)} = (M_m)^{-1}, \quad (1.59)$$

avec M_T et M_m , respectivement le pic de résonance et la marge de module. On note le lien exclusif entre le facteur de résonance et l'ordre de la commande ν (indépendance vis-à-vis de ω_u). Il est donc possible de parler de résonance robuste.

Afin de prendre en compte les spécifications de précision aux basses fréquences, le gabarit vertical au voisinage de la fréquence ω_u et les spécifications sur la sensibilité de l'entrée aux hautes fréquences, la boucle ouverte fractionnaire (1. 53) sera augmentée d'un intégrateur bornée d'ordre n_i et d'un filtre hautes fréquences d'ordre n_f :

$$\mathbf{\beta}(s) = \beta_1(s) \beta(s) \beta_h(s), \quad (1. 60)$$

avec :

- $\beta_1(s)$ la transmittance d'un proportionnel-intégrateur d'ordre n_i dont la fréquence transitionnelle est généralement inférieure ou égale à la fréquence transitionnelle extrême basse de $\beta(s)$. $\beta_1(s)$ est alors définie par :

$$\beta_1(s) = C_1 \left(\frac{\omega_1'}{s} + 1 \right)^{n_i} \text{ avec } n_i \in \mathbb{N}^+ \text{ et } \omega_1' \leq \omega_l \quad (1. 61)$$

- $\beta_h(s)$ la transmittance d'un filtre passe-bas d'ordre n_h dont la fréquence transitionnelle est généralement supérieure ou égale à la fréquence transitionnelle extrême haute de $\beta(s)$. $\beta_h(s)$ est alors définie par :

$$\beta_h(p) = \frac{C_h}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h'} \right)^{n_h}} \text{ avec } n_h \in \mathbb{N}^+ \text{ et } \omega_h' \geq \omega_h, \quad (1. 62)$$

Ainsi $\mathbf{\beta}(s)$ s'écrit :

$$\mathbf{\beta}(s) = K \left(\frac{\omega_1'}{s} + 1 \right)^{n_i} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h'}}{1 + \frac{s}{\omega_l}} \right)^{\nu} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h'} \right)^{n_h}} \quad (1. 63)$$

K permet d'assurer un gain unité à la boucle ouverte à la fréquence ω_u , l'ordre n_i est choisi de manière à garantir la précision nécessaire en régime permanent et n_h permet de satisfaire aux spécifications hautes fréquences, notamment celles relatives au signal de commande.

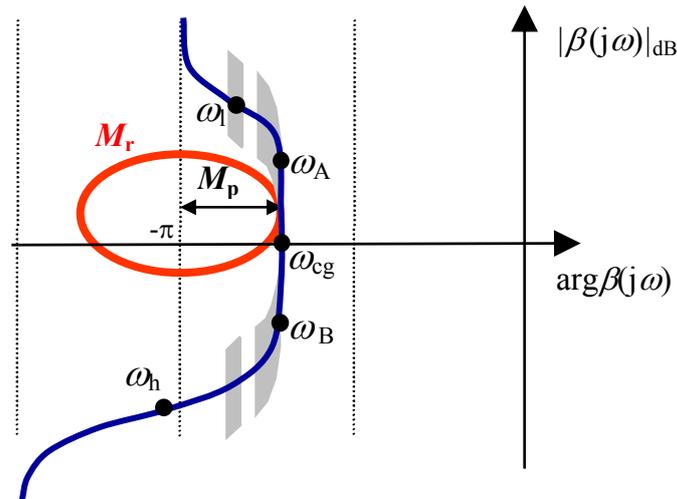


Figure 1. 19 : Diagramme de Nichols de la boucle ouverte fractionnaire augmentée des parties hautes et basses fréquences

Une fois $\beta(s)$ déterminé, le régulateur fractionnaire est défini par sa réponse fréquentielle :

$$K_F(j\omega) = \frac{\beta(j\omega)}{G_o(j\omega)}, \tag{1. 64}$$

où $G_o(j\omega)$ est la réponse fréquentielle du procédé nominal. Le régulateur ne possède plus de blocage de phase comme pour la commande CRONE de première génération mais est conçu de manière à imposer un blocage de phase à la boucle ouverte (Figure 1. 19 et Figure 1. 20).

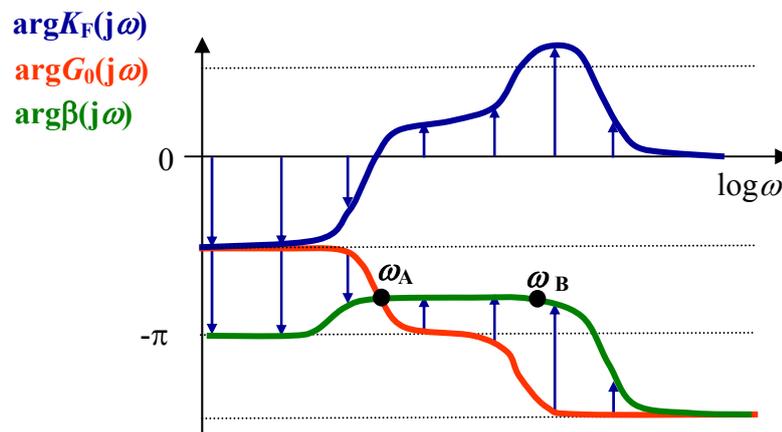


Figure 1. 20 : Diagramme de phase du procédé nominal, du régulateur et de la boucle ouverte

La synthèse de la forme rationnelle du régulateur réel, $K_R(s)$ se fera par identification fréquentielle de la réponse fréquentielle $K_F(j\omega)$ du régulateur fractionnaire. Le point fort de cette méthode est qu'il est facile de trouver un régulateur rationnel $K_R(s)$ d'ordre peu élevé (et générant une erreur d'approximation suffisamment faible) permettant la résolution du

problème de commande robuste et ce, même si l'ordre du modèle du procédé et/ou de la description des spécifications est élevé.

Cependant, le glissement vertical du gabarit lors d'une reparamétrisation du procédé est une condition qui n'est respectée que dans les cas suivants :

- lors d'une modification de l'ensemble des paramètres du procédé, si la fréquence ω_u appartient à un comportement asymptotique du procédé ;
- lors d'une modification du gain ainsi que des fréquences transitionnelles éloignées de ω_u .

En dehors de ces cas, le gabarit ne glisse plus sur lui-même lors d'une reparamétrisation du procédé. Il n'y a alors aucune raison pour qu'il assure au mieux la robustesse de la commande (Figure 1. 21 (a)). Comme le montre la Figure 1. 21 (b), il est toutefois possible de trouver un paramétrage de la fonction de transfert en boucle ouverte permettant d'assurer la commande robuste d'un système caractérisé par des domaines d'incertitudes fréquentiels (chacun étant défini par l'enveloppe de l'ensemble des réponses fréquentielles du procédé à une fréquence donnée) qui ne sont pas uniquement des segments de droites verticaux (variations de gain). Cette forme évoluée des réponses fréquentielles conduit à généraliser le gabarit vertical initial et deux niveaux de généralisations ont été proposés.

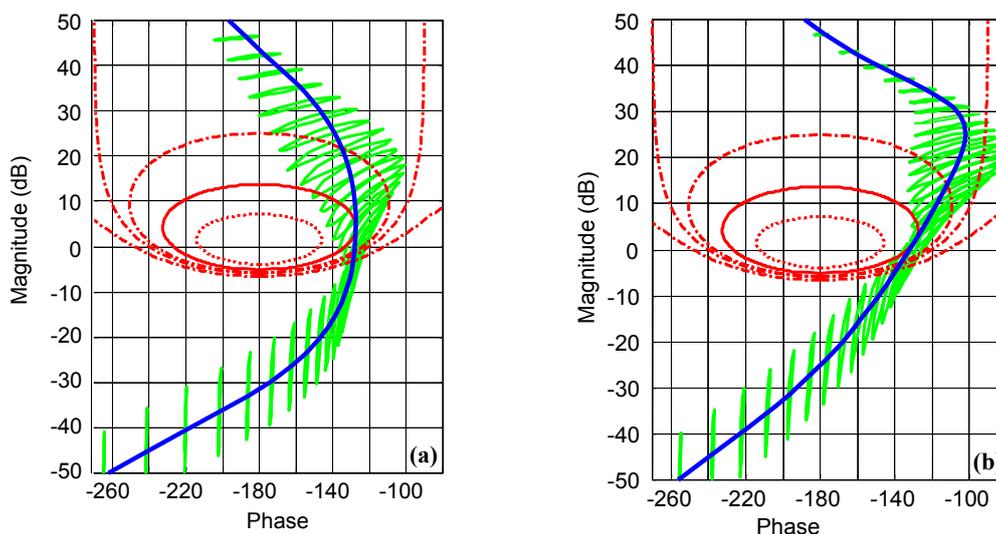


Figure 1. 21 : Diagramme de Nichols de la boucle ouverte nominale (—) et des domaines d'incertitudes (—) (a) dans le cas d'une stratégie CRONE de deuxième génération, (b) dans le cas d'une stratégie CRONE de troisième génération

1.3.4. Stratégie CRONE de troisième génération

Soit $G_0(p)$ le procédé nominal et $G(p)$ le procédé reparamétré; dans le cas de système possédant une entrée de commande et une sortie à réguler, ils sont liés par l'équation :

$$G(s) = G_0(s) \Delta_m G(s) = G_0(s) + \Delta_a G(s), \quad (1.65)$$

où :

$$\Delta_m G(s) = 1 + \Delta_a G(s) G_0^{-1}(s), \quad (1.66)$$

$\Delta_m G(p)$ et $\Delta_a G(p)$ représentant respectivement des formes multiplicatives et additives de l'incertitude du modèle réel $G(p)$ par rapport au modèle nominal.

La boucle ouverte reparamétrée s'écrira donc :

$$\beta(s) = G(s)C(s) = G_0(s) \Delta_m G(s) C(s) = \beta_0(s) \Delta_m G(s), \quad (1.67)$$

$\beta_0(s)$ étant la boucle ouverte nominale. La comparaison de (1.65) et (1.67) montre que $\beta(s)$ et $G(s)$ sont caractérisés par les mêmes domaines d'incertitudes $\Delta_m G(j\omega)$. **La stratégie CRONE cherchera donc à positionner optimalement les domaines d'incertitudes** et ce, sans modification de leur forme dans le plan de Nichols où la multiplication de $G(j\omega)$ par $K(j\omega)$ ne conduit qu'à des translations de gain et de phase.

Comme dit précédemment, dans le cas le plus général où les variations paramétriques du procédé engendrent autre chose qu'un glissement vertical du gabarit, la stratégie de deuxième génération n'est plus adéquate. La Figure 1.22 permet de visualiser les variations du facteur de résonance (maximum de la fonction de sensibilité T).

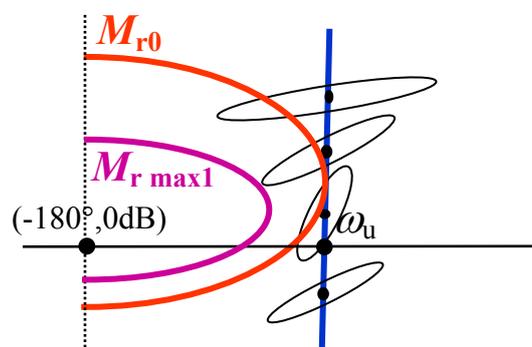


Figure 1.22 : Variation du degré de stabilité dans le cas général avec une stratégie CRONE de deuxième génération.

La recherche d'un gabarit optimal (gabarit curviligne ou gabarit généralisée) au sens de la minimisation de la variation du degré de stabilité sous les contraintes de calibrage des fonctions de sensibilités définit la stratégie optimale qu'utilise la commande CRONE de 3^{ème} génération. Cela revient à discriminer, parmi un ensemble de lieux de Nichols en boucle ouverte qui tangentent un même contour de performance spécifié, le lieu qui positionne les domaines d'incertitudes de façon à ce qu'ils permettent de respecter au mieux les spécifications de robustesse du degrés de stabilité mais aussi de performance

a. Le gabarit généralisé

Le premier niveau de généralisation consiste à considérer dans le plan de Nichols un gabarit défini comme un segment de droite pour l'état paramétrique nominal du procédé, mais de direction et de position quelconques appelé **gabarit généralisé** [Lanusse, 1994]. Pour ce faire l'ordre réel v est remplacé par un ordre $v = a+ib$ complexe (Figure 1. 18a), a déterminant le placement en phase du gabarit puis b son inclinaison par rapport à la verticale. Un facteur réel détermine son placement en gain.

Au voisinage de la pulsation au gain unité, le gabarit généralisé est décrit dans un premier temps par la restriction dans le plan opérationnel \mathbb{C}_j de la transmittance d'un intégrateur non entier complexe, soit :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^a \left(\cosh\left(b\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\operatorname{Re}_{/i}\left(\left(\frac{\omega_u}{s}\right)^{ib}\right)\right) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^a \left(\cosh\left(b\frac{\pi}{2}\right)\right) \left(\cos\left(b\ln\left(\frac{\omega_u}{s}\right)\right)\right), \quad (1. 68)$$

Un terme puissance ($\operatorname{sign}(b)$) est ajouté afin que l'ordre imaginaire d'intégration b agisse non seulement sur la valeur absolue de la pente de lieu de Nichols de $\beta(s)$ à la fréquence au gain unité mais aussi également sur son signe :

$$\beta(s) = \left(\frac{\omega_u}{s}\right)^a \left(\cosh\left(b\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\operatorname{sign}(b)} \left(\operatorname{Re}_{/i}\left(\left(\frac{\omega_u}{s}\right)^{ib}\right)\right)^{-\operatorname{sign}(b)}. \quad (1. 69)$$

L'angle que fait le gabarit par rapport à la verticale est donné par :

$$\frac{d\left(\beta(j\omega)\right)_{\text{dB}}}{d(\text{phase}\beta(j\omega))} = \frac{-20a \operatorname{sign}(b)}{\ln(10)b \tanh\left(b\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (1. 70)$$

Pour des raisons de performances en basses et hautes fréquences mais aussi de stabilité en boucle fermée il est nécessaire de borner la transmittance de description du gabarit

généralisée. Si l'équation (1. 69) est utilisée sans aucune limitation de bande fréquentielle, la fonction de transfert en boucle ouverte utilisée comme réponse fréquentielle de référence au voisinage de la fréquence au gain unité dans la méthodologie CRONE troisième génération générerait des fonctions de transfert en boucle fermée instables pour $b \neq 0$. En effet, sachant que l'approximation rationnelle d'ordre infini d'une telle boucle ouverte d'ordre complexe non bornée en fréquence [Oustaloup *et al*, 2000] ne possède pas de pôles à partie réelle positive et que sa réponse fréquentielle entoure une infinité de fois (dans le sens positif ou négatif suivant le signe de b) le point -1 du plan complexe, il est évident que le critère de stabilité de Nyquist ne peut être respecté.

Afin de garantir la stabilité en boucle fermée il est possible de choisir une fonction de transfert en boucle ouverte du type :

$$\beta(s) = C^{\text{sign}(b)} \left(C_0 \frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_l} \right)^a \left(\text{Re}_{/i} \left(C_0 \frac{1+s/\omega_h}{1+s/\omega_l} \right)^{ib'} \right)^{-q \text{sign}(b')}, \quad (1. 71)$$

$$C = \cosh \left(b \left(\tan^{-1} \left(\frac{\omega_u}{\omega_l} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right) \right) \right), \quad (1. 72)$$

$$C_0 = \left(1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_l} \right)^2 / 1 + \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (1. 73)$$

$$|b'| < \min \left[\frac{\pi}{2 \ln(\alpha_0)}, \frac{\pi}{2 \left| \ln \left(\alpha_0 \frac{\omega_l}{\omega_h} \right) \right|} \right]. \quad (1. 74)$$

La paire (b', q) permet d'assurer l'angle désiré entre la verticale et le gabarit généralisé associé à b , sachant que q est la plus petite valeur permettant d'éviter un phénomène déformant la réponse fréquentielle et décrit précisément dans [Pommier, 2002]. Ce phénomène apparaît lorsque l'argument de la partie restreinte à \mathbb{C}_i n'est pas comprise dans l'intervalle $]-\pi/2 ; \pi/2 [$. Le gain C_0 est calculé afin que le placement en phase à la fréquence ω_u du gabarit généralisé ne dépende que du paramètre a . Le gain C permet d'assurer un gain unité à la boucle ouverte à la fréquence ω_u .

b. Boucle ouverte fractionnaire incluant le gabarit généralisé

Afin de prendre en compte les spécifications de précision aux basses fréquences, le gabarit généralisé au voisinage de la fréquence ω_u et les spécifications sur la sensibilité de l'entrée aux hautes fréquences de la boucle ouverte fractionnaire, la relation (1. 71) est augmentée d'un intégrateur borné d'ordre n_i et d'un filtre hautes fréquences d'ordre n_h :

$$\mathbf{\beta}(s) = \beta_l(s) \beta(s) \beta_h(s), \quad (1. 75)$$

avec :

- $\beta_l(s)$ la transmittance d'un proportionnel-intégrateur d'ordre n_l dont la fréquence transitionnelle est inférieure ou égale à la fréquence transitionnelle extrême basse de $\beta(s)$. $\beta_l(s)$ est alors définie par :

$$\beta_l(s) = C_l \left(\frac{\omega_l'}{s} + 1 \right)^{n_l} \text{ avec } n_l \in \mathbb{N}^+ \text{ et } \omega_l' \leq \omega_l, \quad (1. 76)$$

- $\beta_h(s)$ la transmittance d'un filtre passe-bas d'ordre n_h dont la fréquence transitionnelle est supérieure ou égale à la fréquence transitionnelle extrême haute de $\beta(s)$. $\beta_h(s)$ est alors définie par :

$$\beta_h(s) = \frac{C_h}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h'} \right)^{n_h}} \text{ avec } n_h \in \mathbb{N}^+ \text{ et } \omega_h' \geq \omega_h. \quad (1. 77)$$

Ainsi $\mathbf{\beta}(s)$ s'écrit :

$$\mathbf{\beta}(s) = K \left(\frac{\omega_l'}{s} + 1 \right)^{n_l} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_l}} \right)^a \left(\mathfrak{R}_i \left[\left[C_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_l}} \right]^{ib'} \right] \right)^{-q \text{sign}(b')} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_h'} \right)^{n_h}}, \quad (1. 78)$$

K permettant d'assurer un gain unité à la boucle ouverte à la fréquence ω_u , n_l est choisie de manière à assurer les performances de précision en régime permanent et n_h permet de satisfaire aux spécifications hautes fréquences.

c. Le gabarit généralisé optimal

L'analyse de la robustesse d'un asservissement et notamment de la robustesse de son degré de stabilité peut se faire au travers des mesures de marge de stabilité (marge de gain et de phase).

De façon plus sûre, cette robustesse peut être mesurée à l'aide des pics de résonance des fonctions de sensibilités $T(s)$ et $S(s)$. Même si le pic de résonance de $S(s)$ est directement lié à la marge de module [Oustaloup, 1994], le pic de résonance de $T(s)$ est plus généralement exploité dans la mesure où il est extrêmement corrélé à la valeur du premier dépassement réduit de la réponse indicielle (en mode linéaire petits signaux) vis-à-vis de la consigne. Le pic de résonance est défini par :

$$M_r = \max_{\omega} |T(j\omega)| \quad (\text{et dans le cas multivariable} = \|T(j\omega)\|_{\infty}) \quad (1.79)$$

Il peut être observé grâce aux tracés conjoints de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte et de l'abaque de Nichols.

L'idée sur laquelle repose le commande CRONE est de minimiser les variations du pic de résonance en plaçant de manière optimale les contours d'incertitudes fréquentiels (dus au procédé) autour du contour d'amplitude correspondant au facteur de résonance désiré (M_{ro}) pour l'état nominal du procédé (Figure 1. 23).

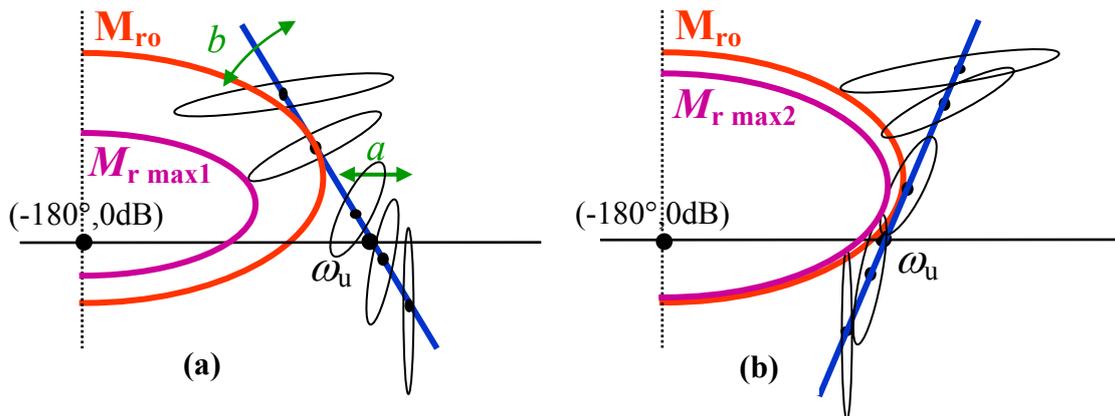


Figure 1. 23 : Lieu de Nichols de la boucle ouverte nominal et de ces domaines d'incertitude dans le cas d'un gabarit généralisé quelconque (a) et du gabarit (généralisé) optimal (b)

De plus ce placement des contours d'incertitudes doit aussi tenir compte des performances autres que la robustesse : précision (basses fréquences) et sensibilité aux bruits de mesure (hautes fréquences). La recherche du gabarit optimal est réalisée par une méthode d'optimisation non linéaire minimisant les critères [Oustaloup, 1991a] :

$$J = (D'_{1_{\min}} - D'_{1_o})^2 + (D'_{1_{\max}} - D'_{1_o})^2 \quad \text{ou} \quad J = (M_{r_{\min}} - M_{ro})^2 + (M_{r_{\max}} - M_{ro})^2, \quad (1.80)$$

sous les contraintes de performances suivantes et illustrées Figure 1. 24 et Figure 1. 25 :

- évolution des réponses indicielles en régulation et en asservissement conformément à un calibre prédéterminé par le concepteur (zone 1 et 2),
- atténuer l'effet du bruit de mesure sur la sortie au delà d'une fréquence donnée (zone 3),
- atténuer l'influence sur la sortie $y_{\text{mes}}(t)$ d'une perturbation de sortie $d_y(t)$ en deçà d'une fréquence donnée (zone 4),
- prendre en compte une spécification sur la marge de module (zone 5).

D'autres contraintes fréquentielles sur l'ensemble des fonctions de sensibilité peuvent être aussi considérées. De l'optimisation réalisée découle les paramètres a , b , ω_l et ω_h .

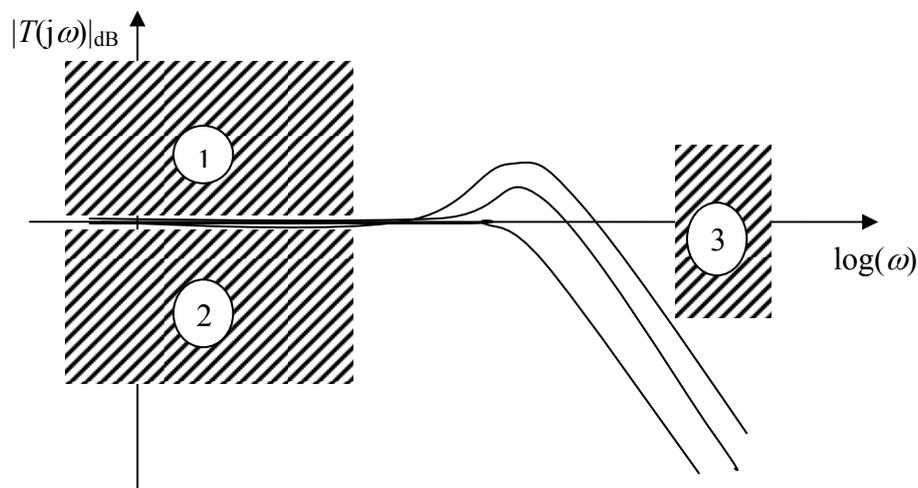


Figure 1. 24 : Contrainte de performance sur la fonction de sensibilité complémentaire

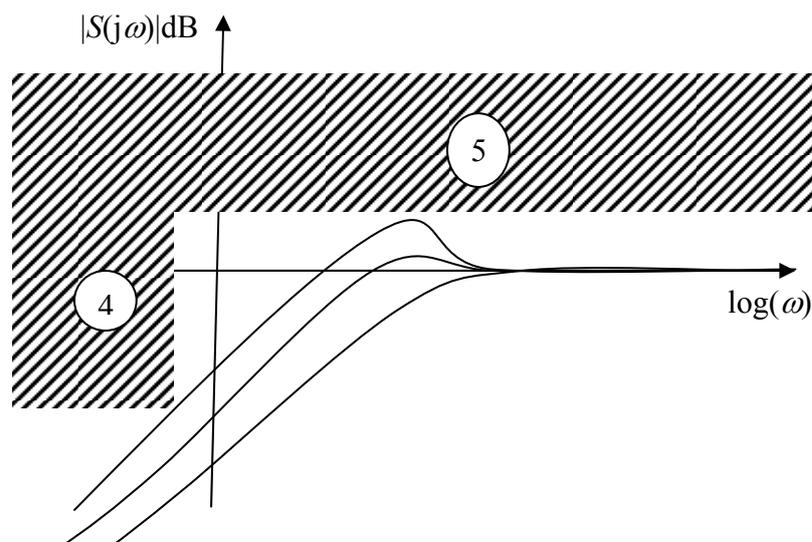


Figure 1. 25 :: Contrainte de performance sur la fonction de sensibilité

d. Gabarit curviligne

Quand les variations paramétriques du procédé conduisent à des domaines d'incertitude importants et sur une grande plage fréquentielle ou que les performances requises sont extrêmement exigeantes, les paramètres déterminés par l'optimisation a , b , ω_l et ω_h ne suffisent pas à résoudre le problème de commande. Le deuxième niveau de généralisation consiste alors à considérer, non plus un seul gabarit; mais un ensemble de gabarits généralisés appelé **gabarit curviligne**.

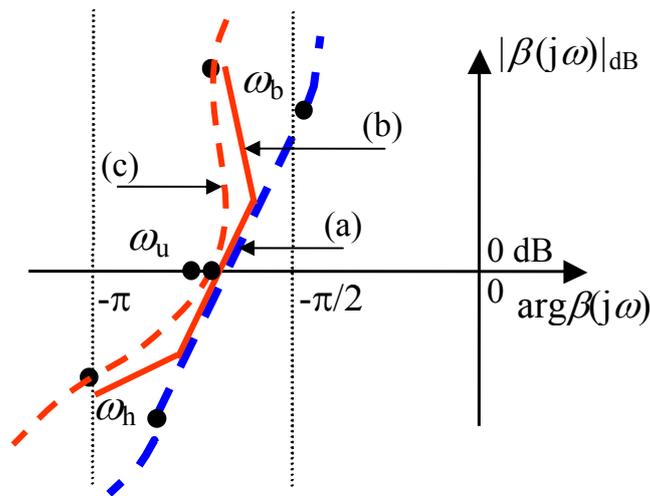


Figure 1. 26 : Gabarit généralisé (a), ensemble de gabarits généralisés (b) et gabarit curviligne (c--)

Le gabarit curviligne est donc le résultat de la multiplication de plusieurs réponses fréquentielles du type (1. 71). Sa fonction de transfert est :

$$\beta(s) = \prod_{k=-N^-}^{N^+} \beta_k(s), \tag{1. 81}$$

avec:

$$\beta_k(s) = C_k^{\text{sign}(b_k)} \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{\alpha_k} \left(\Re e_{/i} \left\{ \left(\alpha_k \frac{1+s/\omega_{k+1}}{1+s/\omega_k} \right)^{i b'_k} \right\} \right)^{-q_k \text{sign}(b'_k)}, \tag{1. 82}$$

et
$$\alpha_k = (\omega_{k+1}/\omega_k)^{1/2} \text{ pour } k \neq 0. \tag{1. 83}$$

Pour $k = 0$, $\beta_0(s)$ est défini par (1. 71) dans laquelle ω_l et ω_h sont remplacés par ω_0 et ω_1 .

Les fréquences ω_k et ω_{k+1} sont les fréquences transitionnelles basse et haute du gabarit généralisé de rang k . ω'_k représente la fréquence centrale autour de laquelle le gabarit est défini :

$$\omega'_k = (\omega_k \omega_{k+1})^{1/2} \quad \text{for } k \neq 0. \quad (1.84)$$

Le gain C_k assure le gain unitaire du $k^{\text{ième}}$ élément à la fréquence ω_u . N^- , N^+ désignent respectivement les nombres supérieur et inférieur de gabarits nécessaires autour de la fréquence ω_u .

Pour généraliser l'approche de la commande CRONE de troisième génération à toutes les classes des procédés scalaires (instables, à non-minimum de phase, possédant des modes résonants), il s'avère nécessaire de modifier la structure de la transmittance en boucle ouverte ((1.78) ou (1.81)).

Pour les systèmes SISO instables la fonction de transfert en boucle ouverte est modifiée de manière à rendre la fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$ unitaire à la pulsation où se situe le pôle à partie réelle positive [Looze et al, 1991] et à respecter le critère de stabilité de Nyquist.

Pour les systèmes SISO possédant un zéro à partie réelle positive la fonction de transfert en boucle ouverte est aussi modifiée de manière à rendre unitaire la fonction de sensibilité $S(s)$ à la pulsation où se situe ce zéro [Freudenberg et al, 1985].

Pour les systèmes SISO possédant un retard θ , il est intégré à la boucle ouverte fractionnaire. Enfin pour les systèmes SISO possédant un mode résonant, la méthode s'inspire de la méthode décrite dans [Lanusse et al, 1993] et repose sur le rejet des harmoniques d'une perturbation de sortie situées près des modes résonants à commander et à l'ouverture de la boucle à d'autres fréquences situées près de ces modes.

1.4. Commande CRONE des systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties carrés

La méthodologie CRONE a montré son efficacité pour la synthèse dans le domaine fréquentiel de commande robuste des systèmes (procédés) linéaires stationnaires (LTI), incertains et possédant une entrée de commande et une sortie (SISO) [Landau, 1995, Oustaloup, 1995]. Par ailleurs, les systèmes LTI ayant un nombre d'entrées de commande n égal aux nombre de sorties à réguler m (MIMO carrés) sont souvent, pour des questions de simplicité et/ou de

sécurité, commandés par des régulateurs "multivariables" diagonaux (dits aussi décentralisés). Il est alors fréquent que chaque élément du régulateur ne soit alors synthétisé qu'en ne tenant compte que d'un des comportements SISO du procédé (relation dynamique directe entre une seule entrée de commande et une seule sortie du procédé). L'influence des termes de couplage présents dans le procédé MIMO considéré est alors bien sûr susceptible de conduire à des systèmes dont les amortissements s'avèrent plus réduits que prévus. Deux extensions de la méthodologie CRONE SISO ont initialement été proposées pour la commande de procédés MIMO carrés.

1.4.1. Commande CRONE multi-SISO [Sutter, 1997]

La première approche est dite multi-SISO dans la mesure où le régulateur qui en résulte est caractérisé par une matrice de transfert diagonale dont chaque élément est synthétisé, indépendamment des autres, en tenant compte d'un élément de la diagonale du procédé dont l'incertitude est augmentée en tenant compte du module des termes non diagonaux. Si cette approche est souvent efficace, cette augmentation de l'incertitude pouvant être pessimiste, le régulateur obtenu peut aussi parfois s'avérer peu performant.

Considérons un procédé carré de dimension $m \times m$ défini par une matrice de transfert $G(s)$ constituée des éléments $g_{ij}(s)$ avec i et j compris entre 1 et m . La méthodologie multi-SISO CRONE permet la synthèse d'un régulateur diagonal $K(s)$ (Figure 1. 27). Fondée sur la méthodologie CRONE scalaire (SISO), la synthèse de chaque élément $K_i(s)$ du régulateur diagonal prend ici en compte:

- le terme diagonal $g_{oii}(s)$ de la fonction de transfert du procédé nominal ;
- l'incertitude structurée déterminée à partir des différences possibles entre $g_{ii}(s)$ et $g_{oii}(s)$;
- une incertitude non structurée additionnelle calculée à partir du module des éléments non diagonaux $g_{ji}(s)$ avec $1 \leq j \leq m$ et $j \neq i$.

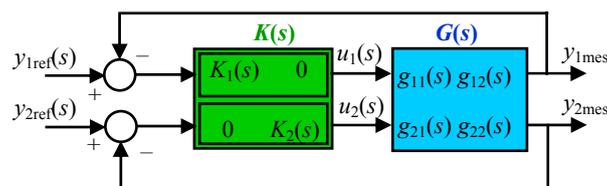


Figure 1. 27 : Commande décentralisée d'un procédé MIMO 2x2

En s'appuyant sur le parallèle qui peut être effectué entre les résultats auxquels conduisent le théorème de Gershgorin pour les systèmes multivariables certains [Rosenbrock, 1970 et 1974] [Maciejowski, 1989] et le théorème des petits gains pour les systèmes scalaires incertains [Zames, 1966] [Vidyasagar, 1982], il a été montré [Lanusse, 1996] qu'une synthèse indépendante de chacun des éléments du régulateur est permise en considérant une incertitude non structurée à travers un disque centré sur $g_{oii}(j\omega)$ et de rayon $r_{ii}(\omega)$ défini par

$$r_{ii}(\omega) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ \text{and } j \neq i}} |g_{ji}(j\omega)|. \quad (1.85)$$

Ce disque (dans le plan de Nyquist) peut alors être traduit en une ellipse pour être représentée autour du point $g_{oii}(j\omega)$ dans le plan de Nichols. Contrairement au théorème de Gershgorin où le minimum de la somme des éléments de la colonne i et de la ligne i est utilisé, ici seuls les éléments de la colonne i peuvent être considérés dans le cadre d'une synthèse indépendante de chacun des éléments du régulateur. Outre la majoration en norme (1.85), cela induit un pessimisme supplémentaire quand les éléments d'une ligne sont beaucoup plus faibles que ceux d'une colonne.

1.4.2. Commande Crone multivariable des systèmes carrés [Mathieu, 1997]

La deuxième approche est totalement multivariable au sens où le régulateur synthétisé n'est pas diagonal mais doit assurer un comportement découplé (diagonal) en boucle fermée pour l'état nominal du procédé. La fonction de transfert en boucle ouverte nominale, β_0 est alors diagonale et ses éléments sont simultanément optimisés afin de minimiser les variations du degré de stabilité en boucle fermée pour l'ensemble des états paramétriques du procédé.

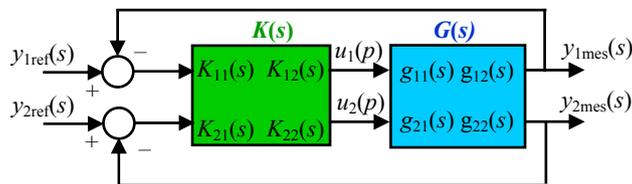


Figure 1.28 : Schéma d'une commande centralisée d'un procédé MIMO 2x2

Les avantages de cette méthode sont le nombre malgré tout restreint de paramètres permettant de décrire la boucle ouverte et la possibilité de prendre en compte les incertitudes liées au procédé sans aucun pessimisme.

Pour un système multivariable à phase minimale et stable possédant autant de sorties que d'entrées (système MIMO carré) le but est de paramétrer la matrice de boucle ouverte nominale diagonale de manière à satisfaire les spécifications suivantes :

- découplage nominal,
- spécification de précision aux basses fréquences,
- spécification sur le degré de stabilité (comportement autour de la fréquence ω_u),
- spécification sur la sensibilité de l'entrée aux hautes fréquences.

L'objectif de découplage par retour de sortie conduit à une matrice de transfert en boucle fermée diagonale et donc aussi à une matrice de boucle ouverte diagonale :

$$\boldsymbol{\beta}_o(s) = G(s)K(s) = \text{diag}[\beta_{o_i}(s)]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.86)$$

Chacun des éléments $\beta_{o_i}(s)$ est décrit en utilisant la stratégie de troisième génération de la commande CRONE SISO définit précédemment (relation (1.71)).

Les matrices de transfert en asservissement et en régulation découplées correspondantes s'expriment alors, respectivement par :

$$\mathbf{T}_o(s) = [I + \boldsymbol{\beta}_o(s)]^{-1} \boldsymbol{\beta}_o(s) = \text{diag}[T_{o_i}(s)]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.87)$$

$$\mathbf{S}_o(s) = [I + \boldsymbol{\beta}_o(s)]^{-1} = \text{diag}[S_{o_i}(s)]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.88)$$

$$T_{o_i}(s) = \frac{\beta_{o_i}(s)}{1 + \beta_{o_i}(s)}, \quad (1.89)$$

$$S_{o_i}(s) = \frac{1}{1 + \beta_{o_i}(s)}. \quad (1.90)$$

Les trois autres objectifs de la méthode seront respectés en prenant chacun des éléments de la matrice $\boldsymbol{\beta}_o(s)$ de la forme (1.78).

Chacun des éléments du régulateur est finalement obtenu à partir de l'égalité :

$$K_F(s) = \mathbf{G}_o^{-1}(s) \boldsymbol{\beta}_o(s). \quad (1.91)$$

En supposant que la matrice inverse du procédé nominal existe et s'écrit :

$$\mathbf{G}_o^{-1}(s) = \left[\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}^-(s)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}, \quad (1.92)$$

où $d_{ij}^-(s)$ sont des polynômes Hurwitz, i.e. n'ayant aucun zéro à partie réelle positive, le régulateur devient :

$$K_F(s) = \left[\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}^-(s)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diag} [\beta_{o_i}(s)]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.93)$$

ou encore;

$$K_F(s) = \left[\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}^-(s)} \beta_{o_i}(s) \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}. \quad (1.94)$$

a. Optimisation de la boucle ouverte

Pour tous les états paramétriques autre que l'état paramétrique nominal, les fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire ne sont plus diagonales mais reste liées par la relation $\mathbf{T}(s) + \mathbf{S}(s) = \mathbf{I}$. Les éléments diagonaux des matrices $\mathbf{T}(s)$ et $\mathbf{S}(s)$ continuent de vérifier les équations (1.89) et (1.90) et donc peuvent être chacun interprétés comme des fonctions de transfert d'une commande scalaire de transmittance en boucle ouverte, $\beta_{ii}(s)$ dite transmittance en boucle ouverte équivalente reparamétrées déduisent de :

$$\beta_{ii}(s) = \frac{T_{ii}(s)}{1 + T_{ii}(s)} = \frac{1 - S_{ii}(s)}{S_{ii}(s)}. \quad (1.95)$$

On pourra donc lier les transmittances en boucle ouverte nominales et équivalentes reparamétrées, respectivement $\beta_{ii_0}(s)$ et $\beta_{ii}(s)$, par :

$$\beta_{ii}(s) = \beta_{ii_0}(s) \cdot \Delta_i(s). \quad (1.96)$$

La transmittance $\Delta_i(s)$ représentant l'incertitude relative de $\beta_{ii_0}(s)$ par rapport à $\beta_{ii}(s)$. Cette incertitude est liée à la fois au procédé incertain mais aussi, et c'est une différence majeure avec le cas SISO, au régulateur $K_F(s)$.

L'optimisation de la matrice de boucle ouverte consiste à rechercher les paramètres de la matrice de boucle ouverte nominale qui assure un comportement semblable de la boucle fermée pour tous les procédés en terme de découplage et de maintien du degré de stabilité. Pour se faire on va minimiser le critère quadratique suivant :

$$J = \sum_{i=1}^N \left(\frac{M_{r_{i \max}} - M_{r_{i_0}}}{M_{r_{i_0}}} \right)^2 + \left(\frac{M_{r_{i \min}} - M_{r_{i_0}}}{M_{r_{i_0}}} \right)^2. \quad (1.97)$$

$M_{r_{i_0}}$ étant le facteur de résonance nominal désiré, et $M_{r_{i \max}}$ et $M_{r_{i \min}}$ les facteurs de résonance maximum et minimum obtenus pour l'ensemble des états paramétrique du système. Cela permet un positionnement et une forme optimale des domaines d'incertitudes $\Delta_i(p)$.

Alors que la première approche est simple à mettre en œuvre mais à un champ d'application réduit (procédé ayant un comportement découplé majeur), la deuxième approche est plus délicate à mettre en œuvre mais s'adresse à des procédés beaucoup plus couplés. Une première extension de la deuxième approche aux procédés instables a été proposée par Mathieu [Mathieu, 1997]. Cette extension repose sur la résolution d'une problématique identique à celle posée par Desoer [Desoer, 1984] ou Lin [Lin, 1991]. Soit $G(s)$ le modèle nominal du procédé à commander et stabiliser. Soit le schéma de commande suivant :

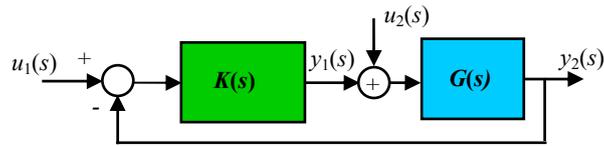


Figure 1. 29 : Schéma de commande de Lin

Considérons deux hypothèses :

H1. $G(s)$ a tous ses éléments dans $\mathbb{R}_{SP}^{n \times n}$ et est non-singulière $\Leftrightarrow \det(G(s)) \neq 0 \Leftrightarrow G^{-1}(s)$ existe,

H2. $Z_+(Z_+G(s)) \cap P_+(G(s)) = 0$.

où :

- \mathbb{R}_P : ensemble des fonctions rationnel propre ayant des coefficients réels,
- \mathbb{R}_{SP} : ensemble des fonctions rationnel strictement propre ayant des coefficients réels,
- $Z_+(G(s))$: ensemble des zéros de $G(s)$ dans \mathbb{C}^+
- $P_+(G(s))$: ensemble des pôles de $G(s)$ dans \mathbb{C}^+

Recherchons l'ensemble des régulateurs $K(s)$ découplant appartenant à $\mathbb{R}_P^{n \times n}$ pour lequel le couple $(G(s), K(s))$ est stable et la matrice liant les entrées $[u_1, u_2]^T$ et les sorties $[y_1, y_2]^T$:

$$H_{yu}(s) = \begin{bmatrix} H_{y_1u_1}(s) & H_{y_1u_2}(s) \\ H_{y_2u_1}(s) & H_{y_2u_2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} & K(s)G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} \\ G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} & G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.98)$$

est stable.

Les hypothèses H1 et H2 permettent de garantir l'existence d'un régulateur stabilisant et découplant.

Tout comme dans le cas scalaire la matrice en boucle ouverte nominale sera augmentée, de manière à satisfaire les exigences suivantes :

1. aucune simplification pôles/zéros entre $G(s)$ et $K(s)$,
2. découplage entrée/sortie du système en boucle fermée,
3. intégration du gabarit curviligne autour de la fréquence ω_u .

On écrit le procédé nominal, son inverse et chacun des éléments de la matrice de transfert en boucle ouverte, respectivement sous la forme :

$$G_o(s) = \left[\frac{N_{ij}(s)}{D_{ij}^-(s)D_{ij}^+(s)} \right]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (1.99)$$

$$G_o^{-1}(s) = \left[\frac{Z_{ij}(s)}{P_{ij}^-(s)P_{ij}^+(s)} \right]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (1.100)$$

$$\beta_{o_i}(s) = \left[\frac{n_{ii}(s)}{d_{ii}(s)} \right]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.101)$$

où $P_{ij}^+(s)$ et $D_{ij}^+(s)$ sont les polynômes contenant les pôles à partie réelle positive pour chacun des éléments de $G_o(s)$ et $G_o^{-1}(s)$.

Considérons, pour le procédé nominal, les transferts :

$$H_{y_1 u_1}(s) = K(s)(I + G_o(s)K(s))^{-1} = G_o^{-1}(s)H_{y_2 u_1}(s) \quad (1.102)$$

$$= \left[\frac{N_{ij}(s)n_{jj}(s)}{D_{ij}^-(s)D_{ij}^+(s)(n_{jj}(s) + d_{jj}(s))} \right]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (1.103)$$

et

$$H_{y_2 u_2}(s) = G_o(s)(I + K(s)G_o(s))^{-1} = (I + G_o(s)K(s))^{-1}G_o(s) \quad (1.104)$$

$$= \left[\frac{Z_{ij}(s)n_{ii}(s)}{P_{ij}^-(s)P_{ij}^+(s)(n_{ii}(s) + d_{ii}(s))} \right]_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (1.105)$$

qui représentent les transferts entre la consigne $u_1(s)$ et l'entrée de commande $y_1(s)$ d'une part, et entre l'entrée de perturbation en entrée du procédé $u_2(s)$ et la sortie mesurée $y_2(s)$.

Ces matrices de transfert engendrent des dynamiques stables si et seulement si :

- tous les polynômes $n_{jj}(s)$ sont divisibles par $D_{ij}^+(s)$ c'est-à-dire si et seulement si tous les polynômes $n_{jj}(s)$ sont divisibles par la fonction de transfert regroupant les pôles commun à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $G_o(s)$ notée $D_j^+(s) = \text{ppcm}\{D_{ij}^+(s), i=1, \dots, m\}$,

- tous les polynômes $n_{ii}(s)$ sont divisibles par $P_{ij}^+(s)$ c'est-à-dire si et seulement si tous les polynômes $n_{ii}(s)$ sont divisibles par la fonction de transfert regroupant les zéros commun à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $G_o^{-1}(s)$ notée ; $P_i^+(s) = \text{ppcm}\{P_{ij}^+(s), j=1, \dots, m\}$.

Finalement, pour $G_o(s)$ satisfaisant aux hypothèses H1 et H2 la matrice de transfert en boucle ouverte $\beta_o(s)$ répondant aux exigences 1, 2 et 3 s'exprime par :

$$\beta_o(s) = \text{diag} \left[\frac{D_j^+(s)}{P_i^+(s)} \beta_{oi}(s) \right]_{1 \leq i \leq m}, \quad (1.106)$$

$\beta_{oi}(s)$ étant la transmittance intégrant le gabarit curviligne décrit précédemment.

Toute la difficulté de mise en œuvre de cette méthodologie repose sur un manque de clarté quant aux différentes conditions de stabilité et sur son champ d'application qui reste malgré tout restreint à la seule classe des systèmes multivariables carrés instables. Il convient donc de généraliser cette approche en reformulant dans un premier temps les différentes conditions de stabilités puis en étendant son champ d'application à la classe plus générale des systèmes multivariables possédant un nombre d'entrées de commande (n) différent de celui des sorties à commander (m) retardés, instable, résonant et à non minimum de phase.

1.5. Conclusion

L'opérateur de dérivation non-entière est un opérateur vieux du début du XIX^{ème} siècle. Il fallut, cependant attendre la deuxième moitié du XX^{ème} siècle pour voir ses premières applications pratiques. Ce chapitre a permis de mettre en évidence certaines propriétés des systèmes non entiers et notamment ses applications en commande CRONE.

La première génération propose un régulateur optimal fractionnaire (non entier) à blocage de phase aux alentours de la fréquence au gain unité de la boucle ouverte ω_u . Ce type de régulateur ne participe donc pas aux variations de phase de la boucle ouverte et permet donc d'assurer la robustesse de la marge de phase pour les systèmes ayant déjà une phase constante autour de ω_u . Cette première génération s'applique donc, essentiellement à un ensemble de systèmes dont les variations paramétriques génèrent uniquement une variation du gain. Cela permet de conserver le blocage de phase du procédé et donc la robustesse de la marge de phase. Ce type de régulateur génère souvent des efforts de commande très élevés dus au fait que le comportement « blocage de phase » du procédé n'est souvent observé qu'en hautes

fréquences. C'est par contre une solution à recommander pour des systèmes purement intégrateurs ou inertiels.

La seconde génération propose de rechercher un régulateur optimal permettant d'assurer la robustesse de la marge de phase. Pour cela on définit une boucle ouverte fractionnaire d'ordre réel, $\beta(s)$ à blocage de phase sur toute une plage de fréquence autour de la fréquence au gain unité dont on déduit le régulateur, par la relation $K(s)=G_o^{-1}(s)\beta(s)$. Le lieu de Nichols de la boucle ouverte autour de la pulsation ω_u est une droite verticale permettant d'assurer la robustesse de la marge de phase, de la marge de module et aussi des pics de résonance des fonctions de sensibilité et sensibilité complémentaire.

Enfin, la troisième génération, basée sur une boucle ouverte fractionnaire d'ordre complexe, permet de commander un ensemble de procédés dont les variations paramétriques conduisent à des incertitudes plus complexes qu'une variation de gain. Le gabarit vertical est alors remplacé par un gabarit généralisé dont le lieu de Nichols autour de la fréquence ω_u reste une droite mais de direction quelconque. Un deuxième niveau de généralisation consiste à remplacer le gabarit généralisé par un ensemble de droites de direction quelconque (gabarit curviligne).

La commande CRONE des systèmes SISO est une méthodologie qui a fait ses preuves dans le monde industriel comme l'attestent des collaborations avec de grands groupes notamment de l'industrie automobile (PSA et Robert Bosch) et de l'énergétique (Alstom puis Areva). Simple à mettre en place dans le cas des systèmes SISO elle l'est beaucoup moins pour les systèmes MIMO et ce même s'ils sont carrés. En effet les phénomènes de couplage et la difficulté que l'on a à desceller la présence de zéros ou pôles à partie réelle positive rend la résolution du problème de commande beaucoup moins intuitive.

Bien que les approches multi-SISO et MIMO de la commande CRONE multivariable soient des approches complémentaires en termes de gestion du compromis performance/simplicité, leur domaine d'application et leur mise en œuvre industrielle restent encore restreints.

Ainsi la classe des systèmes instables à retard pur ou possédant des modes peu amortis n'a pas encore été approfondie. D'autre part tous les développements réalisés dans le cadre multivariable l'ont été pour des systèmes carrés. L'adaptation aux systèmes non carrés est indispensable.

Chapitre 2

Généralisation de la commande CRONE des systèmes multi-entrées multi-sorties carrés

Sommaire

2.1.	Introduction.....	66
2.2.	Les systèmes multi-entrées multi-sorties et leur commande.....	68
2.2.1.	Gain et orientation.....	68
2.2.2.	Réponse fréquentielle.....	74
2.2.3.	Commande des systèmes multivariables.....	74
2.2.4.	Sous-espace des matrices rationnelles.....	75
2.2.5.	Stabilité des systèmes bouclés multivariable.....	77
2.3.	Reformulation et extension de la commande CRONE des systèmes MIMO carrés, stables et à minimum de phase.....	79
2.3.1.	Positionnement du problème.....	80
2.3.2.	Existence du régulateur.....	82
2.3.3.	Découplage.....	83
2.3.4.	Optimisation.....	85
2.4.	Commande CRONE des systèmes multivariables instables et retardés.....	86
2.4.1.	Première étape : Retards.....	88
2.4.2.	Deuxième étape: recherche des zéros et pôles à partie réelle positive.....	88
2.4.3.	Application.....	95
2.5.	Commande CRONE des systèmes MIMO possédant des modes résonants.....	109
2.5.1.	Les modes résonants.....	110
2.5.2.	Application.....	113
2.6.	Conclusion.....	119

2.1. Introduction

Comme dans le cas monovariante (SISO), l'objectif de la commande CRONE multivariante (MIMO) est de rendre robuste des performances dynamiques en boucle fermée et plus particulièrement les facteurs d'amortissement ou les pics de résonance de différentes fonctions transferts entrée/sortie lorsque les paramètres du procédé varient. Utilisant le schéma de contrôle suivant (Figure 2. 1), l'opérateur de dérivation non entière permet d'y définir la matrice de fonction de transfert en boucle ouverte nominale.

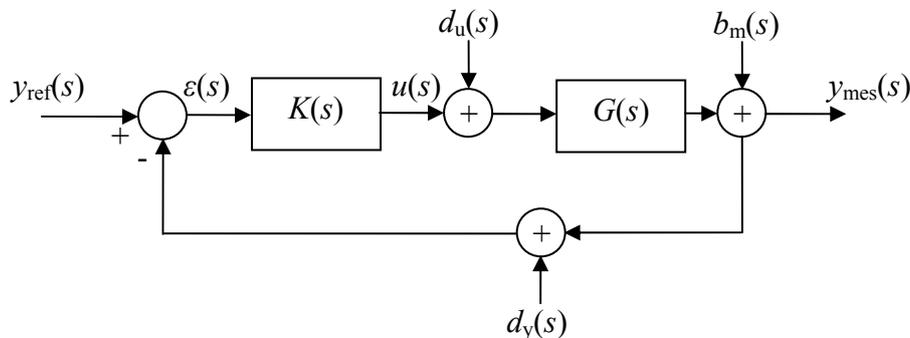


Figure 2. 1 : Schéma fonctionnel utilisé par la commande CRONE

Les notations suivantes seront adoptées :

- $G(s)$: ensemble de matrices de fonctions de transfert de taille $m \times m$ modélisant le procédé et ses différents états paramétriques,
- $G_0(s)$: matrice de fonctions de transfert nominale du procédé pouvant être choisie parmi l'ensemble $G(s)$,
- $K(s)$: matrice de taille $m \times m$ de fonction de transfert du régulateur CRONE recherché,
- $d_u(s)$: vecteur (taille $m \times 1$) des transformées de Laplace des perturbations en entrée du procédé,
- $d_y(s)$: vecteur (taille $m \times 1$) des transformées de Laplace des perturbations en sortie du procédé,
- $b_m(s)$: vecteur (taille $m \times 1$) des transformées de Laplace des bruits de mesure
- $y_{ref}(s)$: vecteur (taille $m \times 1$) des transformées de Laplace des signaux de référence ou consignes,
- $y_{mes}(s)$: vecteur (taille $m \times 1$) des transformées de Laplace des sorties du procédé,

- $\beta(s) = G(s)K(s)$: fonction de transfert en boucle ouverte du système présenté par la Figure 2. 1 en ouvrant la boucle en sortie du procédé,
- $\beta_i(s) = K(s)G(s)$: fonction de transfert en boucle ouverte en ouvrant la boucle en entrée du procédé,
- $S(s) = (I+G(s)K(s))^{-1}$: fonction de sensibilité liant la perturbation de sortie $d_y(s)$ et la sortie $y_{mes}(s)$,
- $T(s) = (I+G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s)$: fonction de sensibilité complémentaire liant l'entrée de référence $y_{ref}(s)$ et la sortie $y_{mes}(s)$,
- $S_i(s) = (I+G(s)K(s))^{-1}G(s) = S(s)G(s) = T(s)K^{-1}(s)$: fonction de transfert liant la perturbation en entrée $d_u(s)$ du procédé et la sortie $y_{mes}(s)$,
- $S_u(s) = K(s)(I+G(s)K(s))^{-1} = K(s)S(s) = G^{-1}(s)T(s)$: fonction de transfert liant l'entrée de référence $y_{ref}(s)$ à l'entrée de commande $u(s)$,
- $H_{ye}(s)$: matrice de fonction de transfert liant le vecteur de sortie $y = [u(s), y_{mes}(s)]^T$ et le vecteur d'entrée $e(s) = [b_m(s), y_{ref}(s), d_y(s), b_m(s)]^T$:

$$H_{ye}(s) = \begin{bmatrix} H_{u,y_{ref}} & H_{u,d_u} & H_{u,d_y} & H_{u,b_m} \\ H_{y_{mes},y_{ref}} & H_{y_{mes},d_u} & H_{y_{mes},d_y} & H_{y_{mes},b_m} \end{bmatrix} \quad (2. 1)$$

$$= \begin{bmatrix} S_u(s) & -S_u(s)G(s) & -S_u(s) & -S_u(s) \\ T(s) & S_i(s) & -T(s) & S(s) \end{bmatrix} \quad (2. 2)$$

- $\beta_{io}(s), \beta_o(s), S_o(s), T_o(s), S_{io}(s), S_{uo}(s)$: valeurs nominales des fonctions de transfert des fonctions de transfert définies précédemment,
- $N = \{1, \dots, m\}$,
- $A(j\omega)$: réponse fréquentielle de la matrice de fonction de transfert $A(s)$.

La matrice de fonctions de transfert remplaçant en multivariable la fonction de transfert du cas monovisible, la propriété de commutativité de la multiplication disparaît. Nous utiliserons les relations suivantes pour faire apparaître des formes connues de fonction de transfert :

$$(I + \beta(s))^{-1} + \beta(s)(I + \beta(s))^{-1} = S(s) + T(s) = I \quad (2. 3)$$

$$G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s) \quad (2. 4)$$

$$G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}K(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s) \quad (2. 5)$$

$$T(s) = \beta(s)(I + \beta(s))^{-1} = \left(I + (\beta(s))^{-1} \right)^{-1} \quad (2. 6)$$

A la fin des années 90, la commande CRONE est étendue aux systèmes stables possédant des zéros à partie réelle positive ayant plusieurs entrées et plusieurs sorties **carré** ($m \times m$). L'analyse des systèmes multivariables étant beaucoup plus délicate que dans le cas monovariable, dans ce chapitre nous allons énoncer un certain nombre de propriétés importantes, permettant notamment l'étude de leur stabilité, de leurs gain et phase, la détermination de leurs zéros et pôles à partie réelle positive (PRP), etc. Nous proposerons ensuite une reformulation de la méthodologie CRONE multivariable afin de rendre plus explicite les conditions permettant d'assurer la stabilité de la boucle fermée. Enfin, la plus grande partie de ce chapitre sera consacrée à différentes extensions proposées et traitées durant ce travail de thèse, à savoir la commande de systèmes MIMO carré instables, retardés, à non-minimum de phase ou possédant des modes résonants.

2.2. Les systèmes multi-entrées multi-sorties et leur commande

Au travers ce paragraphe, les outils permettant l'analyse des systèmes multivariables seront présentés. Ses outils seront essentiellement utilisés pour guider la mise en œuvre de la méthodologie CRONE MIMO reformulée au paragraphe suivant.

2.2.1. Gain et orientation

Le concept de « gain du système » est très utile pour caractériser le comportement dynamique du système. Il permet de lier les grandeurs d'entrées et de sorties et peut être lié :

- au comportement temporel du système (gain statique, gain instantanée),
- à la fréquence du signal d'entrée,
- à la direction du signal d'entrée (cas des systèmes multivariables).

Prenons l'exemple d'un système modélisé par la matrice de transfert suivante :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{10}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{5}{s+6} & \frac{6}{s+5} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Si on considère un vecteur de commande $u(t) = [10, 0]^T \sin(t)$ et qu'on évalue le vecteur de sortie à la pulsation $\omega = 10$ rad/s, on obtient :

$$|y(j\omega)|_{\omega=10} = \begin{bmatrix} 0.1005 \\ 0.0433 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Considérons maintenant le vecteur de commande $u(t) = [0, 10]^T \sin(t)$. Le vecteur de sortie est alors le suivant :

$$|y(j\omega)|_{\omega=10} = \begin{bmatrix} 0.0099 \\ 0.0542 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Ainsi pour deux vecteurs de commandes de normes identiques mais de directions non colinéaires, on obtient à la même pulsation deux vecteurs de sorties totalement différents [Albertos, 2004].

Afin d'évaluer la prépondérance d'un gain, on pourra utiliser des opérations mathématiques permettant de mesurer la taille d'une matrice (norme) [Skogestad, 2005]. La densité spectrale d'une matrice $G(s)$ est très utile pour mesurer la taille de cette matrice. Elle est définie par :

$$\rho(G) = \max_i |\lambda_i|, \quad (2.10)$$

où λ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice $G(s)$. Cependant les valeurs propres d'une matrice ne sont définies que pour les matrices carrées et font référence au gain pour lequel les vecteurs d'entrées et de sorties sont dans le même espace. D'autres gains plus élevés peuvent donc exister. En effet comme souligné précédemment, deux vecteurs d'entrée d'amplitude identique peuvent produire deux vecteurs de sortie totalement différents selon la direction de l'entrée. Il peut-être intéressant de savoir dans quelle direction se trouve les gains les plus extrêmes ce qui aidera à déterminer comment agir sur le procédé ou ce qu'il sera plus significatif de mesurer. Pour cela on utilise la décomposition en valeur singulière (SVD).

Remarque : En plus de donner une indication importante sur la direction et la valeur des extrema de gain de la matrice de transfert, cette méthode a la particularité de pouvoir être appliquée aussi bien aux systèmes carré $m \times m$ qu'aux systèmes non carrés $m \times n$ (m sorties et n entrées). De manière à rester le plus générale possible, elle va être présentée pour les systèmes MIMO non carrés.

Considérons un procédé $G(s)$ (système possédant m sorties et n entrées) à la pulsation ω ; la décomposition en valeur singulière de $G(j\omega) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ s'écrit :

$$G(j\omega) = W(j\omega)\Sigma V^H(j\omega) \quad (2.11)$$

avec :

- W une matrice de taille $m \times m$ composée des vecteurs singuliers unitaires de la sortie w_i orthonormaux entre eux ; l'ensemble de ces vecteurs forme une base orthonormale des signaux de sorties,
- V une matrice $n \times n$ composée des vecteurs singuliers unitaires de l'entrée v_i orthonormaux entre eux ; l'ensemble de ces vecteurs forme une base orthonormale des signaux d'entrées,
- Σ une matrice $m \times n$ avec $k = \min(n, m)$ valeurs singulières σ_i arrangées en ordre descendant sur la diagonale principale ; les autres éléments de cette matrice sont nuls. Les valeurs singulières sont les racines des valeurs propres de la matrice $G^H(j\omega)G(j\omega)$ où $G^H(j\omega)$ est la matrice adjointe de $G(j\omega)$, c'est-à-dire la matrice transposée de la matrice conjuguée de $G(j\omega)$, soit :

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G^H(j\omega)G(j\omega))} \quad (2.12)$$

a. Interprétation

Considérons une entrée de commande égale à un vecteur singulier à une pulsation ω donnée : $u(j\omega) = v_i$.

Décomposer en valeur singulière la matrice de gain $|G(j\omega)|$ permet d'affirmer que la sortie du système sera un vecteur d'amplitude σ_i et de direction w_i :

$$y = |G(j\omega)| v_i = \sigma_i w_i. \quad (2.13)$$

Ainsi, l'action de $G(j\omega)$ sur un vecteur de commande de la forme $u(j\omega) = v_i$ sera une combinaison de rotation (passage entre les bases formées des vecteurs w_i et v_i) et d'amplification ($\sigma_i \geq 0$). En effet, toute matrice peut être décomposée en une rotation d'entrée V , une amplification Σ et une autre rotation de sortie W ; dans le cas particulier où $|G(j\omega)|$ est de taille 2×2 , on a :

$$|G(j\omega)| = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \pm \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \pm \cos \theta_2 \end{bmatrix}^H \quad (2.14)$$

où θ_1 et θ_2 correspondent aux angles de rotation générés par le système en sortie et en entrée.

D'un point de vue système, c'est-à-dire où on considère la valeur complexe $G(j\omega)$ et non son module $|G(j\omega)|$, les valeurs de W et V deviennent complexes. L'angle de rotation engendré par ces deux sous-espaces sera appelé **angle principal** [Chen et al, 1998] et pourra être interprété

comme une mesure des interactions entre les sous-systèmes associés aux différents gains σ_i . En effet, les valeurs singulières de la matrice $W^H V$ sont les cosinus de l'angle principal entre les sous-espaces W et V [Freudenberg et al, 1986] :

$$\cos \alpha_j = \max_{u \in U} \max_{v \in V} |w^H v| = \bar{w}_j^H \bar{v}_j \quad j = 1, \dots, k, \quad (2. 15)$$

avec :

- $\|w\|_2 = \|v\|_2 = 1$,
- $w^H \bar{w}_i = 0 \quad i = 1, \dots, j-1$,
- $v^H \bar{v}_i = 0 \quad i = 1, \dots, j-1$,

on aura :

$$\frac{\pi}{2} \geq \bar{\alpha} = \alpha_k \geq \alpha_{k-1} \geq \dots \geq \underline{\alpha} = \alpha_1 \geq 0. \quad (2. 16)$$

Si α_j est nul quel que soit j , alors les sous-espaces sont alignés. Au contraire, si $\alpha_j = \pi/2$ les sous-espaces sont orthogonaux. Cet angle indiquera dans quelle mesure les gains faibles et élevés interagissent en boucle fermée. Si l'angle principal est non identiquement nul, alors une composante de la sortie de chaque sous-espace sera couplée à l'entrée de l'autre sous-espace.

Le gain orienté est un ellipsoïde dont les extrémités sont :

$$\text{gain orienté}_{\max} = \bar{\sigma} = \max_i(\sigma_i) \quad (2. 17)$$

$$\text{gain orienté}_{\min} = \underline{\sigma} = \min_i(\sigma_i) \quad (2. 18)$$

Si la différence entre ces extremums est grande, la matrice est dite mal conditionnée. Le conditionnement d'une matrice est caractérisé par son « condition number » γ :

$$\gamma(G(j\omega)) = \gamma(G(j\omega)) = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} \quad (2. 19)$$

Un système mal conditionné sera difficile à commander du fait d'une réponse très différente selon la direction de l'entrée et une grande sensibilité aux erreurs de modélisation.

b. Exemples

Reprenons l'exemple de l'équation (2. 7) que l'on évalue à la pulsation $\omega = 10$ rad/s :

$$G(j10) = \begin{bmatrix} 0.0990 - i0.9901 & 0.0192 - i0.09621 \\ 0.2206 - i0.3676 & 0.2400 - i0.4800 \end{bmatrix} \quad (2. 20)$$

$$|G(j10)| = \begin{bmatrix} 0.9950 & 0.0981 \\ 0.4287 & 0.5367 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La décomposition en valeur singulière de la matrice (2.21) donne :

$$|G(j10)| = \begin{bmatrix} 0.8609 & -0.5087 \\ 0.5087 & 0.8609 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.1326 & 0 \\ 0 & 0.4343 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9489 & -0.3156 \\ 0.3156 & 0.9489 \end{bmatrix}^H. \quad (2.22)$$

Les angles θ_1 et θ_2 sont ici respectivement égaux à 30.57° et 18.39° . La transformation engendrée par la matrice $|G(j10)|$ est illustrée par la Figure 2.2. Les angles sont volontairement non respectés afin de permettre une meilleure lisibilité de la figure.

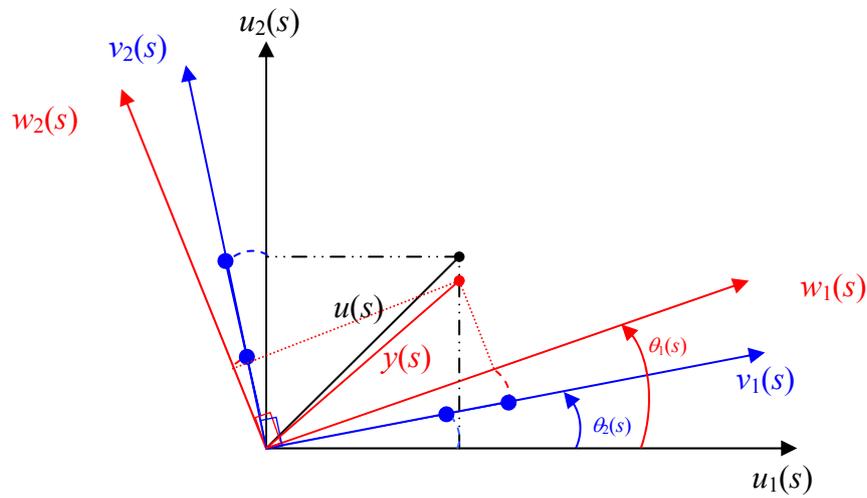


Figure 2.2 : Représentation des transformations engendrées par la matrice de gain lorsqu'on l'applique à un vecteur de commande $u(s)$ quelconque

La décomposition en valeurs singulière de la matrice (2.20) donne :

$$G(j10) = W(j10)\Sigma V^H(j10) \quad (2.23)$$

avec :

$$- W(j10) = \begin{bmatrix} -0.0890 + i0.8565 & 0.0245 - i0.5078 \\ 0.2549 - i0.4399 & -0.3899 - i0.7678 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$- \Sigma = \begin{bmatrix} 1.1324 & 0 \\ 0 & 0.4351 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$- V(j10) = \begin{bmatrix} -0.9491 & 0.3148 \\ 0.3147 + i0.0078 & 0.9489 + i0.0236 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Les valeurs singulières ne varient pas, cependant comme prévu les matrices W et V deviennent complexes, ce qui nous permet d'en déduire les angles principaux :

$$\frac{\pi}{2} \geq \bar{\alpha} = 47.7385 \geq 42.2615 = \underline{\alpha} \geq 0 \quad (2.27)$$

L'angle principal maximum correspond à l'angle entre les espaces constitués des vecteurs colonnes u_1 et w_1 ou u_2 et w_2 , alors que l'angle principal minimum correspond à l'angle entre les espaces constitués des vecteurs u_1 et w_2 ou u_2 et w_1 . Sachant qu'un angle principal nul permet d'affirmer que les deux sous-espaces qu'engendre cet angle sont identiques et qu'un angle de 90° permet d'affirmer que ces sous espaces sont orthogonaux. On peut conclure, au vue de la relation (2.27), que le système est très couplé puisque d'une part l'angle principal est non identiquement nul [Freudenberg et al, 1986] et d'autre part la différence entre les angles maximum et minimum est relativement petite.

Le « condition number » du système étudié est $\gamma = 1.1326/0.4343 = 2.6$, soit une valeur relativement proche de 1. La matrice de transfert $G(s)$ est donc bien conditionnée à la pulsation $\omega = 10\text{rad/s}$.

A contrario, considérons maintenant la matrice de gain suivante :

$$|G| = \begin{bmatrix} 23.2 & -24.5 \\ 143.8 & -109.6 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Sa décomposition en valeur singulière est :

$$|G| = \begin{bmatrix} -0.1813 & -0.9834 \\ -0.9834 & 0.1813 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 183.85 & 0 \\ 0 & 5.3325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.7921 & 0.6104 \\ 0.6104 & 0.7921 \end{bmatrix}^H. \quad (2.29)$$

Son « condition number » est donc $\gamma = 34.47$, une valeur très élevée par rapport à 1. La valeur singulière maximum 183.85 montre que le système est plus facilement commandable dans la direction liée au vecteur singulier d'entrée u_1 . L'estimation du gain maximum réel générée par (2.29) pourrait ne pas du tout convenir pour un système G légèrement différent du modèle nominal. Ce type de système multivariable est donc difficilement commandable de manière robuste.

La méthode de décomposition en valeur singulière est un outil très utile pour la recherche des gains d'un système multivariable. Il s'avère aussi fort utile pour l'analyse des systèmes multivariable comme on le verra au Chapitre 3 de ce manuscrit.

2.2.2. Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle notée $G(j\omega)$ pour $\omega \in \mathbb{R}$ est une matrice complexe et le gain de cette réponse dépendra de la fréquence d'étude mais aussi de la direction du vecteur d'excitation. Il est donc intéressant d'étudier certaines propriétés de la matrice de gain pour chaque fréquence :

- le rang de la matrice permettra de vérifier l'existence de zéro à PRP.
- l'étude des extrema de gain et du « condition number » autour des fréquences critiques (fréquence au gain unité en boucle ouverte, fréquence de résonance en boucle fermée, etc.) permettra d'analyser la contrôlabilité entrée/sortie du système, les performances en boucle fermée et la robustesse.
- des outils tels que les méthodes « relative gain array », la décomposition en valeurs singulière ou encore développés autour du théorème de Gershgorin seront très utiles pour analyser les phénomènes de couplage du système. Cette analyse permettra de privilégier certaines lois de commande plutôt que d'autres.
- la réponse fréquentielle de certaines fonctions de sensibilité permettra de conclure sur le degré de stabilité induit par une loi de commande.

2.2.3. Commande des systèmes multivariables

La connaissance de la structure interne du système permet d'obtenir un critère optimisant le placement des capteurs et actionneurs pour commander le système et aide à la réduction du modèle de représentation. Les degrés d'observabilité et de commande permettent quant à eux, de comprendre le comportement dynamique du procédé. Cependant ces différentes propriétés ne répondent pas aux questions suivantes :

- peut on stabiliser une sortie autour d'un point de fonctionnement ?
- peut on faire suivre une trajectoire de référence à une sortie ?
- des risques d'instabilités peuvent ils apparaître ?

Toutes ces propriétés doivent être analysées une fois la structure du système fixée et cette analyse se fait au travers d'une étude de contrôlabilité entrée/sortie. Bien que cette étude ne soit pas clairement définie dans la littérature, on considère cependant la définition suivante :

Définition : Un système est contrôlable entrée/sortie s'il est possible de trouver un régulateur qui permet de résoudre le problème de commande posé en respectant toutes les spécifications sur le suivi de trajectoire, le rejet de perturbations, la rapidité...

Le seul moyen de valider ces propriétés est donc de trouver ce régulateur. Avant de s'investir dans la conception d'un régulateur performant permettant de respecter toutes les spécifications, certaines méthodes peuvent néanmoins être utilisées. Une de ses méthodes consiste à construire un régulateur proportionnel, diagonal et stabilisant pour le système $G(s)$. En observant les minima de gain de la fonction de transfert liant le signal d'erreur $\varepsilon(s)$ et le signal de référence $y_{ref}(s)$, on estime la plage de fréquence où un régulateur sera efficace et donc où il est souhaitable de placer la fréquence au gain unité [Skogestad, 2005].

2.2.4. Sous-espace des matrices rationnelles

Définissons dans un premier temps l'ensemble des fractions rationnelles :

Définition [Richard et al, 2001] : Soit A un anneau commutatif, c'est-à-dire un ensemble muni de deux lois de composition interne, tel que :

- i. $(A, +)$ soit un groupe commutatif,*
- ii. (A, \times) soit associatif dans A ,*
- iii. A possède un élément neutre pour \times*
- iv. la loi \times soit distributive par rapport à la loi $+$.*

$\mathcal{A}[s]$ l'anneau des polynômes en s à coefficients dans A , $Z(\mathcal{A}[s])$ l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathcal{A}[s]$ et $S[s]=\mathcal{A}[s]-Z(\mathcal{A}[s])$. L'anneau des fractions rationnelles $A[s]$ est défini comme le quotient de $\mathcal{A}[s] \times S[s]$ par la relation d'équivalence :

$$(n(s), d(s)) \sim (n'(s), d'(s)) \Leftrightarrow n(s)d'(s) - n'(s)d(s) = 0 \quad (2.30)$$

La fraction est la classe d'équivalence du couple $(n(s), d(s))$ notée $n(s)/d(s)$.

Une fraction rationnelle sera dite propre (respectivement strictement propre) si $\deg(d(s)) \geq \deg(n(s))$ (respectivement $\deg(d(s)) > \deg(n(s))$) (2.31)

Les matrices rationnelles (respectivement propres ou strictement propres) sont des matrices dont les éléments sont des fractions rationnelles (respectivement propres ou strictement

propre). L'ensemble des fractions rationnelles (respectivement propres ou strictement propres) à m lignes et n colonnes s'écrira $\mathbb{R}^{m \times n}[s]$ (respectivement $\mathbb{R}_p^{m \times n}[s]$ ou $\mathbb{R}_{sp}^{m \times n}[s]$).

De nombreux résultats peuvent être directement étendus à ceux liés à l'ensemble des matrices réelles. Les matrices de polynômes ($d(s)=1$) ont comme éléments des polynômes et forment un sous-ensemble de l'ensemble des matrices rationnelles.

Les opérateurs classiques (multiplication et addition commutative) et l'inversion s'appliquent aux matrices rationnelles. Une matrice rationnelle carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non identiquement nul, c'est-à-dire différent de zéro excepté pour un nombre fini de points. Ces points correspondent aux zéros de la matrice. Pour pouvoir inverser les matrices de la variable de Laplace s , il convient de considérer s comme une variable symbolique et non comme un complexe où est évaluée la matrice. Ainsi l'inverse d'une matrice $G(s)$ s'écrira simplement à l'aide de la comatrice :

$$G^{-1}(s) = \frac{(\text{com}(G(s)))^T}{|G(s)|}, \quad (2.32)$$

où :

- $\text{com}(G(s))$ est la comatrice ou matrice des cofacteurs de $G(s)$,
- $G(s)^T$ est la matrice transposée de la matrice $G(s)$,
- $|G(s)|$ est le déterminant de la matrice $G(s)$.

Les coefficients de la comatrice sont appelés **cofacteurs** de $G(s)$, et ils permettent d'étudier les variations de la fonction déterminant. Soit $G(s)$ une matrice carrée de taille $m \times m$ dont les éléments sont notés $g_{i,j}$. On note $G(s, x)$ la matrice dont les coefficients sont les mêmes que ceux de $G(s)$, sauf le terme d'indice i, j qui vaut $g_{i,j} + x$. L'effet de la modification d'un des coefficients de la matrice $G(s)$ sur son déterminant est déterminé en écrivant la formule de linéarité pour la j -ème colonne :

$$\begin{aligned} \det(G(s, x)) &= \det(G(s)) + x \cdot \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,j-1} & 0 & g_{1,j+1} & \cdots & g_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,j-1} & 0 & g_{i-1,j+1} & \cdots & g_{i-1,m} \\ g_{i,1} & \cdots & g_{i,j-1} & 1 & g_{i,j+1} & \cdots & g_{i,m} \\ g_{i+1,1} & \cdots & g_{i+1,j-1} & 0 & g_{i+1,j+1} & \cdots & g_{i+1,m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{m,1} & \cdots & g_{m,j-1} & 0 & g_{m,j+1} & \cdots & g_{m,m} \end{vmatrix} \\ &= \det(G(s)) + x \text{Cof}_{i,j} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Le déterminant noté $Cof_{i,j}$ est appelé **cofacteur d'indice i, j** de la matrice $G(s)$. Il admet les interprétations suivantes :

- augmenter de x le coefficient d'indice i, j de la matrice (toutes choses égales par ailleurs) revient à augmenter le déterminant de x fois le cofacteur correspondant,
- le cofacteur est la dérivée par rapport à x du déterminant de la matrice $G(s, x)$

Le cofacteur est égal à $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant $G_{i,j}$ de la sous matrice obtenue en ayant enlevé de $G(s)$ sa ligne i et sa colonne j (on parle de mineur pour un tel déterminant) :

$$Cof_{i,j} = G^{ij} = (-1)^{i+j} \cdot G_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,j-1} & g_{1,j+1} & \cdots & g_{1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{i-1,1} & \cdots & g_{i-1,j-1} & g_{i-1,j+1} & \cdots & g_{i-1,m} \\ g_{i,1} & \cdots & g_{i,j-1} & g_{i,j+1} & \cdots & g_{i,m} \\ g_{i+1,1} & \cdots & g_{i+1,j-1} & g_{i+1,j+1} & \cdots & g_{i+1,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,1} & \cdots & g_{m,j-1} & g_{m,j+1} & \cdots & g_{m,m} \end{vmatrix} \quad (2.34)$$

Au regard de l'équation (2.32) il est évident que la matrice $G(s)$ ne sera inversible qu'à condition que son déterminant ne soit pas identiquement nul.

