N° d'ordre : 4671

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR

VIGEN AYVAZYAN

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **MÉCANIQUE & ÉNERGÉTIQUE**

ÉTUDE DE CHAMPS DE TEMPÉRATURE SÉPARABLES AVEC UNE DOUBLE DÉCOMPOSITION EN VALEURS SINGULIÈRES. QUELQUES APPLICATIONS À LA CARACTÉRISATION DES PROPRIÉTÉS THERMOPHYSIQUES DES MATÉRIAUX ET AU CONTRÔLE NON DESTRUCTIF

Soutenue le 14 décembre 2012

Thèse dirigée par Jean-Christophe BATSALE

Après avis de :

MM.	Tahar LOULOU	Professeur à l'Université de Bretagne Sud,	Rapporteur
	Bernard CLAUDET	Professeur à l'Université de Perpignan,	Rapporteur

Devant la comission d'examen formée de :

MME.	Elena PALOMO DEL BARRIO	Professeur à l'Université Bordeaux 1,	Présidente
MM.	Daniel BALAGEAS	Chargé de mission à l'ENSAM,	Examinateur
	Christophe PRADÈRE	Chargé de recherche CNRS, I2M-TREFLE,	Examinateur
	Jean-Christophe BATSALE	Professeur à l'ENSAM,	Examinateur

Membre invité :

M.	Didier TRICHET	Maître de conférences (HDR), CRTT/IREENA, Saint-Nazaire

Table des matières

Table des matières **1**

Introduction **11**

I Étude bibliographique 15

1 L'évolution de la méthode flash. La thermographie infrarouge comme outil de métrologie thermique **16**

1.1 Introduction 16
1.2 Méthodes de mesure des propriétés thermophysiques des matériaux 18
1.2.1 Les grandeurs mesurées 18
1.2.2 Quelques rappels préalables 18
1.2.2.1 Les grandeurs liées à la conduction thermique 18
1.2.2.2 Conduction en milieu anisotrope 19
1.2.3 Classification des méthodes de mesure 20
1.2.3.1 Différentes méthodes d'excitation 22
1.2.3.2 Différents types de mesure 22
1.2.3.3 Méthodes photothermiques sans contact 23
1.2.3.4 Contraintes liées à l'utilisation d'une source d'excitation radiative 23
1.3 L'évolution de la méthode «flash» 25
1.3.1 La première méthode «flash» de Parker (1961) 25
1.3.1.1 Thermogramme de la face arrière 26
1.3.1.2 Thermogramme de la face avant 28
1.3.2 La méthode «flash» en face arrière avec pertes de Degiovanni (1977) . 30
1.3.3 La méthode des moments partiels de Degiovanni et Laurent (1986) . 31
1.3.4 L'étude des délaminages par l'analyse des contrastes thermiques 32
1.3.5 Les premières mesures de diffusivités thermiques longitudinales par la méthode «flash» par Philippi (1994) 34
1.3.6 La mesure de diffusivités longitudinales locales par thermographie infrarouge, Krapez et Coll. (1999, 2004) 38
1.3.7 Estimation de champs bidimensionnels de diffusivités longitudinales, Batsale et Coll. (2004) 39

1.4 Méthodes modales basées sur la décomposition en valeurs singulières des données expérimentales, Bamford et Coll. (2007) 42
1.4.1 Modèle de transfert thermique 42
1.4.2 Quelques résultats issus des simulations numériques 47
1.4.3 Quelques résultats expérimentaux 50
1.5 Synthèse du chapitre 52
1.5.1 Vers l'étude expérimentale et théorique de la réponse au point source impulsionnel 52

II Outils mathématiques 53

2 Excursion dans le monde des fonctions continues 55
2.1 Introduction 55
2.2 Problèmes inverses 55
2.3 Problèmes bien et mal posés 57
2.3.1 Discussion autour des conditions de Hadamard 57
2.4 Opérateurs intégraux et équations intégrales. Intégrales de Fredholm 63
2.4.1 Opérateurs intégraux et équations intégrales 64
2.4.2 Le développement en valeurs singulières (SVE) 65
2.4.3 Parallèle avec la théorie de Fourier 66
2.5 Synthèse du chapitre 69

3 Décomposition en valeurs singulières SVD 70
3.1 Introduction 70
3.2 Historique de la SVD 70
3.3 Les fondements mathématiques et formalisation de la SVD 72
3.3.1 Décompositions réduites : 75
3.4 Nullité de la matrice et la SVD 76
3.5 Étude d'un cas concret : application de la SVD pour la compression et le filtrage de données 78
3.6 L'Analyse en Composantes Principales (ACP ou PCA pour *Principal Component Analysis* dans la littérature anglo-saxonne) 90
3.7 Synthèse du chapitre 92

III Étude de champs de température séparables. Application à la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux et l'estimation de champs de température initiaux 93

4 Les développements analytiques 95
4.1 Introduction 95
4.2 Conduction thermique dans les solides anisotropes 95

4.3 Solutions aux problèmes multidimensionnels homogènes 96
4.3.1 Modèle de transfert thermique 98
4.3.2 Solution du point source impulsionnel immobile 99
4.4 La double décomposition en valeurs singulières : ${}^2SVD_{(x,y),t}$ 102
4.4.1 Approche modale «classique» basée sur la SVD 102
4.4.2 Une nouvelle approche basée sur la double décomposition SVD 105
4.4.3 Étude qualitative d'un cas concret, réponse au point source impulsionnel 106
4.5 Exploitation de la séparabilité du champ de température $\tilde{T}(x, y, t)$ pour l'estimation de profils de diffusivités longitudinales 112
4.5.1 Modèle de diffusion thermique et algorithme d'estimation 112
4.6 Synthèse du chapitre 119

5 Validation numérique et expérimentale de la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ pour l'estimation de diffusivités longitudinales dans le cas de matériaux homogènes 120
5.1 Introduction 120
5.2 Simulation d'une impulsion laser sur un matériau 2D homogène 120
5.2.1 Étude de l'influence du nombre de modes r_0 pris en compte dans la somme de l'expression (4.5.18) 125
5.2.2 Étude de l'influence de la taille de la fenêtre spatiale ξ utilisée pour l'estimation de $a_x(i)$ 126
5.2.3 Étude de l'influence du nombre de modes k pris en compte pour l'estimation de $a_x(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$ 127
5.2.4 Cartographie des diffusivités thermiques du milieu homogène : $\mathbf{a}_{x,y}$ 129
5.3 Validation expérimentale de la méthode dans le cas d'une réponse impulsionnelle sur une lame de verre homogène 131
5.3.1 Réponse expérimentale au point source impulsionnel 131
5.4 Validation expérimentale de la méthode dans le cas d'une réponse impulsionnelle sur une plaque de PVC homogène 135
5.4.1 Réponse expérimentale au point source impulsionnel 135
5.5 Synthèse du chapitre 139

6 Étude numérique de matériaux hétérogènes. Application de la double décomposition ${}^2SVD_{(x,y),t}$ au Contrôle Non Destructif (CND) 140
6.1 Introduction 140
6.2 Simulation de plusieurs impulsions laser sur un matériau 2D hétérogène 140
6.2.1 Adaptation de la SVD Analytique (ASVD) de Bamford et Coll. [1, 2, Chapitre 2] 142
6.3 Étude du premier cas de figure d'un milieu hétérogène 144
6.4 Étude du second cas de figure d'un milieu hétérogène 147
6.5 Synthèse du chapitre 152

7 Estimation de la répartition de champs de température initiaux séparables, bi ou tridimensionnels **153**

7.1 Introduction 153
7.2 Modèle de transfert thermique 154
7.3 Cas de la diffusion monodimensionnelle suivant (Ox) 154
7.3.1 Approche par la transformation de Fourier 154
7.3.2 Approche par la décomposition en valeurs singulières ${}^1SVD_{(x,t)}$ 157
7.3.3 Expériences numériques 158
7.4 Cas de diffusion bidimensionnelle suivant (Ox) et (Oy) 161
7.4.1 Approche par le transformation de Fourier 161
7.4.2 Approche par la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$. 162
7.4.3 Expériences numériques 163
7.5 Cas de diffusion tridimensionnelle suivant (Ox), (Oy) et (Oz) 165
7.5.1 Approche par la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$. 165
7.5.2 Application possible au contrôle non destructif des matériaux 168
7.6 Synthèse du chapitre 171

Conclusions et perspectives **172**

Annexe I **174**

Bibliographie **183**

STUDY OF SEPARABLE TEMPERATURE FIELDS WITH A DOUBLE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION. SOME APPLICATIONS IN CHARACTERIZATION OF THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS AND NON DESTRUCTIVE TESTING

Résumé

La thermographie infrarouge est une méthode largement employée pour la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux. L'avènement des diodes laser pratiques, peu onéreuses et aux multiples caractéristiques, étendent les possibilités métrologiques des caméras infrarouges et mettent à disposition un ensemble de nouveaux outils puissants pour la caractérisation thermique et le contrôle non desturctif. Cependant, un lot de nouvelles difficultés doit être surmonté, comme le traitement d'une grande quantité de données bruitées et la faible sensibilité de ces données aux paramètres recherchés. Cela oblige de revisiter les méthodes de traitement du signal existantes, d'adopter de nouveaux outils mathématiques sophistiqués pour la compression de données et le traitement d'informations pertinentes.

Les nouvelles stratégies consistent à utiliser *des transformations orthogonales du signal* comme outils de compression préalable de données, de réduction et maîtrise du bruit de mesure. L'analyse de sensibilité, basée sur l'étude locale des corrélations entre les dérivées partielles du signal expérimental, complète ces nouvelles approches. L'analogie avec la théorie dans l'espace de Fourier a permis d'apporter de nouveaux éléments de réponse pour mieux cerner la «physique» des approches modales.

La réponse au *point source impulsionnel* a été revisitée de manière numérique et expérimentale. En utilisant la *séparabilité des champs de température* nous avons proposé une nouvelle méthode d'inversion basée sur une *double décomposition en valeurs singulières* du signal expérimental. Cette méthode par rapport aux précédentes, permet de tenir compte de la diffusion bi ou tridimensionnelle et offre ainsi une meilleure exploitation du contenu spatial des images infrarouges. Des exemples numériques et expérimentaux nous ont permis de valider dans une première approche cette nouvelle méthode d'estimation pour la caractérisation de diffusivités thermiques longitudinales. Des applications dans le domaine du contrôle non destructif des matériaux sont également proposées.

Une ancienne problématique qui consiste à retrouver les champs de température initiaux à partir de données bruitées a été abordée sous un nouveau jour. La nécessité de connaitre les diffusivités thermiques du matériau orthotrope et la prise en compte des transferts souvent tridimensionnels sont complexes à gérer. L'application de la *double décomposition en valeurs singulières* a permis d'obtenir des résultats intéressants compte tenu de la simplicité de la méthode. En effet, les méthodes modales sont basées sur des approches statistiques de traitement d'une grande quantité de données, censément plus robustes quant au bruit de mesure, comme cela a pu être observé.

Abstract

Infrared thermography is a widely used method for characterization of thermophysical properties of materials. The advent of the laser diodes, which are handy, inexpensive, with a broad spectrum of characteristics, extend metrological possibilities of infrared cameras and provide a combination of new powerful tools for thermal characterization and non destructive evaluation. However, this new dynamic has also brought numerous difficulties that must be overcome, such as high volume noisy data processing and low sensitivity to estimated parameters of such data. This requires revisiting the existing methods of signal processing, adopting new sophisticated mathematical tools for data compression and processing of relevant information.

New strategies consist in using *orthogonal transforms of the signal* as a prior data compression tools, which allow noise reduction and control over it. Correlation analysis, based on the local cerrelation study between partial derivatives of the experimental signal, completes these new strategies. A theoretical analogy in Fourier space has been performed in order to better understand the «physical» meaning of modal approaches.

The response to *the instantaneous point source of heat*, has been revisited both numerically and experimentally. By using *separable temperature fields*, a new inversion technique based on a *double singular value decomposition* of experimental signal has been introduced. In comparison with previous methods, it takes into account two or three-dimensional heat diffusion and therefore offers a *better exploitation of the spatial content* of infrared images. Numerical and experimental examples have allowed us to validate in the first approach our new estimation method of longitudinal thermal diffusivities. Non destructive testing applications based on the new technique have also been introduced.

An old issue, which consists in determining the initial temperature field from noisy data, has been approached in a new light. The necessity to know the thermal diffusivities of an orthotropic medium and the need to take into account often three-dimensional heat transfer, are complicated issues. The implementation of the *double singular value decomposition* allowed us to achieve interesting results according to its ease of use. Indeed, modal approaches are statistical methods based on high volume data processing, supposedly robust as to the measurement noise.

Mots-clés :

Thermographie infrarouge, Contrôle non destructif CND, Techniques inverses, Caractérisation thermique, Décomposition en valeurs singulières SVD, Double décomposition en valeurs singulières 2SVD, Analyse en composantes principales PCA, Développement en valeurs singulières SVE, Estimation de paramètres thermophysiques, Profils de diffusivités thermiques longitudinales, Estimation de champs de température initiaux, Diffusion thermique tridimensionnelle, Méthode flash, Flash face avant, Diodes laser, Point source impulsionnel, Méthodes modales, Analyse de corrélations, Compression de données, Transformations orthogonales du signal, Champs de température séparables, Traitement d'une grande quantité de données, Séparabilité spatiale, Transformées de Fourier, Filtrage de données, Matériaux hétérogènes, Petites échelles, Matériaux composites

Keywords :

Infrared thermography, Non destructive testing NDT, Non destructive evaluation NDE, Inverse techniques, Thermal characterization, Singular value decomposition SVD, Double singular value decomposition 2SVD, Principal component analysis PCA, Singular value expansion SVE, Estimation of thermophysical properties, Longitudinal thermal diffusivity profiles, Estimation of initial temperature fields, Three-dimensional heat diffusion, Flash method, Laser diodes, Instantaneous point source of heat, Correlation analysis, Data compression, Orthogonal transforms of the signal, Separable temperature fields, High volume data processing, Fourier transforms, Data filtering, Heterogeneous materials, Small scales, Composite materials

À mon oncle Michel

«The idea of the *instantaneous point source of heat*, that is, of a finite quantity of heat instantaneously liberated at a given point and time in an infinite solid, has proved most useful in the theory of conduction of heat. One great advantage is that it is based on a very simple physical idea, and this enables the solution of a large number of important problems to be written down immediately from first principles. From the theoretical point of view it has always been recognized that the point source corresponds to the fundamental solution $(1/r)$ of potential theory, and that a complete development of the theory of conduction of heat in bounded regions can be obtained by constructing Green's functions analogous to those of potential theory. We take the solution for the instantaneous point source as fundamental.»

H.S. Carslaw and J.C. Jaeger [3, Chapter X, p. 255]

Introduction

La thermographie infrarouge est une méthode largement employée pour la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux, bien que considérée comme étant une technique relativement «moderne», dont les résultats sont encore comparés à ceux obtenus par des méthodes classiques de caractérisation thermique. Les rapides évolutions technologiques ont rendu les caméras infrarouges plus abordables et ont permis leur démocratisation très active. Les possibilités offertes sont considérables : vitesses d'acquisition pouvant atteindre le millier d'images par seconde, des résolutions spatiales de l'ordre de la dizaine de micromètres, imagerie multispectrale...

Par ailleurs, l'avènement des diodes laser très pratiques et peu onéreuses, aux multiples caractéristiques telles la modulation de l'intensité (impulsionnelle, périodique), les motifs d'excitation (point, ligne, grille, pseudo-aléatoire), étendent les possibilités métrologiques des caméras infrarouges et mettent à disposition un ensemble de nouveaux outils puissants pour la caractérisation des matériaux.

Il existe cependant, un lot de nouvelles difficultés à surmonter parmi lesquelles se trouvent le traitement d'une grande quantité de données bruitées (gigaoctets d'information) et la faible sensibilité de ces données aux paramètres recherchés. Cela oblige de revisiter les méthodes de traitement du signal existantes, d'adopter de nouveaux outils mathématiques sophistiqués *de compression de données et de traitement d'informations pertinentes*.

La technique flash classique de Parker utilisée et améliorée depuis 1961, permet la mesure de la diffusivité transverse locale ou macroscopique d'un matériau orthotrope. Le traitement pixel à pixel des sequences infrarouges issues d'une excitation photothermique étendue, permet d'établir une cartographie approchée des diffusivités transverses. L'accès à la diffusivité longitudinale (dans le plan de la pièce ou ses directions principales d'anisotropie pour le cas orthotrope) consiste à exciter l'une des faces du matériau de manière *non uniforme* (à l'aide d'un masque périodique par exemple comme proposé par Krapez et coll. [4, 5], ou un masque spatialement aléatoire proposé par Batsale et coll. [6], ou encore à l'aide d'un laser comme proposé par Gruss et coll. [7, 8] et d'autres plus récemment) et à analyser les champs de température issus de la caméra infrarouge sur l'une ou l'autre des faces de la pièce. Nous renvoyons le lecteur aux références de la *Partie Bibliographique* pour les travaux cités ci-dessus ; les publications dans les archives des conférences QIRT depuis 1992 permettent également de retracer les avancées majeures, liées à la *caractérisation des propriétés thermophysiques* des

matériaux et au *contrôle non destructif* par thermographie infrarouge.

Des travaux récents [6, 9] par exemple, ont utilisé des modèles simplifiés de transfert 2D à l'aide de schémas aux *différences finies*, implémentés sur le signal brut à chaque nœud ou pixel, d'où la dénomination dite «nodale». La surabondance d'informations à chaque pixel issues des enregistrements d'images infrarouges, convenait à la cartographie des propriétés thermophysiques des matériaux. Des méthodes d'estimation linéaires [10] ont été employées pour les inversions locales, en limitant ainsi les estimations aux endroits où la sensibilité aux paramètres recherchés était optimale. Cependant on peut citer plusieurs difficultés dans ces approches.

Tout d'abord, celle de la lourdeur des temps de calcul : prenons pour exemple une matrice de détecteurs de taille de 320 par 256 pixels, avec une fréquence d'acquisition de 100 Hz et un enregistrement d'une durée de 10 s. Nous aurons alors $320 \cdot 256 \cdot 100 \cdot 10 = 81,920$ millions de mesures à stocker et à traiter. Sans prendre en compte le fait que les tailles des matrices de détecteurs dépassent aujourd'hui les 512 par 512 pixels et que l'on atteint des fréquences d'acquisition allant jusqu'au 1kHz...

L'autre difficulté importante est due au fait que l'implémentation de *l'estimateur au sens des moindres carrés linéaires* suppose que la matrice de sensibilité soit connue de façon exacte, or ce n'est pas le cas quand on travaille directement avec le signal brut, où les opérateurs différentiels sont discrétisés et de plus propagent les erreurs liées au bruit de mesure de manière indépendante (consulter la Section 1.3.7 page 39 dans la *Partie Bibliographique*). Pour pallier aux difficultés, d'autres voies ont été explorées activement et continuent de l'être de nos jours.

Les nouvelles stratégies pour pallier aux obstacles précédemment évoqués, consistent à utiliser *des transformations orthogonales du signal* comme outils de *compression préalable de données*, *de réduction et maîtrise du bruit de mesure*. Ces outils sophistiqués sont employés dans de nombreux domaines de recherche. La compression préalable des données commence par la détermination d'une base orthogonale adéquate, composée de *fonctions singulières* ou de *composantes principales* ou *de modes*, d'où la dénomination de méthodes dites «modales». La compression s'effectue ensuite par la *projection des données brutes* sur la base obtenue. Les données compressées sont ensuite injectées dans un modèle de transfert et sont inversées dans l'espace transformé pour permettre une analyse quantitative de données. Cela offre de nouvelles possibilités pour la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux, en particulier de matériaux hétérogènes. Parmi les méthodes désignées ci-dessus, nous pourrions citer les méthodes SVD/PCA/KLD, évoquées en Section 3.6 page 92.

Les travaux de Bamford et coll. [11, 1, 12, 2, 13] méritent une attention particulière, Section 1.4 page 42. Conscients des nouveaux enjeux, leurs travaux apportent de nouveaux angles d'attaques pour apporter des éléments de réponse aux nouvelles problématiques. Une nouvelle *analyse de sensibilité*, basée sur l'étude locale des *corrélations entre les dérivées partielles du signal* expérimental [2, Chapitres 1 et 3], [11] a été proposée. Cette analyse *préliminaire,* permet de déterminer l'espace optimal (sensibilité maximale aux paramètres considérés) dans lequel les estimations devront être effectuées. Cela permet de limiter les calculs aux endroits où le modèle diffusif est vérifié et permet ainsi de réduire considérablement la quantité de données

traitées. Cette méthode robuste a été rapidement adoptée dans la communauté thermicienne [14, 15, 16, 17, 18], [19, Chapitre 6].

Il est intéressant de remarquer, que pour parvenir à cette nouvelle méthode qui consiste à étudier les *corrélations* entre les différents termes du modèle diffusif, Bamford et Coll. [11, 1, 2] sont partis de l'application aux données brutes *des transformations orthogonales* telles que la SVD, dont la décomposition obtenue est ensuite injectée dans un modèle de transfert diffusif et inversée dans l'espace transformé. C'est en développant ces approches modales modernes, que la *nouvelle méthode d'analyse* basée sur *l'étude des corrélations* a vu le jour. Par la suite, la méthode des corrélations a été *transposée* aux méthodes plus classiques dites «nodales». De nouvelles approches nodales ont été alors développées, le document [18] disponible en *Annexe I* en présente quelques aspects. Elles consistent à traiter des données brutes sans compression préalable et à utiliser *l'analyse des corrélations* des dérivées partielles discrètes du signal par rapport au temps et à l'espace. Cette nouvelle analyse de sensibilité permet donc de choisir les zones spatiales et temporelles où le modèle de transfert diffusif est valide et où par conséquent les estimations sont possibles. Ce qui permet en fin de compte, de réduire la quantité de données à traiter avant l'inversion.

Par ailleurs, l'approche modale nécessite beaucoup moins de *ressources informatiques*, car seul un nombre restreint de modes est nécessaire à la déterminantion des paramètres recherchés, bien que la compression ainsi effectuée puisse induire la perte de précision sur les valeurs des paramètres estimés. Cependant, les approches modales permettent de *contrôler cette précision* en choisissant le nombre de modes utilisés pour l'estimation.

Dans les travaux exposés dans ce manuscrit, nous nous proposons, en redéveloppant *les dispositifs expérimentaux* et *les méthodes de traitement du signal* des auteurs précités, d'améliorer ces nouvelles *approches modales*. Pour ce faire, nous partons des perspectives proposées dans les travaux précédents. À savoir, que pour pallier au manque de sensibilité local aux paramètres estimés, il est nécessaire d'avoir de forts gradients de température partout sur l'échantillon étudié. Ce qui par exemple peut être obtenu à l'aide de *diodes lasers*, permettant d'exciter le matériau étudié par des *impulsions spatio-temporelles*. Outre leurs caractéristiques expérimentales intéressantes, les *points sources instantanés* offrent de multiples avantages analytiques, dont la *séparabilité* que nous allons exploiter dans nos développements. Différentes géométries d'excitation thermique seront présentées.

La première partie, intitulée : *«Étude bibliographique»*, nous permettra de présenter brièvement les diverses méthodes de mesure des propriétés thermophysiques des matériaux et s'intéresser plus particulièrement à la méthode «flash» et à son évolution.

La seconde partie, intitulée : *«Outils mathématiques»,* fixera le décor mathématique nécessaire aux développements proposés. Dans un premier temps, une excursion dans le monde des *fonctions continues*, nous permettra par analogie avec les propriétés de l'espace de Fourier, de comprendre ce qu'il se passe lors du *développement en valeurs singulières (SVE)* d'une fonction. Une fois ce décor mathématique exposé, nous passerons dans *le monde de signaux discrets rééchantillonés* et nous traiterons des exemples concrets, de manière à exposer d'un

point de vue «physique», les principes de la *décomposition en valeurs singulières (SVD)* des images infrarouges, utilisés par la suite.