A titre d'exemple, pour la matrice $G(s)$ suivante

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0.4 \end{bmatrix} \text{ on a } G^{-1}(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{(1.6-0.6s)} \begin{bmatrix} 0.4 & -\frac{s}{s+4} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

$G(s)$ est une matrice rationnelle inversible. Par contre elle n'est pas définie pour $s = -4$ et $s = -1$ si on la considère comme une fonction de l'ensemble complexe.

2.2.5. Stabilité des systèmes bouclés multivariable

a. Stabilité des systèmes bouclés SISO

Rappelons qu'il existe essentiellement deux méthodes utilisées pour déterminer la stabilité d'un système bouclé SISO :

1. La première méthode consiste à vérifier que tous les pôles des fonctions de transfert issues de la boucle fermée de la Figure 2.1 sont à parties réelles négatives.

2. La deuxième méthode consiste à utiliser le critère de Nyquist. Cette méthode consiste, dans un premier temps à tracer la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte pour $\omega \in \mathbb{R}$ dans le plan de Nyquist et à vérifier si le nombre de fois N_{-1} où ce tracé encercle le point -1 est égal au nombre de pôles instables de la boucle ouverte.

b. Stabilité des systèmes multivariable carré bouclés

Stabilité interne

A l'image du cas SISO, un système MIMO est stable si tous les pôles de sa matrice de transfert sont dans la zone de stabilité, à savoir dans le demi-plan complexe gauche en temps-continu ou à l'intérieur du disque de rayon unité en temps-discret. Comme pour les systèmes SISO, le bouclage des éléments $K(s)$ et $G(s)$ peut faire apparaître une instabilité interne du couple $(G(s), K(s))$. Ceci est généralement dû à une simplification de pôles/zéros instables entre $G_o(s)$ et $K(s)$ lors de la conception du régulateur, cette simplification disparaissant lors de l'implémentation du régulateur sur le système réel $G(s)$.

Définition : un système est en stabilité interne si en lui appliquant en tout endroit des signaux d'entrée bornés, on obtient en tout endroit des signaux de sorties bornés.

Cette propriété n'est atteignable que si aucune des parties du système ne possède de mode instable non commandable et/ou non observable.

Le théorème suivant lie la condition de stabilité interne à des conditions de stabilité sur les fonctions de transfert en boucle fermée du système constitué des éléments $G(s)$ et $K(s)$:

Théorème : Supposons que $G(s)$ et $K(s)$ ne possède aucun mode instable non-commandable et/ou non-observable ; alors, le système bouclé de la Figure 2. 1 sera en stabilité interne si et seulement si les quatre fonctions de transfert $S(s)$, $T(s)$, $S_i(s)$, $S_u(s)$ sont stables.

En effet, soit le schéma de commande de la Figure 2. 1, on a :

$$y_{\text{mes}}(s) = T(s)y_{\text{ref}}(s) + S(s)b_m(s) - T(s)d_y(s) + S_i(s)d_u(s), \quad (2. 36)$$

$$u(s) = S_u(s)y_{\text{ref}}(s) - S_u(s)b_m(s) - S_u(s)d_y(s) - S_u(s)G(s)d_u(s), \quad (2. 37)$$

$$\varepsilon(s) = S(s)y_{\text{ref}}(s) - S(s)b_m(s) - S(s)d_y(s) - S_i(s)d_u(s). \quad (2. 38)$$

Sachant que $S_u(s)G(s)$ est stable si et seulement si $S_i(s)$ et $S_u(s)$ sont stables [Lin et al, 1991], si les signaux d'entrées ($y_{ref}(t)$, $d_u(t)$, $d_y(t)$) sont bornés il suffit donc que les fonctions de transfert $S(s)$, $T(s)$, $S_i(s)$, $S_u(s)$ soient stables pour que les signaux de sorties ($y_{mes}(t)$, $u(t)$ et $\varepsilon(t)$) soient bornés.

De plus, si la propriété de stabilité interne est acquise, la stabilité des quatre fonctions de transfert, $S(s)$, $T(s)$, $S_i(s)$, $S_u(s)$ l'est aussi.

Il peut s'avérer complexe et surtout laborieux de vérifier la stabilité des quatre fonctions de transfert en boucle fermée.

Définissons tout d'abord la notion de simplification pôles/zéros :

Définition : il y a simplification pôle/zéro entre deux éléments (ou modèle de système physique) d'une boucle de commande si et seulement la réalisation minimale du produit à gauche et à droite de ces deux éléments ne contient pas tous les pôles des deux éléments.

Zhou et al en 1996 ont démontré que sous la condition de non simplification pôle/zéro la stabilité d'une des quatre fonctions de transfert suffit pour conclure à la stabilité du système bouclé :

Théorème [Zhou et al, 1996] : En supposant qu'il n'y ai pas de simplification pôle/zéro instable entre $G(s)$ et $K(s)$ c'est-à-dire que tous les pôles de $G(s)$ et de $K(s)$ sont contenus dans la réalisation minimale de $G(s)K(s)$ et de $K(s)G(s)$; le système bouclé de la Figure 2. I sera en stabilité interne si et seulement si une des quatre fonctions de transfert $S(s)$, $T(s)$, $S_i(s)$ ou $S_u(s)$ est stable.

2.3. Reformulation et extension de la commande CRONE des systèmes MIMO carrés, stables et à minimum de phase

La méthodologie proposée initialement par Mathieu et al en 1997 est reformulée afin d'étendre la commande CRONE aux cas des systèmes multivariables carrés retardés et/ou possédant des zéros et/ou pôles à PRP. Si, l'objectif reste la recherche d'un régulateur $K(s)$ découplant et stabilisant pour le système modélisé par un ensemble de fonctions de transfert $G(s)$, on se propose de reformuler les conditions de stabilité.

La matrice de transfert en boucle ouverte, $\beta_o(s)$ est diagonale et ses m éléments définis par des fonctions de transfert fractionnaire de troisième génération, $\beta_{oi}(s)$. L'optimisation des différents paramètres de l'ensemble des boucles ouvertes, $\beta_{oi}(s)$ permet d'obtenir la matrice de

transfert en boucle ouverte optimale, $\beta_{opt}(s)$. Le régulateur robuste résultant de l'expression $K(s)=G_o^{-1}(s) \beta_{opt}(s)$. Lorsque le modèle nominal du système est inversé, un retard, des modes résonants et certain pôles et/ou zéros à partie réelle positive peuvent apparaître au dénominateur de la fonction de transfert de $G_o^{-1}(s)$. Il est donc nécessaire d'intégrer certain de ses zéros et/ou pôles à PRP, retard pur et modes résonants à la matrice de fonction de transfert en boucle ouverte afin de rendre le système bouclé (interne) stable et le régulateur physiquement réalisable.

La caractérisation de la classe de régulateur découplant et stabilisant pour le procédé $G_o(s)$ fut initialement étudiée par Youla et al [1976] :

Lemme [Youla et al, 1976] : Pour un système stable $G_o(s)$, la boucle fermée sera en stabilité interne si et seulement si la matrice $Q(s)$ définie par $Q(s)=K(s) (I+ G_o(s)K(s))^{-1}$ est stable.

Ce lemme permet l'apparition d'une paramétrisation appelée Q-paramétrisation ou encore paramétrisation de Youla ; paramétrisation sur laquelle Zames en 1981 s'appuyâ pour définir un ensemble de régulateur stabilisant la boucle fermée définie précédemment. Cette paramétrisation est à la base de nombreuses méthodes de conception de loi de commande et notamment de la commande à modèle interne (IMC) [Morari et Zafiriou, 1989] :

$$K(s)=(I- Q(s)G_o(s))^{-1} Q(s)= Q(s) (I- G_o(s)Q(s))^{-1} \quad (2. 39)$$

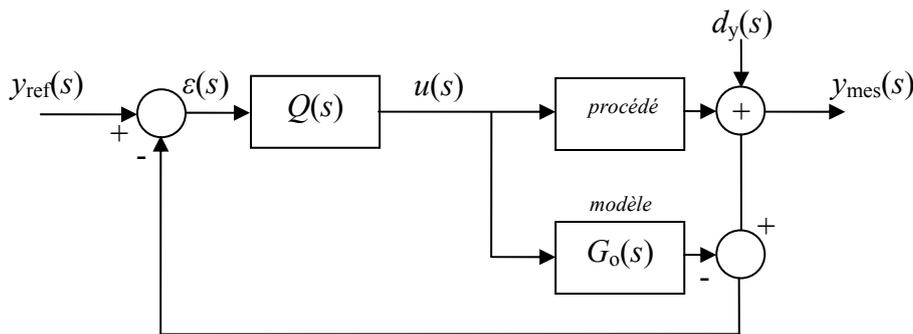


Figure 2. 3 : Schéma de commande de la commande à modèle interne (IMC)

2.3.1. Positionnement du problème

Soit le système bouclé de la Figure 2. 1 et le procédé multivariable carré modélisé par la matrice de fonction de transfert nominal strictement propre, $G_o(s)$. $K(s)$ le régulateur

découplant et stabilisant à concevoir. En observant dans un premier temps que les signaux $d_y(s)$, $y_{\text{ref}}(s)$ agissent de la même manière sur le vecteur de sortie y_{mes} [Goodwin, 2001], l'étude de la stabilité du schéma de commande pourra se réduire à l'étude des quatre fonctions de transfert, $T(s)$, $S(s)$, $S_i = SG(s)$ et $S_u = KS(s)$. La matrice de transfert $H_{ye}(s)$ définie en Introduction de ce chapitre devient :

$$\begin{aligned} H_{ye}(s) &= \begin{bmatrix} H_{u,y_{\text{ref}}} & H_{u,d_u} & H_{u,b_m} \\ H_{y_{\text{mes}},y_{\text{ref}}} & H_{y_{\text{mes}},d_u} & H_{y_{\text{mes}},b_m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_u(s) & -S_u(s)G(s) & S_u(s) \\ T(s) & S_i(s) & S(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} & -K(s)G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} & K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} \\ G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} & G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} & (I + G(s)K(s))^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

En posant $e = [y_{\text{ref}}(s), d_u(s), b_m(s)]^T$ le vecteur des signaux d'entrées et $y = [u(s), y_{\text{mes}}(s)]^T$ le vecteur de sorties et en supposant aussi que le système bouclé constitué des éléments $G(s)$ et $K(s)$ ne présente aucune simplification pôle/zéro.

Ainsi, le couple $(G_0(s), K(s))$ sera stable et le régulateur $K(s)$ sera un régulateur robuste, découplant et stabilisant pour $G(s)$ si et seulement si la matrice de transfert en boucle fermée $H_{ye}(s)$ est stable et le régulateur $K(s)$ trouvé conduit à une matrice de fonction de transfert $H_{y,y_{\text{ref}}}$ diagonale.

Le problème de conception d'une loi de commande CRONE MIMO est donc le suivant : soit un système multivariable non diagonal $G(s)$ dont on choisira une matrice de fonction de transfert nominal $G_0(s)$ satisfaisant les hypothèses d'existence de l'inverse du procédé et de non simplification pôle/zéro pour $G(s)$ [Vardulkis et al, 1987] :

$$H_1 : [G_0(s)]^{-1} \text{ existe,} \quad (2.41)$$

$$H_2 : Z_+[G(s)] \cap P_+[G(s)] = \emptyset, \quad (2.42)$$

où $Z_+[G(s)]$ et $P_+[G(s)]$ dénotent l'ensemble des zéros et pôles à PRP du procédé. On recherche l'ensemble des régulateurs $K(s)$ stabilisant le système bouclé constitué des éléments $G(s)$ et $K(s)$ et pour lequel la matrice de fonction de transfert $H_{y,y_{\text{ref}}}$ est non singulière, diagonal

pour le procédé nominal et tel que la matrice de fonction de transfert $\beta_o(s)$ sera optimisé de manière à conserver le découplage pour l'ensemble des procédés reparamétrés $G(s)$.

2.3.2. Existence du régulateur

Le théorème suivant permet la caractérisation de l'ensemble des régulateurs $K(s)$ découplant et stabilisant un ensemble de système $G(s)$:

Théorème : Soit le système bouclé constitué des éléments $G(s)$ et $K(s)$, supposant les hypothèses H1 et H2 satisfaites et $Q(s)$ un ensemble de matrice de fonction de transfert $Q_i(s)$ définie par $Q_i(s)=K(s)(I+G_i(s)K(s))^{-1} \forall G_i(s) \in G(s)$. La forme de $Q_i(s)$ permet d'écrire la matrice de transfert H_{ye} sous la forme :

$$H_{y_e}(s) = \begin{bmatrix} Q_i(s) & -Q_i(s)G_i(s) & Q_i(s) \\ G_i(s)Q_i(s) & G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s)) & (I-G_i(s)Q_i(s)) \end{bmatrix} \forall G_i(s) \in G(s) \quad (2.43)$$

Sous ses conditions la loi de commande sera stable si et seulement si $Q_i(s)$ et $G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))$ sont tout deux stables et ce quelque soit $G_i(s)$ appartenant à $G(s)$.

Démonstration :

\Rightarrow Si on suppose la stabilité du système bouclé, il s'ensuit par définition que tous les transferts de la matrice de transfert H_{y_e} sont stables et que donc $Q_i(s)$ et $G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s)) \forall G_i(s) \in G(s)$ sont stables.

\Leftarrow Supposant la stabilité des matrices de fonctions de transfert $Q_i(s)$ et $G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))$. Lin et al en 1991 ont démontré que sous cette hypothèse les transferts $G_i(s)Q_i(s)$ et $Q_i(s)G_i(s)$ étaient stables. Démontrons maintenant la stabilité du transfert $(I-G_i(s)Q_i(s))$:

Observant dans un premier temps que :

$$(I-G_i(s)Q_i(s)) = G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))G_i^{-1}(s), \quad (2.44)$$

sachant que d'après l'hypothèse H1, $G_i^{-1}(s)$ existe.

$Q_i(s)$ et $G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))$ étant tout deux stables on a :

$$P_+[(I-G_i(s)Q_i(s))] \subset P_+[G_i(s)] \quad (2.45)$$

et à l'aide de la propriété des systèmes MIMO carré qui est que les zéros de la matrice de fonction de transfert $G_i(s)$ correspondent aux pôles de la matrice de fonction de transfert inverse $G_i^{-1}(s)$ et vice versa on a :

$$P_+[(I-G_i(s)Q_i(s))] = P_+[G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))G_i^{-1}(s)] \subset P_+[G_i^{-1}(s)] = Z_+[G_i(s)]. \quad (2.46)$$

Sous l'hypothèse H2 on aura finalement :

$$P_+[(I-G_i(s)Q_i(s))] \subset \{P_+[G_i(s)] \cap Z_+[G_i(s)]\} = \emptyset, \quad (2.47)$$

D'après ce théorème un ensemble de régulateur $K(s)$ stabilisant $G(s)$ existe si et seulement si il existe un ensemble de matrice de fonction de transfert $Q(s)$ stable qui satisfait $G_i(s)(I-Q_i(s)G_i(s))^{-1}$ stable. La réciproque est aussi vraie.

2.3.3. Découplage

Pour un système $G(s)$ ayant m sorties et m entrées, la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte $\beta_o(s)$ est paramétrée afin de satisfaire les cinq objectifs suivants :

1. un découplage parfait pour le procédé nominal,
2. des spécifications de précisions aux basses fréquences,
3. des spécifications sur les marges de stabilité pour le procédé nominal et les procédés reparamétrés (comportement autour des fréquences de coupure),
4. des spécifications sur les m efforts de commandes aux hautes fréquences,
5. la stabilité interne du système bouclé.

Les premières spécifications peuvent être validées en choisissant une matrice de fonction de transfert en boucle ouverte diagonale :

$$\beta_o(s) = \begin{bmatrix} \beta_{o_1}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \beta_{o_i}(s) & \dots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{o_m}(s) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

ou

$$\beta_o(s) = G_o(s)K(s) = \text{diag}[\beta_{o_i}(s)] = \text{diag} \left[\frac{n_i(s)}{d_i(s)} \right]_{i \in \mathbb{N}}, \quad (2.49)$$

avec pour les systèmes stables et à minimum de phase :

$$\beta_{o_i}(s) = \beta_{l_i}(s)\beta_{o_i}(s)\beta_{h_i}(s), \quad (2.50)$$

où comme expliqué au chapitre 1

$$\beta_{l_i}(s) = C_{l_i} \left(\frac{\omega_{l_i}}{s} + 1 \right)^{n_i}, \quad (2.51)$$

$$\beta_{h_i}(s) = \frac{C_{h_i}}{\left(\frac{s}{\omega_{h_i}} + 1 \right)^{n_{h_i}}}, \quad (2.52)$$

et

$$\beta_{o_i}(s) = C_i^{\text{sign}(b)} \left(\frac{1 + s/\omega_{h_i}}{1 + s/\omega_{l_i}} \right)^a \times \left(\Re e_{/i} \left\{ \left(C_{g_i} \frac{1 + s/\omega_{h_i}}{1 + s/\omega_{l_i}} \right)^{ib_i} \right\} \right)^{-q_i \text{sign}(b_i)} \quad (2.53)$$

avec

$$C_i = ch \left[b_i \left(\arctan \left(\frac{\omega_{u_i}}{\omega_{l_i}} \right) - \arctan \left(\frac{\omega_{u_i}}{\omega_{h_i}} \right) \right) \right], \quad (2.54)$$

$$C_{g_i} = \left(\frac{1 + \left(\frac{\omega_{u_i}}{\omega_{l_i}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\omega_{u_i}}{\omega_{h_i}} \right)^2} \right)^{1/2}, \quad (2.55)$$

$$s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}_j, \quad (2.56)$$

$$v = a + ib \in \mathbb{C}_i. \quad (2.57)$$

la fréquence de résonance ω_{ti} peut aussi être utilisée pour définir cette fonction de transfert à la place de la fréquence au gain unité en boucle ouverte ω_{ui} .

La dernière spécification sera validée à la condition que tous les modes instables des éléments $G(s)$ et $K(s)$ se retrouvent dans la réalisation minimale de $\beta_o(s)$ et $\beta_{io}(s)$.

Le régulateur découplant $K(s)$ est finalement donné par:

$$K(s) = G_o^{-1}(s) \beta_o(s) = \frac{(\text{com}(G_o(s)))^T}{|G_o(s)|} \text{diag} \left[\frac{n_i(s)}{d_i(s)} \right]_{i \in N}, \quad (2.58)$$

avec :

- $(\text{com}(G_o(s)))^T = [G_o^{ij}(s)]^T = [G_o^{ji}(s)]$, $G_o^{ij}(s)$ étant le cofacteur correspondant à l'élément $g_{o_{ij}}(s)$,
- $|G_o(s)|$ le déterminant de la matrice de transfert $G_o(s)$.

Chaque élément de $K(s)$ est donc donné par :

$$k_{ij}(s) = \frac{G_o^{ji}(s)}{|G_o(s)|} \beta_{oi}(s) \quad \forall i, j \in N. \quad (2.59)$$

2.3.4. Optimisation

Pour les procédés reparamétrés (autres que le nominal), les fonctions de transfert en boucle fermée $T(s)$, $S(s)$, $S_i(s)$ et $S_u(s)$ restent pas diagonales. A chaque élément diagonal $T_{ii}(s)$ ou $S_{ii}(s)$ est associé une boucle ouverte équivalente $\beta_{ii}(s)$ [Mathieu, 1997]. L'optimisation consistera à régler chacune des fonctions de transfert en boucle ouverte nominale $\beta_{oi}(s)$ afin de placer au mieux ces boucles ouvertes équivalentes (dans le plan de Nichols), notamment autour d'un contour d'iso amplitude désiré $M_{r_{0j}}$. L'optimal sera atteint en minimisant la fonction coût suivante :

$$J = \sum_{i=1}^n \left(M_{r_{\max_i}} - M_{r_{\min_i}} \right)^2, \quad (2.60)$$

où:

$$\bullet \quad M_{r_{\max_i}} = \max_G \sup_{\omega} (T_{ii}(j\omega)) = \max_G \sup_{\omega} \left(\frac{\beta_{ii}(j\omega)}{1 + \beta_{ii}(j\omega)} \right), \quad (2.61)$$

$$\bullet \quad M_{r_{\min_i}} = \min_G \sup_{\omega} (T_{ii}(j\omega)) = \min_G \sup_{\omega} \left(\frac{\beta_{ii}(j\omega)}{1 + \beta_{ii}(j\omega)} \right), \quad (2.62)$$

tout en respectant un ensemble d'inégalités matricielles (pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $i, j \in \mathbb{N}$) :

$$\inf_G |T_{ij}(j\omega)| \geq T_{ij_l}(\omega), \quad (2.63)$$

$$\sup_G |T_{ij}(j\omega)| \leq T_{ij_h}(\omega) \quad (2.64)$$

$$\sup_G |S_{ij}(j\omega)| \leq S_{ij_h}(\omega) \quad (2.65)$$

$$\sup_G |KS_{ij}(j\omega)| \leq KS_{ij_h}(\omega), \quad (2.66)$$

$$\sup_G |SG_{ij}(j\omega)| \leq SG_{ij_h}(\omega) \quad (2.67)$$

ou $G(s)$ est bien sûr l'ensemble des procédés nominal et reparamétrés.

Les incertitudes sur le procédé seront ainsi prises en compte de la manière la plus réaliste. Une méthode d'optimisation non-linéaire sera utilisée pour trouver les différents paramètres

optimaux des éléments diagonaux de la boucle ouverte, et par conséquent pour trouver le placement optimal des réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes $\beta_{ii}(j\omega)$ pour l'ensemble des procédés $G(s)$.

L'ordre complexe ν est un paramètre de conception qui offre l'avantage de remplacer un grand ensemble de paramètre que l'on retrouve généralement lors de la résolution du problème de commande classique (LQG, QFT, H_∞)

2.4. Commande CRONE des systèmes multivariables instables et retardés

Soit la matrice de fonction de transfert du procédé nominal $G_o(s)$:

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} g_{o_{11}}(s) & & \cdots & g_{o_{1m}}(s) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & g_{o_{ij}}(s) & \\ \vdots & & & \ddots \\ g_{o_{m1}}(s) & \cdots & & g_{o_{mm}}(s) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

où:

- $g_{o_{ij}}(s) = h_{ij}(s)e^{-L_{ij}s}$,
- $h_{ij}(s)$ est une fonction de transfert strictement propre sans retard pur,
- L_{ij} une constante positive.

Si on se place dans le cas général en considérant que $G_o(s)$ possède des zéros et/ou pôles à PRP et des retards purs, l'inverse de $G_o(s)$ s'écrira :

$$P(s) = G_o^{-1}(s) = \frac{[G_o^{ij}(s)]^T}{\det(G_o(s))} = \frac{[G_o^{ji}(s)]}{\det(G_o(s))} \quad (2.69)$$

où :

$$\det(G_o(s)) = \frac{\sum_{k=0}^{q_1} n_k(s)e^{-\alpha_k s}}{b_0(s)}, \quad (2.70)$$

Chaque élément G_o^{ji} de la comatrice de $G_o(s)$ peut s'écrire:

$$\frac{\sum_{l=0}^{q_{2_{ji}}} m_{l_{ji}}(s)e^{-\delta_{l_{ji}}s}}{d_{0_{ji}}(s)}, \quad (2.71)$$

où :

- $n_k(s)$, $m_{l_{ji}}(s)$, $b_0(s)$ et $d_{0_{ji}}(s)$ sont des polynômes scalaires non identiquement nuls de la variable s ,
- $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q_1}$,
- $\delta_{0_{ji}} < \delta_{1_{ji}} < \dots < \delta_{q_{2_{ji}}}$.

Appelons $\tau(a(s))$ le plus petit retard pur de la fonction de transfert non identiquement nulle $a(s)$. $\tau(a(s))$ ne peut pas être négatif et il est facile de vérifier :

- $\tau(a_1 a_2) = \tau(a_1) + \tau(a_2)$,
- $\tau(a^{-1}) = -\tau(a)$,
- $\tau(e^{\eta s}) = \tau(e^{-(-\eta s)}) = -\eta$,

$\forall a, a_1$ et a_2 des fonctions de transfert non identiquement nulles.

(2. 69) devient alors :

$$P(s) = G_o^{-1}(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s)e^{\gamma_{11}s} & \dots & p_{1m}(s)e^{\gamma_{1m}s} \\ \vdots & p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s} & \vdots \\ p_{m1}(s)e^{\gamma_{m1}s} & \dots & p_{mm}(s)e^{\gamma_{mm}s} \end{bmatrix}, \quad (2. 72)$$

où :

- $p_{ij}(s) = f(n_k, m_{l_{ji}}, b_0, d_{0_{ji}}, \delta_{l_{ji}}, \alpha_k) \quad k \in [1, q_1] \text{ et } l \in [1, q_{2_{ji}}]$,
- $\gamma_{ij} = f(\alpha_0, \delta_{0_{ji}})$.

Par conséquent chaque élément du régulateur s'écrit :

$$k_{ij}(s) = p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s} \beta_{0_i}(s). \quad (2. 73)$$

La relation précédente implique que le régulateur $K(s)$ n'est stable et physiquement réalisable que si certains zéros/pôles et retards de $P(s)$ sont intégrés à $\beta_{0_i}(s)$. La boucle ouverte peut maintenant être définie. Pour résoudre le problème de commande lié aux système MIMO retardés, instables et à non minimum de phase la méthode consiste à :

1. trouver le retard de chacune des boucles ouvertes, $\beta_0(s)$;
2. trouver les zéros et/ou pôles à PRP de $P(s)$ qui doivent apparaître dans la matrice de transfert en boucle ouverte.

2.4.1. Première étape : Retards

Pour que le régulateur soit réalisable, il faut qu'il ne contienne aucun terme "avance de phase pure" c'est à dire ne pas contenir de terme de la forme e^{+xs} . La condition suivante doit donc être vérifiée :

$$\tau(k_{ij}(s)) \geq 0 \quad \forall i, j \in N. \quad (2.74)$$

D'après (2.73), la condition précédente sera vérifiée si et seulement si :

$$\tau(\beta_{oi}(s)) \geq \gamma_{ij}, \quad (2.75)$$

où :

$$\gamma_{ij} = \tau(G_o(s)) - \tau(G_o^{ji}(s)) = \alpha_0 - \delta_{0ji}. \quad (2.76)$$

Le retard pur de la $i^{\text{ème}}$ fonction de transfert en boucle ouverte doit satisfaire toutes les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \tau(\beta_{oi}(s)) &\geq \tau(G_o(s)) - \tau(G_o^{1i}(s)) \\ \tau(\beta_{oi}(s)) &\geq \tau(G_o(s)) - \tau(G_o^{2i}(s)) \\ &\vdots \\ \tau(\beta_{oi}(s)) &\geq \tau(G_o(s)) - \tau(G_o^{mi}(s)), \end{aligned} \quad (2.77)$$

soit :

$$\tau(\beta_{oi}(s)) \geq \tau(G_o(s)) - \tau_i \quad \forall i \in N, \quad (2.78)$$

avec

$$\tau_i = \min_{j \in N} (\tau(G_o^{ji}(s))). \quad (2.79)$$

La relation (2.79) implique donc que la $i^{\text{ème}}$ fonction de transfert $\beta_{oi}(s)$ doit contenir un retard supérieur ou égal à τ_i , c'est à dire à la différence entre le retard pur du déterminant de $G_o(s)$ et le plus petit retard de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la matrice des cofacteurs $[G_o^{ji}]$.

2.4.2. Deuxième étape: recherche des zéros et pôles à partie réelle positive

Soit une fonction de transfert $a(s)$:

$$a(s) = \frac{Z_p^+ Z_p^-}{P_p^+ P_p^-}, \quad (2.80)$$

où:

- Z_p^+ est l'ensemble des zéros à partie réelle positive : $Z_p^+ = \{z \in \mathbb{C}^+; a(z) = 0\}$,
- P_p^+ est l'ensemble des pôles à partie réelle positive : $P_p^+ = \{p \in \mathbb{C}^+; a^{-1}(p) = 0\}$,
- Z_p^- est l'ensemble des zéros à partie réelle négative : $Z_p^- = \{z \in \mathbb{C}^-; a(z) = 0\}$,
- P_p^- est l'ensemble des pôles à partie réelle négative : $P_p^- = \{p \in \mathbb{C}^-; a^{-1}(p) = 0\}$.

Soit $\eta_z(a)$ un entier ζ tel que $\lim_{s \rightarrow z} \frac{a(s)}{(s-z)^\zeta}$ existe et est non nul.

Ainsi pour un z donné :

- $a(s)$ a un zéro en z d'ordre $\eta_z(a)$ si et seulement si $\eta_z(a) > 0$,
- $a(s)$ a un pôle en z d'ordre $\eta_z(a)$ si et seulement si $\eta_z(a) < 0$,
- $a(s)$ n'a aucun pôle ni zéro si et seulement si $\eta_z(a) = 0$.

Il est facile de vérifier que :

- $\eta_z(a_1 a_2) = \eta_z(a_1) + \eta_z(a_2)$,
- $\eta_z(a^{-1}) = -\eta_z(a)$.

$\forall a, a_1$ et a_2 des fonctions de transfert non identiquement nulles.

Une fonction de transfert est donc stable et à minimum de phase si et seulement si [Wang et al, 2000, 2002] :

$$\eta_z(a) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^+ \quad (2.81)$$

Rappelons que la stabilité de la loi de commande est liée à la stabilité interne de la matrice de fonctions de transfert en boucle fermée mais aussi à la stabilité des matrices de fonctions de transfert $S_o(s)$, $G_o(s)$ et $G_o^{-1}(s)T_o(s)$.

a. stabilité interne

La stabilité interne du système bouclé revient à vérifier qu'il n'y ait aucune simplification pôle/zéro entre $G(s)$ et $K(s)$. Sachant que :

$$\beta_o(s) = G_o(s)K(s) = \text{diag}[\beta_{o_i}(s)] = \text{diag} \left[\frac{n_i(s)}{d_i(s)} \right]_{i \in N}, \quad (2.82)$$

la condition de stabilité interne sera validée si et seulement si :

$$\eta_z(n_i(s) + d_i(s)) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+ \quad (2.83)$$

Soit $|G_o(s)|_{\alpha_0}$ et $[G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0ji}}$ deux matrices de fonctions de transferts qui apparaissent lorsqu'on factorise le plus petit des retard pur respectivement du déterminant et des cofacteurs de la matrice $G_o(s)$:

$$|G_o(s)| = |G_o(s)|_{\alpha_0} e^{-\alpha_0}, \quad (2.84)$$

$$[G_o^{ji}(s)] = [G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0ji}} e^{-\delta_{0ji}}, \quad (2.85)$$

avec:

$$|G_o(s)|_{\alpha_0} = \frac{n_0 + \sum_{k=1}^{q_1} n_k(s) e^{-(\alpha_k - \alpha_0)s}}{b_0(s)}, \quad (2.86)$$

$$[G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0ji}} = \frac{m_{0ji} + \sum_{l=1}^{q_{2ji}} m_{lji}(s) e^{-(\delta_{lji} - \delta_{0ji})s}}{d_{0ji}(s)}, \quad (2.87)$$

Lors de l'analyse qui suit, les termes exponentiels (retards purs) de ces fonctions de transfert pourront être remplacés par leur approximation de Padé au premier ordre. Pour un retard pur de valeur L_{ij} , cette approximation s'écrit :

$$e^{-L_{ij}s} = \frac{1 - \frac{L_{ij}}{2}s}{1 + \frac{L_{ij}}{2}s}. \quad (2.88)$$

b. Stabilité de la matrice de fonction de transfert $G_o^{-1}(s)T_o(s)$

La matrice de fonction de transfert $G_o^{-1}(s)T_o(s)$ s'écrit :

$$G_o^{-1}(s)T_o(s) = \frac{[G_o^{ji}]_{\delta_{0ji}} \beta_{0i}(s)}{|G_o|_{\alpha_0} (1 + \beta_{0i}(s))} = \frac{[G_o^{ji}]_{\delta_{0ji}} n_{ii}(s)}{|G_o|_{\alpha_0} (n_{ii}(s) + d_{ii}(s))}, \quad \forall i, j \in N. \quad (2.89)$$

En conséquence, $G_o^{-1}(s)T_o(s)$ est stable si et seulement si :

$$\eta_z(G_o^{-1}(s)T_o(s)) \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.90)$$

Ceci revient, en utilisant (2.89), à :

$$\eta_z(n_{ii}(s)) - \eta_z(n_{ii}(s) + d_{ii}(s)) \geq \eta_z(|G_o(s)|_{\alpha_0}) - \eta_z([G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0ji}}), \quad \forall i, j \in N \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.91)$$

Avec (2.83), l'équation (2.91) devient :

$$\eta_z(n_{ii}(s)) \geq \eta_z(|G_o(s)|_{\alpha_0}) - \eta_z([G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0ji}}), \quad \forall i, j \in N \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.92)$$

Le numérateur de la $i^{\text{ème}}$ fonction de transfert de la matrice de transfert en boucle ouverte doit donc satisfaire toutes les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_z(n_{ii}(s)) &\geq \eta_z \left(\left| G_o(s) \right|_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{1i}(s) \right]_{\delta_{01i}} \right) \\ \eta_z(n_{ii}(s)) &\geq \eta_z \left(\left| G_o(s) \right|_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{2i}(s) \right]_{\delta_{02i}} \right) \\ &\vdots \\ \eta_z(n_{ii}(s)) &\geq \eta_z \left(\left| G_o(s) \right|_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{mi}(s) \right]_{\delta_{0mi}} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

soit finalement :

$$\eta_z(n_{ii}) \geq \eta_z \left(\left| G_o(s) \right|_{\alpha_0} \right) - \eta_{n_i}(z) \quad \forall i \in N, \quad (2.94)$$

avec

$$\eta_{n_i}(z) = \min_{j \in N} \left(\eta_z \left(\left[G_o^{ji}(s) \right]_{\delta_{0ji}} \right) \right). \quad (2.95)$$

Au regard de l'équation (2.93) le numérateur du $i^{\text{ème}}$ élément $\beta_{oi}(s)$ doit contenir, pour chaque $z \in \mathbb{C}^+$, un transfert scalaire $(s-z)$ d'ordre $\eta_z(n_{ii}(s))$. $\eta_z(n_{ii}(s))$ est supérieur ou égal à la différence entre l'ordre du zéro en z dans le déterminant $\left| G_o(s) \right|_{\alpha_0}$ et, si on considère une colonne, l'ordre commun du zéro en z dans la matrice transposée des cofacteurs $\left[G_o^{ji}(s) \right]_{\delta_{0ji}}$. Le signe de $\eta_z(n_{ii}(s))$ déterminera si la fonction de transfert à rajouter au numérateur de $\beta_{oi}(s)$ correspond à un pôle instable ou un zéro à partie réelle positive.

c. Stabilité de la matrice de fonction de transfert $S_o(s)G_o(s)$

La matrice de fonction de transfert $S_o(s)G_o(s)$ s'écrit :

$$S_o(s)G_o(s) = G_o(s) \frac{1}{1 + \beta_{oi}(s)} = G_o(s) \frac{d_{ii}(s)}{n_{ii}(s) + d_{ii}(s)}, \quad \forall i, j \in N. \quad (2.96)$$

En conséquence, $S_o(s)G_o(s)$ est stable si et seulement si :

$$\eta_z(S_o(s)G_o(s)) \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.97)$$

Ceci revient, en utilisant (2.96), à :

$$\eta_z(d_{ii}(s)) - \eta_z(n_{ii}(s) + d_{ii}(s)) \geq -\eta_z(g_{oi}(s)), \quad \forall i, j \in N \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2.98)$$

Avec (2.83), l'équation (2.98) devient :

$$\eta_z(d_{ii}(s)) \geq -\eta_z(g_{oi}(s)), \quad \forall i, j \in N \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}^+ \quad (2.99)$$

Le dénominateur de la $i^{\text{ème}}$ fonction de transfert $\beta_{o_i}(s)$ doit donc satisfaire toutes les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_z(d_{ii}(s)) &\geq -\eta_z(g_{o_{i1}}(s)) \\ \eta_z(d_{ii}(s)) &\geq -\eta_z(g_{o_{i2}}(s)) \\ &\vdots \\ \eta_z(d_{ii}(s)) &\geq -\eta_z(g_{o_{im}}(s)), \end{aligned} \quad (2. 100)$$

ou finalement:

$$\eta_z(d_{ii}(s)) \geq -\eta_{d_i}(z) \quad \forall i \in N, \quad (2. 101)$$

avec

$$\eta_{d_i}(z) = \min_{j \in N} (\eta_z(g_{o_{ij}}(s))). \quad (2. 102)$$

Au regard de l'équation (2. 101), le dénominateur du $i^{\text{ème}}$ élément $\beta_{o_i}(s)$ doit contenir, pour chaque $z \in \mathbb{C}^+$, un transfert scalaire $(s-z)$ d'ordre $\eta_z(d_{ii}(s))$. $\eta_z(d_{ii}(s))$ est supérieur ou égal au plus petit ordre commun du zéro en z dans la matrice $G_o(s)$ si on considère la $i^{\text{ème}}$ ligne de cette matrice. Le signe de $\eta_z(d_{ii}(s))$ déterminera si la fonction de transfert à rajouter au dénominateur de $\beta_{o_i}(s)$ correspond à un pôle instable ou un zéro à partie réelle positive.

d. Système « hautement » stabilisable

Dans le cas particulier où le système est stabilisable par un régulateur stable, sous l'hypothèse de stabilité interne de la boucle fermée, on a :

$$\eta_z(k_{ij}(s)) \geq 0 \quad \forall i, j \in N \quad \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2. 103)$$

Contrairement aux systèmes scalaires le régulateur multivariable peut avoir des zéros à partie réelle positive.

Avec (2. 73), l'équation (2. 103) devient

$$\eta_z(k_{ij}(s)) = \eta_z(p_{ij}(s)\beta_{o_i}(s)) \geq 0, \quad (2. 104)$$

ou en utilisant les équations (2. 84) et (2. 85)

$$\eta_z(k_{ij}(s)) = \eta_z \left(\frac{[G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0_{ji}}}}{|G_o(s)|_{\epsilon_0}} \beta_{o_i}(s) \right) \geq 0, \quad \forall i, j \in N \quad \forall z \in \mathbb{C}^+. \quad (2. 105)$$

En conséquence :

$$\eta_z(\beta_{o_i}(s)) \geq \eta_z(|G_o(s)|_{\epsilon_0}) - \eta_z([G_o^{ji}(s)]_{\delta_{0_{ji}}}). \quad (2. 106)$$

La $i^{\text{ème}}$ fonction de transfert de la matrice de transfert en boucle ouverte doit donc satisfaire toutes les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \eta_z(\beta_{o_i}(s)) &\geq \eta_z \left(\left[G_o(s) \right]_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{1i}(s) \right]_{\delta_{01i}} \right) \\ \eta_z(\beta_{o_i}(s)) &\geq \eta_z \left(\left[G_o(s) \right]_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{2i}(s) \right]_{\delta_{02i}} \right) \\ &\vdots \\ \eta_z(\beta_{o_i}(s)) &\geq \eta_z \left(\left[G_o(s) \right]_{\alpha_0} \right) - \eta_z \left(\left[G_o^{mi}(s) \right]_{\delta_{0mi}} \right), \end{aligned} \quad (2.107)$$

soit finalement:

$$\eta_z(\beta_{o_i}(s)) \geq \eta_z \left(\left[G_o(s) \right]_{\alpha_0} \right) - \eta_i(z) \quad \forall i \in N, \quad (2.108)$$

avec

$$\eta_i(z) = \min_{j \in N} \left(\eta_z \left(\left[G_o^{ji}(s) \right]_{\delta_{0ji}} \right) \right). \quad (2.109)$$

Les conditions de stabilité de la boucle ouverte énoncées précédemment ((2.94) et (2.101)) se résument à l'équation (2.108). Au regard de cette dernière, le $i^{\text{ème}}$ élément $\beta_{o_i}(s)$ doit contenir, pour chaque $z \in \mathbb{C}^+$, un transfert scalaire $(s-z)$ d'ordre $\eta_z(\beta_{o_i}(s))$. $\eta_z(\beta_{o_i}(s))$ est supérieur ou égal à la différence entre l'ordre du zéro en z dans le déterminant $\left[G_o(s) \right]_{\alpha_0}$ et, si on considère une colonne, l'ordre commun du zéro en z dans la comatrice transposée $\left[G_o^{ji}(s) \right]_{\delta_{0ji}}$. Le signe de $\eta_z(\beta_{o_i}(s))$ détermine si la fonction de transfert à rajouter à $\beta_{o_i}(s)$ correspond à un pôle instable ou un zéro à partie réelle positive.

Finalement, lorsque tous les zéros et pôles qui doivent être intégrés aux différents éléments de la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte sont déterminés, $\beta_{o_i}(s)$ s'écrit :

$$\beta_o(s) = \text{diag}[\beta_{o_i}(s)] = \beta_l(s)\beta_z(s)\beta_o(s)\beta_p(s)\beta_h(s), \quad (2.110)$$

avec:

$$\beta_z = \text{diag} \left[C_{z_i} \prod_{k=1}^{N_{z_i}} (z_{i_k} - s)^{\eta_{z_{i_k}}(\beta_{o_i})} \right], \quad (2.111)$$

$$\beta_p = \text{diag} \left[C_{p_i} (e^{-j\pi})^{\Psi_{p_i}} \prod_{k=1}^{N_{p_i}} \left(\frac{p_{i_k} + s}{p_{i_k} - s} \right)^{\eta_{p_{i_k}}(\beta_{o_i})} \right], \quad (2.112)$$

$$\beta_o(s) = \text{diag}[\beta_{o_i}(s)], \quad (2.113)$$

où :

- z_{i_k} est un z tel que $\eta_z(\beta_{o_i}(s)) > 0$,
- p_{i_k} est un z tel que $\eta_z(\beta_{o_i}(s)) < 0$,
- $\eta_{z_{i_k}}(\beta_{o_i}(s)) = \eta_z(\beta_{o_i}(s))$, si z est un zéro de $\beta_{o_i}(s)$,
- $\eta_{p_{i_k}}(\beta_{o_i}(s)) = -\eta_z(\beta_{o_i}(s))$, si z est un pôle de $\beta_{o_i}(s)$,
- N_{z_i} est le nombre de zéro à partie réelle positive de $\beta_{o_i}(s)$,
- N_{p_i} est le nombre de pôle instable de $\beta_{o_i}(s)$,
- $\Psi_{p_i} = \sum_{k=1}^{N_{p_i}} \eta_{p_{i_k}}(\beta_{o_i}(s))$,
- $\Psi_{z_i} = \sum_{k=1}^{N_{z_i}} \eta_{z_{i_k}}(\beta_{o_i}(s))$.

De plus, le régulateur doit être propre et doit permettre le rejet des perturbations. Sachant qu'il est obtenu par :

$$K(s) = G_o^{-1}(s)\beta_o(s) \quad (2.114)$$

avec $\beta_o(s)$ une matrice de fonction de transfert diagonale, chacun de ses éléments est défini par :

$$k_{ij}(s) = p_{ij}(s)\beta_{o_i}(s). \quad (2.115)$$

Le régulateur sera donc propre si et seulement si :

$$\text{deg}_{\text{relatif}}(k_{ij}(s)) \geq 0, \quad (2.116)$$

c'est à dire si :

$$(\text{deg}(D_{p_{ij}(s)}) - \text{deg}(N_{p_{ij}(s)})) + ((\text{deg}(d_i(s)) - \text{deg}(n_i(s)))) \geq 0 \quad (2.117)$$

et finalement si :

$$\text{deg}(d_i(s)) + \text{deg}(D_{p_{ij}(s)}) \geq \text{deg}(N_{p_{ij}(s)}) + \text{deg}(n_i(s)), \forall j \in N, \quad (2.118)$$

avec :

- $P_{ij}(s) = \frac{N_{p_{ij}(s)}}{D_{p_{ij}(s)}}$,
- $\beta_{o_i}(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)}$.

La condition précédente devient :

$$\deg(d_i(s)) - \deg(n_i(s)) \geq \max_{j \in N} (\deg(N_{p_{ij}(s)}) - \deg(D_{p_{ij}(s)})). \quad (2.119)$$

Sachant qu'en haute fréquence :

$$\deg(d_i(s)) = n_{h_i}, \quad (2.120)$$

on obtient:

$$n_{h_i} \geq \max_{j \in N} (\deg(N_{p_{ij}(s)}) - \deg(D_{p_{ij}(s)})). \quad (2.121)$$

Considérant la fonction de transfert $S_o(s)G_o(s)$, en basse fréquence les perturbations sont rejetées si :

$$\eta_{z=0}(S_o(s)) + \eta_{z=0}(G_o(s)) \geq 0. \quad (2.122)$$

L'ordre de $S_o(s)$ étant donné par celui de $\beta_{o_i}(s)$, on obtient :

$$\eta_{z=0}(S_o(s)) \approx \eta_{z=0}(\beta_{o_i}(s)) = n_{l_i}. \quad (2.123)$$

On a alors :

$$\eta_{z=0}(G_o(s)) = \eta_{z=0}(N_{g_{ij}(s)}) - \eta_{z=0}(D_{g_{ij}(s)}), \quad (2.124)$$

avec :

$$g_{ij}(s) = \frac{N_{g_{ij}(s)}}{D_{g_{ij}(s)}} \quad (2.125)$$

soit

$$n_{l_i} \geq \eta_{z=0}(N_{g_{ij}(s)}) - \eta_{z=0}(D_{g_{ij}(s)}), \quad \forall j \in N, \quad (2.126)$$

et finalement :

$$n_{l_i} \geq \max_{j \in N} (\eta_{z=0}(N_{g_{ij}(s)}) - \eta_{z=0}(D_{g_{ij}(s)})). \quad (2.127)$$

2.4.3. Application

Soit une colonne de distillation [Wang et al, 2002] possédant deux entrées et deux sorties et modélisée par la fonction de transfert carrée $G_o(s)$:

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.5332}{(32s+1)^2(2s+1)} e^{-7.5s} & \frac{1.68}{(28s+1)^2(2s+1)} e^{-2s} \\ \frac{-1.2585}{(43.6s+1)(9s+1)} e^{-2.8s} & \frac{4.7861}{(48s+1)(5s+1)} e^{-1.15s} \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

De nombreuses lois de commande ont été testées sur ce système ainsi que de nombreuses méthodes d'identification. Notamment, Luyben [Luyben et al, 1986] proposa une méthode d'identification appelée "biggest log modulus tuning (BLT) method". Saeed Tavakoly [Tavakoly et al, 2005] proposa quant à lui une loi de commande décentralisée où tous les régulateurs étaient de simples proportionnels intégraux. Dans l'article [Wang et al, 2002], Wang proposa une méthode d'identification qui permet d'obtenir un modèle plus simple de la colonne de distillation :

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.5332}{67.7099s+1} e^{-19.5838s} & \frac{1.7171}{48.3651s+1} e^{-14.8791s} \\ \frac{-1.2585}{48.7805s+1} e^{-8.4505s} & \frac{4.7861}{49.7512s+1} e^{-4.9768s} \end{bmatrix}. \quad (2.129)$$

C'est ce procédé nominal que nous allons utiliser. Tao Liu dans [Tao et al, 2005] développa une méthode analytique de découplage basée sur la théorie de la commande à modèle interne et la mise en forme du problème de performance à l'aide de la norme H_2 . Les résultats obtenus par cette méthode et détaillés dans [Tao et al, 2005] serviront de base de comparaison et de validation de la méthode proposée ici.

Le but est évidemment d'obtenir une meilleure robustesse de la loi de commande et de meilleures performances. Nous ferons varier les constantes de temps ainsi que les retards purs liés aux différentes entrées et sorties de 20%.

a. Détermination du retards de chacune des boucle ouverte

Sans aucune approximation, le déterminant de la matrice de transfert $G_o(s)$ s'écrit :

$$|G_o(s)| = \frac{Ae^{-24.5606s} + Be^{-23.3296s}}{C}, \quad (2.130)$$

où :

$$A = -2.5519(48.7805s+1) \cdot (48.3651s+1), \quad (2.131)$$

$$B = 2.1610(67.7099s+1) \cdot (49.7512s+1), \quad (2.132)$$

$$C = (67.7099s+1) \cdot (49.7512s+1) \cdot (48.7805s+1) \cdot (48.3651s+1). \quad (2.133)$$

Par conséquent le retard pur de la fonction de transfert $|G_o(s)|$ est $\alpha_0 = 23.3296$ et :

$$\tau(G_o(s)) = 23.3296. \quad (2.134)$$

- Pour la première boucle de commande :

$$\tau(G_o^{11}(s)) = 4.9768, \quad (2.135)$$

$$\tau(G_o^{21}(s)) = 8.4505, \quad (2.136)$$

On a donc :

$$\tau_1 = \min(\tau(G_o^{11}(s)), \tau(G_o^{21}(s))) = 4.9768, \quad (2.137)$$

et au regard de l'équation (2.78) :

$$\tau(\beta_{o_1}(s)) \geq 23.3296 - 4.9768 = 18.3528. \quad (2.138)$$

- Pour la deuxième boucle de commande :

$$\tau(G_o^{12}(s)) = 14.8791, \quad (2.139)$$

$$\tau(G_o^{22}(s)) = 19.5838. \quad (2.140)$$

On a donc :

$$\tau_1 = \min(\tau(G_o^{12}(s)), \tau(G_o^{22}(s))) = 14.8791, \quad (2.141)$$

et au regard de la relation (2.78) :

$$\tau(\beta_{o_2}(s)) \geq 23.3296 - 14.8791 = 8.4505. \quad (2.142)$$

b. Détermination des zéros/pôles à partie réelle positive

Afin de déterminer l'ensemble des zéros et pôles à ajouter à la matrice de transfert en boucle ouverte et de ne pas tenir compte une deuxième fois du retard prédominant calculé à l'étape précédente, tous les calculs sont effectués sur les matrices de fonctions de transfert $|G_o(s)|_{\alpha_0}$ et $[G_o^{ij}(s)]_{\delta_{0ij}}$. Cette approximation permet donc de calculer le déterminant $|G_o(s)|_{\alpha_0}$. Cette fonction de transfert ne possède qu'un zéro à partie réelle positive en $z=0.0129$

$$\eta_z \left(|G_o(s)|_{\alpha_0} \right)_{z=0.0129} = 1. \quad (2.143)$$

Chacun des éléments de la matrice des cofacteurs est analysé et quelque soit $z \in \mathbb{C}^+$ on a :

$$\begin{aligned} \eta_z \left([G_o^{11}(s)]_{\delta_{011}} \right) &= 0 \\ \eta_z \left([G_o^{12}(s)]_{\delta_{012}} \right) &= 0 \\ \eta_z \left([G_o^{21}(s)]_{\delta_{021}} \right) &= 0, \\ \eta_z \left([G_o^{22}(s)]_{\delta_{022}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.144)$$

Par conséquent :

$$\eta_1(z) = \min_{z=0.0129} \left(\eta_z \left([G_o^{11}(s)]_{\delta_{011}} \right), \eta_z \left([G_o^{21}(s)]_{\delta_{012}} \right) \right) = 0, \quad (2.145)$$

et

$$\eta_z(z) = \min_{z=0.0129} \left(\eta_z \left(\left[G_o^{12}(s) \right]_{s_{021}} \right), \eta_z \left(\left[G_o^{22}(s) \right]_{s_{022}} \right) \right) = 0, \quad (2. 146)$$

Finalement, en utilisant l'équation (2. 94) on obtient :

$$\eta_z \left(n_1(s) \right) \Big|_{z=0.0129} = 1 - 0 \geq 1, \quad (2. 147)$$

et

$$\eta_z \left(n_2(s) \right) \Big|_{z=0.0129} = 1 - 0 \geq 1. \quad (2. 148)$$

Les deux fonctions de transferts constituant la matrice de transfert en boucle ouverte doivent donc contenir un zéro à partie réelle positive en $z=0.0129$:

$$\beta_{o_1}(s) = C_{z_1} \beta_{h_1}(s) (s - z_1) \frac{n_1(s)}{d_1(s)} e^{-18.3528s} \beta_{h_1}(s), \quad (2. 149)$$

et

$$\beta_{o_2}(s) = C_{z_2} \beta_{h_2}(s) (s - z_2) \frac{n_2(s)}{d_2(s)} e^{-8.4505s} \beta_{h_2}(s), \quad (2. 150)$$

où $z_1 = z_2 = 0.0129$.

Les fonctions de transferts $n_1(s)$, $d_1(s)$, $n_2(s)$, $d_2(s)$ et les paramètres C_{z_1} et C_{z_2} sont maintenant à optimiser.

c. Spécifications et optimisations

Specifications

Pour l'ensemble des procédés nominal et reparamétrés, la loi de commande doit satisfaire les spécifications de performances suivantes :

- une erreur statique nulle sur les deux sorties,
- un découplage parfait des deux sorties pour le procédé nominal et aussi bon que possible pour tous le procédés reparamétrés,
- un temps de montée le plus petit possible,
- un premier dépassement inférieur à 10%.

L'équation (2. 127) et la première spécification impose $n_1 \geq 1$. La seconde spécification impose d'avoir un gain maximum le plus petit possible pour les éléments non diagonaux de la

matrice de fonction de transfert de sensibilité complémentaire. La dernière des spécifications sera satisfaite en choisissant un pic de résonance nominal très faible (10^{-3}) pour les deux boucles de commandes.

Une fois définis les différents zéros et pôles à parties réelles positives ainsi que le retard pur à intégrer aux deux éléments $\beta_{o_i}(s)$ de la matrice de transfert en boucle ouverte, les ordres n_{l_i} et n_{h_i} doivent être déterminés. Ici, $n_{l1} = n_{l2} = 1$ permet d'assurer une précision suffisante et $n_{h1} = n_{h2} = 2$ un régulateur propre.

Les paramètres à optimiser simultanément sont : ω_{r_i} , ω_{h_i} , ω_{l_i} et $\|\beta_i(j\omega)\|_{\omega=\omega_i}$.

Ce vecteur de paramètres est initialisé avec $\omega_{r1}=0.0042\text{rad/s}$, $\omega_{h1}=0.4\text{rad/s}$, $\omega_{l1}=0.002\text{rad/s}$, $\|\beta_{o_1}(j\omega)\|_{\omega=\omega_{r_1}} = 0\text{dB}$, $\omega_{r2}=0.0041\text{rad/s}$, $\omega_{l2}=0.01\text{rad/s}$, $\omega_{h2}=0.4\text{rad/s}$ et $\|\beta_{o_2}(j\omega)\|_{\omega=\omega_{r_2}} = 0.5\text{dB}$

La matrice de fonction de transfert à optimiser est donc initialisée par :

$$\beta_o(s) = \begin{bmatrix} \beta_{o_1}(s) & 0 \\ 0 & \beta_{o_2}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.151)$$

dans laquelle :

$$- \beta_{o_1}(s) = \beta_{l_1}(s)\beta_{o_1}(s)\beta_{h_1}(s), \quad (2.152)$$

$$\beta_{o_1}(s) = (s - 0.0129)C_{11}^{\text{sign}(b_1)} \left(\frac{1 + s/0.4}{1 + s/0.002} \right)^{a_1} \times \left(\Re e_{/i} \left\{ \left(C_{g_1} \frac{1 + s/0.4}{1 + s/0.002} \right)^{ib_2} \right\} \right)^{-q_1 \text{sign}(b_1)} e^{-18.3528s} \quad (2.153)$$

$$\beta_{l_1}(s) = C_{l_1} \left(\frac{0.002}{s} + 1 \right), \quad (2.154)$$

et

$$\beta_{h_1}(s) = \frac{C_{h_1}}{\left(\frac{s}{0.4} + 1 \right)^2}. \quad (2.155)$$

$$- \beta_{o_2}(s) = \beta_{l_2}(s)\beta_{o_2}(s)\beta_{h_2}(s), \quad (2.156)$$

$$\beta_{o_2}(s) = (s - 0.0129)C_{22}^{\text{sign}(b_2)} \left(\frac{1 + s/0.4}{1 + s/0.01} \right)^{a_2} \times \left(\Re e_{/i} \left\{ \left(C_{g_2} \frac{1 + s/0.4}{1 + s/0.01} \right)^{ib_2} \right\} \right)^{-q_2 \text{sign}(b_2)} e^{-8.4505s}, \quad (2.157)$$

$$\beta_{l_2}(s) = C_{l_2} \left(\frac{0.01}{s} + 1 \right), \quad (2.158)$$

et

$$\beta_{h_2}(s) = \frac{C_{h_2}}{\left(\frac{s}{0.4} + 1 \right)^2} \quad (2.159)$$

Compte tenu des paramètres réellement optimisés, l'optimisation permet en fait de déterminer les valeurs optimales des paramètres : K_i ($K_i = C_{ii}^{\text{sign}(b)} \cdot C_{h_i} \cdot C_{l_i}$), a_i , b_i , q_i et C_i .

Résultats

En tenant compte de toutes les spécifications, les paramètres optimisés sont :

- $K_1 = 2.0160$, $a_1 = 1.1087$, $b_1 = -0.3710$, $q_1 = 2$ et $C_1 = 2.3258$.
- $K_2 = 0.4122$, $a_2 = 1.3668$, $b_2 = -0.6808$, $q_2 = 4$ et $C_2 = 1.0807$.

Le tracé de la fonction de sensibilité complémentaire fractionnaire (Figure 2. 4) et des boucles ouvertes équivalentes (Figure 2. 5) nous permet d'affirmer que la matrice de fonctions de transfert en boucle ouverte fractionnaire optimisée valide toutes les spécifications. En effet, au vue de la (Figure 2. 4) on observe que les éléments non-diagonaux de la matrice $T(s)$ ont un gain inférieure à 0dB ; on a donc bien un découplage entrée sortie en boucle fermée. Ce découplage peut être considéré parfait pour le nominal, les -300dB de gain maximum pouvant s'expliquer par des approximations de calculs, et robuste pour le procédé reparamétré, le gain des éléments non-diagonaux ne dépassant pas les -25dB. De plus, la spécification sur la valeur et la robustesse du premier dépassement sera probablement vérifiée puisque, quel que soit le procédé (nominal ou reparamétré) les boucles ouvertes équivalentes (Figure 2. 5) restent proches du contour de Nichols d'amplitude 0dB.

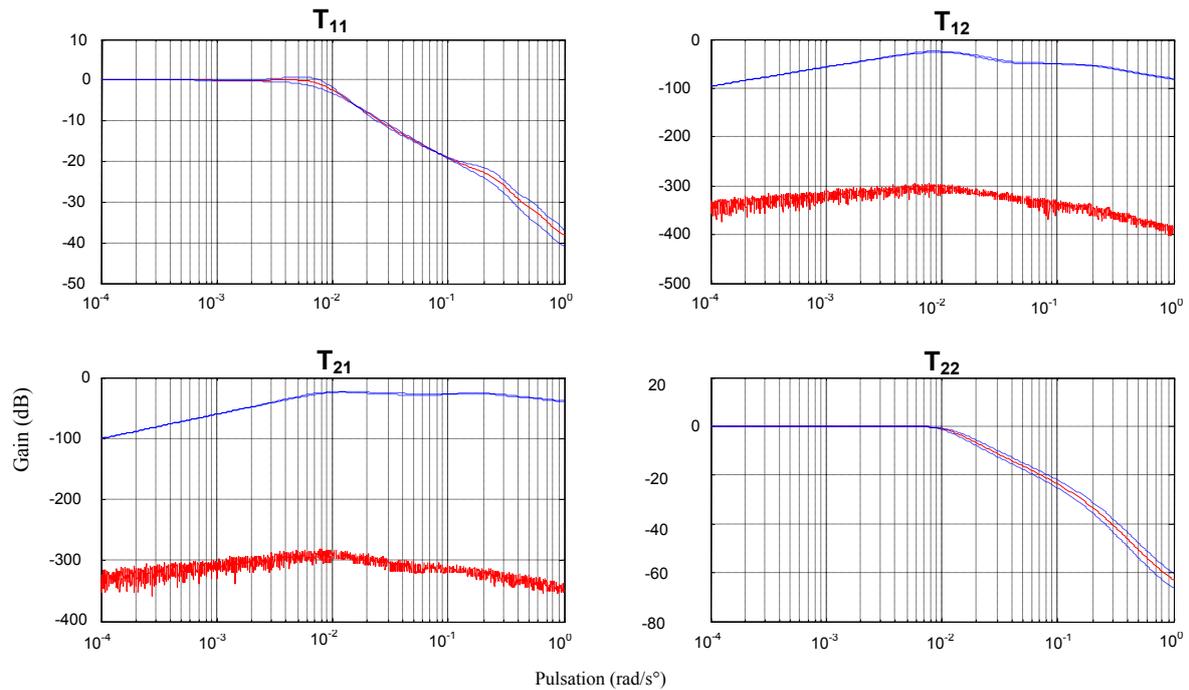


Figure 2.4 : Gains des réponses fréquentielles de la matrice de fonctions de transfert relative à la sensibilité complémentaire pour les procédés nominal (—) et reparamétrés (- -)

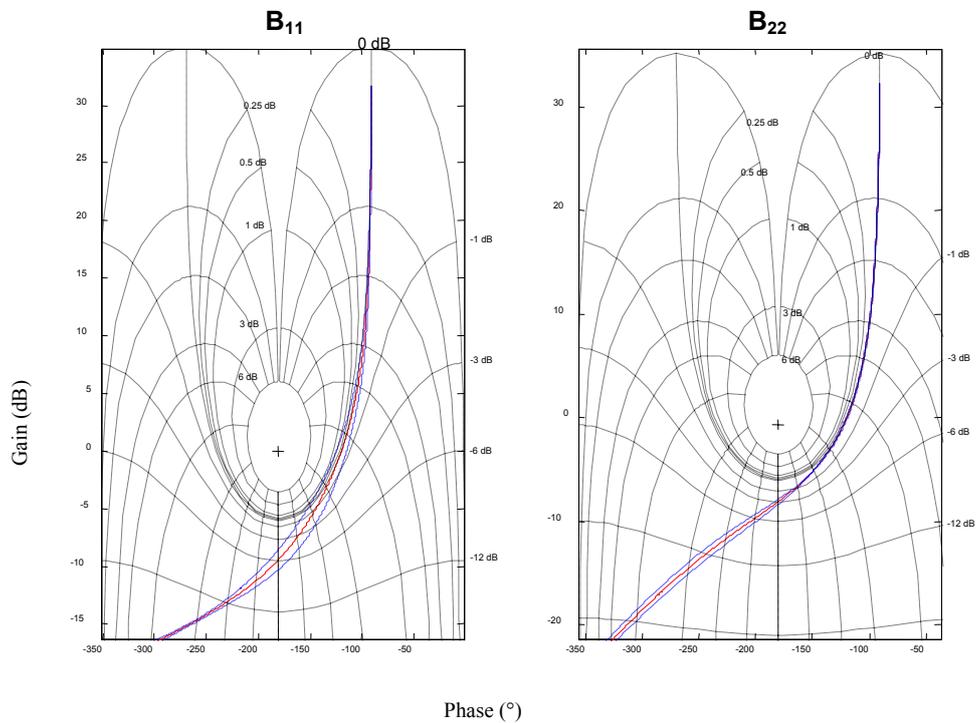


Figure 2.5 : Réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes nominale (—) et reparamétrés (- -)

Synthèse du régulateur

Les réponses fréquentielles de la matrice de boucle ouverte optimisée et du procédé nominal sont utilisées afin de déterminer la réponse fréquentielle idéale du régulateur $K(j\omega) = G_o^{-1}(j\omega)\beta_{opt}(j\omega)$. Des distributions de zéros et de pôles sont utilisées pour approximer chaque élément du régulateur réel et constituer le régulateur rationnel $K_R(s)$.

L'expression de chaque élément du régulateur est :

$$k_{ij}(s) = \frac{G_o^{ji}(s)}{|G_o(s)|} \beta_{o_i}(s) \quad \forall i, j \in N \quad (2.160)$$

et l'expression de l'inverse du déterminant est :

$$\frac{1}{|G(s)|} = \frac{C}{Ae^{-24.5606s} + Be^{-23.3296s}} \quad (2.161)$$

Deux méthodes permettent de synthétiser le régulateur rationnel.

1. Première méthode de synthèse du régulateur

La première méthode consiste à n'utiliser aucune connaissance a priori sur les éléments de la matrice de fonction de transfert inverse du procédé nominal $G_o^{-1}(s)$. Les éléments de la fonction de transfert $k_{ij}(s)$ sont progressivement introduits et ajustés afin que les réponses fréquentielles des régulateurs fractionnaire et rationnel soient les plus proches possibles. Les éléments du régulateur rationnel peuvent finalement s'écrire sous la forme :

$$k_{ij}(s) = \frac{N_k(s)}{D_k B(s)} = \frac{a_1 + a_2 s + \dots}{b_1 + b_2 s + \dots} \quad (2.162)$$

où $N_k(s)$ et $D_k(s)$ sont des polynômes de la variable de Laplace et de degré respectivement, n_{N_k} et n_{D_k} . L'avantage de cette méthode de conception est qu'on obtient généralement un régulateur d'ordre restreint dont la réponse fréquentielle approxime correctement celle du régulateur fractionnaire et ceci quelle que soit la complexité du problème de commande, c'est à dire peu importe le degré relatif des éléments des matrices de fonction de transferts du procédé nominal et de la boucle ouverte et aussi peu importe la complexité de description des spécifications. Néanmoins, contrairement au cas scalaire, cette simplicité conduit ici à une détérioration des performances. En effet, même si les boucles ouvertes équivalentes rationnelles tangentent toujours le contour de Nichols 0dB (Figure 2. 7), la deuxième spécification de découplage parfait pour l'état nominal n'est plus satisfaite. La comparaison des Figure 2. 4 et Figure 2. 6 montre bien la différence sur les éléments non diagonaux. Où on

avait un gain d'environ -300dB pour le procédé nominal et -25dB pour les procédés reparamétrés on n'obtient plus qu'une valeur proche de -10dB.

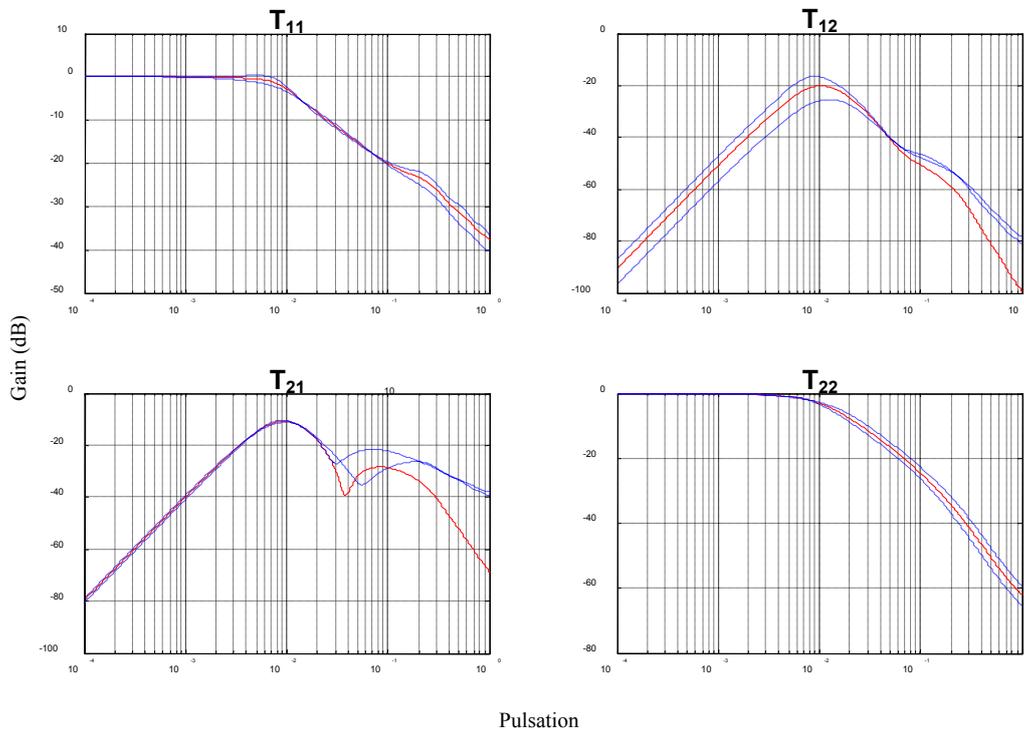


Figure 2. 6 : Réponses fréquentielles de la matrice de fonctions de transfert sensibilité complémentaire pour les procédés nominal (—) et reparamétrés (- -) après utilisation de la première méthode de synthèse du régulateur rationnel

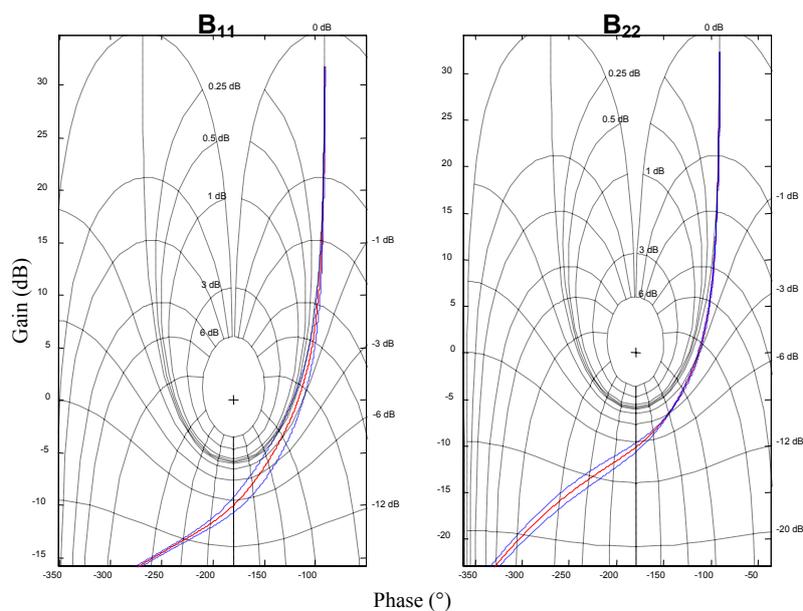


Figure 2. 7 : Réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes nominale (—) et reparamétrées (- -) après utilisation de la première méthode de synthèse du régulateur

2. Deuxième méthode de synthèse du régulateur

En observant que $K(s) = G_o^{-1}(s)\beta_{\text{opt}}(s)$ et surtout les équations (2. 160) et (2. 161), certains éléments de la matrice $G_o^{ji}(s)C$ sont introduits dans la structure initiale du régulateur rationnel. En utilisant davantage de connaissances a priori, cette méthode permet de réduire les erreurs d'approximation et de troncature liées au calculateur.

Cette méthode donne de bien meilleurs résultats que la première méthode, les réponses des matrices en boucle fermée (Figure 2. 4) et en boucle ouverte équivalentes (Figure 2. 5) fractionnaires correspondent exactement à celles des matrices obtenues après la synthèse du régulateur rationnel (Figure 2. 8 et Figure 2. 9).

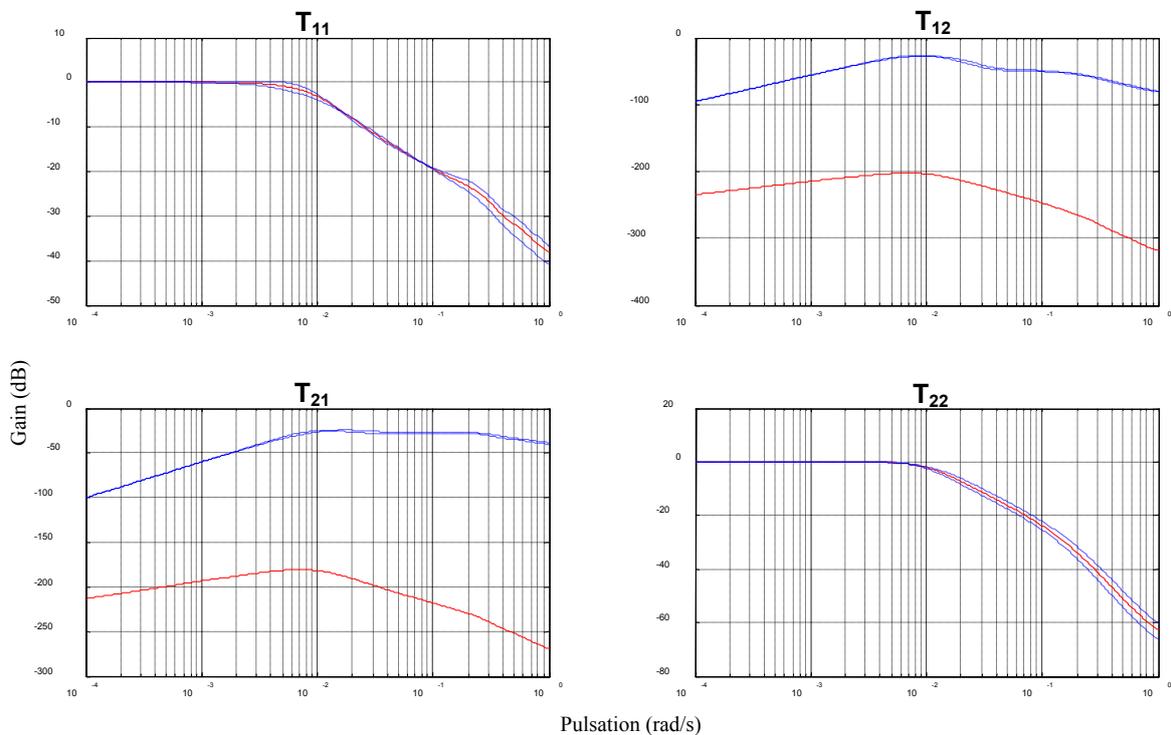


Figure 2. 8 : Réponses fréquentielles de la matrice de fonction de transfert sensibilité complémentaire pour les procédés nominal (—) et reparamétrés (- -) après utilisation de la deuxième méthode de synthèse du régulateur

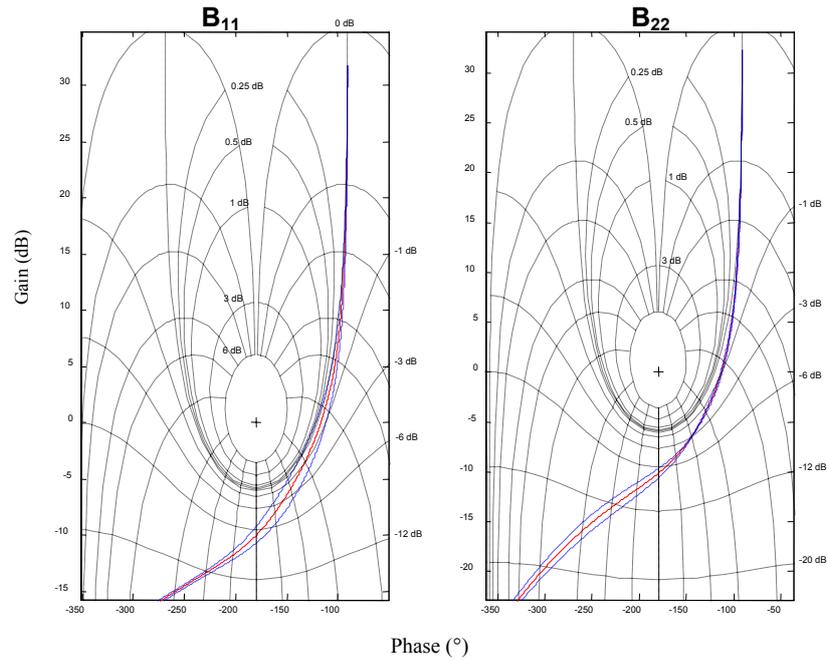


Figure 2. 9 : Réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes nominale (—) et reparamétrées (---) après utilisation de la deuxième méthode de synthèse du régulateur. Chaque élément de la matrice de fonction de transfert du régulateur est alors de la forme (2.162) avec :

	k_{11}		k_{12}	
	a_i	b_i	a_i	b_i
1	-1.84e-10	0	-4.84e-11	0
2	-1.26e-7	3.8e-9	-3.33e-8	3.8e-9
3	-1.94e-5	2.20e-6	-5.13e-6	2.2e-6
4	-0.0012	2.18e-5	-3.2e-5	2.18e-5
5	-0.033	7.5e-4	-8.7e-4	7.5e-4
6	-0.33	0.11	-0.089	0.11
7	-0.54	0.57	-0.14	0.57
8	-0.24	1	-0.064	1
	k_{21}		k_{22}	
	a_i	b_i	a_i	b_i
1	2.104e-11	0	6.53e-12	0
2	8.43e-9	1.16e-9	2.49e-9	1.16e-9
3	1.03e-6	3.60e-7	2.78e-7	3.60e-7
4	5.1e-5	3.12e-5	1.27e-5	3.12e-5
5	9.9e-5	1.14e-4	2.25e-5	1.14e-4
6	3.4e-4	0.02	7.80e-5	0.02
7	4.9e-4	0.17	1.11e-4	0.17
8	3.2e-4	0.66	7.21e-5	0.66
9	7.9e-5	1	1.77e-5	1

Tableau 2. 1 : Coefficients des éléments de la matrice de transfert du régulateur rationnel

Validation du régulateur

Le régulateur obtenu est validé en simulation. La procédure de test est la suivante :

- des échelons unitaires sont appliqués sur les entrées de référence aux temps $t = 0s$ et $t = 1500s$, respectivement pour la première entrée et la deuxième entrée,
- des échelons d'amplitude 0.1 sont appliqués sur les entrées de perturbations à $t = 4000s$ et $t = 2500s$.

La Figure 2. 10 présente la réponse temporelle des lois de commandes CRONE et IMC pour le procédé nominal. Toutes les spécifications sont validées et la méthode proposée présente un meilleur découplage (Figure 2. 11 et Figure 2. 12). Le couplage, qui entraînait des variations allant jusqu'à 0.08 (première boucle de commande, Figure 2. 11) et 0.15 (deuxième boucle de commande, Figure 2. 12) pour la loi de commande IMC, est réduit pour la loi de commande CRONE qui permet de limiter ces variations à respectivement 0.02 et 0.05.

La Figure 2. 13 présente la réponse temporelle pour tous les procédés (nominal et reparamétré). On peut constater la robustesse du premier dépassement pour la deuxième boucle de commande et une petite variation de ce dépassement pour la première boucle de commande. En effet, en observant de plus près le tracé de Nichols des fonctions de transfert des boucles ouvertes équivalentes (Figure 2. 9) on remarque que toutes les courbes ne tangent pas exactement le contour 0dB bien qu'elles en restent très proches. La robustesse de la loi de commande CRONE pourrait encore être améliorée en acceptant de diminuer la pulsation ω_{t1} ce qui reviendrait à translater l'ensemble de boucles ouvertes équivalentes vers le bas. Bien que cette diminution entraîne l'augmentation du temps de montée lié à la première entrée, il resterait inférieur à celui résultant de la méthode IMC.

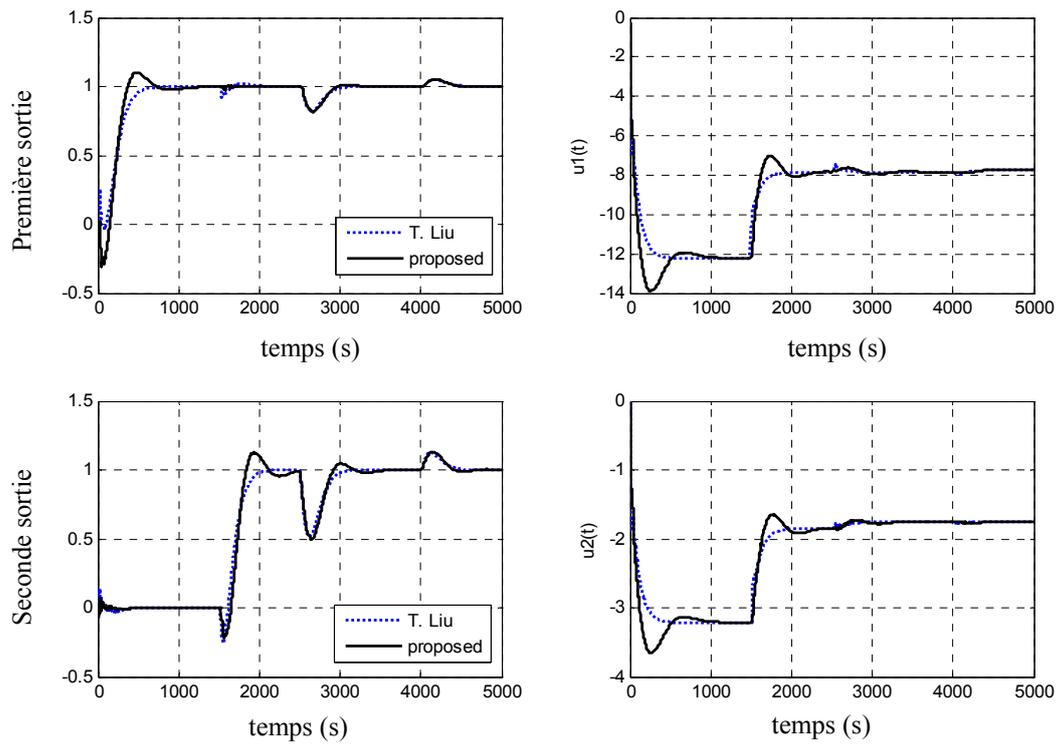


Figure 2. 10 : Réponses temporelles pour le procédé nominal

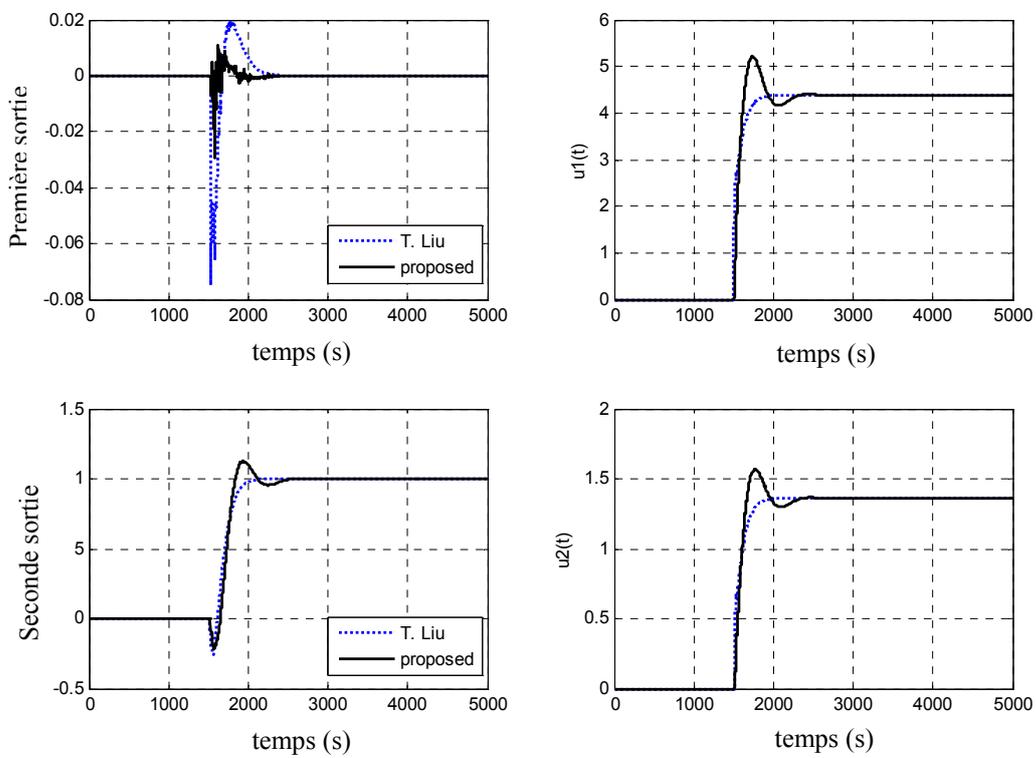


Figure 2. 11 : Observation du couplage lié à une variation de la deuxième entrée de référence

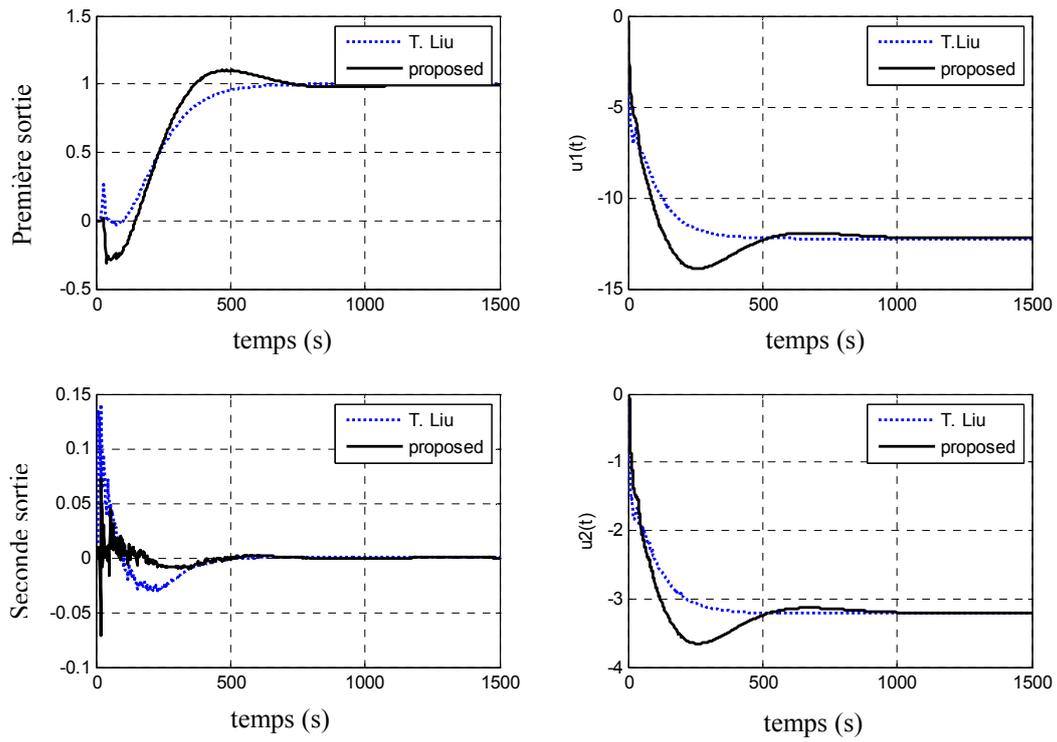


Figure 2. 12 : Observation du couplage lié à une variation de la première entrée de référence

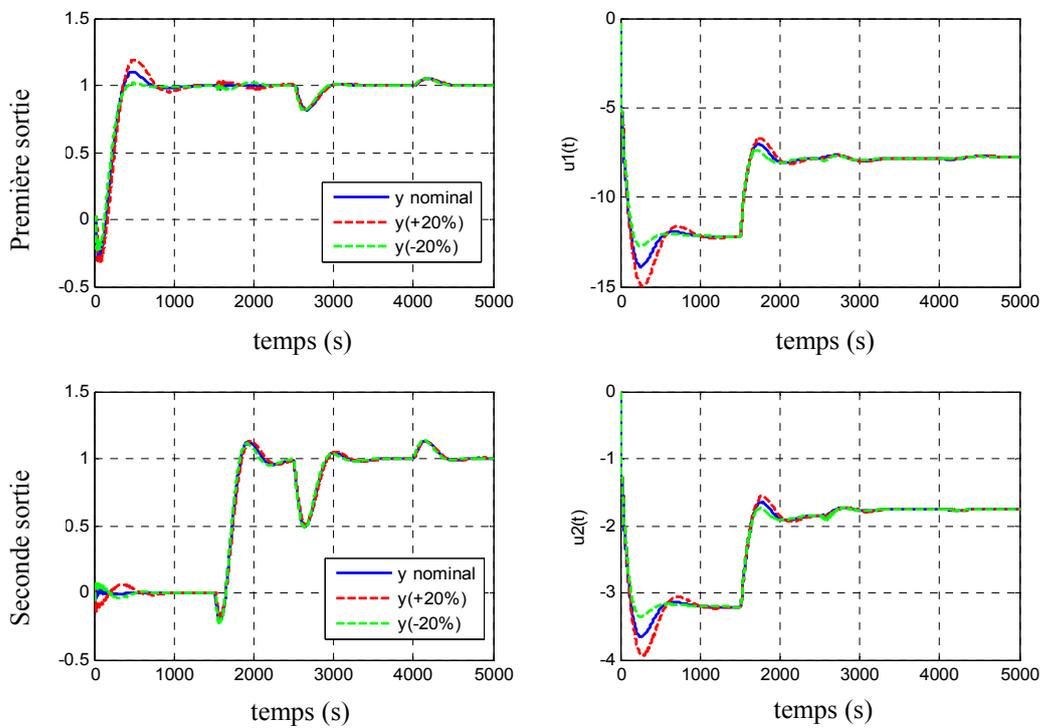


Figure 2. 13 : Réponses temporelles pour les systèmes nominal et reparamétrés

Ce paragraphe a permis de reformuler la méthodologie CRONE MIMO carré de manière à pouvoir l'étendre aux systèmes MIMO retardés, instables et à non minimum de phase. La reformulation proposée porte sur les conditions de stabilité que nous avons énoncées plus clairement. Afin d'étendre le champ d'application de la méthodologie CRONE MIMO nous allons maintenant nous intéresser aux systèmes possédant des modes résonants.

2.5. Commande CRONE des systèmes MIMO possédant des modes résonants

Soit la matrice de transfert du procédé nominal suivante :

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & \cdots & g_{1m}(s) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & g_{ij}(s) & \\ \vdots & & & \ddots \\ g_{m1}(s) & \cdots & & g_{mm}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.163)$$

où :

- $g_{ij}(s) = g_{o_{ij}}(s) \cdot h_{ij}(s)$,
- $h_{ij}(s)$ est le transfert incluant les modes résonants du procédé.

Considérant le cas général où $G_o(s)$ possède des pôles et des zéros à parties réelles positives et des modes résonants. $G_o^{-1}(s)$ s'écrit:

$$P(s) = G_o^{-1}(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s) & & \cdots & p_{1m}(s) \\ & \ddots & & \vdots \\ & & p_{ij}(s) & \\ \vdots & & & \ddots \\ p_{m1}(s) & \cdots & & p_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

où :

- $p_{ij}(s) = p_{o_{ij}}(s) \cdot m_{ij}(s)$,
- $m_{ij}(s)$ est le transfert incluant les modes résonants de $G_o^{-1}(s)$.

Le régulateur s'écrit donc :

$$k_{ij}(s) = p_{ij}(s) \cdot \beta_{o_i}(s), \quad (2.165)$$

$$= p_{o_j}(s) \cdot m_{ij}(s) \cdot \beta_{o_i}(s). \quad (2. 166)$$

Quand aucun mode résonant et pôle ou zéro à PRP n'est intégré à $\beta_{o_i}(s)$, certaines résonances de $G_o(s)$, voire de $G_o^{-1}(s)$ peuvent réapparaître dans le régulateur, les matrices de transferts en boucle fermées $S_i(s)$, $S_u(s)$, $T(s)$ et $S(s)$ (pour les procédés reparamétrés) comportant alors des modes résonants non maîtrisés.

Comme dans le cas MIMO instable et à retard pur, certains éléments des matrices de transfert de $G_o(s)$ ou $G_o^{-1}(s)$ doivent donc être intégrés aux fonctions de transfert en boucle ouverte $\beta_{o_i}(s)$.

2.5.1. Les modes résonants

Comme mentionné précédemment les conditions suivantes doivent être satisfaites :

1. intégration des modes résonants de $G_o(s)$ et $G_o^{-1}(s)$ posant problème lors de la synthèse des éléments du régulateur $K(s)$,
2. atténuation forte du gain des matrices de transfert sensibilité et sensibilité complémentaire au voisinage des fréquences peu amorties présent en compte.

La première matrice de transfert à considérer est celle de sensibilité de l'entrée aux perturbations, $S_{io}(s)$. Avec (2. 48) et (2. 163) on a :

$$T_o(s)K^{-1}(s) = S_o(s)G_o(s) = \left[\frac{d_i(s) \cdot g_{o_{ij}}(s) \cdot h_{ij}(s)}{d_i(s) + n_i(s)} \right]. \quad (2. 167)$$

Soit

$$\hat{\beta}_o(s) = \text{diag} \left[\frac{\hat{n}_i(s)}{\hat{d}_i(s)} \right]_{i \in N} \quad (2. 168)$$

la matrice de boucle ouverte nominale fractionnaire permettant le contrôle du système MIMO instable, résonant et à non minimum de phase considéré. Le transfert (2. 167) ne possède pas de mode peu amorti si et seulement si :

$$d_i(s) = \frac{\hat{d}_i(s)}{h_{ij}(s)} \quad \forall j \in N, \quad (2. 169)$$

Par conséquent, le dénominateur du $i^{\text{ième}}$ élément de la matrice de transfert en boucle ouverte nominale doit satisfaire toutes les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 d_i(s) &= \frac{\hat{d}_i(s)}{h_{i1}(s)} \\
 d_i(s) &= \frac{\hat{d}_i(s)}{h_{i2}(s)} \\
 &\vdots \\
 d_i(s) &= \frac{\hat{d}_i(s)}{h_{in}(s)}
 \end{aligned} \tag{2.170}$$

ce qui implique que $d_i(s)$ doit satisfaire l'équation suivante :

$$d_i(s) = \frac{\hat{d}_i(s)}{H_i(s)} \quad \forall i \in N, \tag{2.171}$$

où $H_i(s)$ est la fonction de transfert contenant les modes communs de la matrice de transfert $G_o(s)$ pris sur sa ligne i .

La deuxième matrice de transfert à considérer est $S_{uo}(s)$. Avec (2.48) et (2.164) on a :

$$K(s)S_o(s) = G_o^{-1}(s)T(s) = \left[\frac{p_{o_{ij}}(s) \cdot m_{ij}(s) \cdot n_j(s)}{d_j(s) + n_j(s)} \right]. \tag{2.172}$$

Ce transfert ne possède pas de mode peu amorti si et seulement si :

$$n_j(s) = \frac{\hat{n}_j(s)}{m_{ij}(s)} \quad \forall i \in N \tag{2.173}$$

Le numérateur du $j^{\text{ième}}$ transfert de la matrice en boucle ouverte doit donc satisfaire les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 n_j(s) &= \frac{\hat{n}_j(s)}{m_{1j}(s)} \\
 n_j(s) &= \frac{\hat{n}_j(s)}{m_{2j}(s)} \\
 &\vdots \\
 n_j(s) &= \frac{\hat{n}_i(s)}{m_{nj}(s)}
 \end{aligned} \tag{2.174}$$

ou finalement :

$$n_j(s) = \frac{\hat{n}_j(s)}{M_j(s)} \quad \forall j \in N, \tag{2.175}$$

où $M_j(s)$ est la fonction de transfert contenant les modes résonants commun à $G_o^{-1}(s)$ pris sur sa colonne j .

La deuxième condition est satisfaite en intégrant aux éléments $\beta_{o_i}(s)$ des fonctions de transfert du second ordre de type réjecteur/amplificateur permettant d'atténuer le gain des matrices de transfert sensibilité et sensibilité complémentaire au voisinage de la fréquence des modes résonants à traiter.

Finalement, quand tous les zéros, pôles et modes résonants devant être intégrés au $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice de transfert en boucle ouverte sont déterminés, $\beta_{o_i}(s)$ s'écrit :

$$\beta_{o_i}(s) = \beta_{r_i}(s)\beta_{l_i}(s)\beta_{z_i}(s)\beta_{o_i}(s)\beta_{p_i}(s)\beta_{h_i}(s), \quad (2.176)$$

avec :

$$\beta_{z_i} = C_{z_i} \prod_{k=1}^{N_{z_i}} (z_{i_k} - s)^{\eta_{z_{i_k}}(\beta_{o_i})}, \quad (2.177)$$

$$\beta_{p_i} = C_{p_i} (e^{-j\pi})^{\Psi_{p_i}} \prod_{k=1}^{N_{p_i}} \left(\frac{p_{i_k} + s}{p_{i_k} - s} \right)^{\eta_{p_{i_k}}(\beta_{o_i})}, \quad (2.178)$$

$$\beta_{r_i}(s) = C_r \frac{H_i(s)}{M_i(s)} \prod_{j=1}^{\phi} Q_j(s), \quad (2.179)$$

et

$$Q_j(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega'_{n_j}} \right)^2 + 2\xi' \frac{s}{\omega'_{n_j}} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_{n_j}} \right)^2 + 2\xi \frac{s}{\omega_{n_j}} + 1}, \quad (2.180)$$

où:

- ω_{n_j} et ω'_{n_j} sont des fréquences voisines de la fréquence d'un mode résonant,
- ξ et ξ' sont des facteurs d'amortissement,
- ϕ est le nombre de modes résonants à particulièrement maîtriser;
- z_{i_k} est un z tel que $\eta_z(\beta_{o_i}(s)) > 0$,
- p_{i_k} est un z tel que $\eta_z(\beta_{o_i}(s)) < 0$,
- $\eta_{z_{i_k}}(\beta_{o_i}(s)) = \eta_z(\beta_{o_i}(s))$, si z est un zéro de $\beta_{o_i}(s)$,
- $\eta_{p_{i_k}}(\beta_{o_i}(s)) = -\eta_z(\beta_{o_i}(s))$, si z est un pôle de $\beta_{o_i}(s)$,
- N_{z_i} est le nombre de zéro à partie réelle positive de $\beta_{o_i}(s)$,

- N_{p_i} est le nombre de pôle instable de $\beta_{o_i}(s)$,
- $\Psi_{p_i} = \sum_{k=1}^{N_{p_i}} \eta_{p_{ik}} (\beta_{o_i}(s))$,
- $\Psi_{z_i} = \sum_{k=1}^{N_{z_i}} \eta_{z_{ik}} (\beta_{o_i}(s))$.

Les équations (2. 94), (2. 101)) et (2. 108) assurant la stabilité de la boucle fermé, et celle assurant le rejet des perturbations et la réalisabilité du régulateur restent valable.

2.5.2. Application

La méthodologie présentée est appliquée à la commande d'une suspension active proposée par B.T. Lin et *al* [2006]. Le procédé consiste en un système de deux masses reliées par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs. Les sorties à contrôler sont les déplacements de ces masses. Le système est décrit par le schéma de la Figure 2. 14.

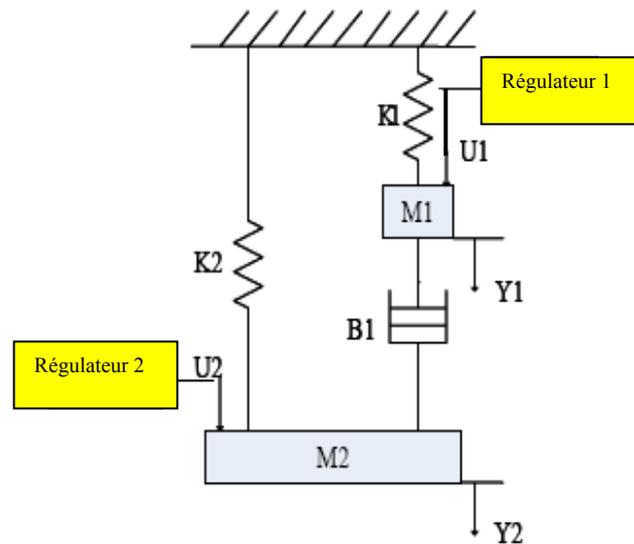


Figure 2. 14 : Modèle du système

Son modèle dynamique est défini par :

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_2 s^2 + B_1 s + K_2}{\Lambda} & B_1 s \\ B_1 s & \frac{M_1 s^2 + B_1 s + K_1}{\Lambda} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad (2. 181)$$

où :

$$\Lambda = M_1 M_2 s^4 + B_1 (M_1 + M_2) s^3 + (M_1 K_2 + M_2 K_1) s^2 + (B_1 K_2 + K_1 B_1) s^1 + K_1 K_2 \quad (2.182)$$

avec les masses $M_1=1\text{kg}$ et $M_2=1.85\text{kg}$, les raideurs $K_1=0.8\text{N/m}$ et $K_2=1.25\text{N/m}$ (valeur nominale) et le coefficient de l'amortisseur $B_1=0.8\text{Ns/m}$. La raideur K_2 est susceptible de varier entre 0.5 et 2. La réponse du système (non régulé) soumis à des perturbations (variation de u_1 à $t = 300\text{s}$ et de u_2 à $t = 400\text{s}$) nous a permis d'observer que notre système est très couplé, naturellement oscillant (Figure 2. 15).

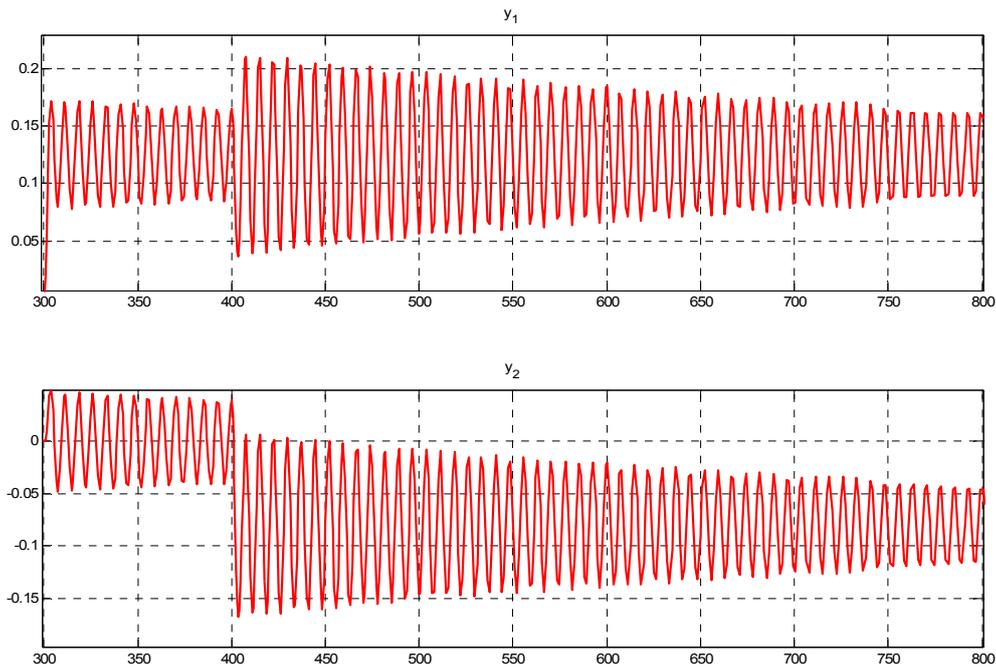


Figure 2. 15 : Simulation de y_1 et y_2 sans boucle de régulation en réponse à des perturbations

a. Recherche des éléments à intégrer

En appliquant la méthodologie proposée en section 3, on obtient :

- un zéro à partie réelle positive en $z=0.63\text{rad/s}$ d'ordre $\eta_{z=0.63}(\beta_{0_i})=1 \forall i \in N$ provenant du dénominateur de $G_o^{-1}(s)$,
- deux zéros peu amortis aux fréquences 0.86rad/s et 1.03rad/s de facteur d'amortissement, respectif 0.2 et -0.2 qui sont les pôles peu amortis commun aux colonnes de $G_o^{-1}(s)$.

- un pôle peu amorti à la fréquence $0.84rad/s$ de facteur d'amortissement 0.0023 qui est le zéro peu amorti commun aux colonnes de $G_o^{-1}(s)$.

b. Spécifications

Pour tous les états paramétriques, les spécifications à satisfaire sont les suivantes :

- une erreur statique nulle pour chacune des sorties,
- un temps d'établissement petit,
- un dépassement de l'ordre de 10%.

Ces spécifications permettront d'initialiser certains paramètres de la matrice en boucle ouverte. Compte tenu des éléments à ajouter à chacun des $\beta_{o_i}(s)$ et du rang relatif maximum du procédé (-3), n_{hi} doit être au minimum égal à 2. Une erreur statique nulle impose un n_i égal à 1.

Afin d'atténuer l'effet du mode le plus résonant on ajoute aux boucles ouvertes $\beta_{o_i}(s)$ des éléments de la forme (2. 180).

c. Optimisation

Les paramètres des 2 boucles ouvertes $\beta_{o_i}(s)$ sont ensuite optimisés. Les paramètres optimaux pour les boucles ouvertes sont alors $\omega_{r1}=0.05rad/s$, $\omega_{11}=0.02rad/s$, $\omega_{h1}=0.5rad/s$, $\|\beta_{o_1}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 2dB$, $\omega'_{n1}=\omega_{n1}=0.84rad/s$, $\zeta'_1=0.8$ et $\zeta_1=0.1$ ainsi que $\omega_{r2}=0.02rad/s$, $\omega_{12}=0.005rad/s$, $\omega_{h2}=1rad/s$, $\|\beta_{o_2}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 8dB$, $\omega_{n2}=0.5rad/s$, $\omega'_{n2}=1rad/s$, $\zeta'_2=0.8$ et $\zeta_2=0.3$.

Compte tenu des condition de tangence, on en déduit $K_1=2.98$, $a_1=1.314$, $b_1=-0.368$, $q_1=1$, $C_1=2.68$ ainsi que $K_2=1.816$, $a_2=1.308$, $b_2=-0.445$, $q_2=2$ et $C_2=4.12$.

La Figure 2. 16 présente les deux boucles ouvertes équivalentes optimiser en suivant la méthodologie proposée au paragraphe 2.3.4.

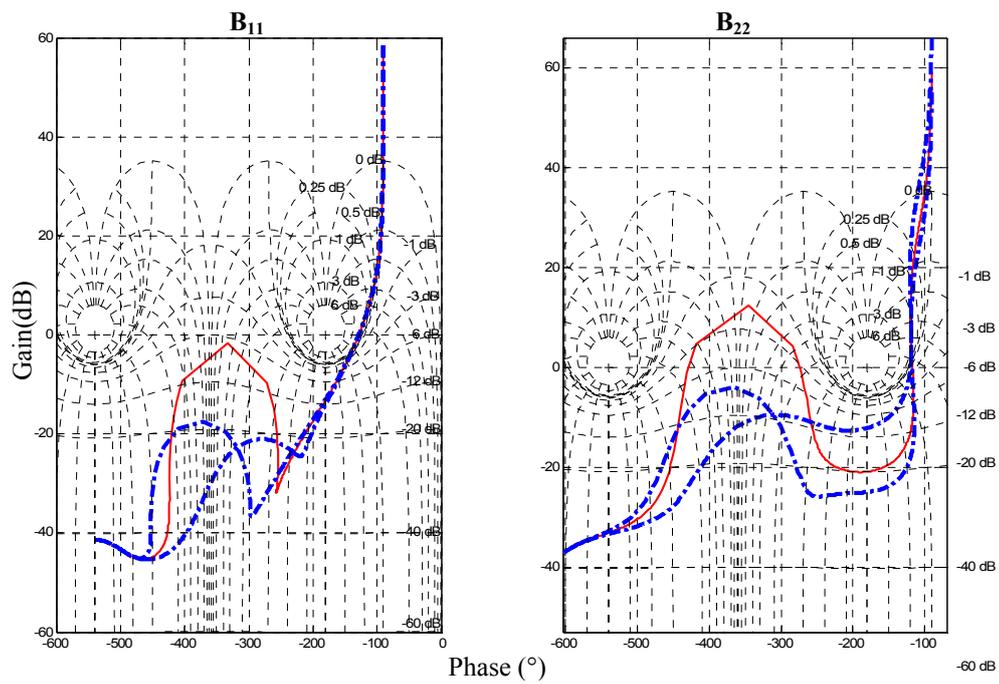


Figure 2.16 : Boucles ouvertes équivalentes nominale (—) et reparamétrées (---)

Le diagramme de Bode du régulateur rationnel obtenu par identification fréquentielle est présenté par la figure suivante.

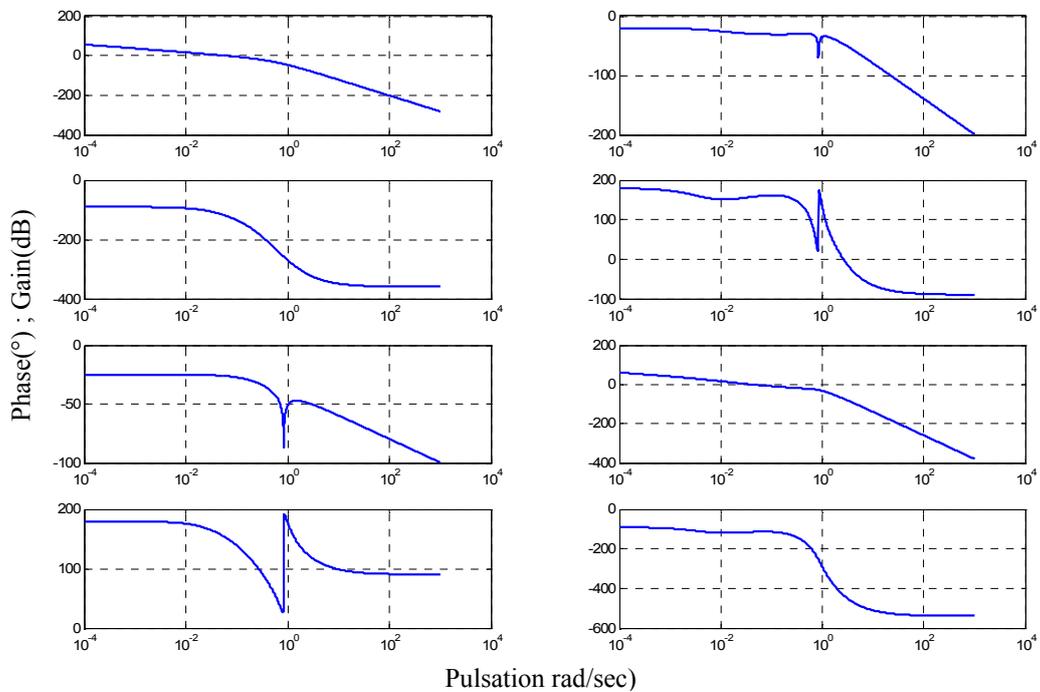


Figure 2.17 : Réponse fréquentielle du régulateur rationnel

d. Résultats

Le régulateur obtenu est évalué en simulation où :

- les entrées de référence du système bouclé sont des échelons unitaires imposés aux temps $t=0s$ pour la première entrée et $t=200s$ pour la deuxième entrée,
- les perturbations sont des échelons d'amplitude 0.1 imposés aux temps $t=600s$ et $t=800s$,

Les figures suivantes présentent les simulations obtenues avec le système de régulation optimisé.

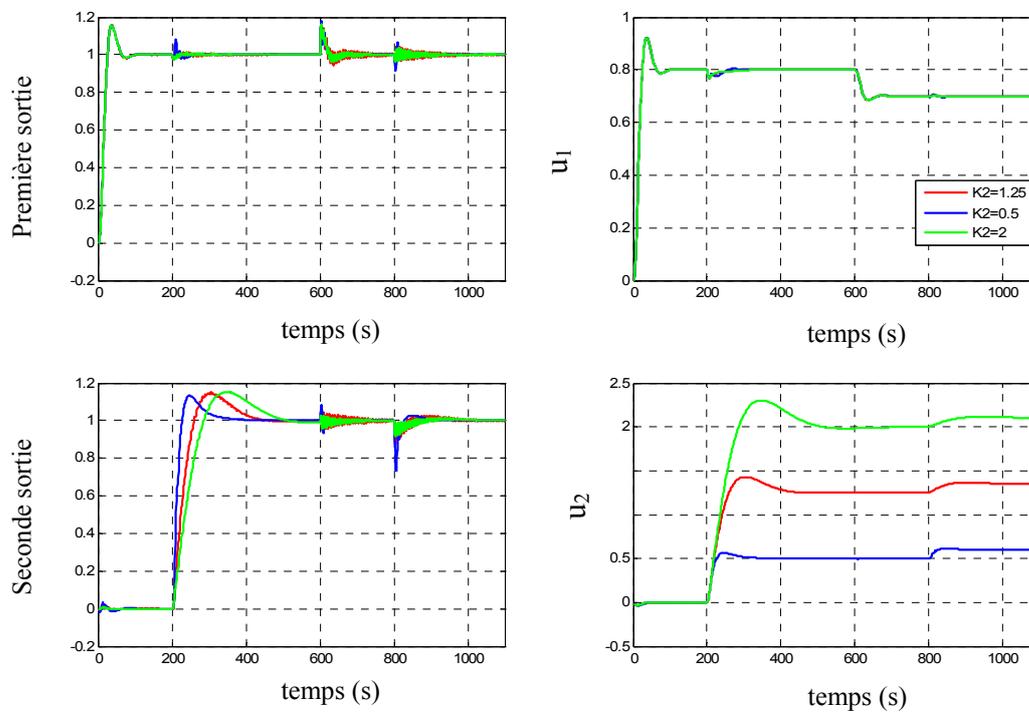


Figure 2. 18 : Simulations temporelles en présence des procédés nominal et reparamétrés

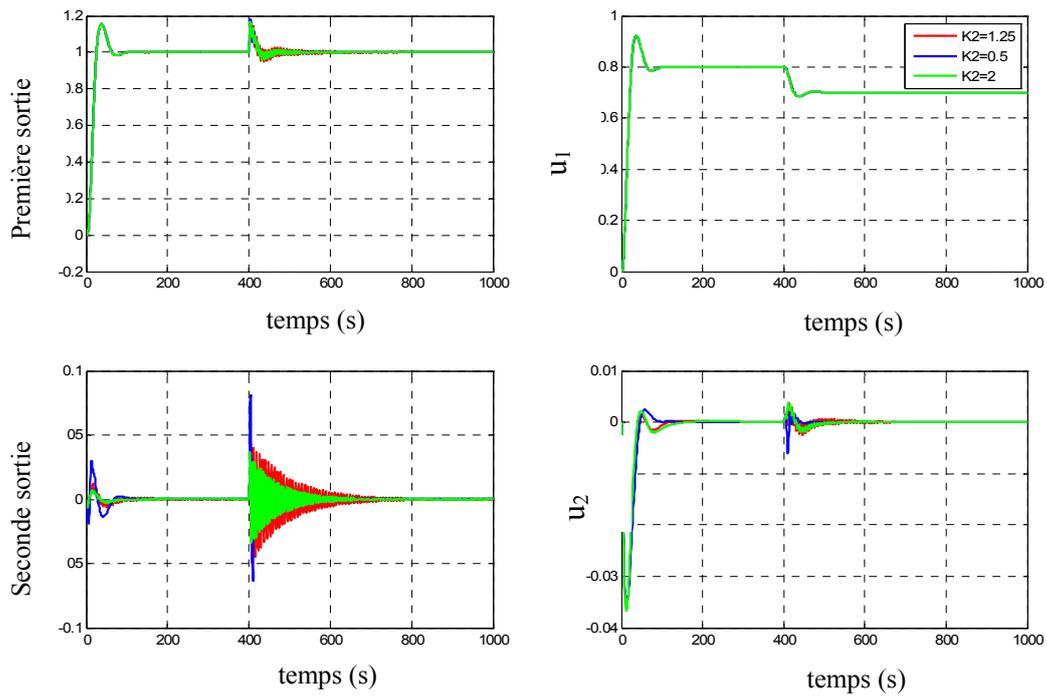


Figure 2. 19 : Observation du phénomène de couplage lors de l'action sur la première entrée de référence (procédés nominal et reparamétrés)

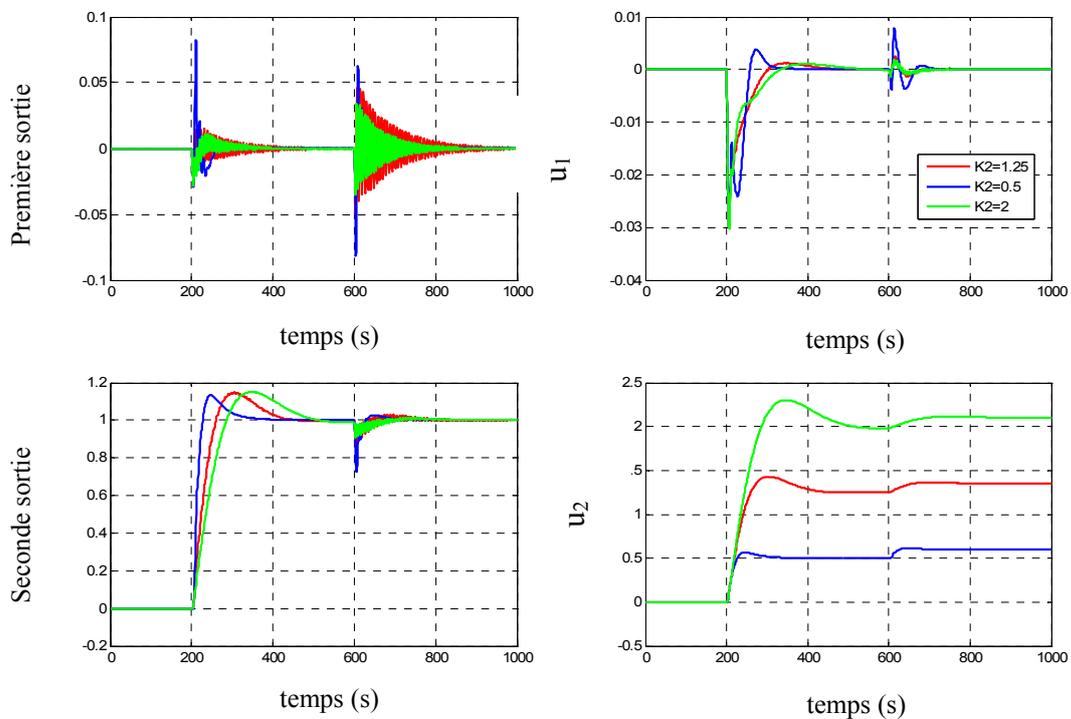


Figure 2. 20 : Phénomène de couplage lors de l'action sur la deuxième entrée de référence (procédés nominal et reparamétrés)

Ces simulations montrent que le comportement découplant du régulateur est efficace, notamment lors de variations des consignes. Un couplage existe lors des perturbations d'entrée, ces perturbations étant malgré tout rejetées après un amortissement amélioré.

La spécification de robustesse du découplage est validée puisque le découplage est préservé pour les procédés reparamétrés (Figure 2. 18).

2.6. Conclusion

Au travers l'extension du champ d'application de la commande CRONE aux systèmes, retardés, instables, à non-minimum de phase et possédant des modes résonants nous avons reformulée la méthodologie proposée initialement par Mathieu et *al* en 1997 et notamment les conditions de stabilité du schéma de commande. Le choix de la matrice de transfert caractérisant le procédé nominal est arbitraire bien qu'il conditionne fortement la forme finale du régulateur. Être sûr que ce choix conduira à un régulateur à la fois performant et simple à mettre en œuvre est une question cruciale. De plus, la difficulté de compréhension et de mise en œuvre de la méthodologie CRONE MIMO augmente avec le nombre de sorties à commander. On peut ainsi se demander s'il n'y a pas un moyen de découpler la difficulté de mise en œuvre et le nombre de sorties à commander ? Enfin, la méthodologie proposée est-elle applicable aux systèmes non carrés, c'est-à-dire aux systèmes ayant un nombre de sorties différents de celui des entrées de commande ?

Le chapitre 3 de ce manuscrit apporte des éléments de réponse à chacune de ces questions.

Chapitre 3

Commande CRONE des systèmes multi-entrées multi-sorties non carrés

Sommaire

3.1.	Introduction aux systèmes multi-entrées multi- sorties non carrés	123
3.2.	Inversion de matrice de transfert non-carrée.....	126
3.2.1.	Définition	126
3.2.2.	Inversion d'une matrice de transfert non carrée et retardée	128
3.3.	Pôles et zéros de transmission d'un système multivariable	131
3.3.1.	Pôles	131
3.3.2.	Zéros.....	134
3.3.3.	Cas complet d'étude	137
3.4.	Stratégie CRONE des systèmes multivariables non carrés instables, retardés, à non minimum de phase et possédant des modes résonants.....	138
3.4.1.	Principe.....	139
3.4.2.	Régulateur idéal découplant	139
3.4.3.	Recherche du terme de retard.....	141
3.4.4.	Stabilité des systèmes multivariables non carré bouclés.....	142
3.4.5.	Optimisation et robustesse de la loi de commande	146
3.5.	Application	151
3.5.1.	Préparamétrisation de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire et nominale	153
3.5.2.	Spécifications	154
3.5.3.	Optimisation	155
3.5.4.	Résultats	156
3.6.	Synthèse CRONE MIMO décentralisée.....	158

3.6.1.	Outils d'analyse des phénomènes de couplage pour les systèmes multivariables	160
3.6.2.	Conception de régulateur décentralisé pour les systèmes MIMO	164
3.6.3.	Choix de la structure et de la méthodologie de synthèse du régulateur	165
3.6.4.	Application à un système multivariable carré	168
3.6.5.	Application à un système multivariable non-carré	180
3.7.	Conclusion	185

3.1. Introduction aux systèmes multi-entrées multi- sorties non carrés

Les systèmes multivariables non carrés possèdent plus d'entrées (n) que de sorties (m) ou plus de sorties que d'entrées ; le cas $m > n$ n'est généralement pas désirable car toutes les sorties ne peuvent être maintenues simultanément autour d'un point d'équilibre quelconque. Les n actionneurs ne peuvent alors permettre qu'une minimisation de l'écart entre les m sorties et leurs valeurs désirées. Afin d'utiliser des méthodologies courantes, il est fréquent de rendre le procédé carré en lui ajoutant ou supprimant des sorties à commander ou entrées de commande. Loh et *al* [1997] (extension de la méthodologie de conception d'une loi de commande décentralisée proposée par Hovd et *al* [1994] aux systèmes non carré ($m < n$)) et Treiber et *al* [1986] ont démontré que de plus grandes performances pouvaient être obtenues en utilisant la forme initiale non carrée du procédé plutôt que le procédé rendu artificiellement carré. De plus, lors du passage d'un procédé non carré à minimum de phase à un procédé carré, il a été montré l'apparition de zéro à PRP [Davison et *al*, 1976 et 1983] et donc des limitations des bandes passantes atteignables.

Une autre approche consiste à rechercher une matrice découplante $D(s)$ placée entre le régulateur $K(s)$ et le procédé $G(s)$. Cette matrice permet de modifier la forme du système vue du régulateur dont la conception est alors simplifiée. En effet, en découplant certaines sorties par rapport à certaines entrées, des éléments de la matrice de transfert du régulateur peuvent être maintenus nuls. L'extension aux systèmes multivariables non carrés [Seshagiri et *al*, 2006] de la méthodologie initialement proposée par Smith en 1957 est un exemple de ce type d'approche. L'approche originelle de Smith [Smith, 1957], adaptée aux systèmes scalaires à retard, permet d'ôter le retard de l'équation caractéristique et ainsi de repousser les limites des spécifications et notamment de bande passante. Bien évidemment cette approche atteint ses limites en présence de systèmes incertains. Les différents retards intervenants dans les systèmes multivariables ainsi que les interactions caractéristiques de ces systèmes limitent aussi l'intérêt de cette approche.

Enfin, la troisième catégorie d'approches permettant la commande des systèmes multivariable non carrés utilise la notion d'inversion généralisée ou inversion de Moore-Penrose pour rechercher un régulateur $K(s)$ lui aussi non carré. Dans [Davison E.J. et *al*, 1976] un PID multivariable est construit. Ses gains proportionnels K_p , intégral K_I et dérivée K_D sont calculés

à l'aide de l'inverse de Moore-Penrose du gain statique de la matrice de transfert nominale $G_o(j0)$:

$$K_p = \delta [G_o(s=0)]^\dagger, \quad (3.1)$$

$$K_I = \varepsilon [G_o(s=0)]^\dagger, \quad (3.2)$$

$$K_D = \gamma [G_o(s=0)]^\dagger. \quad (3.3)$$

La recherche de δ , ε et γ se fait à travers l'étude du critère de stabilité de Routh sur l'équation caractéristique $\det(I+K(s)G(s)) = 0$. L'optimisation de ces paramètres est alors faite.

Dans [Tanttu et al, 1991], une extension de la commande à modèle interne aux procédés multivariables non carrés est proposée. Chaque fonction de transfert du procédé nominal $g_{oij}(s)$ est approximée par une fonction de transfert du premier ordre et retard pur. Un régulateur PI est alors construit de manière indépendante pour chacune des fonctions de transfert approximées. Si on note τ_{ij} et L_{ij} la constante de temps et le retard de la fonction de transfert approximée entre la $j^{\text{ème}}$ entrée de commande et la $i^{\text{ème}}$ sortie à commander, les éléments du PI correspondant k_{Pij} (proportionnel) et τ_{Iij} (intégral) sont donnés par :

$$k_{ij} k_{Pij} = \frac{(2\tau_{ij} + L_{ij})}{2\lambda} \quad (3.4)$$

$$\tau_{Iij} = (\tau_{ij} + 0.5L_{ij}). \quad (3.5)$$

Enfin, les gains proportionnel K_p , intégral K_I et dérivée K_D sont calculés à l'aide l'inverse de Moore-Penrose :

$$K_p = \begin{bmatrix} 1/k_{P11} & \dots & 1/k_{P1n} \\ \vdots & 1/k_{Pij} & \vdots \\ 1/k_{Pmj} & \dots & 1/k_{Pmn} \end{bmatrix}^\dagger, \quad (3.6)$$

$$K_I = \begin{bmatrix} 1/k_{I11} & \dots & 1/k_{I1n} \\ \vdots & 1/k_{Iij} & \vdots \\ 1/k_{Imj} & \dots & 1/k_{Imn} \end{bmatrix}^\dagger, \quad (3.7)$$

$$K_D = \begin{bmatrix} 1/k_{D11} & \dots & 1/k_{D1n} \\ \vdots & 1/k_{Dij} & \vdots \\ 1/k_{Dmj} & \dots & 1/k_{Dmn} \end{bmatrix}^\dagger \quad (3.8)$$

avec :

$$k_{lij} = \left(\frac{k_{p_{ij}}}{\tau_{lij}} \right), \quad (3.9)$$

$$k_{D_{ij}} = (k_{p_{ij}} \cdot \tau_{lij}) \quad (3.10)$$

La plupart des méthodologies proposées dans la littérature permettant de commander les systèmes MIMO non carrés ne prennent pas en compte le problème de robustesse. Les modèles utilisés étant généralement mal connus ou susceptibles de changer avec le temps, il convient d'orienter les recherches vers des lois de commande robustes.

Le Chapitre 2 de ce manuscrit a permis d'étendre le champ d'application de la méthodologie CRONE à un grand nombre de systèmes multivariables carrés. La méthodologie proposée est basée sur le théorème d'existence d'un régulateur stabilisant et découplant pour un procédé $G(s)$ [Lin et al, 1991] que nous avons étendu. Pour les systèmes multivariables non carrés, l'inverse du procédé nominal $G_o(s)$ n'est plus aussi simple à construire/calculer et le théorème à l'origine de la méthodologie CRONE multivariable n'est plus vérifié. En effet la démonstration de ce théorème (paragraphe 2.3.1) utilise la propriété des systèmes multivariable carrés qui dit que les zéros de la matrice de transfert $G_o(s)$ correspondent aux pôles de la matrice inverse $G_o^{-1}(s)$. Il convient donc de formuler un nouveau théorème permettant d'assurer/vérifier la stabilité du système bouclé.

Ce chapitre s'articule autour des points suivants. Après avoir présenté d'un point de vue mathématique l'inversion de Moore-Penrose et son extension au calcul de l'inversion d'une matrice de transfert possédant des retards purs, nous énoncerons la méthodologie permettant la conception d'une loi de commande CRONE pour les systèmes MIMO non carrés. Les théorèmes permettant de garantir la stabilité de la loi de commande et les différentes extensions au cas des systèmes retardés, instables ou à non minimum de phase seront présentés.

A la fin du chapitre précédent nous avons soulevé les problématiques liées au choix du procédé nominal et au fait que la complexité des méthodes de conception présentées augmentait proportionnellement avec le nombre de sorties à commander. La dernière partie de ce chapitre présente des méthodes simplifiées de conception de régulateurs dit décentralisés. Un régulateur est dit décentralisé lorsque certains de ses éléments sont volontairement mis à zéro, des entrées de commande ne dépendant alors que de certaines sorties à commander. A contrario, un régulateur modélisé par une matrice de transfert pleine sera dit centralisé.

3.2. Inversion de matrice de transfert non-carrée

3.2.1. Définition

Soit l'équation suivante d'inconnue y :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

qui s'écrit aussi :

$$b = Ay \text{ avec } b \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n, A \in \mathbb{C}^{m \times n} \quad (3.12)$$

Moore (1920) et Penrose (1955) ont montré qu'il existait une solution à cette équation de la forme $y=A^\dagger b$ où A^\dagger est la matrice pseudo-inverse dite de Moore-Penrose.

Dans le cas où $m=n$ et A non singulière, $A^\dagger=A^{-1}$ et pour, $m \neq n$ le théorème de Wiberg [Wiberg, 1976] permet d'affirmer l'unicité de cette solution de norme minimale.

Quand $m > n$, la solution de l'équation (3.12) est l'unique A^\dagger qui minimise $\|Ay-b\|$. En effet ayant plus d'équations (m) que d'inconnues (n), il est impossible de trouver une solution exacte. A^\dagger est la matrice qui permet d'avoir le produit Ay le plus proche, au sens des moindres carrés, de la valeur de b désirée.

Quand $m < n$ (plus d'inconnues que d'équations) il y a, en général, une infinité de solutions. La solution de Moore-Penrose est celle qui minimise la norme 2 du vecteur y , $\|y\|_2$.

En 1969, Graybill a établi des expressions permettant de calculer la matrice inverse de Moore-Penrose d'une matrice complexe A de plein rang.

Théorème de Graybill [Graybill, 1969]: Soit $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ une matrice de nombres complexes de dimension $m \times n$ et de rang r , on a:

$$i. \text{ Si } A \in \mathbb{C}_m^{m \times n}, \text{ alors } A^\dagger = A^H (AA^H)^{-1} \text{ et } AA^\dagger = I_{m \times m}, \quad (3.13)$$

$$ii. \text{ Si } A \in \mathbb{C}_n^{m \times n}, \text{ alors } A^\dagger = (A^H A)^{-1} A^H \text{ et } A^\dagger A = I_{n \times n}, \quad (3.14)$$

où A^H est la matrice adjointe de la matrice A .

Si la matrice A n'est pas de plein rang c'est-à-dire de rang différent de n ou m , les équations (3. 13) et (3. 14) ne sont plus valables. D'autre méthode permettant de calculer la matrice de Moore-Penrose existent. On peut citer les méthodes basées sur l'algorithme de Greville ou sur l'orthonormalisation de Gram-Schmidt. La plus utilisée est la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) présentée au chapitre précédent. Supposant une matrice de transfert $G(s)$ de la variable de Laplace s ($G(s) \in \mathbb{C}^{m \times n}$), pour une valeur donnée de s il existe deux matrices orthogonales $W \in \mathbb{C}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que :

$$G(s) = W(s)\Sigma V^H(s) \tag{3. 15}$$

où Σ est une matrice $m \times n$ avec $k = \min(n, m)$ valeurs singulières σ_i arrangées en ordre descendant sur la diagonale principale ($\sigma_1 > \dots > \sigma_j > \dots > \sigma_k$) :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_k & 0 \end{bmatrix}. \tag{3. 16}$$

Géométriquement, les valeurs singulières de la matrice $G(s)$ pour une valeur donnée de s correspondent à la longueur des demi-axes de l'ellipsoïde E définie par :

$$E = \{ \vec{z} \mid \vec{z} = G\vec{x}, \|\vec{x}\| = 1 \} \tag{3. 17}$$

La matrice pseudo inverse de $G(s)$ s'écrira :

$$G^\dagger(s) = V(s)\Sigma^\dagger W^H(s) \tag{3. 18}$$

où

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_k} & 0 \end{bmatrix}, \tag{3. 19}$$

c'est-à-dire une matrice où sont inversées toute les valeurs singulières non nulles, conservés tous les zéros et remplacés par zéro toutes les valeurs singulières dont l'inverse tend vers l'infini. Cette méthode de recherche de la matrice pseudo inverse est la plus répandue et correspond aux fonction *pinv* de Matlab et *pseudoinverse* de Mathematica.

3.2.2. Inversion d'une matrice de transfert non carrée et retardée

a. Théorème

En développant les expressions (3. 13) et (3. 14) nous établissons le théorème suivant:

Théorème [Nelson Gruel, 2008]: Soit $G_o(s)$ une matrice de transfert possédant m sorties, n entrées et des retards purs:

$$G_o(s) = \begin{bmatrix} g_{o_{11}}(s) & & \cdots & g_{o_{1n}}(s) \\ & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & g_{o_{ij}}(s) & \\ & & & \ddots \\ g_{o_{m1}}(s) & \cdots & & g_{o_{mn}}(s) \end{bmatrix}, \quad (3. 20)$$

où:

- $g_{o_{ij}}(s) = h_{ij}(s)e^{-L_{ij}s}$, (3. 21)
- $h_{ij}(s)$ une fonction de transfert strictement propre à minimum de phase,
- L_{ij} une constante positive.

La matrice pseudo inverse de $G_o(s)$ est définie par :

$$G_o^\dagger(s) = P(s) = \begin{bmatrix} p_{11}(s)e^{\gamma_{11}s} & \cdots & p_{1m}(s)e^{\gamma_{1m}s} \\ \vdots & p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s} & \vdots \\ p_{n1}(s)e^{\gamma_{n1}s} & \cdots & p_{nm}(s)e^{\gamma_{nm}s} \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad (3. 22)$$

où :

- $p_{ij}(s)$ est une somme de polynôme en s retardés de type $\sum_i a_i s^i e^{-\zeta_i s}$ avec $a_i \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^+$,
- γ_{ij} est un réel positif.

b. Démonstration

i. Si $G_o(s) \in C_m^{m \times n}$

$$G_o^\dagger(s) = G_o^H(s) \frac{(\text{com}(Q(s)))^T}{\det(Q(s))} = G_o^H(s) \frac{(Q^{ij}(s))^T}{\det(Q(s))} = G_o^H(s) \frac{Q^{ji}(s)}{\det(Q(s))}, \quad (3. 23)$$

où :

$$- \quad Q = G_o G_o^H = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} = \left[\sum_{k=1}^n h_{ik} \cdot \bar{h}_{jk} \cdot e^{-(L_{ik} - L_{jk})s} \right]_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (3.24)$$

- $Q^{ji}(s)$ est la comatrice, $\text{com}(Q(s))$ de $Q(s)$.

En supposant que le déterminant de $Q(s)$ possède q_1 termes et que chacun des termes de la matrice $Q^{ji}(s)$ possède $q_{2_{ji}}$ termes, on peut écrire :

$$- \quad \det(Q(s)) = \frac{\sum_{t=0}^{q_1} n_t(s) e^{-\alpha_t s}}{b_0(s)}, \quad (3.25)$$

$$- \quad G_o^H(s) Q^{ji}(s) = \frac{\sum_{l=0}^{q_{2_{ji}}} m_{l_{ji}}(s) e^{-\delta_{l_{ji}} s}}{d_{0_{ji}}(s)}, \quad (3.26)$$

avec

- $n_t(s)$, $m_{l_{ji}}(s)$, $b_0(s)$ et $d_{0_{ji}}(s)$ des polynômes non-nuls de s ,
- $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q_1}$,

$$(3.27)$$

- $\delta_{0_{ji}} < \delta_{1_{ji}} < \dots < \delta_{q_{2_{ji}}}$.

$$(3.28)$$

Ainsi

$$G_o^\dagger(s) = G_o^H(s) \frac{Q^{ji}(s)}{\det(Q(s))} = \left[\frac{b_0(s) \sum_{l=0}^{q_{2_{ji}}} m_{l_{ji}}(s) e^{-\delta_{l_{ji}} s}}{d_{0_{ji}}(s) \sum_{t=0}^{q_1} n_t(s) e^{-\alpha_t s}} \right]_{i,j}, \quad (3.29)$$

et donc

$$G_o^\dagger(s) = P(s) = \left[\begin{array}{ccc} p_{11}(s) e^{\gamma_{11} s} & \dots & p_{1m}(s) e^{\gamma_{1m} s} \\ \vdots & p_{ij}(s) e^{\gamma_{ij} s} & \vdots \\ p_{n1}(s) e^{\gamma_{n1} s} & \dots & p_{nm}(s) e^{\gamma_{nm} s} \end{array} \right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}, \quad (3.30)$$

où :

- $p_{ij}(s) = f(n_t, m_{l_{ji}}, b_0, d_{0_{ji}}, \delta_{l_{ji}}, \alpha_t)$ $t \in [0, q_1 - 1]$ et $l \in [1, q_{2_{ji}}]$,
- $\gamma_{ij} = f(\alpha_{q_1}, \delta_{0_{ji}})$.

$$(3.31)$$

ii. Si $G_o(s) \in C_n^{m \times n}$, alors

$$G_o^\dagger(s) = \frac{(\text{com}(Q(s)))^T}{\det(Q(s))} G_o^H(s) = \frac{(Q^{ji}(s))^T}{\det(Q(s))} G_o^H(s) = \frac{Q^{ji}(s)}{\det(Q(s))} G_o^H(s), \quad (3.32)$$

où :

$$- Q = G_o^H G_o = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} = \left[\sum_{k=1}^n \bar{h}_{ki} \cdot h_{kj} \cdot e^{-(L_{kj} - L_{ki})s} \right]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3.33)$$

- $(Q^{ji}(s))^T$ est la matrice transposée de la comatrice, $Q^{ji}(s)$, de $Q(s)$.

En supposant que le déterminant de $Q(s)$ possède q_3 termes et que chacun des termes de la matrice $Q^{ji}(s)$ possède $q_{4_{ji}}$ termes, on peut écrire :

$$- \det(Q(s)) = \frac{\sum_{t=0}^{q_3} n_t(s) e^{-\alpha_t s}}{b_0(s)}, \quad (3.34)$$

$$- Q^{ji}(s) G_o^H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{q_{4_{ji}}} m_{l_{ji}}(s) e^{-\delta_{l_{ji}} s}}{d_{0_{ji}}(s)}, \quad (3.35)$$

Avec :

• $n_t(s)$, $m_{l_{ji}}(s)$, $b_0(s)$ et $d_{0_{ji}}(s)$ des polynômes non nul de s ,

$$• \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{q_3}, \quad (3.36)$$

$$• \delta_{0_{ji}} < \delta_{1_{ji}} < \dots < \delta_{q_{4_{ji}}}. \quad (3.37)$$

Ainsi

$$G_o^\dagger(s) = G_o^H(s) \frac{Q^{ji}(s)}{\det(Q(s))} = \left[\frac{b_0(s) \sum_{l=0}^{q_{4_{ji}}} m_{l_{ji}}(s) e^{-\delta_{l_{ji}} s}}{d_{0_{ji}}(s) \sum_{t=0}^{q_3} n_t(s) e^{-\alpha_t s}} \right]_{i,j}, \quad (3.38)$$

et donc

$$G_o^\dagger(s) = P(s) = \left[\begin{array}{ccc} p_{11}(s) e^{\gamma_{11} s} & \dots & p_{1m}(s) e^{\gamma_{1m} s} \\ \vdots & p_{ij}(s) e^{\gamma_{ij} s} & \vdots \\ p_{n1}(s) e^{\gamma_{n1} s} & \dots & p_{nm}(s) e^{\gamma_{nm} s} \end{array} \right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad (3.39)$$

Où :

• $p_{ij}(s) = f(n_t, m_{l_{ji}}, b_0, d_{0_{ji}}, \delta_{l_{ji}}, \alpha_t) \quad t \in [0, q_3 - 1] \text{ et } l \in [1, q_{4_{ji}}]$,

$$• \gamma_{ij} = f(\alpha_{q_3}, \delta_{0_{ji}}). \quad (3.40)$$

3.3. Pôles et zéros de transmission d'un système multivariable

3.3.1. Pôles

Si on considère une fonction de transfert monovariante $g(s)=n(s)/d(s)$, les pôles et zéros de cette fonction de transfert sont les racines respectivement de $n(s)$ et $d(s)$. Lorsqu'on s'intéresse aux systèmes multivariables, la détermination des zéros et pôles de la matrice de transfert n'est plus aussi aisée.

En effet, considérant une représentation d'état de ce système c'est-à-dire un quadruplet de matrice (A, B, C, D) tel que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.41)$$

où x est le vecteur d'état, y le vecteur de sortie et u le vecteur de commande.

Par définition, les pôles p_i du système modélisé par la représentation d'état (A, B, C, D) sont les valeurs propres $\lambda_i(A)$ avec $i=1, \dots, m$, de la matrice A , c'est-à-dire les racines du polynôme caractéristique :

$$\phi(s) = \det(sI - A) \quad (3.42)$$

Si $G(s)$ est une matrice de taille m par n , on appelle mineur d'ordre k le déterminant d'une sous matrice carrée de taille k obtenue en supprimant $m-k$ lignes et $n-k$ colonnes de la matrice initiale. L'équation caractéristique $\phi(s)$, correspondant à la réalisation minimale du système (A, B, C, D) ayant une fonction de transfert $G(s)$, est le plus petit commun dénominateur de tous les mineurs (de tout ordre) de $G(s)$ non identiquement nuls (polynômes nuls). Les mineurs sont au signe près égaux aux cofacteurs c'est-à-dire aux déterminants de ses sous matrices.

Soit une matrice de transfert $G(s)$ dont on extrait un dénominateur commun $\phi(s)$:

$$G(s) = \frac{N(s)}{\phi(s)} \quad (3.43)$$

avec :

- $N(s)$ une matrice de transfert,

- $\phi(s)$ le polynôme caractéristique qui s'écrit, $\phi(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i)$ avec p_i les pôles du système.

La multiplicité des pôles est déterminée en décomposant chacun des éléments $g_{i,j}(s)$ de $G(s)$ en éléments simples tel que :

$$g_{ij}(s) = \sum_{l=1}^n \frac{\alpha_{ij,l}}{(s - p_i)^l}. \quad (3.44)$$

La matrice $G(s)$ s'écrit alors sous la forme :

$$G(s) = \sum_{l=1}^n \frac{N_l(s)}{(s - p_i)^l}, \quad (3.45)$$

avec $N_l(s)$ une matrice dont le rang donne la multiplicité du pôle p_i .

Quelques propriétés liées aux matrices de fractions polynomiales seront très utiles pour l'analyse des systèmes multivariables :

- Le rang d'une matrice de fractions polynomiales est défini comme étant le plus grand ordre du mineur (correspond au signe près au cofacteur) non identiquement nul de $G(s)$. Ainsi si on trouve un mineur non nul d'ordre r tel que tous les mineurs d'ordre supérieur sont nuls, le rang de la matrice sera r . Si on reprend un des exemples du chapitre 2 :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+4} \\ \frac{1}{s+1} & 0.4 \end{bmatrix} \text{ et } G^{-1}(s) = \frac{(s+1)(s+4)}{(1.6-0.6s)} \begin{bmatrix} 0.4 & -\frac{s}{s+4} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

le plus grand ordre du mineur non identiquement nul de $G(s)$ est 2 et donc l'ordre de $G(s)$ est 2. Ce mineur est égal au signe près au déterminant. Il n'est ici pas défini pour $s = -1$ et $s = -4$. Il est nul pour $s = 2.66$, la matrice $G(s)$ perd donc un rang à l'endroit où $G(s)$ a un zéro.

- Une matrice dont le déterminant est une constante quelle que soit la valeur de s est une matrice uni modulaire. On voit que, quelle que soit la forme de la matrice de polynômes fractionnaires, son inverse sera aussi une matrice de fractions polynomiales.
- Les pôles ont des directions associées, la direction d'un pôle étant obtenue en évaluant la fonction de transfert en $s = p_i$ et on considérant la direction de la matrice complexe obtenue $G(p_i)$. Cette matrice étant infinie dans la direction de ce pôle, on peut écrire :

$$G(p_i) \cdot U'_{p_i} = \infty \cdot Y'_{p_i} , \quad (3.47)$$

où : U'_{p_i} est la direction du vecteur de commande,
 Y'_{p_i} est la direction du vecteur de sortie.

La décomposition en valeur singulière de la matrice $G(p_i)$ permet de trouver ces directions :

$$G(p_i) = W \Sigma V^H \quad (3.48)$$

où

- U'_{p_i} est le 1^{er} vecteur colonne de la matrice V ,
- Y'_{p_i} est le 1^{er} vecteur colonne de la matrice W .

Exemple de détermination des pôles d'une matrice

1. Soit le système modélisé par l'équation suivante :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2s+0.5}{s-1} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} U(s) \quad (3.49)$$

- Les mineurs d'ordre 1 sont $\frac{1}{s+1}$, $\frac{1}{s+2}$, $\frac{2s+0.5}{s-1}$ et $\frac{2}{s+1}$.
- Le mineur d'ordre 2 est $\det(G(s)) = \frac{-2(-1.20+s)(1.45+s)}{(1+s)^2(2+s)}$.

Le plus petit commun multiple du dénominateur de tous les mineurs non nuls de la matrice de transfert est donc $(1+s)^2(2+s)$, les pôles du système étant alors -1, -1 et 2.

2. Soit le système modélisé par l'équation suivante :

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)} \begin{bmatrix} (s+2)(s-1) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix} U(s) \quad (3.50)$$

- Les mineurs d'ordre 1 sont :

$$\circ \frac{1}{s+1}, \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}, \frac{-1}{(s-1)}, \frac{-1}{(s-1)}, \frac{1}{(s+2)}, \frac{1}{(s+2)}$$

- Les mineurs d'ordre 2 sont :

$$\circ \frac{2}{(1+s)(2+s)}, \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}, \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Le mineur d'ordre 3 n'existe pas. Le rang de la matrice est donc 2 et la multiplicité maximum de n'importe quel pôle est au maximum de 2. De plus le polynôme caractéristique est $\phi(s)=(s+1)(s-1)(s+2)^2$.

3.3.2. Zéros

Par définition, les zéros de $G(s)$ sont les éléments z_i tel que $G(z_i)$ soit de rang inférieur au rang maximum $r=\max(n,m)$ de la matrice $G(s)$. Le polynôme des zéros s'écrit :

$$z(s) = \prod_{i=1}^{n_z} (s - z_i), \quad (3.51)$$

n_z étant le nombre de zéros en comptant leurs multiplicités.

Pour faciliter la recherche de ces zéros, MacFarlane et Karcianias en 1976 ont énoncé le théorème suivant :

Théorème : Le polynôme des zéros $z(s)$ correspondant à une réalisation minimale du système est le plus grand commun diviseur de tous les numérateurs des mineurs d'ordre r de $G(s)$, où r est le rang normal de $G(s)$ ($r=\max(n,m)$). Le dénominateur de ces mineurs doit explicitement comporter tous les pôles du polynôme caractéristique $\phi(s)$.

Soit une réalisation non minimale de $G(s)$, c'est-à-dire un quadruplet (A, B, C, D) tel que $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ soit équivalent, du point de vue du comportement entrée/sortie, à $G(s)$ et dont certains modes sont inobservables et/ou non commandables. Les valeurs propres correspondant à ces modes n'apparaissent donc pas sur la fonction de transfert entrée/sortie. Il y a donc simplification et on parle de zéro de découplage. Pour la réalisation non minimale suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{34} & A_{44} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0]x \end{aligned} \quad (3.52)$$

où A_{ij} , C_i , B_i sont indifféremment des matrices ou des scalaires, on peut affirmer que :

- les modes de A_{44} et A_{33} sont non commandables ce qui fait apparaître des zéros de découplage en entrée,

- les modes de A_{22} et A_{44} sont non observables ce qui fait apparaître des zéros de découplage en sortie,
- les zéros du système sont donc ceux du triplet (A_{11}, B_1, C_1)

Les zéros de la matrice $G(s)$ ont aussi des directions associées. Chacune est déterminée en évaluant la fonction de transfert en $s = z_i$ et en considérant la direction de la matrice complexe obtenue $G(z_i)$. Cette matrice est nulle dans la direction de ce zéro et on peut écrire :

$$G(z_i) \cdot U'_{z_i} = 0 \cdot Y'_{z_i} \quad (3. 53)$$

où: U'_{z_i} est la direction du vecteur de commande,

Y'_{z_i} est la direction du vecteur de sortie.

En utilisant la décomposition en valeur singulière de la matrice $G(z_i)$ on peut trouver ces directions :

$$G(z_i) = W \Sigma V^H \quad (3. 54)$$

U'_{z_i} sera le 1^{er} vecteur colonne de la matrice V ,

Y'_{z_i} sera le 1^{er} vecteur colonne de la matrice W .

En effet, dire que z_i est un zéro de multiplicité n_z de $G(s)$ équivaut à dire que $G(s)$ perd n_z rang à $s = z_i$. Il existe donc deux vecteurs non-nuls v et/ou w tel que :

$$G(z_i)v = 0, \quad (3. 55)$$

et on parle de zéro à droite,

$$w^T G(z_i) = 0, \quad (3. 56)$$

et on parle de zéro à gauche.

v et w^T sont une partie de l'espace nul généré, respectivement par les colonnes et les lignes de $G(z_i)$. Le nombre de vecteur v et/ou w satisfaisant les équations (3. 55) et/ou (3. 56) dépend du rang que perd la matrice $G(s)$ évalué en z_i , c'est-à-dire de la multiplicité du zéro.

Soit une entrée de commande ne contenant qu'un mode $e^{z_i t}$:

$$U(s) = v \frac{1}{s - z_i}, \quad (3. 57)$$

où v est un vecteur satisfaisant l'équation (3. 55). La sortie du système est composée de deux parties, une partie forcée par le système et une partie naturelle $Y_{nat}(s)$:

$$Y(s) = G(z_i) \cdot v \frac{1}{s - z_i} + Y_{\text{nat}}(s). \quad (3.58)$$

La partie forcée $G(z_i) \cdot v \frac{1}{s - z_i}$ est nulle et n'apparaît pas dans $Y(s)$. On parle alors de **zéro de transmission**.

Exemple de détermination des zéros d'une matrice

1. Reprenons le modèle de l'équation (3.49) dont le rang normal est 2.

$$\text{On a vu que le mineur d'ordre 2 est } \det(G(s)) = \frac{-2(-1.20 + s)(1.45 + s)}{\phi(s)}.$$

Le plus grand commun diviseur du numérateur de tous les mineurs non nuls de la matrice de transfert est donc $(-1.20 + s)(1.45 + s)$ et les zéros du système sont 1.20 et -1.45.

2. Soit le système modéliser par l'équation (3.50) dont le rang normal est 2.

Les mineurs d'ordre 2 sont $\frac{2}{(1+s)(2+s)}$, $\frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2}$, $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$, les pôles de la fonction de transfert étant -1, 1, -2, -2.

Si on fait apparaître explicitement le polynôme caractéristique sur tous les mineurs d'ordre 2, on obtient $\frac{2(s-1)(s+2)}{\phi(s)}$, $\frac{-(s-1)^2}{\phi(s)}$, $\frac{1(s-1)(s+2)}{\phi(s)}$.

Le plus grand commun diviseur de ces trois mineurs est alors $(s-1)$. Ainsi,

$$z(s) = (s-1) \quad (3.59)$$

On a donc un zéro et un pôle à la même valeur. Alors que dans le cas SISO on aurait simplification pôle/zéro, dans le cas multivariable ce n'est pas forcément le cas. En effet, chaque élément du système multivariable possède une direction associée et une simplification pôle/zéro n'aurait lieu que si les directions de $z = 1$ et $p = 1$ étaient les mêmes.

3. Soit le système modélisé par l'équation suivante :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-2}{s+2} \end{bmatrix} U(s). \quad (3.60)$$

Les mineurs d'ordre 1 sont $\frac{(s-1)}{(s+1)}$ et $\frac{(s-2)}{(s+2)}$.

L'ordre normal de cette matrice de transfert est 1. Le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de ces deux mineurs sont respectivement 1 et $(s+1)(s+2)$, soit :

$$z(s) = 1 \tag{3. 61}$$

$$\phi(s) = (s + 1)(s + 2) \tag{3. 62}$$

Généralement, les systèmes non carrés ont moins de zéros que les systèmes carrés. En effet, pour qu'un système carré (2x2 par exemple) ait un zéro, il doit avoir un z_i tel que les deux colonnes de $G(s)$ soient linéairement dépendantes. Par contre, un système non carré (2x3 par exemple) ne possède un zéro en z_i que si les trois colonnes de $G(s)$ sont linéairement dépendantes.

3.3.3. Cas complet d'étude

Prenons un système multivariable carré :

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 4.5 & 2(s-1) \end{bmatrix} U(s), \tag{3. 63}$$

Les mineurs d'ordre 1 sont $\frac{(s-1)}{(s+2)}$, $\frac{4.5}{(s+2)}$, $\frac{4}{(s+2)}$ et $\frac{2(s-1)}{(s+2)}$.

Le mineur d'ordre 2 est $\det(G(s)) = \frac{2(s-1)^2 - 18}{(s+2)^2} = \frac{2(s-4)}{(s+2)}$.

Le plus petit commun multiple du dénominateur de tous les mineurs non nuls de la matrice de transfert est $(s+2)$. Le pôle du système est donc -2 et le rang normal de $G(s)$ est 2. L'analyse du déterminant de $G(s)$, c'est-à-dire du mineur de l'ordre correspondant à l'ordre normal du système, indique que le plus grand commun diviseur est $(s-4)$. On a donc :

$$z(s) = (s - 4) \tag{3. 64}$$

$$\phi(s) = (s + 2) . \tag{3. 65}$$

Recherchons maintenant les directions correspondantes. Pour ce faire, étudions la décomposition en valeur singulière des matrices $G(s = 4)$ et $G(s = -2)$:

1. Direction du zéro

$$G(s = 4) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4.5 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0.55 & -0.83 \\ 0.83 & 0.55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}^T \tag{3. 66}$$

La direction de sortie du zéro $Y(s)=[-0.83 \ 0.55]^T$ n'est donc pas excitée par un signal d'entrée ayant pour unique mode e^{4t} . De ce vecteur on peut affirmer que le zéro a une composante plus importante sur la première sortie.

2. Direction du pôle

Un pôle produisant par définition un gain infini, sa direction est étudiée grâce à la décomposition en valeur singulière de $G(s = (2+\varepsilon))$ au lieu de $G(s = 2)$:

$$G(s = -2 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} -3 + \varepsilon & 4 \\ 4.5 & -6 + 2\varepsilon \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon^2} \begin{bmatrix} -0.55 & -0.83 \\ 0.83 & -0.55 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ -0.8 & -0.6 \end{bmatrix}^T \quad (3.67)$$

Le mode e^{-2t} est donc excité par un signal de commande de la forme $U(s) = [0.6 \ -0.8]^T$ qui produit alors le vecteur de sortie $Y(s) = [-0.55 \ 0.83]^T$. Le pôle a donc une composante plus importante sur la deuxième sortie et surtout change l'orientation du vecteur.

Les méthodes proposées ici pour la détermination et l'analyse des zéros et pôles de la matrice de transfert $G_o(s)$ seront utilisées au paragraphe suivant pour l'analyse de la stabilité de la boucle fermée à concevoir.

3.4. Stratégie CRONE des systèmes multivariables non carrés instables, retardés, à non minimum de phase et possédant des modes résonants

Soit le schéma de commande présenté au chapitre 2 (Figure 2.1). L'ensemble des équations et signaux défini reste valable mise à part leurs dimensions qui changent. $G(s)$ est de dimension $m \times n$, $G_o(s)$ le procédé nominal est défini au paragraphe 3.2.2, les signaux $d_y(s)$, $b_m(s)$, $y_{ref}(s)$, $y_{mes}(s)$ sont de dimension $m \times 1$ et le signal $d_u(s)$ est de taille $n \times 1$. Il est à noter cependant que les matrices de transferts $\beta(s) = G(s)K(s)$ et $\beta_i(s) = K(s)G(s)$ restent diagonales respectivement de taille $m \times m$ et $n \times n$.