La troisième et dernière partie, intitulée : *«Étude de champs de température séparables. Application à la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux et l'estimation de champs de température initiaux»,* exposera tout d'abord les différents modèles de diffusion utilisés dans l'étude, ainsi que leurs solutions analytiques *séparables,* puis présentera *une nouvelle méthode* pour la caractérisation de diffusivités thermiques longitudinales de matériaux hétérogènes, basée sur une *double décomposition en valeurs singulières* de champs de température séparables, tridimensionnels. Des validations numériques et expérimentales de la méthode de caractérisation dans l'espace transformé seront proposées. Enfin, cette nouvelle méthode sera appliquée à l'estimation de champs de température initiaux.

Première partie

Étude bibliographique

Chapitre 1

L'évolution de la méthode flash. La thermographie infrarouge comme outil de métrologie thermique

1.1 Introduction

La métrologie thermique s'intéresse entre autres choses à la mesure : des températures, des flux de chaleur, des grandeurs thermophysiques liées à la matière [20, 21, 22].

La métrologie des températures, se distingue classiquement en deux catégories : les méthodes de mesure par contact mécanique et les mesures sans contact. Pour la première catégorie, les couples thermoélectriques ou «thermocouples», sont les instruments de mesure les plus couramment utilisés [23]. Les couples thermoélectriques miniaturisés, bien que fragiles, jouent un rôle important dans les domaines de recherche fondamentale et industriel [24, 25, 26]. Peu coûteux et relativement faciles à mettre en œuvre, dans certains cas, ils restent les seuls moyens de mesure de la température aux petites échelles et dans les systèmes complexes [27, 28].

En ce qui concerne les mesures sans contact, bien que des microthermocouples spécifiques permettent la mesure sans contact par exemple dans les fluides, en particulier les gaz [29], les mesures sans contact se ramènent souvent à des mesures de flux radiatifs. Les progrès réalisés dans les domaines de la microélectronique et des détecteurs, notamment des détecteurs infrarouges, offrent de nouvelles possibilités de mesure [30, 31, 32, 33, 34].

Quant à la métrologie des flux, la transposition des techniques de la microélectronique et diverses microtechnologies, en particulier celles des couples thermoélectriques, permettent la réalisation de fluxmètres [35, 36]. Parmi les applications possibles de fluxmètres on retrouve l'étude des matériaux, la régulation de la température d'enceintes thermostatées, mesure des pertes thermiques ou encore l'étude et le contrôle du transfert de chaleur à travers des structures. Par ailleurs, nous remarquerons la généralisation des mesures des flux conductif et convectif par les méthodes inverses, utilisées pour la caractérisation des grandeurs thermophysiques des matériaux.

La métrologie des grandeurs thermophysiques, telles la conductivité, diffusivité, effusivité thermiques, la chaleur massique, revêt une importance majeure. Leur connaissance permet la validation et la maîtrise des processus de fabrication et a pour conséquence la diminution du nombre de pièces rebutées ainsi que l'économie d'énergie. C'est le domaine de suivi en temps réel et du contrôle automatisé des processus. Par ailleurs, la caractérisation des propriétés thermiques des matériaux [37, 38] permet d'alimenter les codes de calcul pour la modélisation de systèmes complexes. Les besoins industriels, par exemple dans les secteurs aéronautique et spatial, de nouveaux matériaux aux propriétés mécaniques ou thermiques particulières, ont motivé le développement de matériaux, que l'on regroupe sous le nom de matériaux composites [39]. De par leur nature, ce sont des milieux hétérogènes à l'échelle macroscopique. Ils permettent de répondre à un cahier des charges de plus en plus exigeant : hautes températures, contraintes mécaniques élevées, milieux corrosifs... Cela nécessite de développer de nouvelles méthodes adaptées au contrôle non destructif, telles que la cartographie des propriétés thermophysiques *locales*, permettant la mise en évidence d'éventuelles fissures ou délaminages dans les structures [40, 41, 42, 43, 1, 11, 12].

Le dispositif expérimental devenu une référence pour la mesure des diffusivités thermiques est communément appelé la méthode « flash» [44, 45, 46, 47, 48]. Elle consiste en l'analyse de la réponse en température en face arrière d'un échantillon à une impulsion de chaleur en face avant. Cette technique est utilisée depuis les années 60 pour la mesure des diffusivités *macroscopiques* de matériaux *homogènes* et depuis son apparition elle ne cesse d'évoluer grâce à un ensemble de facteurs technologiques . En effet, les progrès dans le domaine de la microélectronique, notamment des cartes d'acquisition, la constante augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs, l'apparition de caméras infrarouges à matrice de détecteurs à fortes résolutions spatiale et temporelle, offrent de nouvelles possibilités. La cartographie des champs de diffusivités thermiques *locales* de matériaux *hétérogènes* devient alors possible [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 5, 9, 1, 11, 12]. Cependant, elle nécessite l'adaptation des techniques classiques de traitement numérique, au traitement d'une grande quantité de données. Le développement de nouveaux outils permettant l'extraction d'informations *pertinentes* pour le traitement devient également indispensable.

Afin de mieux cerner cette problématique, nous allons brièvement présenter dans cette première partie, les diverses méthodes de mesure des propriétés thermophysiques des matériaux et nous intéresser plus particulièrement à la méthode «flash» et à son évolution.

1.2 Méthodes de mesure des propriétés thermophysiques des matériaux

1.2.1 Les grandeurs mesurées

Les grandeurs thermophysiques à mesurer sont très nombreuses parmi lesquelles se trouvent celles :

- liées à la convection ou au transfert de masse : coefficients d'échange par convection h [W/m²·K], viscosité, coefficients de diffusion...
- liées au rayonnement : réflectivités monochromatiques, emissivités, propriétés des matériaux semi-transparents...
- liées au changement de phase : enthalpies...
- liées à la conduction : *la conductivité* λ[W/m·K], *la diffusivité* **a** [m²/s], *l'effusivité* **b** [J/m²·K·s$^{1/2}$] thermiques, *la masse volumique* ρ [kg/m³], *la chaleur spécifique* **c** [J/kg·K]

C'est à la détermination de ces dernières grandeurs liées à la conduction que nous allons nous intéresser.

1.2.2 Quelques rappels préalables

1.2.2.1 Les grandeurs liées à la conduction thermique

La chaleur spécifique caractérise la nature du corps, elle représente la quantité de chaleur à fournir à l'unité de masse pour élever sa température de 1 K. L'évolution de la température peut se faire en maintenant le corps à volume constant (évolution isochore) ou à pression constante (évolution isobare). Les chaleurs spécifiques correspondantes sont C_v et C_p. On retiendra que pour les solides et les liquides $C_v \approx C_p$. La détermination expérimentale de ces grandeurs se fait à l'aide de calorimètres [20, 56, 57, 58].

La conductivité thermique caractérise l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur. Elle est à rapprocher de la conductivité électrique des matériaux, en particulier métalliques. Elle peut varier de façon significative en fonction de la température. Elle est mesurable par de nombreuses méthodes que nous allons brièvement aborder dans la prochaine section.

La diffusivité thermique d'un matériau se définit comme le rapport entre la conductivité thermique λ[W/m·K] et la capacité thermique volumique $\rho \cdot C_p$ [J/m³·K] :

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \text{ [m²/s]}$$

Elle caractérise l'aptitude d'un matériau à diffuser de la chaleur. Elle peut être aussi bien calculée, que mesurée directement. Le moyen expérimental le plus connu étant la méthode flash. Il est intéressant de remarquer que la chaleur peut diffuser aussi vite dans un matériau isolant (λ et ρ étant faibles), que dans un matériau conducteur (λ et ρ étant grandes).

L'effusivité thermique est la racine du produit de la conductivité thermique $\lambda[\mathrm{W/m{\cdot}K}]$, de la masse volumique $\rho\,[\mathrm{kg/m^3}]$ et de la chaleur spécifique $\mathbf{c}\,[\mathrm{J/kg{\cdot}K}]$:

$$b = \sqrt{\lambda \cdot \rho \cdot c}\ [\mathrm{J/m^2{\cdot}K{\cdot}s^{1/2}}]$$

Elle rend compte de l'aptitude d'un matériau à changer de température lorsqu'il est mis en contact avec un milieu porté à une autre température. Elle prend en compte deux phénomènes : la variation de température par stockage de chaleur et la variation de température par conduction. Plus l'effusivité thermique d'un matériau est faible et plus la température de l'interface sera sensible au flux thermique créé par la mise en contact des deux milieux. Les métaux présentent les valeurs d'effusivités les plus élevées.

Un matériau idéal pour la caractérisation thermique serait un *solide homogène*, *opaque*, *isotrope*. Cependant les nouveaux matériaux répondent rarement à ces critères, ils sont souvent *anisotropes*. Ce sont des milieux *hétérogènes* à l'échelle macroscopique et leur constituants de base ont en général des propriétés thermiques et mécaniques très différentes. La connaissance au moins des axes principaux d'anisotropie est indispensable.

Pour l'étude des matériaux hétérogènes en régime permanent, les caractéristiques d'un matériau *homogène anisotrope équivalent* sont adoptées. Leur application au régime transitoire est plus délicate. Ces considérations relèvent du domaine des techniques d'homogénéisation [59].

1.2.2.2 Conduction en milieu anisotrope

Dans le cas d'un milieu homogène anisotrope, la théorie de Fourier qui exprime en un point les densités de flux en fonction des gradients thermiques suivant les directions du repère (Ouvw), s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \\ \varphi_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_{uu} & \lambda_{uv} & \lambda_{uw} \\ \lambda_{vu} & \lambda_{vv} & \lambda_{vw} \\ \lambda_{wu} & \lambda_{wv} & \lambda_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial u} \\ \frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{\partial T}{\partial w} \end{bmatrix}$$

Les coefficients introduits définissent le tenseur des conductivités du milieu. On se place dans le repère tel que le tenseur des conductivités soit diagonal. Soit donc (Oxyz) le repère des directions principales. (Oz) correspond à la direction principale transverse et équivaut à la direction de l'épaisseur de l'échantillon. (Ox) et (Oy) correspondent aux directions principales longitudinales ou planes. Le tenseur devient :

$$\Lambda_{Oxyz} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$$

On définit les diffusivités thermiques principales à partir des conductivités principales : $a_x = \frac{\lambda_x}{\rho \cdot C_p}$ $a_y = \frac{\lambda_y}{\rho \cdot C_p}$ $a_z = \frac{\lambda_z}{\rho \cdot C_p}$

1.2.3 Classification des méthodes de mesure

DEGIOVANNI propose une démarche de la mesure et de l'identification des grandeurs thermophysiques [60]. La détermination d'une grandeur thermophysique selon lui nécessite de manière générale :

1. le dévéloppement d'un modèle thermocinétique décrivant l'expérience (prenant en compte l'échantillon et son environnement)
2. la mesure des grandeurs fondamentales : températures et/ou flux
3. la mise en place d'une méthode d'identification de paramètres (comparaison modèle-expérience)

Cette démarche est illustrée sur la Figure 1.2.1.

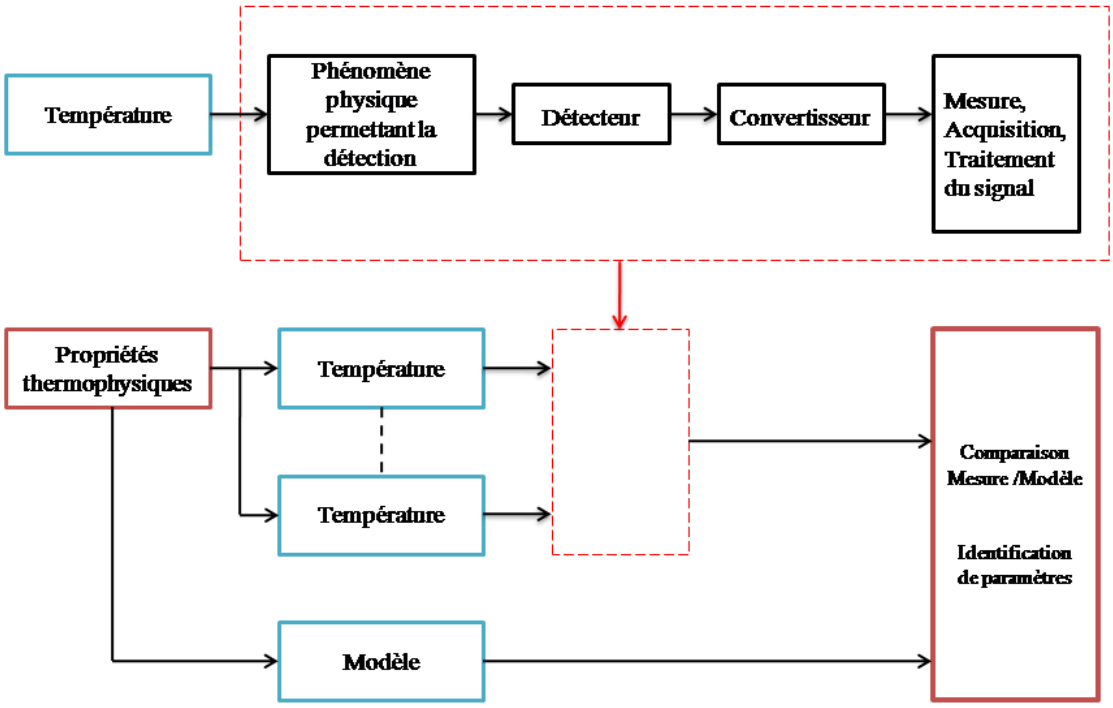


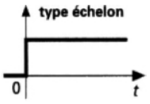
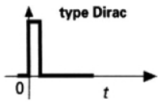
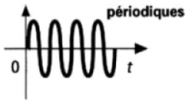
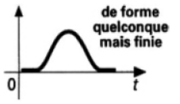
FIGURE 1.2.1: Chaîne de mesure [60]

Il propose également un panorama des différentes méthodes de mesure des conductivité et diffusivité thermiques [60], cette étude a été complétée par KRAPEZ en ce qui concerne la mesure de l'effusivité [61, 62, 63].

DEGIOVANNI propose de distinguer les méthodes fonctionnant en *régime permanent* de celles en *régime transitoire*. La démarche commune à toutes ces méthodes consiste dans un premier temps à exciter le matériau thermiquement, en général cette étape s'effectue au moyen de résistances électriques, lampes flash, diode laser... Puis d'enregister la réponse en température (et/ou flux) de l'échantillon à l'aide de thermocouples, détecteurs thermiques... En régime permanent, seule la conductivité thermique peut être déterminée. Les méthodes utilisées sont celles de la *plaque chaude gardée* pour les isolants [64] et la *méthode de la barre* pour les conducteurs. Le régime transitoire quant à lui, offre de plus larges possibilités d'estimation en permet-

tant l'identification de plusieurs paramètres : conductivité, diffusivité, effusivité thermiques ou d'autres groupements de λ et $\rho \cdot c$.

Les méthodes en régime transitoire sont les plus utilisées, ce qui les distingue c'est la méthode d'excitation thermique, le type de mesure, la géométrie du problème. La Figure 1.2.2 permet de les classer suivant ces critères.

Mesures	Perturbations											
												
Géométrie	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**
I				A			B					
II		C		D	E, F		G					
III	H						I	J		K	L, M	
IV	N	O	P	Q								

Mesures	Géométrie du problème
I: 1 température sur la perturbation	1: mur
II: 1 température hors de la perturbation	2: cylindre
III: 2 températures	3: sphère
IV: 1 flux et une 1 température	

Méthode utilisée	Grandeur thermophysique obtenue
A: méthode flash face avant	diffusivité
B: régime sinusoïdal face avant	
C: sonde thermique bifilaire	
D: méthode flash face arrière	
E: méthode flash en géométrie cylindrique	
F: méthode de l'onde convergente	
G: régime sinusoïdal face arrière	
H: méthode calorimétrique	conductivité
I: régime sinusoïdal face avant et arrière	diffusivité
J: régime sinusoïdal sur film mince	
K: méthode de l'ailette	
L: sonde thermique trifilaire	
M: méthode de l'ailette en conduction radiale	
N: méthode du plan chaud	effusivité
O: méthode du fil chaud	conductivité
P: méthode de la sonde sphérique	$\lambda\sqrt{\rho.c}$
Q: méthode flash face avant	effusivité

FIGURE 1.2.2: Méthodes de mesure en régime transitoire [60]

A ces techniques on pourrait rajouter les méthodes d'excitation aléatoire. Nous renvoyons le lecteur aux travaux et références de BRAHIM-DJELLOUL [65, 66].

Nous aimerions à présent discuter des différentes *méthodes d'excitation* et les *types de mesure*.

1.2.3.1 Différentes méthodes d'excitation

Globalement les techniques d'excitation thermique se divisent en deux groupes : les excitations *électrothermiques* et les excitations *photothermiques.*

Les premières, sont les plus anciennes, facile à mettre en œuvre et peu onéreuses. Des résistances électriques sont employées pour créer un gradient thermique dans le matériau étudié.

Les excitations *photothermiques* quant à elles, sont le fruit de l'évolution technologique. Le matériau est soumis à une excitation *radiative*, obtenue par divers moyens tels que : les lampes flash et halogène, panneaux radiants, diodes laser, dont les prix ont fortement baissé. Ces dernières sont par ailleurs de plus en plus utilisées, notamment pour les caractérisations en hautes températures.

1.2.3.2 Différents types de mesure

De manière générale dans la littérature on retrouve deux types de mesure : les mesures *par contact mécanique* et les *mesures sans contact.*

Les méthodes de mesure par contact (thermocouples, sondes thermiques...), sont des méthodes classiques qui requièrent une instrumentation facile d'utilisation et relativement bon marché. Les performances de ces dispositifs étant remarquables, ils sont souvent utilisés dans les appareils de caractérisation standardisés ($Hot\,disk$®...). Cependant, la mise en contact du capteur avec l'échantillon à caractériser entraine plusieurs problèmes, consultez l'étude réalisée par Krapez [62] ainsi que les références proposées dans ce dossier. Les contacts n'étant jamais parfaits, ils engendrent des résistances thermiques liées aux interfaces. Par ailleurs, les éléments du capteur amenés en contact avec le matériau, possèdent une capacité thermique propre à chacun, qui vient perturber l'évolution de la température locale et ainsi interférer avec la mesure. Bien que les capacités thermiques pour un capteur donné peuvent être déterminées, il n'en est pas de même en ce qui concerne les résistances d'interface. Celles-ci sont dépendantes des contacts entre le capteur et le matériau, qui ne sont pas reproductibles.

Les techniques de mesure sans contact *lèvent* ces difficultés (techniques photoacoustiques et par photoréflexion, detecteurs thermiques, caméras infrarouges...) en offrant en outre des gammes de température de caractérisation plus élevées, inaccessibles avec les méthodes par contact, car destructrices pour celles-ci. Elles restent néamoins plus onéreuses.

Les performances des techniques de mesure par contact et sans contact sont également étudiées dans les dossiers [61, 62, 63].

1.2.3.3 Méthodes photothermiques sans contact

Le principe des méthodes *photothermiques sans contact* consiste à soumettre l'échantillon à une excitation radiative qui l'échauffe par absorption de photons. Ce rayonnement impacte la *face avant* du matériau et engendre un *gradient de température* à sa surface, qui diffuse au sein du matériau. D'autres phénomènes apparaissent également, comme des phénomènes mécaniques de dilatation (propagation d'ondes acoustiques, nous renvoyons le lecteur aux références et travaux récents de Schick [67]) et de variation du coefficient de réflexion de la surface d'excitation (mesures par photoréflexion, consultez les références et travaux de Clerjaud [19]), la variation de l'indice de l'air au-dessus de la surface testée (effet mirage [68]). Selon le type d'excitation, *impulsionnel* ou *périodique*, les phénomènes thermiques ou mécaniques présentent des caractéristiques particulières. Ces différents phénomènes peuvent être détectés en *face avant* ou en *face arrière.*

Nous nous intéresserons dans cette étude seulement aux *phénomènes thermiques* i.e. suivi/détection de l'évolution d'une grandeur liée au transport de chaleur. Cette démarche est résumée sur la Figure 1.2.3.

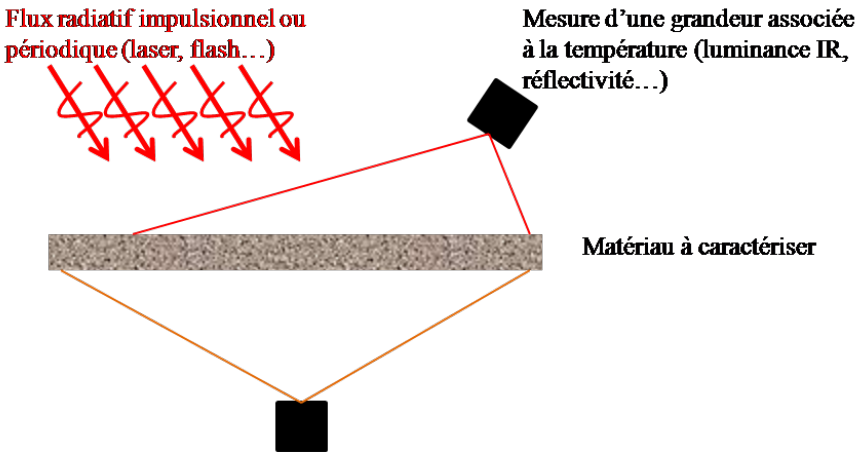


Figure 1.2.3: Principe de la mesure par méthode photothermique sans contact

1.2.3.4 Contraintes liées à l'utilisation d'une source d'excitation radiative

La source d'excitation radiative apporte un flux de photons dont seulement une partie est absorbée et sert à chauffer le matériau, le reste de l'énergie incidente est réfléchie et dépend des propriétés optiques de l'échantillon dans le spectre de la source radiative. L'absorption se fait en surface pour les matériaux opaques et en profondeur pour les matériaux semi-transparents. Le flux absorbé se transforme en chaleur et crée un transfert par conduction au sein du matériau, que l'on mesure pour identifier les propriétés thermophysiques.

1. Avec une excitation de type Dirac et de fluence Q [J/m²], l'élévation de température en face avant d'un matériau semi-infini, homogène et opaque au flux incident s'écrit :

$$T(t) = \frac{\alpha Q}{b\sqrt{\pi t}}$$

on trouve une évolution proportionnelle à $t^{-1/2}$, b étant l'effusivité et α le coefficient d'absorption.

2. Avec une excitation de type échelon, de densité de puissance constante P [W/m²] :

$$T(t) = \frac{2\alpha P}{b}\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

on trouve une évolution proportionnelle à $t^{1/2}$

Pour une détermination *directe* de l'effusivité, la connaissance de la densité de puissance absorbée αP ou de la fluence αQ est nécessaire. Leur mesure est expérimentalement réalisable, mais des estimations *indirectes* de l'effusivité permettent de s'affranchir de la connaissance des flux absorbés.

1.3 L'évolution de la méthode «flash»

1.3.1 La première méthode «flash» de Parker (1961)

La méthode flash a été proposée par W.J Parker et coll. en 1961 [44]. Cette méthode fut développée pour pallier aux insuffisances d'autres techniques de métrologie de l'époque, dont on reprochait les temps d'expérience trop longs, la nécessité d'utiliser des échantillons de taille importante, ainsi que les difficultés éprouvées face à leur extension aux hautes températures. Cette méthode a été développée de façon à répondre aux difficultés liées à la résistance de contact entre l'échantillon et la source d'excitation (utilisation d'une source d'excitation photothermique), ainsi qu'à celles liées aux pertes thermiques (en effectuant des expériences de courtes durées).

La méthode flash, consiste à exciter par une brève impulsion photothermique, la *face avant* de l'échantillon et à mesurer et enregister les variations de température de *la face arrière* ou de *la face avant*. L'analyse du *thermogramme* obtenu permet d'estimer la diffusivité thermique du matériau. Cette méthode s'applique à des échantillons solides, homogènes, bons conducteurs de chaleur et de faibles dimensions. Son principe est résumé Figure 1.3.1.