3.4.1. Principe

Le problème de commande et de découplage du procédé reste identique pour les systèmes multivariables non carrés que pour les systèmes MIMO carrés. On recherche toujours la matrice de transfert en boucle ouverte

$$\beta_o(s) = \begin{bmatrix} \beta_{o_{11}}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & \beta_{o_{ii}}(s) & \dots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{o_{mm}}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.68)$$

dont les m éléments sont des fonctions de transfert d'ordres non entiers et qui permet de trouver le régulateur $K(s)$ découplant et stabilisant pour l'ensemble des procédés $G(s)$ tel que :

$$\beta_o(s) = G_o(s)K(s). \quad (3.69)$$

Vardulkis et *al* en 1989 ont énoncé les hypothèses permettant d'assurer l'existence d'un régulateur découplant et stabilisant pour le procédé multivariable non carré. Pour un système multivariable non carré $G(s)$, il existe un régulateur découplant et stabilisant si la pseudo-inverse du procédé nominal $G_o(s)$ existe et si $G(s)$ ne comporte pas de simplification pôle/zéro.

La matrice $\beta_o(s)$ est paramétrée de manière à satisfaire les objectifs suivants :

1. un découplage parfait pour le procédé nominal,
2. les spécifications sur les marges de stabilité de la boucle ouverte pour le procédé nominal et pour les procédés reparamétrés (comportement autour des fréquences de coupures),
3. les spécifications sur les n efforts de commandes aux hautes fréquences,
4. les spécifications de précisions aux basses fréquences,
5. la stabilité du système bouclé (stabilité interne et stabilité robuste).

3.4.2. Régulateur idéal découplant

Le premier objectif sera satisfait par le choix d'une matrice de transfert en boucle ouverte nominale diagonale :

$$\beta_o(s) = G_o(s)K(s) = \text{diag}[\beta_{o_{ij}}(s)]_{i=j} = \text{diag}\left[\frac{n_{ij}(s)}{d_{ij}(s)}\right]_{i=j \in N}, \quad (3.70)$$

où :

- $N = \{1, \dots, m\}$,
- $\beta_{o_{ii}}(s) = \beta_{o_{jj}}(s) = \frac{n_{jj}(s)}{d_{jj}(s)}$ est l'élément de la j^{eme} ligne et j^{eme} colonne.

Remarque : L'indice i ou j peut être indifféremment utilisé pour définir les éléments diagonaux de la matrice en boucle ouverte car elle est diagonale. Dans ce paragraphe, utiliser l'indice j simplifie les calculs liés à la recherche des éléments à intégrer à la matrice de transfert en boucle ouverte.

Les objectifs 2 à 4 sont satisfaits en optimisant chacun des éléments de la matrice de transfert en boucle ouverte $\beta_o(s)$ définis par un transfert fractionnaire de type troisième génération (paragraphe 2.3.3). L'objectif 5 est validé en satisfaisant les conditions énoncées au paragraphe suivant.

Finalement, le régulateur $K(s)$ est obtenu par :

$$K(s) = G_o^\dagger(s)\beta_o(s) = G_o^\dagger(s)\text{diag}\left[\frac{n_{jj}(s)}{d_{jj}(s)}\right]_{j \in N}, \quad (3.71)$$

avec $G_o^\dagger(s)$ la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose.

Grâce au théorème du paragraphe 3.2.2 on sait que l'inverse de la matrice $G_o(s)$ définie par la relation (3.20) s'écrit :

$$G_o^\dagger(s) = P(s) = \left[\begin{array}{ccc} p_{11}(s)e^{\gamma_{11}s} & \dots & p_{1m}(s)e^{\gamma_{1m}s} \\ \vdots & p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s} & \vdots \\ p_{n1}(s)e^{\gamma_{n1}s} & \dots & p_{nm}(s)e^{\gamma_{nm}s} \end{array} \right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \quad (3.72)$$

où :

- $p_{ij}(s)$ est une somme de polynôme en s retardés de type $\sum_i a_i s^i e^{-\zeta_i s}$,
- γ_{ij} est un réel positif.

Le régulateur s'écrit donc :

$$k_{ij}(s) = p_{ij}(s)e^{\gamma_{ij}s}\beta_{o_{ij}}(s). \quad (3.73)$$

Cette relation montre la nécessité de faire apparaître des termes de retard dans la boucle ouverte afin que le régulateur soit réalisable. De plus, le procédé nominal possédant des termes à PRP, il convient de les intégrer à la matrice de transfert en boucle ouverte afin d'assurer la stabilité de la boucle fermée. La méthodologie proposée peut être scindée en trois étapes :

1. recherche des retards purs à intégrer à chacun des éléments de la matrice de transfert en boucle ouverte afin de rendre le régulateur réalisable,
2. rechercher les zéros et pôles à PRP à intégrer à la matrice de transfert en boucle ouverte afin d'assurer la stabilité de la boucle fermée.

3.4.3. Recherche du terme de retard

Soit la fonction $\tau(\cdot)$ définie au chapitre précédent. Le régulateur est réalisable si et seulement si :

$$\tau(k_{ij}) \geq 0 \quad \forall i \in [1, n], j \in [1, m]. \quad (3.74)$$

L'équation devient donc :

$$\tau(\beta_{o_{jj}}) \geq \gamma_{ij}, \forall j \in [1, m], \quad (3.75)$$

où

$$\gamma_{ij} = \alpha_{q_1} - \tau([G_o^H \cdot Q^{j^i}]_{i,j}) = \alpha_{q_1} - \delta_{0_{ji}}. \quad (3.76)$$

Ainsi le retard du $j^{\text{ème}}$ terme de la matrice de boucle ouverte doit satisfaire toutes les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \tau(\beta_{o_{jj}}) &= \alpha_{q_1} - \tau([G_o^H \cdot Q^{j^i}]_{1,j}) \\ \tau(\beta_{o_{jj}}) &= \alpha_{q_1} - \tau([G_o^H \cdot Q^{j^i}]_{2,j}) \\ &\vdots \\ \tau(\beta_{o_{jj}}) &= \alpha_{q_1} - \tau([G_o^H \cdot Q^{j^i}]_{n,j}), \end{aligned} \quad (3.77)$$

soit finalement :

$$\tau(\beta_{o_{jj}}) \geq \alpha_{q_1} - \tau_j \quad \forall j \in [1, m], \quad (3.78)$$

avec

$$\tau_j = \min_{i \in N} (\tau([G_o^H \cdot Q^{j^i}]_{ij})). \quad (3.79)$$

La relation (3.78) implique que la $j^{\text{ème}}$ fonction de transfert de la matrice de transfert de la boucle ouverte doit contenir un retard pur au moins supérieur à la différence entre le plus

grand des retards purs du déterminant de $Q(s)$ et le plus petit des retards purs de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $[G_0^H Q^j]$. Une fois déterminés les termes de retards à intégrer à la matrice de transfert en boucle ouverte, il convient de rechercher les éléments à PRP de la matrice $G_0(s)$ à intégrer afin d'assurer la stabilité de la boucle fermée. Pour simplifier cette recherche, les retards sont approximés en utilisant l'approximation de Padé au premier ordre.

3.4.4. Stabilité des systèmes multivariables non carré bouclés

a. Analyse de stabilité

Le théorème permettant d'analyser la stabilité robuste de la commande CRONE des systèmes multivariable carrés n'est plus valable pour les systèmes non carrés. Une autre manière de déterminer la stabilité de la boucle fermée est d'utiliser la réponse fréquentielle de la matrice de transfert en boucle ouverte et l'extension du théorème de Nyquist.

Soit le lemme de Churchill et *al.* [1974] :

lemme : Soit une fonction de transfert $f(s)$ et C un contour fermé du plan complexe. Supposant aussi :

1. *$f(s)$ est analytique sur C , c'est-à-dire que $f(s)$ ne possède pas de pôle sur le contour C ,*
2. *$f(s)$ possède Z zéros dans C ,*
3. *$f(s)$ possède P pôles dans C .*

Alors l'image de $f(s)$ lorsque s parcourt le contour C une fois dans le sens horaire fera $Z-P$ tour autour de l'origine dans le sens horaire.

Si on note $N(A, f(s), C)$ le nombre de tours que fait la fonction $f(s)$ dans le sens horaire lorsque s parcourt le contour C aussi dans le sens horaire ; le lemme de Churchill s'écrit aussi :

$$N(0, f(s), C) = Z - P \quad (3. 80)$$

Théorème généralisé de Nyquist :

Théorème : Soit P_{bo} le nombre de pôles instable de la matrice de transfert en boucle ouverte, $\beta(s)$. Le système bouclé de la figure 2.1 est stable si et seulement si le tracé de Nyquist de la fonction de transfert $\det(I + \beta(s))$

1. *fait P_{bo} tour dans le sens anti-horaire autour de l'origine*
2. *ne passe pas par l'origine.*

Condition de stabilité

D'après le théorème de Nyquist généralisé [Skogestad, 2005] et après avoir déterminé l'ensemble P_{BO} des pôles instables de la boucle ouverte, on peut valider la stabilité de la boucle fermée si et seulement si $\det(I+\beta_o(s))$ ne possède pas de zéros à PRP et si tous les pôles instables de la boucle ouverte se retrouve au dénominateur de $\det(I+\beta_o(s))$. En effet la démonstration du théorème de Nyquist généralisé permet de lier $\det(I+\beta(s))$, ϕ_{BO} et ϕ_{BF} par l'équation :

$$\det(I + \beta(s)) = \frac{\phi_{BF}(s)}{\phi_{BO}(s)} \cdot \det(I + D_{BO}). \quad (3.81)$$

En remarquant que $\beta_o(s)$ est diagonale, $I+\beta_o(s)$ est aussi diagonale et donc son déterminant est le produit de tous les éléments de sa diagonale :

$$\det(I + \beta_o(s)) = \det \left(\text{diag} \left(1 + \frac{n_{jj}}{d_{jj}} \right) \right) = \det \left(\text{diag} \left(\frac{n_{jj} + d_{jj}}{d_{jj}} \right) \right) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{n_{jj} + d_{jj}}{d_{jj}} \right). \quad (3.82)$$

Utilisant la fonction η_z définie au chapitre 2, la stabilité est assurée si et seulement si

$$\eta_z(\det(I + \beta_o(s))) = \eta_z \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{n_{jj} + d_{jj}}{d_{jj}} \right) \right) < 0, \quad \forall z \in P_{BO}, \quad (3.83)$$

et

$$\eta_z(\det(I + \beta_o(s))) = \eta_z \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{n_{jj} + d_{jj}}{d_{jj}} \right) \right) = 0, \quad \forall z \in \{z \in C^+ \text{ et } z \notin P_{BO}\}, \quad (3.84)$$

conditions pour lesquelles on peut utiliser les propriétés de la fonction η :

$$\eta_z(\det(I + \beta_o(s))) = \eta_z \left(\prod_{j=1}^m \left(\frac{n_{jj} + d_{jj}}{d_{jj}} \right) \right) = \sum_{j=1}^m \eta_z(n_{jj} + d_{jj}) - \sum_{j=1}^m \eta_z(d_{jj}). \quad (3.85)$$

b. Stabilité interne

La stabilité interne du système bouclé constitué des éléments $G(s)$ et $K(s)$ ne peut être assurée que s'il n'y pas de simplification pôles/zéros à partie réelle positive entre les éléments $G(s)$ et $K(s)$, c'est à dire pour notre approche, si la boucle ouverte fractionnaire $\beta_o(s)=G_o(s)K(s)$ contient tous les pôles et les zéros à partie réelle positive de $G_o(s)$. Cette condition conduit donc à :

1. si $G_o(s)$ possède un zéro à partie réelle positive en z alors $\beta_o(s)$ doit avoir un zéro en z ,
2. si $G_o(s)$ possède un pôle à partie réelle positive en p alors $\beta_o(s)$ doit avoir un pôle en p .

et plus simplement à :

$$\eta_z(n_{jj}(s) + d_{jj}(s)) = 0 \quad \forall j \in N \text{ et } z \in \mathbb{C}^+ \quad (3.86)$$

Compte tenu de la condition nécessaire (3.86) de stabilité interne du système bouclé (pas de simplification pôles/zéros entre les éléments du numérateur de n_{jj} et ceux du dénominateur d_{jj}), la stabilité est donc assurée si :

$$-\left(\sum_{j=1}^m \eta_z(d_{jj})\right) < 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^m \eta_z(n_{jj})\right) > 0, \quad \forall z \in P_{Bo}, \quad (3.87)$$

et

$$-\left(\sum_{j=1}^m \eta_z(d_{jj})\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^m \eta_z(n_{jj})\right) = 0, \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C}^+ \text{ et } z \notin P_{Bo}\}. \quad (3.88)$$

Chaque élément de l'ensemble P_{Bo} doit au moins apparaître une fois au dénominateur de l'un des $\beta_{oj}(s)$.

Ainsi la première étape de validation de la stabilité interne du bouclage consiste à rechercher les polynômes $z(s)$ et $\phi(s)$ contenant respectivement les zéros et pôles de la matrice $G_o(s)$. De ces polynômes sont extraits les zéros et pôles à PRP à intégrer à la boucle ouverte. La façon la plus simple d'assurer la stabilité interne du bouclage est de multiplier la matrice de transfert en boucle ouverte par la fonction de transfert $D(s)$ tel que :

$$\beta_{Slo}(s) = D(s)\beta_o(s) = \begin{bmatrix} \frac{z^+(s)}{\phi^+(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{z^+(s)}{\phi^+(s)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{o_{11}}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_{o_{mm}}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

où :

- $z^+(s)$: polynômes contenant tous les zéros à PRP de $z(s)$,
- $\phi^+(s)$: polynômes contenant tous les pôles à PRP de $\phi(s)$.

Ici, nous avons supposé que les zéros et les pôles affectaient les différentes sorties de la même manière. Ce n'est bien sûr pas le cas comme on l'a souligné au paragraphe 3.3 où il est montré que chaque zéro et/ou pôles possède une direction associée. Ainsi pour éviter les

redondances et les simplifications pôles/zéros il est nécessaire que le comportement de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire $\beta_o(s)$ conserve les propriétés de gain de $G_o(s)$ pour $s = z$ et $s = p$. Pour ceci, si on note y_z et y_p respectivement la direction des sorties correspondant aux zéros et aux pôles à PRP il faut que :

$$y_z \beta_o(z) = 0, \quad (3.90)$$

$$(y_p \beta_o(p))^{-1} = 0. \quad (3.91)$$

La matrice de transfert $\beta_o(s)$ étant carrée (taille $m \times m$), les zéros (respectivement les pôles) de la matrice $\beta_o(s)$ sont ici les pôles (respectivement les zéros) de la matrice inverse $\beta_o^{-1}(s)$. La matrice $\beta_{SIO}(s)$ ne sera donc plus unique.

Reprenons l'exemple du système (3.50) :

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & 0 & \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{(s-1)} & \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} U(s). \quad (3.92)$$

Le polynôme caractéristique étant $\phi(s) = (s+1)(s-1)(s+2)^2$, on a donc un pôle à PRP en $p = 1$. Recherchons maintenant l'ensemble des zéros de la matrice de transfert $G_o(s)$. On remarque que la matrice perd un rang pour $s = 1$; on a donc un unique zéro en $z = 1$. En ne tenant pas compte de la direction de ces éléments à PRP, on pourrait affirmer que le système n'est pas commandable (un zéro et un pôle à PRP à la même pulsation). Pourtant, l'analyse SVD suivante de la matrice $G_o(s)$ réalisée en $s = p$

$$G_o(s = 1 + \varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2 + \varepsilon} & 0 & \frac{\varepsilon}{(2 + \varepsilon)(3 + \varepsilon)} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{(3 + \varepsilon)} & \frac{1}{(3 + \varepsilon)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.45 & -0.89 \\ 0 & 0.89 & 0.45 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

permet d'indiquer que le zéro est lié à la première sortie et que le pôle est lié à la deuxième sortie. Ainsi, il est possible d'assurer la stabilité interne de la boucle fermée en multipliant la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire par la matrice

$$D(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

3.4.5. Optimisation et robustesse de la loi de commande

a. Robustesse

La méthodologie présentée aux paragraphes précédents permet d'effectuer la préparamétrisation de la matrice de transfert en boucle ouverte. Cette préparamétrisation consiste à rechercher puis intégrer à $\beta_o(s)$ les éléments de la matrice $G_o(s)$ nécessaire à valider la stabilité de la boucle fermée, la réalisabilité du régulateur, un certain degré de stabilité et le découplage entrées/sorties. Il convient maintenant d'assurer la robustesse de toutes ces propriétés ; pour ce faire on fait l'hypothèse que le nombre de zéros/pôles à PRP reste identique pour tous les états paramétriques du système.

Considérons les boucles ouvertes équivalentes définies au chapitre 2

$$\beta_{jj}(s) = \frac{T_{jj}(s)}{1 - T_{jj}(s)} = \frac{1 - S_{jj}(s)}{S_{jj}(s)} \quad (3.95)$$

où $S_{jj}(s)$ et $T_{jj}(s)$ sont les éléments diagonaux des matrices de sensibilité et sensibilité complémentaire calculés pour l'ensemble des états paramétriques du procédé.

La robustesse de la loi de commande a d'autant plus de chance d'être assurée si le comportement des boucles ouvertes équivalentes reste proche du comportement de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire nominale. La vérification de la robustesse en stabilité peut aussi être vérifiée en utilisant le critère de Nyquist généralisé c'est-à-dire en vérifiant le tracé de Nyquist de la fonction de transfert $\det(I + \beta(s))$ calculée pour tous les états paramétriques.

b. Optimisation

Pour chacun des éléments de la matrice de transfert en boucle ouverte $\beta_o(s)$, de nombreux gabarits peuvent tangenter le même contour d'isoamplitude désirée M_{Poi} . De plus comme il a été souligné au chapitre précédent le choix du procédé nominal $G_o(s)$ parmi l'ensemble $G(s)$ peut avoir des répercussions significatives sur l'optimalité du régulateur et donc sur les performances obtenues de la boucle fermée. Le critère proposé au chapitre 2 permet de minimiser, sous un ensemble de contraintes, les variations du degré de stabilité mesurées sur l'ensemble des boucles ouvertes équivalentes. Parmi les contraintes, l'objectif de découplage robuste n'est qu'un élément parmi d'autres. Afin de renforcer cet objectif, nous proposons de définir un critère composite intégrant explicitement les objectifs suivants :

- 1) minimiser ou annuler les variations du degré de stabilité de la boucle fermée générées par les variations paramétriques du procédé,
- 2) maintenir une certaine ressemblance entre les boucles ouvertes équivalentes préparamétrées et la boucle ouverte fractionnaire nominale, au voisinage de la fréquence de résonance, afin d'assurer un caractère découplant à la boucle fermée pour tous les états paramétriques.

La notion de critère composite permet d'agrèger en un critère unique plusieurs autres critères associés à chacune des propriétés à optimiser. L'intérêt de cette notion est qu'elle permet de rassembler des critères ayant des unités différentes par le biais de fonctions adimensionnelles. Une valeur nulle de ce critère composite indique qu'une configuration optimale vis-à-vis de la propriété associée est atteinte alors qu'une valeur élevée correspond à une configuration inacceptable. Une fonction élémentaire d_i est associée à chaque critère Y_i considéré. :

$$d_i(Y_i) = \left[\left| \frac{Y_i - Y_{i,c}}{\Delta Y_i} \right| \right]^{r_i} \quad (3.96)$$

avec :

- $Y_{i,c}$: valeur cible pour laquelle la configuration optimale vis-à-vis de la propriété associée est atteinte ($d_i=0$),
- ΔY_i : écart maximum vis-à-vis de la valeur cible au-delà duquel le critère n'est plus acceptable,
- r_i : paramètre modifiant localement l'importance d'une augmentation du critère pour la fonction élémentaire considérée. $r_i > 1$ donne un poids plus fort à une amélioration du critère au-delà d'un écart ΔY_i par rapport à la valeur cible, alors que $r_i < 1$ renforce une amélioration du critère autour de cette valeur cible (Figure 3. 1).

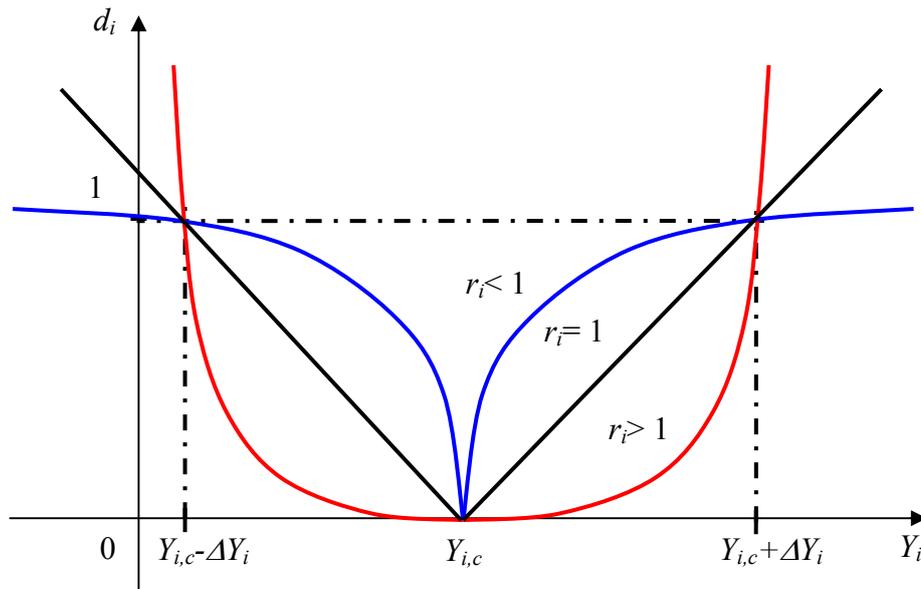


Figure 3. 1 : Fonction élémentaire $d_i(Y_i)$

Toutes les fonctions élémentaire d_i sont ensuite rassemblées en une fonction composite D , définie par :

$$D = \left[\sum_i d_i^{w_i} \right], \quad (3.97)$$

les paramètres w_i permettant de pondérer l'importance relative des différentes fonctions élémentaires dans le critère global, c'est-à-dire de privilégier l'importance de certains des critères.

Pour notre problème, les propriétés à optimiser sont associées aux fonctions élémentaires suivantes :

- C_{DS} pour la minimisation des variations du degré de stabilité,
- C_D pour la propriété de découplage ; par ces fonctions on cherche à minimiser les différences de phase entre la phase des boucles ouvertes équivalentes et celle de la boucle ouverte nominale à la fréquence de résonance.

Critère lié à la minimisation du degré de stabilité C_{DS}

L'objectif est de minimiser les variations du degré de stabilité sur la plage de fréquence du gabarit généralisé. Ces variations sont déterminées en évaluant les valeurs maximales Q_{ik} du module des éléments diagonaux T_{ii} de la matrice fonction de sensibilité complémentaire $T(j\omega)$ pour tous les états paramétriques $G_k(s)$ considérés et sur la plage de fréquence du gabarit généralisé. Soit $d_{Q_{ik}}$ une fonction élémentaire permettant la mesure de la variation du degré de

stabilité pour l'élément T_{ii} et pour un état paramétrique donné $G_k(s)$. La valeur cible associée à chacune des fonctions $d_{Q_{ik}}$ est le facteur de résonance désiré Q_{i0} . L'écart maximum correspondant est défini par ΔQ_i . La fonction élémentaire $d_{Q_{ik}}$ est alors définie pour un état paramétrique k donné et par la relation :

$$d_{Q_{ik}}(G_k(s)) = \left| \frac{Q_{ik} - Q_{i0}}{\Delta Q_i} \right|^{r_{1i}} \text{ pour } G_k(s) \in G(s). \quad (3.98)$$

avec

$$Q_{ik} = \max_{\omega} |T_{ii}(j\omega)| \text{ pour } G_k(s) \in G(s). \quad (3.99)$$

Le critère C_{DS} lié à la minimisation des variations du degré de stabilité doit prendre en compte l'ensemble des états paramétriques ainsi que l'ensemble des m éléments diagonaux de T . Par addition, la fonction élémentaire globale est alors :

$$C_{DS} = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{G_k(s) \in G(s)} d_{Q_{ik}}(G_k(s)) = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{G_k(s) \in G(s)} \left| \frac{Q_{ik} - Q_{i0}}{\Delta Q_i} \right|^{r_{1i}}. \quad (3.100)$$

Critères liés au comportement découplant de la loi de commande C_D

L'objectif est d'améliorer le comportement découplant de la loi de commande. Pour cela, nous proposons de considérer une fonction élémentaire $d\varphi_{ik}$ associée à la boucle ouverte équivalente i et relative à un état paramétrique $G_k(s)$:

$$d\varphi_{ik}(G_k(s)) = \left| \frac{\varphi_{ik} - \varphi_{i0}}{\Delta \varphi_i} \right|^{r_{2i}} \text{ pour } G_k(s) \in G(s), \quad (3.101)$$

$$\text{où } \varphi_{ik} = \arg \beta_{ik}(j\omega_{rik}) \text{ pour } G_k(s) \in G(s), \quad (3.102)$$

et avec :

- φ_{i0} : valeur cible correspondant à la phase désirée de la $i^{\text{ème}}$ boucle ouverte fractionnaire nominale à la fréquence de résonance en boucle fermée correspondante ω_{ri0} .
- $\Delta \varphi_i$: écart maximum entre φ_{i0} et la phase de la boucle ouverte équivalente $\beta_{iik}(s)$ à la fréquence de résonance ω_{rik} .

Le critère C_D lié au comportement découplant de la loi de commande doit prendre en compte chaque état paramétrique ainsi que chaque boucle ouverte équivalente. Par addition, la fonction élémentaire est alors :

$$C_D = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{G_k(s) \in G(s)} d\varphi_{ik}(G_k(s)) = \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{G_k(s) \in G(s)} \left| \frac{\varphi_{ik} - \varphi_{i0}}{\Delta\varphi_i} \right|^{r_{2i}} \quad (3.103)$$

Tous les coefficients r_{1i} et r_{2i} peuvent être fixés à 1 pour rendre le processus d'optimisation sensible à toute amélioration du critère.

Le critère composite

Ces deux critères sont associés dans une fonction composite D où les pondérations w_i sont choisies égales à 2 :

$$D = \left((C_{DS})^2 + (C_D)^2 \right). \quad (3.104)$$

Cette fonction D peut alors être minimisée sous les contraintes :

$$\inf_G |T_{ij}(j\omega)| \geq T_{ij_l}(\omega), \quad (3.105)$$

$$\sup_G |T_{ij}(j\omega)| \leq T_{ij_u}(\omega), \quad (3.106)$$

$$\sup_G |S_{ij}(j\omega)| \leq S_{ij_u}(\omega), \quad (3.107)$$

$$\sup_G |KS_{ij}(j\omega)| \leq KS_{ij_u}(\omega), \quad (3.108)$$

$$\sup_G |SG_{ij}(j\omega)| \leq SG_{ij_u}(\omega), \quad (3.109)$$

quels que soient $\omega \in \mathfrak{R}$, $i \in [1, n]$, $j \in [1, m]$ et G , le procédé nominal ou reparamétré.

Rejet de perturbations et réalisabilité du régulateur

En utilisant (3.73), le régulateur sera propre si:

$$\deg(d_i(s)) + \deg(D_{p_{ij}(s)}) \geq \deg(N_{p_{ij}(s)}) + \deg(n_i(s)), \forall j \in [1, m], \quad (3.110)$$

en posant

$$p_{ij}(s) = \frac{N_{p_{ij}(s)}}{D_{p_{ij}(s)}}. \quad (3.111)$$

(3.110) peut aussi s'écrire :

$$\deg(d_i(s)) - \deg(n_i(s)) \geq \max_{j \in N} \left(\deg(N_{p_{ij}(s)}) - \deg(D_{p_{ij}(s)}) \right). \quad (3.112)$$

Sachant qu'aux hautes fréquences:

$$\deg(d_i(s)) = n_{h_i}, \quad (3.113)$$

on obtient la condition suivante:

$$n_{h_i} \geq \max_{j \in N} \left(\deg(N_{p_{ij}(s)}) - \deg(D_{p_{ij}(s)}) \right). \quad (3.114)$$

Aux basses fréquences, les perturbations en entrée sont rejetées si, considérant la fonction de transfert $S(s)G(s)$:

$$\eta_0(S(s)) + \eta_0(G_0(s)) \geq 0. \quad (3.115)$$

L'ordre de $S(s)$ étant donné par celui de $\beta_{o_i}(s)$, on obtient

$$\eta_0(S(s)) \approx -\eta_0(\beta_{o_i}(s)) = n_{l_i}. \quad (3.116)$$

En posant

$$- \eta_0(G_0(s)) = \eta_0(N_{g_{ij}(s)}) - \eta_0(D_{g_{ij}(s)}), \quad (3.117)$$

$$- g_{ij}(s) = \frac{N_{g_{io}(s)}}{D_{g_{io}(s)}}, \quad (3.118)$$

on obtient

$$n_{l_i} \geq \eta_0(D_{g_{ij}(s)}) - \eta_0(N_{g_{ij}(s)}), \quad \forall j \in [1, m] \quad (3.119)$$

et finalement la condition :

$$n_{l_i} \geq \max_{j \in N} \left(\eta_0(D_{g_{ij}(s)}) - \eta_0(N_{g_{ij}(s)}) \right). \quad (3.120)$$

3.5. Application

Le procédé considéré ici est constitué et d'une cuve de mélange de produits chimiques ayant deux sorties mesurées et trois entrées de commande ([Loh, 1997] et [Arkun et al, 1989]).

Les sorties sont:

- $h(t)$ la hauteur du mélange dans la cuve,
- $c(t)$ la concentration du mélange contenu par la cuve.

Les entrées sont les débits des trois vannes F_1, F_2, F_3 (Figure 3. 2).

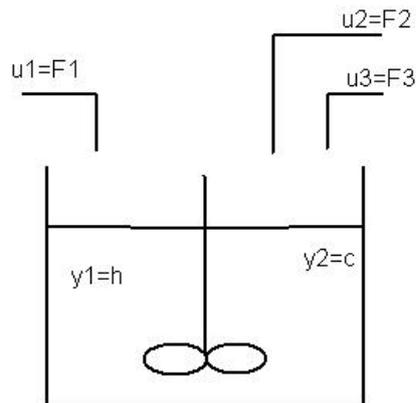


Figure 3. 2: Schéma de la cuve de mélange

Dans l'industrie chimique les incertitudes sont généralement modélisées par des retards purs sur les entrées. Ce système peut se modéliser par l'équation suivante :

$$y(s) = G(s) \cdot u(s), \quad (3.121)$$

avec

$$- \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_3 s} \\ \frac{3}{10s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{-3}{10s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{5}{10s+1} e^{-\theta_3 s} \end{bmatrix}, \quad (3.122)$$

$$- \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2, \quad (3.123)$$

$$- \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1, \quad (3.124)$$

$$- \quad 0 \leq \theta_3 \leq 0.5. \quad (3.125)$$

Le procédé nominal choisi est celui pour lequel $\theta_1=2$, $\theta_2=1$ et $\theta_3=0.5$. La Figure 3. 3 présente la réponse fréquentielle du procédé nominal et des procédés reparamétrés.

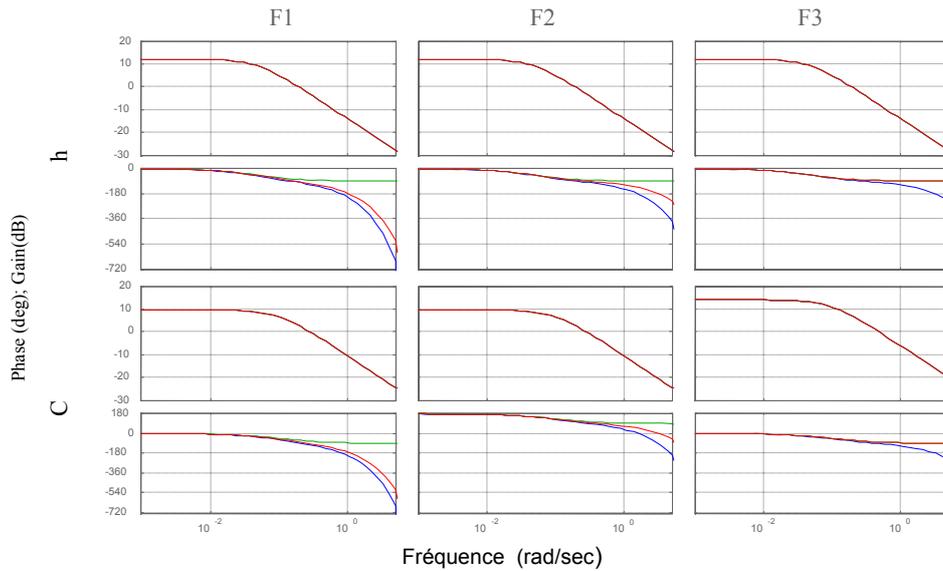


Figure 3. 3: Diagramme de bode du procédé nominal (—) puis reparamétré : $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ (—) et $\theta_1 = 1.5, \theta_2 = 0.5, \theta_3 = 0$ (—)

Par analyse de cette matrice de transfert on peut affirmer que :

- les trois robinets agissent de manière identique sur la hauteur,
- les trois débits ont la même dynamique sur la concentration cependant il est évident que l'entrée F_3 aura une action plus importante sur la valeur statique de la concentration.

On obtient un système multivariable non-carré et retardé possédant plus d'entrées que de sorties.

3.5.1. Préparamétrisation de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire et nominale

a. Recherche des éléments à intégrer

Dans un premier temps, le logiciel Matlab est utilisé afin de calculer la matrice

$$Q = G_0 G_0^H = [q_{ij}]_{1 \leq i, j \leq m} :$$

$$\begin{aligned}
q_{11}(s) &= \frac{7.68e6s^4 + 1.536e6s^3 + 115200s^2 + 3840s + 48}{6.4e7s^6 + 1.92e7s^5 + 2.4e6s^4 + 16e4s^3 + 6e3s^2 + 120s + 1} \\
q_{21}(s) &= \frac{20}{200s^2 + 30s + 1} \\
q_{12}(s) &= \frac{20}{200s^2 + 30s + 1} \\
q_{22}(s) &= \frac{43e4s^4 + 172e3s^3 + 25.8e3s^2 + 1720s + 43}{1e6s^6 + 6e5s^5 + 15e4s^4 + 2e4s^3 + 1500s^2 + 60s + 1}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

En appliquant la méthodologie proposée, on obtient:

$$- \alpha_{q_1} = 0, \tag{3.127}$$

$$- \tau([G_0^H [Q^{ji}(s)]_{1j}]) = -2 \quad \forall j \in [1,2] \tag{3.128}$$

$$- \tau([G_0^H [Q^{ji}(s)]_{2j}]) = -1 \quad \forall j \in [1,2] \tag{3.129}$$

$$- \tau([G_0^H [Q^{ji}(s)]_{3j}]) = -0.5 \quad \forall j \in [1,2] \tag{3.130}$$

Par conséquent:

$$\tau_1 = -2, \tag{3.131}$$

$$\tau_2 = -2. \tag{3.132}$$

Finalement :

$$\tau(\beta_{0_1}) \geq \alpha_{q_1} - \tau_1 = 2, \tag{3.133}$$

$$\text{et} \quad \tau(\beta_{0_2}) \geq \alpha_{q_1} - \tau_2 = 2. \tag{3.134}$$

Aucun élément à PRP n'a été descellé, par conséquent aucun zéro ou pôle à PRP ne doit être intégré à la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire.

3.5.2. Spécifications

Pour tous les états paramétriques, les spécifications à satisfaire sont les suivantes :

- une erreur statique nulle pour chacune des sorties,
- un temps d'établissement petit,
- un dépassement de l'ordre de 10%.

Ces spécifications permettent d'initialiser certains paramètres de la matrice non-entière en boucle ouverte. En effet, compte tenu des éléments à rajouter à chacun des $\beta_{0_{jj}}$ et du rang

relatif maximum du procédé pseudo-inversé (3), n_h doit être au minimum égal à 3. Une erreur statique nulle impose un n_l supérieur ou égal à 1.

3.5.3. Optimisation

Les paramètres des 2 boucles ouvertes $\beta_{oi}(s)$ sont optimisés. Les paramètres optimaux pour chacune des boucles ouvertes sont $\omega_{r1} = 0.2rad/s$, $\omega_{l1} = 0.03rad/s$, $\omega_{h1} = 1rad/s$, $\|\beta_{01}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 0\text{ dB}$ et $\omega_{r2} = 0.2rad/s$, $\omega_{l2} = 0.025rad/s$, $\omega_{h2} = 1.7rad/s$, $\|\beta_{02}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 1\text{ dB}$.

- De ces paramètres se déduisent : $C_{h1}C_{l1}=1$, $a_1=1.5$, $b_1=0$, $q_1=1$, $C_1=1$ et $C_{h2}C_{l2}=1$, $a_2=1.5$, $b_2=0$, $q_2=1$, $C_2=1$.

La Figure 3. 4 présente les deux boucles ouvertes équivalentes.

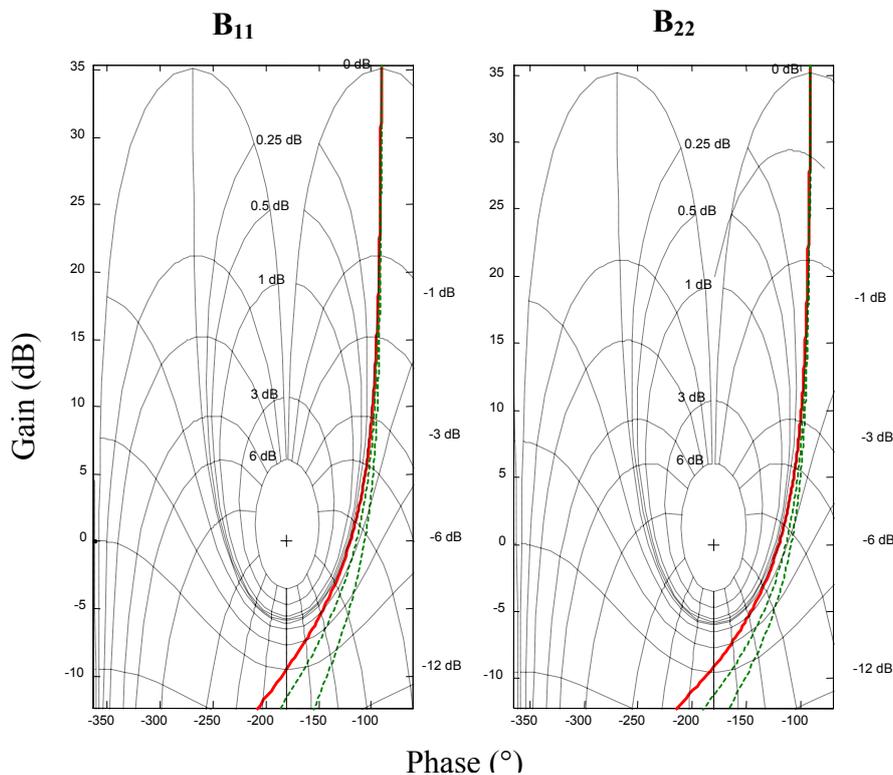
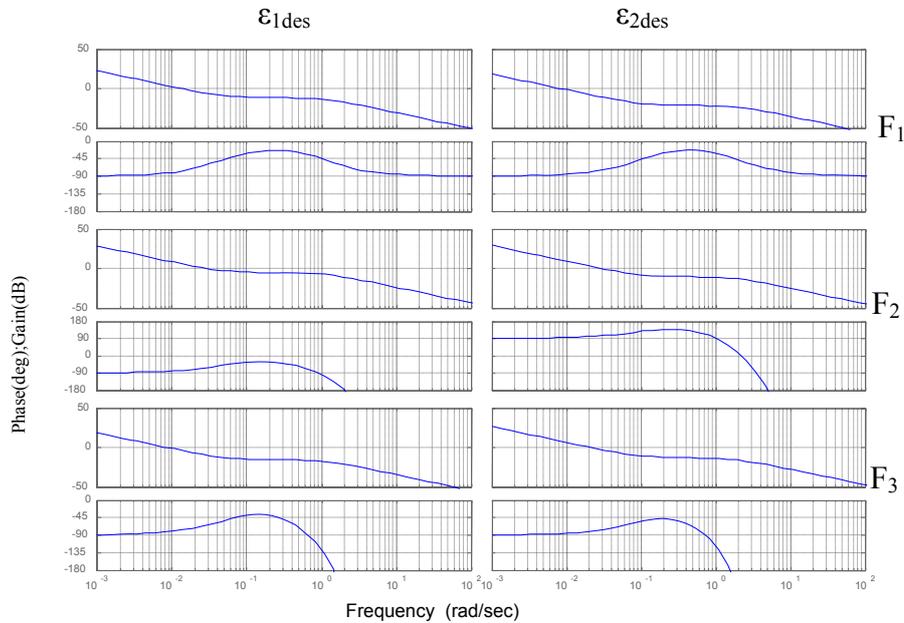


Figure 3. 4 : Boucles ouvertes équivalentes pour le procédé nominal (—) et deux procédés reparamétrés (---)

Suite à une identification des réponses fréquentielles idéales de chacun des éléments du régulateur, le régulateur rationnel (diagramme de Bode Figure 3. 5) est défini par :

$$\begin{aligned}
k_{11}(s) &= \frac{121.1s^4 + 308.2s^3 + 33.95s^2 + 1.16s + 0.01334}{417.1s^5 + 1424s^4 + 1212s^3 + 71.91s^2 + s} \\
k_{21}(s) &= \frac{5.87s^3 + 20.27s^2 + 1.444s + 0.026}{9.29s^4 + 39.92s^3 + 37.84s^2 + s} e^{-s} \\
k_{31}(s) &= \frac{0.3904s^3 + 1.011s^2 + 0.2078s + 0.008222}{2.065s^4 + 7.115s^3 + 6.628s^2 + s} e^{-1.5s} \\
k_{12}(s) &= \frac{0.08215s^3 + 0.3205s^2 + 0.1102s + 0.008222}{0.4828s^4 + 2.698s^3 + 4.117s^2 + s} \\
k_{22}(s) &= \frac{-0.2154s^3 - 0.9668s^2 - 0.3736s - 0.02917}{0.3844s^4 + 2.269s^3 + 3.586s^2 + s} e^{-s} \\
k_{32}(s) &= \frac{0.06495s^2 + 0.2225s + 0.02065}{0.1564s^3 + 0.8008s^2 + s} e^{-1.5s}
\end{aligned} \tag{3.135}$$

Figure 3. 5 : Réponse fréquentielle de $K(s)$

3.5.4. Résultats

La procédure d'évaluation est la suivante :

- les entrées de référence du système bouclé sont des variations échelons imposées aux temps $t=10s$ pour $y_{1des}=70$ et $t=50s$ pour $y_{2des}=50$,
- les retards varient dans les intervalles définis par les relations (3. 123) à (3. 125).

Les résultats en simulation présentés Figure 3. 6 et la Figure 3. 7 permettent de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par la loi de commande de type IMC présentée dans [Loh et al, 1997].

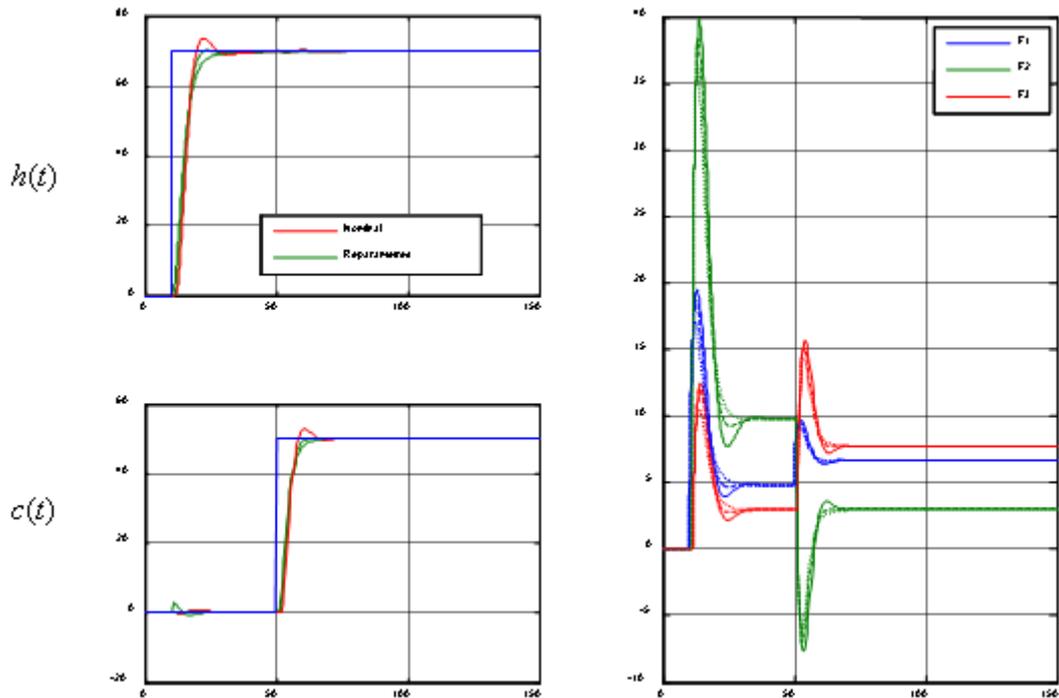


Figure 3. 6 : Simulations temporelles pour les procédés nominal et reparamétrés

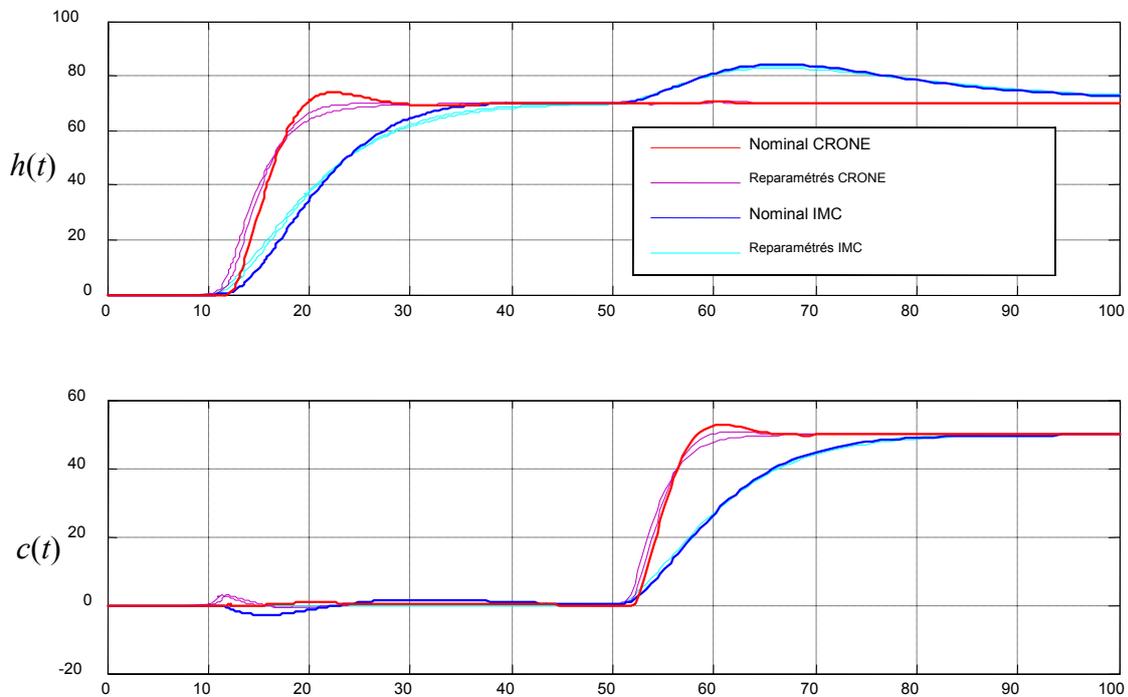


Figure 3. 7 : Comparaison entre les méthodologies CRONE et IMC

Les figures précédentes permettent d'indiquer que toutes les spécifications sont respectées. En effet, on obtient :

- une erreur statique nulle (Figure 3. 6),
- un dépassement maximum de 5% (Figure 3. 6)
- un temps de réponse de 10s contre 22s pour la méthodologie IMC (Figure 3. 7),
- un découplage quasi-parfait des sorties pour le régulateur CRONE alors que le couplage génère une variation de 22% pour la régulation IMC (Figure 3. 7).

En résumé, après avoir rappelé la théorie mathématique permettant l'inversion d'une matrice complexe non-carrée, nous avons proposé un théorème formalisant l'inversion d'une matrice de transfert instable possédant des retards purs. En s'appuyant sur ce théorème nous avons proposé une méthodologie permettant de synthétiser un régulateur CRONE pour les systèmes MIMO non carrés, retardés et instable. Cette méthodologie a ensuite été appliquée à un système industriel chimique afin d'en démontrer l'efficacité. Les résultats obtenus s'avèrent satisfaisant en termes de rapidité, de robustesse et de découplage.

3.6. Synthèse CRONE MIMO décentralisée

Comme l'a montré le premier chapitre, deux extensions de la méthodologie CRONE SISO ont ainsi été proposées pour la commande de procédés MIMO. Alors que la première approche multi-SISO est simple à mettre en œuvre mais a un champ d'application réduit, la deuxième approche totalement multivariable est plus délicate à mettre en œuvre mais s'adresse à un nombre de procédés plus importants. En s'appuyant sur une analyse multivariable des procédés, l'objectif de ce paragraphe est de montrer comment utiliser, quand c'est possible, une approche CRONE MIMO simplifiée pour la synthèse non pessimiste de régulateur décentralisé.

Bien qu'une commande décentralisée puisse détériorer les performances de la boucle fermée par rapport à une commande centralisée elle offre le grand avantage d'être plus simple et moins coûteuse à concevoir et à mettre en œuvre [Szita et al, 2000]. Notamment, une commande centralisée nécessite la conception et donc l'implémentation d'un régulateur comportant $m \times n$ éléments alors qu'une commande décentralisée nécessitera au maximum m ou n éléments.

Une commande décentralisée peut être obtenue de trois façons.

La première est envisageable quand une analyse des phénomènes de couplage du procédé indique que le problème peut être traité en considérant le procédé comme un ensemble de m ou n procédés SISO [Hovd et al, 1994, Niederlinski et al, 1971, Luyben et al, 1986, Grosdider et al, 1986, Skogestad et al, 1989]. Un régulateur est alors conçu de manière indépendante pour chacune des boucles. Cette solution est aussi nommée commande multi-SISO et elle permet de construire m ou n régulateur $K_{D_i}(s)$ qui augmenteront le caractère monovarié de chacune des boucles. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle se doit d'être un peu prudente car durant la conception de chaque éléments du régulateur, les informations liées aux autres boucles ne sont pas prises en compte.

On peut aussi commander un système multivariable en concevant un ensemble de boucles imbriquées [Mayne et al, 1973, Bernstein et al, 1987, Nett et al, 1988, Viswanadham et al, 1988, Arkun et al, 1989, Ohmori et al, 1995]. Ainsi le régulateur de la $i^{\text{ème}}$ boucle sera conçu sur la base des boucles fermées de niveau inférieure (boucle de 1 à $(i-1)^{\text{ème}}$). Cette méthode peut être moins prudente que la commande multi-SISO mais n'est pas tolérante aux fautes. En effet de part son caractère séquentiel chacune des boucles de commande devient très dépendantes des boucles de niveau inférieur.

Enfin la troisième et dernière méthode est celle que nous proposons ici, c'est-à-dire la conception d'un régulateur décentralisé en utilisant la méthodologie CRONE purement multivariable mais en considérant un modèle nominal simplifié du procédé. Les termes de couplage du procédé reparamétré ne sont pas négligés et ils sont donc pris en compte lors de l'optimisation du régulateur. La particularité est que les éléments $K_{D_i}(s)$ de la matrice de transfert du régulateur $K_D(s)$ sont conçus simultanément. En tenant compte des différentes interactions propre au procédé, cette méthode permet d'être le moins prudent et donc le plus performant.

Nous disposerons maintenant de trois méthodologies CRONE multivariable (multi-SISO, MIMO décentralisée et MIMO) complémentaires à la fois d'un point de vue de leur champ d'application, des performances auxquelles elles conduisent et de leur difficulté de mise en œuvre. Le choix de l'une des trois doit donc toujours être précédé d'une analyse fine du procédé, analyse qui prend aussi en compte les performances requises.

Après avoir énoncé quelques outils d'analyse des procédés multivariables, la méthodologie de conception des régulateurs CRONE décentralisés sera présentée et appliquée à deux systèmes MIMO. Le système académique de mélange de trois produits (système non carré) et

un système de laboratoire comportant à la fois une partie hydraulique et thermique (système carré).

3.6.1. Outils d'analyse des phénomènes de couplage pour les systèmes multivariables

Les outils d'analyse présentés ici ont pour objectif la détermination de la méthodologie à utiliser pour synthétiser le régulateur nécessaire (et suffisant) pour la commande d'un procédé MIMO donné. L'analyse RGA (Relative Gain Array) permet de déterminer si un régulateur décentralisé est envisageable [Bristol, 1966]. Si tel est le cas, le calcul de l'indicateur CD^3 (Column Diagonal Dominance Degree) permet de déterminer si une méthodologie multi-SISO est utilisable. Dans certain cas il peut aussi être envisager de commander le procédé multivariable par bloc ; il convient dans ce cas de déterminer les blocs de transfert du procédé les plus couplés entre eux. Pour ce faire, l'outil Block Relative Gain (BRG) s'avère très intéressant.

a. Analyse RGA (Relative gain Array)

L'analyse RGA [Chang et al, 1990 et Arkun et al, 1989] permet de quantifier simplement le niveau d'interaction entre chaque entrée et sortie d'un système. Pour une réponse fréquentielle $G(j\omega)$, les éléments γ_{ij} de la matrice RGA Γ sont définis par :

$$\gamma_{ij}(j\omega) = \frac{\left. \frac{y_i(j\omega)}{u_j(j\omega)} \right|_{u_k(j\omega)=0 \text{ pour } k \neq j}}{\left. \frac{y_i(j\omega)}{u_j(j\omega)} \right|_{y_k(j\omega)=0 \text{ pour } k \neq i}} \quad \forall i, j \in N. \quad (3.136)$$

Cette matrice est calculée à l'aide du produit de Schur :

$$\Gamma(G(j\omega)) = G(j\omega) \times (G^{-1}(j\omega))^T = [\gamma_{ij}(j\omega)]. \quad (3.137)$$

La somme des termes de chacune des lignes et colonnes de Γ étant unitaire, celle-ci sera symétrique pour un système MIMO carré $m \times m$.

Afin d'apprécier l'importance de cet outils, la méthode RGA sera appliquée au système multivariable 2×2 :

$$\begin{aligned} y_1 &= g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ y_2 &= g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{aligned} \quad (3.138)$$

Supposant que l'on veuille contrôler la sortie mesurée y_i par l'entrée de commande u_j . Bristol (1966) indique que deux cas peuvent se présenter :

Considérons toutes les autres boucles de commande ouvertes, c'est-à-dire que les entrées de commandes $u_k \forall k \neq j$ sont maintenues constantes (ou nulle). Un échelon d'amplitude Δu_j appliqué sur l'entrée de commande u_j produit une variation Δy_i , sur la sortie y_i . Ainsi, lorsque les entrées de commande $u_k \forall k \neq j$ restent constantes, le gain entre l'entrée de commande u_j et la sortie mesurée y_i est donné par :

$$K_{ij} \Big|_{u_k} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j} \Big|_{u_k} . \quad (3. 139)$$

Dans notre cas :

$$\begin{aligned} \text{avec } u_2 = 0 \text{ on a } y_1 &= g_{11}u_1 \\ \Rightarrow K_{11} \Big|_{u_k} &= g_{11} \end{aligned} \quad (3. 140)$$

- Considérons les autres boucles de commande parfaitement commandées grace aux entrées de commandes u_k , soit $y_k = 0, \forall k \neq i$. Un échelon d'amplitude Δu_j appliqué sur l'entrée de commande u_j produit aussi une variation sur la sortie à commander y_i . Le nouveau gain de boucle est alors :

$$K_{ij} \Big|_{y_k} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j} \Big|_{y_k} , \quad (3. 141)$$

Dans notre cas, avec $y_2=0$, du fait des interactions ou phénomène de couplage, un changement sur u_1 entraîne un changement aussi sur u_2 . Plus précisément fixer y_2 à zéro dans (3. 138) donne:

$$u_2 = -\frac{g_{21}}{g_{22}} u_1. \quad (3. 142)$$

En utilisant (3. 142), l'équations (3. 138) devient:

$$y_2 = 0 \quad y_1 = \left(g_{11} - \frac{g_{21}}{g_{22}} g_{21} \right) u_1. \quad (3. 143)$$

Ceci permet d'affirmer que le gain de boucle passe de $K_{11} \Big|_{u_k}$ à $K_{11} \Big|_{y_k}$ lorsque les boucles de commandes autres que celle liée à la paire (y_i, u_j) sont fermées. L'éléments RGA correspondant est alors :

$$\gamma_{11}(s) = \frac{\text{"Gain en boucle ouverte (avec } u_2 = 0\text{)"}}{\text{"Gain en boucle fermée (avec } y_2 = 0\text{)"}} = \frac{K_{11}|_{u_k}}{K_{11}|_{y_k}}, \quad (3. 144)$$

soit dans notre cas:

$$\gamma_{11}(s) = \frac{1}{1 - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}}. \quad (3. 145)$$

Un élément γ_{ij} de la matrice Γ permet de comparer le gain naturel entre des signaux y_i et u_j , les autres entrées u_k étant maintenues nulles, et ce même gain en boucle fermée, les autres entrées u_k étant telles que les autres sorties y_k sont maintenues nulles. On en déduit que si :

- $\gamma_{ij} = 1$, le gain entre la sortie y_i et l'entrée u_j n'est pas modifié par les autres boucles et qu'il n'y a donc pas d'interaction ;
- $\gamma_{ij} = 0$, une modification de u_j n'a pas d'influence sur la sortie y_i et ne doit pas être utilisée pour la commander ;
- $\gamma_{ij} \gg 1$, une modification de u_k influence énormément y_i et u_j ne doit donc pas être utilisé pour commander y_i si le choix d'un régulateur décentralisé a été fait.

La matrice Γ peut être utilisée pour réarranger l'ordre des entrées afin d'appairer les entrées et les sorties. Dans le cas général, on choisit de commander les sorties y_i avec les entrées de commandes u_j lorsque γ_{ij} est proche de 1. D'autre part on pourra négliger les transferts $g_{ij}(s)$ correspondant à un γ_{ij} nul. Ainsi grâce à cet outils une analyse de l'ensemble des valeurs possibles de $G(j\omega)$ sur l'ensemble de la bande passante recherchée en boucle fermée aide à faire un choix entre loi de commande centralisée ou loi de commande décentralisée. De plus en simplifiant la forme de la matrice de transfert $G_o(s)$ cet outils permet de simplifier celle du régulateur (3. 71). Cependant certaines règles doivent être suivis :

1. Dans le cas de systèmes multivariables carré il est préférable de réarranger les entrées de commande et les sorties à commander de manière a ce que l'analyse RGA permette d'obtenir une matrice Γ similaire à la matrice identité autour de la bande passante en boucle fermée souhaitée.
2. Eviter, dans la mesure du possible, de choisir un pairage entre des éléments qui possède une valeur γ_{ij} négative pour des pulsations très petite devant la pulsation de travail.

3. Préférer un pairage entre l'entrée u_j et la sortie y_i quand $g_{ij}(s)$ est le moins contraignant vis-à-vis de la bande passante atteignable (les plus grands zéros ou les plus petits pôles à partie réelle positive et le retard le plus petit possible).

b. Analyse BRG (Block Relative Gain)

Pour les systèmes MIMO pour lesquels une commande par bloc est souhaitable, il existe une méthode d'analyse similaire à la méthode RGA permettant d'analyser le couplage par bloc de la matrice de transfert [Kariwala et al, 2003 et Seshagiri et al, 2006]. Nous allons notamment utiliser l'analyse BRG pour les systèmes non-carrés où bien évidemment un régulateur diagonal ne peut exister.

Definition: Soit $G(s)$ une matrice de transfert de taille $m \times n$. La méthode d'analyse BRG est une méthode permettant de mesurer le couplage (c'est à dire les interactions) entre les entrées et les sorties d'un "bloc" de la matrice $G(s)$. Les éléments $\gamma_{Bij}(s)$ de la matrice BRG sont définis comme le rapport du gain de boucle ouverte du bloc considéré par le gain apparent du même bloc lorsque toutes les autres boucles sont fermées. Ils peuvent être calculés par la formule suivante :

$$[\Lambda_B(s)]_{ii} = G_{ii}(s) \times [G^\dagger(s)]_{ii}, \quad (3.146)$$

avec :

- $G_{ii}(s)$ la matrice de transfert du bloc de taille $m_1 \times m_1$ qui relie les m_1 premières entrées et sorties de $G(s)$,
- $[G^\dagger(s)]_{ii}$ la matrice de transfert du bloc de taille $m_1 \times m_1$ qui relie les m_1 premières entrées et sorties de $G^\dagger(s)$.

c. Analyse CD³ (Column Diagonal Dominance Degree)

L'analyse CD³ permet d'évaluer le taux de couplage à prendre en compte lors de l'utilisation de l'approche CRONE multi-SISO. Ce taux γ indique en effet l'incertitude non structurée à utiliser pour augmenter l'incertitude portant sur les termes diagonaux de G . L'index CD³ est défini par

$$\tau_{ci}(\omega) = \max_G \left\{ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \text{and } j \neq i}} \frac{|G_{ji}(j\omega)|}{|G_{ii}(j\omega)|} \right\} \text{ for } 1 \leq i \leq n, \quad (3.147)$$

Quand cette incertitude relative $\tau_{ci}(\omega)$ est beaucoup plus faible que 1 pour l'ensemble des valeurs possibles de $G(j\omega)$ et sur l'ensemble de la bande passante recherchée en boucle fermée, un régulateur décentralisé est synthétisable par l'approche multi-SISO. En effet, les ellipsoïdes qui modélisent l'incertitude non structurée dans le plan de Nichols y sont alors petites.

3.6.2. Conception de régulateur décentralisé pour les systèmes MIMO

La méthodologie de synthèse d'une commande CRONE MIMO (carré ou non carré) peut s'avérer complexe à mettre en œuvre. Autant cette complexité est acceptable quand une commande totalement MIMO est nécessaire, autant elle est gênante quand un "simple" régulateur décentralisé semble suffisant. Si tel est le cas, la méthodologie peut être extrêmement simplifiée en choisissant arbitrairement comme procédé nominal un modèle diagonal $G_o(s)$ reflétant assez correctement le comportement et les phénomènes de couplage dominants du procédé réel $G(s)$.

Dans le cas MIMO carré la matrice simplifiée (et diagonale) de $G_o(s)$ notée $G'_o(s)$

$$G'_o(s) = \text{diag}[G_{oi}(s)]_{1 \leq i \leq m} \quad \forall i \in N, \quad (3.148)$$

conduit naturellement (voir équation (2.58)) à un régulateur diagonal

$$K(s) = \text{diag}[K_i(s)]_{1 \leq i \leq m} \quad \forall i \in N. \quad (3.149)$$

Conformément à (2.78), (2.83), (2.94), (2.101), (2.108), (2.122) et (2.128), chaque fonction de transfert en boucle ouverte nominale $\beta_{oi}(s)$ n'est alors définie qu'à partir des caractéristiques de $G_{oi}(s)$. Il en est de même pour le retard et modes propres peu amortis qui apparaîtraient dans $G_{oi}(s)$. L'utilisation du modèle nominal simplifié $G'_o(s)$ simplifie bien évidemment aussi la détermination de ces caractéristiques.

Bien que le procédé nominal soit choisi diagonal, l'optimisation des paramètres des $\beta_{oi}(s)$ est alors effectuée simultanément conformément au paragraphe 2.3, 2.4 et 2.5, les couplages négligées lors de la définition du modèle nominal étant pris en compte dans le calcul des fonctions de sensibilités pour l'ensemble des procédés reparamétrés $T(s)$, $S(s)$, $S_i(s)$ et $S_u(s)$ et donc aussi dans la détermination des fonctions de transfert en boucle ouverte équivalentes (1.95).

Dans le cas MIMO non carré l'analyse RGA faite sur l'ensemble des procédés $G(s)$ peut permettre de simplifier le procédé $G_o(s)$ en annulant tous les transferts $g_{o_{ij}}(s)$ correspondant à

un γ_{ij} proche de zéro. Quand on souhaite utiliser le caractère multivariable du système pour le commander, l'outil BRG est utilisé afin de découpler les blocs de l'ensemble des procédés $G(s)$ qui sont les plus couplés, les blocs correspondant à une valeur $\gamma_{B_{ij}}$ faible étant alors annulés dans la nouvelle matrice de transfert $G_o'(s)$.

Tout comme pour la méthodologie MIMO carré CRONE décentralisée l'optimisation de la matrice de transfert en boucle ouverte prend en compte l'ensemble des procédés reparamétrés $G(s)$ non simplifiés. La forme simplifiée du procédé nominal $G_o'(s)$ permettra d'obtenir une pseudo inverse $G_o'^{\dagger}$ elle aussi simplifiée et par conséquent un régulateur en partie décentralisé :

$$K(s) = G_o'^{\dagger} \beta_o(s) \tag{3.150}$$

3.6.3. Choix de la structure et de la méthodologie de synthèse du régulateur

L'utilisation des outils proposés est ici illustrée grâce à quelques exemples simples de système 2x2 caractérisés par des gains statiques à une pulsation donnée.

– Analyse RGA/SVD

Cinq exemples sont ici proposés pour montrer l'utilisation conjointe qui peut être faite des outils RGA et SVD.

1^{er} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma} = 1.1 \text{ and } \underline{\sigma} = 0.91 \end{cases} \tag{3.151}$$

La matrice Λ est très proche de la matrice identité et les valeurs de $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ sont très proches. L'analyse RGA révèle donc que l'entrée u_j est très couplée avec la sortie y_i pour $i = j = \{1, 2\}$ et l'analyse SVD montre que le système sera facile à commander autour de la pulsation de calcul de la matrice G . Un **régulateur décentralisé** peut être envisagé.

2^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.09 \\ 0.09 & 0.91 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma} = 1.59 \text{ and } \underline{\sigma} = 0.69 \end{cases} \quad (3.152)$$

Contrairement à ce que l'on pourrait s'imaginer en observant la matrice G , l'analyse RGA décèle un découplage de l'entrée u_1 et de la sortie y_2 . L'analyse SVD montre que le système sera facile à commander autour de la pulsation de calcul de la matrice G ($\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ proche). Un **régulateur décentralisé** peut être envisagé.

3^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.09 \\ 0.09 & 0.91 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma} = 1.4 \text{ and } \underline{\sigma} = 0.077 \end{cases} \quad (3.153)$$

Comme pour les cas précédents, l'analyse RGA révèle que l'entrée u_j est très couplé avec la sortie y_i pour $i = j = \{1, 2\}$. L'analyse SVD met par contre en évidence la complexité que l'on aurait à commander ce système à cette pulsation. En effet le *condition number* étant relativement important ($\bar{\sigma}/\underline{\sigma} = 18.18$), une direction sera plus facilement commandable que l'autre. Un **régulateur décentralisé** peut être envisagé mais une méthodologie de conception séquentielle ne devrait pas être envisagée.

4^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ -1 & 0.01 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma} = 1.4 \text{ and } \underline{\sigma} = 0.014 \end{cases} \quad (132)$$

L'analyse RGA montre un couplage évident. L'analyse SVD met en évidence qu'une direction a beaucoup plus de gain que l'autre. Un **régulateur centralisé** doit bien évidemment être envisagé.

5^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \\ \bar{\sigma} = 1.4 \text{ and } \underline{\sigma} = 1.4 \end{cases} \quad (3.154)$$

Ce cas diffère du cas précédent de part un *condition number* unitaire. Le système est donc facile de commander à cette pulsation mais une loi de commande décentralisée ne peut être envisagée. Un **régulateur centralisé** doit être envisagé.

– Analyse RGA/CD3

Nous reprenons les trois premiers cas pour lesquels l'analyse RGA a montré qu'un régulateur décentralisé pouvait être utilisé. L'analyse CD³ permet ici de montrer si une synthèse multi-SISO est envisageable.

1^{er} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma = \begin{bmatrix} 1.01 & -0.01 \\ -0.01 & 1.01 \end{bmatrix} \\ \max \tau_{ci} = 0.01 \end{cases} \quad (3.155)$$

La valeur de τ_{ci} , est très petite. Une approche **multi-SISO CRONE** pourra être utilisée.

2^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.09 \\ 0.09 & 0.91 \end{bmatrix} \\ \max \tau_{ci} = 1 \end{cases} \quad (3.156)$$

La valeur de τ_{ci} , est égale à 1. Une approche purement **multivariable CRONE** doit être utilisée.

3^{ème} cas

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.09 \\ 0.09 & 0.91 \end{bmatrix} \\ \max \tau_{ci} = 1 \end{cases} \quad (3.157)$$

Là aussi la valeur de τ_{ci} est égale à 1 donc une approche purement multivariable doit être utilisée pour concevoir $K(s)$.

La figure suivante récapitule le processus de recherche de la structure optimale du régulateur et de l'approche que l'on pourra utiliser pour le concevoir.

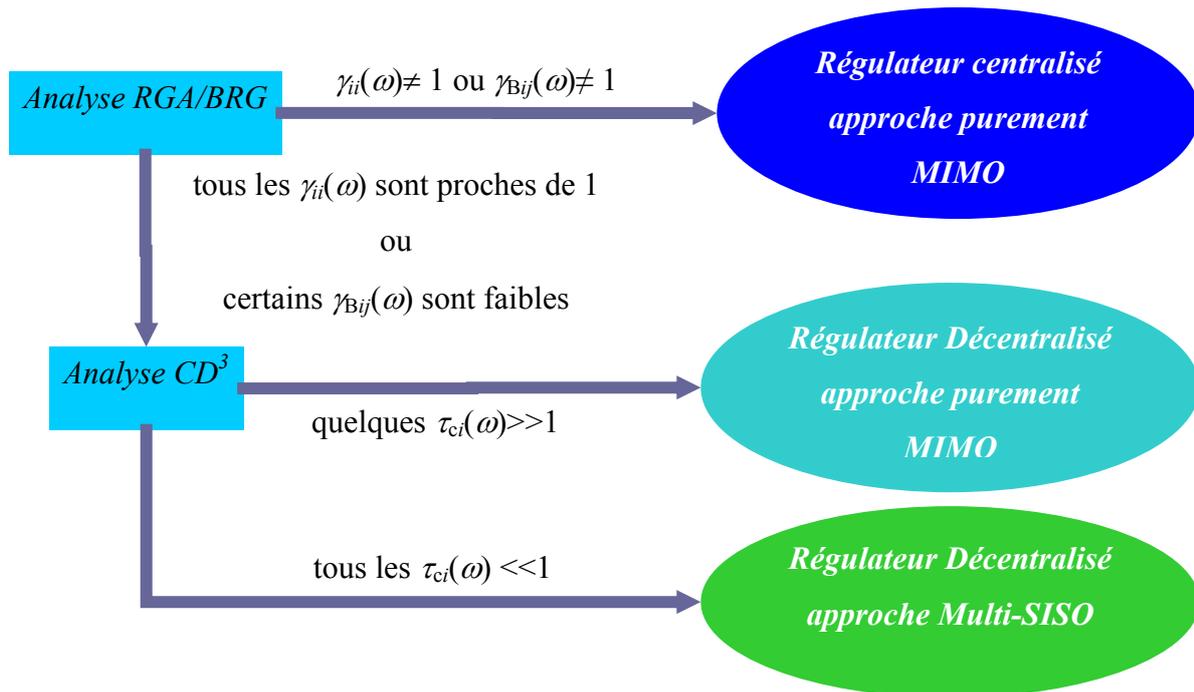


Figure 3. 8: Sélection de la structure et de la méthode de conception du régulateur

3.6.4. Application à un système multivariable carré

Afin de montrer l'efficacité de cette méthodologie, elle sera appliquée à la commande d'un banc pédagogique de la société Festo Didactic (Figure 3. 9). L'objectif est la régulation simultanée de la hauteur d'eau du bac supérieur (à gauche sur la photo) et de la température de l'eau située dans le bac inférieur (à droite). Une fuite susceptible de varier à tout moment est présente entre les bacs supérieur et inférieur. L'alimentation en eau du bac supérieur (à partir du bac inférieur) et le chauffage de l'eau du bac inférieur sont respectivement assurés par une pompe hydraulique centrifuge et par une résistance électrique.



Figure 3. 9 : Photographie du banc d'essais

– Modélisation du banc d'essais

Le système peut se décomposer en plusieurs sous-systèmes, hydraulique ou thermique, et quoi qu'il en soit couplés.

La modélisation de la partie hydraulique est effectuée sur la base des mesures effectuées sur le système réel. Le processus liant la commande $U_1(t)$ (%) appliquée à la pompe au débit à vide $Q_0(t)$ peut être caractérisé par un système du premier ordre de la forme

$$\tau \frac{d}{dt} Q_0(t) = -Q_0(t) + f(U_1(t))U_1(t), \quad (3. 158)$$

avec :

- $Q_0(t)$: débit de la pompe pour une $h(t) = h_0$,
- $h(t)$: hauteur d'eau dans la cuve supérieure,
- h_0 : hauteur minimale d'eau dans la cuve (0.016m)
- τ : de l'ordre de 1s.

La fonction $f(U_1(t))$ caractérise le comportement non linéaire observé en régime permanent entre la tension de commande appliquée et le débit résultant. Pour une pompe centrifuge, les variations de débit correspondent au carré des variations de la vitesse de la pompe (elle-même proportionnelle à la commande du moteur à courant continu en régime permanent), ce qui conduit à imposer une fonction $f(U_1(t))$ de la forme :

$$f(U_1(t)) = a_K U_1(t) + b_K, \quad (3.159)$$

avec ici $a_K = 2.86e-9$ et $b_K = 5.7e-7$.

Des mesures permettent de caractériser le débit rentrant $Q_e(t)$ dans le réservoir supérieur par la fonction :

$$Q_e(t) = Q_0(t) + ah(t). \quad (3.160)$$

avec $a = -7.04e-5$.

La variation du niveau $h(t)$ est créée par la différence entre les débits d'eau entrant $Q_e(t)$ et sortant $Q_s(t)$ de la cuve, ce qui se traduit mathématiquement par la relation :

$$S \frac{d}{dt} h(t) = Q_e(t) - Q_s(t), \quad (3.161)$$

avec une section de cuve $S = 0.0333m^2$.

Le débit sortant provient d'une fuite dont la section est réglée par une vanne manuelle. L'équation de Bernoulli permet une caractérisation de la fonction $Q_s(t)$ à savoir :

$$Q_s(t) = \alpha \sqrt{h(t) - h_0}. \quad (3.162)$$

où α dépend de la section de passage, h_0 étant la hauteur minimale d'eau dans la cuve (0.016m). Suivant l'ouverture de la vanne, on obtient :

$$5e-5 \leq \alpha \leq 2e-4. \quad (3.163)$$

La Figure 3. 10 permet une validation de ce modèle

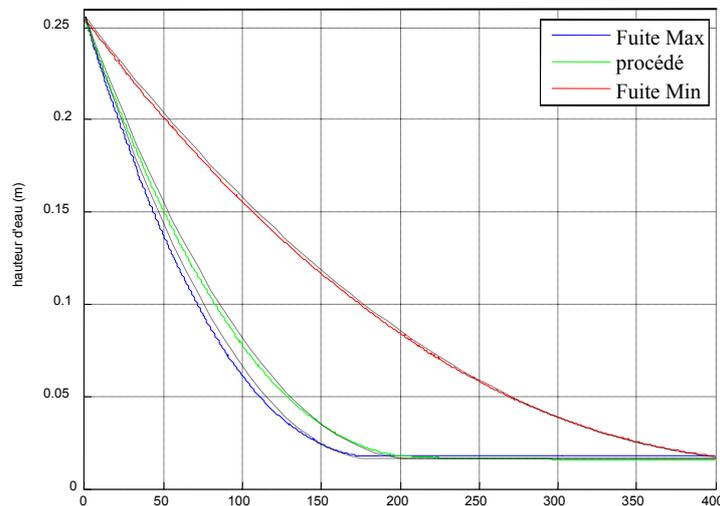


Figure 3. 10 : Variation de niveau dans la cuve et de la réponse du modèle pour différentes fuites et $Q_e = 0$

Compte tenu des paragraphes précédents, le système à commander est modélisé par la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} Q_0(t) &= -Q_0(t) + f(U_1(t))U_1(t) \\ S \frac{d}{dt} h(t) &= Q_0(t) + ah(t) - \alpha \sqrt{h(t) - h_0} \end{aligned} \quad (3.164)$$

La Figure 3. 11 permet de valider le modèle (3. 164) en comparant la réponse du système réel et celle du modèle.

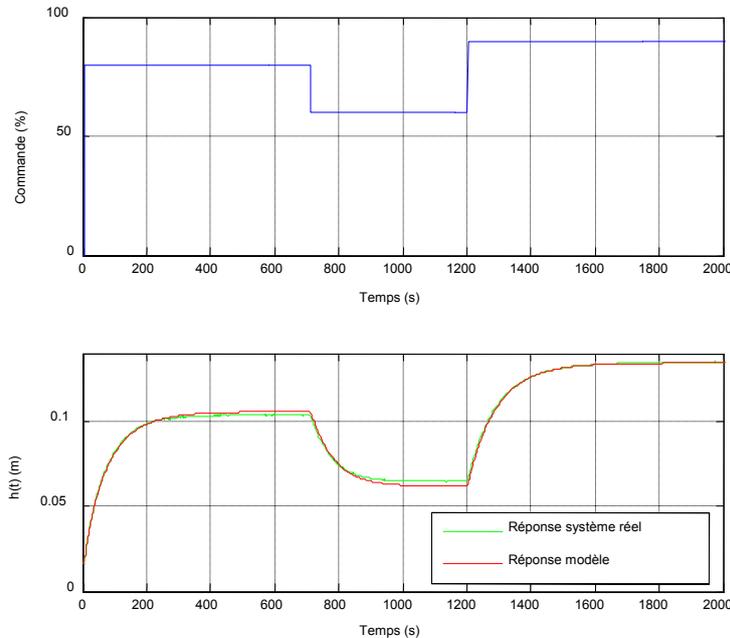


Figure 3. 11 : Comparaison de la réponse $h(t)$ du système et du modèle obtenu pour une même commande $U_1(t)$

Les températures des cuves inférieure et supérieure sont respectivement appelées $T(t)$ et $\theta(t)$. Un bilan thermique des échanges entre les 2 cuves et prenant en compte la température de l'air ambiant permet d'obtenir le modèle couplé suivant :

$$\begin{aligned} Sh(t) \frac{d}{dt} \theta(t) &= Q_e(t)(T(t) - \theta(t)) - (\theta(t) - T_A) / \rho DC \\ S(h_{\max} - h(t)) \frac{d}{dt} T(t) &= Q_s(t)(T(t) - \theta(t)) - (T(t) - T_A) / \rho DC \\ &\quad + P_{\max} U_2(t - r) / (100 \rho C) \end{aligned} \quad (3.165)$$

avec :

h_{\max} hauteur maximale d'eau dans la cuve (0.3m)

C : capacité calorifique de l'eau (4180J/kgK),

ρ : masse volumique de l'eau (1000kg/m³)

D : coefficient de dissipation thermique (0.29K/W),

T_A : température ambiante (25°C),

P_{\max} : puissance maximale de chauffe (1000W)

$U_2(t)$: commande appliquée à la résistance de chauffe (%)

r : retard pur modélisant les effets de l'anisotropie du chauffage dans le cuve inférieure (75s).

La Figure 3. 12 permet de valider une partie du modèle (3. 165). $h(t)$ est maintenue à 0.2m et une commande de 55% est appliquée sur $U_2(t)$, puis ramenée à 0% quand $T(t)$ atteint 60°C.

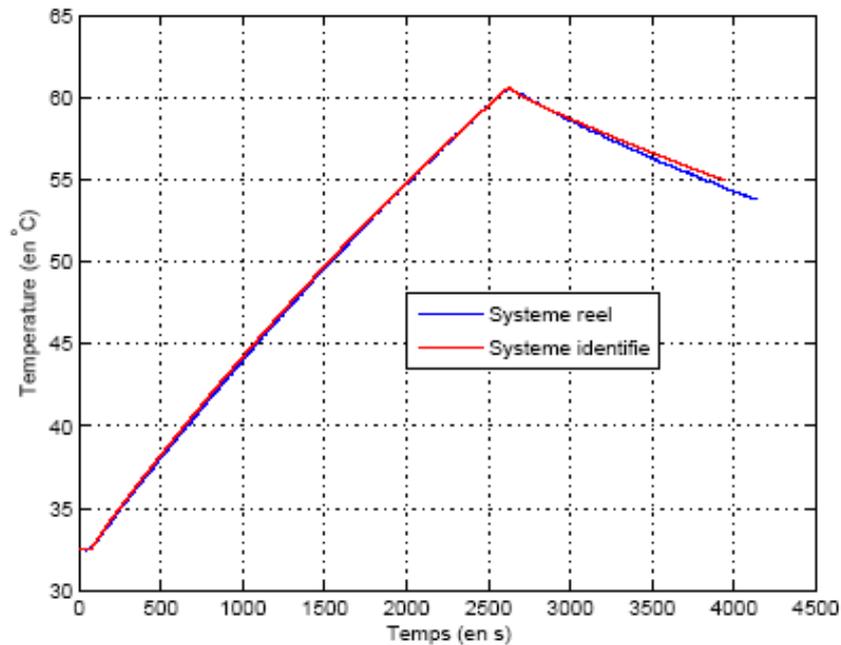


Figure 3. 12 : Comparaison de la réponse $T(t)$ du système et du modèle obtenu pour une même commande $U_2(t)$

– Analyse du modèle multivariable

On extrait le modèle linéaire du système défini par (3. 164) et (3. 165) et pour divers points de fonctionnement et état paramétriques possibles :

- $h(t)$ compris entre 0.018m et 0.250m ;
- $\alpha(t)$ compris entre $5e-5$ et $-2e-4$;
- $U_2(t)$ compris entre 10% et 90%.

La Figure 3. 13 indique comme on pouvait s'y attendre que la commande $U_2(t)$ n'a aucune influence sur $h(t)$. La commande $U_1(t)$ a par contre une influence importante sur $T(t)$.

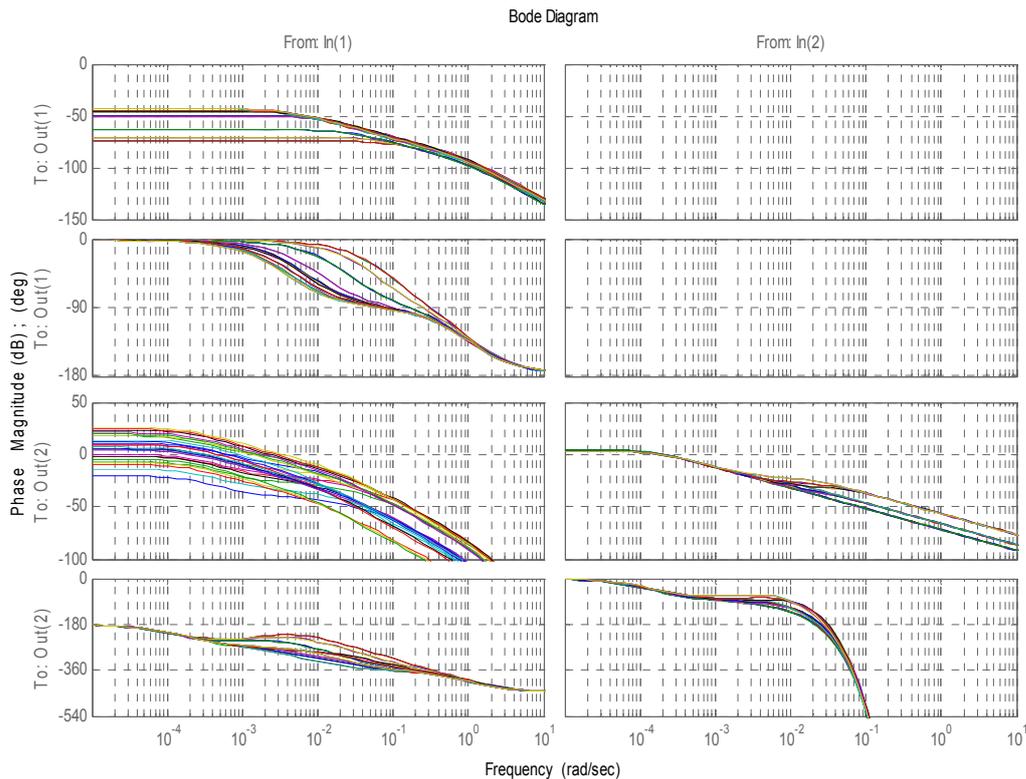


Figure 3. 13 : Ensemble des réponses fréquentielles du modèle linéaire reliant la sortie

$$[h(t), T(t)]^T \text{ à l'entrée } [U_1(t), U_2(t)]^T$$

Les Figure 3. 14 et 15 donnent les résultats des analyses RGA et CD^3 . Le terme $G_{12}(s)$ étant toujours nul, on constate que la matrice Γ est la matrice identité. Ce résultat démontre qu'un régulateur décentralisé est parfaitement apte à commander ce système, $U_1(t)$ et $U_2(t)$ étant respectueusement utilisés pour réguler $h(t)$ et $T(t)$. En fait, bien que $U_1(t)$ agisse aussi sur $T(t)$, $U_2(t)$ permet de découpler le système puisqu'il n'a pas d'action sur $h(t)$.

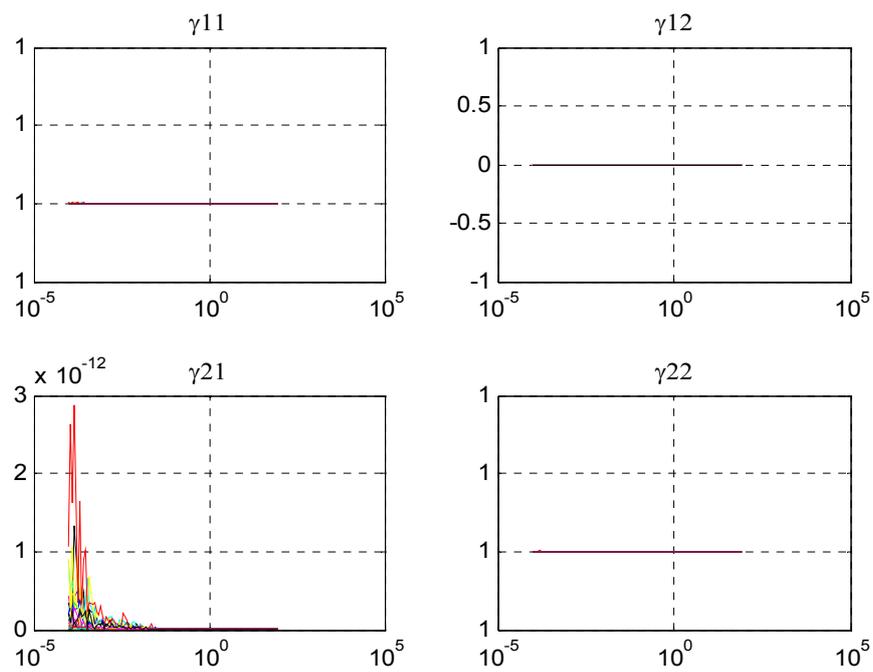


Figure 3. 14 : Tracé des termes $\gamma_{ij}(j\omega)$ de la matrice RGA de $G(j\omega)$

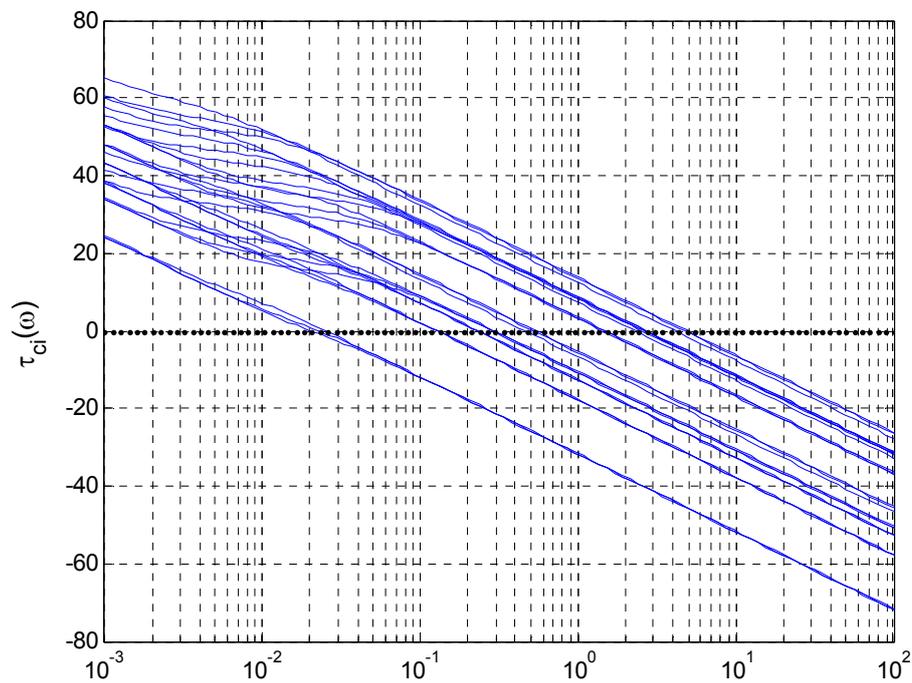


Figure 3. 15 : Tracé du taux de couplage $\tau_{c_i}(\omega)$ résultant de l'analyse CD^3 de $G(j\omega)$

Le taux de couplage $\tau_{ci}(\omega)$ n'étant calculé que sur la base des colonnes, l'incertitude (relative) additionnelle non structurée portant sur le terme $G_{11}(j\omega)$ qui en résulterait serait extrêmement grande. L'approche CRONE multi-SISO n'est donc pas adaptée pour synthétiser ce régulateur.

On peut néanmoins remarquer que $G_{12}(j\omega)$ étant ici strictement nul, un facteur d'échelle permettant de considérer la hauteur non pas en mètre mais en micron (par exemple) aurait permis d'augmenter $|G_{11}(j\omega)|$ vis-à-vis de $|G_{21}(j\omega)|$ sans pour autant diminuer $|G_{22}(j\omega)|$ vis-à-vis de $|G_{12}(j\omega)|$. Le taux de couplage $\tau_{ci}(\omega)$ et une synthèse multi-SISO seraient alors devenu raisonnables.

– Synthèse CRONE MIMO du régulateur décentralisée

Le procédé nominal et diagonal choisi est défini par la matrice de transfert

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_1}{(1 + \tau_{11}s)(1 + \tau_{12}s)} & 0 \\ 0 & \frac{K_2 e^{-rs}}{1 + \tau_2 s} \end{bmatrix}, \quad (3.166)$$

avec : $K_1 = 2.7e^{-3}$, $K_2 = 1.52$, $\tau_{11} = 1$, $\tau_{12} = 250$, $\tau_2 = 1/1.5e^{-4}$, $r = 75$.

$G_0(s)$ ne comporte ni zéro et pôle à partie réelle positive ni mode peu amorti. Le retard présent dans $G_{022}(s)$ est incorporé à la fonction de transfert $\beta_{02}(s)$ de la matrice de transfert en boucle ouverte nominale et diagonale $\beta_0(s)$.

Afin que $|S_0 G_0(j\omega)|$ soit nul pour $\omega = 0$, on prend (relation (2.128)) $n_{11} = n_{12} = 1$. Les termes du régulateur seront propres pour (relation 2.122) $n_{h1} = 3$ et $n_{h2} = 1$. Les spécifications sont définies par $M_{r01} = 1.7\text{dB}$, $M_{r02} = 0\text{dB}$, $T_{11u} = 2\text{dB}$, $T_{22u} = 3\text{dB}$, $T_{21u} = 60\text{dB}$ ($1^\circ\text{C}/\text{mm}$), $KS_{11u} = 90\text{dB}$ ($30\%/ \text{mm}$); $KS_{22u} = 30\text{dB}$ ($30\%/^\circ\text{C}$).

Les paramètres définissant les fonctions de transfert en boucle ouverte nominales $\beta_{01}(s)$ et $\beta_{02}(s)$ sont alors optimisés en tenant compte de l'ensemble des modèles $G(s)$ possibles (diagrammes de Bode présentés Figure 3.13). Ils convergent vers $\omega_{r1} = 0,16\text{rad/s}$, $Y_{r1} = 5.2\text{dB}$, $\omega_{h1} = 0.016\text{rad/s}$, $\omega_{h1} = 1.5\text{rad/s}$ et $\omega_{r2} = 0.007\text{rad/s}$, $Y_{r2} = -3\text{dB}$, $\omega_{h2} = 0.005\text{rad/s}$, $\omega_{h1} = 0.02\text{rad/s}$. Les boucles ouvertes équivalentes $\beta_{11}(s)$ et $\beta_{22}(s)$ (définies par 1.95) sont présentées par la Figure 3.16.

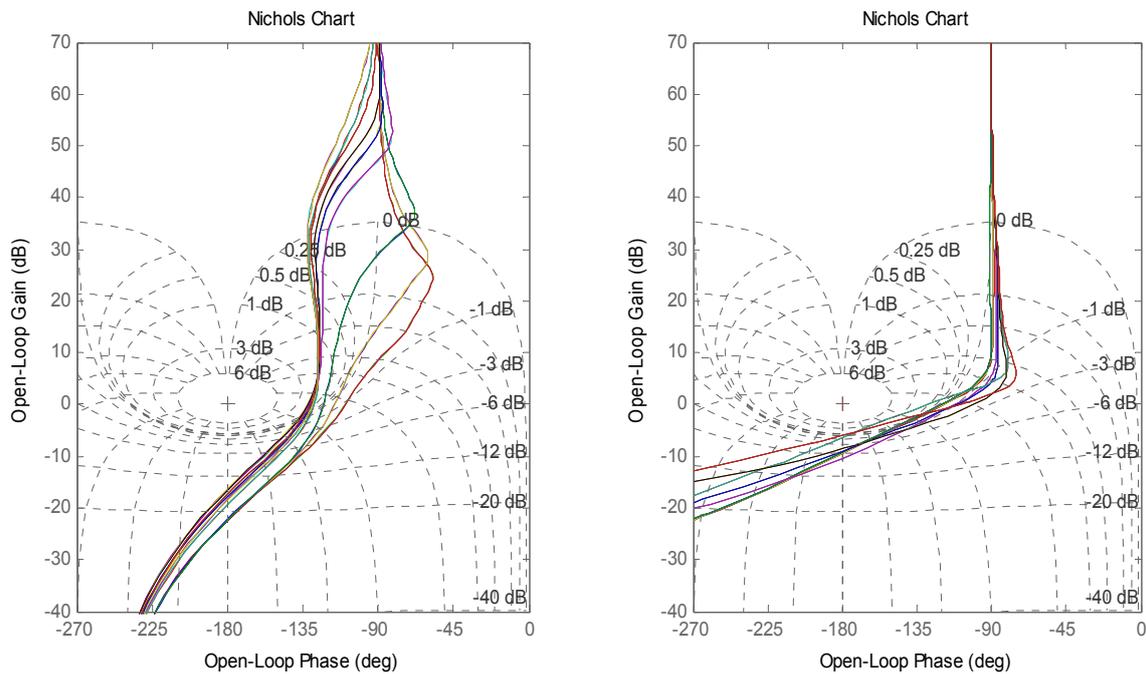


Figure 3. 16 : Ensemble des réponses fréquentielles des boucles ouvertes équivalentes

$$\beta_{11} \text{ et } \beta_{22}$$

On peut noter une bonne robustesse des degrés de stabilité, ce qui est confirmé par la Figure 3. 17 qui présente le gain de la matrice de transfert de la fonction de sensibilité T . La Figure 3. 18 qui présente le gain de la matrice de transfert KS permet de vérifier que les spécifications relatives aux niveaux de commande sont respectées.

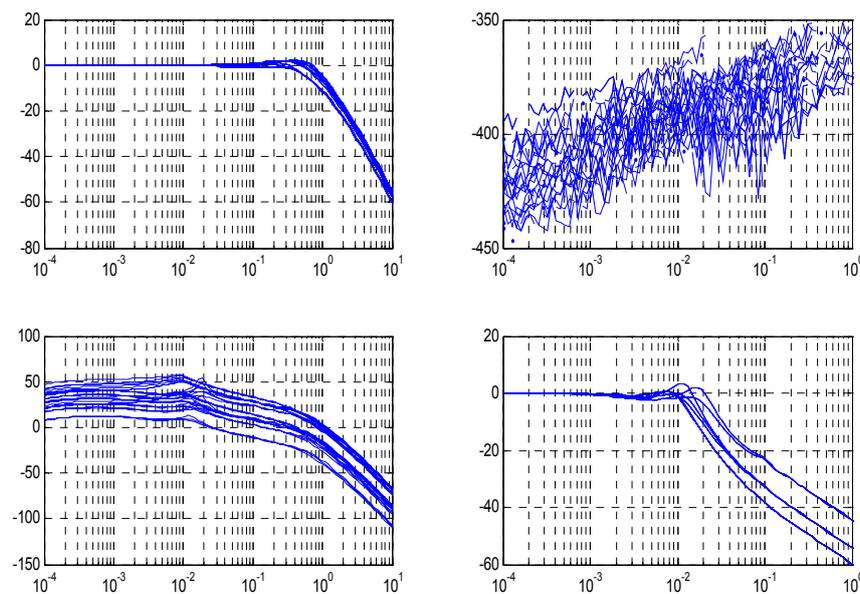


Figure 3. 17 : Ensemble des gains des réponses fréquentielles de la matrice de transfert T

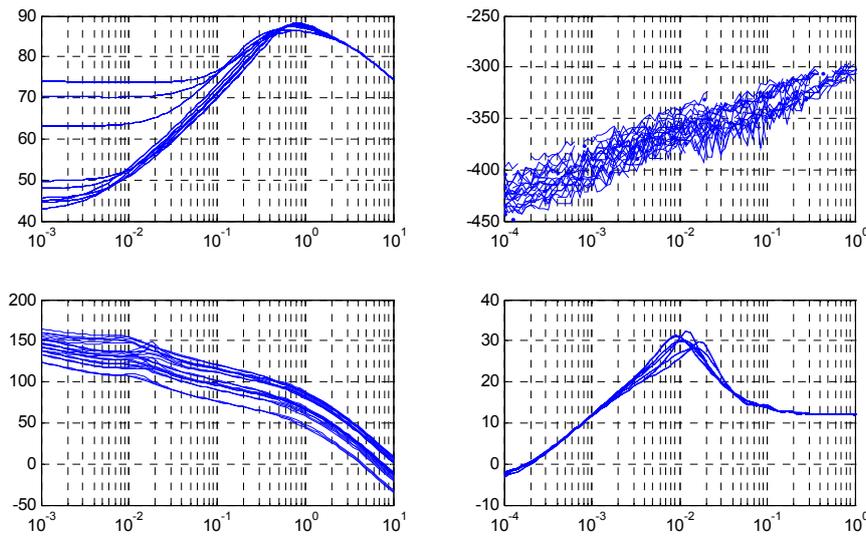


Figure 3. 18 : Ensemble des gains des réponses fréquentielles de la matrice de transfert KS
 Une méthode d'identification fréquentielle permet de déterminer une approximation rationnelle des termes K_{11} et K_{22} du régulateur décentralisé. La Figure 3. 19 présente les réponses fréquentielles obtenues.

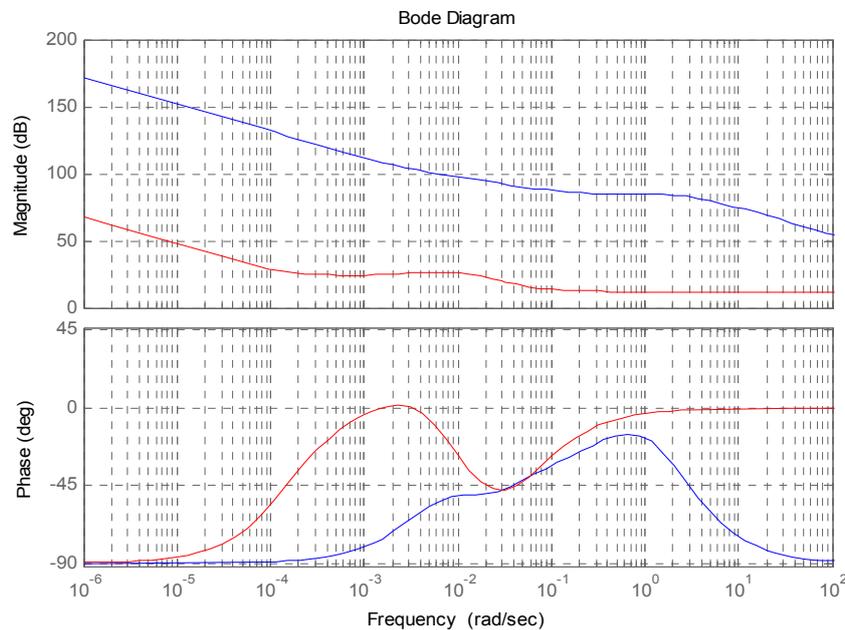


Figure 3. 19 : Réponses fréquentielle de K_{11} (bleu) et de K_{22} (rouge)

Le régulateur obtenu est évalué pour le scénario suivant :

- état initial stabilisé défini par $T(t) = 80^\circ\text{C}$, $h(t) = \{5\text{cm}, 13\text{cm}, 20 \text{ cm}\}$ et $\alpha(t) = \{5\text{e-}5, 1.2\text{e-}4, 2\text{e-}4\}$ suivant les capacités du système, une section de fuite importante n'étant pas acceptable quand la hauteur l'est aussi

- augmentation de 5°C de $T_{\text{ref}}(t)$ à $t = 2000\text{s}$
- modification de 2cm (limitée à 1mm/s) de $h_{\text{ref}}(t)$ à $t = 4000\text{s}$
- modification de $\alpha(t)$ à $t = 6000\text{s}$

Les Figure 3. 20 et 3. 21 présentent respectivement les variations de $T(t)$ et de $U_2(t)$. Elles montrent la robustesse du suivi de consigne et la désensibilisation (découplage) de $T(t)$ vis-à-vis des variations de $h(t)$ pour l'ensemble des $\alpha(t)$ possibles.

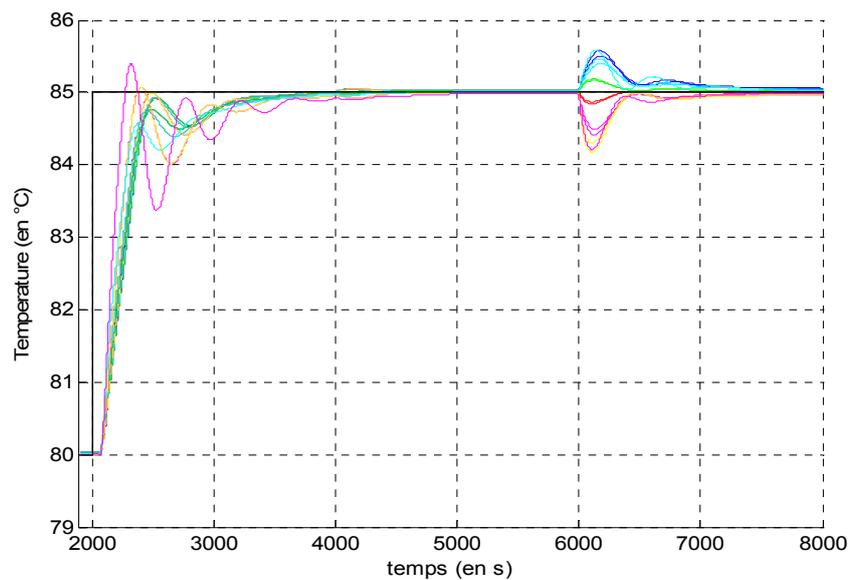


Figure 3. 20 : Evolutions de $T(t)$

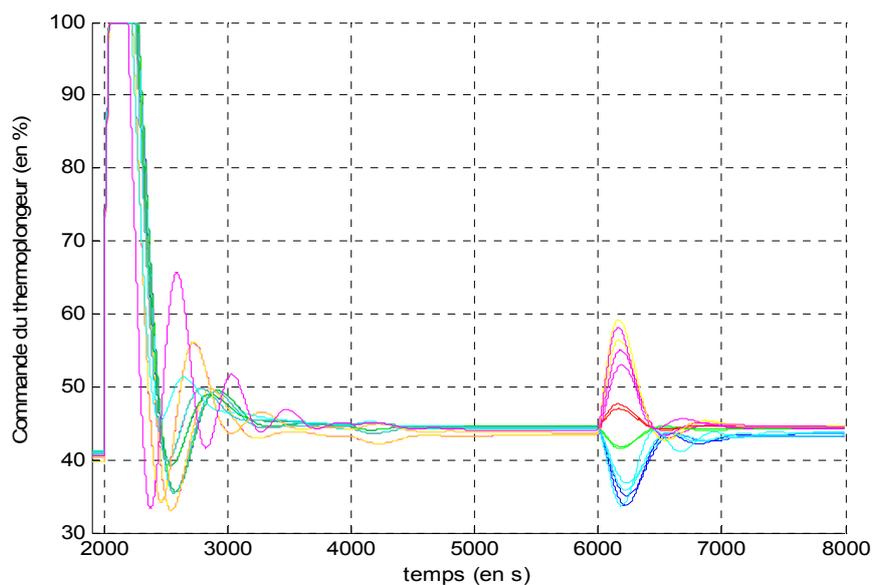


Figure 3. 21 : Evolutions de $U_2(t)$

Les Figure 3. 22 et 3. 23 présentent respectivement les variations de $h(t)$ lors des variations de consigne et de fuite. La Figure 3. 22 montre la robustesse du suivi de la consigne de hauteur. La Figure 3. 23 montre le rejet de l'effet de la perturbation $\alpha(t)$.

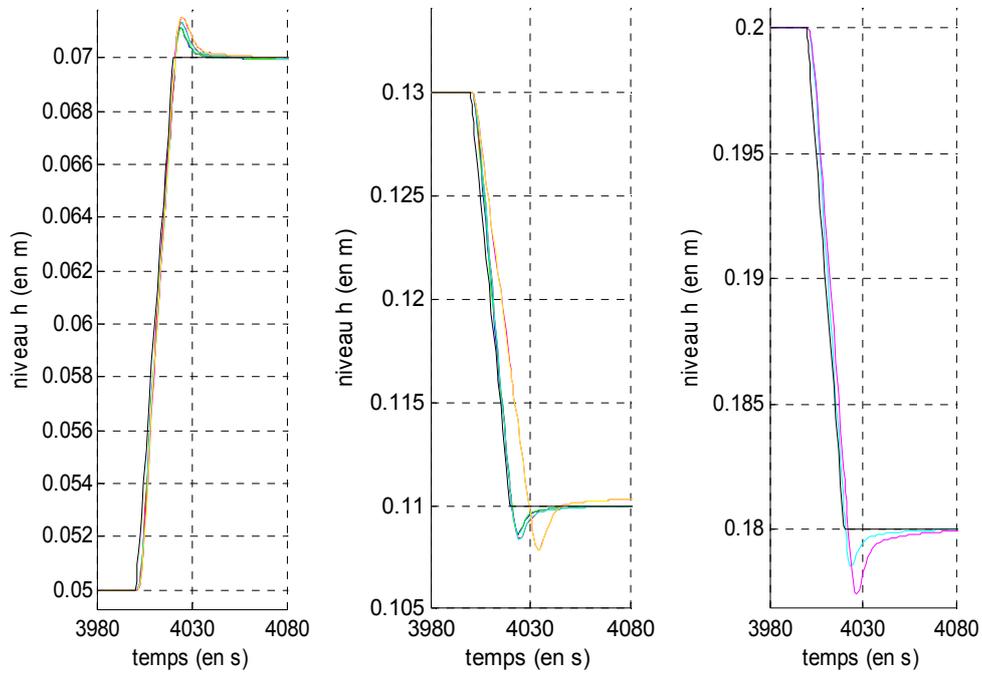


Figure 3. 22 : Evolutions de $h(t)$ lors des modifications de consigne

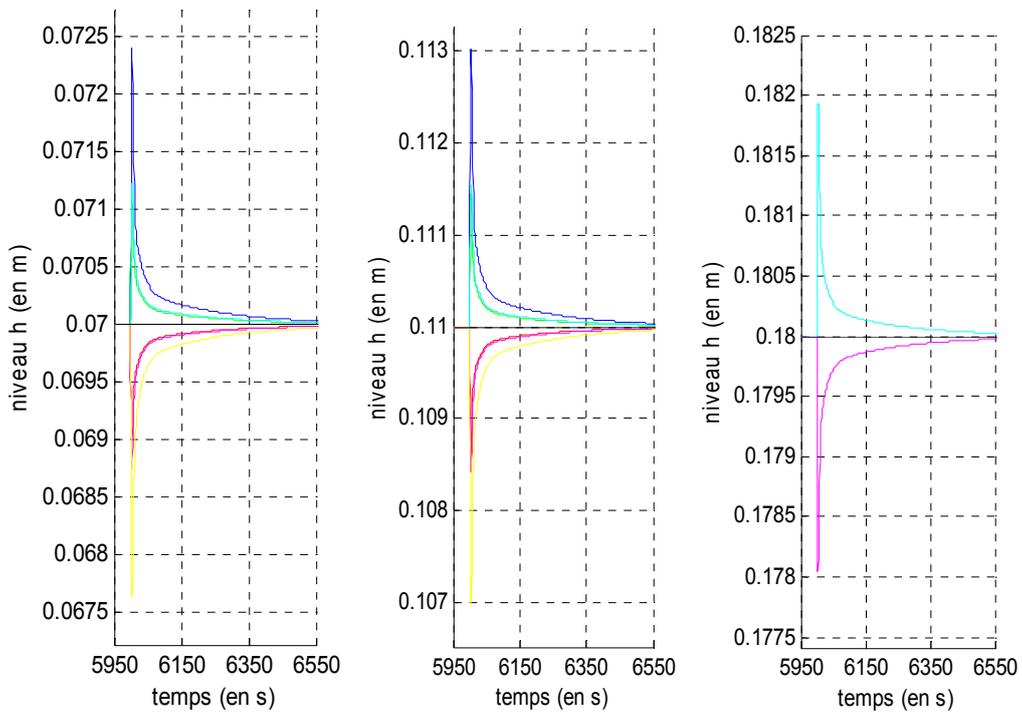


Figure 3. 23 : Evolutions de $h(t)$ lors des modifications de fuite

La Figure 3. 24 présente l'entrée de commande $U_1(t)$ correspondante.

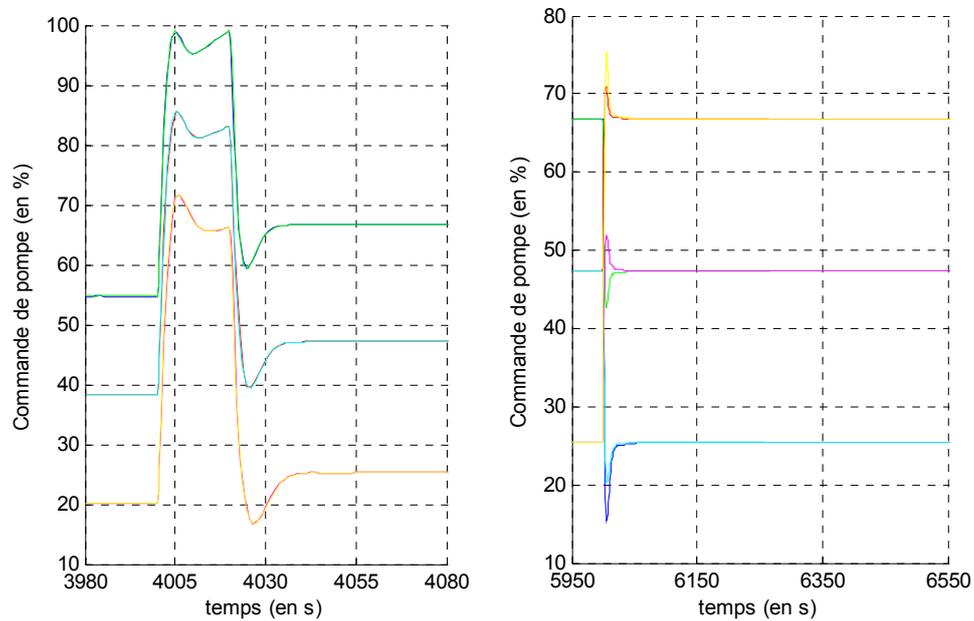


Figure 3. 24 : Evolutions de $U_1(t)$

3.6.5. Application à un système multivariable non-carré

Le système modélisant la cuve de mélange de trois produits chimiques déjà étudiée au paragraphe 3.5 est repris ici :

$$Y(s) = G(s)X(s), \quad (3. 167)$$

avec:

$$- \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_3 s} \\ \frac{3}{10s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{-3}{10s+1} e^{-\theta_2 s} & \frac{5}{10s+1} e^{-\theta_3 s} \end{bmatrix} \quad (3. 168)$$

$$- \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta_3 \leq 0.53 \quad (3. 169)$$

Le procédé nominal correspond à $\theta_1=2$, $\theta_2=1$ et $\theta_3=0.5$. Une analyse BRG [Seshagiri, 2006] du procédé met en évidence le couplage de la sortie h avec les entrées F_1 et F_2 et la deuxième sortie c avec l'entrée F_3 (Figure 3. 25).

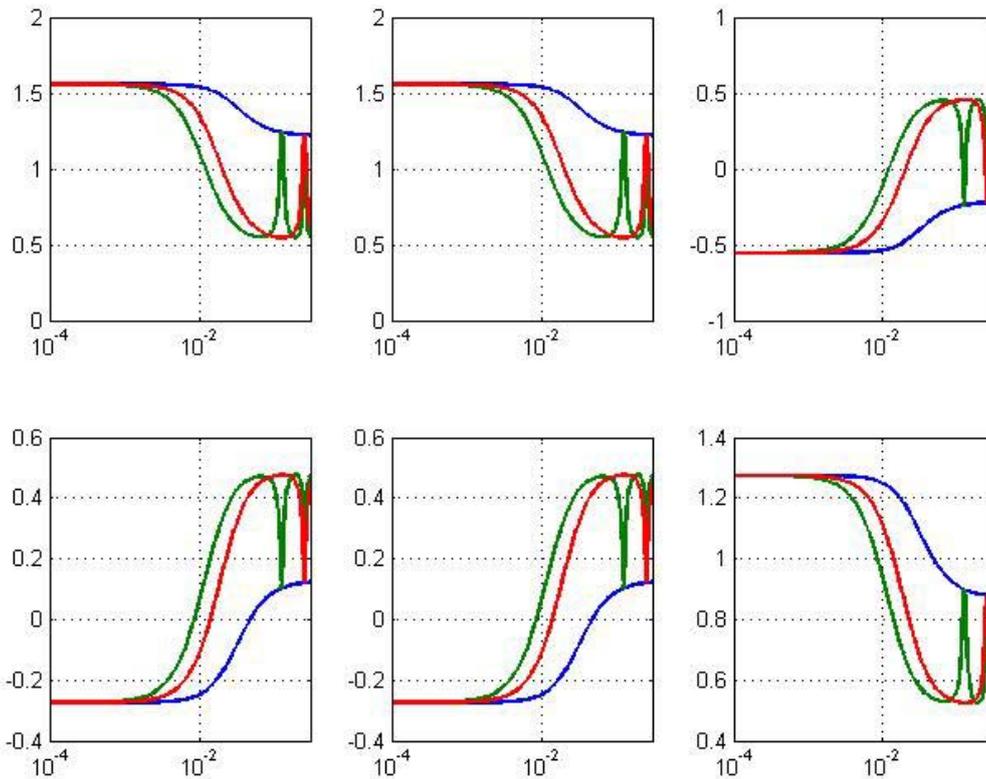


Figure 3. 25 : Analyse BRG du système

Le procédé nominal utilisé pour pré-paramétrer la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire est alors :

$$G'_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_1 s} & \frac{4}{20s+1} e^{-\theta_2 s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{10s+1} e^{-\theta_3 s} \end{bmatrix} \quad (3. 170)$$

a. Recherche du retard

La matrice pseudo-inverse de la matrice de transfert nominale est définie par :

$$G'^{\dagger}_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{20s+1}{8} e^{\theta_1 s} & 0 \\ \frac{20s+1}{8} e^{\theta_2 s} & 0 \\ 0 & \frac{10s+1}{5} e^{\theta_3 s} \end{bmatrix}. \quad (3. 171)$$

La méthodologie proposée dans ce chapitre est alors appliquée:

$$- \alpha_{q_1} = 0, \quad (3.172)$$

$$- \tau\left(\left[G_0^H \left[Q^{ji}(s)\right]_{11}\right]\right) = -\theta_1 = -2 \quad (3.173)$$

$$- \tau\left(\left[G_0^H \left[Q^{ji}(s)\right]_{21}\right]\right) = -\theta_2 = -1 \quad (3.174)$$

$$- \tau\left(\left[G_0^H \left[Q^{ji}(s)\right]_{32}\right]\right) = -\theta_3 = -0.5 \quad (3.175)$$

Par conséquent :

$$\tau_1 = -2 \text{ et } \tau_2 = -0.5 \quad (3.176)$$

Finallement :

$$\tau(\beta_{0_1}) \geq \alpha_{q_1} - \tau_1 = 2, \quad (3.177)$$

et
$$\tau(\beta_{0_2}) \geq \alpha_{q_1} - \tau_2 = 0.5. \quad (3.178)$$

b. Specifications

Pour tous les états paramétriques, les spécifications suivantes doivent être satisfaites :

- erreur en régime permanent nulle pour les deux sorties,
- un temps de montée le plus petit possible,
- robustesse vis à vis des perturbations et des variations paramétriques.

En considérant ces spécifications certains paramètres de la matrice de boucle ouverte fractionnaire peuvent être initialisés. Ainsi, compte tenu du degré relatif maximum de la matrice G'_0 † égal à 1 et de l'ensemble des éléments à inclure dans chaque fonction de transfert de la matrice en boucle ouverte, n_h doit être plus grand ou égal à 2 quelle que soit la boucle. Une erreur nulle en régime permanent nécessite un ordre n_l égal à 1.

c. Optimisation

Les valeurs optimales des paramètres sont : $\omega_{r1} = 0.25rad/s$, $\omega_{l1} = 0.03rad/s$, $\omega_{h1} = 31rad/s$, $\|\beta_{0_1}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 0 \text{ dB}$, $a_1 = 0.95$, $b_1 = 0.13$ et $\omega_{r2} = 0.25rad/s$, $\omega_{l2} = 0.025rad/s$, $\omega_{h2} = 1.7rad/s$, $\|\beta_{0_2}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 2 \text{ dB}$, $a_2 = 1.10$, $b_2 = -0.44$.

Figure 3. 26 montre le tracé des boucles ouvertes équivalentes.

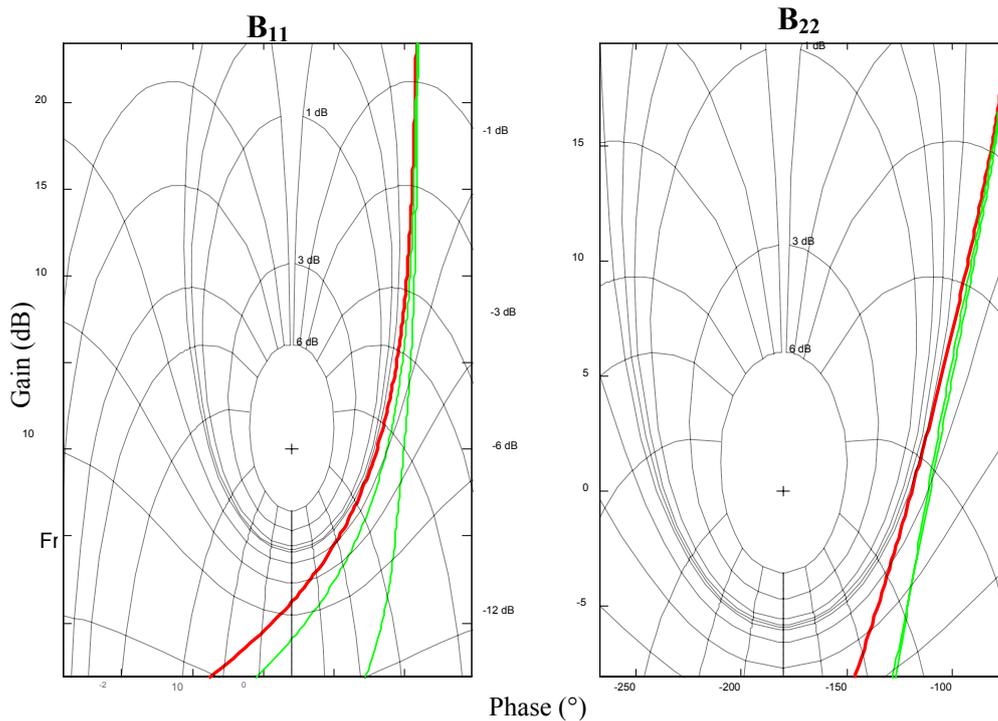


Figure 3. 26: Boucles ouvertes fractionnaires (—) et boucles ouvertes équivalentes (---)

d. Resultats

Le régulateur est évalué en simulation. La stratégie d'évaluation est la suivante :

- les entrées du système bouclé sont des échelons imposés aux temps $t=10s$ pour $y_{1des}=70$ et $t=50s$ pour $y_{2des}=50$,
- les retards varient dans les intervalles définis par les relations (3. 123) à (3. 125).

Les résultats de simulation sont comparés aux lois de commandes IMC et CRONE centralisée sur la Figure 3. 27 pour le procédé nominal et Figure 3. 28 pour l'ensemble des états paramétriques considérés. Les paramètres incertains sont les retards purs: pour le premier état paramétrique considéré du procédé on a fixé $\theta_1=0.5$, $\theta_2=0.5$ and $\theta_3=0.5$ et pour le second $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$. Toutes les spécifications sont satisfaites, cependant on peut voir que la loi de commande décentralisée réduit le caractère découplant de la loi de commande CRONE (Figure 3. 28). Malgré tout les performances de cette dernière restent supérieures aux performances de la loi de commande IMC [Loh et al, 1997] en termes de rapidité et de rejet de perturbation.

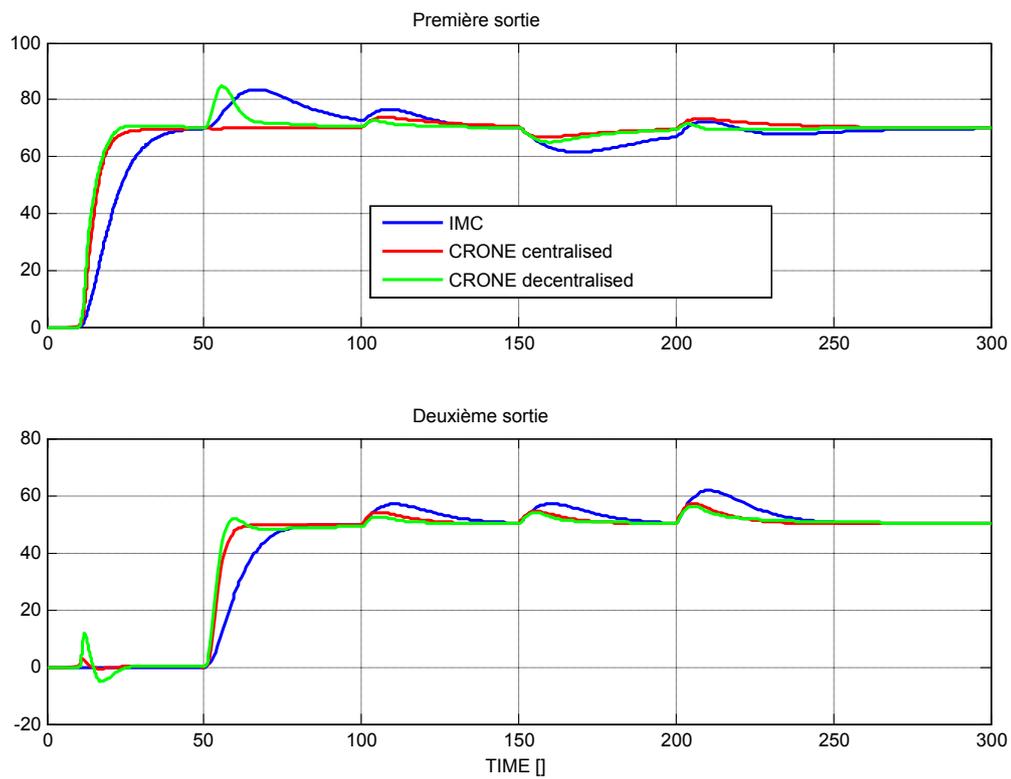


Figure 3. 27 : Performances du bouclage pour le procédé nominal: (—) régulateur IMC, (—) régulateur CRONE centralisé et (—) régulateur CRONE décentralisé

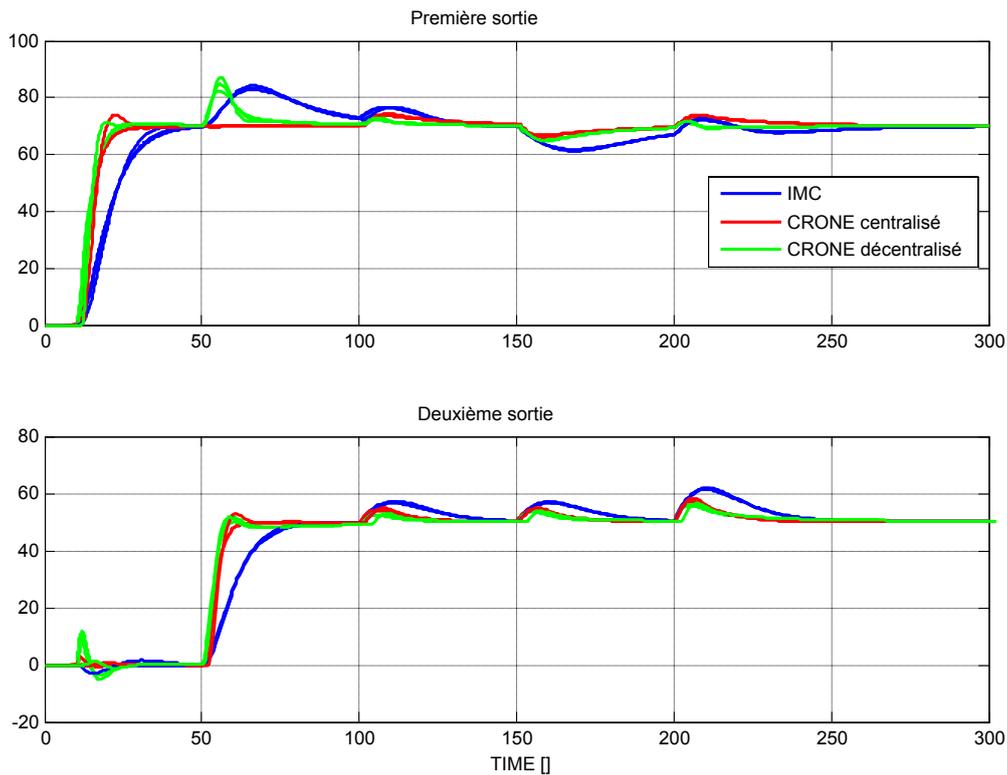


Figure 3. 28 : Performance du bouclage pour tous les états paramétriques considérés

3.7. Conclusion

La commande robuste d'ordre non-entier (CRONE) est ici étendue aux systèmes multivariables non-carrés et retardés. La méthodologie proposée est basée sur la préparamétrisation non-entière complexe de la matrice de boucle ouverte nominale. Cette matrice est choisie diagonale pour le nominal, une optimisation de ses éléments permet d'assurer le découplage des sorties pour l'ensemble des procédés reparamétrés et donc d'obtenir la boucle ouverte fractionnaire idéale, $\beta_0(s)$. Le régulateur entier défini à partir du produit $G_0^\dagger(s)\beta_0(s)$, où $G_0^\dagger(s)$ est l'inverse généralisé de $G_0(s)$, est obtenu par identification fréquentielle. Dans notre cadre d'étude, l'inverse généralisée de $G_0(s)$ possède des termes de type retard qui si ils n'étaient pas pris en compte entraîneraient l'instabilité et la non réalisabilité du régulateur. Il est donc nécessaire dès la préparamétrisation de la boucle ouverte d'intégrer certains éléments de $G_0(s)$ et $G_0^\dagger(s)$ de manière à rendre le régulateur stable et réalisable.

Ce chapitre a aussi présenté une méthodologie de synthèse de régulateur robuste se positionnant entre la méthodologie de commande CRONE multi-SISO et la commande CRONE multivariable. Le plus de cette méthodologie est d'allier simplicité et champ d'application étendu. Fondé sur une synthèse multivariable, le procédé nominal y est arbitrairement choisi diagonal afin de rendre le régulateur décentralisé. Des analyses RGA, BRG, SVD et CD^3 sont utilisées afin de guider le concepteur de la loi de commande dans ses choix de structure de régulateur et de méthodologie de synthèse.

Chapitre 4

Commande CRONE multivariable appliquée au contrôle moteur

Sommaire

4.1.	Introduction.....	188
4.2.	Moteur à allumage commandé.....	190
4.2.1.	Principe de fonctionnement.....	190
4.2.2.	Les enjeux	194
4.2.3.	La suralimentation.....	200
4.3.	Commande CRONE d'un moteur à allumage commandé	206
4.3.1.	Identification et analyse du système.....	211
4.3.2.	Commande du système.....	218
4.3.3.	Validation de la loi de commande sur simulateur et banc d'essai	225
4.4.	Moteur Diesel	232
4.4.1.	Principe de fonctionnement.....	232
4.4.2.	Les enjeux	234
4.4.3.	La recirculation des gaz brulés.....	235
4.5.	Commande CRONE d'un moteur Diesel	240
4.5.1.	Identification et analyse du système.....	242
4.5.2.	Calcul de la loi de commande	253
4.6.	Conclusion	261

4.1. Introduction

Le système permettant la traction d'un véhicule automobile peut se décomposer en trois sous groupes : le groupe gestionnaire véhicule, le groupe motopropulseur (GMP) et le groupe gestionnaire moteur [Corde, 1996, Peron, 2001, Guzzella et Onder, 2004]. Chacun de ces groupes (Figure 4.1) a ses spécifications et ses objectifs :

- le groupe gestionnaire véhicule spécifie le comportement global du véhicule (stratégie de conduite, relation entre les différents éléments de commande),
- le groupe motopropulseur génère le couple (effectif) nécessaire et en gère la transmission (boîte de vitesse, embrayage ou différentiel),
- le groupe gestionnaire moteur gère les différents actionneurs du moteur (papillon, turbo compresseurs...) pour assurer le couple (indiqué) requis par le groupe motopropulseur et satisfaire le compromis consommation-pollution-performances.

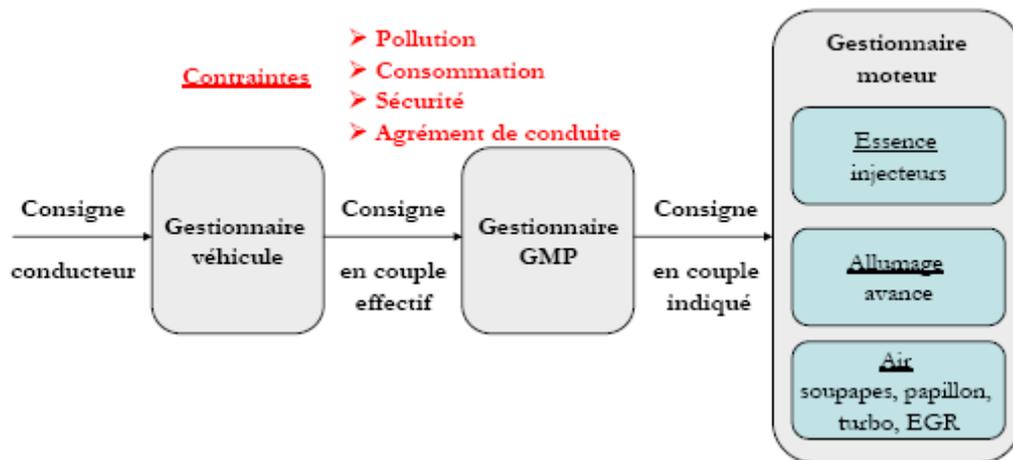


Figure 4. 1 : Structure du véhicule

Le groupe gestionnaire moteur permet d'assurer le fonctionnement nominal du moteur sous les contraintes de dimensionnement, de gestion du compromis consommation-pollution-performances et de l'agrément de conduite. Ce groupe se scinde lui-même en trois sous parties qui sont : le contrôle de la boucle d'air ; le contrôle cylindre à cylindre ; le contrôle de la boucle de carburant.

Le contrôle de la boucle d'air consiste à contrôler la masse d'air aspirée dans les cylindres, à piloter la fraction de gaz brûlés résiduels dans le cylindre et à gérer le balayage d'air de l'admission vers l'échappement. Cette masse d'air aspirée permet de fixer le couple indiqué. Il

s'agit d'un système multivariable complexe (comportant des dynamiques très différentes) non linéaire et à non minimum de phase. Une solution à ce problème de commande sera proposée pour les moteurs à essence et Diesel.

Le contrôle cylindre à cylindre permet de s'assurer que tous les cylindres ont la même combustion. Un petit déséquilibre du comportement des cylindres peut en effet engendrer une mauvaise combustion et donc une augmentation de la consommation et/ou une augmentation des émissions de polluants [Chauvin et *al*, 2006].

Le contrôle de la boucle de carburant permet de gérer la combustion c'est-à-dire la richesse du mélange, le niveau de bruit généré par la combustion ainsi que les émissions de polluants.

Résoudre un problème de contrôle moteur consistera donc à résoudre ces trois problèmes sous certaines contraintes (dynamique, consommation, pollution, performances,...). La contrainte principale est liée à la dynamique des différentes boucles de contrôle ; par exemple la dynamique de la boucle de carburant est dix fois plus rapide à la dynamique de la boucle d'air ce qui pose des problèmes lors des variations brutales du couple demandé [Chauvin et *al*, 2006].

Ce chapitre se focalise sur le contrôle de la boucle d'air pour les moteurs à essence et Diesel en appliquant des méthodes développées dans les chapitres 2 et 3. Le contrôle du système d'air « traditionnel » repose sur des actions en boucle ouverte (cartographie statique, boucles imbriquées) ou sur des ensembles de boucles fermées monovariées. L'axe de recherche que nous allons approfondir est la commande des moteurs à combustion interne par une commande multivariable robuste à base de modèle. Pour ce faire, nous utiliserons un modèle boîte noire du système afin de concevoir le régulateur robuste qui sera ensuite testé sur simulateur, puis sur banc d'essais pour le moteur à essence.

Nous serons guidés par un objectif simultané de satisfaction de performances et de réduction des coûts, de développement de la loi de commande, de sa programmation et de son implémentation (ressources électronique et informatique de type processeurs, convertisseurs, mémoires, etc.) et pour finir, du coût de sa validation et si nécessaire de sa calibration.

Une solution est estimée totalement portable si une approche développée sur un système peut être réutilisée avec succès pour un autre système. La première partie de ce chapitre sera consacrée à la commande d'un moteur à allumage commandé. Une fois un schéma de commande, une loi de commande et une méthode de conception du régulateur trouvés et validés par essais sur simulateur et banc moteur, nous testerons (deuxième partie de ce chapitre) la portabilité de cette méthodologie en l'appliquant sur un moteur Diesel. La

problématique de commande des moteurs à allumage commandé et Diesel étant malgré tout différentes, notamment en termes d'actionneurs et d'objectif de commande, quelques modifications seront nécessaires, le but étant tout de même de standardiser au maximum la conception de loi de commande pour les moteurs à combustion interne.

4.2. Moteur à allumage commandé

4.2.1. Principe de fonctionnement

Tout comme le moteur Diesel, le moteur à allumage commandé fait partie de la classe des moteurs qui produisent du travail par action directe sur un piston de la pression provenant de l'inflammation d'un mélange combustible. La principale différence entre ces deux moteurs est la cause de l'inflammation. Le moteur à allumage commandé est nommé ainsi car l'inflammation sera produite au moyen d'une étincelle dans le mélange air/vapeur de carburant sous pression alors que pour le moteur Diesel l'inflammation du mélange se fera lorsque la compression sera suffisante, on parlera d'auto-inflammation et non plus d'inflammation. L'alimentation des moteurs à allumage commandé nécessite un carburant de bonne volatilité pour assurer l'homogénéité du mélange air/vapeur de carburant et donc assurer un bon allumage (exemple essence). Ce mélange est obtenu par l'injection de carburant sous haute pression soit dans le cylindre (injection directe) soit en amont (mélange préalable). La quantité d'air admise est modulée par l'ensemble des actionneurs du système d'air du moteur. Ces actionneurs sont par exemple un volet situé dans la tubulure d'admission (le «papillon»), les ailettes d'un turbocompresseur à géométrie variable, la valve de décharge d'un turbocompresseur ou encore le volet situé dans la tubulure de recirculation des gaz brûlés.

Pour une bonne combustion, le rapport idéal entre la quantité d'air et d'essence d'un mélange est de 14,7. Appelé rapport stœchiométrique, il correspond donc à 14,7 grammes d'air pour 1 gramme d'essence. Le rapport entre le rapport réel et le rapport idéal est appelé **rapport d'air** λ , il est de 1 pour une combustion stœchiométrique. Un mélange ayant un λ inférieur à 1 est riche en carburant. L'inverse de λ , appelé **richesse**, descend à 0,8 dans certains cas et peut monter à plus de 3 en mode stratifié.

Le **remplissage en air** est le rapport entre la masse d'air réellement présente dans le cylindre et la masse idéale qu'il contiendrait dans des conditions standard (1 atmosphère (1bar) à 20°).

Ce rapport permet de caractériser le niveau de charge du moteur. En effet le couple délivré par le moteur est directement proportionnel au remplissage en air. Si les conditions de références de la masse d'air à l'intérieur du cylindre sont celles régnant à l'admission, ce rapport devient alors le **rendement volumétrique**. Le remplissage en air peut varier de 0.2 (faibles charges) à 1.0 (papillon pleinement ouvert) pour des moteurs non suralimentés et peut aller jusqu'à 3 ou 4 pour des moteurs de compétition suralimentés.

Le carburant vaporisé à très haute pression permet de créer un mélange air/carburant gazeux, homogène et combustible ; l'allumage peut être alors déclenché en provoquant une élévation locale de la température, créant ainsi un noyau enflammé, puis un front de flamme se propageant dans le volume de la chambre. Le moment d'allumage est donc contrôlable.

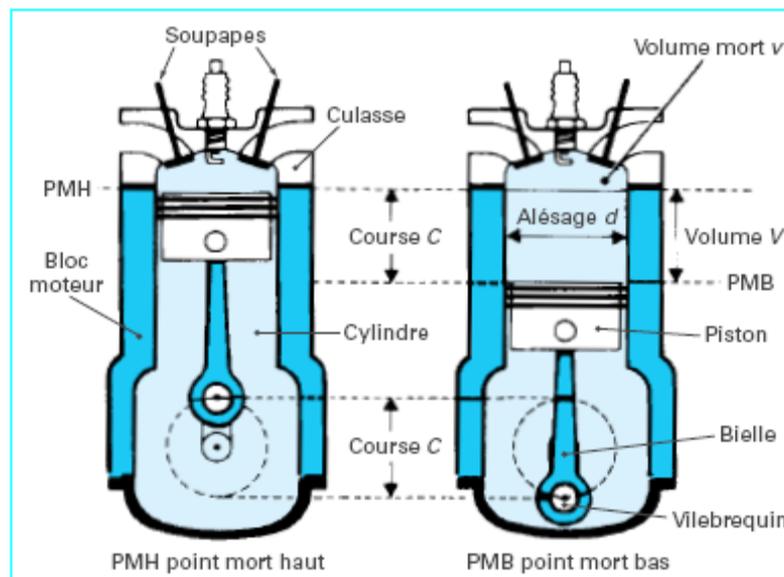


Figure 4. 2 : Course du piston à l'intérieur du cylindre

Les deux limites extrêmes du mouvement du piston sont appelées respectivement point mort haut (PMH) et point mort bas (PMB). Le volume balayé entre ces deux points

$$V = C\pi \frac{d^2}{4} \quad (4. 1)$$

constitue la **cylindrée unitaire**, si d est le diamètre du cylindre (ou alésage) et C la course du piston.

La Figure 4. 3 donne la représentation théorique du diagramme de Clapeyron du cycle de Beau de Rochas qui correspond au fonctionnement d'un moteur à 4 temps [Colin, 2006].

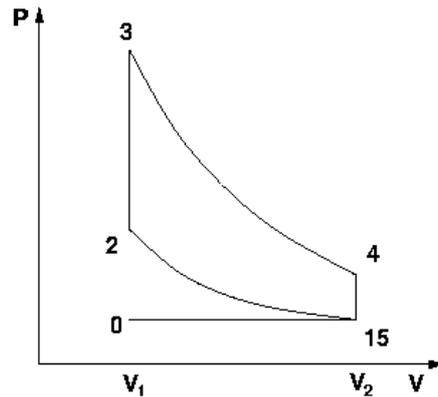


Figure 4. 3 : Diagramme de Clapeyron du cycle de Beau de Rochas

Ce cycle se déroule pendant 720° Vilebrequin (θ), c'est-à-dire pendant deux tours et comporte 4 phases [Heywood, 1988].

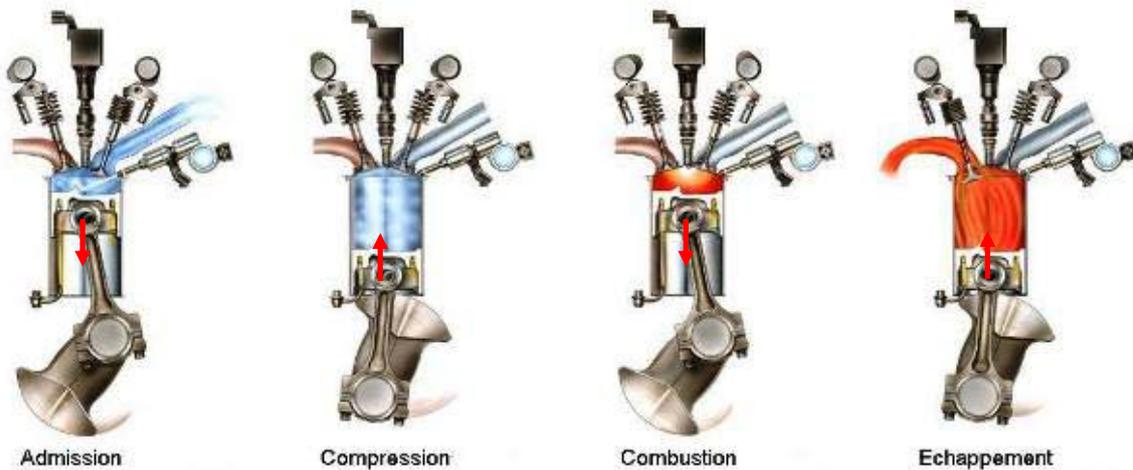


Figure 4. 4 : Cycle 4-temps d'un moteur moderne à injection directe d'essence avec deux arbres à cames en tête et gicleurs d'huile de refroidissement des pistons

1^{er} temps : Admission ($0^\circ V < \theta < 180^\circ V$ et de 0 à 1 sur le diagramme)

L'abaissement du piston du PMH au PMB et l'ouverture de la soupape d'admission permettent l'introduction dans le cylindre du mélange air carburant à la pression ambiante et à la température ambiante. Les pertes de charge sur le circuit d'admission (papillon, soupapes...) empêchent le remplissage théorique des cylindres de se réaliser complètement.

2^{ème} temps : Compression ($180^\circ V < \theta < 360^\circ V$ et de 1 à 2 sur le diagramme)

La fermeture de la soupape d'admission et la remontée du piston du PMB au PMH comprime la masse gazeuse enfermée de manière isentropique. L'allumage intervient quelques instants

(10 à 40 °V) avant le PMH afin de prendre en compte le délai nécessaire au développement de la combustion.

3^{ème} temps : Combustion/ Détente ($360^\circ V < \theta < 540^\circ V$ et de 2 à 4 sur le diagramme)

Après l'explosion la température et la pression sont élevées dans la chambre de combustion atteignant des valeurs maximales une dizaine de degrés après le PMH. Elles dépendent du taux de compression et de la nature du combustible. De 2000 à 3000 Kelvin pour la température et 90 bar à pleine charge pour la pression. Après l'explosion, se produit la détente isentropique (correspond aux étapes de 3 à 4 sur le diagramme de Clapeyron et au **temps de travail du cycle**). Le piston descend vers le PMB, la pression et la température des gaz décroissent en même temps que du travail est fourni au piston.

4^{ème} temps : Echappement ($540^\circ V < \theta < 720^\circ V$ et de 4 à 0 en passant par 5 sur le diagramme)

En 4, la soupape d'échappement est ouverte. Les gaz brûlés subissent une détente de l'étape 4 à 5 en principe isochore.

Dans ce cycle, les transformations 5 vers 0 et 0 vers 1 étant de sens inverses, seul est à prendre en compte le contour 12345. Le cycle réel d'un moteur 4 temps (Figure 4. 5) diffère notablement du diagramme théorique de la Figure 4. 3 : le trajet 0 vers 1 ou 5 est en réalité une boucle et il n'existe pas de points anguleux dans la boucle 12345.

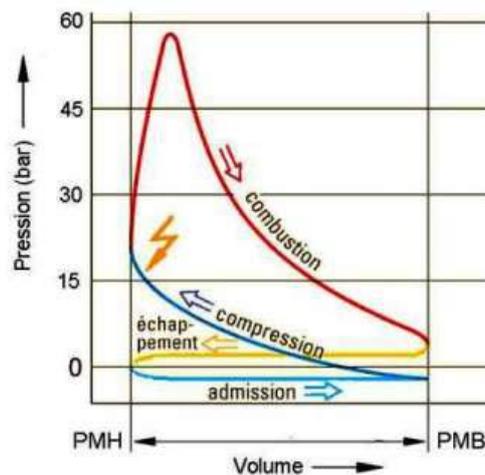


Figure 4. 5 : Diagramme typique des pressions et volumes dans le cylindre d'un moteur à essence

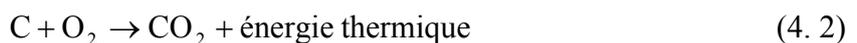
4.2.2. Les enjeux

Les enjeux de la recherche de nouvelles lois de commande pour les moteurs à combustion interne sont la minimisation des émissions de polluants et la diminution de la consommation tout en conservant de bonnes performances du moteur. Afin de faire face à ses enjeux, il convient de comprendre les phénomènes qui permettent d'agir sur ces derniers.

Les différents polluants sont créés lors de la combustion du mélange air/carburant. Etant donné que ce mélange ne dispose que d'un temps très court pour la combustion (elle s'achève peu après le PMH), les molécules de carburant (hydrocarbures) et d'oxygène du mélange comprimé doivent être proches les unes des autres. L'oxygène nécessaire à la combustion est prélevé dans l'air d'admission. Dans la mesure où l'air ne contient qu'environ 20% d'oxygène, une quantité d'air relativement importante doit être mélangée au carburant.

Durant la combustion, l'oxygène en contact avec le carbone contenu dans le carburant se transforme en dioxyde de carbone (CO_2) et l'hydrogène se lie à l'oxygène pour former de la vapeur d'eau (H_2O). Le dioxyde de carbone en grandes quantités provoque des effets changeant le climat. L'azote contenu dans l'air ne prend pas une part prépondérante à la combustion. Toutefois, des oxydes d'azote ou oxydes nitriques (NO_x) toxiques se forment lors de combustion en haute pression et température.

La combustion est parfaite si l'énergie chimique du carburant se transforme en énergie thermique :



Par exemple si, pour 1g d'essence, on ne dispose que de 13g d'air, le mélange air/carburant étant trop riche et la quantité d'oxygène trop faible, une partie du carbone se transforme en monoxyde de carbone CO (toxique).

En revanche, la combustion est imparfaite si une partie de l'énergie chimique du carburant se transforme en chaleur :



Par exemple si, pour 1g d'essence, on dispose de 16g d'air, le mélange air/carburant est trop pauvre. Compte tenu de la quantité d'air disponible, le carburant est totalement évaporé mais en quantité insuffisante, l'intérieur du cylindre est alors moins refroidi et le moteur risque de surchauffer.

La combustion imparfaite du carburant dans le moteur provoque l'émission des gaz d'échappement suivants :

- monoxyde de carbone, CO,
- hydrocarbure non brûlés, HC,
- oxydes d'azote, NO_x,
- composés du plomb,
- matières solides.

La proportion de chaque polluant dans les gaz d'échappement est fortement influencée par le rapport d'air λ . Lorsque λ est compris entre 0.95 et 0.90, c'est-à-dire (un mélange riche avec 5% à 10% de manque d'air) le moteur atteint sa plus grande puissance. Cependant le carburant n'étant pas entièrement brûlé, la consommation spécifique de carburant augmente et les composants nuisibles des gaz d'échappement tels que monoxyde de carbone et hydrocarbures imbrûlés augmentent. A l'inverse lorsque que λ est compris entre 1.05 et 1.1 (mélange pauvre avec 5% à 10% d'excès d'air) le moteur atteint sa plus faible consommation de carburant et développe sa plus faible puissance. La température de fonctionnement du moteur est plus haute en raison de l'évaporation totale du carburant et donc du refroidissement manquant. Les proportions de monoxyde de carbone et d'hydrocarbure sont faibles, mais la proportion d'oxydes d'azote est plus élevée.

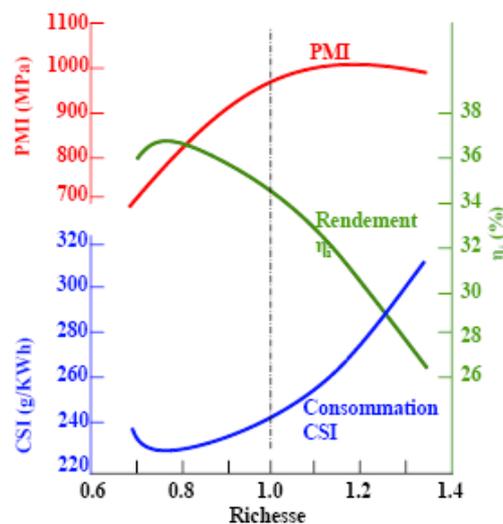


Figure 4. 6 : Variation des grandeurs caractéristiques de la performance du moteur (Puissance Moyenne Indiquée, Consommation Spécifique Indiquée) en fonction de la richesse

Les nouveaux concepts de motorisation essence (hybridation, piles à combustibles,...) impliquent de recourir à des technologies complexes permettant une réduction des polluants.

Cette réduction sera atteinte par une combustion complète du mélange air/carburant et par une réduction de la consommation. Les principales technologies pouvant être utilisées sont :

- la construction appropriée du moteur : optimiser la chambre de combustion et le taux de compression en utilisant des dispositifs de distribution variables mécanique ou électromécanique (modification de la durée d'ouverture et la course des soupapes),
- le choix du système de formation du mélange : formation du mélange externe ou interne au cylindre, mélange homogène et/ou charge stratifiée,
- le recyclage d'échappement interne, par chevauchement des soupapes ou externe par un système de recyclage des gaz d'échappement,
- le système de gestion du moteur : allumage cartographique, coupure d'injection en décélération, régulation de la pression de suralimentation, coupure sélective des cylindres ; contrôle de fonctionnement des éléments influençant la pollution par exemple la sonde lambda, le catalyseur...
- la suralimentation avec refroidissement de l'air de suralimentation : augmentation de la puissance volumétrique et en même temps réduction de la température maximale de la chambre de combustion, ce qui permet d'éviter la formation de NO_x .

L'objectif du procédé d'injection directe d'essence en mode stratifié est une amélioration du rendement thermodynamique par la combustion d'un mélange pauvre. Afin de pouvoir allumer ce dernier, une zone à rapport d'air de 1 est créée autour de la bougie (Figure 4. 7). L'étincelle n'a aucune difficulté à amorcer la combustion qui se propage en front de flamme vers la zone de mélange pauvre. Le gain thermodynamique est estimé entre 3 et 6%. Cette technologie ne doit pas être confondue avec la technologie de combustion en mélange pauvre. La combustion homogène en mélange pauvre permet d'augmenter le rendement du moteur et de diminuer sa consommation mais aussi sa puissance. Comme l'injection directe d'essence en mode stratifié, ce mode de combustion génère essentiellement des oxydes d'azote. Pour les réduire, une stratégie de recirculation externe d'échappement (Exhaust Gas Recirculation, EGR) [Heywood, 1988] ou encore de dépollution telle que le piège à NO_x peut être utilisée. Pour le moment, le piège à NO_x étant coûteux, cette technologie n'est pas utilisée [Colin, 2006].

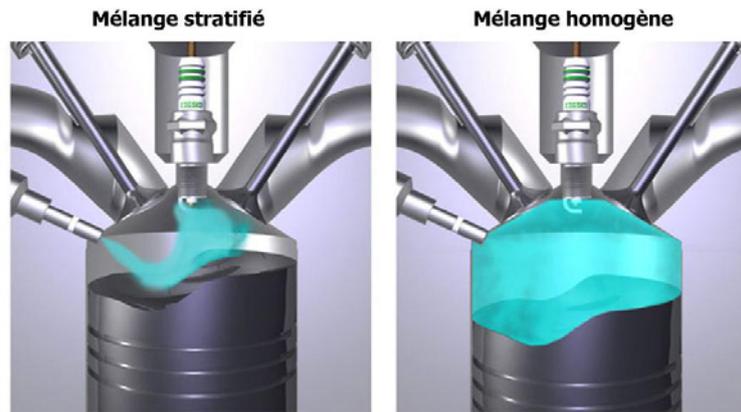


Figure 4. 7 : Comparaison des modes de combustion homogène et stratifiée

La distribution variable permet un meilleur remplissage du cylindre durant une plage de régime importante et donc d'améliorer fortement les performances globales du moteur (consommation, émissions polluantes) :

- puissance accrue,
- développement du couple amélioré à certains régimes moteur,
- réduction des substances polluantes des gaz d'échappement,
- réduction de la consommation de carburant grâce à une meilleure formation du mélange,
- réduction des bruits de moteur.

On distingue les technologies utilisant des variations de phase sur l'arbre à cames :

- les déphaseurs d'arbre à cames à l'admission et/ou à l'échappement, qui décalent de façon identique l'ouverture et la fermeture de la soupape,

et les technologies utilisant une commande des soupapes à géométrie variables :

- les distributions pilotables en phasage (Figure 4. 8(a)), qui décalent indépendamment l'ouverture et la fermeture de la soupape,
- les distributions pilotables en levée (Figure 4. 8(b)), qui permettent de contrôler directement la charge sans papillon d'admission,
- les distributions complètement variables, en levée et en phasage.