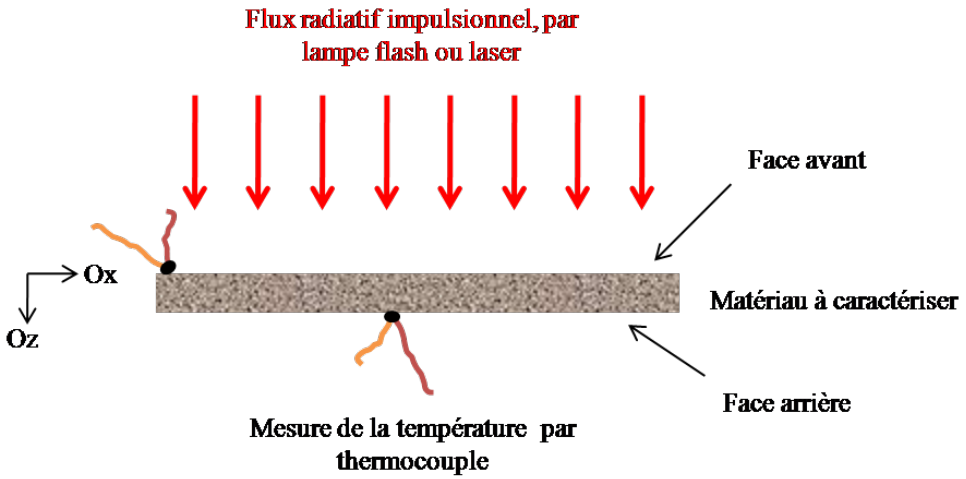


Figure 1.3.1: Principe de la méthode

Dans le cas où les pertes convectives sont négligées, les réponses en température en face avant (z=0) et en face arrière (z=e) issues de ce dispositif expérimental sont présentées (adimensionnées) Figure 1.3.2 page suivante.

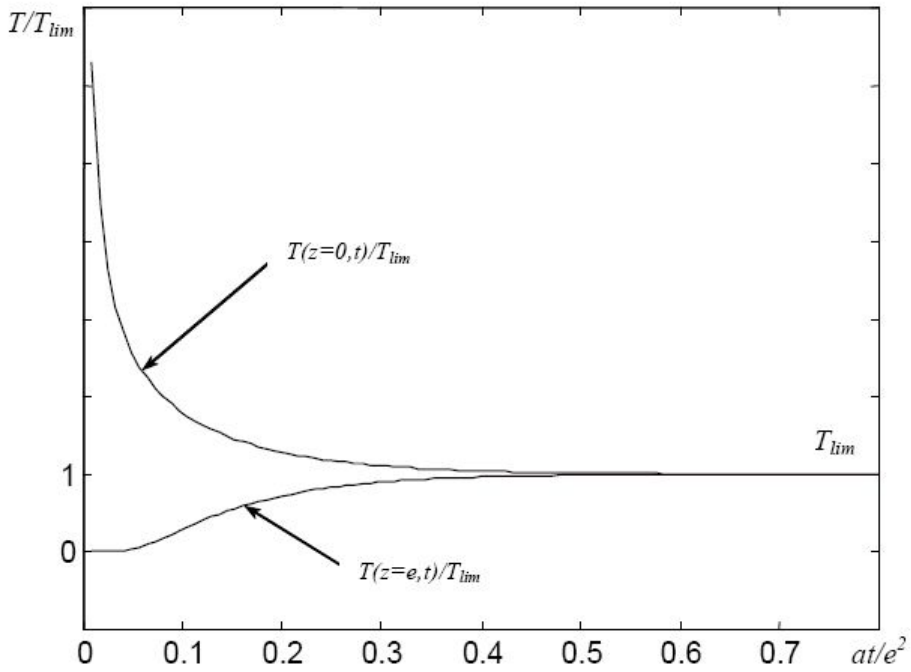


FIGURE 1.3.2: Réponses en température sur les faces avant et arrière d'un échantillon plan, d'épaisseur e et de diffusivité a, à une impulsion flash en face avant. Schéma extrait de [48]

1.3.1.1 Thermogramme de la face arrière

En supposant que le flux d'excitation est de courte durée et uniformément réparti sur la face avant de l'échantillon, que les pertes convectives sont négligeables, la résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de Laplace [3]. À une profondeur z donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit (1.3.1) :

$$T(z,t) = \frac{Q}{\rho ce}\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\frac{n\pi}{e}z)\exp(-\frac{n^2\pi^2 a\ t}{e^2})\} = T_{lim}\cdot f(\frac{z}{e},\frac{a\,t}{e^2}) \tag{1.3.1}$$

où $a\,[\mathrm{m^2/s}]$ désigne la diffusivité thermique, $e\,[m]$ l'épaisseur de l'échantillon, $Q\,[\mathrm{J/m^2}]$ fluence d'excitation, $\rho c\,[\mathrm{J/K{\cdot}m^3}]$ la chaleur volumique, $T_{lim} = \frac{Q}{\rho ce}$ étant la valeur *limite* de la température atteinte en face arrière aux temps longs. Le matériau est supposé homogène, isotrope et opaque.

La réponse au flash en face arrière et la courbe de sensibilité réduite à la diffusivité thermique - $a\cdot\frac{\partial(T/T_{max})}{\partial a}$ - obtenus à partir de l'équation (1.3.1) sur la Figure 1.3.3 page suivante, permettent de constater que le maximum de sensibilité au paramètre diffusivité, est atteint à un temps voisin de la «demi-montée» $t_{1/2}$.

Parker a proposé de déterminer la diffusivité à partir de ce point de «demi-montée» par la formule (1.3.2) :

$$\frac{a\cdot t_{1/2}}{e^2} = 0.139 \tag{1.3.2}$$

avec $t_{1/2}$ défini par (1.3.3) :

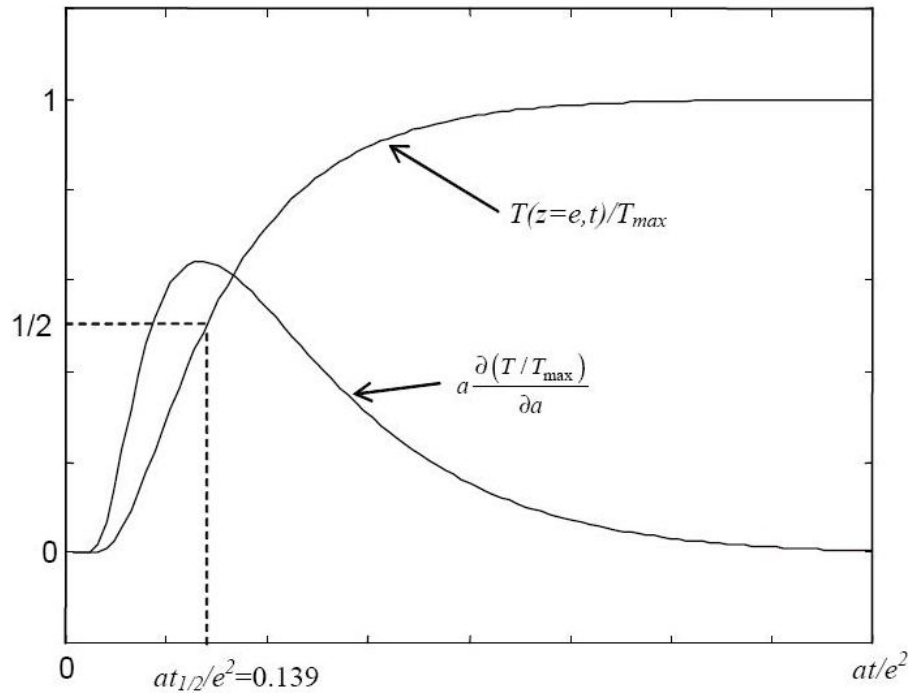


FIGURE 1.3.3: Thermogramme en face arrière, courbe de sensibilité réduite et le temps de «demi-montée», schéma extrait de [48]

$$\frac{T(z=e,t_{1/2})}{T_{max}} = 1/2 \tag{1.3.3}$$

Pour ce cas idéal, la détermination de l'épaisseur e et du temps de demi-montée $t_{1/2}$, suffisent pour estimer la valeur de la diffusivité thermique. Il n'est donc pas nécessaire de connaître l'énergie absorbée Q. Par ailleurs, cette grandeur peut être calculée connaissant la chaleur volumique ρc :

$$T_{lim} = \frac{Q}{\rho ce} \Longleftrightarrow Q = \rho ce \cdot T_{lim}$$

Réciproquement, connaissant Q et la valeur de T_{lim}, on pourra en déduire celle de ρc et calculer la valeur de la conductivité.

1.3.1.2 Thermogramme de la face avant

L'évolution de la température en face avant de l'échantillon est donnée par l'équation (1.3.1) en (*z=0*) :

$$T(z=0,t)=\frac{Q}{\rho ce}\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-\frac{n^2\pi^2 a\ t}{e^2})\}=T_{lim}\cdot f(\frac{a\,t}{e^2}) \tag{1.3.4}$$

Aux temps courts la réponse en face avant est singulière [44] et pose certaines difficultés pour l'analyse. Le tracé en coordonnées logarithmiques du thermogramme, permet d'estimer la diffusivité à partir des comportements asymptotiques aux temps courts et aux temps longs, Figure 1.3.4. Un temps caractéristique t_c est défini à l'intersection des deux asymptotes tel que (1.3.5) :

$$t_c=\frac{e^2}{a\cdot\pi} \tag{1.3.5}$$

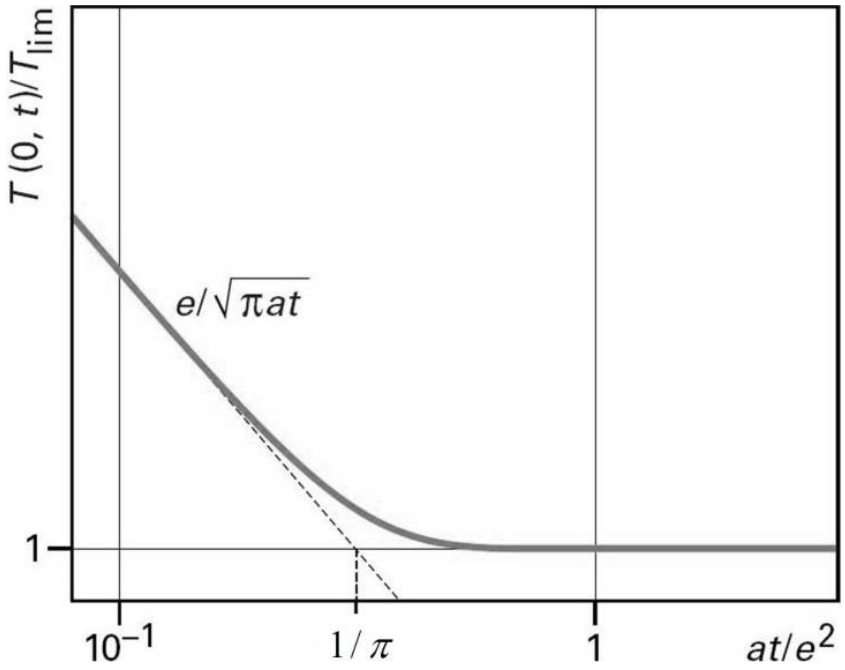


FIGURE 1.3.4: Réponse (adimensionnée) en face avant en coordonnées logarithmiques, définition du temps caractéristique. Schéma extrait de [48]

Aux temps courts la réponse de l'échantillon s'apparente à celle d'un milieu semi-infini et la réponse en température s'écrit (1.3.6) :

$$T(z=0,t\to 0)\approx\frac{Q}{\sqrt{\lambda\rho c}\sqrt{\pi t}}=T_{lim}\frac{e}{\sqrt{\pi at}} \tag{1.3.6}$$

aux temps longs, la température de la face avant tend vers T_{lim} tel que (1.3.7) :

$$T(z=0,t\to\infty)=T(z=e,t\to\infty)\approx\frac{Q}{\rho ce}=T_{lim} \tag{1.3.7}$$

Traditionnellement ce sont les mesures en face arrière qui sont exploitées. Cette méthode permet une estimation simple de la diffusivité aux temps courts, nécessitant peu de traitements.

Cette simplicité de mise en œuvre et la rapidité de la méthode ont assuré son succès. Cependant, elle possède des inconvénients majeurs tels que :

1. le modèle employé ne prend pas en compte les pertes convectives en faces avant et arrière, ainsi que les parois latérales sont considérées adiabatiques
2. la précision de la diffusivité mesurée dépend de l'estimation du temps de demi-montée $t_{1/2}$, elle-même biaisée par le bruit de mesure de la chaine d'acquisition du signal
3. la répartition spatiale du flux incident est supposée uniforme
4. la diffusivité est supposée indépendante de la température

Cette méthode va donc être améliorée. Pendant la période des années 1961-1970, les améliorations vont être réalisées aux Etats-Unis, plus particulièrement des corrections dues à la durée et à la répartition spatiale de l'impulsion vont être apportées. Pour les références de ces travaux nous renvoyons le lecteur au dossier [48], ainsi qu'aux revues des différents travaux réalisés par Degiovanni [45] et Balageas [69]. Nous pouvons par ailleurs citer les travaux précurseurs de Hendler et Coll. [70, 1958], réalisés dans le domaine médical sur la radiométrie photothermique en face avant. Dans ces travaux des principes expérimentaux similaires à ceux de Parker et Coll. ont été utilisés.

La méthode flash de Parker au fil de ses évolutions va devenir une technique de mesure standard de la diffusivité thermique des solides.

Il est intéressant de remarquer qu'en 1961 également, Cowan [71, 72], propose des méthodes de mesure de la diffusivité thermique par *radiométrie photothermique* avec deux autres types d'excitation et aux hautes températures : le chauffage continu (ou excitation échelon) et l'excitation périodique. Cette dernière méthode étant une extension de la méthode d'Ångström [73], qui connaîtra une longue évolution, permettant la mesure des propriétés thermiques aux micro-échelles, tels que les fibres de carbone, pour ne citer qu'un exemple parmi d'autres [74, 75].

L'excitation impulsionnelle de type «flash» ou laser, a l'avantage de solliciter toutes les fréquences caractéristiques de l'échantillon à la fois, et ainsi permet une analyse rapide, en comparaison aux techniques périodiques de type «lock-in» ou «hétérodyne», pour lesquelles le balayage d'un ensemble de fréquences est nécessaire [19].

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour les basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail [76, 77, 48].

1.3.2 La méthode «flash» en face arrière avec pertes de Degiovanni (1977)

Pour tenir compte des pertes thermiques et diminuer le biais associé à la mesure de la diffusivité à partir d'un seul point du thermogramme, Degiovanni [45] a proposé de considérer plusieurs couples de points, aux temps caractéristiques : $t_{1/3}$, $t_{1/2}$, $t_{2/3}$, $t_{1/2}$, $t_{5/6}$, présentés Figure 1.3.5.

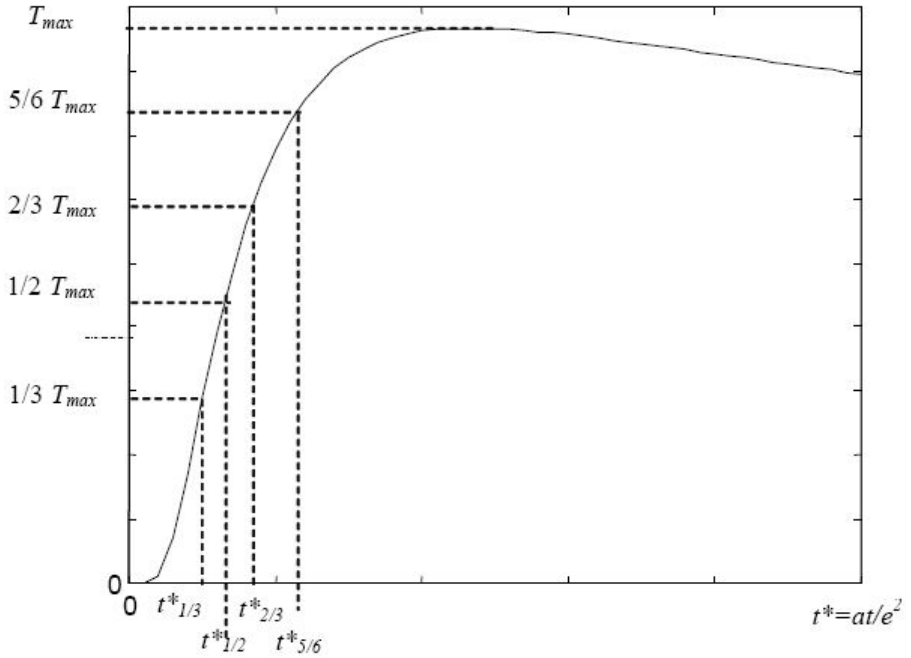


Figure 1.3.5: Définition des temps caractéristiques adimensionnels relatifs à la méthode de Degiovanni (1977), schéma extrait de [48]

Trois valeurs de diffusivités peuvent être estimées à partir des expressions suivantes, en plus de celle obtenue à partir du temps de «demi-montée» seul :

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left[0.818 - 1.708\left(\frac{t_{1/3}}{t_{5/6}}\right) + 0.885\left(\frac{t_{1/3}}{t_{5/6}}\right)^2 \right] \tag{1.3.8}$$

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left[0.954 - 1.581\left(\frac{t_{1/2}}{t_{5/6}}\right) + 0.558\left(\frac{t_{1/2}}{t_{5/6}}\right)^2 \right] \tag{1.3.9}$$

$$a = \frac{e^2}{t_{5/6}} \left[1.131 - 1.222\left(\frac{t_{2/3}}{t_{5/6}}\right) \right] \tag{1.3.10}$$

A partir de ces expressions il est possible de calculer une valeur moyenne de la diffusivité et ainsi minimiser l'influence du bruit de mesure et tenir compte des pertes thermiques. L'arrivée des premiers micro-ordinateurs dans les années 80, va offrir la possibilité d'utiliser tous les points du thermogramme pour la première fois, via la méthode des moments temporels partiels. Une analyse complète de la réponse en température devient réalisable.

1.3.3 La méthode des moments partiels de Degiovanni et Laurent (1986)

La méthode des moments partiels [47] a su avantageusement tirer profit des techniques modernes d'acquisition et de traitement des données sur micro-ordinateur. Permettant d'exploiter pour la première fois le thermogramme entier et ainsi traiter une grande quantité de données par le calcul de sommes pondérées. Elle consiste à déterminer la diffusivité à partir des moments d'ordre 0 et -1 du thermogramme définis par :

$$M_0 = \int_{t_{0.1}}^{t_{0.8}} \frac{T(t)}{T_{max}} dt \quad et \quad M_{-1} = \int_{t_{0.1}}^{t_{0.8}} \frac{1}{t} \frac{T(t)}{T_{max}} dt \tag{1.3.11}$$

La diffusivité thermique est ensuite obtenue à partir de la relation suivante :

$$a = e^2 \frac{F(M_{-1})}{M_0} \tag{1.3.12}$$

avec

$$F(M_{-1}) = 0.08548 - 0.314(0.5486 - M_{-1}) + 0.500(0.5486 - M_{-1})^{2.63} \quad \text{pour} \quad M_{-1} > 0,27$$

$$F(M_{-1}) = -0.08519 - 0.305(M_{-1}) \quad \text{pour} \quad M_{-1} > 0,44$$

La méthode ainsi obtenue est moins sensible au bruit car l'estimation de la diffusivité est issue d'un processus de moyenne temporelle.

Les premières applications de ces méthodes ont porté sur des matériaux solides, homogènes et opaques, puis progressivement des adaptations des techniques de traitement pour des cas de structures de plus en plus complexes apparurent. Notamment, pour les matériaux composites (matrice+fibres) ou de laminés, dont les hétérogénéités du milieu sont pris en compte dans le modèle. Ces problèmes ont été étudiés par Balageas et coll. [78, 79].

Les premières utilisations des caméras infrarouges dans le cadre du Contrôle Non Destructif (CND) des matériaux datent des années 80. La *thermographie infrarouge* va séduire en premier lieu les industries aéronautiques civile et militaire, pour répondre aux besoins de contrôle des matériaux composites, notamment pour la détection de délaminages [40, 80, 81, 82]. Le transfert diffusif étant considéré unidirectionnel, dans le sens de l'épaisseur de l'échantillon. Ces premières méthodes traitaient chaque pixel de manière indépendante et permettaient d'obtenir ainsi, une expérience flash par pixel. Ce sont des techniques que nous pouvons qualifier de *qualitatives*. De nos jours, les recherches dans ces domaines restent très actives [83, 84].

1.3.4 L'étude des délaminages par l'analyse des contrastes thermiques

Les réponses en température locales sont comparées entre elles et les variations éventuelles de comportement (ou contrastes) sont reliées à des variations locales de diffusivité thermique du matériau. Le principe de la méthode en transmission est décrit Figure 1.3.6. Le même principe peut être appliqué en reflexion.

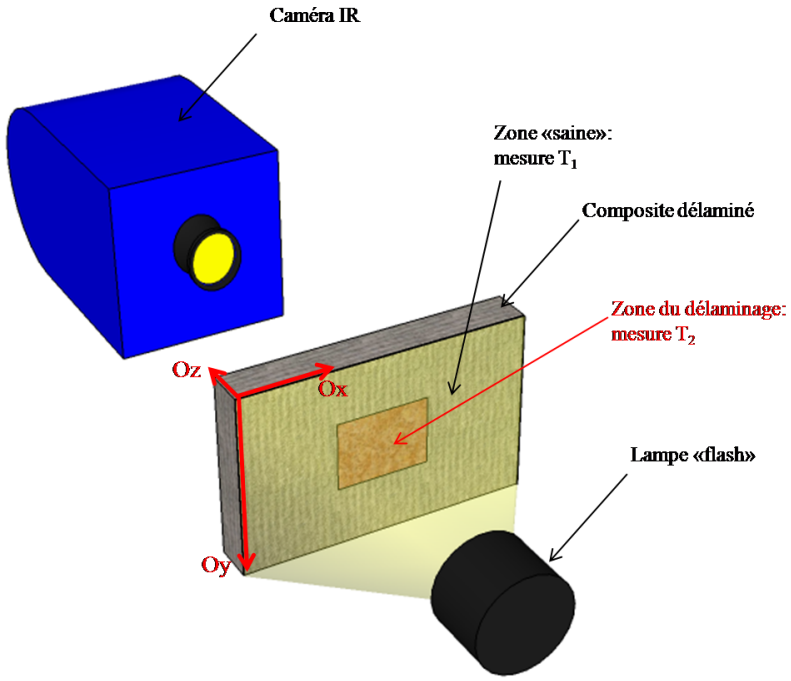


FIGURE 1.3.6: Détection de délaminages par contraste thermique et méthode flash

Les mesures de température des zones saine et délaminée s'effectuent en face arrière par la caméra infrarouge. Les contrastes thermiques absolu et relatif s'expriment respectivement comme suit :

$$C_{absolu}(x,y,t) = (T_2(x,y,t) - T_2(x,y,t_0)) - (T_1(x,y,t) - T_1(x,y,t_0)) \tag{1.3.13}$$

$$C_{relatif}(x,y,t) = \frac{C_{absolu}(x,y,t)}{T_1(x,y,t) - T_1(x,y,t_0)} \tag{1.3.14}$$

L'étude de contrastes thermiques permet de remonter aux propriétés du défaut, comme la profondeur et la résistance de contact associée. Consulter [33] et les références citées dans ce document pour plus d'information à ce sujet. Des travaux plus rigoureux ont été menés pour la caractérisation de la profondeur des défauts que les approches initiales utilisant la notion du temps du contraste maximal [85, 86].

Nous remarquerons que les transferts dans le plan ne sont pas pris en compte dans ces méthodes.