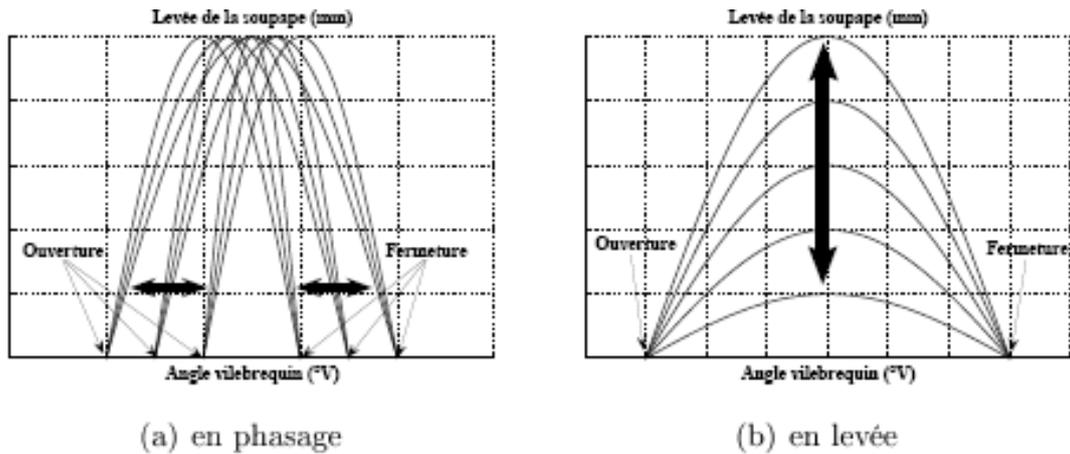


Figure 4. 8 : Illustration des distributions variables pilotables [Colin, 2006]

La puissance et le couple d'un moteur alternatif sont directement liés à la quantité d'air aspiré et mélangé au carburant par unité de temps. Elle pourra donc être augmentée dans d'énormes proportions en alimentant le moteur par de l'air comprimé. C'est le principe de la suralimentation, solution qui a émergée dès la fin du 19^{ème} siècle et dont les premières applications furent pour les véhicules de sport. La suralimentation consiste en l'adjonction d'un compresseur qui densifie l'air d'admission et permet la combustion de plus de carburant dans un moteur donné, afin d'augmenter sa puissance et réduire sa cylindrée, son poids et ses dimensions. La réduction de la cylindrée et du nombre de cylindre connue sous le terme de "downsizing" permet de réduire les pertes par friction et donc de diminuer le pourcentage de puissance perdue en frottement par rapport à la puissance totale du moteur. La pression moyenne effective (PME) et donc le couple et la puissance des moteurs peut être multipliée par 2, 3, voire par 4 et la réserve de couple (différence entre couple maximum et couple au régime nominal) d'un moteur turbosuralimenté peut atteindre plus de 35% au lieu de 7 à 15% pour un moteur atmosphérique (Figure 4. 9 (a)). Les limites seront fixées par les pressions de compressions pour les moteurs à essence (phénomènes d'auto-allumage et de détonation à éviter) et de combustion pour les moteurs Diesel (résistance mécanique des structures du moteur limitée). L'air comprimé est fourni par un compresseur dit de suralimentation et entraîné par une source de puissance quelconque vilebrequin (mécanique), turbine d'échappement (turbocompresseur) ou moteur auxiliaire indépendant.

Le vilebrequin fut la première source de puissance utilisée. Elle fut très vite abandonnée car même si cette solution offrait des temps de réponse quasiment nul, l'encombrement et des pertes mécaniques élevées limitaient le gain en consommation en cycle normalisé. La solution la plus optimale fut développée par Alfred Büchi en 1909 après un brevet en 1905. Il développa le premier turbocompresseur tournant librement et indépendamment du

vilebrequin. L'objectif d'Alfred Büchi était la récupération partielle de l'énergie perdue dans l'échappement soit environ 35% de l'énergie libérée par la combustion. Etant générée par la (ou les) turbine(s) à gaz d'échappement, la puissance absorbée par le compresseur n'est plus soustraite au vilebrequin. Bien que ces turbines soient un obstacle à l'écoulement des gaz brûlés, la contre-pression qui en résulte est plus que compensée par l'augmentation de pression d'admission fournie par le compresseur. D'autre part, cette pression, dite aussi de suralimentation, est simplement autorégulée en fonction de la charge (le terme "pression du turbo" est absurde et inadéquat)(Figure 4. 9 (b)). Prévus par Büchi, les avantages potentiels du turbocompresseur en altitude par rapport à la suralimentation mécanique (compresseur entraîné par le vilebrequin) furent vite reconnus. En effet, le turbocompresseur compense automatiquement la perte de densité de l'air en altitude. La puissance d'un moteur atmosphérique chute de plus de 6% par 500 mètres d'élévation. Cependant, la puissance de la turbine augmente avec l'altitude en raison d'une contre-pression réduite en sortie d'échappement. Les parties rotatives du turbocompresseur tournent donc plus rapidement, fournissant approximativement la même pression à l'admission que celle qui aurait été générée au niveau de la mer bien que la pression atmosphérique soit inférieure. Les premières applications de la suralimentation furent produites avec succès pour les domaines aéronautique, marin et ferroviaire.

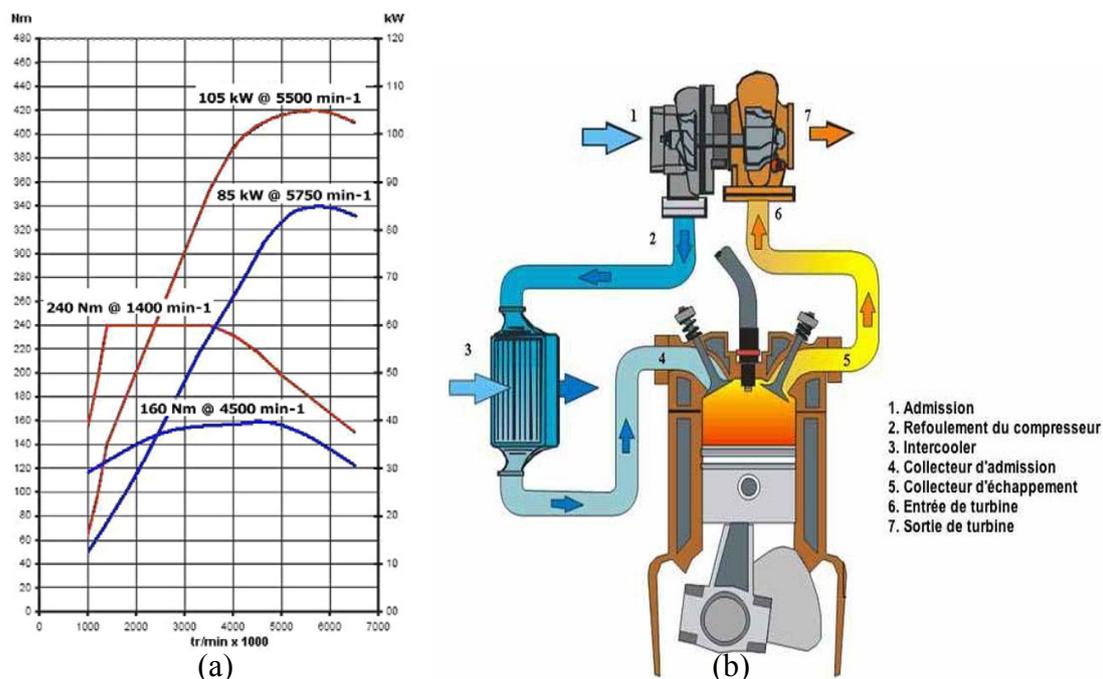


Figure 4. 9 : Schéma du système de suralimentation (a) et évolution du couple et de la puissance d'un moteur avec (rouge) et sans (bleu) suralimentation (b)

4.2.3. La suralimentation

La suralimentation s'imposa très rapidement pour les moteurs Diesel. Il fallut, cependant, attendre les années 60-70 pour voir les premiers moteurs à essence turbo suralimentés (Oldsmobile F85 Jetfire, Chevrolet Corvaire Monza, Ford Cologne Michael May, BMW 2002 Turbo, Porsche 911 Turbo, ...). La problématique à résoudre était la suivante : dans un moteur à essence, des pressions et températures de compression excessives causent cliquetis et détonation, si bien qu'une forte pression de suralimentation nécessite un fort abaissement du rapport volumétrique nuisible à la consommation spécifique. La solution trouvée pour le F85 Jetfire fut d'injecter un mélange eau éthanol dans des proportions égales entre le carburateur et la turbine du compresseur.

Les inconvénients de la suralimentation sont nombreux mais ont, à ce jour, tous une solution plus ou moins coûteuse :

- L'inertie des parties rotatives des turbocompresseurs s'oppose à une élévation instantanée de la pression d'admission lorsque la pédale d'accélérateur est enfoncée (Figure 4. 10 (a)). La solution pour diminuer ce délai consiste à réduire le diamètre des rotors de turbine et roues de compresseur.
- La puissance d'une turbine d'échappement n'est pas linéairement proportionnelle à l'énergie du gaz qui l'entraîne : ainsi, quand le régime du vilebrequin descend en dessous de celui pour lequel la turbine a été optimisée, la puissance de cette turbine chute plus rapidement que le régime du moteur. Ainsi, la pression d'admission s'effondre lorsque le régime du moteur descend en dessous du tiers du régime de puissance maximum c'est-à-dire lorsque le régime moteur descend en dessous du régime nominal. A haut régime sous pleine charge, cette pression de suralimentation peut être excessive, d'où l'utilité d'une soupape de décharge (Wastegate) qui permet de décharger la turbine d'une partie des gaz d'échappement (Figure 4. 10 (b)).
- Le couple à bas régime et frein moteur sont faibles en raison d'une cylindrée réduite.
- Sur les moteurs à essence, le mélange air/essence doit être excessivement riche à pleine charge (rapport λ entre 0,75 et 0,85) pour maintenir la température des gaz d'échappement en dessous des limites acceptables en entrée de turbine (1050°C pour des richesses entre 0,9 et 1). Cette augmentation est

heureusement permise, les émissions polluantes n'étant pas contrôlées durant ces phases de pleine charge.

- La complexité des circuits d'échappement, d'admission est accrue par l'adjonction de circuit de refroidissement ou de compresseurs a double étage.

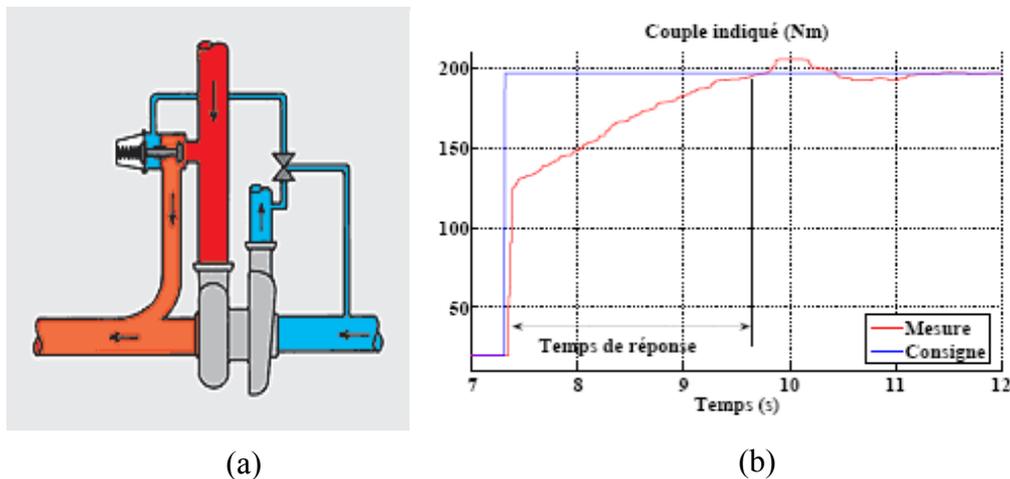


Figure 4. 10 : Soupape de décharge ou « Wastegate » (a) et temps de réponse classique (b)

a. Les turbocompresseurs

Analogues aux pompes centrifuges, les compresseurs centrifuges accélèrent l'air dans une volute (Figure 4. 11). Lorsque la vitesse de l'air chute en entrant dans le collecteur d'admission, l'énergie cinétique se transforme en pression.



Figure 4. 11 : Aubes et turbine d'un compresseur centrifuge

Des vitesses périphériques élevées de la roue du compresseur sont nécessaires pour obtenir la pression désirée. Comme il est essentiel que l'inertie des éléments rotatifs du turbocompresseur soit réduite au minimum, leur diamètre doit être le plus petit possible, ce qui implique une très haute vitesse de rotation. Un petit turbocompresseur peut tourner jusqu'à 240 000 tr/min.

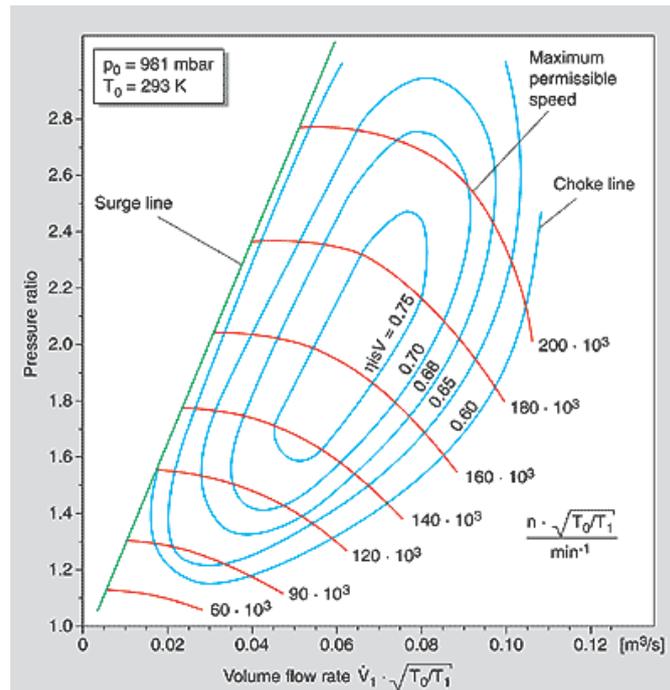


Figure 4. 12 : Diagramme caractéristique d'un compresseur centrifuge entraîné mécaniquement ou par turbine d'échappement

Le pompage d'un compresseur (zone instable et potentiellement destructrice à gauche de la « Surge line » Figure 4. 12) se produit si le débit est trop limité dans la chambre de décharge et si la pression de sortie augmente au point que le compresseur devienne incapable de maintenir un flux stable. Une inversion de flux se produit alors jusqu'à ce qu'un débit positif soit rétabli. La pression augmente à nouveau et cette séquence se répète indéfiniment à fréquence fixe.

A l'opposé, si le débit massique augmente et le rapport de pression diminue, l'air à l'entrée du compresseur peut atteindre la vitesse du son et le passage est étranglé. Dans ce cas, aucune autre réduction de pression de la chambre de décharge n'augmentera le débit.

Le meilleur rendement sera obtenu entre ces zones. La taille et le type de compresseur doivent donc être choisis selon le rapport de pressions et le débit pour qu'il reste au plus près de sa plage de rendement maximal pendant le fonctionnement normal du moteur.

Il existe un ensemble de turbocompresseurs permettant de minimiser les inconvénients cités précédemment. Nous en présenteront quelques uns.

b. Turbocompresseurs dits « à géométrie variable »

Des aubages de stator de turbine à incidence variable permettent d'adapter les caractéristiques du turbocompresseur à chaque point de fonctionnement (Figure 4. 13). Cette technologie est cependant indisponible pour des raisons de tenue thermique des matériaux sur les motorisations essence.



Figure 4. 13 : Turbocompresseurs à orientation des aubes variables

Un système plus simple fait intervenir une douille qui ajuste la section d'entrée de turbine en fonction du régime et de la charge du moteur (Figure 4. 14).

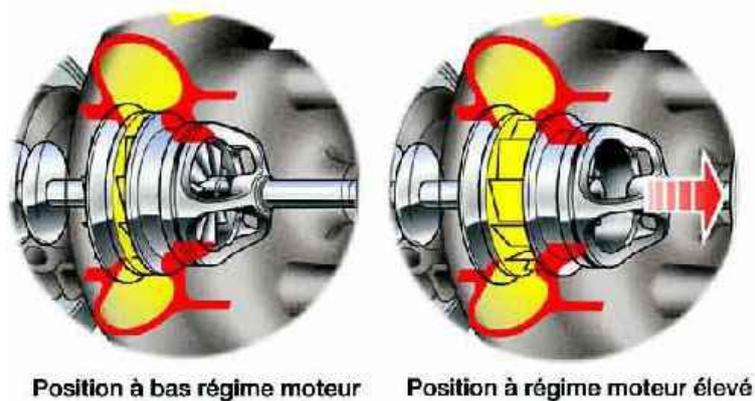


Figure 4. 14 : Turbocompresseur à douilles variable

c. Turbines à double entrée (« Twin scroll »)

Sur un 4 cylindres en ligne, quand la soupape d'échappement du cylindre n°3 s'ouvre, le cylindre n°1 est pratiquement à la fin de son cycle d'échappement. Si les deux cylindres partagent une tubulure commune, une contre-pression peut venir perturber le processus d'échappement du cylindre n°1 d'où l'utilité d'une turbine à double entrée afin d'éviter les

interférences entre les cylindres et de mieux utiliser les bouffées de pression dans le collecteur d'échappement (Figure 4. 15)

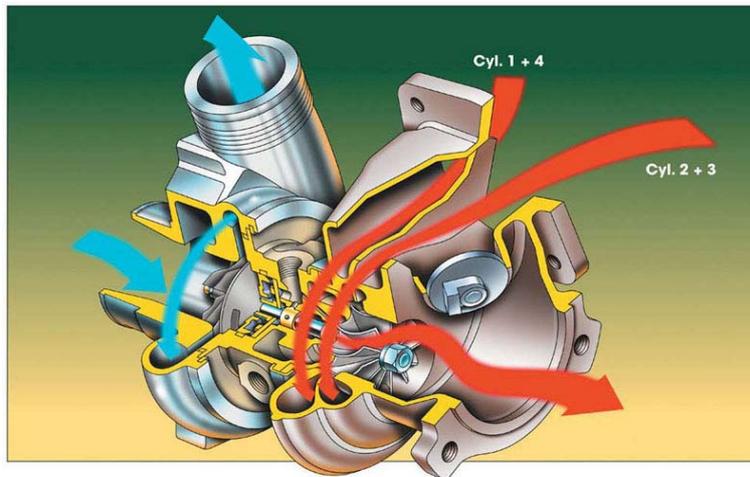


Figure 4. 15 : Schéma d'une turbine de turbocompresseurs a double entrée

d. Suralimentation séquentielle

Un turbocompresseur relativement gros est nécessaire pour qu'un moteur délivre une puissance élevée. Cependant, pour permettre l'établissement d'une pression de suralimentation suffisante à bas régime, la turbine et le compresseur doivent être de petite taille. Si le moteur est alimenté par deux turbocompresseurs en parallèle, un compromis peut être évité en orientant l'échappement de tous les cylindres vers un seul turbocompresseur et en mettant l'autre hors service au moyen de clapets dans les conduits d'échappement et d'admission lors du fonctionnement à bas régime. L'avantage de ce montage est l'élargissement de la plage de fonctionnement efficace de la suralimentation.

e. Suralimentation à deux étages

Deux compresseurs peuvent être montés en série pour obtenir une pression de suralimentation et une puissance spécifique plus élevées, ainsi que pour améliorer le couple à très bas régime. À bas régime moteur, tant que le débit massique des gaz d'échappement reste faible, les clapets de dérivation restent complètement fermés et les gaz d'échappement sont orientés vers la petite turbine haute pression du 2ème étage. Le résultat est une élévation rapide et forte de la pression de suralimentation. Au fur et à mesure que le régime moteur augmente, les gaz sont progressivement orientés vers la plus grande turbine du 1er étage en ouvrant graduellement les clapets de dérivation (Figure 4. 16).

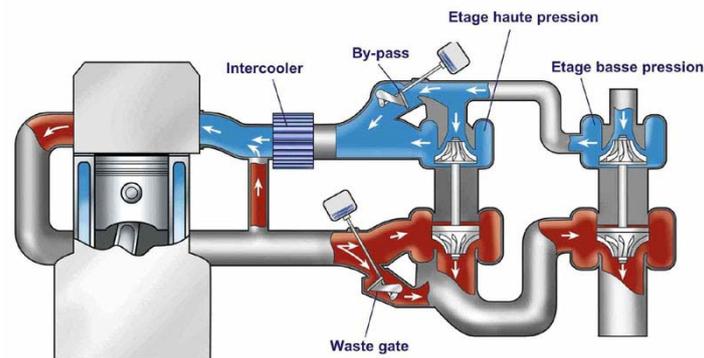


Figure 4. 16 : Schéma d'un turbocompresseur a deux étages montés en série

f. Turbocompound

A haut régime moteur, une turbine d'échappement développe plus de puissance que nécessaire pour comprimer la charge d'air, d'où le montage de soupapes de décharge (Wastegate). Par contre, à bas régime, la situation opposée se produit. Il peut donc être avantageux d'insérer une transmission continûment variable entre le moteur et son turbocompresseur pour permettre à la puissance de circuler librement dans un sens ou dans l'autre. Le vilebrequin peut ainsi suppléer le manque de puissance de la turbine, générant alors immédiatement la pression de suralimentation voulue lors d'une soudaine augmentation de charge à bas régime. Inversement, à régime et charge élevés, un excès significatif de puissance de la turbine peut être récupéré.

Des moteurs turbocompound sont apparus sur le marché du poids-lourd. Une deuxième turbine est installée en série après celle du turbocompresseur, tout comme dans le cas de la suralimentation à 2 étages, mais au lieu d'entraîner un compresseur cette deuxième turbine transmet sa puissance à l'arbre moteur (Figure 4. 17).

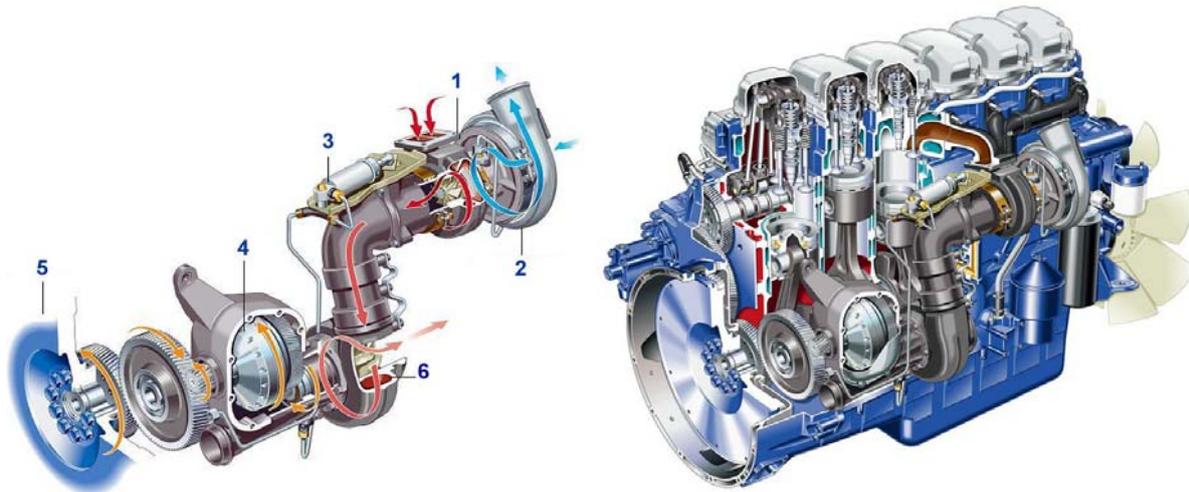


Figure 4. 17 : Schéma du très innovant système turbocompound

- 1 - Turbocompresseur avec volute de turbine à double entrée
- 2 - Compresseur
- 3 – Vérin pneumatique du frein d'échappement
- 4 - Accouplement hydrodynamique
- 5 - Volant moteur
- 6 - Turbine compound

4.3. Commande CRONE d'un moteur à allumage commandé

Le système à commander est le moteur de véhicule Smart installé sur un banc moteur de l'institut PRISME de Polytech'Orléans. Trois cylindres (Figure 4. 18) et une cylindrée très faible de 599 cm³ lui permettent de développer un couple de 88 Nm grâce à une suralimentation par turbocompresseur. Les caractéristiques de ce moteur sont décrites dans le tableau 4.1.

Alésage x Course	63.5x63mm
Nombre de cylindres	3 (en ligne)
Puissance Max (kW/Hp)	40/55 à 5250tr/min
Couple Max	88Nm
Rapport de compression	10
Turbocompresseur	Géométrie fixe Garrett GT12
Soupapes	2 par cylindre
Distribution	Fixe
Injection	Indirecte multipoint

Tableau 4. 1 : Caractéristique du moteur Smart

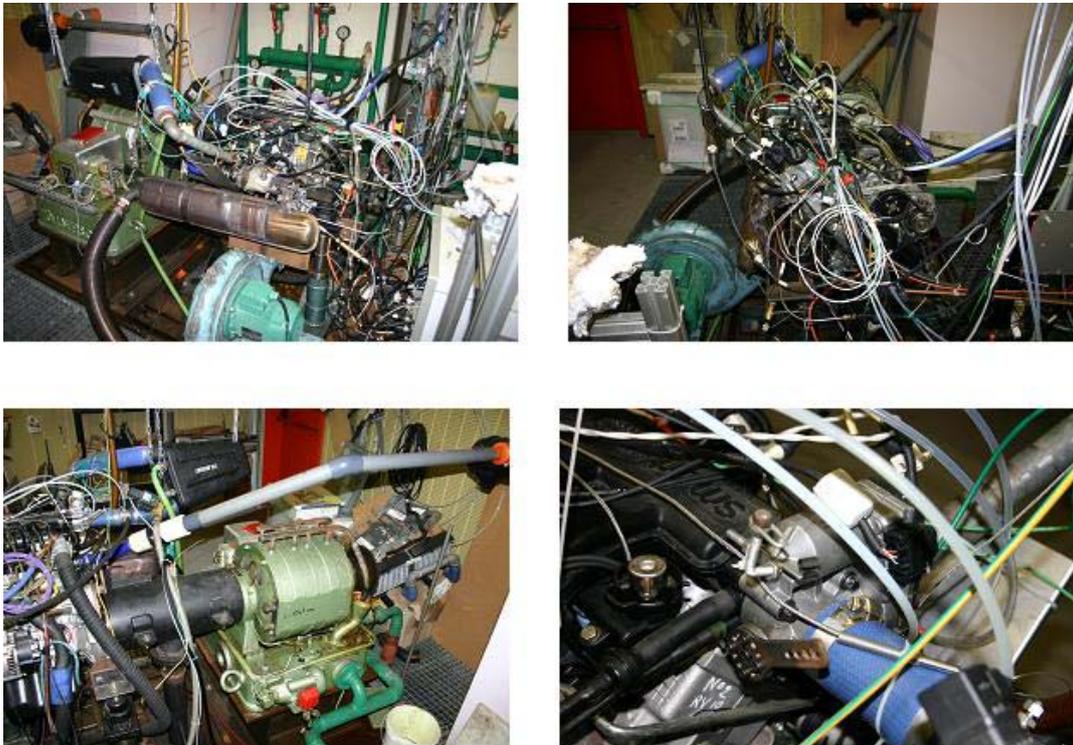


Figure 4. 18 : Photo du banc d'essais du moteur Smart installé dans une des cellules de test du PRISME

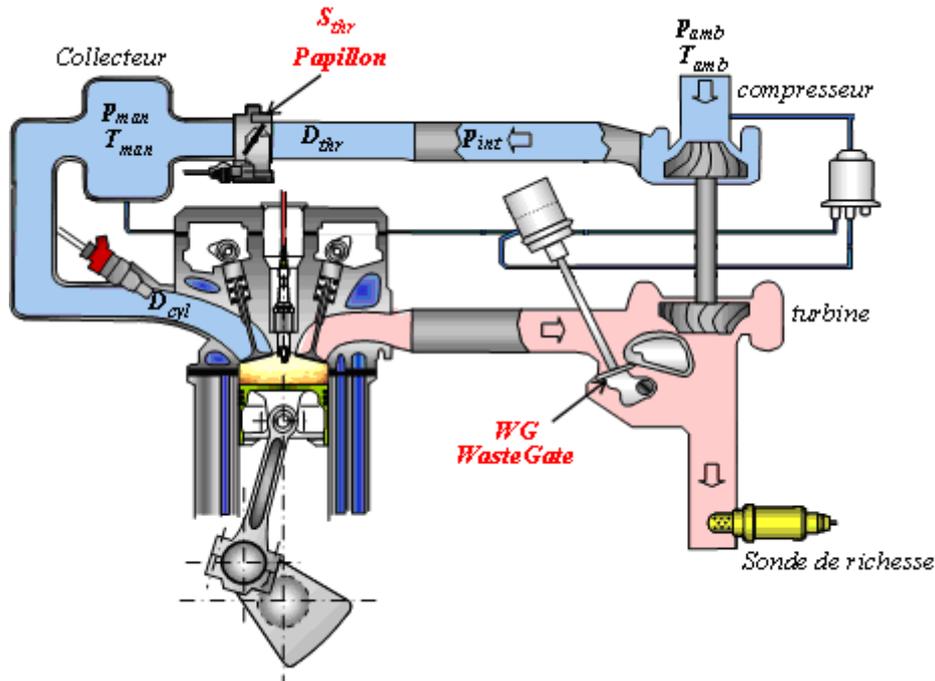


Figure 4. 19 : Système d'air d'un moteur à allumage commandé avec deux actionneurs (wastegate et papillon d'admission)

Les actionneurs du moteur d'étude sont le papillon d'admission, la vanne de décharge du turbocompresseur (wastegate), les injecteurs et les bougies d'allumages (Figure 4. 19). Une boucle externe est utilisée pour imposer un couple résistant au moteur. Le moteur est à pleine charge lorsqu'on lui applique la charge résistive maximum qu'il peut supporter sans diminution du régime. Un moteur étant rarement sollicité pleinement, des séries d'essais à différents régimes et différents couples sont effectués et constituent la base des courbes de puissance, du couple moteur et de consommation spécifique en carburant.

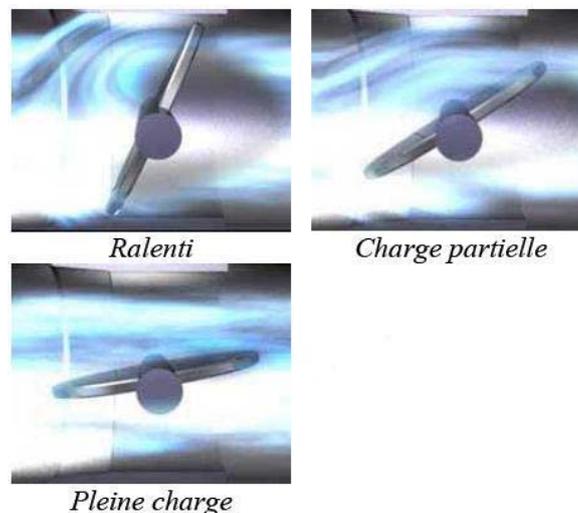


Figure 4. 20 : position du papillon en fonction de la charge

Notre objectif est de réguler le couple et le régime moteur c'est donc le système d'air qui sera contrôlé [Colin, 2006]. En effet, à richesse 1, à avance à l'allumage fixée à l'optimum et à régime N_e donné, le couple indiqué est directement lié à la masse d'air enfermée dans le cylindre $m_{air\ cyl}$. La commande du système d'air (Figure 4. 21) consiste en la régulation des pressions de collecteur (P_{man}) et de suralimentation (P_{int}) à l'aide d'une loi de commande à base de modèle utilisant l'ouverture du papillon d'admission (TVA) et le pourcentage de fermeture de la vanne de décharge du turbocompresseur (WG) comme signaux de commande. C'est le comportement moyen du système qui est ici considéré, c'est-à-dire moyennant le fonctionnement du moteur sur des périodes de 2 cycles.

Une cartographie est réalisée sur le banc et permet d'établir à partir d'ensemble de couple et régime désirés un ensemble de pressions de référence. Le compromis performance-pollution-consommation ne sera pas réalisé par une boucle externe mais par le contrôle de la boucle d'air et sera orienté vers une faible consommation. Ainsi, en régime transitoire, la réponse la plus rapide sera réalisée avec un papillon pleinement ouvert et une wastegate totalement fermée. Quand c'est possible, cela peut se faire en amenant la pression de suralimentation (P_{int}) à la pression collecteur (P_{man}). Les pertes de charge du papillon à pleine ouverture étant négligées car toujours inférieures à 0.04 bar, la consigne de pression de suralimentation P_{int_sp} sera toujours fixée à la consigne de pression collecteur P_{man_sp} . De plus, en régime stabilisé le papillon sera le plus ouvert possible afin de diminuer les pertes par pompage et donc la aussi la consommation.

Le contrôle des injecteurs et des bougies d'allumage sera lui fourni par l'institut PRISME. Les signaux de commande du papillon et de la wastegate seront appliqués sous la forme de PWM (Pulse Width Modulation). Avec une période d'échantillonnage de 5ms, une boucle de commande interne CRONE monovariable (notamment robuste aux variations de la température ambiante) permet de réguler l'angle d'ouverture (en %) du papillon motorisé.

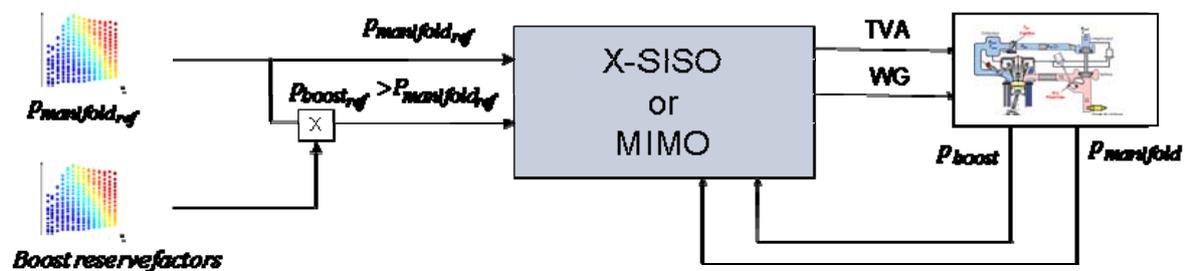


Figure 4. 21 : Système de commande

Les dynamiques du turbocompresseur et du collecteur étant assez différentes (temps de réponse du turbocompresseur au minimum le double du temps de réponse du collecteur), il est fréquent que des méthodologies de conception décentralisées soient privilégiées.

La commande du turbocompresseur se fait par une vanne de décharge (wastegate) actionnée pneumatiquement. La wastegate pneumatique est fixée à une membrane qui est soit poussée par une surpression, soit tirée par une dépression. Pour un moteur à allumage commandé, les sources de dépression et de surpression sont respectivement les pressions collecteur et de suralimentation (Figure 4. 22). Cette vanne de décharge pneumatique n'est donc pas commandée lorsque la pression collecteur et la pression de suralimentation sont proches de la pression ambiante. Il y a donc une zone morte où la wastegate n'a aucun effet sur la pression de suralimentation. Une wastegate actionnée par un moteur électrique permet de pallier ce problème. Ses avantages sont la rapidité d'action et la possibilité d'agir à tout moment. Les intérêts de la vanne de décharge pneumatique sont sa bonne résistance aux hautes températures et son faible coût.

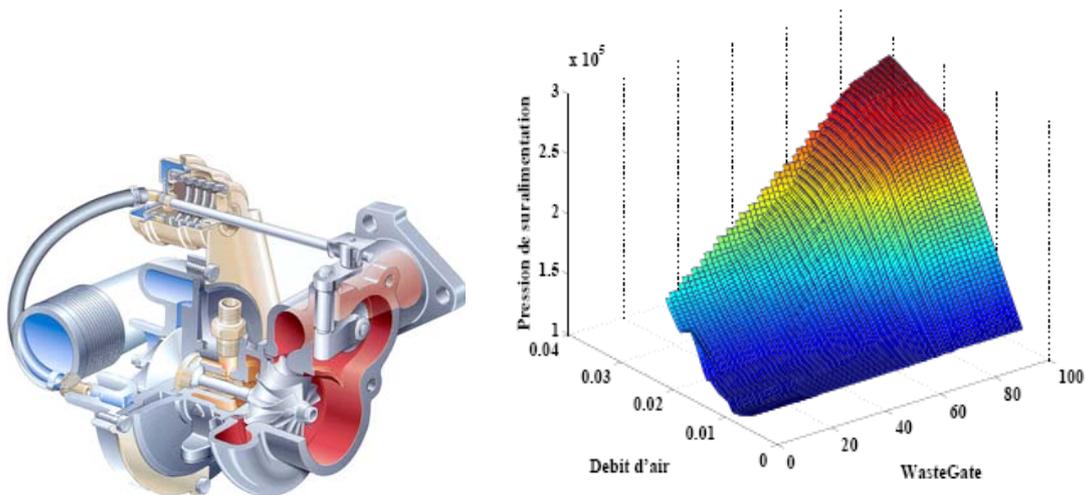


Figure 4. 22 : Soupape de décharge commandée pneumatiquement et non-linéarité statique de la pression de suralimentation en fonction du débit d'air entrant dans le cylindre et de la wastegate [Colin, 2006]

Le contrôle basique PI de la Wastegate engendrant des dépassements de la pression de suralimentation mais aussi un écart entre pression collecteur et pression de suralimentation, ça impose au papillon d'admission de se fermer et génère donc des pertes par pompage afin de suivre la pression collecteur. [Wakeman et Wright, 1986; Muller et *al*, 1991].

La commande que l'on va générer devra notamment permettre :

- 1) d'anticiper le comportement du turbocompresseur et donc d'éviter les dépassements,

- 2) de prendre en compte les non linéarités,
- 3) de prendre en compte les saturations.

4.3.1. Identification et analyse du système

a. Identification

La loi de commande conçue doit assurer un fonctionnement optimal pour l'ensemble des points de fonctionnement couple/régime du moteur d'étude. Afin de couvrir l'ensemble du domaine de fonctionnement, une procédure d'identification du comportement dynamique du système est mise en œuvre sur le banc d'essais autour d'une cinquantaine de points. Cette procédure d'identification fournit un modèle de type boîte noire caractérisé par un ensemble de réponses harmoniques du système. La figure 4.23 présente l'ensemble des points de fonctionnement considérés.

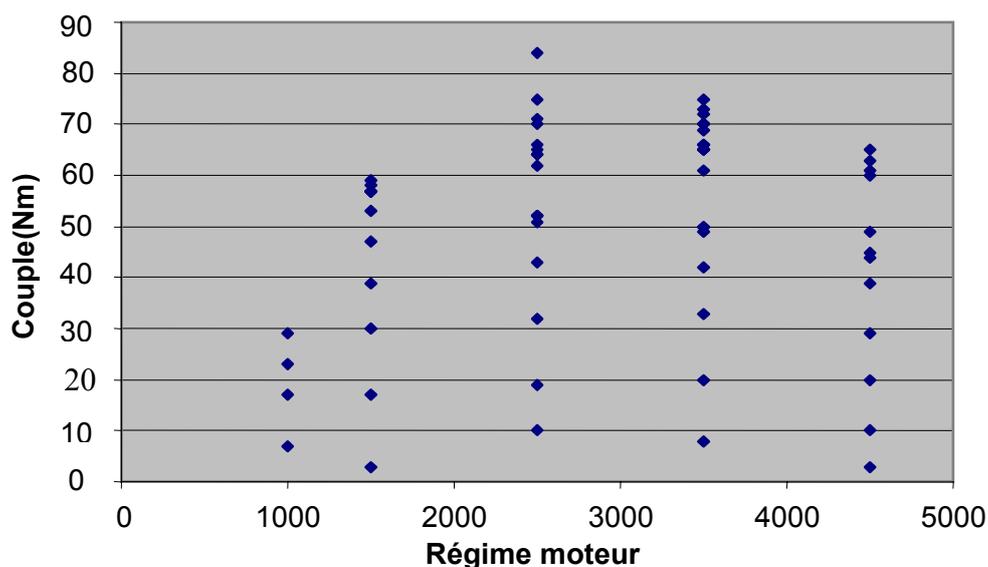


Figure 4. 23 : Ensemble des points de fonctionnement utilisés lors de l'identification

L'ensemble des points de fonctionnement permet aussi de définir un ensemble de cartographies comportant les valeurs de référence des pressions de collecteur (P_{man_sp}) et de turbo (P_{int_sp}), ainsi que les valeurs associées des angles d'ouverture papillon (TVA_{sp}) et du signal PWM de la wastegate. Un processus d'identification harmonique classique consisterait à appliquer un signal sinusoïdal de fréquence et d'amplitude données successivement sur

chacun des actionneurs (Figure 4. 24), et ceci pour l'ensemble du domaine fréquentiel de fonctionnement du moteur.

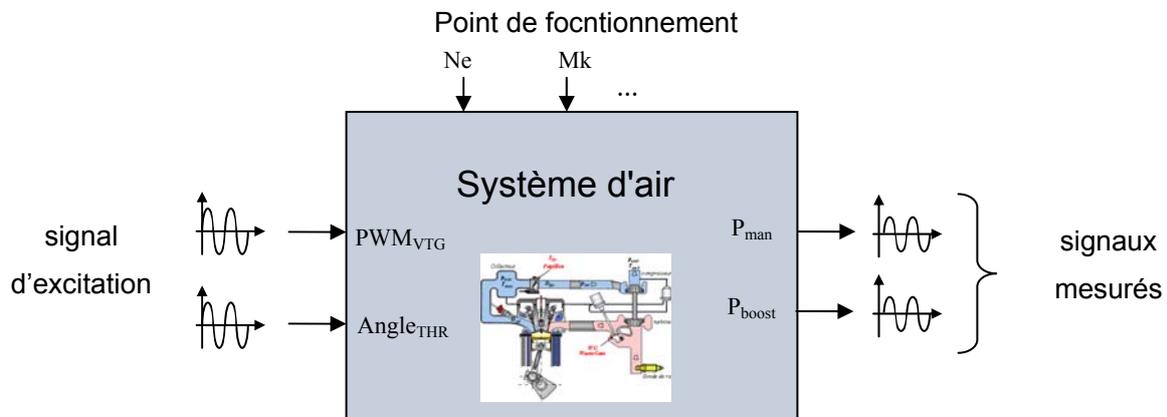


Figure 4. 24 : Méthode d'identification classique

Ce processus étant très couteux en temps d'utilisation du banc d'essai, il a donc été choisi d'utiliser un signal de type multisinus. Un signal multisinus est la somme de N sinusoïdes de fréquences espacées d'un écart Δf avec une fréquence centrale f_c :

$$x(t) = \sum_{k=-\frac{(N-1)}{2}}^{\frac{(N-1)}{2}} A_k \cos(2\pi(f_c + k\Delta f)t + \phi_k). \quad (4.5)$$

L'amplitude A_k et le déphasage ϕ_k sont définis afin que l'amplitude globale reste sensiblement constante. Cette amplitude doit être suffisamment forte pour que les résultats d'identification ne soient pas trop sensibles à l'effet de non-linéarités de type frottement sec ou jeu mécanique, mais suffisamment faible afin que la notion de modèle aux petits signaux garde un sens.

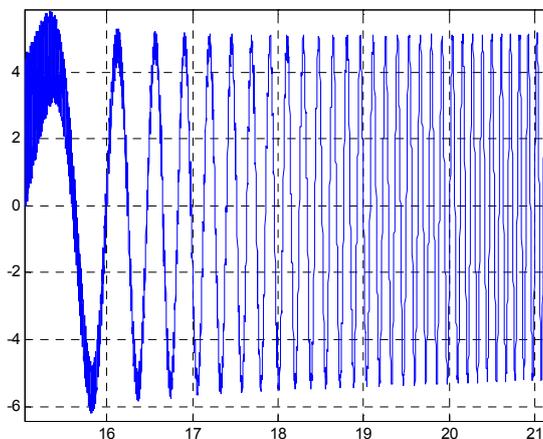


Figure 4. 25 : Réponse temporelle d'un multisinus

Ce type de signal permet d'identifier le système en une seule mesure sur l'ensemble de la plage de fréquence utile. Pour chaque point de fonctionnement, il est appliqué successivement aux actionneurs avec comme valeur moyenne la valeur de référence de l'actionneur sollicité. La valeur de l'amplitude est fonction du point de fonctionnement étudié. En effet pour de nombreux points de fonctionnement, soit un des actionneurs est en saturation (de grandes amplitudes de variation n'auraient pas de sens physique), soit certaines excitations ne conduisent qu'à des variations infimes de la sortie (des amplitudes plus grandes sont nécessaires pour percevoir l'effet de l'actionneur). Cette méthode d'identification et les outils mathématiques associés ont tout d'abord été testés en simulation avec une fonction de transfert à identifier simple :

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} \tag{4.6}$$

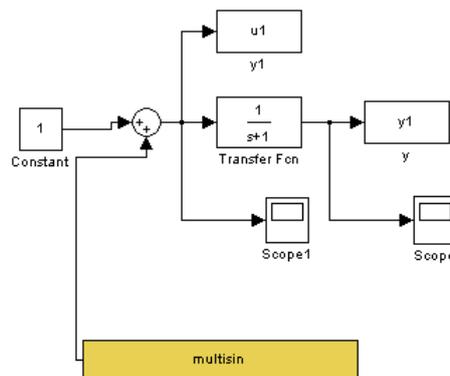


Figure 4.26 : Schéma d'identification d'une fonction de transfert

La figure 4.28 montre les signaux d'entrée et de sortie relevés.

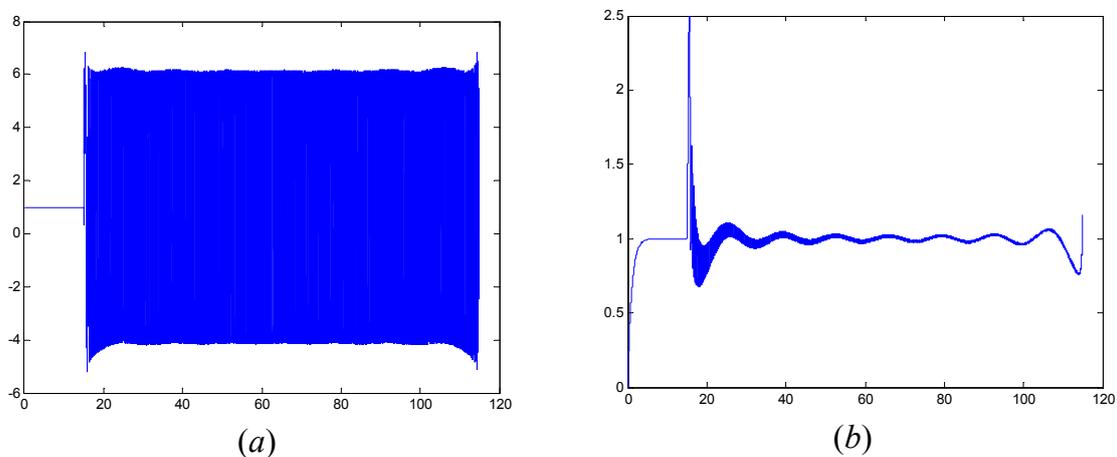


Figure 4.27 : Relevés temporels de l'entrée et de la sortie du système identifié

La réponse fréquentielle du système identifié est obtenue en utilisant la densité spectrale de puissance qui correspond à la transformée de Fourier du rapport entre la fonction d'inter-corrélation entrée/ sortie et la fonction d'auto-corrélation de l'entrée.

Cette méthode permet de ne prendre du signal de sortie que la partie directement liée au signal d'excitation. En effet, la méthodologie qui consiste à diviser la transformée de Fourier du signal de sortie par la transformée de Fourier du signal d'entrée ne permet pas de s'affranchir de l'effet des bruit de mesure et perturbations sur le signal de sortie. La Figure 4. 28 montre que cette procédure permet de retrouver la réponse fréquentielle de la fonction du système identifié.

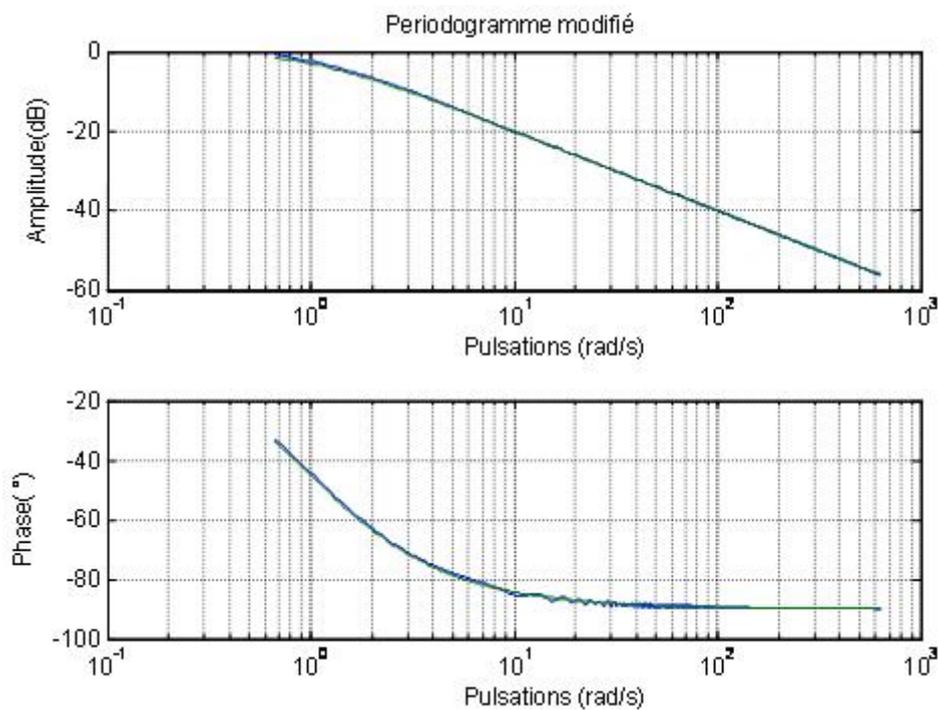


Figure 4. 28 : Réponse fréquentielle de la fonction de transfert identifiée (bleu) et de la fonction de transfert à identifier (vert)

La plage fréquentielle allant de 0.1 Hz à 10 Hz a été choisie pour identifier le système d'air. L'identification ainsi que la commande étant réalisées à temps discret avec une période d'échantillonnage $T_e = 10$ ms, la figure 4.30 présente l'ensemble des réponses fréquentielles obtenues avec en abscisse la pseudo-fréquence définie par $\nu = \tan(\omega T_e / 2)$.

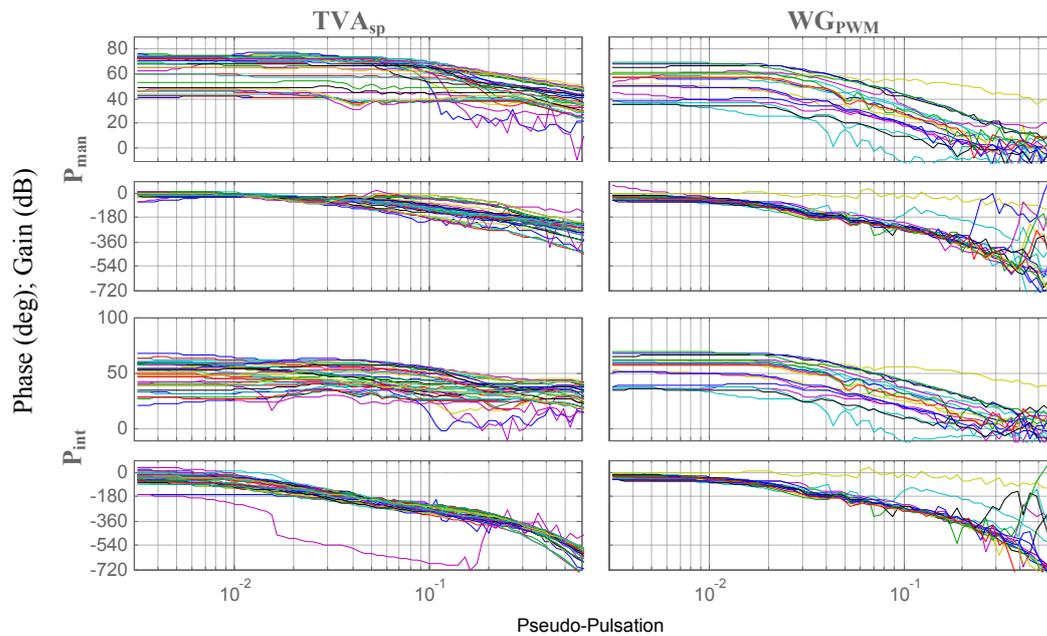


Figure 4. 29 : Réponse fréquentielle pour tous les points de fonctionnement du moteur
 Les actionneurs devant être en saturation (0 ou 100%) pour un grand nombre de point de fonctionnement identifiés, les réponses fréquentielles sont souvent partielles (SIMO), les 2 sorties n'étant affectées que par une seule des 2 entrées. La Figure 4. 30 présente les réponses fréquentielles des points de fonctionnement réellement MIMO. Ces réponses fréquentielles sont alors analysées afin de choisir le type de régulateur à utiliser et les bandes passantes atteignables.

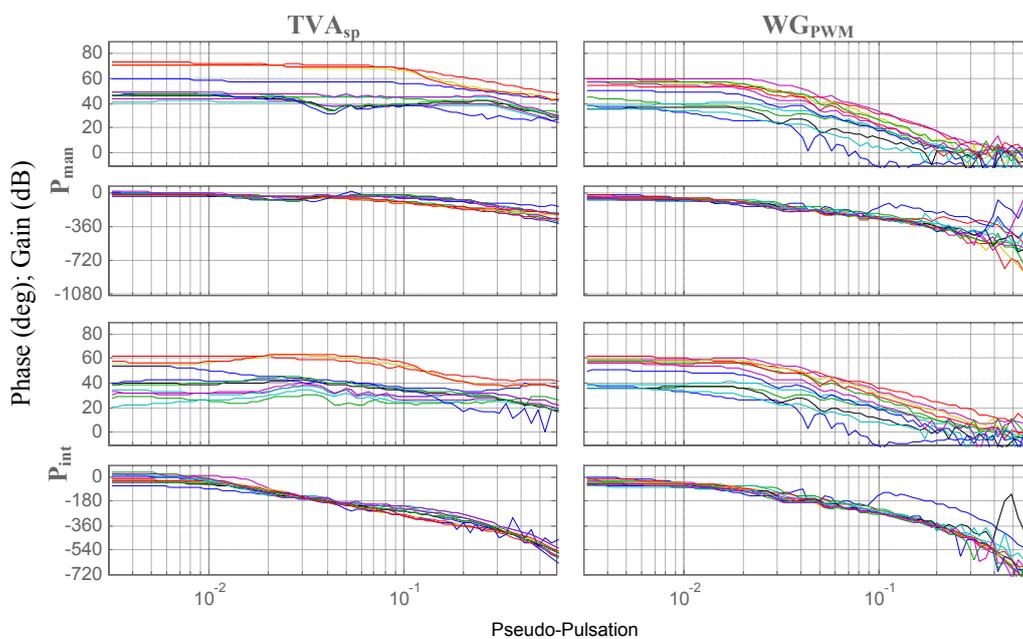


Figure 4. 30: Réponse fréquentielle du système pour les points de fonctionnement réellement MIMO

b. Analyse SVD : détermination d'une bande passante atteignable

La Figure 4. 31 présente les résultats de l'utilisation de l'outil de décomposition en valeur singulière. En plus de l'apport pour la détermination de la position des zéros et des pôles à PRP cet outil permet d'analyser la difficulté à commander le système étudié et permet aussi de déterminer une bande passante atteignable. En effet, en observant la Figure 4. 31 on peut d'ores et déjà affirmer qu'aucune direction ne sera privilégiée car les valeurs de gain maximum et minimum sont proches. On observe toutefois qu'à partir d'une pseudo-pulsation de 0.1 le gain singulier minimum s'effondre et donc on devra choisir une bande passante inférieure à cette valeur de manière à conserver une certaine facilité de commande du système.

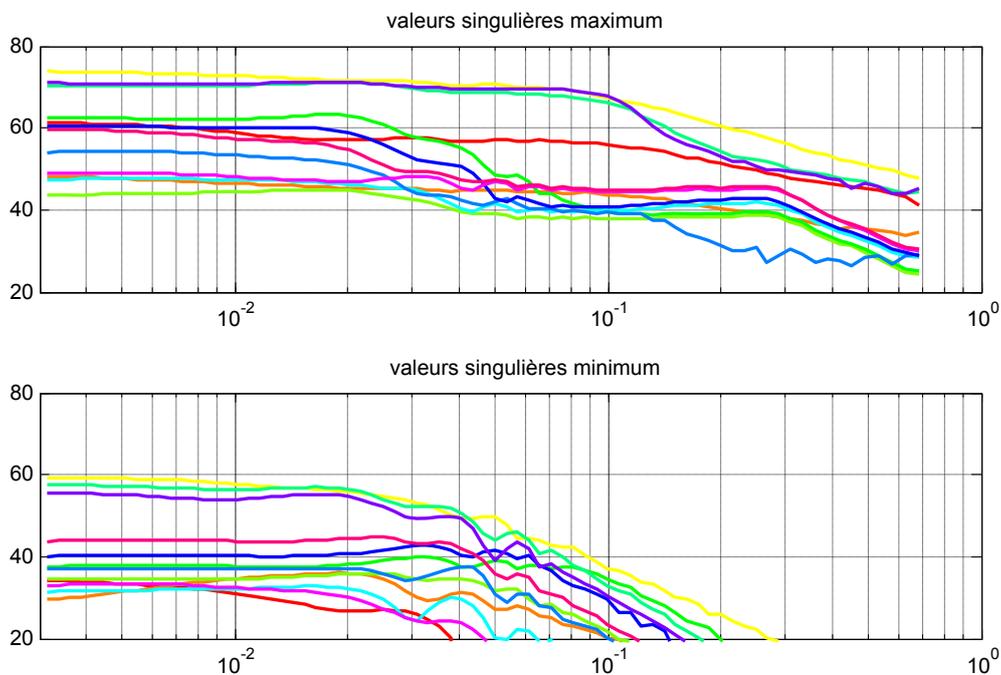


Figure 4. 31 : Extrema des valeurs singulières pour les points de fonctionnement MIMO

Le rapport des extrema des valeurs singulieres ("condition number") tracé pour chacun des points de fonctionnement MIMO (Figure 4. 32) permet de constater qu'au delà d'une pseudo-pulsation de 0.06 l'écart entre ces extrema devient significatif et donc que des gains plus important du correcteur seront nécessaires pour commander correctement le système.

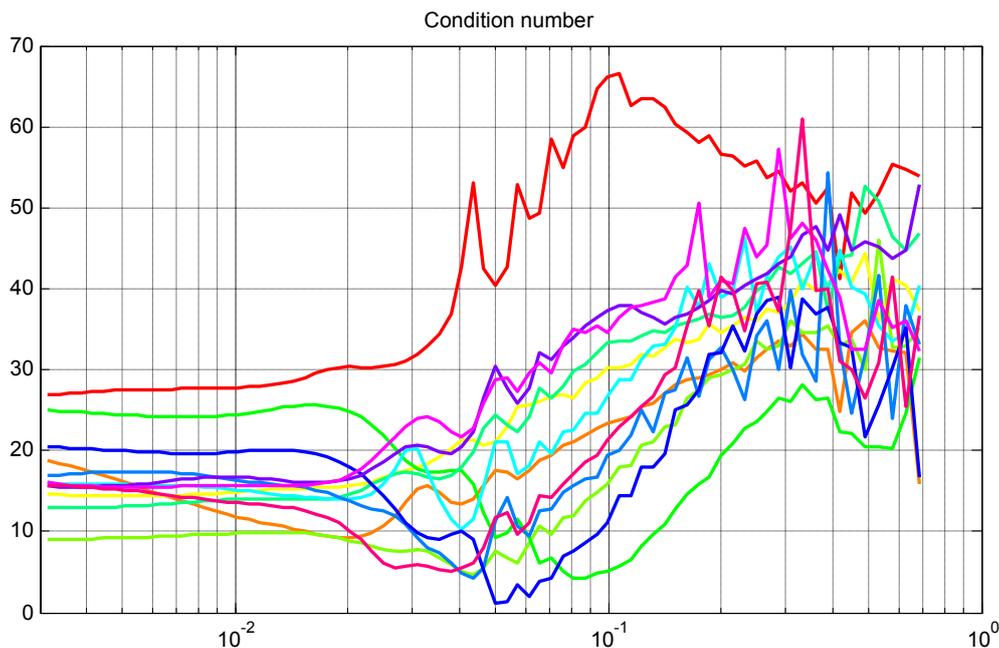


Figure 4. 32 : Tracé fréquentiel du condition number en décibel

c. Analyse RGA : choix d'un type de régulateur

L'analyse RGA nous permet de discuter de la possibilité ou pas d'utiliser un régulateur décentralisé. L'analyse RGA réalisée sur le système (Figure 4. 33) permet d'affirmer qu'un régulateur décentralisé est tout à fait envisageable pour commander le système d'air. Les valeurs en régime statique négatives sur les éléments autres que ceux sur la diagonale principale permettent d'affirmer que ce système possède un zéro à partie réelle positive. Sachant qu'un retard pur peut être assimilé à un zéro à PRP (cf décomposition de Pade du retard) l'origine de ces valeurs négatives s'explique par le temps de réponse du turbocompresseur.

Il est cependant nécessaire que ce régulateur soit construit à l'aide d'une méthode de conception multivariable. En effet, le gain similaire entre le signal d'entrée WG_{PWM} et les deux sorties (Figure 4. 30) permet d'écarter une méthodologie de conception multi-SISO pour laquelle l'importance des incertitudes provenant des termes de couplage serait pénalisante. Cette analyse rejoint la problématique classique de commande des moteurs à allumage commandé où les deux actionneurs sont utilisés de manière complémentaire. Le caractère multivariable du moteur apparaît seulement dans les transitoires où la wastegate permet d'accélérer les transitoires et/ou de les amortir pour réduire les dépassements sur les pressions. Le turbocompresseur, pour des raisons de respect du compromis performances-

pollution-consommation ne se « mettra en route » que lorsque le papillon ne permettra plus d'augmenter la pression d'air admise c'est-à-dire que lorsque le papillon sera pleinement ouvert.

La méthodologie de conception d'un régulateur CRONE décentralisé pour les systèmes MIMO carré présenté au chapitre 3 est donc utilisée pour concevoir le régulateur.

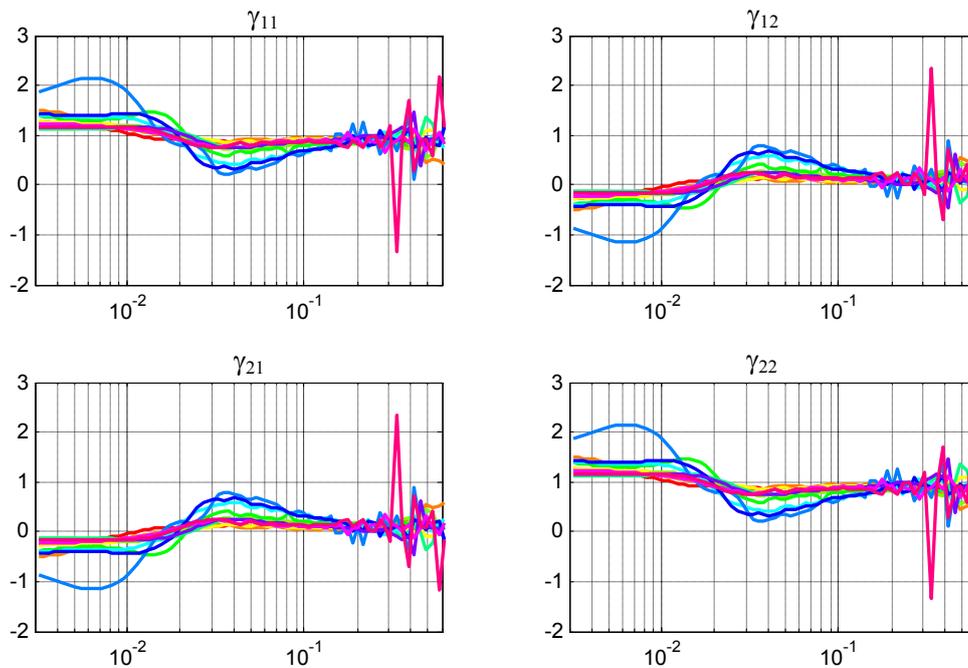


Figure 4.33 : Analyse RGA du moteur Smart

4.3.2. Commande du système

a. Détermination du procédé nominal

L'effet des trois cylindres génère une oscillation des pressions mesurées à $3N_e/120$ Hz soit des fréquences allant entre 25 Hz à 112 Hz selon le régime moteur N_e . Même si cette plage de fréquence est supérieure à la bande passante du système bouclé (environ 1-2 Hz), quand elle s'avère plus grande que la fréquence de Nyquist ($f_e/2 = 100$ Hz), comme nous l'avons vérifié, il serait possible qu'un phénomène d'aliasing apparaisse et vienne perturber le système de contrôle en générant des oscillations basses fréquences. Afin de faire disparaître ce phénomène un filtre non linéaire assure le nettoyage des signaux de pressions. Son comportement linéaire est alors modélisé par un retard de $120/3N_e$ s.

A l'aide du logiciel CRONE MIMO que nous avons développé, un modèle nominal est choisi parmi l'ensemble des réponses fréquentielles (Figure 4. 35).

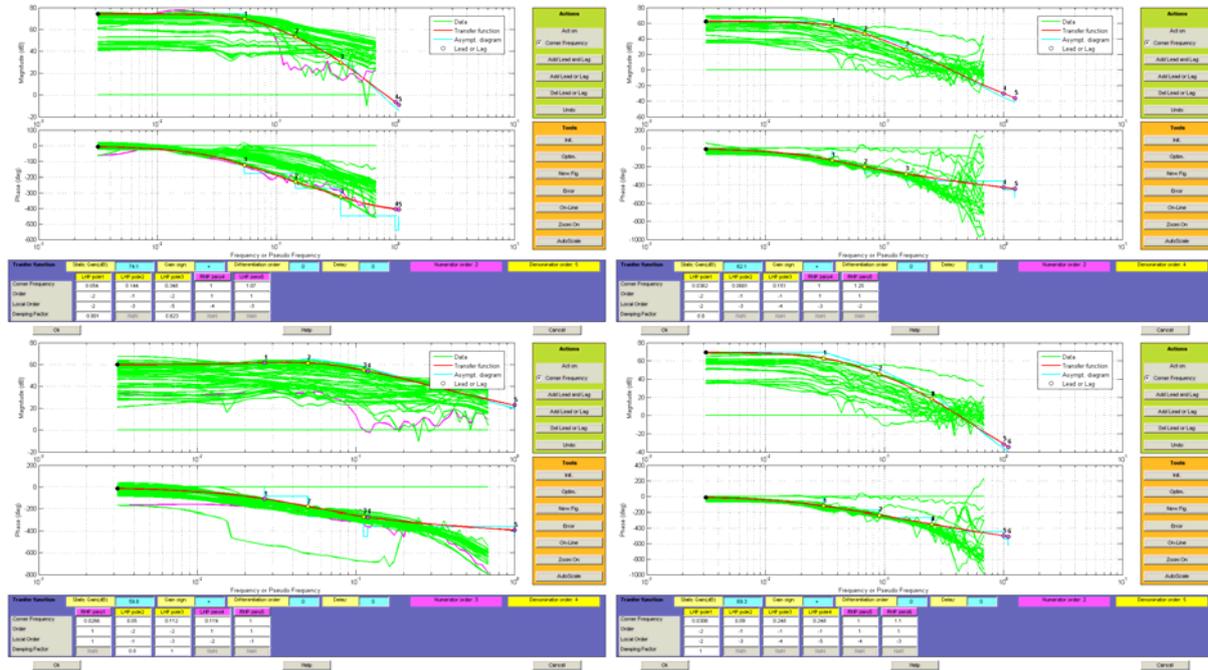


Figure 4. 34 : Recherche d'une fonction de transfert nominale (rouge) parmi l'ensemble des réponses fréquentiellee du moteur (vert) en utilisant le logiciel CRONE MIMO

La fonction de transfert dans le domaine pseudo-continu (w) du procédé nominal est définie par :

$$G_{110}(w) = \frac{-0.24095(w + 1.07)(w - 1)}{(w + 0.144)(w^2 + 0.08651w + 0.002916)(w^2 + 0.5728w + 0.1211)} \quad (4. 7)$$

$$G_{120}(w) = \frac{0.013729(w - 1.25)(w - 1)}{(w + 0.151)(w + 0.0681)(w^2 + 0.05792w + 0.00131)} \quad (4. 8)$$

$$G_{210}(w) = \frac{9.6816(w + 0.119)(w - 0.0266)(w - 1)}{(w + 0.112)^2(w^2 + 0.08w + 0.0025)} \quad (4. 9)$$

$$G_{220}(w) = \frac{0.013927(w - 1.1)(w - 1)}{(w + 0.248)^2(w + 0.09)(w + 0.0308)^2} \quad (4. 10)$$

La réponse fréquentielle de ce modèle est tracée sur la Figure 4. 35. Afin d'obtenir un régulateur décentralisé, ce modèle nominal est alors simplifié en remplaçant les éléments non diagonaux de la matrice $G_o(w)$ par 0.

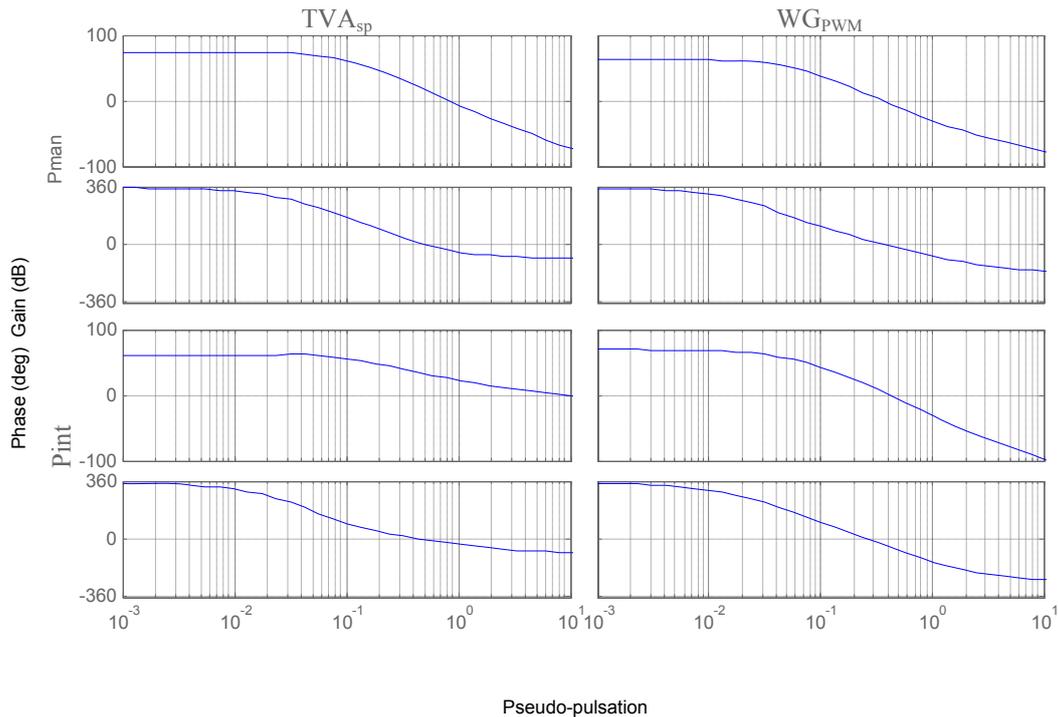


Figure 4. 35 : Diagramme de Bode du modèle nominal de $G_o(w)$

b. Conception du régulateur robuste

Specifications

Les spécifications pour le système bouclé permettant de commander les pressions de collecteur et de suralimentation sont:

- un régulateur avec un gain basse fréquence très élevé afin d'assurer un suivi de trajectoire parfait
- un pic de résonance en boucle fermée de la matrice de transfert de sensibilité complémentaire inférieure à 3dB afin d'assurer un degré de stabilité suffisant, et ceci quel que soit le point de fonctionnement
- un régulateur avec un gain hautes fréquences suffisamment petit pour ne pas faire générer trop de bruit de commande, soit respectivement -55dB pour la boucle TVA_{sp} -Pman et -40dB pour la boucle WG_{PWM} -Pint.

Optimisation des boucles ouvertes

La fonction de transfert nominale choisie $G_o(w)$ étant diagonale, seuls les zéros/pôles à PRP des éléments diagonaux sont à prendre en compte pour assurer la stabilité du système. Le zéro

à PRP en +1 et les zéros à PRP en +1 et +1.1 sont respectivement incluent aux boucles ouvertes fractionnaires nominales $\beta_{01}(w)$ et $\beta_{02}(w)$.

Le procédé ne possédant aucune partie intégrale, son ordre basse fréquence du procédé est donc nul. Le régulateur devant avoir un intégrateur pour assurer un gain faible de la fonction de sensibilité $G(s)S(s)$ en basse fréquence et donc assurer un bon suivi de trajectoire, les boucles ouvertes fractionnaires nominales doivent avoir un ordre basse fréquence n_{li} égal à 1.

Comme l'ordre hautes fréquences n_{phi} des éléments diagonaux du procédé (sans prendre en compte les zéros à PRP) sont respectivement 4 et 5, l'ordre haute fréquence des deux boucles ouvertes fractionnaire nominales doit être respectivement supérieur ou égal à 5 et 6 pour assurer une décroissance du gain du régulateur en haute fréquences (régulateur strictement propre). On choisit $n_{h1} = 5$ et $n_{h2} = 7$.

La boucle ouverte fractionnaire nominale s'écrit donc :

$$\beta_1(w) = K \left(\frac{v_{-1}}{w} + 1 \right)^{n_{l1}} \prod_{k=-1}^1 \left(\frac{1 + \frac{w}{v_{k+1}}}{1 + \frac{w}{v_k}} \right)^{a_k} \left(\mathfrak{R}_{/i} \left[\left[\begin{array}{c} 1 + \frac{w}{v_{k+1}} \\ C_k \frac{1 + \frac{w}{v_{k+1}}}{1 + \frac{w}{v_k}} \end{array} \right]^{ib'_k} \right] \right)^{-q_k \text{sign}(b'_k)} \frac{(1-w)}{\left(1 + \frac{w}{v_2}\right)^{n_{h1}}} \quad (4.11)$$

$$\beta_1(w) = K \left(\frac{v_0}{w} + 1 \right)^{n_{l2}} \left(\frac{1 + \frac{w}{v_1}}{1 + \frac{w}{v_0}} \right)^{a_0} \left(\mathfrak{R}_{/i} \left[\left[\begin{array}{c} 1 + \frac{w}{v_1} \\ C_0 \frac{1 + \frac{w}{v_1}}{1 + \frac{w}{v_0}} \end{array} \right]^{ib'_0} \right] \right)^{-q_0 \text{sign}(b'_0)} \frac{(1-w)(1.1-w)}{\left(1 + \frac{w}{v_2}\right)^{n_{h2}}} \quad (4.12)$$

L'optimisation dans le domaine pseudo-continu des paramètres des boucles ouvertes fractionnaires nominales est effectuée en utilisant la méthodologie décrite au chapitre 2. Le contour de Nichols que l'on cherche à tangenter correspond ici à un pic de résonance de 0dB, et ceci pour chaque boucle ouverte fractionnaire nominale. Les paramètres des boucles ouvertes fractionnaires nominales optimales obtenus sont :

- $\omega_r = 10 \text{rad/s}$, $\|\beta_{01}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = -0.9 \text{dB}$
- $\omega_{-1} = 6 \text{rad/s}$, $\omega_0 = 12 \text{rad/s}$, $\omega_1 = 31.73 \text{rad/s}$, $\omega_2 = 92.73 \text{rad/s}$,
- $a_{-1} = 2$, $a_0 = -3.52$, $a_1 = 1.6$,

$$- \quad b_{-1} = -0.5, b_0 = -2.29, b_1 = 3.55,$$

pour la boucle TVA_{sp}-Pman, et

$$- \quad \omega_r = 6 \text{ rad/s}, \|\beta_{o2}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 2 \text{ dB}$$

$$- \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s}, \omega_1 = 54.6 \text{ rad/s},$$

$$- \quad a_0 = 0.84, b_0 = 0.39,$$

pour la boucle WG_{PWM}-Pint.

La Figure 4. 36 montre les réponses fréquentielles des boucles ouverte fractionnaires nominales optimisées et des boucles ouvertes équivalentes (prenant en compte quand ils existent les termes de couplage) pour tous les points de fonctionnements du moteur.

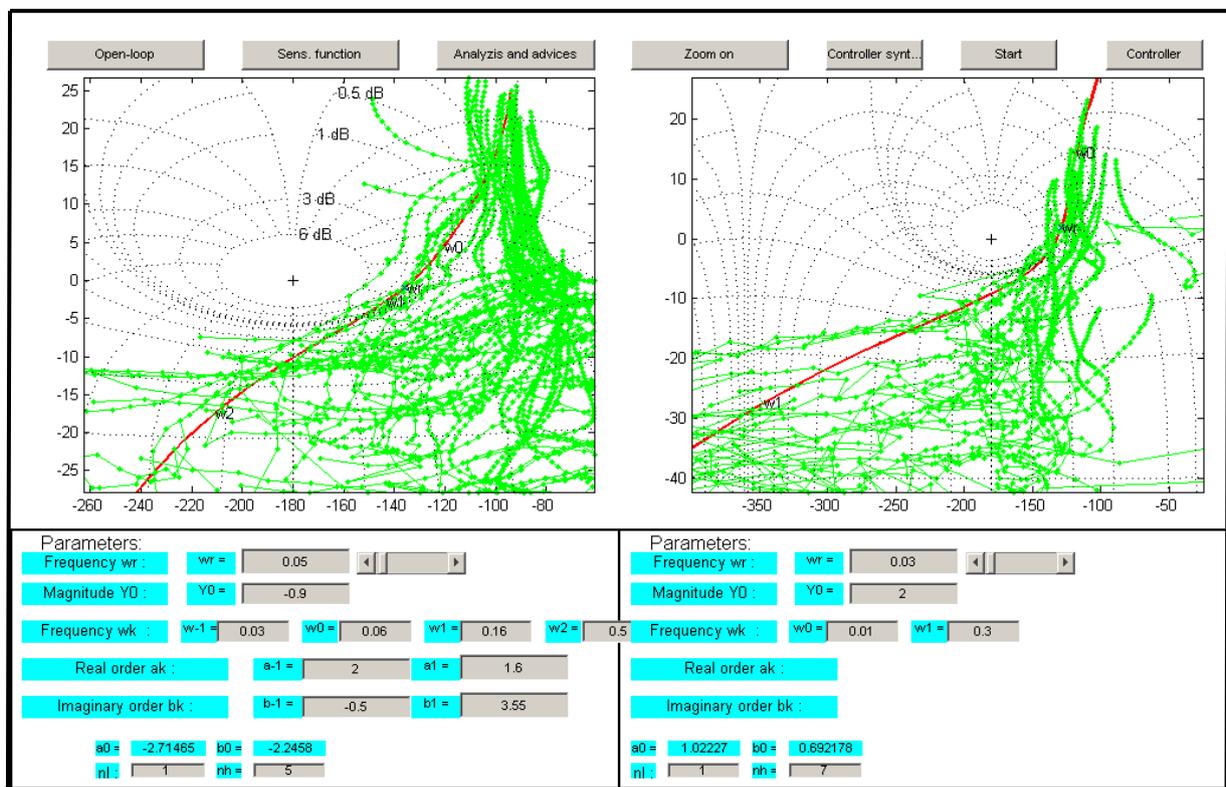


Figure 4. 36 : Boucle ouverte nominale optimisée (rouge) et boucles ouvertes équivalentes (vert)

Le procédé nominal est délibérément choisi simple afin de faciliter la définition des fonctions de transfert en boucle ouverte. Néanmoins la présence de zéros à partie réelle positive dans le système physique engendre une marge de gain minimale qui se réduit à 5dB. La plus grande valeur de la fonction de sensibilité complémentaire est inférieure à la limite haute fixée par les

spécifications (3 dB). Figure 4. 37 présente le gain de la fonction de sensibilité complémentaire de la boucle fermée liant les valeurs de référence des pressions P_{man} et P_{int} et les valeurs des pressions mesurées P_{man} et P_{int} . Le gain basse fréquence est égal à 0dB pour les éléments diagonaux et tend vers $-\infty$ pour les éléments non diagonaux. Ceci contribue donc à valider le comportement découplant de notre loi de commande.

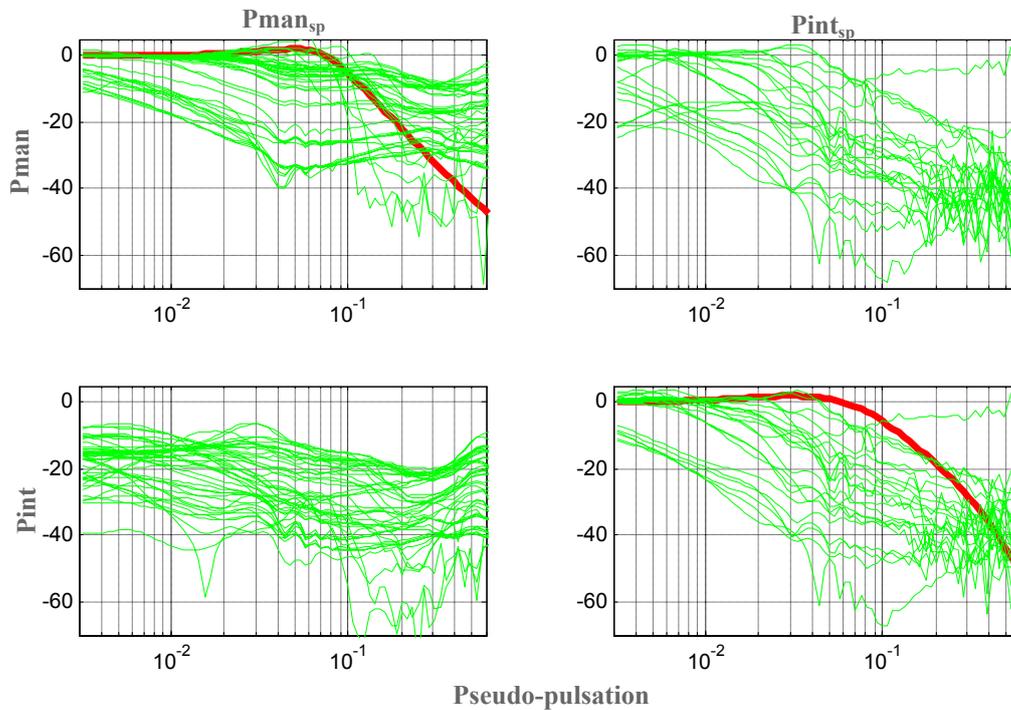


Figure 4. 37 : Gain en décibel de la fonction de transfert de la fonction de sensibilité complémentaire pour tous les points de fonctionnements (vert) et le procédé nominal (rouge)

Synthèse du régulateur rationnel

La réponse fréquentielle désirée des éléments diagonaux du régulateur est obtenue en calculant la différence entre la réponse fréquentielle de la boucle ouverte fractionnaire nominale optimale (et diagonale) et celle du procédé simplifié. Pour chaque élément, la réponse fréquentielle désirée du régulateur est approximée par une fonction de transfert rationnelle. La fonction de transfert rationnelle est définie par

$$K_R(w) = K_0 w^{N_{diff}} \prod_{i=1}^n f(v_i, \zeta_i, o_i) \quad (4.13)$$

où, K_0 est un gain, N_{diff} , n , et o_i sont des ordres entiers, v_i sont les fréquences de transitions, et ζ_i est le coefficient d'amortissement. Lorsque l'ordre o_i est différent de ± 2 , la fonction f est de la forme :

$$f(v_i, \zeta_i, o_i) = \left(1 + \frac{w}{v_i}\right)^{o_i} \quad (4.14)$$

Lorsque l'ordre est égal à un multiple de ± 2 , la fonction f est de la forme :

$$f(v_i, \zeta_i, o_i) = \left(1 + \frac{2\zeta_i w}{v_i} + \frac{w^2}{v_i^2}\right)^{\text{sign}(o_i)} \quad (4.15)$$

Les éléments précédents font référence à des éléments du numérateur de la fonction de transfert du régulateur si l'ordre est positif et du dénominateur si l'ordre est négatif.

L'optimisation consiste à minimiser la différence entre la réponse fréquentielle désirée du régulateur (gain et phase) obtenu par calcul et celle du régulateur rationnel obtenu par identification. La fonction coût définie par :

$$\sum_{10^{-4} \leq v \leq 10^2} \left[(1 - \alpha) \left(|K_R(jv)|_{\text{dB}} - |K(jv)|_{\text{dB}} \right)^2 + \alpha \left(\arg(K_R(jv)) - \arg(K(jv)) \right)^2 \right], \quad (4.16)$$

où 0.5 est une valeur moyenne du coefficient de pondération α .

Le régulateur optimisé est alors défini par :

$$K_{11}(w) = \frac{0.0036541(w + 0.0642)(w + 0.0529)(w^2 + 0.07524w + 0.001747)(w^2 + 0.4424w + 0.09986)}{w(w + 0.877)(w + 0.8)^2(w + 0.0231)(w^2 + 0.2128w + 0.01769)} \quad (4.17)$$

$$K_{22}(w) = \frac{0.013164(w + 0.074)(w + 0.0251)(w + 0.0202)(w + 0.00682)(w^2 + 0.06086w + 0.001282)}{w(w + 0.727)(w + 0.557)^2(w + 0.0257)(w + 0.0416)(w + 0.0181)(w + 0.00759)} \quad (4.18)$$

La Figure 4. 38 présente la réponse fréquentielle du régulateur rationnel obtenu par identification fréquentielle. Le gain haute fréquence du régulateur est proche de -55 dB et -40 dB comme le suggérait les spécifications. Compte tenu de la grande disparité du gain et de la bande passante des transferts pour chaque point de fonctionnement, il semble difficile d'améliorer les performances obtenu grâce au régulateur robuste et linéaire conçu. Cependant, afin de réduire les temps de réponse, il est possible de compléter cette commande de type feedback par des commandes de type feedforward, dynamique sur la commande WG et statique sur la commande TVA.

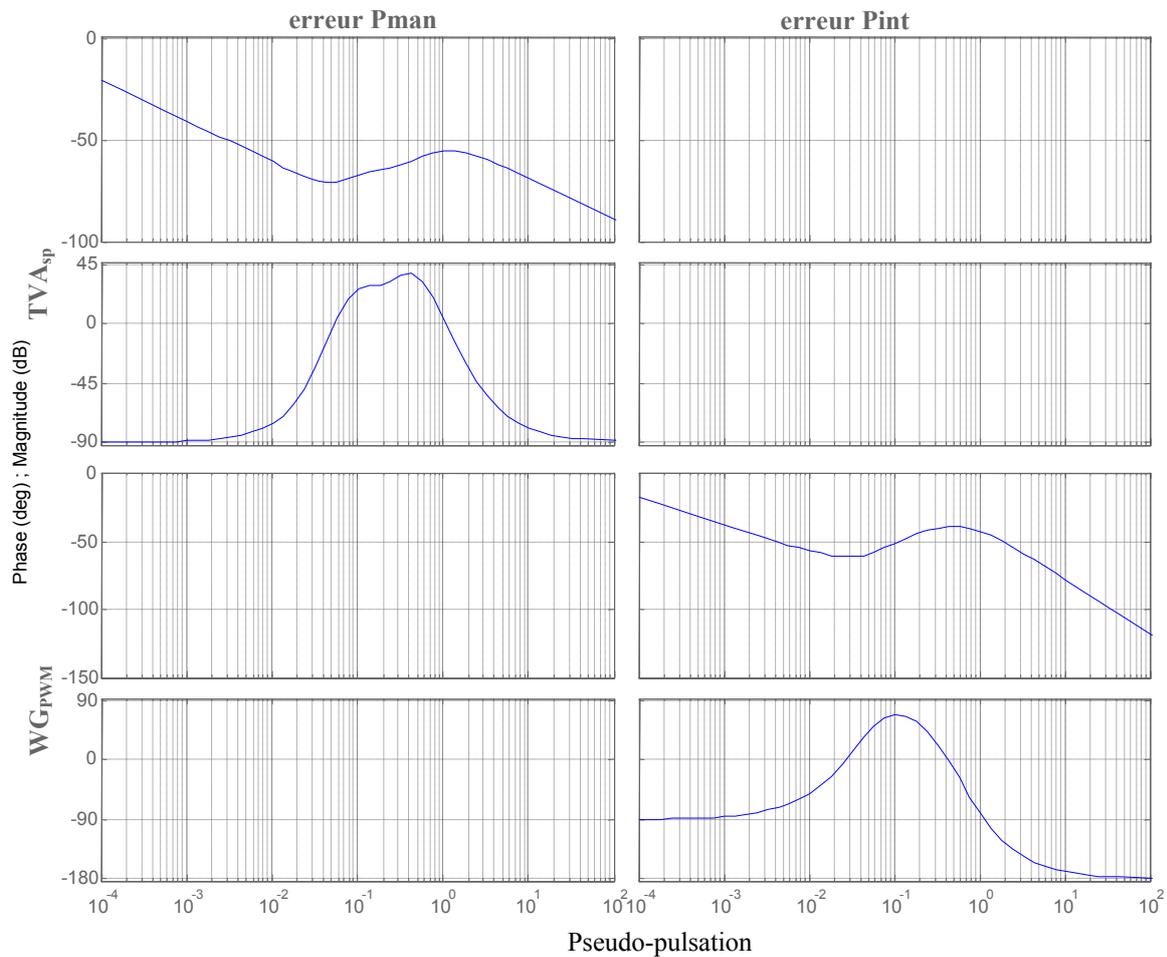


Figure 4. 38 : Diagramme de Bode du régulateur rationnel décentralisé

4.3.3. Validation de la loi de commande sur simulateur et banc d'essai

Les performances de la boucle fermée étant vérifiées dans le domaine fréquentiel, il convient de tester la loi de commande sur simulateur dans un premier temps puis finalement sur le banc d'essais. La simulation utilise un modèle MATLAB/Simulink, conçu par l'entreprise Robert Bosch à Stuttgart-Allemagne où ont été modélisés les différents éléments du moteur, calibré sur le moteur SMART par l'institut PRISME d'Orléans, puis validé par nous-même grâce à la comparaison de ses réponses fréquentielles avec celles obtenues sur le banc d'essais. Le schéma de commande est détaillé Figure 4. 39.

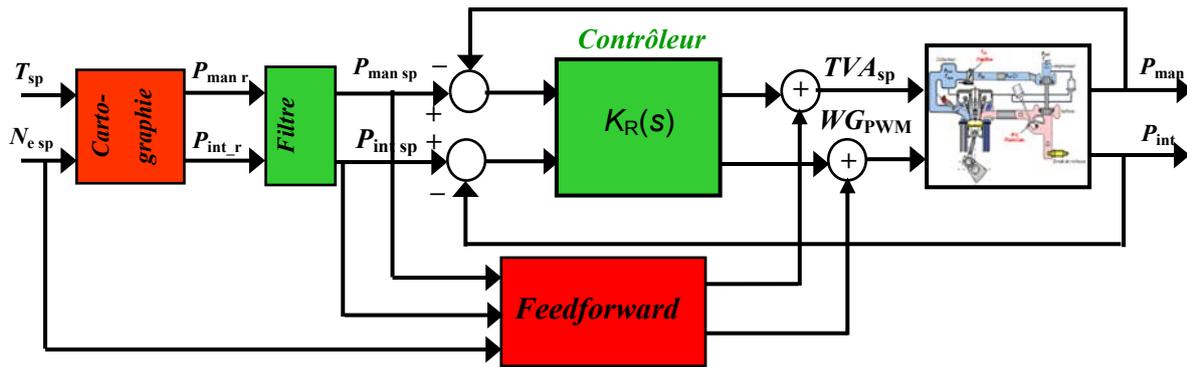


Figure 4. 39 : Schéma de commande du moteur Smart

Les éléments diagonaux de la matrice du régulateur $K(w)$ sont utilisés pour paramétrer deux blocs MATLAB/Simulink à temps discret (Figure 4. 40, blocs RB_ETC_CRONE_controller bleu et cyan) conçus afin de permettre le prototypage rapide du régulateur sur la plateforme de test d'Orléans ainsi que pour faciliter son implémentation sur les processeurs utilisés par Robert Bosch pour le contrôle moteur. Ce bloc offre de nombreuses fonctionnalités (accentuation non linéaire de la partie intégrale, gestion des problèmes de saturation, préfiltre, etc.) qui ne sont pas décrites ici sachant que la plupart ne sont pas utilisées pour cette application. Le feedforward statique (Figure 4. 40) lié à la commande TVA est une simple cartographie des points d'entrée TVA récoltés lors de l'identification du moteur. Le feedforward WG est lui aussi basé sur une cartographie des pourcentages d'ouverture WG. Sachant que l'effet de la wastgate est assez lent mais, comme le présente la Figure 4. 29, que la phase du transfert P_{int}/WG_{PWM} est assez constante suivant le point de fonctionnement, il est intéressant et possible d'insérer un effet dynamique dans cette commande feedforward. C'est ce qui est fait par les deux fonctions de transfert apparaissant encadrées de la Figure 4. 40. La fonction de transfert "2" correspond à une inversion du procédé permettant de réduire le temps de montée ou de descente de la pression lors de la variation de régime moteur. La fonction de transfert "1" permet d'adapter le signal de référence à l'évolution de la pression asservie. Les valeurs des paramètres de ses fonctions de transferts ont été trouvées à l'aide d'une optimisation de type essais/erreurs faite sur le simulateur.

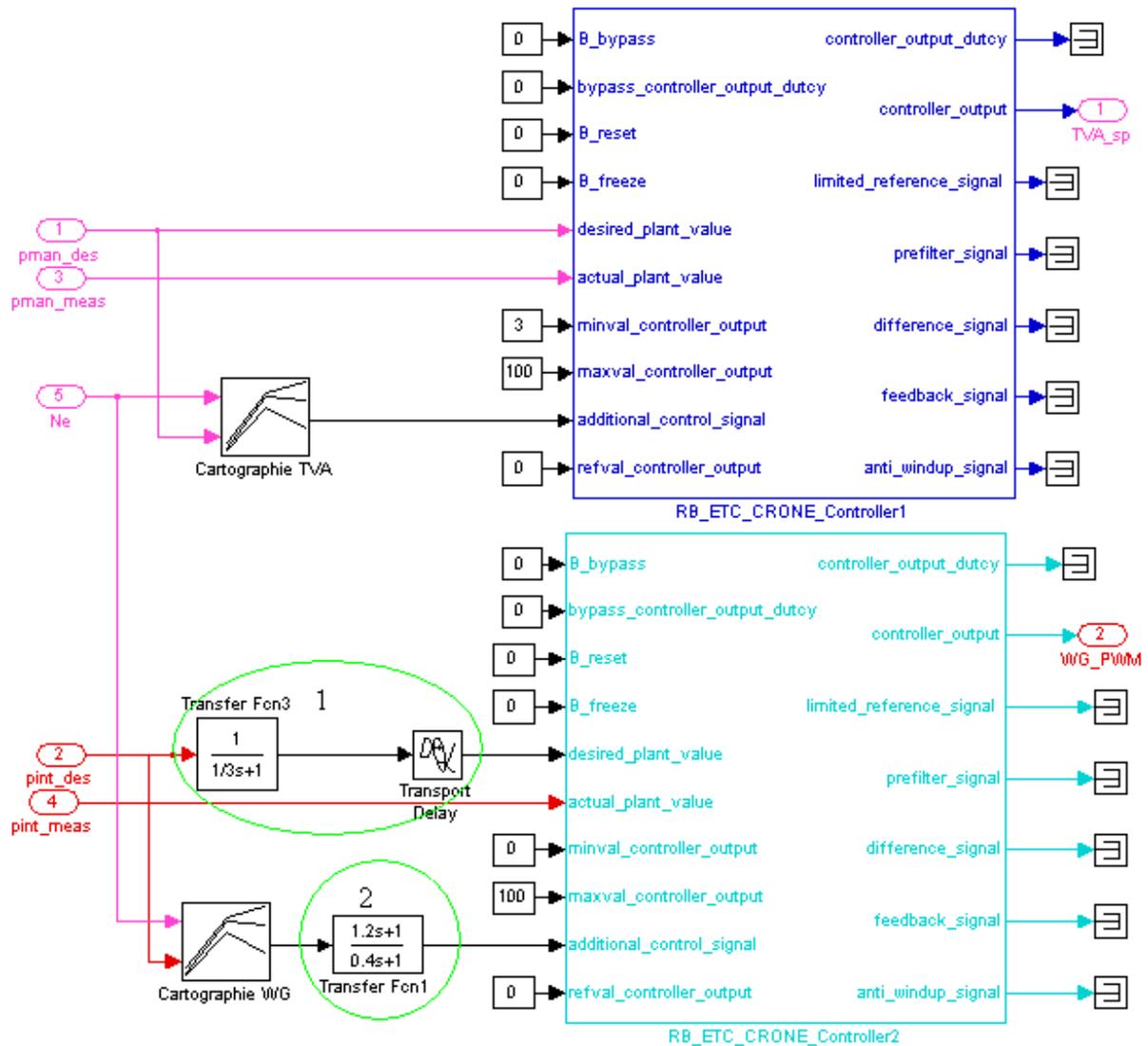


Figure 4. 40 : Forme du régulateur implémenté sur le simulateur puis sur le banc d'essais

C'est un bloc régulateur du même type qui est utilisé pour asservir la position du papillon d'admission. Les pressions de référence (**Pint_sp** et **Pman_sp**) sont filtrées par une fonction de transfert du premier ordre avec un gain statique de 1 et une constante de temps de 100 ms. Après un ensemble de simulations et de tests sur le banc d'essais, de petites oscillations ont été détectées sur les pressions pour des petites charges ainsi que pour de petits angles d'ouverture du papillon. Ces oscillations semblent être le résultat d'à-coup ou de frottement sec, le gain de la partie intégrale du régulateur de position papillon a été abaissé à -40dB pour des angles d'ouverture inférieurs à 0.6°. Alors que ces oscillations disparaissent sur le simulateur (qui ne modélise que la partie statique du frottement sec), elles ne sont que réduites

sur le banc d'essais. La Figure 4. 41 présente les oscillations observées en simulation avec ou sans la réduction du gain intégral du régulateur de position du papillon d'admission.

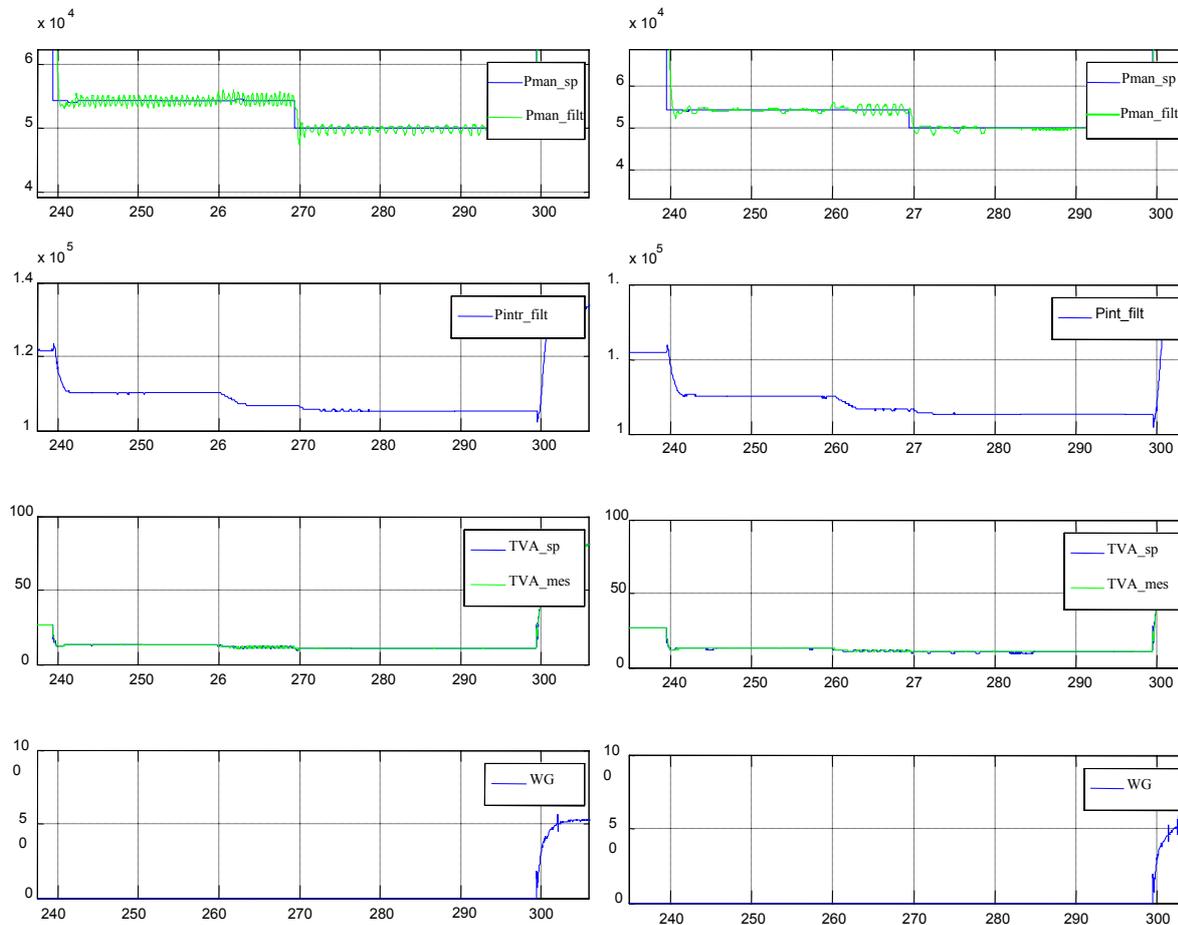


Figure 4. 41 : Oscillations observées sans (gauche) et avec (droite) la réduction de gain de la partie intégrale du contrôleur de papillon d'admission

Les Figures 4. 43 et 44 montrent les résultats obtenus avec le simulateur sous Simulink. Le couple et le régime moteur pour la phase de test font tous partie de l'ensemble de points identifiés (Figure 4. 29). La loi de commande a ensuite été testée avec succès sur le banc moteur de l'institut PRISME (Figures 4. 44 et 45). Comme le montrent des agrandissements des temps de montée et de descente les plus longs (Figures 4. 46 et 47), les résultats obtenus permettent d'avoir des temps respectivement limités à 1 et 0.5 seconde.

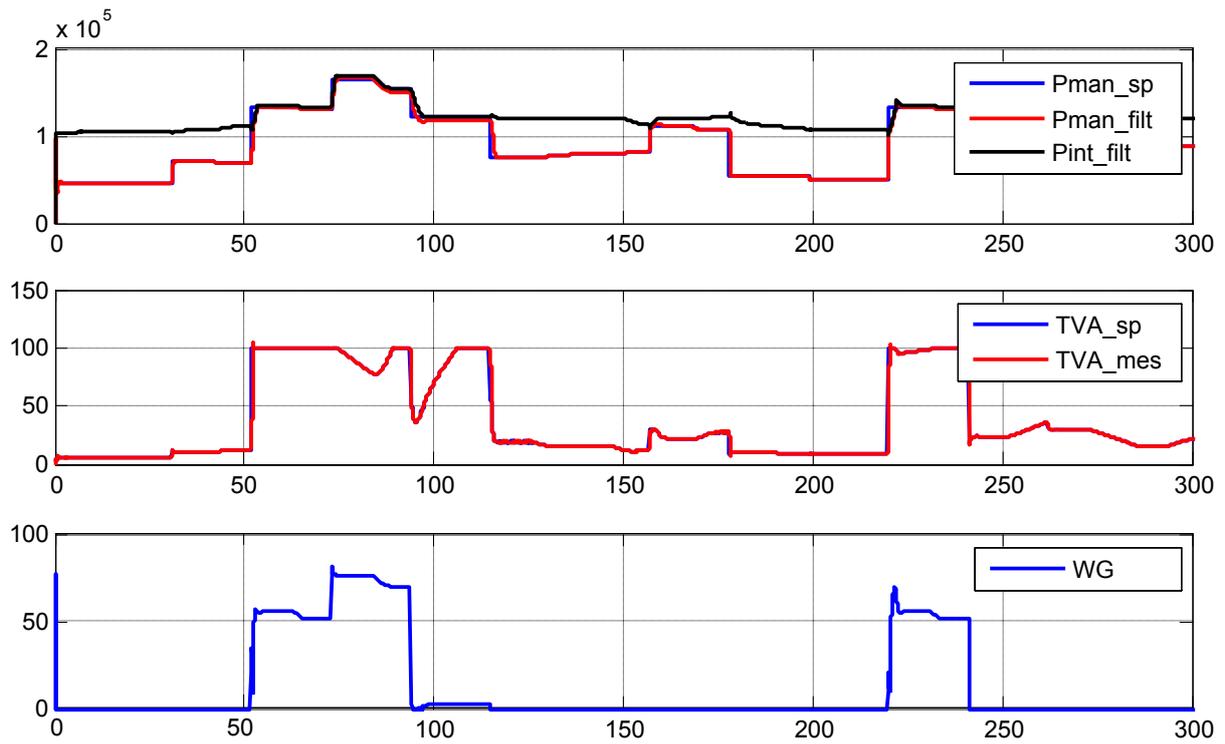


Figure 4. 42 : Première partie des essais sur simulateur de la loi de commande permettant le contrôle des pressions de collecteur (Pman) et de suralimentation (Pint)

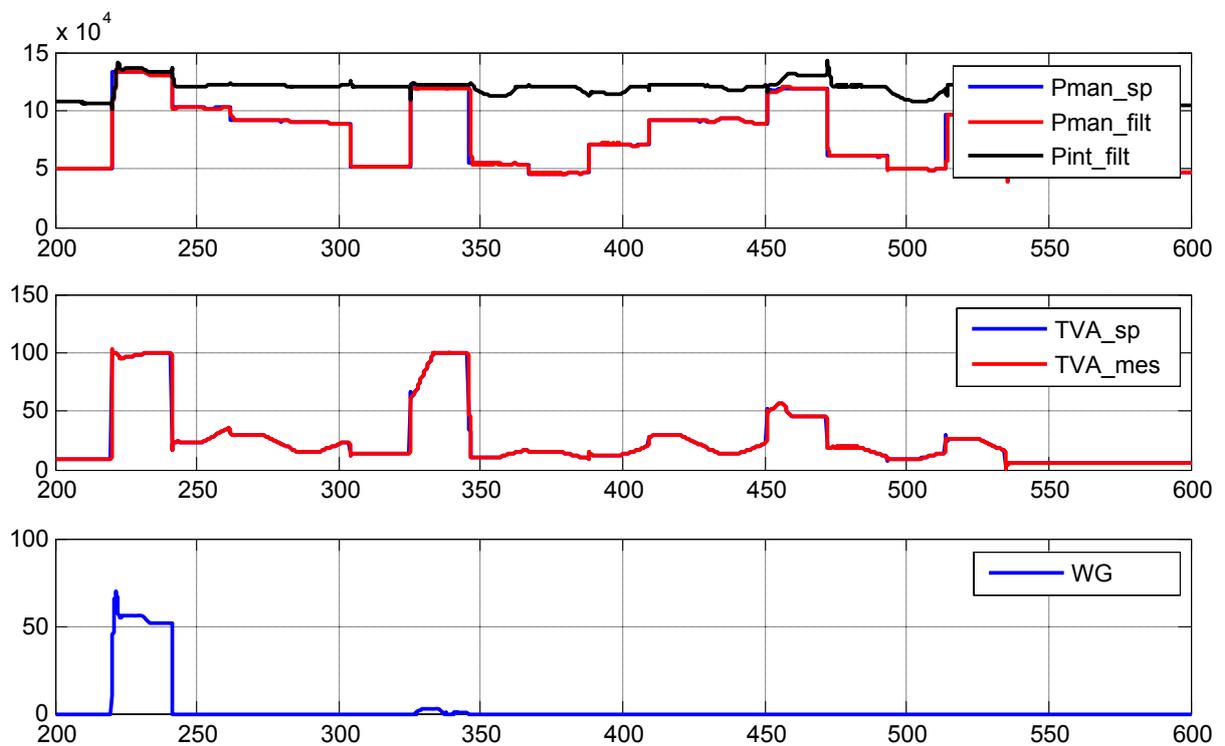


Figure 4. 43 : Deuxième partie des essais sur simulateur de la loi de commande permettant le contrôle des pressions de collecteur (Pman) et de suralimentation (Pint)

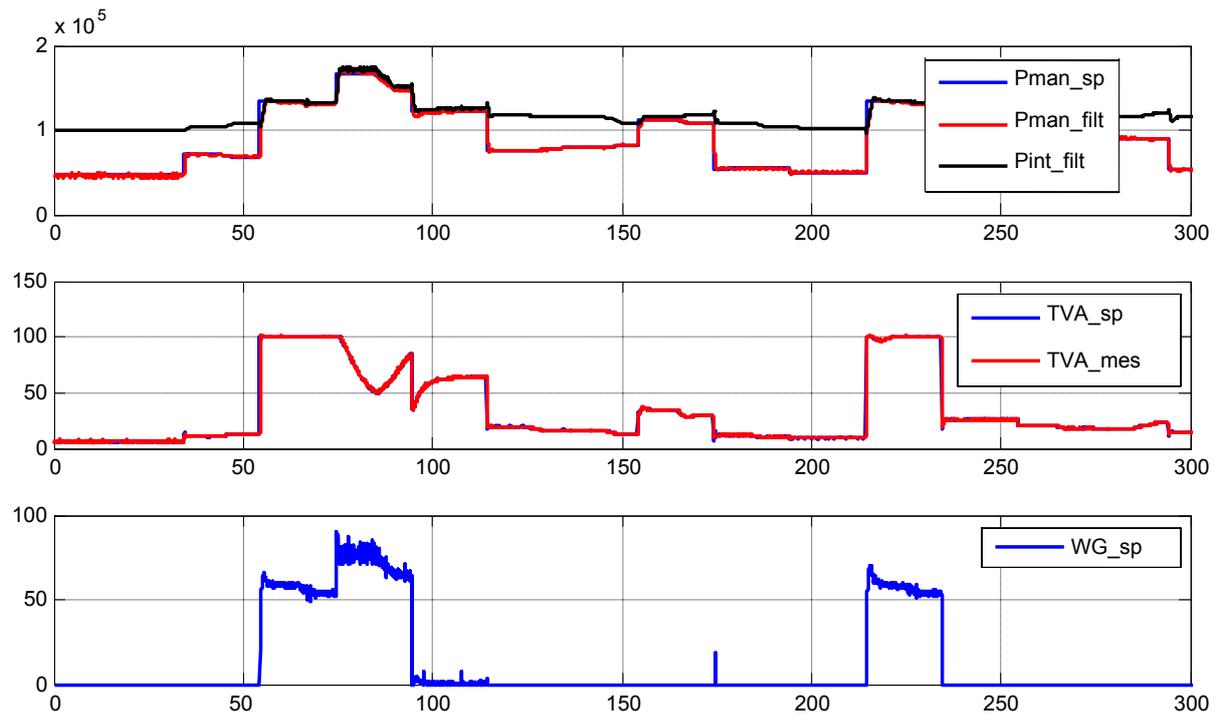


Figure 4. 44 : Première partie des essais sur banc moteur de la loi de commande permettant le contrôle des pressions de collecteur (Pman) et de suralimentation (Pint)

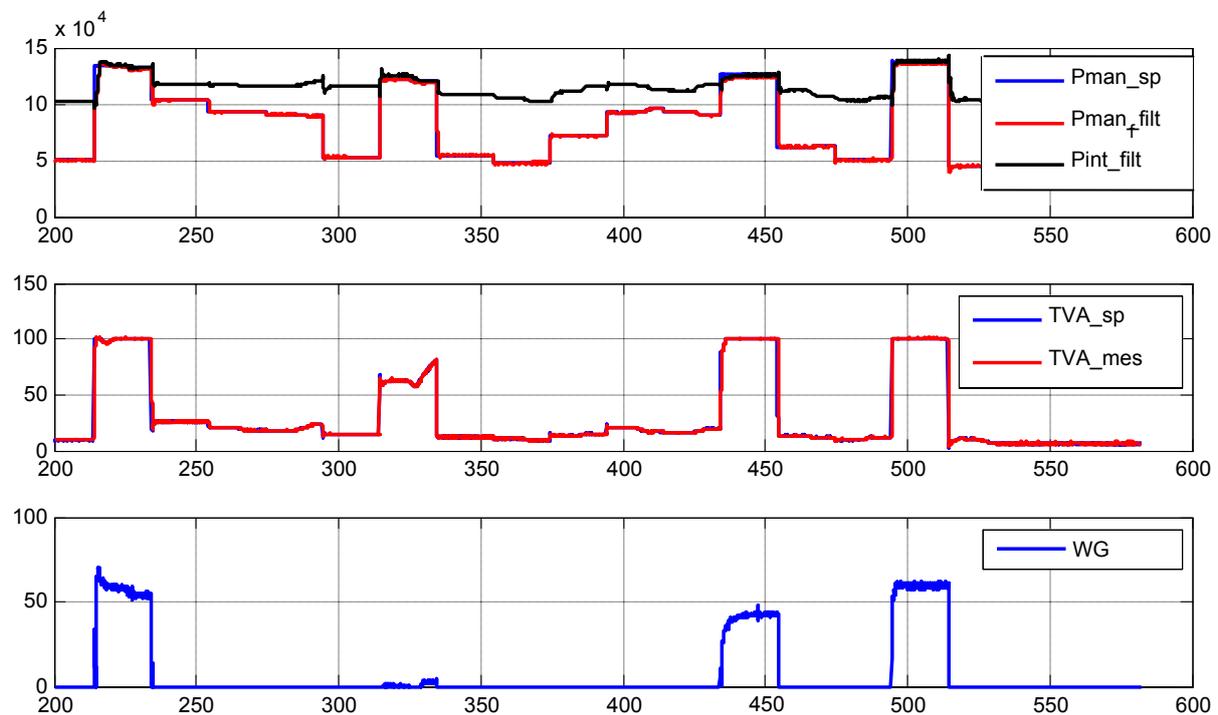


Figure 4. 45 : Deuxième partie des essais sur banc moteur de la loi de commande permettant le contrôle des pressions de collecteur (Pman) et de suralimentation (Pint)

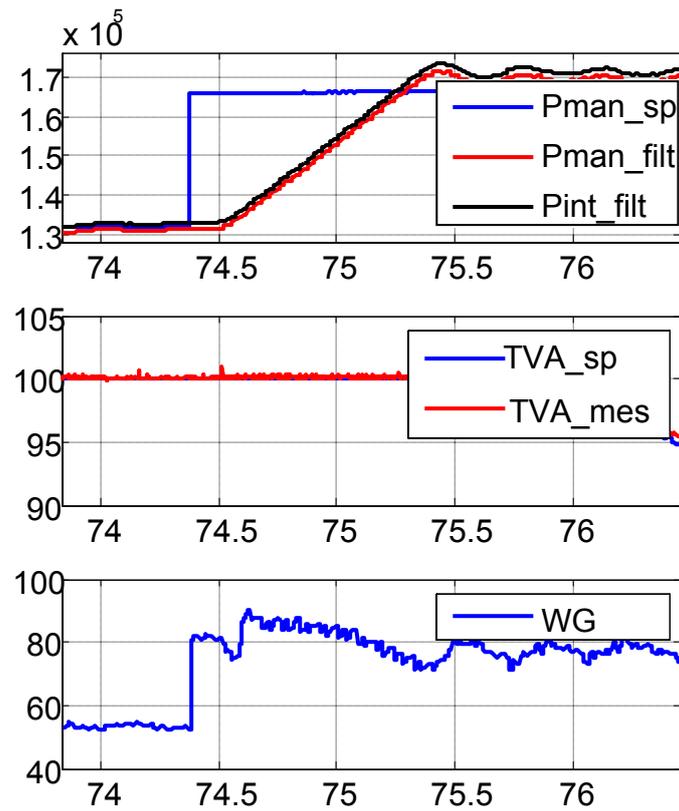


Figure 4. 46 : Temps de montée le plus long observé lors des essais sur banc moteur

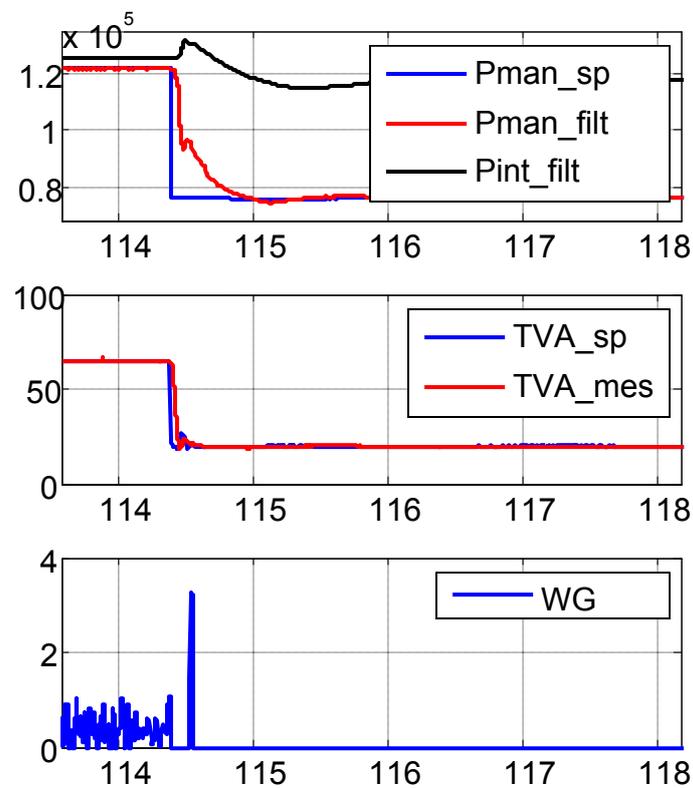


Figure 4. 47 : Temps de descente le plus long observé lors des essais sur banc moteur

L'analyse des données obtenues sur le banc d'essais met en évidence la persistance des oscillations basse charge (avant $t = 50s$). Les résultats obtenus au banc d'essais comme au simulateur sont concluants et nous permettent de valider d'une part le simulateur et d'autre part la loi de commande envisagée. Elles permettent aussi de valider l'approche de commande "orientée modèle" qui n'est pas si fréquemment utilisée dans l'industrie automobile.

4.4. Moteur Diesel

4.4.1. Principe de fonctionnement

De par son rendement supérieur à celui du moteur à essence et donc une consommation nettement inférieure, la part de marché du moteur Diesel en 2005 est estimée à 50% des voitures neuves (Europe). L'inconvénient majeur de ce type de moteur est son rejet important de particules et d'oxyde d'azote. Grâce à de nouvelle technologie (EGR, turbocompresseur à géométrie variable, etc.) les performances des moteurs Diesels ont évolué considérablement depuis le début des années 1990. Les émissions de particules ont été réduites de plus de 80%, celles d'oxydes d'azote (NO_x) et d'hydrocarbures imbrûlés (HC) de 90% environ et celles d'oxyde de carbone (CO) de presque 97%.

Le rapport volumétrique représente le nombre de fois que le mélange admis dans le cylindre sera compressé quand le piston sera au PMH (rapport volume occupé par le mélange admis quand le piston se trouve au PMB par volume qui sera occupé par le mélange ou l'air d'admission en fin de compression). Il y est beaucoup plus élevé que dans un moteur à allumage commandé, en sorte que la température en fin de course de compression atteint 500 à 1050°C sous une pression de 30 à 110 bars (30 à 50 pour les moteurs atmosphériques et 80 à 110 pour les moteurs suralimentés) [Chauvin, 2006]. La combustion du moteur Diesel se fait en deux étapes qui sont la phase de mélange de l'air et du gasoil (« pré-mix ») puis une phase de diffusion pendant laquelle le résidu de gasoil injecté est brûlé. Durant la phase de mélange le gasoil est pulvérisé et mélangé avec l'air. Cette phase commence en fin de compression. Une fois les conditions de mélange validées, le mélange brûle spontanément après un délai nommé le **délai d'inflammation** (Figure 4. 48). Ce délai dépend de l'indice de cétane du carburant, de la taille des microgouttelettes de gazole injecté et de l'homogénéité du mélange obtenu.

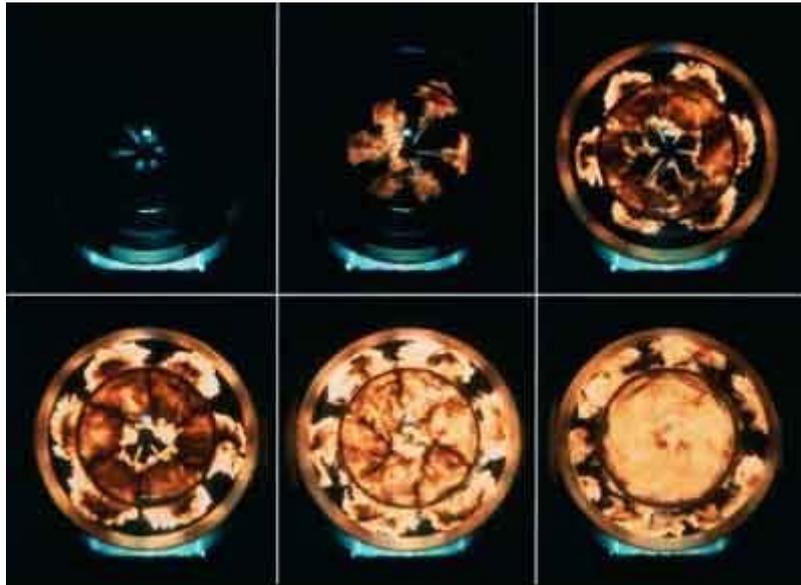


Figure 4. 48 : Auto-inflammation dans la chambre de combustion d'un cylindre du mélange air/carburant injecté par injecteur à 6 trous

Malgré des techniques d'injections perfectionnées, les microgouttelettes de carburant ne peuvent pas être pulvérisées suffisamment finement ce qui contraint de prévoir un important coefficient d'excès d'air de combustion de manière à respecter les contraintes thermiques de la chambre de combustion et les contraintes relatives aux émissions de particules.

La portion d'énergie chimique du carburant transformée en travail mécanique utile au vilebrequin du moteur, c'est-à-dire le rendement de la combustion se situe souvent entre 0.3 et 0.4 pour un moteur Diesel et est inférieure à 0.35 pour un moteur à essence. Le cycle de fonctionnement du moteur diesel à 4 temps est similaire au cycle du moteur à allumage commandé décrit au paragraphe 4.2.1. L'originalité du cycle de fonctionnement du moteur Diesel se situe dans les phases de compression et de combustion/détente. En effet lors de la phase de compression le cylindre ne comprime que de l'air frais ou le mélange air frais/gaz brûlé, l'injection de carburant ne se produisant qu'à la fin de la phase de compression.

On a alors le cycle suivant :

Admission

- Le piston descend et la soupape d'admission s'ouvre.
- L'air frais s'engouffre dans le cylindre.

Compression

- La soupape d'admission se ferme et le piston remonte.
- L'air est comprimé et s'échauffe fortement.

- Lorsque le piston atteint les 9/10ème de sa course environ, une quantité définie de carburant est injectée.

Détente

- Les soupapes sont fermées.
- Le mélange d'air et de carburant contenu dans le cylindre est sous pression.
- La température est suffisamment élevée pour que ce mélange brûle en créant une surpression qui pousse le piston vers le bas.

Echappement

- La soupape d'échappement s'ouvre.
- Le piston remonte chassant les gaz brûlés vers la sortie d'échappement.

Le moteur reçoit donc sur l'ensemble de sa plage de régime un débit d'air globalement constant. La régulation de la charge est obtenue en modifiant la quantité de carburant injecté ; le moteur diesel dispose ainsi d'un contrôle de qualité, dans la mesure où le mélange air/carburant peut varier entre deux points de fonctionnement.

4.4.2. Les enjeux

Les inconvénients des premiers moteurs Diesel n'existent plus du fait de l'apparition des turbocompresseurs, des vannes de recirculation des gaz brûlés et des rampes communes d'injection. Ces nouveaux actionneurs ont permis d'augmenter considérablement les performances du moteur Diesel, notamment en bas régime, tout en respectant le compromis performance-pollution-consommation. Certains problèmes subsistent, notamment l'émission de particules polluantes (les filtres à particules étant assez coûteux) et d'oxydes d'azote. Ces particules d'oxydes d'azote sont créées en présence d'oxygène à des températures élevées nécessaires, par ailleurs à un bon rendement. Il semble par conséquent difficile de diminuer les NO_x sans diminuer le rendement des moteurs, ce dernier ayant une incidence directe sur l'émission du gaz carbonique responsable de l'effet de serre. Afin de lutter contre les émissions polluantes des moteurs Diesel, les constructeurs automobiles proposent en Europe différentes solutions reposant soit sur l'optimisation des combustions, soit sur un post-traitement des émissions polluantes entre le moteur et le pot d'échappement (pot catalytique pour les CO, HC et NO_x et filtre à particules).

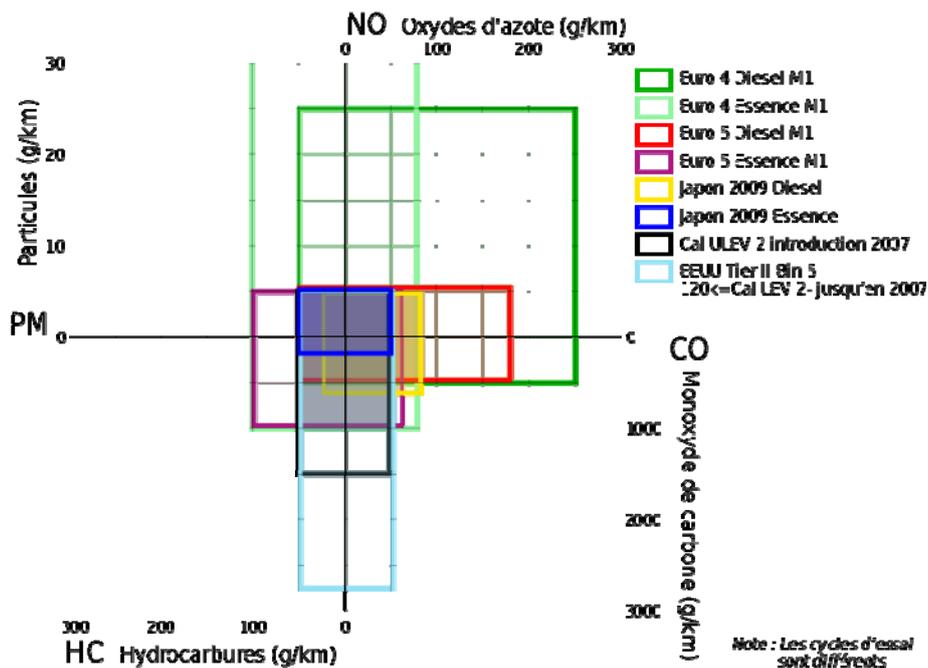


Figure 4.49 : Comparaison des valeurs limites d'émissions des voitures dans l'Union Européenne, au Japon et aux Etats-Unis

4.4.3. La recirculation des gaz brûlés

Après une première commercialisation sur des moteurs à essence puissants prévus pour les Etats-Unis, la recirculation des gaz brûlés (EGR) s'est imposée récemment comme le procédé le plus efficace et le plus économique pour abaisser les émissions de NO_x à bas régime. Le principe de fonctionnement de ce dispositif est illustré Figure 4.50. Le dispositif comprend une vanne permettant l'ouverture et la fermeture du circuit afin de limiter le recyclage dans les phases de forte charge, ainsi que des échangeurs pour refroidir les gaz d'échappement.

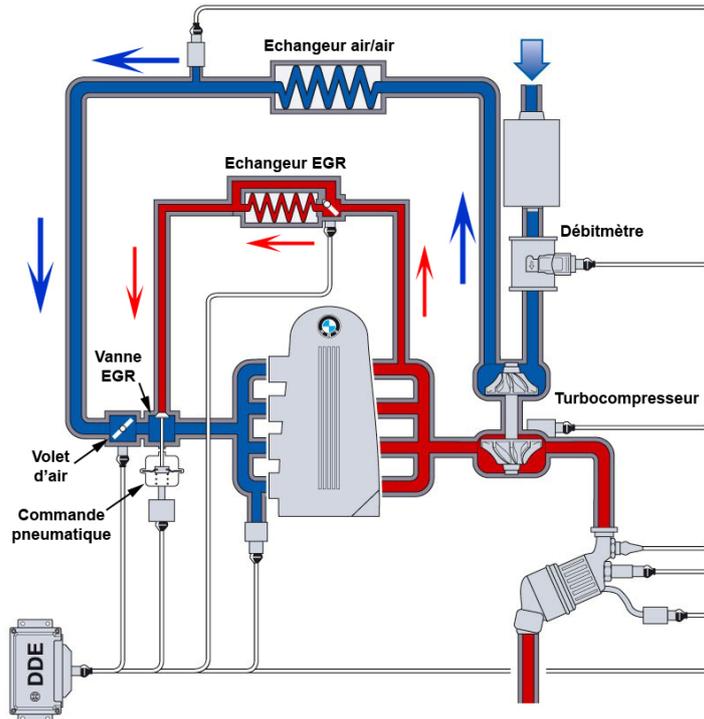


Figure 4. 50 : Illustration du dispositif de recirculation des gaz brûlés

a. EGR Diesel

Un excédent d'air et une température très élevée lors de la combustion forme une grande quantité d'oxyde d'azote. En effet l'oxygène de l'excédant d'air et l'azote de l'air de combustion se combinent pour former du monoxyde d'azote et du dioxyde d'azote. La recirculation des gaz brûlés dans le conduit d'admission permet la réduction de la concentration en oxygène de l'air dans le cylindre et donc la réduction de la quantité d'oxyde d'azote créée. De plus la chaleur massique du CO_2 contenu dans les gaz d'échappement absorbe une partie de la chaleur générée par la combustion, entraînant un abaissement de la température de combustion, et donc aussi de la température à l'échappement. En contrepartie un fort taux de recyclage peut favoriser la formation de CO et de HC (manque d'air dans le cylindre) et peut aussi augmenter la taille des particules. Il apparaît donc un compromis diminution NO_x -Particule qui peut être en partie résolu par l'installation d'un filtre à particules (coût élevé).

Le recyclage des gaz d'échappement s'effectue en charge partielle, condition où le moteur est en fort excédent d'air. Il est aussi parfois utilisé pour les phases de ralenti. Sur un moteur atmosphérique, la pression supérieure des gaz d'échappement en sortie de culasse par rapport à celle à l'admission (dépression) ne pose aucun problème de débit alors que pour les moteurs suralimentés, la contre-pression à l'échappement est parfois insuffisante à faible charge. Il est

alors nécessaire de fermer partiellement un volet d'air disposé entre le compresseur et l'arrivée d'EGR. Afin d'accroître la réduction de la température et la densité des gaz recyclés, et donc les émissions de NO_x , un échangeur peut être utilisé. L'échangeur permet d'abaisser la température des gaz jusqu'à 300°C pour les systèmes les plus efficaces. Pour certains démarrages à froid un passage court-circuitant l'échangeur (Figure 4. 51) peut accélérer la montée en température du catalyseur traitant les CO et les HC.

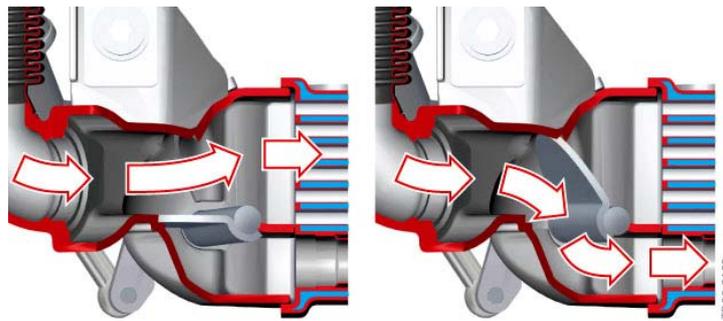


Figure 4. 51 : Illustration d'un volet By-pass sur l'échangeur

c. EGR essence

Beaucoup moins usitée pour les moteurs à allumage commandé, la recirculation des gaz d'échappement offre malgré tout de grands avantages. Deux types d'EGR sont proposés : l'EGR externe (charge partielle sur les moteurs à injection directe et charge stratifiée) et l'EGR interne (mi-régime et faible charge).

EGR essence interne

Un nombre grandissant de moteurs à essence utilise le calage variable de la distribution afin de créer un EGR interne. Le but étant d'abaisser la température de combustion et donc de réduire les émissions d'oxydes d'azote ou au contraire augmenter la température de combustion lors des démarrages à froid (catalyseur). Des déphaseurs d'arbres à cames retardent la fermeture des soupapes d'échappement et avancent l'ouverture des soupapes d'admission ce qui permet de ré-aspirer des gaz d'échappement dans les cylindres (Figure 4. 52). Les gaz dissipés dans la tubulure d'admission et une partie de ceux dans l'échappement sont aspirés à la descente du piston. Ce type d'EGR est économique mais le taux de recyclage des gaz est limité et ceux-ci ne peuvent pas être refroidis.

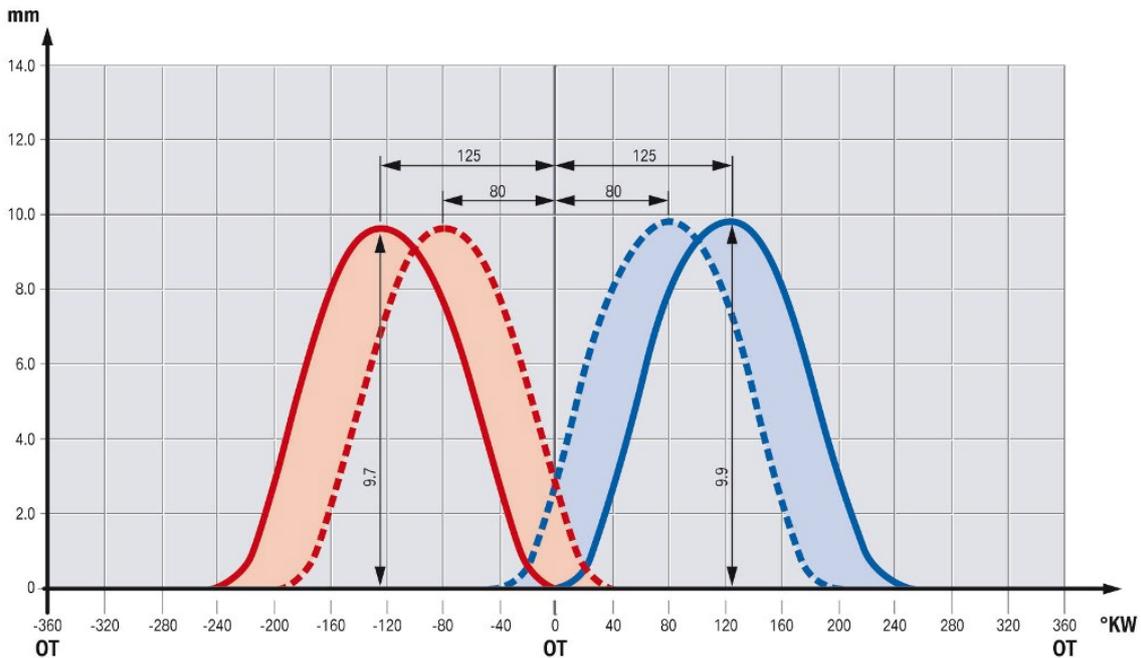


Figure 4. 52 : Illustration d'un système de recirculation des gaz brûlés interne par déphasage de l'arbre à came (rouge ouverture de la soupape d'échappement et bleu ouverture de la soupape d'admission).

EGR essence externe

L'EGR externe est essentiellement utilisé sur les moteurs à injection directe en charge partielle ou stratifiée pour les mêmes raisons que le moteur Diesel, à savoir une formation accrue des NO_x en combustion pauvre. La gestion du moteur doit prendre en compte avec précision la quantité d'oxygène contenue dans les gaz d'échappement (sonde lambda et capteur de position de la vanne EGR) pour adapter la quantité de carburant à injecter. Les gaz d'échappement sont récupérés avant ou après le catalyseur d'oxydation et introduits dans le circuit d'admission après le papillon. Les avantages supplémentaires de l'EGR externe sur les moteurs à allumage commandé sont la réduction des pertes par pompage et l'augmentation de la pression en fin de compression (impact positif sur la consommation de carburant et les émissions de CO_2).

La Figure 4. 53 permet d'illustrer et de comparer l'intérêt des différents types de recirculation des gaz brûlés pour un moteur à allumage commandé en fonction du régime moteur.

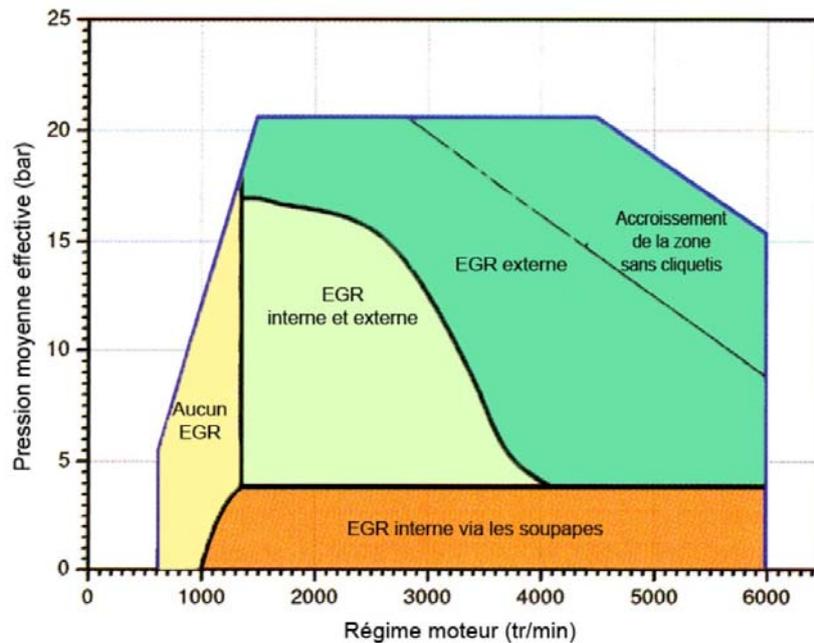


Figure 4. 53 : Représentation du potentiel d'application de l'EGR dans différentes zones d'utilisation du moteur à essence

d. Inconvénient de la recirculation des gaz brûlés

Les inconvénients de la vanne EGR sont :

- sa localisation, elle est placée dans une zone subissant des contraintes élevées, qu'elles soient thermiques, mécaniques ou chimiques.
- le « trou » à l'accélération que cette vanne peut provoquer, sachant que lors de sa fermeture elle génère un retard réduisant la quantité de gaz traversant la turbine du turbocompresseur.
- le passage en pompage du turbocompresseur lors d'une augmentation de charge avec fort recyclage des gaz, une forte réduction du débit en amont de la turbine pouvant amener le rapport pression/débit d'un turbocompresseur à ses limites et donc provoquer le pompage de ce dernier.

La boucle de recirculation des gaz brûlés basse et/ou haute pression (Figure 4. 54) est un des développements en cours de validation pour palier à quelques un de ces problèmes. Les moteurs suralimentés à essence posent aussi des problèmes de température trop élevée lorsqu'ils sont à pleine charge (1050°C à puissance maximale) ce qui contraint les motoristes à enrichir le mélange pour limiter la température des gaz (impact négatif sur la consommation).

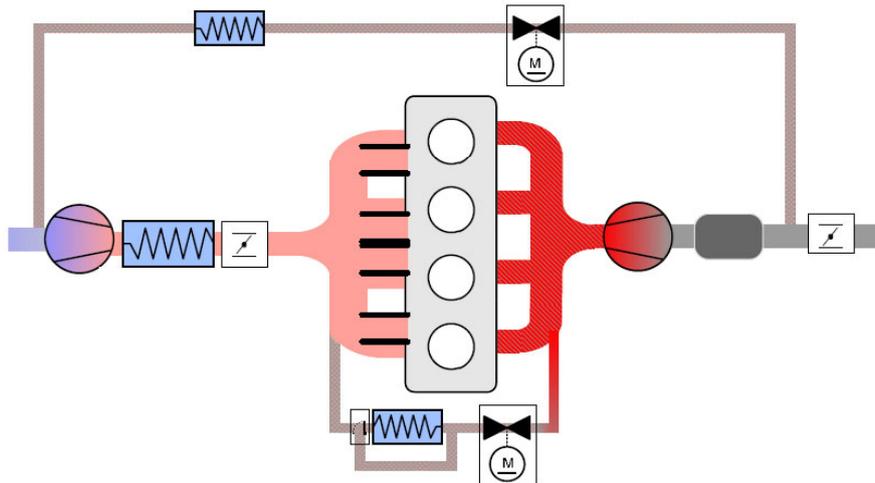


Figure 4. 54 : Illustration de l'EGR basse et haute pression

4.5. Commande CRONE d'un moteur Diesel

Le système à commander est un moteur diesel 2.2L avec suralimentation et recirculation des gaz brûlés. Pour des raisons de confidentialités les caractéristiques de ce moteur ne seront pas données ici. Le simulateur (Figure 4. 55) et une loi de commande que nous nommerons « classique » sont fournis par l'entreprise Robert Bosch.

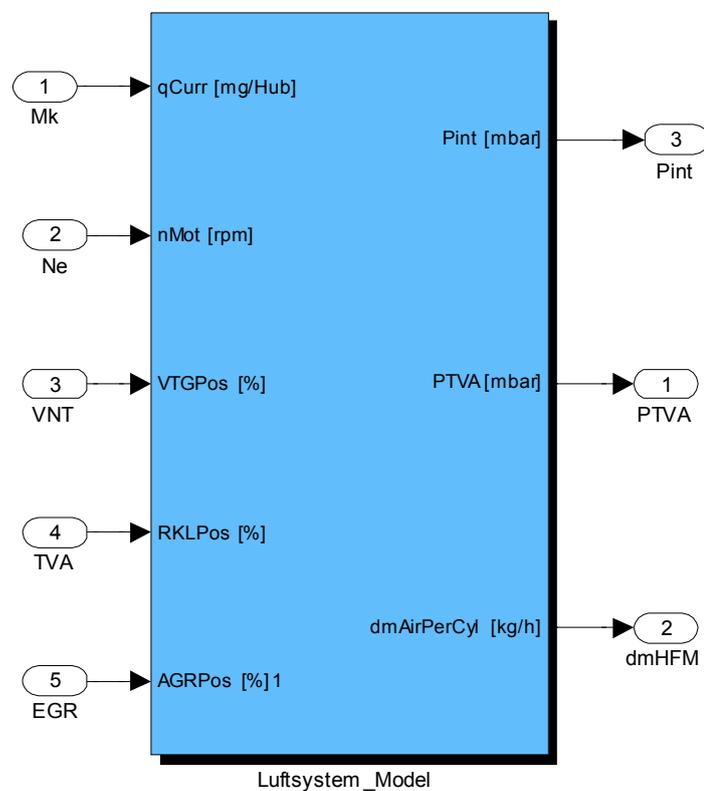


Figure 4. 55 : Simulateur du moteur Diesel fourni par Robert Bosch (Allemagne)

Les actionneurs du moteur d'étude sont le papillon d'admission, la vanne de recirculation des gaz brûlés et les aubes (ou ailettes) du turbocompresseur à géométrie variable (Figure 4. 56).

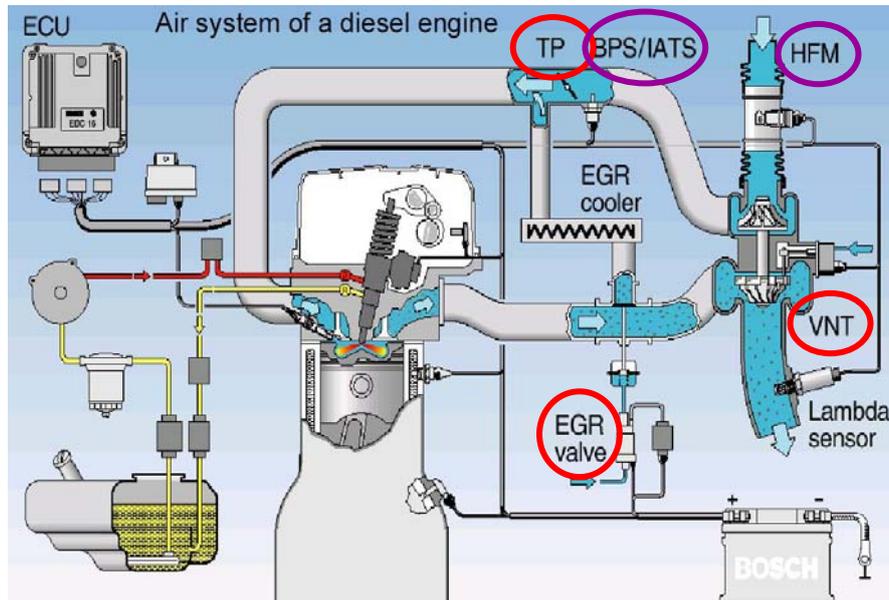


Figure 4. 56 : Système d'air d'un moteur Diesel à trois actionneurs : aubes du turbocompresseur (VGT), vanne de recirculation des gaz brûlés (EGR) et papillon d'admission (TVA)

Pour le moteur Diesel l'objectif est la régulation du couple et de la quantité de gasoil injecté par cylindre. Un contrôle très fin des masses d'air frais et gaz brûlé dans le collecteur d'admission est nécessaire pour assurer une bonne combustion et donc une bonne gestion du compromis pollution-consommation-performances. Les sorties de notre modèle (Figure 4. 57 (a)) sont la pression de suralimentation (P_{int}), la pression après le papillon d'admission (P_{TVA}) et le débit d'air frais (dm_{HFM}). Le taux de gaz brûlé en recirculation est un paramètres qui n'est accessible que par l'utilisation d'observateurs.

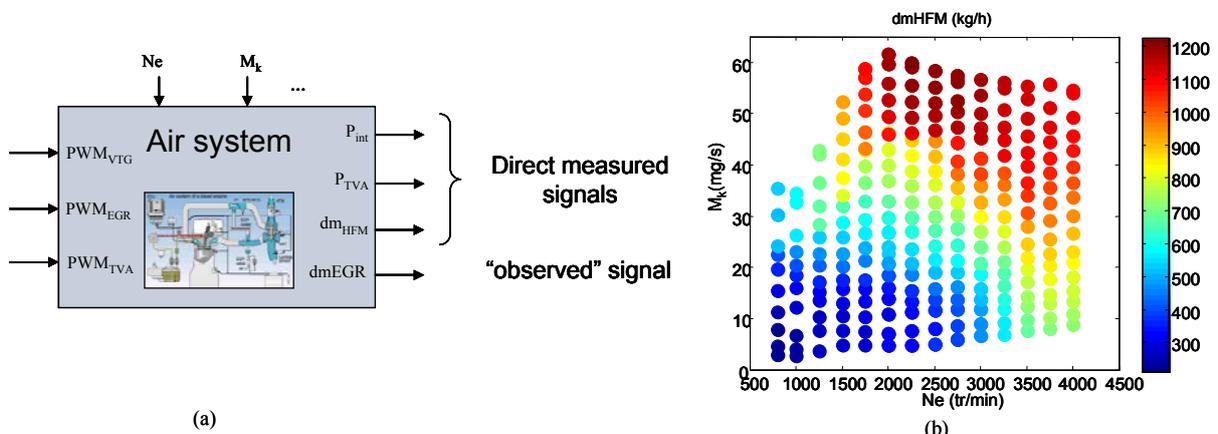


Figure 4. 57 : (a) Schéma fonctionnel du système à commander et (b) cartographie des points de fonctionnements considérés

La première partie de ce sous chapitre sera consacrée à l'étude du système à commander, cette étude se fera d'un point de vue motoriste. Enfin la portabilité de la méthodologie proposée pour commander le moteur à allumage commandé sera vérifiée sur le moteur Diesel.

4.5.1. Identification et analyse du système

a. Identification

Jusqu'au début des années 1990, la commande du système d'air était effectuée en boucle ouverte par feedforward. Les phénomènes transitoires y sont considérés comme une succession de points d'équilibre sans qu'aucune dynamique ne soit prise en compte. Bien évidemment de telles commandes peuvent entraîner des problèmes de robustesse et conduire à des performances limitées. Pour résoudre les problèmes de robustesse et gérer au mieux le compromis pollution-performance-consommation de nouvelles approches ont été développées. Elles permettent de prendre en compte le modèle dynamique scalaire ou multivariable du système.

Nous avons considéré ici un ensemble de 357 points de fonctionnement (Figure 4. 57 (b)) définis par des couples régime moteur/quantité de gasoil injecté. Chaque point de fonctionnement du système d'air est associé à l'ensemble des variables mesurables expérimentalement (pression de suralimentation, débit d'air frais, quantité de gasoil injecté...) et aux valeurs des actionneurs permettant de gérer au mieux le compromis pollution-performance-consommation. Le bruit est un élément supplémentaire qui a été intégré à ce compromis.

80 points ont ensuite été sélectionnés pour couvrir l'ensemble de la plage de fonctionnement du moteur (Figure 4. 58). Autour de ces 80 points, une identification harmonique réalisée avec la même approche que pour l'application précédente (multisinus) fournit les réponses fréquentielles présentées par la Figure 4. 59).

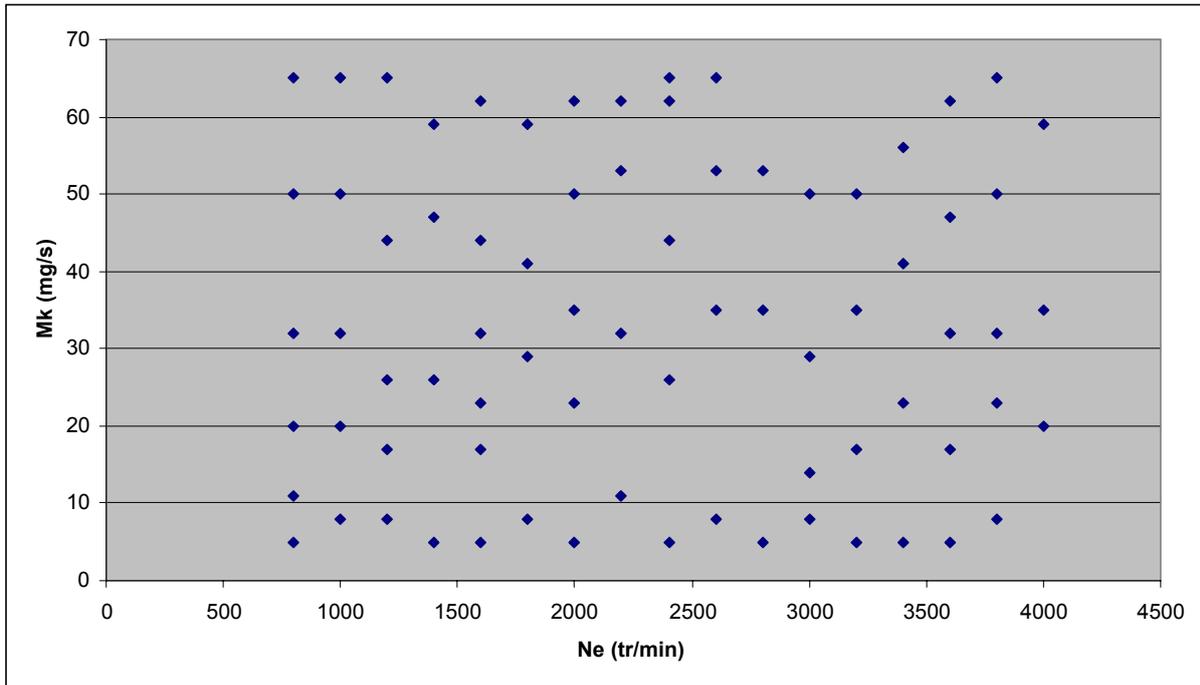


Figure 4. 58 : Ensemble des 80 points de fonctionnement sélectionnés

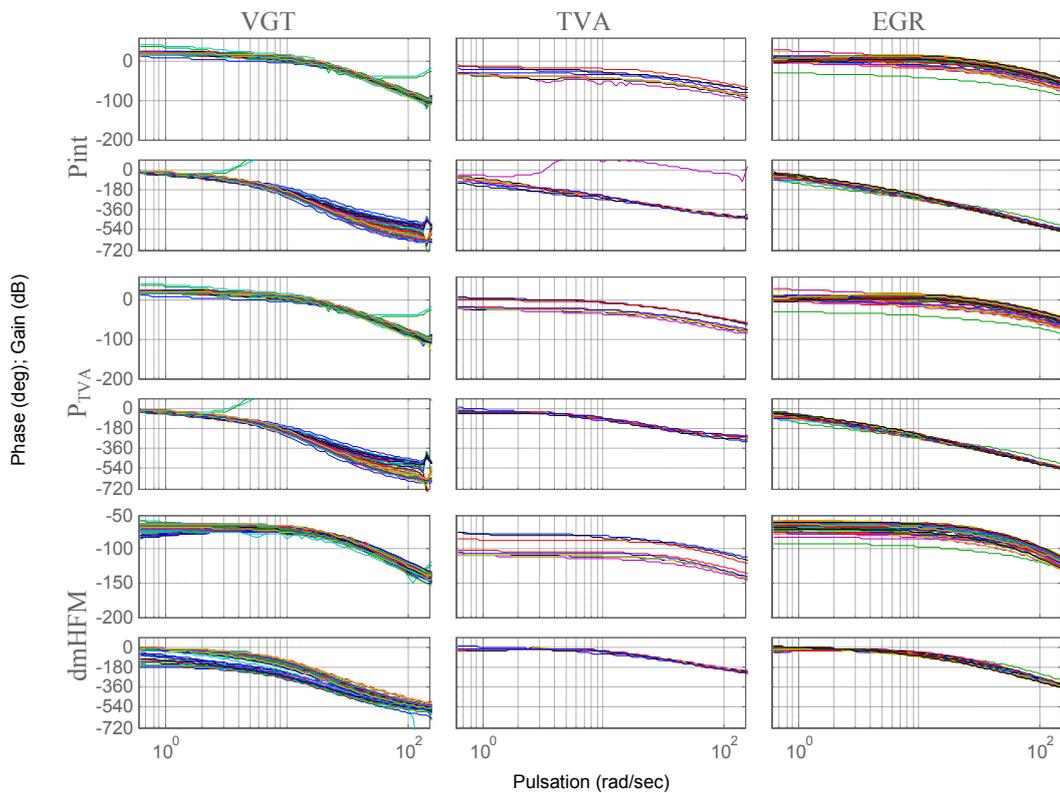


Figure 4. 59 : Réponses fréquentielles pour les 80 points de fonctionnement du moteur liant les trois actionneurs aux trois sorties mesurables

Une analyse de ce système permet de définir les sorties à commander ainsi que le type de régulateur qui peut être utilisé.

b. Analyse du moteur d'un point de vue motoriste

Afin d'obtenir une combustion homogène tout en satisfaisant le compromis pollution-consommation-performances, la combustion doit se produire avec une grande quantité de gaz brûlé à l'intérieur de la chambre de combustion. Le but du contrôle du système d'air est donc de contrôler la masse d'air (frais et déjà brûlé) à l'intérieur du cylindre. Cette variable n'étant pas directement mesurable, on considère des variables permettant d'avoir la meilleure indication de la composition de l'air à l'intérieur du cylindre.

Les variables accessibles sont la pression de suralimentation P_{int} , la pression d'admission P_{TVA} et le débit d'air frais dm_{HFM} . L'idéal serait de commander la pression de suralimentation et le taux τ_{EGR} de gaz brûlé en recirculation. En effet, la pression de suralimentation serait alors significative de la quantité d'air admise dans le cylindre, le taux de gaz brûlé en recirculation donnant lui une image de la proportion de gaz brûlé dans le cylindre [Chauvin, 2006]. N'ayant pas accès aux fonctions de transfert liant la grandeur τ_{EGR} et les trois entrées d'actionneurs, il convient de choisir parmi les trois sorties mesurées lesquelles seraient les plus pertinentes.

Après avoir discuté de l'effet d'une dilution de l'air frais par les gaz d'échappement en recirculation, l'effet de chacun des actionneurs sur les sorties mesurées sera étudié.

Effet de la dilution par recirculation des gaz brûlés

Les effets de la dilution de l'air frais admis sont nombreux, cependant dans notre cadre d'étude les plus importants sont liés aux émissions de polluants et à la combustion.

En effet, la combustion se produit malgré tout à un endroit de la chambre de combustion où le rapport d'oxygène et de gasoil est proche du rapport stœchiométrique. La dilution en oxygène due à la recirculation des gaz brûlés entraîne la formation de zone où le déficit en air (surtout en oxygène) est notable ce qui empêche tous les atomes de carbone de participer à la combustion et par conséquent contribue à la formation de particules. En contrepartie, le déficit en oxygène permet de réduire la formation d'oxyde d'azote (NO_x).

Par ailleurs, l'EGR augmente le délai d'allumage, c'est à dire le temps entre l'auto-inflammation du mélange air/carburant et sa combustion., la proportion de carburant brûlé durant la phase de mélange étant alors augmentée. Le manque d'oxygène raréfie l'apparition

du phénomène d'auto-inflammation (phase de mélange) et l'allongement du délai d'allumage permet de diminuer la température et la pression en sortie de cylindre.