PAJANI résume [77], qu'à partir des années 1989, les caméras infrarouges à matrice de détecteurs vont faire leur apparition dans de nombreuses applications civiles et militaires et

qu'il s'agira : « d'un saut technologique décisif, dans l'espace d'imagerie... ». Il en résulte que l'amélioration de l'image thermique, entraine des mesures de meilleure qualité. Cela va offrir de nouvelles possibilités *quantitatives*, notamment dans le domaine du contrôle non destructif des matériaux.

De nouvelles approches pour la détection de délaminages dans les matériaux composites sont proposées [87], appliquant une transformation intégrale de Laplace aux images infrarouges et résolvant le problème de conduction à partir de modèles 1D simplifiés dans l'espace transformé. Cette étude est complétée par les travaux de Philippi et coll.[88, 89, 50, 90] et Bendada et coll.[91, 92, 93, 94, 95], le signal étant transformé cette fois-ci, dans l'espace de Fourier-Laplace et prenant en compte pour la première fois le transfert diffusif *longitudinal*.

1.3.5 Les premières mesures de diffusivités thermiques longitudinales par la méthode «flash» par Philippi (1994)

La rapide démocratisation des caméras infrarouges dans les année 90 va permettre l'acquisition d'une grande quantité d'informations qui va pousser au développement de nouvelles méthodes d'analyse d'images infrarouges. La précision des grandeurs thermophysiques estimées va être nettement améliorée grâce aux traitements statistiques de l'information. Pour répondre à de nouveaux besoins industriels, la caractérisation de propriétés thermiques *longitudinales* devient une nécessité. Les travaux de Philippi sont parmi les premiers à proposer l'étude théorique et expérimentale des possibilités de mesure de diffusivités thermiques longitudinales, par traitement d'images infrarouges [88, 89, 50, 90].

Le dispositif expérimental représenté Figure 1.3.6 page 32, est modifié en rendant l'impulsion de chaleur spatialement non uniforme et quelconque en face avant. Le matériau étudié est une plaque *mince* orthotrope, de dimensions longitudinales (l,L) et d'épaisseur e. La réponse en température de la plaque mince après le «flash» est enregistrée en face arrière avec une caméra infrarouge. L'estimation des diffusivités *longitudinales macroscopiques* a_x et a_y, ainsi que du coefficient des pertes convectives h s'effectue par la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} & = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \\ \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = hT - \varphi(x,y,t) & pour\ z = 0, \\ \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = -hT & pour\ z = e, \\ T = 0 & t = 0 \end{cases} \tag{1.3.15}$$

où λ_x, λ_y, λ_z sont les conductivités thermiques dans les directions principales d'espace. Le pulse de chaleur est déposé sur la surface du matériau tel que : $\varphi(x,y,t) = f(x,y)\delta(t)$, avec δ le symbole de Kronecker. Le système (1.3.15) est ensuite résolu par la méthode des quadripôles [49, 96] en effectuant une double transformée intégrale de Fourier en espace et une transformée de Laplace en temps, ainsi :

$$\begin{aligned} T(x,y,z,t) \overset{Fourier}{\Rightarrow} \theta(\alpha_n,\beta_m,z,t) &= \int_{y=0}^{l}\int_{x=0}^{L} T(x,y,z,t)\exp(-i[\alpha_n x + \beta_m y])dxdy \\ f(x,y) \overset{Fourier}{\Rightarrow} F(\alpha_n,\beta_m) &= \int_{y=0}^{l}\int_{x=0}^{L} f(x,y)\exp(-i[\alpha_n x + \beta_m y])dxdy \\ \theta(\alpha_n,\beta_m,z,t) \overset{Laplace}{\Rightarrow} \tau(\alpha_n,\beta_m,z,p) &= \int_{t=0}^{\infty} \theta(\alpha_n,\beta_m,z,t)\exp(-pt)dt \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

où $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ et $\beta_m = \frac{m\pi}{l}$ sont les fréquences spatiales discrètes de Fourier.
La solution du système (1.3.15) en face arrière en $z = e$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\tau(\alpha_n,\beta_m,z &= e,p) = \frac{F(\alpha_n,\beta_m)}{\lambda_z\gamma\sinh(\gamma e)+2h\cosh(\gamma e)+h^2\sinh(\gamma e)/(\lambda_z\gamma)}\\ \text{où } \gamma &= \sqrt{\frac{p}{a_z}+(\frac{\lambda_x}{\lambda_z})\alpha_n^2+(\frac{\lambda_y}{\lambda_z})\beta_m^2} = \sqrt{\frac{1}{a_z}(p+a_x\alpha_n^2+a_y\beta_m^2)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{a_z}(p+k)} \quad \text{avec} \quad k = a_x\alpha_n^2+a_y\beta_m^2\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

où a_x, a_y, sont les diffusivités *longitudinales macroscopiques et* a_z la diffusivité *macroscopique transverse,* dans l'épaisseur. Pour α_n et β_m constants :

$$\tau(\alpha_n,\beta_m,z,p) = S(p+k)$$

la transformée inverse de Laplace de $S(p+k)$ dans le domaine temporel donne $s(t)\exp(-kt)$, en prenant $s(t) = \theta(0,0,z=e,t)$ on obtient alors dans l'espace de Fourier :

$$\theta(\alpha_n,\beta_m,z=e,t) = \theta(0,0,z=e,t)\exp(-kt) \tag{1.3.18}$$

Cette dernière équation (1.3.18) prise à deux instants différents t_1 et t_2 permet d'écrire la relation suivante :

$$\frac{\theta(\alpha_n,\beta_m,z=e,t_2)}{\theta(\alpha_n,\beta_m,z=e,t_1)} = \frac{\theta(0,0,z=e,t_2)}{\theta(0,0,z=e,t_1)}\exp[-a_x\alpha_n^2(t_2-t_1)]\exp[-a_y\beta_m^2(t_2-t_1)] \tag{1.3.19}$$

Une façon simple d'identifier les diffusivités longitudinales a_x et a_y consiste alors à tracer : pour $\beta_m = 0$ (i.e. pour la valeur moyenne suivant y), $\ln[\frac{\theta(\alpha_n,0,z=e,t_2)}{\theta(\alpha_n,0,z=e,t_1)}]$ en fonction de $\alpha_n^2(t_2-t_1)$, et en calculant le coefficient directeur de la droite obtenue, par une simple régression linéaire, on en déduit la diffusivité *longitudinale macroscopique* a_x. De la même façon on obtient a_y en prenant $\alpha_n = 0$ (i.e. pour la valeur moyenne suivant x).

Il est important de remarquer que l'expression (1.3.19) est indépendante de $f(x,y)$ ou $F(\alpha_n,\beta_m)$, la connaissance de la répartition spatiale du flux d'excitation n'est plus nécessaire, ce qui permet de lever de nombreuses contraintes expérimentales.

Par ailleurs, *l'excitation impulsionnelle* offre des avantages indéniables dus à la *séparabilité du champ de température*, aucune autre excitation n'offre ce type de séparation, $T(x,y,z=e,t)$ peut s'exprimer dans le cas d'un matériau homogène comme suit :

$$T(x,y,z=e,t) = \tilde{T}(x,y,t)\cdot\frac{\{T\}_{(x,y)}(t)}{\{T_{max}\}_{(x,y)}} \tag{1.3.20}$$

avec $\{T\}_{(x,y)}(t)$ la réponse moyenne au flash en face arrière et $\tilde{T}(x,y,t)$ l'évolution du champ de température uniquement dans le plan.

L'expression $\frac{\theta(\alpha_n,\beta_m,z=e,t_2)}{\theta(\alpha_n,\beta_m,z=e,t_1)}$ est indépendante de la diffusivité *transverse* a_z si et seulement si $\alpha_n \neq 0$ ou $\beta_m \neq 0$. L'étude de $\theta(0,0,z=e,t)$ par les méthodes présentés dans les sections précédentes, permet une estimation de la diffusivité transverse a_z.

De plus, pour des temps ($t \gg \frac{e^2}{a_z}$), l'expression $\ln[\frac{\theta(0,0,z=e,t_2)}{\theta(0,0,z=e,t_1)}]$ peut s'exprimer seulement en fonction des pertes convectives (vérifiant l'hypothèse de l'ailette) :

$$\ln[\frac{\theta(0,0,z=e,t_2)}{\theta(0,0,z=e,t_1)}] = -\frac{2h}{\rho ce}(t_2 - t_1) \tag{1.3.21}$$

ce qui permet d'identifier $H = \frac{2h}{\rho ce}$.

Enfin, le traitement statistique d'une grande quantité d'information, permet l'estimation des diffusivités thermiques avec une très bonne précision. Cependant, dans le dispositif de Philippi, l'excitation thermique ne sollicite qu'une faible partie de la surface de l'échantillon, dont l'intégration par la transformée de Fourier n'offre que l'estimation de diffusivités *longitudinales macroscopiques,* dans les axes principaux d'anisotropie. Dernièrement des auteurs comme Ruffio [97] et Souhar [98], ont amélioré ces méthodes en optimisant les méthodes d'estimation et les méthodes expérimentales. Le dispositif expérimental de Philippi va être adapté par Krapez et Coll. pour offrir la possibilité d'estimation de diffusivités *longitudinales locales* [4, 55, 5].

De manière générale, l'estimation de diffusivités longitudinales, nécessite d'instaurer un gradient thermique à la surface du matériau orthotrope, dans la direction étudiée. Certaines configurations expérimentales intéressantes, sont issues des méthodes de Contrôle Non Destructif (CND). Lesniak a proposé par exemple, pour la détection de fissures débouchantes [99, 100, 101], d'utiliser un système de chauffage étendu, périodique spatialement, avec un balayage de la surface d'inspection, consultez la Figure 1.3.7 page suivante pour le principe. Une caméra infrarouge sert alors à une analyse «plein champ» de la diffusion. Cette méthode et ses variantes sont regroupées sous le nom de «thermographie à diffusion forcée». Elles ont l'avantage d'appliquer des gradients thermiques importants, aussi bien dans la direction de l'épaisseur du matériau que dans le plan. Le dispositif expérimental est représenté sur la Figure 1.3.8 page suivante.

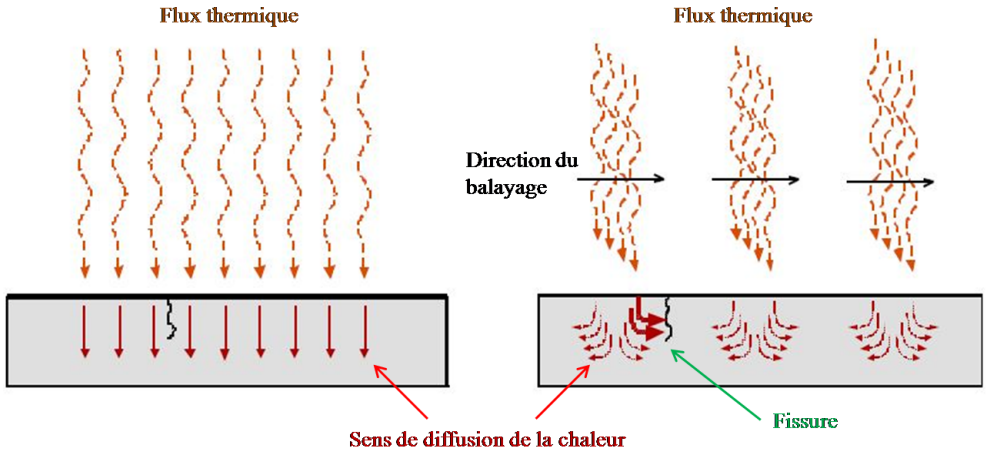


FIGURE 1.3.7: Inspection d'une pièce avec une fissure débouchante. Sur le spécimen de gauche, le flux imposé est uniforme et est dans le sens de l'épaisseur. Dans cette configuration la détection de la fissure est délicate. Sur le spécimen de droite, un flux périodique spatialement, est balayé à la surface de l'échantillon, ce qui permet d'imposer un gradient thermique *longitudinal* et détecter la fissure. Schéma extrait de [99].

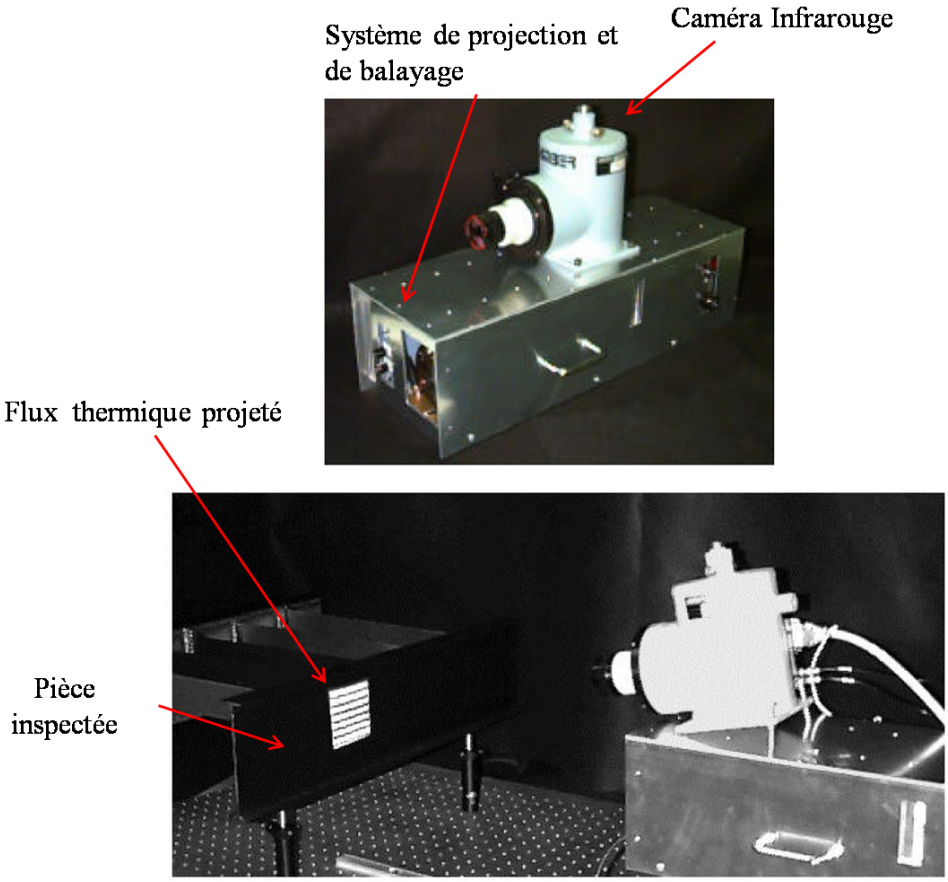


FIGURE 1.3.8: Dispositif expérimental de «thermographie à diffusion forcée». Clichés extraits de [99]

1.3.6 La mesure de diffusivités longitudinales locales par thermographie infrarouge, Krapez et Coll. (1999, 2004)

Krapez et Coll. [4, 55, 5] proposent d'adapter la méthode de Philippi en s'inspirant, entre autres, du dispositif expérimental de Lesniak. Une grille périodique est intercalée entre la lampe flash et la plaque mince à caractériser pour : imposer un gradient thermique à la surface du matériau, répartir le flux de chaleur de façon à augmenter les zones de diffusion sur toute la surface de l'échantillon, qui sont sensibles à l'estimation de diffusivités longitudinales. Le dispositif est illustré Figure 1.3.9.

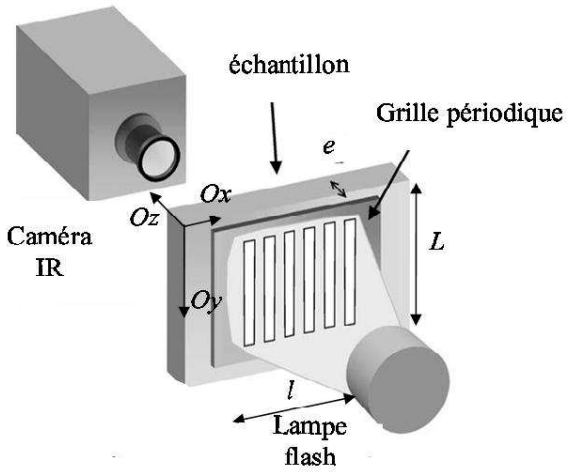


Figure 1.3.9: Dispositif expérimental proposé par Krapez pour l'estimation de profils de diffusivités longitudinales locales

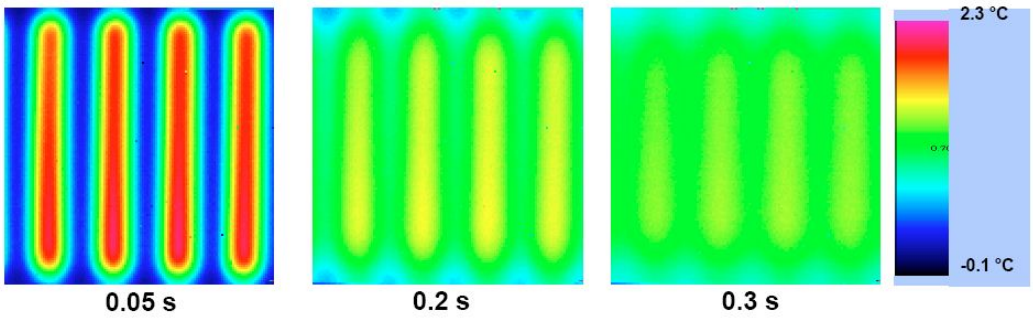


Figure 1.3.10: Champs expérimentaux obtenus en face arrière à divers instants après le flash, sur un échantillon d'aluminium AU4G, de 3 mm d'épaisseur. Schéma extrait de [4]

La réponse en température est enregistrée en face arrière après excitation par une caméra infrarouge. Le traitement proposé par Philippi et coll. décrit en section précedente, est implémenté alors de façon *locale*. Cette approche *locale,* consiste à appliquer les transformées de Fourier sur une *fenêtre glissante* de dimension limitée à une largeur du masque périodique. Cette démarche permet d'obtenir simultanément les diffusivités longitudinales et transverses *locales*. La Figure 1.3.10, présente des champs de température 2D expérimentaux obtenus avec ce dispositif.

Cette méthode originale, nécessite cependant le calcul des transformées de Fourier en chaque pixel, ce qui rallonge considérablement les temps de calcul d'une part. D'autre part, les réponses fluctuent d'un pixel à un autre, car les conditions aux limites sont rarement les mêmes localement, ce qui entraine un biais important dans les estimations.

1.3.7 Estimation de champs bidimensionnels de diffusivités longitudinales, Batsale et Coll. (2004)

Dans le cas d'une plaque mince homogène, pour laquelle la diffusion est supposée parfaitement 2D et les pertes convectives négligées, l'équation de la chaleur peut s'écrire :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \tag{1.3.22}$$

Comme dans le travail de Krapez et Coll. il est possible de supposer que même pour des matériaux hétérogènes, localement les propriétés thermophysiques sont constantes. Dans ces conditions il est alors possible de réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a(x,y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \tag{1.3.23}$$

Ainsi, la diffusivité thermique devient une grandeur locale. La dernière expression peut se mettre sous forme matricielle :

$$\mathbf{X}(x,y) \cdot \beta(x,y) = \mathbf{Y}(x,y) \tag{1.3.24}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x,y) &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \left(\dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2} \right)_{t_k} \\ \vdots \end{bmatrix} (x,y) \\ \mathbf{Y}(x,y) &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \left. \dfrac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} \right|_{t_k} \\ \vdots \end{bmatrix} (x,y) \\ \beta(x,y) &= [a]\,(x,y) \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

Nous pouvons alors voir la *relation linéaire* entre le *laplacien* $\mathbf{X}(x,y)$ et la *dérivée temporelle* $\mathbf{Y}(x,y)$ dans l'expression (1.3.24). Le vecteur paramètre β dépend donc uniquement des propriétés de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. Lorsque ces matrices contiennent des données bruitées, l'inversion au sens des *moindres carrés linéaires* [10] de (1.3.24) présente de nombreuses difficultés. Par exemple, la matrice $\mathbf{X}$, appelée classiquement la matrice de *sensibilité* qui contient les termes du modèle décrivant l'évolution de $\mathbf{Y}$ reliée au paramètre β, doit en principe être connue sans erreur. Ce

qui n'est pas le cas si l'on travaille avec des données bruitées. De plus, le bruit de mesure se répercute de manière différente selon le mode de calcul des dérivées partielles.

Batsale et Coll. [6] proposent une approche permettant d'améliorer localement l'inversion de $\mathbf{X}$, en créant une distribution de température fortement non uniforme, de sorte que le laplacien ne soit pas nul localement dans de nombreux endroits. Pour créer ce fort gradient de température non uniforme, le dispositif «flash» est associé à un filtre 2D semi-transparent. Ce filtre comporte une répartition aléatoire de taches noires, le principe du dispositif est illustré en Figure 1.3.11.

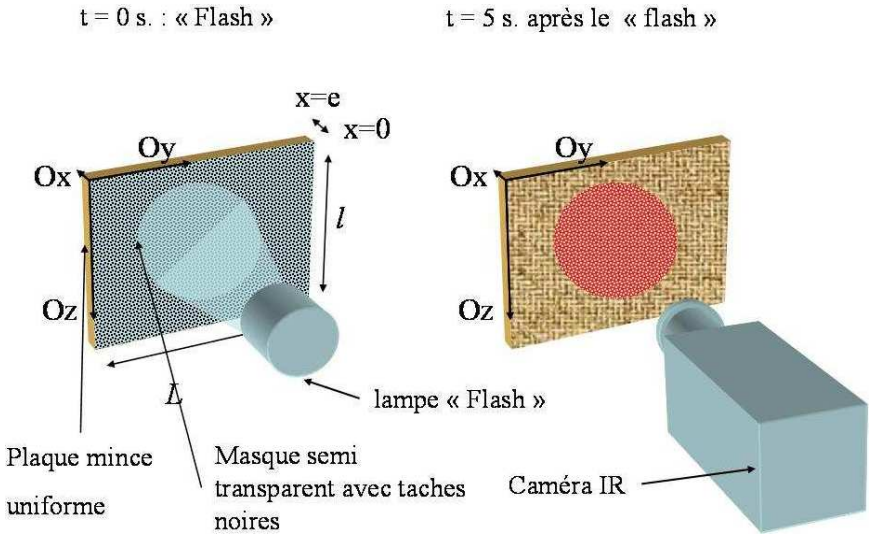


Figure 1.3.11: Dispositif expérimental associé au flash aléatoire de Batsale et Coll.

Un exemple de filtre utilisé est présenté Figure 1.3.12.

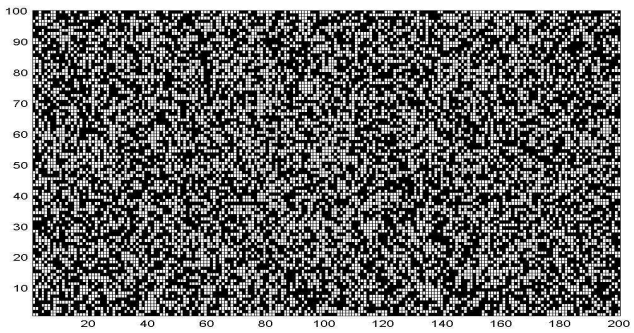


Figure 1.3.12: Répartition aléatoire de cases noires imprimées sur un calque semi-transparent

Les champs de températures 2D expérimentaux enregistrés par la caméra sont alors injectés dans le modèle (1.3.24), ce qui permet l'estimation des diffusivités longitudinales locales. Un exemple de résultat obtenu sur une feuille d'aluminium comportant des fissures, est illustré Figure 1.3.13 page suivante.

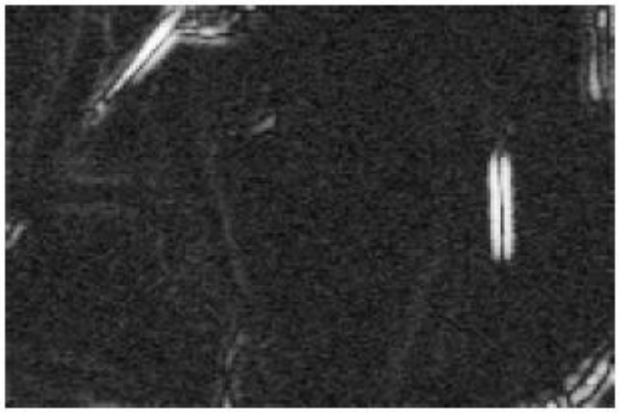


FIGURE 1.3.13: Cartographie de diffusivités longitudinales locales d'une feuille aluminium

Les fissures présentes dans la feuille d'aluminium sont ainsi mises en évidence et valident la méthode pour une utilisation dans le domaine du contrôle non destructif.

Cependant, de nombreux inconvénients subsistent liés au problème d'inversion. Les variations de diffusivités locales peuvent en effet être dues aussi à des problèmes numériques tels que : l'insufisance de sensibilité locale par rapport aux paramètres étudiés, la non validité du problème local, la corrélation de certains termes du modèle. Bien qu'une amélioration des résultats soit possible en envisageant l'inversion au sens des *moindres carrés totaux* [102], censément plus robustes au bruit de mesure et au manque de sensibilité, de nouveaux outils de traitement de données sont nécessaires pour pallier aux difficultés.

Les travaux de BAMFORD ET COLL. [1, 11, 13, 12, 2] se placent dans ce contexte et s'appuient sur ceux de BATSALE et KRAPEZ ET COLL. pour mettre en place de nouvelles approches et méthodes inverses.

Tout en reprenant les modèles de transfert existants et les dispositifs expérimentaux, ils proposent dans un premier temps d'améliorer les méthodes inverses existantes, en implémentant pour les estimations *les moindres carrés totaux* à la place *des moindres carrés linéaires*, avant de se tourner vers de nouvelles approches basées sur *les transformations orthogonales,* telle que la décomposition en valeurs singulières.

La décomposition ainsi obtenue est injectée dans un modèle de transfert diffusif et *inversée* dans *l'espace transformé*. Ainsi faisant, une nouvelle *analyse de sensibilité*, basée sur l'étude locale des *corrélations entre les dérivées partielles du signal* expérimental [2, Chapitres 1 et 3], [11] a été proposée. Cette analyse *préliminaire,* permet de déterminer l'espace optimal (sensibilité maximale aux paramètres considérés) dans lequel les estimations devront être effectuées. Cela permet de limiter les calculs aux endroits où le modèle diffusif est vérifié et permet ainsi de réduire considérablement la quantité de données traitées, ainsi que les temps de calculs.

C'est en développant ces approches modales modernes, que la *nouvelle méthode d'analyse* basée sur *l'étude des corrélations* a vu le jour.

Nous allons présenter dans la section suivante, les résultats clés de ces travaux.

1.4 Méthodes modales basées sur la décomposition en valeurs singulières des données expérimentales, Bamford et Coll. (2007)

Le schéma du dispositif de Krapez et Coll. tel que décrit dans [5] et présenté en Figure 1.3.9 page 38 est repris par Bamford.

L'impulsion flash est donc effectuée au travers d'une grille périodique de période κ. Cette grille permet d'imposer un fort gradient de température de manière localisée à la surface du matériau, ce qui a pour conséquence d'augmenter la sensibilité locale à la diffusivité longitudinale. La géométrie de la grille induit un champ de température uniforme selon (Oy), ce qui permet de moyenner le champ de température enregistré par rapport à la variable spatiale y. Le traitement des thermogrammes moyennés permet l'estimation d'un profil de diffusivité longitudinal suivant (Ox).

1.4.1 Modèle de transfert thermique

Soient (l_x, L, e) les dimensions de l'échantillon. Le milieu est supposé homogène dans la direction (Oz). Le système suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} \lambda_z \cdot \dfrac{\partial^2 \{T\}_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \cdot \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial x}\right) = \rho C_p \cdot \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial t} \\ \lambda_z \cdot \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial z} = -\{\varphi\}_y(x,t) + h \cdot \{T\}_y, \ en\, z = 0 \\ \lambda_z \cdot \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial z} = -h \cdot \{T\}_y, \ en\, z = e \end{cases} \tag{1.4.1}$$

de plus :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial x} = 0, \ en\, x = 0 \\ \dfrac{\partial \{T\}_y}{\partial x} = 0, \ en\, x = l_x \\ \{T\}_y = 0, \ à\, t = 0 \end{cases} \tag{1.4.2}$$

avec les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \{T\}_y &= \frac{1}{L} \cdot \int_0^L T(x,y,z,t)dy \\ \{\varphi\}_y &= \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \varphi(x,y,t)dy \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

où λ_x et λ_z sont les conductivités thermiques dans les directions (Ox) et (Oz), h est le coefficient de transfert convectif et φ le flux de chaleur en face avant de l'échantillon. Il est montré [50] que dans de telles conditions le système d'équations précédent peut se simplifier en une simple

conduction dans le plan telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \cdot \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial x}\right) = \rho C_p \cdot \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \\ \tilde{T} = \dfrac{\{T\}_y(x, z=e, t)}{\dfrac{1}{l}\int_0^{l_x} \{T\}_y(x, z=e, t)dx} \end{cases} \tag{1.4.4}$$

La discrétisation du champ de température $\tilde{T}(x,t)$ par une approche de type «volumes finis» [103], permet d'obtenir la matrice $\tilde{\mathbf{T}}$ de taille (l,c) :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{T}}_{i,k} = \dfrac{1}{\Delta x \cdot \Delta t}\int_{x=(i-1)\cdot l_x/l}^{i\cdot l_x/l}\left[\int_{t=(k-1)\cdot t_{f/c}}^{k\cdot t_{f/c}} \tilde{T}(x,t)\cdot dt\right]dx \\ \tilde{\mathbf{T}} = \left[\tilde{\mathbf{T}}_{i,k}\right]_{i\in[1,l],k\in[1,c]} \end{cases} \tag{1.4.5}$$

avec i la variable discrétisée d'espace et k la variable de temps. Nous obtenons ainsi la forme discrétisée de l'équation (1.4.4) qui peut s'écrire sous la forme matricielle compacte suivante :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l}{\Delta x}\tilde{\mathbf{T}}\right) + \mathbf{A}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2}\tilde{\mathbf{T}}\right) = \tilde{\mathbf{T}}\frac{P_c^T}{\Delta t} \tag{1.4.6}$$

avec $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ la matrice diagonale contenant les valeurs locales de diffusivité longitudinale $\{a_x(i) = \dfrac{\lambda_x(i)}{\rho C_p(i)}\}_{i=1..l}$ et $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ la matrice diagonale contenant les valeurs locales $\{\dot{a}_x(i) = \dfrac{\dot{\lambda}_x(i)}{\rho C_p(i)}\}_{i=1..l}$, $\dot{\lambda}_x(i)$ étant la dérivée de la conductivité locale par rapport à la variable spatiale x.

L'opérateur différentiel suivant est utilisé :

$$P_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M(l) \tag{1.4.7}$$

L'estimation des matrices de paramètres $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ et $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ pourrait être effectuée par une approche nodale. Cependant, cela nécessiterait l'inversion directe de (1.4.6), une méthode lourde en temps de calcul, demandant au préalable une étude de sensibilité pour déterminer l'espace spatio-temporel optimal pour les estimations. Pour éviter cette approche, en alternative une décomposition en valeurs singulières est appliquée de manière à séparer l'espace et le temps et obtenir une nouvelle formulation de l'équation (1.4.6) dans l'espace transformé. La décomposition en valeurs singulières sera traitée plus en détails dans la seconde partie de ce manuscrit.

La décomposition en valeurs singulières de $\tilde{T}(x,t)$ s'écrit :

$$\tilde{T}(x,t) \overset{SVD}{\approx} \sum_{k=1}^{r_0} \gamma_k \cdot U_k(x) \cdot V_k(t)^T$$

r_0 étant un paramètre de filtrage, qui sera étudié plus en détail dans les deuxième et troisième parties de ce manuscrit.

L'expression précédente est injectée dans l'équation (1.4.6) et sa forme matricielle est alors obtenue :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l}{\Delta x}\mathbf{U}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}+\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2}\mathbf{U}\right)\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\left(\frac{P_c}{\Delta t}\mathbf{V}\right)^T \tag{1.4.8}$$

l'orthonormalité de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ en composant à gauche par $(\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathbf{T}})^{-1}$ permet d'écrire :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l}{\Delta x}\mathbf{U}\right)+\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2}\mathbf{U}\right)=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\left(\frac{P_c}{\Delta t}\mathbf{V}\right)^T\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \tag{1.4.9}$$

Les notations sont simplifiées en posant :

$$\frac{P_l}{\Delta x}\mathbf{U}=\dot{\mathbf{U}},\quad \frac{P_l^2}{\Delta x^2}\mathbf{U}=\ddot{\mathbf{U}},\quad \frac{P_c}{\Delta t}\mathbf{V}=\dot{\mathbf{V}} \tag{1.4.10}$$

Cette décomposition assure *la séparabilité espace-temps* et permet de dire que $\ddot{\mathbf{U}}$, respectivement $\dot{\mathbf{U}}$ correspondent à des dérivées seconde, respectivement première, uniquement spatiales dans l'espace transformé. De plus, $\dot{\mathbf{V}}$ représente une dérivée première temporelle uniquement. Il en vient alors :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{U}}+\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{U}}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\left(\dot{\mathbf{V}}^T\mathbf{V}\right)\mathbf{\Sigma}^{-1} \tag{1.4.11}$$

puis :

$$\dot{\mathbf{U}}^T\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}+\ddot{\mathbf{U}}^T\mathbf{A}_{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{U}}^T \tag{1.4.12}$$

ou encore :

$$\mathbf{X}\beta=\mathbf{0} \tag{1.4.13}$$

avec $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}^T & \ddot{\mathbf{U}}^T & -\tilde{\mathbf{U}}^T\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\\ \mathbf{A}_{\mathbf{x}}\\ \mathbf{I}_l\end{bmatrix}$ et $\tilde{\mathbf{U}}^T=(\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1})^T(\dot{\mathbf{V}}\mathbf{\Sigma})\mathbf{U}^T$.

L'équation(1.4.13) peut être réécrite pour chaque mode séparément :

$$\mathbf{X}_k\beta_k=\mathbf{0},\quad k\in[1,c] \tag{1.4.14}$$

où β_k représente le vecteur paramètre estimé pour le mode k et $\mathbf{X}_k=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_k^T & \ddot{\mathbf{U}}_k^T & -\tilde{\mathbf{U}}_k^T\end{bmatrix}_{k\in[1,c]}$.

Pour chaque mode k :

$$(\mathbf{X}_k^T\mathbf{X}_k)\beta_k=\mathbf{0},\ k\in[1,c] \tag{1.4.15}$$

Cette dernière expression permet de déduire des relations locales pour chaque position $i\in[1,l]$, i étant donc la variable d'espace discrète et chaque mode $k\in[1,c]$ de manière suivante :

$$X_k^T(i)X_k(i)\beta_k(i)=0 \tag{1.4.16}$$

où :

$$\begin{cases}X_k(i)=\begin{bmatrix}\dot{U}_k(i) & \ddot{U}_k(i) & \tilde{U}_k(i)\end{bmatrix}\\ \tilde{U}_k(i)=\sum_{j=1}^{r_0}\dfrac{s_j}{s_k}\cdot U_j(i)(\dot{V}_j^TV_k)\\ \beta_k(i)=\begin{bmatrix}\dot{a}_x^k(i) & a_x^k(i) & 1\end{bmatrix}^T\end{cases} \tag{1.4.17}$$

avec $\dot{a}_x^k(i) = (\frac{\dot{\lambda}_x^k}{\rho C_p})(i)$, l'indice k représente l'indice du mode employé pour l'estimation. Dans la pratique, la somme ci-dessus est tronquée se limitant seulement aux modes prépondérants et permettant ainsi le filtrage du bruit, le paramètre de filtrage étant r_0, avec $r_0 = 1, 2, 3$ en général. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que les coefficients de pondération s_j/s_k décroissent quand j augmente, donc les termes d'indices supérieurs ont moins d'influence dans la somme.

La relation (1.4.16) peut aussi s'écrire :

$$Y_k(i)\beta_k(i) = 0 \tag{1.4.18}$$

Le vecteur paramètre local $\beta_k(i)$ pourrait être estimé directement à partir de l'expression (1.4.18), cependant dans les endroits de faible sensibilité, une telle inversion mènerait à des estimations biaisées. Pour éviter cela, cette équation est intégrée sur une fenêtre spatiale comme suit :

$$\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} Y_k(j)\beta_k(j) = 0 \tag{1.4.19}$$

où ξ est la taille de la fenêtre spatiale sur laquelle l'intégration est effectuée. Dans un premier temps, le vecteur paramètre $\beta_k(j)$ peut être considéré constant sur l'intervalle $[i - \xi/2, i + \xi/2,]$ de façon à ce que l'équation (1.4.19) s'écrive :

$$Y_k^{int}(i)\beta_k(i) = 0 \quad \forall k \in [1, c]\,, i \in [\xi/2, \dots l - \xi/2] \tag{1.4.20}$$

avec

$$Y_k^{int}(i) = \textstyle\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} Y_k(j) \quad \forall k \in [1, c]\,, i \in [\xi/2, \dots l - \xi/2] \tag{1.4.21}$$

Pour mieux expliciter la matrice $Y_k^{int}(i)$ les notations suivantes sont employées :

$$Y_k^{int}(i) = \begin{bmatrix} \left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2 & sym & sym \\ \left\langle \dot{U}_k^i \mid \ddot{U}_k^i \right\rangle & \left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2^2 & sym \\ \left\langle \dot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle & \left\langle \ddot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle & \left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2 \end{bmatrix} \tag{1.4.22}$$

avec

$$\dot{U}_k^i = \left[\dot{U}_k(i - \xi/2) \cdots \dot{U}_k(i + \xi/2)\right]^T \tag{1.4.23}$$

et

$$\left\langle \dot{U}_k^i \mid \ddot{U}_k^i \right\rangle = \sum_{\varsigma=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \dot{U}_k(\varsigma)\ddot{U}_k(\varsigma) \tag{1.4.24}$$

La matrice $Y_k^{int}(i)$ est donc une matrice de covariance locale et peut être notée :

$$Y_k^{int}(i) = cov(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \tag{1.4.25}$$

Pour faire apparaitre la matrice de corrélation $\mathbf{C}_k(i) = cor(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$, la matrice de covariance (1.4.22) peut être composée à gauche et à droite et mise sous la forme comme suit :

$$Y_k^{int}(i) = W_k^{1/2}(i)\mathbf{C}_k(i)W_k^{1/2}(i) \tag{1.4.26}$$

avec

$$W_k(i) = \begin{bmatrix} \left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2 \end{bmatrix} \tag{1.4.27}$$

et

$$\mathbf{C}_k(i) = \begin{bmatrix} 1 & sym & sym \\ \rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i) & 1 & sym \\ \rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) & \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4.28}$$

où

$$\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) = \frac{\left\langle \ddot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle}{\left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2 \cdot \left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2}$$

$$\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) = \frac{\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \ddot{U}_k^j\right) \cdot \left(\tilde{U}_k^j - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \tilde{U}_k^j\right)}{\sqrt{\left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \ddot{U}_k^j\right)^2 \cdot \left(\tilde{U}_k^i - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \tilde{U}_k^i\right)^2}} \tag{1.4.29}$$

avec $\zeta = card(\left[i - \xi/2, i + \xi/2\right])$ le cardinal de l'ensemble $\left[i - \xi/2, i + \xi/2\right]$.

Le coefficient ρ_k est compris entre $-1 < \rho_k < 1$, lorsqu'il tend vers $\left|\rho_k\right| \to 1$, alors la relation entre les deux termes en question est forte.

L'étude des corrélations permet de déterminer quels paramètres peuvent être estimés dans l'espace transformé avant tout calcul. Par exemple, dans le cas où $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 0$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$ alors le modèle diffusif peut se simplifier localement dans l'espace transformé en :

$$\left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2^2 \cdot a_x^k(i) + \left\langle \ddot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle = 0 \tag{1.4.30}$$

d'où $a_x^k(i)$ peut être estimé :

$$a_x^k(i) = -\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \frac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2}{\left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2^2} \tag{1.4.31}$$

De la même manière, si $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \gg \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right|$ et $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \gg \left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right|$ le modèle se simplifie localement sous la forme :

$$\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2 \cdot \dot{a}_x^k(i) + \left\langle \dot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle = 0 \tag{1.4.32}$$

et il est alors possible d'estimer $\dot{a}_x^k(i)$:

$$\dot{a}_x^k(i) = -\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \frac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2}{\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2} \tag{1.4.33}$$

Dans tous les cas quand $0 < \left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| < 1$ et $0 < \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| < 1$ ne peuvent clairement identifiés comme égaux à 0 ou à 1, les deux paramètres $a_x^k(i)$ et $\dot{a}_x^k(i)$ peuvent être estimés

simultanément à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_x^k(i) = -\dfrac{\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) - \rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \rho(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i)}{1 - \rho^2(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i,)} \cdot \dfrac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2}{\left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2} \\ \dot{a}_x^k(i) = -\dfrac{\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) - \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \rho(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i)}{1 - \rho^2(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i,)} \cdot \dfrac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2}{\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2} \end{cases} \tag{1.4.34}$$

Enfin, lorsque $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$ ou lorsque $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 0$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 0$ aucune estimation n'est possible. Les équations (1.4.31) et (1.4.33) ne sont que des cas particuliers de (1.4.34) quand $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \approx 0$.

Ainsi l'analyse des corrélations permet de déterminer *les zones spatiales optimales pour les estimations* des diffusivités thermiques longitudinales ou encore de simplifier le modèle de transfert dans l'espace transformé. Les profils de diffusivités locales $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2 \ldots l-\xi/2}$ sont alors estimés à partir d'un certain nombre de modes $k \leq r_0$, dominants et optimaux pour l'estimation. Finalement l'obtention d'un seul profil de diffusivité $\{a_x(i)\}$ à partir de $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2,\ldots l-\xi/2}$, est réalisée par une prise de moyenne pondérée des profils $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2 \ldots l-\xi/2}$ obtenus pour chaque mode k :

$$a_x(i) = \frac{\sum_{k \leq r_0} \rho_k \cdot a_x^k(i)}{\sum_{k \leq r_0} \rho_k}, \quad i = \xi/2, \ldots l - \xi/2 \tag{1.4.35}$$

avec :

$$\rho_k = \rho(\ddot{U}_k, \tilde{U}_k) = \frac{\sum_{j=1}^{l} \left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} \ddot{U}_k^j\right) \cdot \left(\tilde{U}_k^j - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} \tilde{U}_k^j\right)}{\sqrt{\left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} \ddot{U}_k^j\right)^2 \cdot \left(\tilde{U}_k^i - \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} \tilde{U}_k^i\right)^2}} \tag{1.4.36}$$

1.4.2 Quelques résultats issus des simulations numériques

Les deux cas de figure présentés en Figure 1.4.1 page suivante représentent les profils exacts de diffusivités longitudinales simulés.

Les champs de température sont simulés avec un faible bruit de mesure et sont illustrés Figure 1.4.2 page suivante.

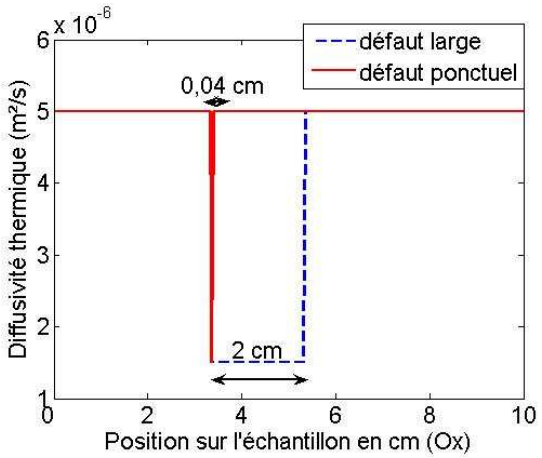


Figure 1.4.1: Profils exacts de diffusivités longitudinales des deux milieux simulés. Figure extraite de [2, Chapitre 3]

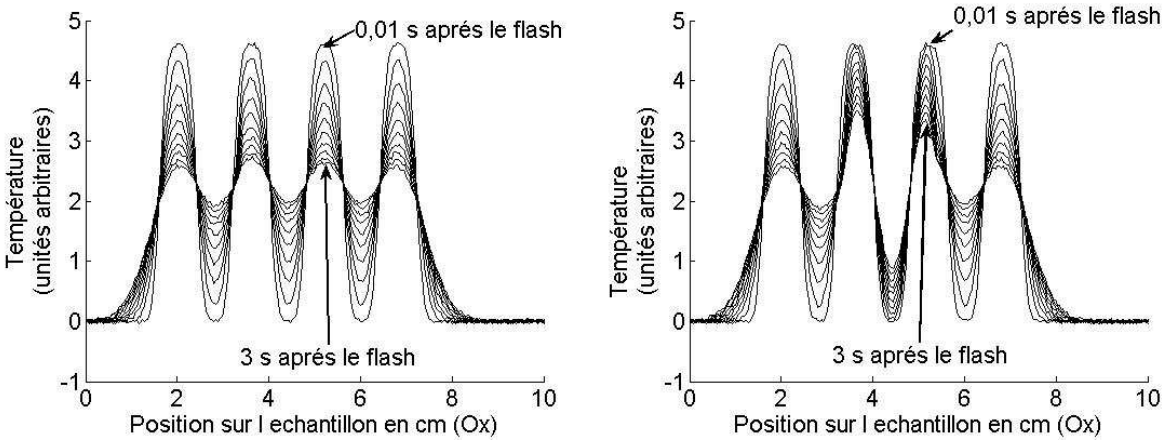


Figure 1.4.2: Champs de température simulés avec une période spatiale pour la grille $\kappa = 1,8\,cm$. À gauche, le champ obtenu avec le défaut ponctuel, à droite le défaut large. Figure extraite de [2, Chapitre 3]

Pour le défaut large, la cartographie obtenue du coefficient de corrélation $\rho(\ddot{U}_k, \tilde{U}_k)$ défini en (1.4.29) est représentée Figure 1.4.3 page suivante.

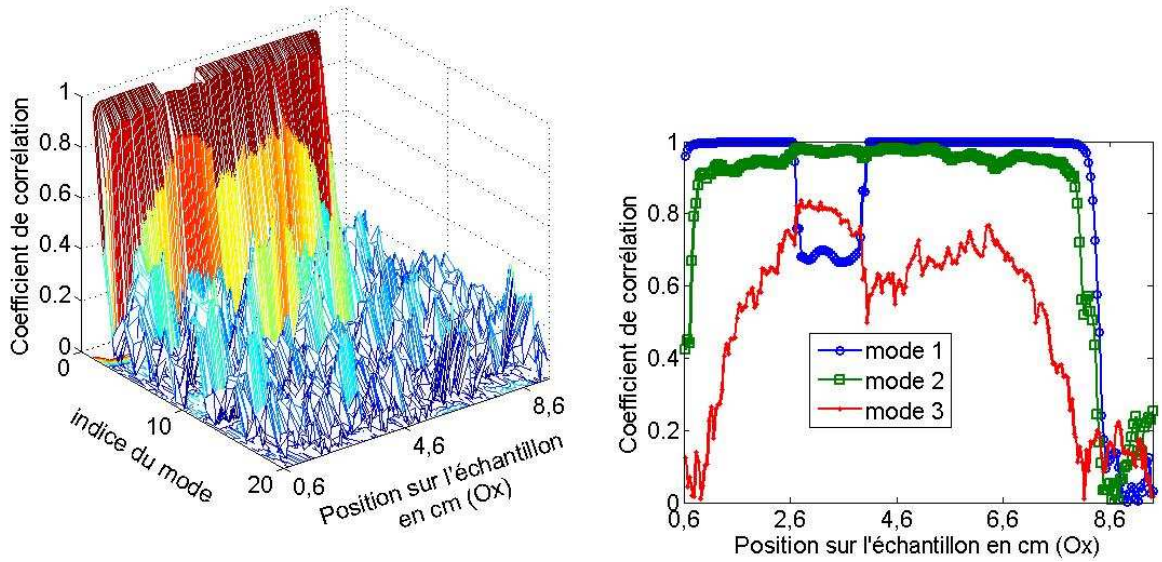


Figure 1.4.3: À gauche, la cartographie du coefficient de corrélation $\rho(\ddot{U}_k, \tilde{U}_k)$ obtenue sur le défaut large. À droite, les trois profils $\rho(\ddot{U}_1, \tilde{U}_1)$, $\rho(\ddot{U}_2, \tilde{U}_2)$, $\rho(\ddot{U}_3, \tilde{U}_3)$

Comme nous pouvons le constater les premiers termes $\ddot{U}_k$ et $\tilde{U}_k$ sont fortement corrélés dans la partie centrale de l'échantillon, pour les trois premiers modes en particulier. En effet la sensibilité à la diffusivité y est élevée dans cette région. De plus, le modèle de diffusion peut être réduit à un modèle à un paramètre, explicité en (1.4.31), à l'exception de la zone du défaut dans laquelle le modèle complet (1.4.34) doit être utilisé pour l'estimation. L'influence du défaut est très nette sur le profil de corrélation $\rho(\ddot{U}_1, \tilde{U}_1)$, puis s'estompe rapidement après. Par ailleurs, les profils de corrélation pour les deux premiers modes tendent vers un et se dégradent à partir du troisième mode, qui semble déjà beaucoup moins important, marqué par des oscillations qui font penser au bruit de mesure.