Enfin, lorsque la charge du moteur augmente l'EGR et la masse d'air frais doivent augmenter ce qui nécessite une pression de suralimentation élevée. Cela peut entraîner un pompage du turbocompresseur (l'EGR agit comme la wastegate pour le turbocompresseur).

c. Impact des trois actionneurs sur le système d'air

Les actionneurs proposés sont la vanne EGR (ouverture maximum à basse charge pour réduire la pollution), les ailettes du turbocompresseur et le papillon d'admission. Deux types de signaux (des sauts échelons et des rampes 0→100%) sont utilisés pour observer l'influence des différents actionneurs sur les sorties mesurées et notamment pour visualiser les phénomènes de couplages présents.

Influence de l'EGR

La fermeture de la vanne EGR permet de diminuer le taux de gaz brûlé dans le collecteur d'admission et fait croître la pression de suralimentation et la masse d'air frais (Figure 4. 60). Tous les gaz d'échappement sont utilisés pour accélérer la rotation du turbocompresseur.

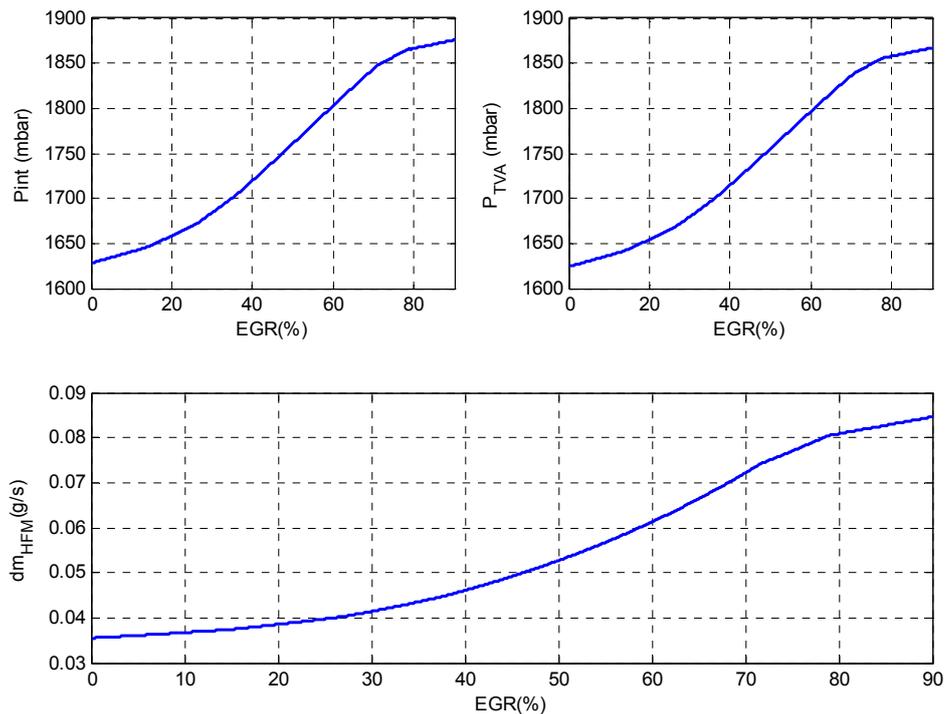


Figure 4. 60 : Simulation obtenue autour du point de fonctionnement $Ne=2500$, $Mk=25$, $TVA=0\%$ de fermeture et $VGT=100\%$ d'ouverture, en faisant varier (rampe de 0 à 90%) le pourcentage de fermeture de la vanne EGR

Influence de l'ouverture des ailettes du turbocompresseur

La fermeture des ailettes de la turbine pour des niveaux d'injection faible aide à maintenir une pression élevée à travers la vanne EGR. Les variations du débit d'air (dm_{HFM}) vis-à-vis du turbocompresseur sont fonctions du pourcentage de fermeture de la vanne EGR. En effet pour une vanne EGR presque totalement ouverte, une augmentation de l'ouverture du VGT entraîne une augmentation du débit d'air. Pour une vanne EGR totalement fermée, une augmentation du VGT entraîne une décroissance du débit d'air frais Figure 4. 61.

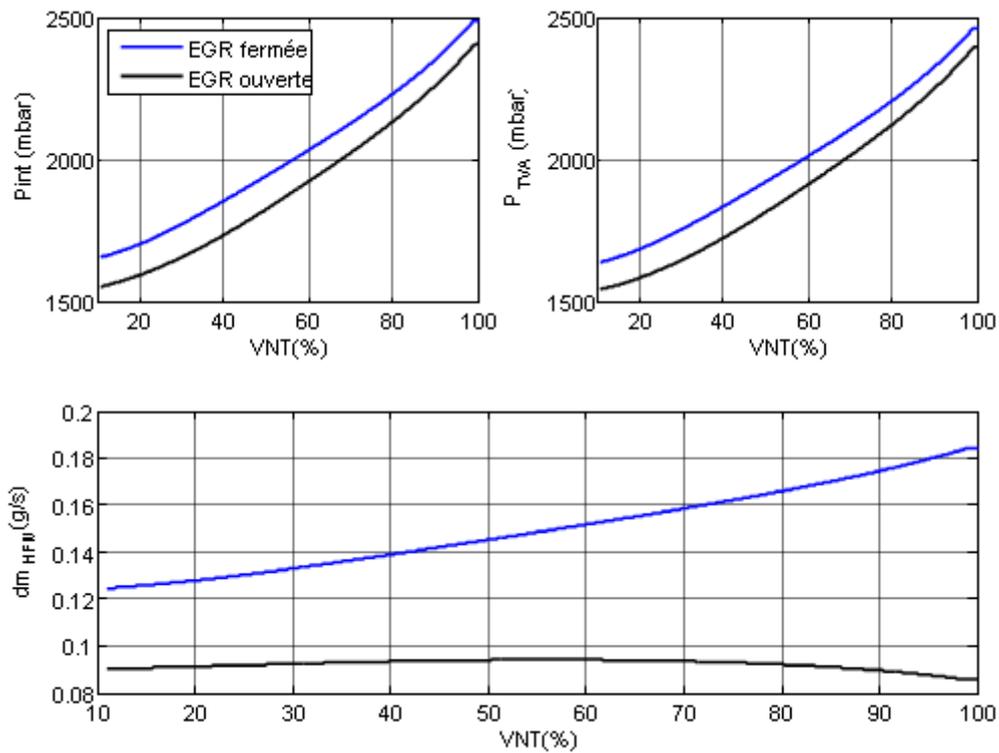


Figure 4. 61 : Simulations obtenues autour du point de fonctionnement $Ne=4000$, $Mk=36$, $TVA=0\%$ de fermeture et EGR fermée ou ouverte, en faisant varier (rampe de 0 à 100%) le pourcentage d'ouverture des ailettes du turbocompresseur

Influence de la fermeture du papillon d'admission

Lorsque le papillon d'admission est fermé, les pressions de suralimentation et d'admission décroissent et par conséquent le débit d'air frais aussi.

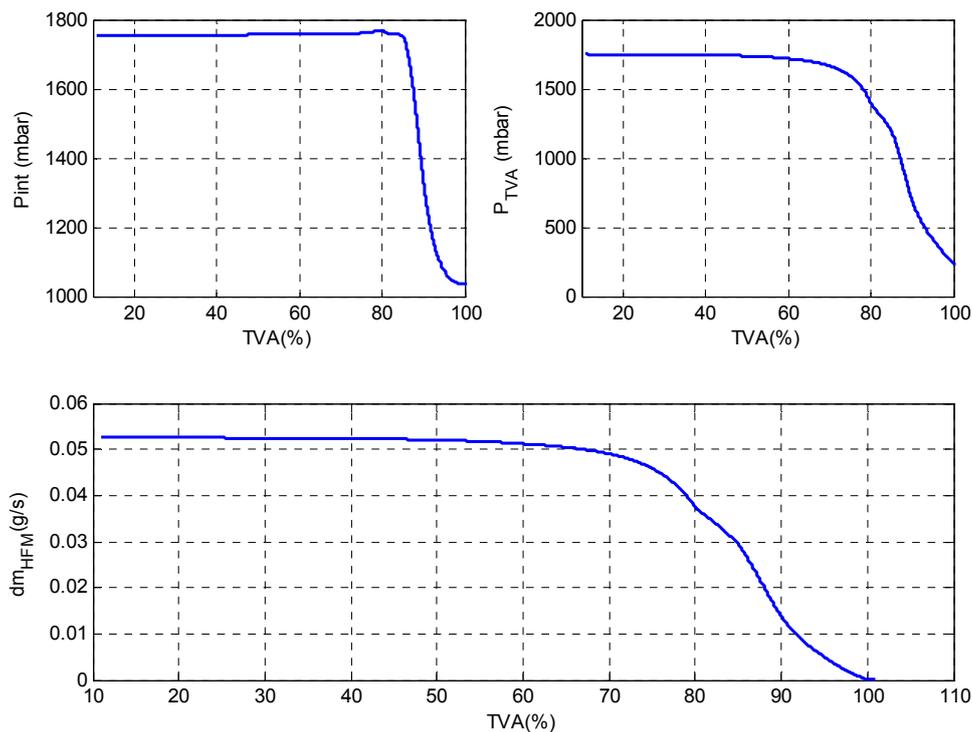


Figure 4. 62 : Simulation obtenue autour du point de fonctionnement $Ne=2500$, $Mk=25$, $EGR=50\%$ de fermeture et $VGT=100\%$, en faisant varier (rampe de 0 à 100%) le pourcentage de fermeture du papillon

En résumé, d'après les Figure 4. 60 à 62 on observe :

1. le papillon agit essentiellement sur les pressions,
2. la vanne EGR agit aussi bien sur les pressions que sur le débit d'air frais,
3. les ailettes du turbocompresseur agit essentiellement sur le débit d'air frais.

Caractère à non-minimum de phase du système

Comme décrit dans la littérature le système d'air d'un moteur Diesel est un système très couplé et difficile à commander du fait de dynamiques très variées et d'un caractère à non minimum de phase. Le couplage a été mis en évidence au paragraphe précédent. Le caractère à non minimum de phase peut être mis en évidence en agissant sur les actionneurs avec des signaux de type échelon.

Caractère à non minimum de phase du turbocompresseur

Lorsqu'on applique un échelon décroissant sur l'actionneur VGT deux types de phénomènes peuvent se produire :

1. soit la vanne EGR est totalement ouverte et les pressions et débit d'air décroissent (Figure 4. 63),
2. soit la vanne EGR est presque totalement ouverte et les pressions diminuent alors que le débit d'air augmente (Figure 4. 64).

Dans le premier cas la courbe de débit présente une augmentation de quelques grammes par seconde avant que le débit ne décroisse et atteigne son régime permanent. Ce comportement est celui d'un système à non-minimum de phase [Skogestad, 2005]. Au contraire, quand la vanne EGR est ouverte le débit augmentera brusquement dans le même sens que sa variation normale avant de se stabiliser. A taux d'injection et régime moteur constant, l'ouverture des ailettes de la turbine entraîne la décroissance de la compression et donc la diminution de la pression de suralimentation (Figure 4. 63 et 64). Le turbocompresseurs à géométrie variable (VGT) agit donc comme une vanne de décharge et permet de prévenir les problèmes de dépassement pour les taux élevés d'injection de gasoil.

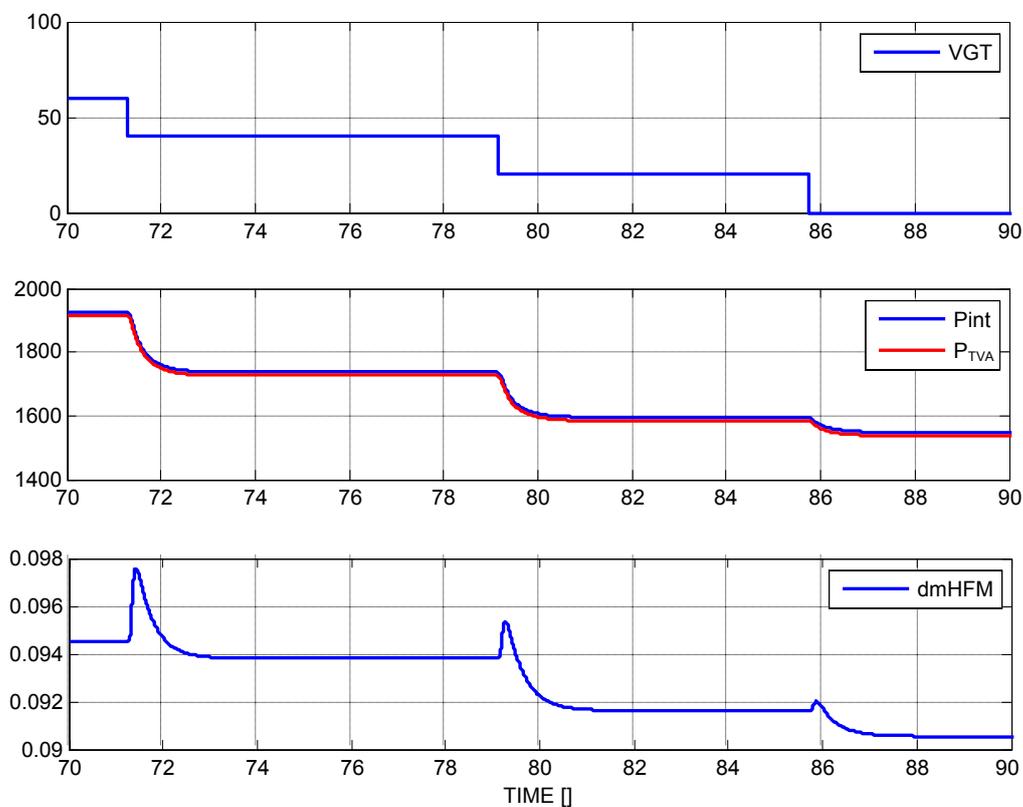


Figure 4. 63 : Simulation obtenue autour du point de fonctionnement $Ne=4000$, $Mk=36$, $EGR=0\%$ de fermeture et $TVA=0\%$ de fermeture, en faisant varier par palier le pourcentage de d'ouverture des ailettes du turbocompresseur

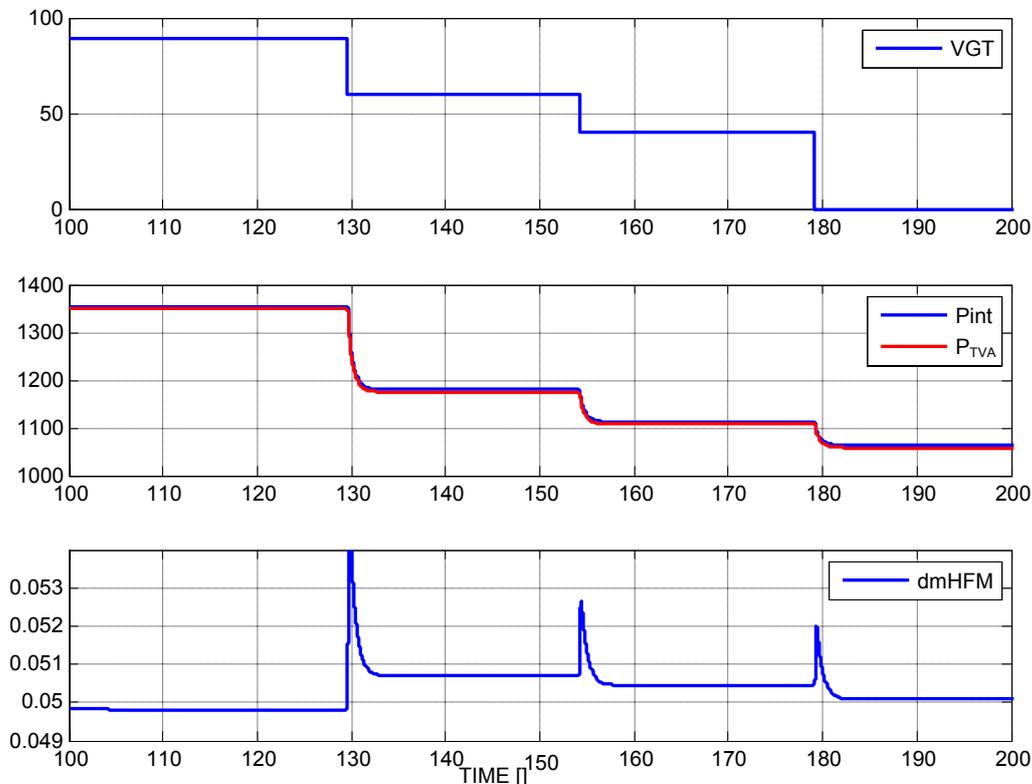


Figure 4. 64 : Simulation obtenue autour du point de fonctionnement $Ne=3000$, $Mk=12$, $EGR=50\%$ de fermeture et $TVA=0\%$ de fermeture, en faisant varier par palier le pourcentage de d'ouverture des ailettes du turbocompresseur

Caractère à non minimum de phase de la vanne EGR

Lorsque l'on applique un échelon décroissant sur la vanne EGR, les pressions et le débit d'air décroissent. En effet en appliquant successivement des valeurs allant de 100% de fermeture jusqu'à 0% de fermeture, on ouvre progressivement la vanne EGR et donc on diminue le pourcentage de gaz d'échappement arrivant au niveau de la turbine. Le compresseur tournant moins vite, les pressions finissent par diminuer. La Figure 4. 65 permet d'observer le caractère à non minimum de phase qu'a la vanne EGR sur les sorties P_{TVA} et P_{int} . La pression de suralimentation augmente momentanément car lors de l'ouverture brusque de la vanne EGR, le gaz s'engouffrant dans le conduit de recirculation a tendance à augmenter instantanément la pression P_{int} . Finalement, cette pression diminue, le débit au niveau de la turbine diminuant.

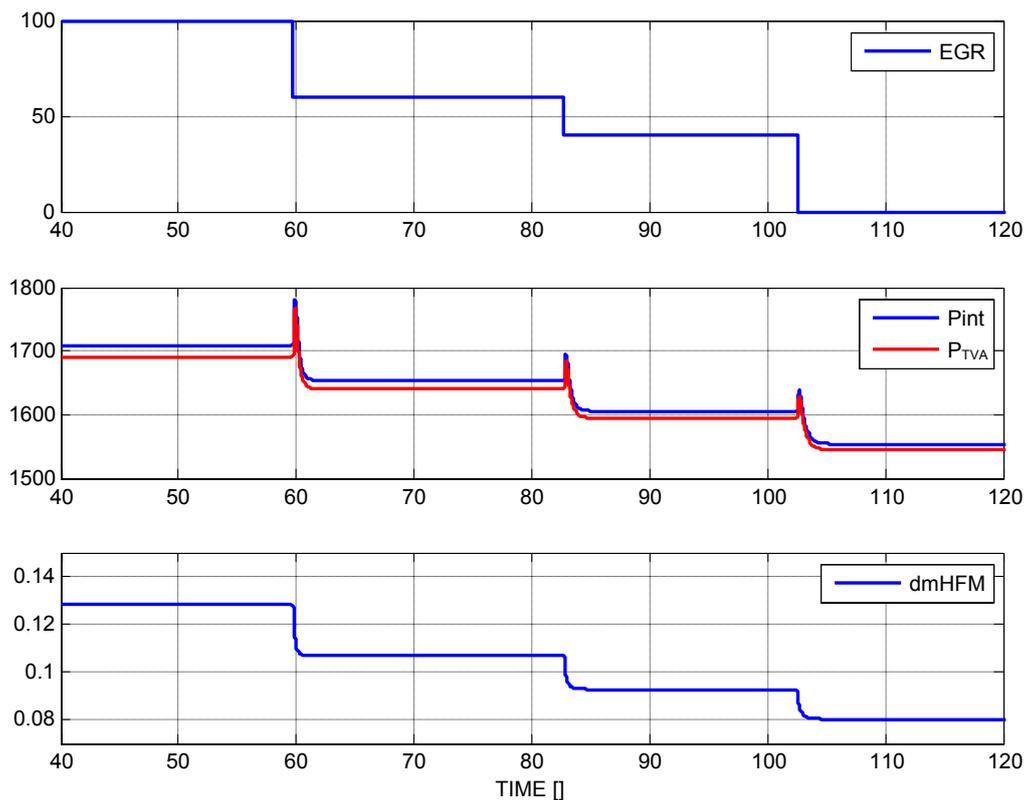


Figure 4. 65 : Simulation obtenue autour du point de fonctionnement $Ne=4000$, $Mk=25$, $VGT=100\%$ de fermeture et $TVA=0\%$ de fermeture, en faisant varier par palier le pourcentage de fermeture de la vanne EGR

En résumé la vanne de recirculation des gaz brûlés et les sorties mesurées (pressions et débit d'air) sont très fortement couplées et le transfert liant l'EGR aux pressions est à non-minimum de phase. Le turbocompresseur agit en premier lieu sur le débit d'air et cette action a pour conséquence d'agir sur les pressions. Le transfert entre le turbocompresseur et le débit d'air $dmHFM$ possède un caractère à non minimum de phase. Le papillon d'admission agit essentiellement sur les pressions. Cette étude nous a permis d'analyser le comportement naturel du moteur Diesel et de mettre en évidence d'importants phénomènes de couplage et des singularités dans certains transferts. On a pu observer que le moteur n'utilise pas les trois actionneurs en même temps soit parce que l'un d'eux est en saturation soit pour valider le compromis pollution-consommation-performance. Ces observations sont validées par les données fréquentielles obtenues par identification et par l'analyse RGA du système liant les actionneurs $\{VGT, TVA, EGR\}$ et les sorties $\{P_{int}, dmHFM\}$ illustrée Figure 4. 66. Les données d'identification fréquentielle montrent que, pour aucun des points de fonctionnement

identifiés la réponse fréquentielle de la matrice de transfert liant $\{VGT, TVA, EGR\}$ et les sorties $\{dmHFM, Pint\}$ est pleine. L'analyse RGA doit donc être nuancée. Dans les points de fonctionnement identifiés peu de points ont fourni un transfert liant le papillon d'admission à l'une des sorties. Par conséquent l'analyse est biaisée mais nous permet de confirmer qu'il y a un couplage plus important du turbocompresseur avec le débit d'air, de la vanne EGR avec la pression de suralimentation et que le papillon d'admission est fortement couplé à la pression de suralimentation.

Compte tenu des observations faites, la loi de commande développée cherchera à commander la pression de suralimentation en agissant sur les trois actionneurs et le débit d'air avec les actionneurs VGT et EGR.

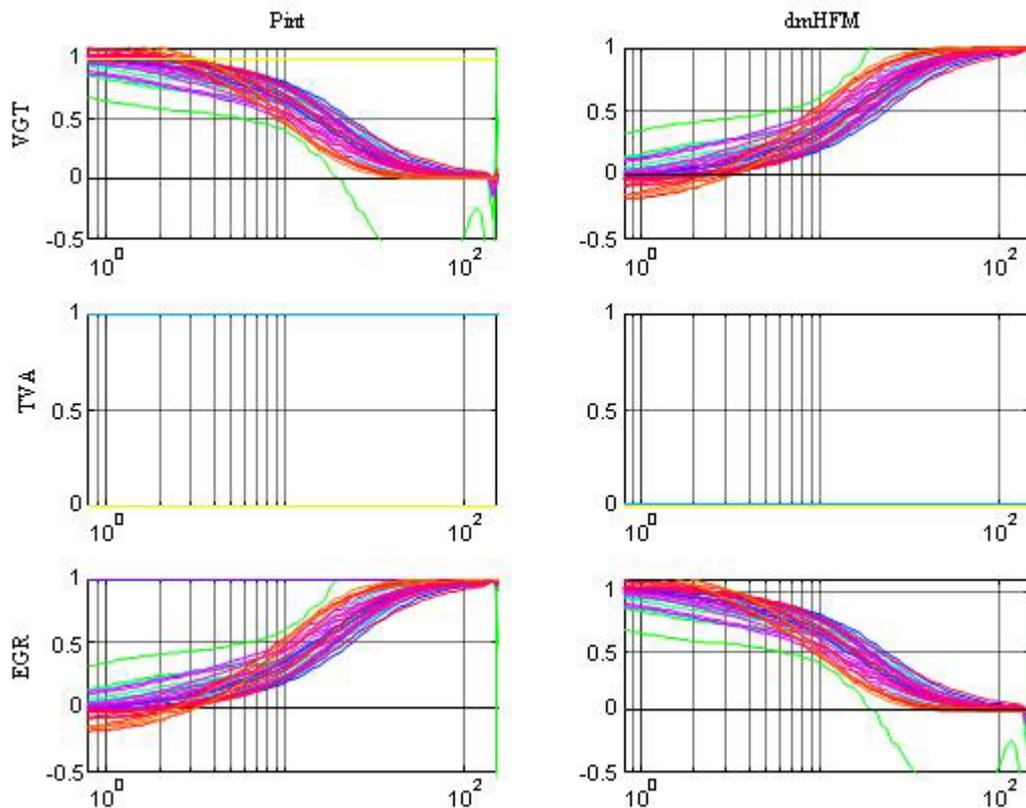


Figure 4. 66 : Analyse RGA des 80 points de fonctionnements identifiés pour le transfert $\{VGT, TVA, EGR\} \rightarrow \{dmHFM, Pint\}$

4.5.2. Calcul de la loi de commande

a. Détermination du procédé nominal

A l'aide du logiciel CRONE MIMO un modèle nominal est déterminé à partir de l'ensemble des 80 réponses fréquentielles mesurées (Figure 4. 58). La matrice de transfert de dimension 2x3 du procédé nominal est définie dans le domaine continu par :

$$G_{110}(s) = \frac{594779}{(s+12.9)^2(s+15.8)(s+8.7)} \quad (4.19)$$

$$G_{210}(s) = \frac{4.06}{(s+42.8)(s+14.6)(s+7.91)} \quad (4.20)$$

$$G_{120}(s) = \frac{144.36}{(s+41.6)(s+4.14)(s+2.29)(s+1.36)} \quad (4.21)$$

$$G_{220}(s) = 0 \quad (4.22)$$

$$G_{130}(s) = \frac{445.89}{(s+13.3)(s+3.78)(s+1.69)} \quad (4.23)$$

$$G_{230}(s) = \frac{33.8}{(s+54.3)(s+26.5)(s+23.5)} \quad (4.24)$$

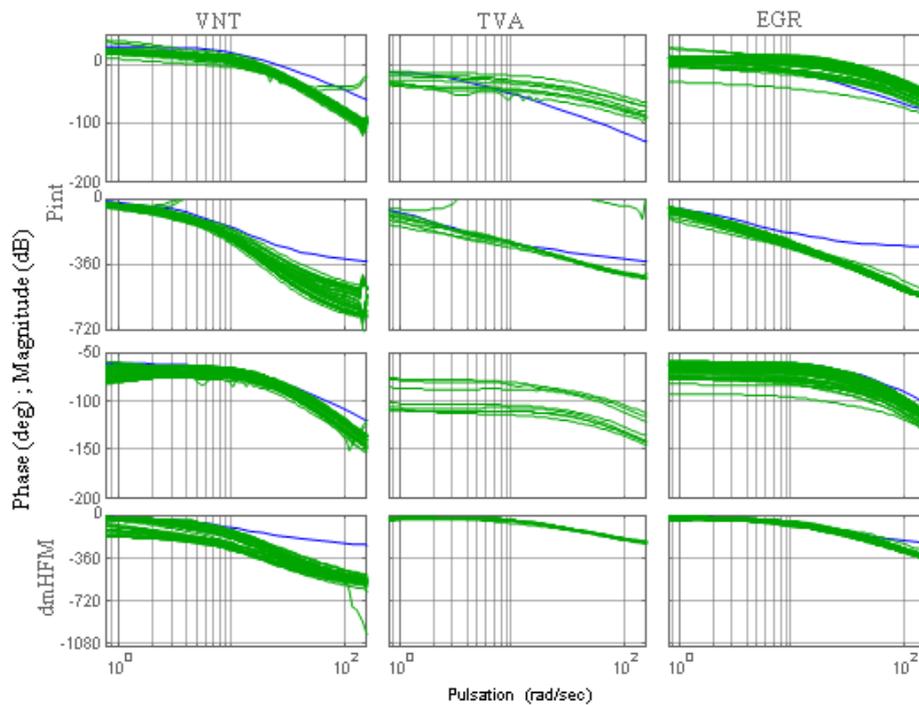


Figure 4. 67 : Réponses fréquentielles du modèle nominal $G_o(s)$ (bleu) et obtenues autour des 80 points de fonctionnement sélectionnés (vert)

a. Conception du régulateur robuste

Specifications

Les spécifications pour le système bouclé permettant de commander la pression de suralimentation et le débit d'air sont :

- un régulateur avec un gain basse fréquence très élevé afin d'assurer un suivi de trajectoire parfait
- un pic de résonance en boucle fermée de la matrice de transfert de sensibilité complémentaire inférieure à 3dB afin d'assurer un degré de stabilité suffisant quel que soit le point de fonctionnement
- un régulateur avec un gain hautes fréquences suffisamment petit pour ne pas faire apparaître trop de bruits de commande.

Optimisation des boucles ouvertes

La recherche des pôles et des zéros de la fonction de transfert nominale faite en utilisant l'outil de décomposition en valeur singulière révèle qu'aucun zéro ni pôle à partie réelle positive n'est commun à toutes les entrées du système. Par conséquent aucun zéro, pôle ou retard ne doit être inclu aux différentes fonctions de transfert en boucle ouverte.

Le procédé ne possède aucune partie intégrale, son ordre basse fréquence est nul. Le régulateur doit comporter un intégrateur pour assurer un gain faible de la fonction de sensibilité $G(s)S(s)$ en basse fréquence et donc assurer un bon suivi de trajectoire. Les boucles ouvertes fractionnaires nominales sont donc définies avec un ordre basse fréquence n_{li} égal à 1.

Le logiciel CRONE MIMO que nous avons développée, permet d'approximer la matrice pseudo-inverse $G_o^\dagger(s)$ de la matrice de transfert nominale. Les ordres hautes fréquences maximum n_{phi} relativement au deux colonnes de la matrice $G_o^\dagger(s)$ sont respectivement 3 et 4, l'ordre haute fréquence des deux boucles ouvertes fractionnaires nominales devra être, respectivement supérieur ou égal à 4 et 5 pour assurer une décroissance du gain du régulateur en haute fréquence. $n_{h1} = 5$ et $n_{h2} = 5$ garantissent un régulateur strictement propre.

La boucle ouverte fractionnaire nominale s'écrira donc :

$$\beta_1(s) = K \left(\frac{\omega_0}{s} + 1 \right)^{n_{11}} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{\frac{s}{\omega_0}} \right)^{a_0} \left(\Re_{/i} \left[\left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \right)^{ib'_0} \right] \right)^{-q_0 \text{sign}(b'_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1} \right)^{n_{h1}}} \quad (4.25)$$

$$\beta_2(s) = K \left(\frac{\omega_0}{s} + 1 \right)^{n_{12}} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{\frac{s}{\omega_0}} \right)^{a_0} \left(\Re_{/i} \left[\left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_1}}{1 + \frac{s}{\omega_0}} \right)^{ib'_0} \right] \right)^{-q_0 \text{sign}(b'_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1} \right)^{n_{h2}}} \quad (4.26)$$

Les paramètres des boucles ouvertes fractionnaires nominales sont optimisés suivant la méthodologie décrite au chapitre 3. Le contour de Nichols que chaque boucle ouverte fractionnaire nominale tangentera correspond à un pic de résonance de 0dB. Les paramètres optimisés sont:

- $\omega_r = 8 \text{rad/s}$, $\|\beta_{o1}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = -1 \text{dB}$,
- $\omega_0 = 0.01 \text{rad/s}$, $\omega_1 = 50 \text{rad/s}$,
- $a_0 = 0.97$, $b_0 = -0.29$,

pour la boucle de débit d'air, et

- $\omega_r = 6 \text{rad/s}$, $\|\beta_{o1}(j\omega)\|_{\omega=\omega_r} = 0 \text{dB}$,
- $\omega_0 = 0.001 \text{rad/s}$, $\omega_1 = 50 \text{rad/s}$,
- $a_0 = 1.03$, $b_0 = -0.36$,

pour la boucle de contrôle de pression de suralimentation.

La Figure 4. 68 montre les réponses fréquentielles des boucles ouvertes fractionnaires nominales optimisées ainsi que les boucles ouvertes équivalentes pour tous les points de fonctionnement du moteur.

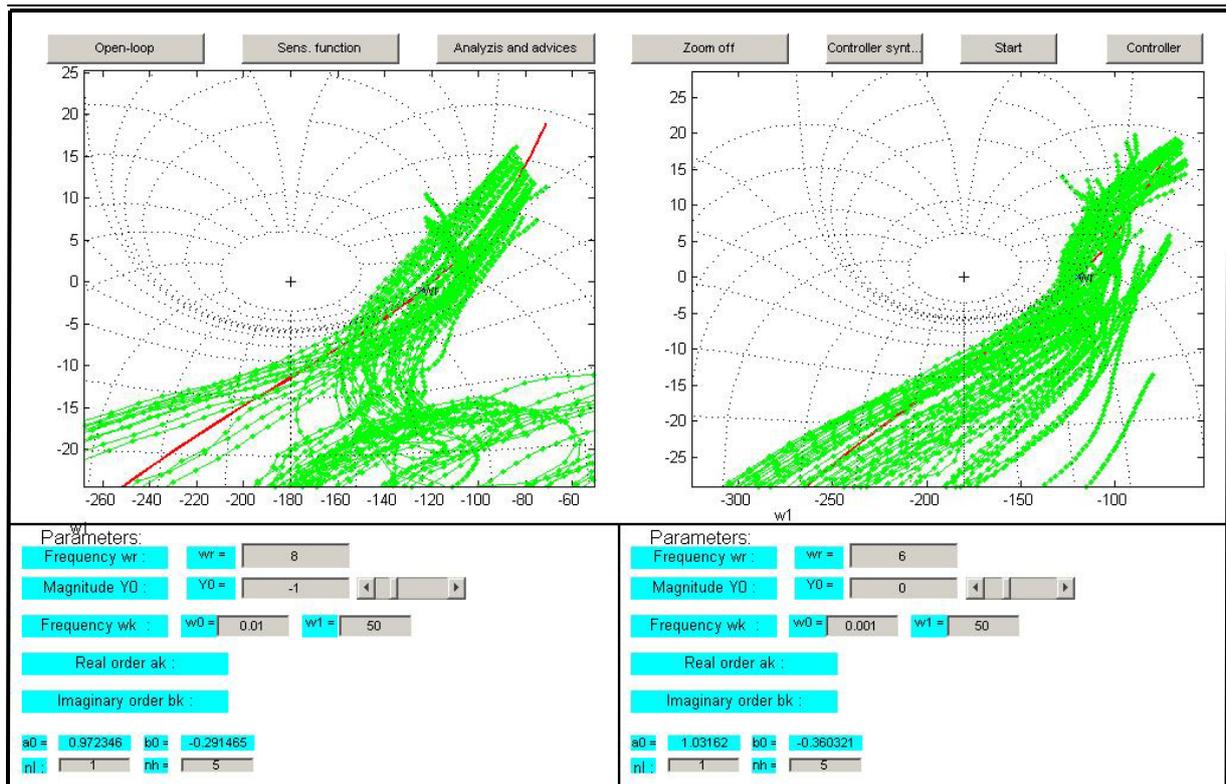


Figure 4. 68 : Boucle ouverte nominale optimale (rouge) et boucles ouvertes équivalentes (vert)

Comme précédemment le procédé nominal est volontairement simplifié, le caractère à non minimum de phase n'est pas pris en compte pour simplifier la définition de la matrice de transfert en boucle ouverte nominale. En contrepartie la marge de gain est au minimum de -9dB pour la première boucle et -10dB pour la deuxième. La Figure 4. 69 présente le gain de la fonction de sensibilité complémentaire de la boucle fermée liant les valeurs de référence du débit d'air frais dm_{HFM_sp} et de la pression de suralimentation P_{int_sp} aux valeurs de débit d'air frais mesuré dm_{HFM} et de pression de suralimentation mesurée P_{int} . La plus grande valeur des éléments diagonaux de la matrice de fonctions de sensibilité complémentaire est inférieure à la limite haute fixée par les spécifications (3 dB). De plus en remarquant qu'un gain de 100dB entre une consigne (faible) de débit d'air et une pression (forte) de suralimentation peut lui aussi être considéré comme faible on peut affirmer que les gains basse fréquence pour les éléments non diagonaux sont faibles. Ceci contribue donc à valider le comportement découplant de notre loi de commande (Figure 4. 69).

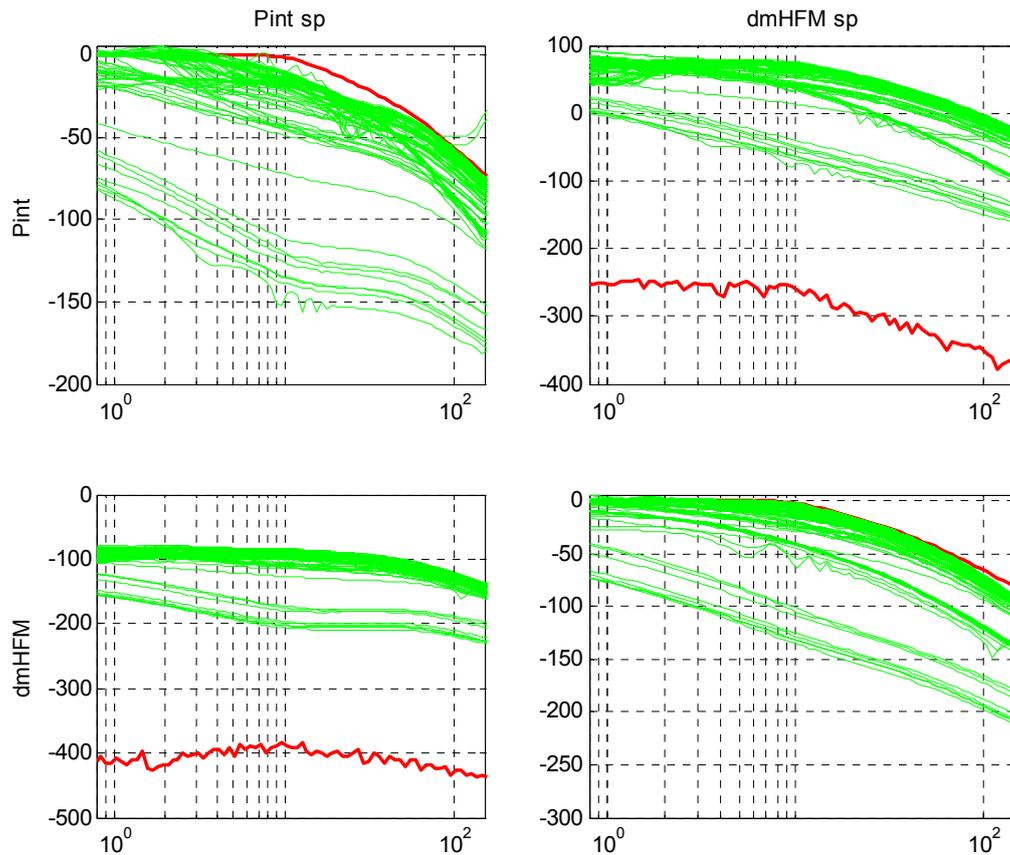


Figure 4. 69 : Gain en décibel de la matrice de transfert de la fonction de sensibilité complémentaire pour tous les points de fonctionnements (vert) et le procédé nominal (rouge)

Synthèse du régulateur rationnel

La réponse fréquentielle désirée des éléments du régulateur est obtenue en calculant le produit de la réponse fréquentielle de la matrice de transfert pseudo-inverse du procédé nominal avec celle de la matrice de transfert en boucle ouverte fractionnaire optimale et diagonale. Une approximation rationnelle est déterminée pour chaque élément par identification fréquentielle. Le régulateur optimisé est alors défini par :

$$K_{11}(s) = \frac{72.42(s+13)(s+9.125)(s+7.77)(s+0.51)}{s(s+68.5)(s+62.5)(s+57.5)(s+0.796)} \quad (4.27)$$

$$K_{21}(s) = \frac{5.48(s+25.9)(s+17.6)(s+16.1)(s+13.7)(s+11.7)(s+9.59)(s+8.86)}{s(s+128)(s+109)(s+92.7)(s+91.2)(s+49)(s+5.02)(s+3.05)(s+1.45)} \quad (4.28)$$

$$K_{31}(s) = \frac{-10.22(s+25.3)(s+23.9)(s+9.42)(s+0.515)}{s(s+68.5)(s+62.5)(s+56.4)(s+0.698)} \quad (4.29)$$

$$K_{12}(s) = \frac{-596.47(s+22.2)(s+18.8)(s+14.1)(s+7.34)(s+0.38)}{s(s+66.6)(s+44.4)(s+4.46)(s+1.3)(s+0.717)} \quad (4.30)$$

$$K_{22}(s) = \frac{-50.0573(s+22.4)(s+14.9)(s+10.7)}{s(s+209)(s+4.89)(s+1.76)(s+1.47)} \quad (4.31)$$

$$K_{32}(s) = \frac{725007.82(s+14.1)(s+6.33)(s+0.39)}{s(s+55.4)(s+38.3)(s+4.46)(s+0.77)} \quad (4.32)$$

Le diagramme de Bode du régulateur robuste obtenu est donné Figure 4. 70.

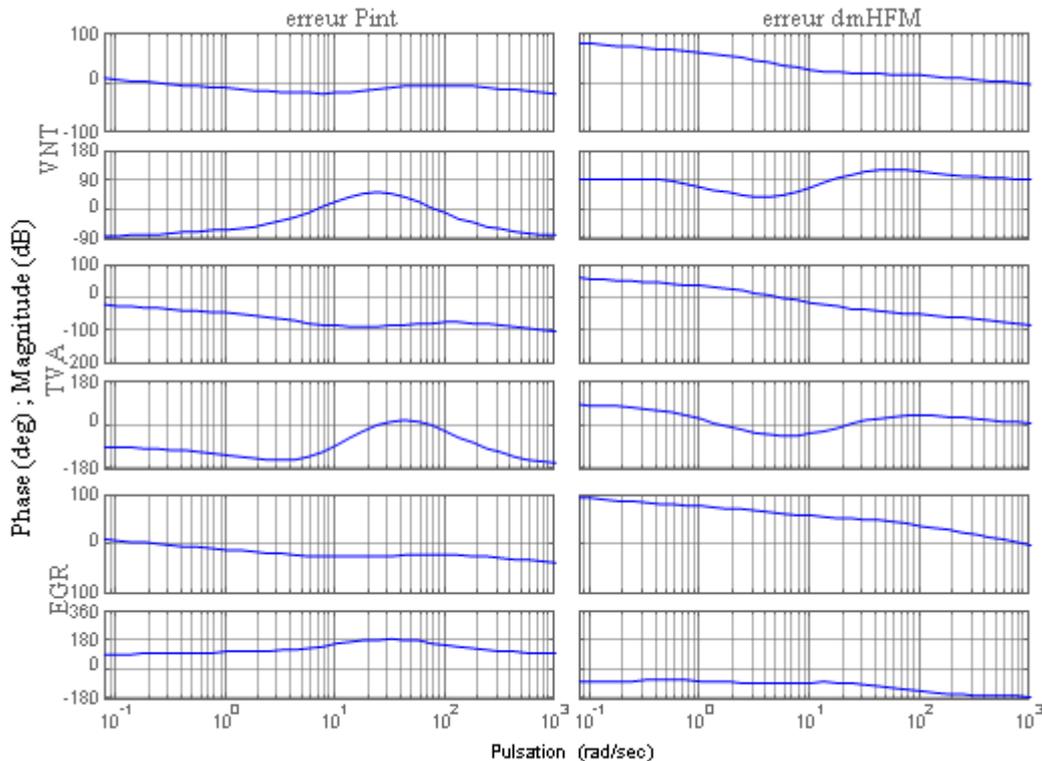


Figure 4. 70 : Diagramme de Bode du régulateur rationnel

b. Validation du régulateur sur simulateur

Les performances de la boucle fermée ont été vérifiées dans le domaine fréquentiel, il convient maintenant de tester la loi de commande sur le simulateur. Le schéma de commande est illustré figure suivante :

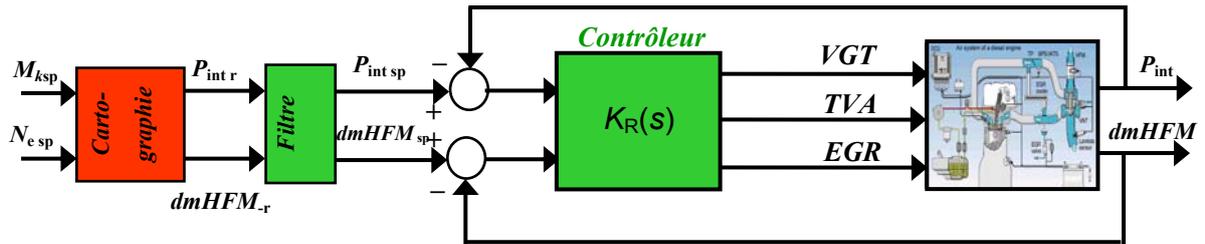


Figure 4. 71 : Loi de commande appliquée au moteur Diesel

et le scénario de test (Régime moteur/ Quantité de gasoil injecté) est présenté Figure 4. 72.

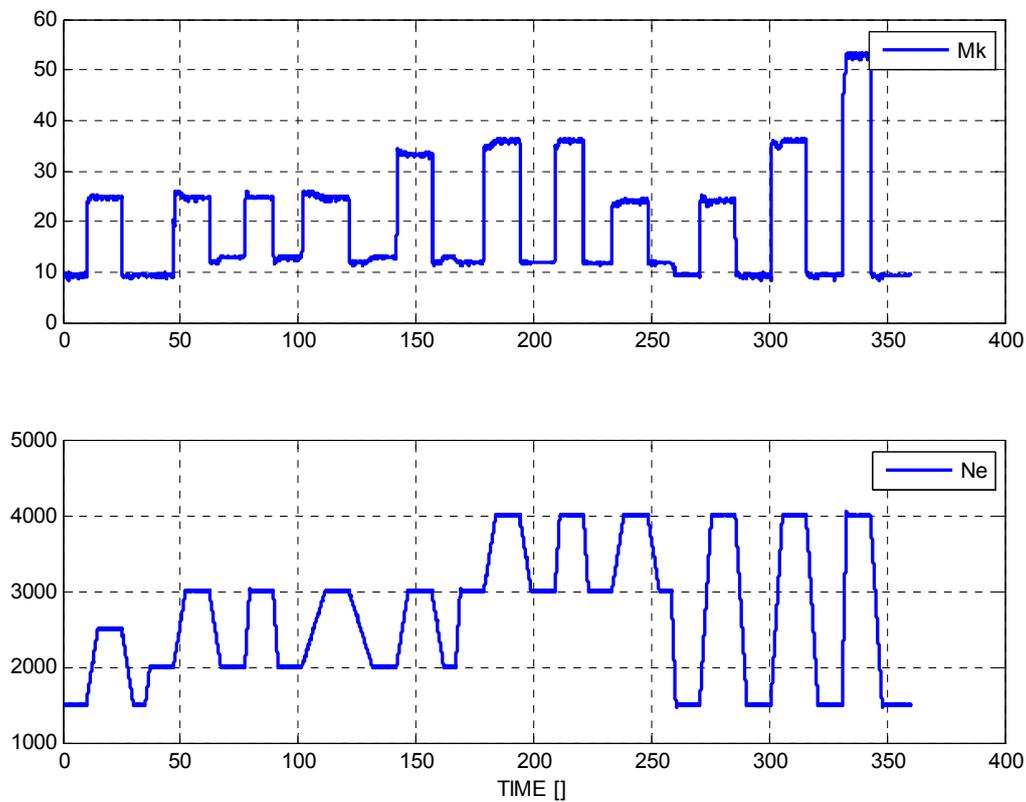


Figure 4. 72 : Scénario de test de la loi de commande en référence régime moteur et quantité de gasoil injecté

Les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de suivi de consigne mais ne permette peut être pas de gérer au mieux le compromis pollution-performances-consommation (Figure 4. 73). Ce compromis serait parfaitement géré si la vanne EGR n'était utilisée que lorsque le papillon d'admission est pleinement ouvert alors que ces résultats montrent qu'il est ouvert sur le cycle au maximum à 90%.

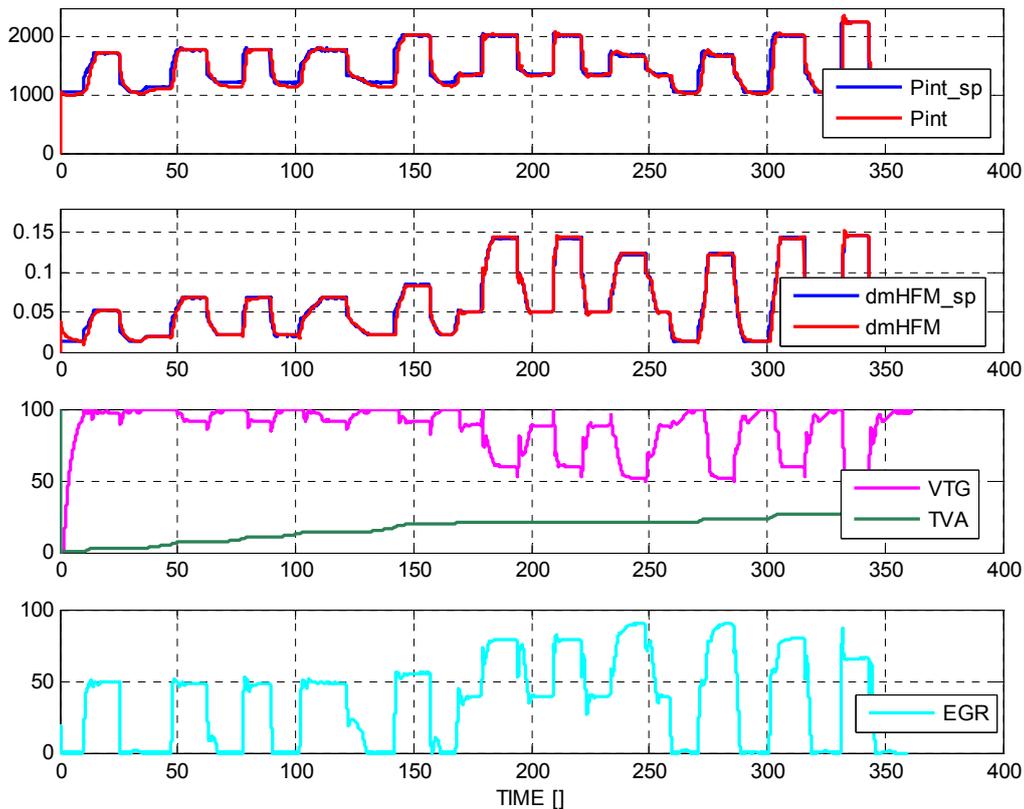


Figure 4. 73 : Essais sur simulateur de la loi de commande permettant le contrôle du débit d'air (dmHFM) et de la pression de suralimentation (Pint)

Le découplage obtenu grâce à la loi de commande proposée permet d'atteindre des points de fonctionnements difficilement atteignables avec les lois de commandes « classiques ». Le point de fonctionnement défini par une quantité de gasoil injecté de 52mg à 4000tr/min est difficile à atteindre du fait d'une demande contradictoire. Les 52mg de gasoil injecté nécessitent une grande quantité d'air pour brûler. Pour augmenter rapidement la pression de suralimentation le turbocompresseur doit accélérer sa rotation et donc la vanne EGR est fermée complètement. Après un dépassement non négligeable la consigne de pression de suralimentation est atteinte mais le débit correspondant est très différent du débit d'air désiré (pointillés de la Figure 4. 74). Une commande optimale anticipera le dépassement en pression et ré ouvrira la vanne EGR de manière à diminuer la vitesse de rotation du turbocompresseur et donc contrôler le dépassement en pression et diminuer le débit d'air (commande CRONE de la Figure 4. 74). L'observation plus précise des pourcentages de fermeture du papillon montre un écart entre les valeurs présentées Figure 4. 74 (10%) et les valeurs présentées Figure 4. 73

(40%). Cette écart est uniquement dû aux conditions initiales d'utilisation du simulateur qui n'était pas les mêmes. Pour la Figure 4. 73 le cycle est simulé dans son intégralité alors que pour la Figure 4. 74 seul le point de fonctionnement défini par $M_k=52\text{mg}$ et $N_e=4000\text{tr/min}$ a été simulé.

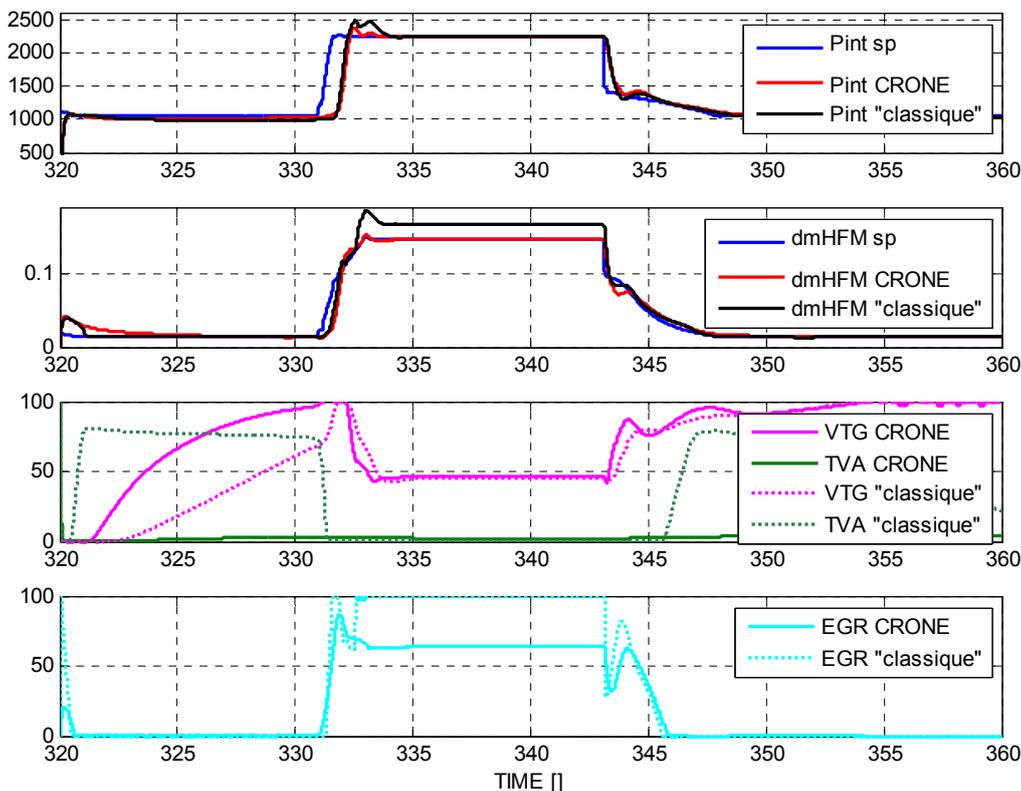


Figure 4. 74 : Comparaison des résultats obtenus sur simulateur avec les loi de commande CRONE et « classique » pour le point de fonctionnement défini par $M_k=52\text{mg}$ et $N_e=4000\text{tr/min}$

4.6. Conclusion

Plusieurs méthodes de calcul d'une loi de commande CRONE développées dans ce manuscrit ont été appliquées avec succès sur deux moteurs à combustion interne.

Après avoir décrit les enjeux et les principes de fonctionnement des moteurs à allumage commandé nous avons proposé une commande CRONE décentralisé du moteur SMART de l'institut PRISME de l'école Polytech'Orléans. Cette commande a été augmenté d'un feedforward permettant d'accélérer certains transitoires. Les performances obtenues sur banc

d'essai sont concluantes vis-à-vis du suivi de consignes et de la gestion du compromis pollution-consommation-performances.

Le moteur Diesel propose une problématique plus complexe du fait d'un actionneur supplémentaire et des phénomènes mis en jeu lors de la combustion. A la vue des observations faites lors de l'étude du moteur Diesel une commande décentralisée non carrée fut proposée. Cette loi de commande gère au mieux le compromis pollution-consommation-performances tout en permettant un bon suivi des consignes. Le caractère multivariable du moteur est utilisé au mieux lors des transitoires et permet de suivre au mieux les consignes générées par des points de fonctionnements non atteignables par une loi de commande « classique ».

Conclusion générale et perspectives

L'objectif du travail présenté dans ce document est l'extension de la commande CRONE aux systèmes multivariables possédant un nombre d'entrées n différent de celui des sorties m . Dans cette optique des outils d'analyse de ces systèmes et des théorèmes permettant de conclure sur la stabilité de la loi de commande ont été proposés.

Le **chapitre 1** de ce manuscrit a permis de présenter un état de l'art des travaux portant sur la commande robuste d'ordre non entier tels qu'ils avaient été développés dans l'équipe CRONE.

La commande CRONE est une méthode de conception de régulateur qui utilise les propriétés de l'opérateur de dérivation non entière dans le but d'assurer le maintien des performances dynamiques du système bouclé et plus précisément son degré de stabilité. Les trois générations de commande CRONE ont été présentées dans l'optique de mettre en évidence leur complémentarité. En effet, ces trois générations ont successivement vu le jour afin d'augmenter le champ d'application de la commande CRONE. Au début des années 90, deux extensions de cette méthodologie de synthèse de commande furent développées pour les systèmes multivariables carrés ($m = n$). Ces extensions multi-scalaires et multivariable, sont complémentaires en ce qui concerne le compromis difficulté d'application/performances obtenues. Leur champ d'application est néanmoins restreint, la commande multi-scalaire ne permettant d'obtenir des résultats concluants que pour les systèmes possédant un fort

caractère découplé, la commande multivariable originelle comportant des conditions de stabilités peu démontrées.

Dans l'objectif de concevoir une méthodologie applicable aux systèmes multivariables non carrés il a été nécessaire de reformuler la méthodologie CRONE multivariable originelle de manière à énoncer clairement les théorèmes assurant la stabilité de la boucle fermée. Cette reformulation a fait l'objet du **chapitre 2**.

La particularité des systèmes multivariables par rapport aux systèmes scalaires se situe dans l'apparition de la notion de direction. L'espace engendré par la fonction de transfert n'est plus un espace à une dimension mais un espace à m dimensions. L'étude du système à commander en est donc complexifiée en termes de recherche des pôles ou zéros à partie réelle positive, des modes résonants et du diagramme de gain et de phase. La première partie de ce chapitre a été consacrée à la présentation des outils permettant l'analyse des systèmes multivariables carrés. La deuxième a exposé les différents théorèmes utilisés et développés afin de prendre en compte le problème de stabilité de la commande en présence de pôles et/ou zéros à partie réelle positive, de retard pur et de modes résonants. L'intérêt de chacune des extensions proposées a été démontré par une application.

Le **chapitre 3** a visé à étendre le champ d'application de la commande CRONE multivariable à la commande des systèmes multivariables non carrés. La méthodologie utilisée conserve les principes de base de la commande CRONE originelle mais des théorèmes de calcul de l'inverse d'une matrice non carré retardée et de vérification de la stabilité de la boucle fermée ont été proposés. La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à la simplification de la méthodologie CRONE multivariable. Ayant remarqué que la difficulté pour appliquer cette méthodologie augmentait proportionnellement avec le nombre de sortie à réguler, on a simplifié la méthodologie en proposant la conception de régulateur dit « décentralisé » c'est-à-dire dont un certain nombre d'éléments sont nuls. Deux exemples d'application ont été présentés.

Le **chapitre 4** a permis de mettre en œuvre les travaux proposés dans ce manuscrit pour le contrôle du système d'air de deux moteurs à combustion interne. Après que la problématique relative au moteur à allumage commandé (essence) ait été présentée, un cahier des charges permettant de gérer au mieux le compromis inhérent à l'agrément de conduite et à la pollution de ce moteur. Un travail équivalent a été réalisé pour un moteur Diesel. Comme souvent en automatique, ces applications nécessitaient un régulateur devant seul résoudre des problèmes complexes et souvent contradictoires. Afin de rester en adéquation avec les

problématiques du contrôle du système d'air des moteurs Diesel et essence, les lois de commande synthétisées sont toutes deux décentralisées. Les résultats obtenus permettent de valider l'apport d'une commande robuste par rapport aux commandes en boucle ouverte ou multi-SISO généralement utilisées par l'industrie automobile.

Quant aux perspectives de recherche, elles s'inscrivent directement dans la continuité des travaux en cours.

Pour ce qui est des chapitres 2 et 3, un objectif ambitieux consisterait à concevoir une méthodologie de gestion des phénomènes d'anti-emballement multivariable non entière. Cette méthodologie serait basée sur une étude non linéaire de la boucle fermée. Les différents paramètres de la fonction de transfert gérant l'anti-emballement seraient déterminés en définissant la fonction de transfert non entière linéaire vue par la non linéarité (saturation). Cette perspective s'appuierait sur les travaux de Ohr [Ohr, 2003] et offrirait des degrés de libertés supplémentaires pour la conception d'un système d'anti-emballement.

Pour le chapitre 3, il conviendrait d'étendre encore le champ d'application de la commande CRONE aux systèmes multivariable non carré possédant des modes résonants.

Enfin, pour le chapitre 4, il serait nécessaire de valider la loi de commande conçue pour le moteur Diesel sur banc d'essais et aussi de concevoir une commande CRONE de l'ensemble des boucles du contrôle moteur, c'est-à-dire des boucles relatives au contrôle cylindre à cylindre, au contrôle de l'injection et au contrôle du système d'air présenté ici.

Bibliographie

- [Albertos, 2004] P. Albertos et A. Sala, Multivariable Control Systems, Springer, (2004)
- [Arkun et al, 1989] D.E. Reeves et Y. Arkun. Interaction measures for nonsquare decentralized control structures, American Institute of Chemical Engineers Journal, 35 (1989).
- [Bernstein et al, 1987] D.S. Bernstein, Sequential design of decentralized dynamic compensators using the optimal projection equations, International Journal of Control, 46 (1987).
- [Bode, 1945] H. Bode, Network analysis and feedback amplifier design, Thèse de doctorat, Bell telephone laboratories, (1945).
- [Bristol, 1966] Bristol, On a new measure of interaction for multivariable process control, (1966).
- [Chang et al, 1990] J.W. Chang et C.C. Yu, The relative gain for nonsquare multivariable systems, Chemical Engineering Science, 45 (1990).
- [Chauvin, 2006] J. Chauvin, Estimation et contrôle d'un moteur Diesel HCCI estimation des systèmes périodiques, Thèse de Doctorat de l'Ecole des Mines de Paris.

- [Chen et al, 1998] J. Chen, Multivariable Gain-Phase and sensitivity integral relations and design tradeoffs, IEEE Transactions on Automatic and Control, 43 (1998).
- [Churchill et al, 1974] R.V. Churchill, J.W. Brown et R.F. Verhey, Complex variables and applications, McGraw-Hill, (1974).
- [Colin, 2006] G. Colin. Contrôle des systèmes rapides non linéaires, Application au moteur à allumage commandé turbocompressé à distribution variable. Thèse de l'université d'Orléans, (2006).
- [Cois, 2002] O. Cois, P. Melchior, P. Lanusse, F. Dancla et A. Oustaloup, Fractional systems toolbox for Matlab, Tutorial Workshop on Fractional Calculus applications in Automatic Control and Robotics, (2002).
- [Corde, 1996] G. Corde, La commande hiérarchisée pour le contrôle moteur : Application au moteur à soupapes électromagnétiques, Thèse de Doctorat de l'Université de Caen, (1996).
- [Davison E.J. et al, 1976] E.J. Davison. Multivariable tuning regulators: The feedforward and robust control of general servo mechanism problem. IEEE Transaction on Automatic and Control, 21 (1976).
- [Davison et al, 1983] E.J. Davison, Some properties of minimum phase systems and "square-down" systems, IEEE Transaction on Automatic and Control, 28 (1983).
- [Desoer, 1984] C. A. Desoer et C.L. Gustafson, Design of multivariable feedback systems with simple unstable plant, IEEE Transaction on Automatic and Control, 29 (1984).
- [Erdely, 1962] Erdely, Operational calculus and generalized functions, Editions Dunod, (1962).
- [MacFarlane et al, 1976] A.G.J. MacFarlane et N. Karnacias, Poles and zeros of linear multivariable systems : A survey of algebraic, geometric, and complex variable theory, International Journal of Control, 74 (1976).
- [Freudenberg et al, 1985] Freudenberg J.S., Looze J.S., Right half plane poles and zeros and design tradeoffs in feedback systems, IEEE Transaction on Automatic Control, 30 (1985).

- [Freudenberg et *al*, 1986] J.S. Freudenberg et D.P. Looze, The relation between open-loop and closed-loop properties of multivariable feedback systems, IEEE Transaction on Automatic and Control, 31 (1986).
- [Goodwin, 2001] G.C. Goodwin, S.F. Graebe et M.E. Salgado, Control systems design, (2001).
- [Graybill, 1969] F.A. Graybill, Introduction to matrices with applications in statistics, Wadsworth, (1969).
- [Grosdider et *al*, 1986] P. Grosdider et M. Morari, Interaction measures for systems under decentralized control, Automatica, (1986).
- [Guzzella et Onder, 2004] L. Guzzella et C.H. Onder, Introduction to Modeling and control of Internal Combustion Engine Systems, Springer, (2004).
- [Guzzella et *al*, 1998] L. Guzzella et A. Amstutz, Control of Diesel engines, IEEE control systems, (1998)
- [Heywood, 1988] J.B. Heywood, Internal combustion engine fundamentals, Mc Graw Hill.
- [Hovd et *al*, 1994] M. Hovd, S. Skogestad, Improved independent design of robust decentralized controllers, Modeling, Identification Control, 15 (1994).
- [Kariwala et *al*, 2003] V. Kariwala, J. Fraser Forbes et E. S. Meadows, Block Relative Gain: Properties and Pairing Rules, Journal of Indian Engeneering research, 42 (2003)
- [Landau, 1995] I.D. Landau, D. Rey, A. Karimi, A. Voda and A. Franco, A flexible transmission system as a benchmark for digital control, European Journal of Control, 1 (1995).
- [Lanusse, 1994] P. Lanusse, De la commande CRONE de première génération à la commande CRONE de troisième génération, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1, (1994).
- [Lanusse, 1996] P. Lanusse, A. Oustaloup and D. Sutter, Multi-scalar CRONE control of multivariable plants, Proc. WAC'96-ISIAC Symphosia, (1996).
- [Le Lay, 1998] L. Le Lay, Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux I, (1998).

- [Lin, 2001] J. Lin, Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier, Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, (2001).
- [Lin et al, 1991] C.A. Lin et T.F. Hsieh, Decoupling controller design for linear multivariable plants, IEEE Transaction on Automatic and Control, 36 (1991).
- [B.T. Lin et al, 2006] Bao-Tung Lin, Wen-Nan Huang, Chin-Cheng Teng, Design of controllers for MIMO active-suspension System Using Combined QFT/ H_∞ , CACS Automatic Control Conference, (2006).
- [Liouville, 1832] J. Liouville, Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, Journal de l'Ecole Polytechnique, 21 (1832).
- [Looze et al, 1991] Looze D.P., Freudenberg J.S., Limitations of feedback Properties imposed by open-loop right half plane poles, IEEE Transaction on Automatic and Control, 36 (1991).
- [Loh et al, 1997] E.J. Loh et M.S. Chiu, Robust decentralized control of nonsquare systems, Chemical Engineering Communication, 158 (1997).
- [Luyben et al, 1986] Luyben W.L., Simple method for tuning SISO controllers in multivariable systems, Industrial and Engineering Chemistry process design and development, (1986).
- [Maciejowski, 1989] J.M. Maciejowski, Multivariable feedback design, Addison Wesley, England, (1989).
- [Manabe, 1960] S. Manabe, The non-integer integral and its application to control systems, Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan, 80 (1960).
- [Manabe, 1961] S. Manabe, The system design by the use of non-integer integral and transport delay, Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan, 81 (1961).
- [Manabe, 1962] S. Manabe, The system design by the use of a model consisting of a saturation and non-integer integrals, Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan, 82 (1962).
- [Manabe, 1998] S. Manabe, Coefficient diagram method, 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, (1998).

- [Manabe, 2002] S. Manabe, Brief tutorial and survey of coefficient diagram method, 4th Asian Control Conference, (2002).
- [Mathieu, 1997] B. Mathieu, De la commande CRONE scalaire à la commande CRONE multivariable – Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux 1, 1997.
- [Mayne et al, 1973] D.Q. Mayne, The design of linear multivariable systems, *Automatica*, 9 (1973).
- [Miller, 1993] K.S. Miller and B. Ross - An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley & Sons Inc, (1993).
- [Morari et Zafiriou, 1989] M. Morari et E.Zafiriou, Robust process control, Prentice-Hall, (1989)
- [Muller et al, 1991] H.M. Muller, S. Unland et W. Haming, Electronic boost pressure and knock control system for si engines with turbo charger, Eighth International Conference on Automotive Electronics, (1991).
- [Nett et al, 1988] C.N. Nett, J. Uthgenannt, An explicit formula and an optimal weight for the 2-block structured singular value interaction measure, *Automatica*, 24 (1988).
- [Niederlinski et al, 1971] Niederlinski, A heuristic approach to the design of linear multivariable interacting control systems, *Automatica*, 7 (1971).
- [Oldham, 1974] K.B. Oldham and J. Spanier, The fractional calculus, Academic Press, (1974).
- [Oustaloup, 1991a] A. Oustaloup, La commande CRONE, Editions Hermès, (1991).
- [Oustaloup, 1991b] A. Oustaloup, The CRONE control, European Control Conférence, (1991).
- [Oustaloup, 1994] A. Oustaloup, La robustesse (Chapitre 1: Approche fréquentielle et non entière de la robustesse : la commande CRONE), Editions Hermès, (1994).
- [Oustaloup, 1995] A. Oustaloup, La dérivation non entière: théorie, synthèse et applications, Editions Hermès, 1995.
- [Oustaloup, 1995a] A. Oustaloup, P. Lanusse et B. Mathieu, Robust control of SISO plants: the CRONE control, European Control Conference, (1995).

- [Oustaloup, 1995b] A. Oustaloup, B. Mathieu et P. Lanusse, The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission, *European Journal of Control*, 12 (1995).
- [Oustaloup *et al*, 2000] A. Oustaloup, F. Levron, F. Nanot and B. Mathieu, Frequency-band complex non integer differentiator: characterization and synthesis, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 47 (2000).
- [Ohmori *et al*, 1995] H. Ito, H. Ohmori, A. Sano, Robust performance of decentralized control systems by expanding sequential designs, *International Journal of Control*, 61 (1995).
- [Peron, 2001] L. Peron, Capteurs et stratégies d'estimation/prédiction pour les nouvelles générations de contrôle moteur, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orléans, (2001).
- [Podlubny *et al*, 1999] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, (1999).
- [Pommier, 2002] V. Pommier-Budinger, Thèse de Doctorat de l'Université de Bordeaux 1, (2002).
- [Rosenbrock, 1970] H.H. Rosenbrock et C. Storey, *Mathematics of dynamical systems*, Nelson, London, 1970.
- [Rosenbrock, 1974] H.H. Rosenbrock, *Computer Aided System Design*, Academic Press, New York, 1974.
- [Richard *et al*, 2001] J.P. Richard, *Outils mathématique pour les systèmes dynamiques*, Editions Hermès, (2001).
- [Samko, 1993] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev - *Fractional integrals and derivatives - Gordon and Breach Science Publishers*, 1993.
- [Skogestad *et al*, 1989] S. Skogestad, M. Morari, Robust performance of decentralized control systems by independent designs, *Automatica* 25 (1989)
- [Skogestad, 2005] S. Skogestad et I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback control : Analysis and design*, Wiley (2005).
- [Seshagiri *et al*, 2006] A. Seshagiri Rao et M. Chidambaram, Decoupled smith predictor for multivariable nonsquare systems with multiple time delays, *J. Indian Institute of Science*, 86 (2006).

- [Smith, 1957] O. J. M. Smith, Closer control of loops with dead time, *Chemical Engineering*, 53 (1957).
- [Sutter, 1997] D. Sutter, La commande CRONE multiscalaire: Application à des systèmes mécaniques articulés, Thèse de Doctorat à l'Université Bordeaux I (1997).
- [Szita et al, 2000] G. Szita et C.K. Sanathanan, A model matching for designing decentralized MIMO controllers, *Journal of the Franklin Institute*, 337 (2000).
- [Tanttu et al, 1991] J.T. Tanttu et J. Lieslehto. A comparative study of some multivariable pi controller tuning methods, *Intelligent tuning and adaptive control* (1991).
- [Tao et al, 2005] L. Tao, W.D. Zhang, D.Y. Gu, Decoupling control design processes with Time Delays, *Acta Automatica Sinica*, 31 (2005).
- [Tavakoly et al, 2005] Saeed Tavakoli, Ian Griffin, Tuning of decentralized PI (PID) controllers for TITO processes, *Control engineering practice*, (2005).
- [Tustin et al, 1958] A. Tustin, J.T. Allanson, J.M Layton, R.J. Jakeways, The design of systems for automatic control of the position of massive objects, *Proceedings of IEEE*, (1958).
- [Treiber et al, 1986] S. Treiber et D.W.Hoffman. Multivariable constraint control using a frequency domain design approach. *Chemical Process Control* (1986).
- [Vardulkis et al, 1987] Vardulkis A.I.G., Internal stabilization and decoupling in linear multivariable systems by unity output feedback compensation, *IEEE Trans. On Autom. Control*, 32 (1987).
- [Vardulkis et al, 1989] A.I.G. Vardulakis, Decoupling of linear multivariable systems by unity output feedback compensation, *International Journal of Control*, 50 (1989).
- [Vidyasagar, 1982] M. Vidyasagar and N. Viswanadham, Algebraic design techniques for realizable stabilisation, *IEEE Transactions on Automatic and Control*, 27 (1982).

- [Viswanadham et al, 1988] N. Viswanadham, J.H. Taylor, Sequential design of large scale decentralized control systems, International Journal of Control, 47 (1988).
- [Wakeman et Wright, 1986] R.J. Wakeman et D.O. Wright, Closed loop turbocharger control with wastegate functions, SAE Technical Paper, (1986).
- [Wang et al, 2000] Q.G. Wang, B. Huang, X. Guo, Auto-tuning of TITO decoupling controllers from step tests, ISA Trans.,39 (2000).
- [Wang, 2002] Q-G Wang, Yu Zhang, Min-Schen Chiu, Decoupling internal model control for multivariable systems with multiple time delays, Chemical engineering Sciences, (2002).
- [Wiberg, 1976] D.M. Wiberg, Schaum's Outline of Theory and Problems of State Space and Linear Systems, Mc Graw-Hill, (1971).
- [Youla et al, 1976] D.C. Youla, H.A. Jabr et J.J. Bongiorno, Modern Weiner-Hopf design of optimal controllers- Part I: The single input single output case and Part II: The multivariable case, IEEE Transaction on Automatic and Control, 21 (1976).
- [Zames, 1966] G. Zames, On the input-output stability of time varying feedback systems ; Part I: conditions using concepts of loop gain, conicity and positivity, IEEE Transaction on Automatic and Control, (1966).
- [Zames, 1981] G. Zames, Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse, IEEE Transactions on Automatic Control, 26 (1981).
- [Zhou et al, 1996] K. Zhou, J. Doyle et K. Glover, Robust and optimal control, Prentice Hall, Upper Saddle River, (1996).

RESUME

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans le cadre des développements de la commande CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier). Ils portent plus précisément sur le développement d'une méthodologie de synthèse de la commande CRONE pour les systèmes multivariables, avec une application plus particulière au contrôle du système d'air des moteurs à combustion interne. Un chapitre d'introduction présente la commande CRONE dont l'objectif est de garantir une robustesse des performances dynamiques par rapport aux variations des paramètres du modèle du système. On propose ensuite une reformulation des conditions de stabilité utilisées par la méthodologie CRONE existante et adaptée aux systèmes multivariables (MIMO) carrés. Un ensemble de théorèmes est aussi proposé afin de pouvoir étendre la commande CRONE aux systèmes MIMO carrés pouvant aussi présenter des retards purs et/ou un comportement fortement oscillatoire. Le chapitre 3 de ce manuscrit est consacré d'une part, à la commande des systèmes MIMO non-carrés (nombre d'entrées différent de celui des sorties), instables et/ou à non-minimum de phase et d'autre part, à la simplification des différentes méthodologies proposées dans ce manuscrit. Cette simplification est basée sur une analyse des effets de couplage du système et sur l'hypothèse que dans certains cas des éléments de la matrice de transfert du système peuvent être considérés comme des incertitudes lors de l'optimisation de la boucle ouverte nominale. Outre un ensemble de cas académiques pris dans la littérature, la validation de ces travaux est réalisée à travers la commande du système d'air de deux moteurs à combustion interne : un moteur à essence avec une loi de commande CRONE MIMO carrée ; un moteur diesel avec une loi de commande CRONE MIMO non carrée. L'objectif fixé par le partenaire industriel à l'origine de ces applications est d'optimiser le compromis performances-pollution-consommation de ces moteurs tout en minimisant les efforts liés à la conception de ces nouvelles lois de commande.

Mots-Clés : Commande robuste, CRONE, Dérivation d'ordre non-entier, Multivariable, Contrôle moteur.

SUMMARY

The works presented in this thesis are led within the framework of the robust control developments achieved by the CRONE team (Fractional Order Robust Control). More precisely, they deal with the development of a design methodology of the CRONE control for multivariable systems with applications to the airpath of internal combustion engines. An introductory chapter presents the CRONE fractional order robust control which goal is to ensure a dynamic performance robustness with respect to parameter uncertainties of the system model. Then, new stability conditions are proposed to adapt the CRONE methodology for an extended set of multivariable square systems (systems with time-delays and/or undamped behaviours). Chapter 3 is devoted, on one hand, to the control of non-square (different numbers of inputs and outputs), unstable and/or non minimal phase MIMO systems, and on the other hand, to the simplification of different control methodologies proposed in this thesis. This simplification is based on the analysis of system coupling effects and under the assumptions that in some cases, elements of the system transfer matrix can be considered as uncertainties. Beyond a set of academic cases chosen in the literature, the validation of these works is achieved through the control of the airpath of two internal combustion engines: a gasoline engine with a square CRONE MIMO control; a diesel engine with a non square CRONE MIMO control. The objective specified by the industrial-partner is both to optimize the trade-off between performance-pollution-consumption of these engines, and to reduce the design and tuning efforts.

Key-Words : Robust control, CRONE , Fractional order differentiation, Multivariable, Airpath control.