Les résultats d'estimation obtenus, sont représentés Figure 1.4.4.

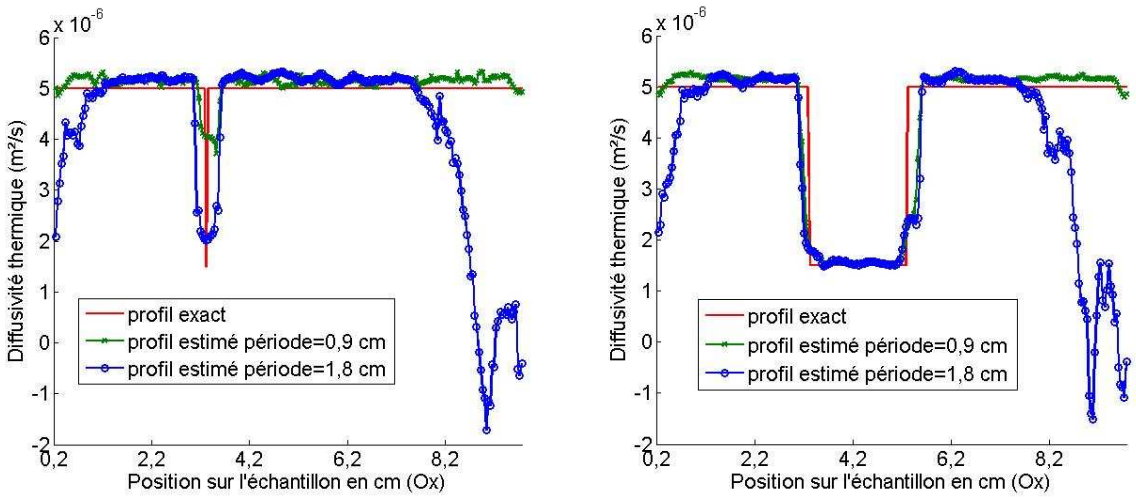


Figure 1.4.4: Profils de diffusivités longitudinales a_x estimés pour de différentes périodes de grille κ pour les deux types de défaut

Les valeurs estimées sur les bords ne sont pas justes, car les coefficients de corrélation diminuent rapidement vers zéro à cause du faible rapport signal sur bruit. Quant à la partie centrale, le profil estimé colle au profil exact, bien qu'un lissage induit par la méthode modale soit apparent. Les défauts estimés sont plus larges que les défauts exacts, ce biais étant lié au choix de la fenêtre spatiale ξ pour les estimations locales.

La nouveauté de la stratégie modale, réside dans le fait que l'équation de la chaleur est inversée dans un espace transformé, où les données sont compressées (faibles nombre de modes nécessaire à l'estimation) et où la sensibilité à la diffusivité longitudinale est optimale (grâce à une nouvelle analyse de sensibilité, basée sur l'étude de corrélations locales des dérivées partielles du signal expérimental, permettant de déterminer l'espace optimal pour les estimations).

1.4.3 Quelques résultats expérimentaux

Cette méthode modale a été utilisée pour la détection d'endommagement induit par la présence de microfissures dans des éprouvettes SiC_f/SiC sous contrainte mécanique. Des séquences d'images infrarouges sont enregistrées lors d'un essai de traction pour différents chargements. Ceci est illustré Figure 1.4.5.

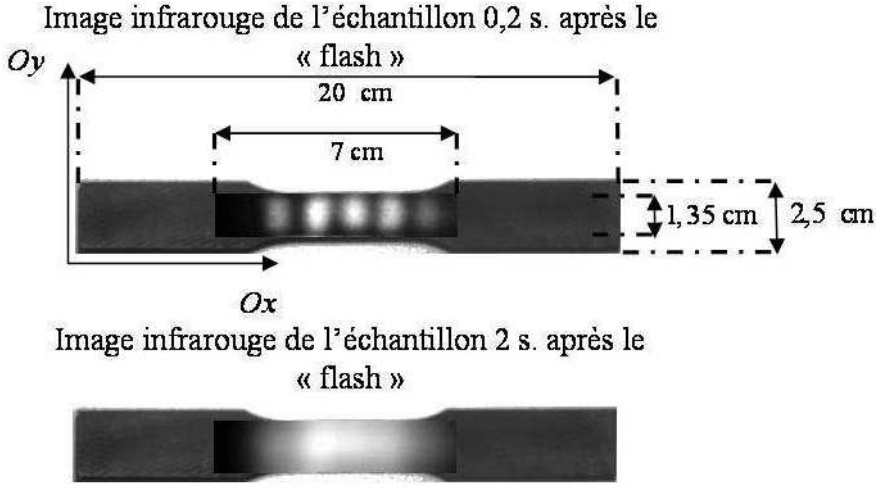


Figure 1.4.5: Géométrie de l'échantillon. Scène thermique enregistrée par la caméra pour un chargement mécanique donné

Il est observé que les diffusivités thermiques longitudinales diminuent de manière spatialement non uniforme, jusqu'à la rupture de l'échantillon avec une baisse significative au moment de la striction avant la rupture. Par ailleurs, les valeurs de diffusivités locales reviennent à leurs valeurs initiales après chaque cycle de chargement comme indiqué Figure 1.4.6 page suivante.

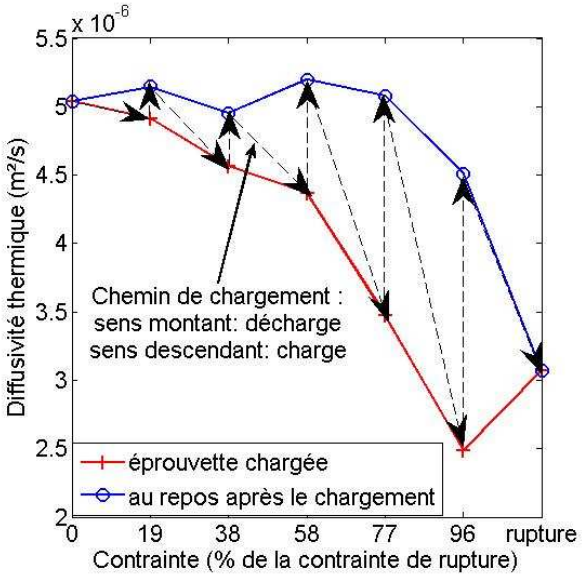


Figure 1.4.6: Évolution de la diffusivité longitudinale moyenne en fonction de la contrainte mécanique. Figure extraite de [2, Chapitre 3]

La mesure de diffusivité longitudinale est donc un très bon indicateur du taux de fissuration de l'échantillon mis sous contrainte. Ce qui offre de nouvelles perspectives à ce type d'essais.

Par la suite, cette nouvelle méthode d'analyse basée sur l'étude des corrélations a été transposée aux approches classiques dans l'espace réel, dites «nodales» [2, 11, Chapitre 3]. Bamford et Coll. poussent ces travaux plus loin et comparent l'approche basée sur la SVD et l'approche nodale [11]. Elles s'avèrent être pratiques et donnent des résultats *très comparables* en termes de précision. Ce résultat est d'une *importance capitale* bien que non discuté dans les travaux précités, car il montre de façon comparative et expérimentale (sans justifications mathématiques rigoureuses) que le traitement par la SVD réalise de *façon intrinsèque, une analyse s'apparentant à l'étude des corrélations*. À savoir que les valeurs singulières *dominantes*, porteuses d'informations *pertinentes*, correspondent en réalité aux endroits pour lesquels la corrélation entre les dérivées spatiale et temporelle sont fortes, autrement dit les endroits où le modèle diffusif est valide. Cela permet encore une fois, de mieux expliquer et donner un sens plus «physique» à ce que les traitements par SVD effectuent. Rappelons nous, que n'importe quel traiteur de signaux sans connaissances particulières en transferts thermiques, peut en appliquant de façon empirique les outils telle que la SVD, obtenir les mêmes résultats voire même meilleurs qu'un thermicien. Ceci sera particulièrement illustré dans le *Chapitre* 7 page 153.

Dans le cas d'une conduction uniquement dans le sens de l'épaisseur, Bamford et Coll. [1] ont également proposé pour la première fois d'interpréter plus rigoureusement et de *manière physique* les *modes spatiaux* issus de la décomposition en valeurs singulières. Ceci afin de pouvoir relier ces différents modes spatiaux directement aux propriétés thermophysiques des matériaux. À cet effet, une décomposition inspirée de la SVD classique et appelée ASVD (de l'anglais *Analytical Singular Value Decomposition*) a été développée et étudiée. Elle est basée

sur une décomposition des champs de température par *projections successives* sur des *moyennes marginales spatiales et temporelles.*

Il a été démontré que les deux premiers modes spatiaux pouvaient être identifiés, aux deux premiers ordres d'un développement asymptotique [54] du champ de température autour de propriétés thermophysiques nominales. Le second mode spatial issu de la décomposition du signal étant en réalité une approximation d'une variation relative locale de la diffusivité transverse du milieu. Ce qui a permis d'expliquer pourquoi la SVD classique donne des résultats intéressants lors de la détection de défauts, notamment de délaminages [104, 105, 106].

1.5 Synthèse du chapitre

1.5.1 Vers l'étude expérimentale et théorique de la réponse au point source impulsionnel

En perspectives des travaux précédemment cités, il a été proposé d'utiliser des dispositifs expérimentaux permettant d'obtenir de forts gradients spatiaux de température en utilisant par exemple des diodes laser. Ce qui aurait pour conséquence d'augmenter la sensibilité locale aux paramètres estimés. Des dispositifs basés sur plusieurs sources laser qui pourraient être redirigés par des miroirs ou encore des dispositifs permettant de créer des motifs périodiques de type «fentes d'Young» peuvent être employés pour imposer de forts contrastes thermiques à la surface de l'échantillon. Il a été également proposé d'utiliser une caméra infrarouge couplée avec un objectif de microscope pour pouvoir suivre l'évolution des propriétés thermophysiques des matériaux aux petites échelles.

C'est dans ce contexte que s'insèrent les travaux présentés dans ce manuscrit :

1. Nous proposons pour la première fois, une étude numérique et expérimentale complète du *point source impulsionnel.* D'autres travaux existent dans la littérature, comme par exemple ceux sur le *Flying Spot* ou *Caméra à Source Volante* [7, 8, 107], mais à notre connaissance il y a eu peu de travaux consacrés à l'étude du point source impulsionnel, bien qu'il soit à la base de toutes les méthodes
2. Nous nous proposons de continuer les développements permettant de mieux cerner physiquement ce que réalisent de manière intrinsèque les traitements basés sur la décomposition en valeurs singulières
3. Une approche nouvelle basée sur une *double décomposition en valeurs singulières* pour la caractérisation de propriétés thermophysiques de matériaux hétérogènes et le contrôle non destructif est également proposée
4. Ainsi que des applications de la *double décomposition en valeurs singulières* pour l'estimation de champs de température initiaux

Deuxième partie

Outils mathématiques

Courte introduction

Dans cette partie, nous présentons les outils mathématiques nécessaires aux développements proposés dans ce manuscrit. Dans un premier temps, une excursion dans le monde de *fonctions continues*, nous permettra par analogie avec les propriétés de l'espace de Fourier, de comprendre ce qu'il se passe lors du *développement en valeurs singulières* d'une fonction. Nous passerons ensuite dans *le monde de signaux discrets rééchantillonés* et nous traiterons des exemples concrets, de manière à exposer d'un point de vue «physique», les principes de la *décomposition en valeurs singulières* des images infrarouges, utilisés par la suite.

Chapitre 2

Excursion dans le monde des fonctions continues

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons essentiellement introduire les outils mathématiques servant aux différents développements proposés dans ce manuscrit de thèse. La principale spécificité de ce chapitre réside dans le fait que nous allons traiter le cas de fonctions continues. Cela va nous permettre dans un contexte mathématique rigoureux, de proposer une analogie entre la théorie de Fourier et celle du *développement en valeurs singulières*. Le but étant d'apporter de nouveaux éléments de réponse pour comprendre par la suite, ce que réalisent de manière intrinsèque les transformations orthogonales appliquées aux signaux expérimentaux bruts. Nous commençons par des rappels sur les problèmes inverses.

2.2 Problèmes inverses

Pour décrire le comportement de phénomènes physiques, les physiciens et ingénieurs élaborent des modèles dits de «connaissance». Ces derniers permettent de lier les «effets» engendrés sur un système physique, aux «causes» qui les ont procuré. Le principe de causalité d'Isaac Newton est le fondement de la physique classique. La démarche qui consiste à poser et résoudre les problèmes pour lesquels les causes sont données et où l'on cherche les effets, est qualifiée de «directe». S'il est légitime d'espérer qu'un modèle donné vérifiera l'assertion : «les mêmes causes produisent les mêmes effets», il est facile de concevoir, que les mêmes effets puissent provenir de causes différentes. Il est alors nécessaire de disposer d'informations supplémentaires, afin de pouvoir sélectionner la plus optimale. Les techniques dites «inverses», sont un ensemble de méthodes permettant de «remonter» aux causes à partir de l'observation de leurs conséquences. De fait, elles s'opposent aux méthodes dites «directes». Il est possible d'envisager plusieurs types de problèmes inverses, parmi lesquels se trouve la détermination des paramètres du système connaissant son évolution, c'est celui de *l'identification de paramètres.*

L'avènement de la physique expérimentale, amène l'expérimentateur à vouloir extraire des

informations pertinentes sur un système, qui est décrit par son modèle à partir de données mesurées. Les méthodes de résolution des *problèmes inverses* sont au centre d'intérêt et en plein essor dans différentes branches de la physique. Il existe de nombreuses communautés scientifiques travaillant sur les méthodes inverses, parmi lesquelles se trouve celle des thermiciens du groupe METTI (Mesures en Thermique et Techniques Inverses) de la Société Française de Thermique. Voir notamment les travaux [108, 109, 110, 111]. Pour de plus amples informations sur les *techniques inverses* le lecteur pourra également consulter d'excellents dossiers des TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR [112, 113, 114] et se référer aux références bibliographiques citées.

Nous remarquerons que l'étude des problèmes inverses nécessite de manière générale, une bonne connaissance du problème direct. Le problème est ensuite reformulé sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur entre les mesures et la solution issue du modèle direct [112]. Parmi les problèmes inverses, il y a les problèmes linéaires et non-linéaires. Ces derniers sont plus difficiles à traiter, il existe moins de résultats généraux les concernant, ils font partie d'une littérature spécialisée. Les problèmes linéaires sont quant à eux plus «faciles» à étudier, l'analyse fonctionnelle et l'algèbre linéaire donnent des méthodes génériques et des résultats précis. Comme nous le verrons, la décomposition en valeurs singulières de l'opérateur considéré - mais pas seulement de l'opérateur- est un outil fondamental pour l'étude des problèmes linéaires.

Exemples de problèmes inverses en thermique Pour déterminer le champ de température $T(x, y, z)$ dans un matériau non-homogène, sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$, on exprime l'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div(\varphi) = q(x, y, z) \text{ dans } \Omega \tag{2.2.1}$$

où ρ est la densité, c la chaleur spécifique, φ le vecteur flux de chaleur et q une source volumique.

La loi de Fourier relie le flux de chaleur au gradient de température : $\varphi = -\lambda \cdot grad\, T$, où λ est le tenseur des conductivités thermiques, l'équation précédente devient alors :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - div(\lambda \cdot grad\, T) = q \text{ dans } \Omega \tag{2.2.2}$$

Il ne reste plus qu'à préciser les conditions aux limites sur le bord de l'ouvert Ω et une condition initiale.

Le problème direct consiste alors à déterminer le champ de température connaissant les paramètres thermophysiques ρ, c, λ ainsi que la source de chaleur volumique q. Ce problème analytique est bien connu tant du point de vue théorique que numérique et ne présente pas de difficulté particulière quant à sa résolution. En ce qui concerne les problèmes inverses, plusieurs peuvent être formulés ici :

– connaissant le champ de température T et q, déterminer certains des paramètres thermophysiques

– connaissant le champ de température T à un instant $t>0$, déterminer le champ de température initial T(x,y,z,t=0)
– connaissant le champ de température T et les paramètres (λ, ρ, c), déterminer la source q

2.3 Problèmes bien et mal posés

La notion de *problèmes bien et mal posés* remonte à HADAMARD au début du siècle [115]. Dans ce livre célèbre il a introduit dès 1923 le concept de problème *bien posé*. Un problème est dit *bien posé* si les conditions suivantes sont remplies :

– la solution existe
– elle est unique
– elle dépend continûment des données

Hadamard laissait entendre que les problèmes *mal posés* (*ill posed* en anglais), i.e. ne vérifiant pas l'une ou l'autre des conditions précédentes, ne pouvaient être «qu'artificiels». Nous savons aujourd'hui qu'il en est autrement. Les problèmes mal posés font partie du quotidien des scientifiques et ingénieurs. Le lecteur pourra consulter les références suivantes pour avoir une liste d'exemples, autres que ceux discutés plus loin [116, 117, p. 5].

2.3.1 Discussion autour des conditions de HADAMARD

Afin de mieux cerner et discuter la signification de ces conditions, il serait utile d'introduire un minimum de «décor» mathématique. Ce «décor» nous permettra par ailleurs d'affûter peu à peu un regard intrinsèque des outils mathématiques, regard nécessaire afin de mieux comprendre l'aspect physique des traitements mis en œuvre dans les chapitres suivants. Les differents théorèmes et définitions qui vont suivre, sont empruntés aux ouvrages [118, 119] en particulier, le lecteur est également invité à consulter les références citées dans ces documents, ainsi que celles citées dans [117, p. 4] ou tout autre référence sur le sujet.

Nous considérons des *espaces vectoriels séparables* sur un corps de scalaires réels $\mathbb{R}$.

«Décor» mathématique :

Définition 1. Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est *complet* pour la norme associée à ce produit scalaire.

Remarque. Un espace métrique M est dit *complet*, si toute suite (x_n) de Cauchy de M a une limite dans M, autrement dit, (x_n) tend vers $x \in M$. Intuitivement c'est un espace «sans point manquant». Un contre exemple, l'espace des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, n'est pas *complet*, car il y existe une suite de Cauchy qui converge vers $\sqrt{2}$ et que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Dans un espace métrique de *fonctions*, la notion de limite s'exprime à l'aide de la norme $\| \, . \, \|$. Cette propriété de *complétude* dépend donc de la norme (ou distance) qu'il faut préciser.

Définition 2. Un opérateur linéaire et continu A d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F est une application linéaire continue de E dans F, i.e. qui vérifie :

1. $\forall u \in E, Au \in F$
2. $\forall (u,v) \in E \times E, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$ (linéarité)
3. $\exists M > 0, \forall u \in E, \| Au \|_F \leq M \| u \|_E$ (continuité)

Le plus petit nombre M défini ci-dessous, s'appelle la *norme* de l'opérateur A :

$$\| A \| = \sup_{u \in E} \frac{\| Au \|_F}{\| u \|_E}$$

Le troisième point ci-dessus est à rapprocher de la définition classique de la continuité pour les fonctions réelles. Soient I un intervalle réel, $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction f est dite *continue* en a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, | x - a | < \eta \Rightarrow | f(x) - f(a) | < \epsilon$$

L'hypothèse de continuité est assez naturelle, elle exprime pour un système donné le fait que si deux signaux d'entrées (les causes) sont proches, alors les signaux de sorties (les effets) sont proches aussi. De la même manière on s'attend à ce que la réciproque soit également vraie. Cette notion de continuité est *essentielle* pour comprendre le caractére *mal posé* d'un problème comme nous allons le voir.

Remarque. Les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire A sont :

1. Le noyau de A qui est le sous-espace de E : $\ker A = \{u \in E, Au = 0\}$, qui est *toujours fermé* comme étant une image réciproque du sous espace fermé $\{0\}$.
2. L'image de A qui est le sous-espace de F : Im $A = \{v \in F, \exists u \in E, Au = v\}$, qui *n'est pas* nécessairement fermé ! Ce dernier point est à l'origine du caractère «*mal posé*».

Définition 3. Soit $L(E,F)$, un espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, E et F deux espaces de Hilbert. On dit que $A \in L(E,F)$ est un *opérateur compact* si et seulement si, l'image de toute partie bornée de E est relativement *compacte* dans F.

En d'autres termes, A est un opérateur *compact*, si pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite (Ax_n) contient une sous-suite convergente. De plus, en dimension finie tout ensemble compact est un *fermé, borné et complet.*

C'est le fait d'avoir un ensemble *fermé* ou pas, qui nous intéresse.

Théorème 1. *(dit de l'application ouverte). Soit A un opérateur linéaire de E dans F. L'image par A d'un ouvert de E est un ouvert de F.*

Donc l'inverse d'un opérateur linéaire, continu, bijectif : est continu.

Théorème 2. *Soit $A \in L(E,F)$, E et F deux espaces de Hilbert. Supposons que A soit injectif et notons $A^{-1} : ImA \to E$ l'inverse de A. Nous avons alors le résultat suivant :*

$$ImA\ fermée \Leftrightarrow A^{-1} est\, continu$$

Proposition 1. *Soit A un opérateur compact de E dans F, où E et F sont deux espaces de Hilbert, qui ne sont pas de dimension finie. Alors A n'est pas inversible dans L(E,F).*

Remarque. L'inverse algébrique de A peut ou non exister, cela dépend si A est injectif ou pas, mais s'il existe, il ne sera pas continu. En pratique, pour un modèle physique fixé, les données dont dispose l'expérimentateur sont en général bruitées, de plus rien ne garantit que ces données proviennent du modèle en question. En d'autres termes, les données n'appartiennent pas nécessairement à l'image de l'opérateur ImA, l'image n'est donc pas fermée et par conséquent A^{-1} n'est pas continu. Ceci est la conséquence du Théorème précédent.

Les conditions de Hadamard :

Revenons à présent aux conditions de Hadamard et prenons un exemple simple, qui est celui des problèmes inverses linéaires, pour lesquels la sortie du modèle dépend linéairement des paramètres à estimer :

$$Y = A\beta \tag{2.3.1}$$

Étant donné $Y \in F$, nous cherchons $\beta \in E$. L'application linéaire A permet de passer de l'espace des paramètres à l'espace des observations. Résoudre le problème direct, consiste à calculer Y pour β fixé, ce qui ne pose aucun problème particulier. Dans le cas du problème inverse, l'expression de la solution $\hat{\beta}_{MCL}$, obtenue pour un système sur-déterminé par la méthode des moindres carrés linéaires s'écrit [112, p. 9] :

$$\hat{\beta}_{MCL} = (A^T A)^{-1} A^T Y \tag{2.3.2}$$

L'opérateur inverse qui permet de passer de l'espace des observables à l'espace des paramètres n'existe pas toujours, c'est le cas lorsque $(A^T A)^{-1}$ n'est pas inversible.

La condition d'existence : Cette condition traduit la surjectivité de l'opérateur A, à savoir que toute solution dans l'espace des observations possède *au moins une solution* dans l'espace des paramètres. Si une solution existe -i.e. A est surjectif et $(A^T A)^{-1}$ existe- alors il est tout à fait possible que des paramètres différents soient liés aux mêmes observations. Par ailleurs le fait que la solution puisse ne pas exister n'est pas une difficulté en soi, il «suffirait» alors de se restreindre à ImA.

La condition d'unicité : Cette condition traduit l'injectivité de l'opérateur A, à savoir que toute solution dans l'espace des observations possède *au plus une solution* dans l'espace des paramètres. Si l'opérateur A n'est pas injectif, alors il faut avoir un moyen pour pouvoir discriminer entre plusieurs solutions, celle qui est appropriée au problème, autrement dit posséder une information «à priori». C'est le cas lorsque le problème (2.3.1) est sous-déterminé, i.e. plusieurs vecteurs β donnent le même vecteur de sortie Y. La non-unicité est donc un problème plus sérieux.

La condition de continuité : Cette dernière est fondamentale. Le manque de continuité est certainement le plus délicat à gérér, en particulier si la solution doit être approchée numériquement ; car dans ce cas, une solution satisfaisante au problème inverse ne pourra pas être obtenue, car les données expérimentales étant bruitées donc proches, mais sont différentes des données «réelles». La solution ne dépend donc pas *continûment* des données. Ceci est lié au caractère *fermé ou non* de l'image ImA. Soit $Y = Y^{exact} + \eta$, $Y^{exact} \in ImA$ et η le bruit de mesure vérifiant : $\| \eta \|_2 \lesssim \| Y^{exact} \|_2$.

Comme nous ne pouvons pas espérer que le bruit de mesure soit dans ImA, i.e. $\eta \notin ImA$, l'image de l'opérateur A, ImA n'est pas fermée, Y n'est pas forcément dans ImA. Par conséquent l'opérateur A n'est pas continu, c'est le résultat du Théorème 2 page 58.

Exiger que Y soit dans ImA, est une condition trop restrictive et ne convient pas aux traitements de données bruitées. C'est la raison pour laquelle une autre formulation du problème original est nécessaire, ce qui permet d'étendre la notion de solution à un sous-espace plus grand, ou encore admettre des solutions non-continues ; on parle alors de formulation faible du problème.

Le problème original dans notre cas correspond à l'équation (2.3.1) lorsqu'il y a autant d'équations que d'inconnues. Alors la solution s'écrit simplement $\beta = A^{-1}Y$ (si A^{-1} existe i.e. $\det A \neq 0$) et nous avons $Y \in ImA$. Cependant, s'il y a plus d'équations que d'inconnues et que les données sont bruitées, alors une autre formulation est nécessaire, car Y n'est pas forcément dans ImA. Une telle formulation du problème au sens des *moidres carrés linéaires* est proposée à l'équation (2.3.2) ci-dessus. Comme le font remarquer Beck et Arnold dans [10, p. 2], Gauss était le premier a utiliser de façon intensive la *méthode des moindres carrés linéaires* et ce depuis 1809, mais que d'après lui la méthode est connue depuis 1795. Gauss était très habile dans la manipulation des *formes quadratiques* et *des systèmes d'équations*, ce n'est pas étonnant qu'il ait «démocratisé» cette méthode toujours très utilisée pour l'estimation de paramètres.

Résumé : Soit A un opérateur linéaire d'un espace de Hilbert E dans un espace de Hilbert F, un problème est dit mal posé, si A n'est pas inversible dans $L(E, F)$. Cela peut être dû à ce que A n'est pas injectif, mais le cas le plus probable pour nous -expérimentateurs- est celui où l'image de A n'est pas fermée ; ce qui sera toujours le cas car les opérateurs utilisés seront compacts, voir la Proposition 1 page précédente. Dans ce cas A pourra ou non être bijectif, mais si son inverse existe, il ne sera pas continu, voir le Théorème 2 page 58.

D'autres exemples, empruntés à [118, p. 11] :

Exemple 1. Assez naturellement on peut considérer que l'intégration et la différentiation sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Par ailleurs, l'intégration peut être vue comme une opération qui consiste à résoudre le problème direct. Quant à la différentiation, elle consiste à résoudre le problème inverse. De plus, comme nous allons le voir, c'est l'archétype du problème mal posé.

L'exemple ci-dessous correspond en thermique à l'estimation d'une source q à partir d'une mesure de T dans un cas isotherme, soit :

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = q(t) \tag{2.3.3}$$

Soit $L^2(\Omega)$ un espace de Hilbert et A un opérateur intégral défini par :

$$(Af)(x) = \int_0^x f(s)ds \tag{2.3.4}$$

Nous avons $A \in L(L^2(0,1) \times L^2(0,1))$. Cet opérateur est injectif et son image est le sous-espace vectoriel $Im\, A = \{f \in H^1(0,1), u(0) = 0\}$ où $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev [1]. En effet nous avons l'équivalence suivante : $Af = g \Longleftrightarrow f(x) = g'(x)$ et $g(0) = 0$.

L'image de A n'est pas fermée dans $L^2(0,1)$ (elle l'est dans $H^1(0,1)$), par conséquent l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0,1)$ en vertu du Théorème 2 page 58. Voici un exemple concret.

Soit une fonction $f \in C^1([0,1])$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$$

alors

$$f_n^{'}(x) = f^{'}(x) + n\cos(n^2 x)$$

puis on calcule

$$\| f - f_n \|_2 = \frac{1}{n}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{1/2} = O(\frac{1}{n})$$

alors que

$$\| f^{'} - f_n^{'} \|_2 = n(\frac{1}{2} + \frac{1}{4n}\sin(2n^2))^{1/2} = O(n)$$

Ainsi la différence entre $f^{'}$ et $f_n^{'}$ peut être arbitrairement grande, alors que la différence entre f et f_n est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu avec ce choix de normes. Cette instabilité de l'inverse caractérise les problèmes mals posés : une petite perturbation sur les données (ici f) peut avoir une conséquence arbitrairement grande sur le résultat (ici $f^{'}$).

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega),$ telles que $\forall i \in [1,d], \frac{du}{dx_i} \in L^2(\Omega)\}$ la dérivée est à comprendre au sens des distributions

Exemple 2. Dans cet exemple nous allons voir une autre classe de problèmes inverses qui est l'estimation de paramètres.

En thermique cet exemple correspond à un cas d'estimation de $\lambda(x)$ dans un cas stationnaire de conduction 1D en milieu hétérogène :

$$div(\lambda(x) \cdot grad\, T) = q(x) \tag{2.3.5}$$

Soit le problème elliptique de dimension 1 suivant :

$$\begin{cases} -(a(x)u^{'}(x))^{'} = f(x) \quad \text{pour } x \in]-1,1[\\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

Nous prendrons $a(x) = x^2 + 1$, la solution $u(x) = \dfrac{(1-x^2)}{2}$ ce qui donne $f(x) = 3x^2 + 1$.

Le problème direct consiste à calculer u, connaissant a et f. Pour le problème inverse, nous considérons f comme étant connue et souhaitons retrouver a connaissant u en tout point de l'intervalle $]-1,1[$, ce qui n'est pas tout à fait réaliste. On intègre l'équation (2.3.6) et on divise par $u^{'}$ (en supposant que $u^{'}$ ne s'annulle pas sur $]-1,1[$, ce qui n'est pas tout à fait correct), on obtient dans notre cas particulier :

$$a(x) = -\frac{C}{u^{'}(x)} - \frac{1}{u^{'}(x)} \int_0^x f(y)dy \tag{2.3.7}$$

ce qui nous donne :

$$a(x) = \frac{C}{x} + x^2 + 1 \quad \text{pour} \quad \text{x}\neq 0 \tag{2.3.8}$$

avec C une constante d'intégration.

La solution obtenue ne dépend pas seulement des données u comme on voit. Dans notre cas la «bonne» solution est obtenue pour $C = 0$, puisque c'est la seule valeur pour laquelle a est bornée. De plus pour pouvoir choisir parmi les solutions possibles, nous nous sommes servis d'une information dite «à priori», à savoir on connaissait la forme de a.

Par ailleurs nous pouvons dénombrer deux sources d'instabilité dans cet exemple. La première est due à la différentiation de u, l'équation (2.3.7), fait intervenir la dérivée $u^{'}$ qui est une source d'instabilité comme nous l'avons vu à l'exemple précédent. La seconde est spécifique aux problèmes non-linéaires, il s'agit de la division par $u^{'}$. Si $u^{'}$ s'annule, la division n'est pas possible et si $u^{'}$ est «petit», alors la division sera source d'instabilité également.

Pour rétablir une certaine stabilité nous pouvons faire appel aux méthodes dites de «régularisation». Elles permettent de rendre les problèmes inverses stables, cependant c'est au prix d'une *modification du problème initial*, donc la solution obtenue est également *modifiée*. Le lecteur pourra consulter par exemple, les références suivantes pour de plus amples informations sur les techniques de régularisation [114, 108, 109, 117, 120, 112, 113, 118].

2.4 Opérateurs intégraux et équations intégrales. Intégrales de Fredholm

Une brève introduction des intégrales de *Fredholm*[2] et des équations intégrales est intéressante à plus d'un titre. Tout d'abord parce que la solution de l'équation de la chaleur peut s'écrire comme une intégrale de Fredholm de première espèce, faisant intervenir une fonction de *Green* qui est le *noyau de la chaleur.* De plus cela nous permettra d'introduire le *développement en valeurs singulières* (*SVE*, en anglais : *Singular Value Expansion*) des opérateurs compacts. L'objectif étant de comprendre dans le chapitre suivant, le fonctionnement intrinsèque de la *décomposition en valeurs singulières* (*SVD,* en anglais : *Singular Value Decomposition*) appliquée aux données «brutes» directement.

Une référence très intéressante au sujet des intégrales de Fredholm et des équations intégrales est [116], dont la préface donne une bonne idée de la problématique mise en jeu par celles-ci.

Solution de l'équation de la chaleur homogène avec donnée initiale Le problème de diffusion avec condition initiale, sans terme source, dans un milieu infini présenté ci-dessous est proche de ceux qui seront traités dans les chapitres suivants.

Le problème de Cauchy s'énonce comme suit :

$$\begin{cases} T_t - a\triangle_x T = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\\ T(x,0) = f(x) & \text{avec } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.4.1}$$

La solution de ce problème s'écrit alors :

$$T(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) f(y) dy \tag{2.4.2}$$

avec Φ étant la fonction de *Green* du problème, appelé *le noyau de la chaleur* :

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-\dfrac{\| x \|^2}{4at}) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t>0 \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t<0 \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Les problèmes inverses linéaires peuvent se mettre de façon très générale sous la forme :

$$\int_\Omega \text{système} \times \textit{entrée}\, d\Omega = \text{sortie} \tag{2.4.4}$$

la forme obtenue, est à rapprocher de celle de l'équation (2.4.2). Avec cette formulation le problème direct consiste à calculer la *sortie* connaissant *l'entrée* et le modèle mathématique décrivant le *système*. Tandis que le problème inverse consiste à déterminer soit *l'entrée*, soit le modèle mathématique décrivant le *système*, connaissant la *sortie* de mesures bruitées.

2. *Ivar Fredholm (1866-1927), est un mathématicien suédois qui a étudié les équations intégrales et la théorie spectrale. En 1899 il étudia à Paris le problème de Dirichlet avec Émile Picard, Poincaré et Hadamard...*

Intégrales de Fredholm Un exemple classique de problème linéaire mal posé, est l'intégrale de Fredholm de première espèce avec un noyau carré intégrable [3] $K(s,t)$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^1 K(x,s)f(s)ds = g(x) \text{ avec } 0 < x < 1 \tag{2.4.5}$$

Généralement le noyau K est décrit par le modèle mathématique, la fonction g représente des quantités mesurées, donc entachées d'erreur et connues sur un nombre fini de points $(x_1, \ldots, x_n)$.

2.4.1 Opérateurs intégraux et équations intégrales

Théorème 3. *Soit K une fonction de l'espace $L^2(]a,b[\times]c,d[)$. L'opérateur*

$$(Au)(x) = \int_c^d K(x,s)u(s)ds, \quad x \in]a,b[\tag{2.4.6}$$

est bien défini en tant qu'opérateur de $L^2(a,b)$ dans $L^2(c,d)$. Consulter [118, p. 31] pour voir la preuve.

Théorème 4. *Soit $K \in L^2(]a,b[\times]c,d[)$. L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2(a,b)$ dans $L^2(c,d)$.* [118, p. 34]

Il existe deux catégories d'équations intégrales associées à l'opérateur intégral A de noyau carré intégrable :

Équations de première espèce :

$$Au = f \quad \text{avec } f \in L^2(c,d) \text{ connue.} \tag{2.4.7}$$

Équations de seconde espèce :

$$u - Au = f \quad \text{avec } f \in L^2(c,d) \text{ connue.} \tag{2.4.8}$$

ou encore

$$(I - A)u = f \tag{2.4.9}$$

connue sous le nom d'alternative de Fredholm. Elle possède une propriété remarquable, à savoir que l'image $Im(I-A)$ est fermée, ce qui a pour conséquence en vertu de Théorème 2 page 58, que $(I-A)$ est un opérateur continu. Les équations de seconde espèce conduisent donc à des problèmes *bien posés* et possèdent en général une solution unique. Ce qui n'est pas le cas pour les équations de première espèce, qui conduiront toujours à des problèmes mal posés (car A est un opérateur compact et donc ImA n'est pas fermée et donc A n'est pas continu).

Intuitivement, l'intégration avec un noyau régulier K dans l'équation (2.4.5), a un effet *lissant* sur f, à savoir que les composantes de *hautes fréquences* et *les singularités* de la fonction

3. Le noyau est carré intégrable si la norme $\| K \|^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(x,s)^2 dxds < \infty$ est bornée.

f vont être *atténuées*. Pour illustrer cet amortissement ou atténuation prenons un exemple, soit $f(s) = \sin(ps)$, avec $p \in [1, 2, \ldots, +\infty[$, l'équation (2.4.5) devient alors :

$$g(x) = \int_0^1 K(x,s) sin(ps) ds \quad \text{avec } p \in [1, 2, \ldots, +\infty[\tag{2.4.10}$$

et d'après le lemme de *Riemann-Lebesgue*[4] :

$$\lim_{p\to\infty} g = O(\frac{1}{p}) \approx 0 \tag{2.4.11}$$

les perturbations *hautes fréquences* de f (i.e. de $\sin(ps)$ quand p est grand) seront indétectables. Par conséquent lors de l'opération *inverse* pour déterminer f à partir de g, on s'attend à ce que les composantes de *hautes fréquences* de g soient *amplifiées*.

2.4.2 Le développement en valeurs singulières (SVE)

Un moyen remarquable pour étudier les intégrales de Fredholm de première espèce est le *développement en valeurs singulières*. En effet les noyaux carré intégrables possèdent une propriété très puissante, à savoir ils peuvent s'écrire sous la forme d'une somme infinie comme suit :

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(x) v_i(s) \tag{2.4.12}$$

Les fonctions u_i et v_i s'appellent les *fonctions singulières* de K. Elles sont orthonormales au sens du produit scalaire usuel :

$$(u_i, u_j) = (v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec $(.,.)$ défini par $(f,g) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$.

Les nombres μ_i sont les *valeurs singulières* de K, elles sont positives et peuvent toujours être arrangées dans l'ordre décroissant. Elles vérifient de plus la propriété suivante : $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 = \| K \|^2$.

Ce développement en valeurs singulières $\{\mu_i, u_i, v_i\}$ est unique pour K donné. Le lien entre les fonctions et valeurs singulières est résumé par la relation suivante :

$$\int_0^1 K(x,s) v_i(s) ds = \mu_i u_i(x) \tag{2.4.13}$$

autrement dit les fonctions v_i sont reliées aux u_i par leur valeur singulière μ_i, qui peuvent être interprétées comme étant un *facteur d'amplification*. Si à présent cette dernière équation, ainsi que l'équation (2.4.12), sont insérées dans (2.4.5), nous obtenons l'equation :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (v_i, f) u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i, g) u_i(x) \tag{2.4.14}$$

4. Soit Ψ une fonction régulière sur [0,1], le lemme de Riemann-Lebesgue stipule que la $\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^1 \Psi(s) \sin(\alpha s) ds = O(\alpha^{-1})$

ce qui conduit à la relation finale [5] :

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(s) \tag{2.4.15}$$

L'étude des $\mu_i^{-1}(u_i, g)$ ainsi que des fonctions v_i, permet de caractériser complètement f.

Propriétés d'amortissement du noyau K Le comportement des fonctions singulières u_i, v_i et des valeurs singulières μ_i est intimement lié aux propriétés du noyau K. Tout d'abord, une remarque concernant les valeurs singulières μ_i.

Remarque 1. Plus les valeurs singulières sont petites, plus il y a d'oscillations (changement de signe) dans les fonctions u_i et v_i. Cette propriété est apparemment difficile à prouver comme le stipule HANSEN dans [117, p. 8]. Elle serait liée au lemme de *Riemann-Lebesgue* évoqué précédemment. Comme nous le verrons dans la Partie 3 de ce manuscrit, cette propriété va nous poser quelques ennuis dont il faudra s'accommoder.

La seconde propriété concerne la «régularité» du noyau. Plus le noyau possède de dérivées continues, plus il est *lisse* ou *régulier*. Autrement dit K est de classe $C^k(]a, b[\times]c, d[)$ avec $k \geq 1$ un entier. Plus le noyau est régulier (quand k est grand) plus les valeurs singulières décroissent rapidement et $\mu_i \approx O(i^{-k-\frac{1}{2}})$.

2.4.3 Parallèle avec la théorie de Fourier

Pour les résultats cités ci-dessous consulter par exemple [119, 121] ou tout autre document sur le sujet. Pour simplifier les notations nous considérons une fonction $f \in L^2([0, 1])$ de *période 1*.

Rappelons quelques résultats sur les séries de Fourier. Nous avons :

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n s} \quad \text{avec} \quad \hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n s} f(s) ds \tag{2.4.16}$$

$\hat{f}(n)$ sont les coefficients de Fourier et $n \in \mathbb{Z}$. Les exponentielles complexes $e_n(s) = e^{2\pi i n s}$ forment une base orthonormée de $L^2([0, 1])$.

À ce stade, la ressemblance entre les expressions de la fonction f dans les équations (2.4.15) et (2.4.16) est flagrante, de plus les $v_i(s)$ sont aussi des fonctions orthonormales. Nous pouvons déjà nous demander quel est le degré de similitude entre les propriétés de $\hat{f}(n)$ et $\frac{(u_i, g)}{\mu_i}$. Rappelons ceux de $\hat{f}(n)$ pour commencer.

L'énergie contenue dans le signal $f(s)$ peut être calculée à partir de ses coefficients de Fourier à l'aide de l'identité de Parseval (ou encore de Rayleigh) :

$$\int_0^1 |f(s)|^2 \, ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty \tag{2.4.17}$$

5. Pour plus de détails consulter [117, p. 7] notamment pour les questions de convergence de la somme de (2.4.15)

Une manière d'interpréter la formule (2.4.16) des coefficients de Fourier, est de voir qu'elle permet le passage du domaine *spatial* au domaine *fréquentiel*. À partir de $f(s)$ dans le domaine spatial, nous pouvons calculer $\hat{f}(n)$ dans le domaine fréquentiel et vice-versa. Nous pouvons par ailleurs représenter la *densité spectrale de puissance* des $\mid \hat{f}(n) \mid^2$ pour voir le contenu fréquentiel de f et l'amplitude des harmoniques $e^{2\pi ins}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2. Le contenu fréquentiel de f est intimement lié lui aussi à la *régularité* de f (voir la Remarque 1 page précédente). Autrement dit, $f \in C^k([0,1])$ et il s'agit de voir ce qu'il se passe si k est grand ou pas. Développons davantage cette notion de fonction *régulière* et de ses conséquences sur le contenu fréquentiel.

Pour ce faire, prenons le $n^{ème}$ coefficient de Fourier :

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi ins} f(s) ds \tag{2.4.18}$$

étudions cette expression en s^*, décomposons alors l'intégrale précédente comme somme de deux intégrales en utilisant la relation de Chasles :

$$\hat{f}(n) = \int_0^{s^*} e^{-2\pi ins} f(s) ds + \int_{s^*}^1 e^{-2\pi ins} f(s) ds \tag{2.4.19}$$

Intégrons à présent par parties l'expression précédente, en supposant que f loin du point s^*, a autant de dérivées que l'on souhaite :

$$\int_0^{s^*} e^{-2\pi ins} f(s) ds = \left[\frac{e^{-2\pi ins} f(s)}{-2\pi in} \right]_0^{s^*} - \int_0^{s^*} \frac{e^{-2\pi ins} f'(s)}{-2\pi in} ds$$

$$\int_{s^*}^1 e^{-2\pi ins} f(s) ds = \left[\frac{e^{-2\pi ins} f(s)}{-2\pi in} \right]_{s^*}^1 - \int_{s^*}^1 \frac{e^{-2\pi ins} f'(s)}{-2\pi in} ds$$

la fonction f étant 1-périodique donc $f(0) = f(1)$ d'où finalement :

$$\hat{f}(n) = \left[\frac{e^{-2\pi ins} f(s)}{-2\pi in} \right]_{s_+^*}^{s_-^*} - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi ins} f'(s)}{-2\pi in} ds \tag{2.4.20}$$

s_-^* et s_+^* désignent les points de la limite à gauche et à droite en s^* de $f(s)$.

Si la fonction $f(s)$ est continue en s^*, alors le terme entre crochets se simplifie et il nous reste seulement l'intégrale pour l'expression de $\hat{f}(n)$. *Par contre*, si $f(s)$ n'est pas continue en s^* (s'il y a un saut ou tout autre irrégularité), cette fois-ci le terme entre crochets ne se simplifie pas et l'amplitude du coefficient de Fourier sera de l'ordre de $1/n$. Supposons que $f(s)$ est continue en s^* et intégrons par parties encore une fois :

$$\hat{f}(n) = \left[\frac{e^{-2\pi ins} f'(s)}{(-2\pi in)^2} \right]_{s_+^*}^{s_-^*} - \int_0^1 \frac{e^{-2\pi ins} f''(s)}{(-2\pi in)^2} ds \tag{2.4.21}$$

Si la dérivée $f^{'}(s)$ est continue en s^*, alors la partie entre crochets se simplifie, sinon ce n'est pas le cas et l'amplitude du coefficient de Fourier sera de l'ordre de $1/n^2$ cette fois-ci. De la même manière, si la dérivée seconde $f^{''}(s)$ n'est pas continue en s^*, alors l'amplitude du coefficient de Fourier sera de l'ordre de $1/n^3$ etc. Pour résumer :

- Si $f(s)$ n'est pas continue, alors les coefficients de Fourier devraient avoir des termes en $1/n$, autrement dit le spectre fréquentiel de $f(s)$ contiendra des harmoniques en $1/n$.
- Si $f(s)$ est dérivable sauf aux points isolés (représentés par des sauts ou coins i.e. $f(s)$ est continue en ces points, mais pas $f^{'}(s)$), alors les coefficients de Fourier devraient avoir des termes en $1/n^2$, et le spectre fréquentiel de $f(s)$ contiendra des harmoniques en $1/n^2$.
- Et ainsi de suite.

De cette manière, plus le signal $f(s)$ est complexe (fonction irrégulière) plus son spectre fréquentiel sera *riche*, plus il faudra d'*harmoniques* pour décrire les irrégularités de f.

Corollaire 1. *Le nombre de valeurs singulières, issu du développement en valeurs singulières d'une fonction carré intégrable quelconque f, dépendra de la régularité de la fonction f ou encore de sa complexité. Plus elle sera complexe, plus il faudra de valeurs singulières pour la décrire entièrement.* Nous reviendrons sur cette notion une fois la *SVD* introduite.

Lemme 1. *Les données sont souvent bruitées, ce qui produit un signal moins «régulier». Pour filtrer le bruit il suffirait alors d'éliminer les valeurs singulières μ_i liées aux bruit de mesure. Les harmoniques hautes fréquences i.e. les μ_i quand i est grand, sont caractéristiques du bruit de mesure.*

Revenons maintenant au noyau carré intégrable $K(x, s)$ de classe C^k, qui est complètement défini par les $\{\mu_i, u_i, v_i\}$. L'intégration de $f(s)$ avec un noyau très régulier (i.e. k est grand) aura un effet d'atténuation sur les composantes hautes fréquences de f : $\int_0^1 K(x,s)f(s)ds = g(x)$, le noyau agira comme un filtre sur f. Si maintenant on souhaite déterminer f connaissant g et K, cette fois-ci on aura l'effet inverse :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(x)$$

Les composantes (u_i, g) seront amplifiées par les μ_i^{-1}, ce sont les composantes hautes fréquences de g qui seront amplifiées.

Par ailleurs, les coefficients $\mu_i^{-1}(u_i, g)$ décrivent les propriétés spectrales de la solution f. Nous pouvons remarquer de ce fait que pas n'importe quelle fonction g donnera une solution régulière f. Comme le décrit Hansen [117, p. 9], il faut que la fonction g soit plus régulière que le degré de régularité désiré pour f. Ceci est résumé par la condition de Picard (qui est l'équivalent de l'identité de Parseval voir l'équation (2.4.17) et la Remarque ci-dessous) :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(u_i, g)}{\mu_i} \right)^2 < \infty \tag{2.4.22}$$

Elle traduit le fait que, pour que g soit carré intégrable, les coefficients $\mu_i^{-1}(u_i, g)$ doivent décroitre plus vite que $\mu_i\, i^{-\frac{1}{2}}$, cela exige que $g \in ImK$ et nous retrouvons ici les conditions de continuité discutées en Section 2.3.1 page 57.

Quelques mots supplémentaires au sujet de la condition de Picard. Émile PICARD [122, 123, 124] a combiné les travaux de SCHMIDT (un étudiant de HILBERT) [125] et les travaux de RIESZ [126, 127] sur la convergence de séries de Fourier généralisées, pour établir une condition nécessaire et suffisante quant à l'existence de solutions des equations intégrales. Cette condition est représentée par l'équation (2.4.22).

Remarque. Les travaux de RIESZ dont il est question, ont été présentés par HILBERT lui-même en 1907. Ils sont connus à travers le théorème de Riesz-Fischer [127], qui s'énonce ainsi :

Théorème. *Pour toute suite quelconque de nombres complexes* (c_n) *avec* $n \in \mathbb{Z}$, *si*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid c_n \mid^2 < \infty$$

alors la fonction

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n s}$$

converge dans $L^2([0,1])$, *i.e.* $f \in L^2([0,1])$ *et* $c_n = \hat{f}(n)$.

La condition de Picard découle donc bien de la convergence des séries de Fourier.

2.5 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre après quelques rappels sur les problemes inverses, nous avons présenté une brève introduction des intégrales de *Fredholm* et des équations intégrales. Cela était intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, parce que la solution de l'équation de la chaleur peut s'écrire comme une intégrale de Fredholm de première espèce, faisant intervenir une fonction de *Green* qui est le *noyau de la chaleur*, que nous allons exploiter pour les résultats relatifs *au point source impulsionnel* dans les chapitres suivants. De plus, cela nous a permis d'introduire le *développement en valeurs singulières* (*SVE*) des opérateurs compacts. L'objectif était de proposer une analogie avec la théorie de Fourier, qui permettra dans le chapitre suivant de comprendre ce qu'il se passe lors de l'application de transformations orthogonales aux signaux expérimentaux bruts.

À partir de maintenant nous allons travailler avec des signaux discrets.

Chapitre 3

Décomposition en valeurs singulières SVD

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous passons dans le monde de *signaux discrets* et rééchantillonnés. Nous allons tout d'abord présenter un bref historique de l'évolution de la décomposition en valeurs singulières. Nous allons rappeler ses fondements mathématiques en présentant les différentes formes les plus couramment utilisées. Nous exposerons les puissants outils d'analyse de matrices qu'elle offre. Puis nous appliquerons la décomposition en valeurs singulières sur des exemples concrets pour bien comprendre les principes de décomposition appliqués aux images infrarouges par la suite.

3.2 Historique de la SVD

Nous allons à présent brièvement introduire l'historique de *la décomposition en valeurs singulières*. Une excellente étude parmi d'autres à ce sujet, est proposée par Stewart [124], qui recèle par ailleurs une mine de références pertinentes. Nous allons synthétiser quelques points clés de cette étude.

Le calcul matriciel est aujourd'hui au coeur des méthodes numériques. Il est cependant intéressant de remarquer que le développement des outils «classiques» comme les décompositions matricielles, remonte au début du 18ème siècle. Parmi celles-ci, *la décomposition en valeurs singulières*, qui est considérée comme étant un outil puissant, grâce aux multiples propriétés qu'elle offre. Les différentes contributions de mathématiciens célèbres ont permis l'élaboration de cet outil. Eugenio Beltrami (1835-1899), Camille Jordan (1838-1921) et James Joseph Sylvester (1814-1897) pour parvenir à cette décomposition ont travaillé à partir des formes bilinéaires. Tandis que Erhard Schmidt (1876-1959) et Hermann Weyl (1885-1955) ont utilisé une approche dérivée des équations intégrales.

Nous devons les premiers travaux à Beltrami et Jordan (en 1873 et 1874 respectivement, consulter [124] pour les références précises). Beltrami souhaitait familiariser ses étudiants avec

la manipulation des formes bilinéaires, les notes de cours qu'il avait alors rédigé, définissaient clairement la *décomposition en valeurs singulières* des matrices réelles, carrées, non singulières à valeurs singulières distinctes. Cependant ces notes souffraient de manques substantiels, notamment l'étude des dégénérescences et ce n'était apparemment pas une simple omission en vue d'adapter le cours aux étudiants. Bien que publiés un an plus tard, les travaux de JORDAN montraient franchement que sa découverte de la *SVD* était indépendante. L'approche du mathématicien français était sûre, élégante et comblait les lacunes de l'étude de BELTRAMI. Quant à l'apport de SYLVESTER à partir de 1889, il reste «flou», il n'avait à priori pas connaissance des travaux de ses prédécesseurs.

Les travaux de SCHMIDT [125, 1907] permirent une avancée majeure dans l'évolution de la *SVD*. Les équations intégrales (voir 2.4 page 63) étaient très à la mode à cette époque. Dans son étude des équations intégrales avec des noyaux non-symétriques, SCHMIDT a introduit l'analogue de la *décomposition en valeurs singulières* en dimension infinie, mais pas seulement, il a également démontré que cette décomposition pouvait être utilisée pour obtenir une approximation *optimale* d'un opérateur (voir 2.4.2 page 65), cette dernière a fait l'objet d'un théorème. ECKART et YOUNG l'ont redécouvert plus tard (ils l'ont démontré pour la norme de Frobenius) [128, 1936] et l'ont étendu aux matrices rectangulaires, c'est la raison pour laquelle ce théorème portera *incorrectement* le nom de Eckart-Young. En 1960, MIRSKY a démontré ce théorème pour la norme-2 [129], il portera alors le nom de Eckart-Young-Mirsky, présenté dans ce manuscrit dans le Théorème 6 page 77. Sa généralisation est donnée en [130, 1987].

En 1912, le théorème d'approximation de SCHMIDT servira à WEYL pour la détermination du rang d'une matrice en présence d'erreur. Soit A une matrice de rang k et $\tilde{A} = A + E$, E étant la matrice contenant l'erreur, alors $n - k$ valeurs singulières de $\tilde{A}$ vérifient :

$$\tilde{\sigma}_{k+1}^2 + \ldots + \tilde{\sigma}_n^2 \leq \| E \|_2^2$$

Autrement dit, le nombre de petites valeurs singulières relate l'importance de l'erreur contenue dans la matrice A. Ce résultat puissant nous reverrons plus loin dans ce chapitre et nous nous en servirons tout au long de ce travail de thèse.

WEYL ajoute la thèorie des perturbations aux travaux de ses prédécesseurs, ce qui donne une base mathématique solide à ce nouvel outil. Les études qui suivront seront principalement des extensions de cette base. Pour de plus amples informations le lecteur pourra consulter le dossier [124]. Le terme contemporain de «valeurs singulières» que nous connaissons est donné à l'origine par PICARD en 1910 [122, 123]. Quant aux méthodes de calcul de la *décomposition en valeurs singulières*, ce sont Gene GOLUB et William KAHAN qui proposent un premier algolithme de calcul en 1965 [131]. Cet algorithme fut modifié par Golub [1] et Christian Reinsch en 1970 et deviendra une version très populaire [132].

1. Une anécdote raconte que sur la plaque d'immatriculation du véhicule de Gene GOLUB, alors professeur à la prestigieuse université STANFORD, était écrit «PROF SVD». Consultez http ://www.mathworks.com/tagteam/35906_91425v00_clevescorner.pdf

3.3 Les fondements mathématiques et formalisation de la SVD

Avant de formaliser la *décomposition en valeurs singulières*, un rappel succinct de la notion d'orthogonalité nous semble être utile [133, p. 69].

Définition. Une suite de vecteurs $\{x_1 \dots x_p\} \in \mathbb{R}^m$ est *orthogonale* si $x_i^T x_j = 0$ pour tout $i \neq j$ et *orthonormale* si $x_i^T x_j = \delta_{ij}$.

Une suite de sous-espaces $S_1, \dots, S_p \in \mathbb{R}^m$ sont deux à deux *orthogonaux* si $x^T y = 0$ avec $x \in S_i$ et $y \in S_j$, pour $i \neq j$. Le *complément orthogonal* d'un sous-espace $S \subseteq \mathbb{R}^m$ s'écrit :

$$S^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : y^T x = 0 \text{ pour tout } x \in S \right\}$$

Les vecteurs $v_1, \dots, v_k$ forment une *base orthonormale* de $S \subseteq \mathbb{R}^m$ s'ils sont orthonormaux et engendrent S.

Une matrice $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est *orthogonale* si $Q^T Q = I$. Si $Q = [q_1, \dots, q_m]$ est orthogonale, alors les q_i forment une *base orthonormale* de $\mathbb{R}^m$.

Un résultat important : Si $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ possède des *colonnes orthonormales*, alors il existe $V_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ tel que $V = [V_1 V_2]$ est une matrice orthogonale et $Im(V_1)^{\perp} = Im(V_2)$.

La norme-2 et la norme de Frobenius sont préservées par *transformations orthogonales* : si $Q^T Q = I$ alors $\| Qx \|_2^2 = x^T Q^T Q x = x^T x = \| x \|_2^2$. Soient Q et Z deux matrices orthogonales avec les dimensions appropriées, alors $\| QAZ \|_F = \| A \|_F$ et $\| QAZ \|_2 = \| A \|_2$.

Nous allons à présent formaliser la *décomposition en valeurs singulières*. Les sources suivantes nous ont servi de support : [133, Chapitre 2, Section 2.5][117, Chapitre 2][118, Chapitre 5].

Théorème 5. *Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang r. Il existe deux matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $(U^T U = U U^T = I_m)$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(V^T V = V V^T = I_n)$ telles que*

$$A = U \Sigma V^T, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

$$U^T A V = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{m \times n} \tag{3.3.2}$$

Théorème. *avec $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Sigma_1 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ où $r = \min(m, n)$ et $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$.*

Les σ_i sont les valeurs *singulières* de A. Si l'on note $U = (u_1, \dots, u_m)$ et $V = (v_1, \dots, v_n)$ les colonnes des matrices U et V, alors les vecteurs u_i et v_i sont, respectivement, les *vecteurs singuliers* gauches et droits associés à la *valeur singulière* σ_i. Voir la Figure 3.3.1 page suivante.

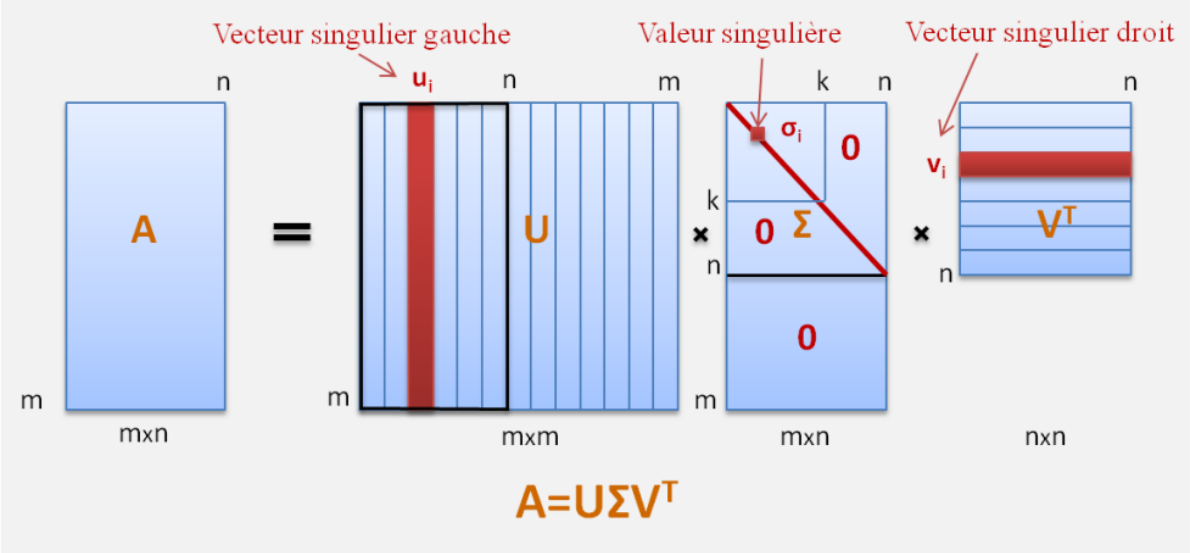


FIGURE 3.3.1: Schéma de la *SVD* complète appliquée à une matrice rectangulaire $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

À partir des équations précédentes il est facile de vérifier en comparant les colonnes dans les équations $AV = U\Sigma$ et $A^T U = V\Sigma^T$ que :

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i & i = 1 : r, \quad r = \min(m, n) \\ A^T u_i = \sigma_i v_i & i = 1 : r \\ A^T u_i = 0 & i = (r+1) : \max(m, n) \end{cases}$$

Proposition. *Si* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \ldots = \sigma_r = 0$, *alors :*

$$\begin{cases} rang(A) = k \\ \ker(A) = Vect(v_{k+1}, \ldots, v_n) \\ Im(A) = Vect(u_1, \ldots, u_k) \end{cases}$$

et nous pouvons écrire :

$$A = \sum_{i=1}^{k=rang(A)} \sigma_i u_i v_i^T$$

De plus il existe des relations entre la SVD et les normes de Frobenius et norme-2 très utiles :

$$\begin{cases} \| A \|_F^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2, \quad r = \min(m, n) \\ \| A \|_2 = \sigma_1 \\ \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{\| Ax \|_2}{\| x \|_2} = \sigma_n \qquad (m \geq n) \end{cases}$$

La SVD révèle la structure intrinsèque d'une matrice. Nous allons voir au fur et à mesure, de quelle manière certaines de ses propriétés peuvent être exploitées pour la *caractérisation des propriétés thermophysiques* des matériaux ainsi que pour le *contrôle non destructif*. La remarque suivante nous permettra de synthétiser les quelques éléments introduits, avant d'aller plus loin.

Remarque. De manière générale, la *décomposition* d'une matrice est une *factorisation* (méthodes *factorielles*) en un produit de matrices sous une forme donnée, ce qui facilite son étude. Le procédé de *décomposition en valeurs singulières* s'apparente en algèbre linéaire à un outil de factorisation des matrices *rectangulaires* $(m \times n)$ réelles ou complexes. La *décomposition en valeurs propres* par contre, ne s'applique que pour certaines *matrices carrées*. Néanmoins, dans certains cas, les deux décompositions restent liées. Par exemple pour une matrice *hermitienne* (ou auto-adjointe), *semi-définie positive*, les *valeurs singulières et vecteurs singuliers* correspondent aux *valeurs propres et vecteurs propres* de la matrice. D'un point de vue géométrique, la SVD de la matrice A, fournit deux bases de vecteurs *orthonormées*, à savoir les colonnes des matrices U et V, telles que la matrice devient *diagonale* une fois transformée dans ces bases. Ceci constitue la principale différence avec la *diagonalisation* ; bien que toute matrice possède une *décomposition en valeurs singulières*, seules les matrices *normales* sont *diagonalisables* dans une base *orthonormée*.

3.3.1 Décompositions réduites :

Dans la plupart des applications la forme *complète* de la décomposition en valeurs singulières n'est pas employée, notamment pour des raisons de temps de calcul et d'allocation de la mémoire d'ordinateur. Des versions *réduites* de la SVD existent et sont le plus souvent utilisées.

La SVD «fine» (*Thin SVD* dans la littérature anglo-saxonne) Seuls les n vecteurs colonnes de U correspondant aux vecteurs lignes de V^T sont calculés. Les vecteurs colonnes restants de U sont omis, ce qui permet d'éviter une quantité importante de calculs si $m \gg n$, voir la Figure 3.3.1 page 73.

La SVD «compacte» Seuls les k vecteurs colonnes de U et les k vecteurs lignes de V^T correspondants aux valeurs singulières non-nulles sont calculés. L'algorithme de calcul de la SVD *compacte* est plus rapide que le précédent si $n \gg k$. De plus $k = rang(A)$, comme nous allons le voir dans la section suivante.

La SVD «tronquée» Seuls les $\check{n}$ vecteurs colonnes de U et les $\check{n}$ vecteurs lignes de V^T correspondants aux $\check{n}$ plus grandes valeurs singulières sont calculés. Autrement dit, nous avons $A \approx \sum_{i=1}^{\check{n}} u_i \sigma_i v_i^T$ avec $\check{n} \ll \min(m, n)$. Ce calcul est encore plus rapide que celui de la SVD «fine» si le rang k de la matrice A est $k \gg \check{n}$, voir la Figure 3.3.2.

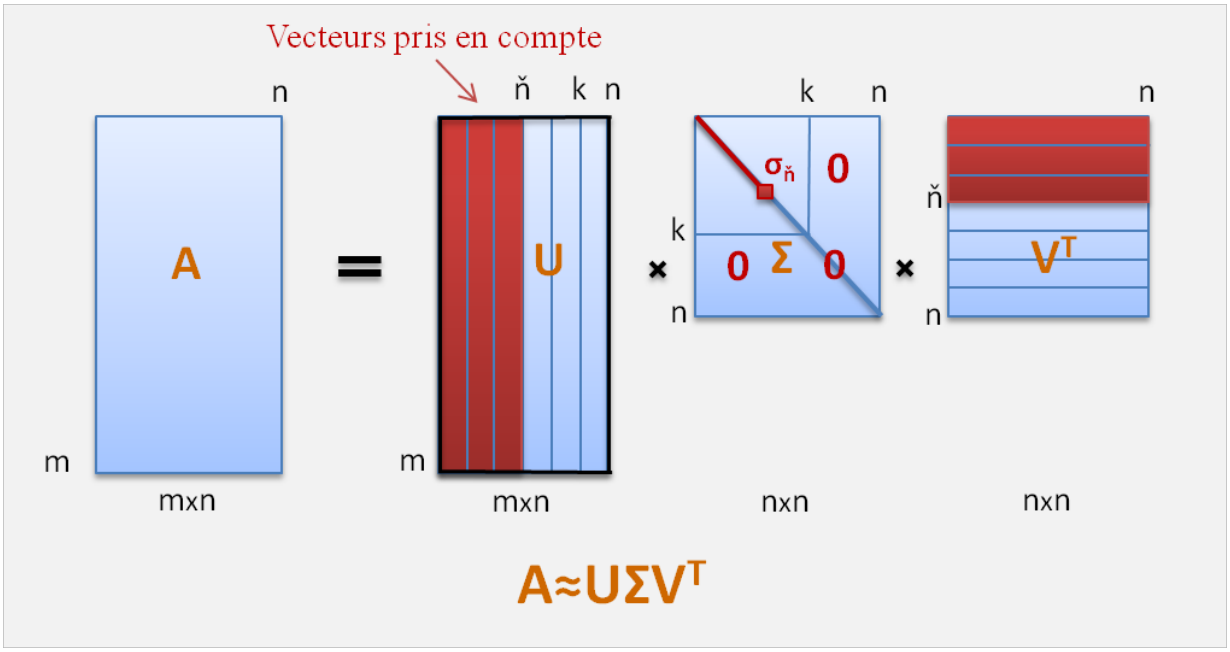


FIGURE 3.3.2: Schéma de la «compression» effectuée par la SVD «tronquée»

Cependant, cette décomposition «tronquée» n'est plus la décomposition exacte de A, néanmoins elle serait la meilleure *approximation* de la matrice A de rang $\check{n}$. Ceci est le résultat de la section qui suit, en particulier du Théorème 6 page 77.

3.4 Nullité de la matrice et la SVD

Remarque. Le *rang* d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non-nul de la matrice, à savoir, soit l le nombre de lignes linéairement indépendantes et c le nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice, alors le rang R est $R = \min(l, c)$, i.e. aucune ligne ou colonne n'est combinaison linéaire d'une ou plusieurs autres lignes, respectivement colonnes. De plus si la matrice est carrée, alors elle est régulière (déterminant non-nul et elle est inversible).

Si $R \neq \min(l, c)$, alors la différence entre le *rang* de la matrice R et le $\min(l, c)$ s'appelle la *nullité de la matrice* ou encore *déficience de rang* (*Rank Deficiency* en anglais). La SVD est un outil très *robuste* pour la détermination du *rang* d'une matrice, qui correspond aux nombres de valeurs singulières non-nulles. Nous allons nous pencher plus en détail sur cette propriété *puissante* de la SVD, car elle sera à la base de tous les développements ultérieurs.

Encore une fois soulignons cette propriété remarquable de la SVD, à savoir un traitement rigoureux de la notion de rang d'une matrice. En algèbre linéaire la plupart des théorèmes et propriétés se basent sur les matrices de *rang plein*. Cependant en présence d'erreurs de *discretisation*, des erreurs *d'approximation*, des *erreurs de mesure* en science expérimentale, la notion de *rang plein* d'une matrice est *très délicate* à gérer. La matrice entachée d'erreur, possède alors des colonnes «quasi» linéairement dépendantes, la *notion de rang* doit donc être adaptée pour permettre de travailler avec ce type de matrice, la notion de *rang numérique* a été introduite à cet effet [133, Section 2.5.5, p. 72][117, Chapitre 3]. Au passage, le *conditionnement d'une matrice* servant à l'étude des systèmes linéaires se calcule simplement à partir des valeurs singulières de la matrice : $cond(A) = {}^{\sigma_1}/_{\sigma_{rang(A)}}$.

La notion de *rang numérique* pour une matrice dont les colonnes seraient linéairement indépendantes avec une certaine tolérance ou à «un ϵ près», correspondrait au *rang numérique* r_ϵ défini comme suit :

$$r_\epsilon = rang(A, \epsilon) \equiv \min_{\|E\|_2 \leq \epsilon} rang(A + E) \tag{3.4.1}$$

E étant la matrice contenant l'erreur.

Autrement dit, le *rang numérique* r_ϵ de la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est équivalent au nombre de colonnes de A «quasi» linéairement indépendantes pour toute perturbation E, dont la norme-2 est inférieure ou égale à ϵ. Si les termes a_{ij} de la matrice A sont obtenus expérimentalement avec une tolérance de ± 0.01, alors il serait peut être intéressant d'étudier le $rang(A, 0.01)$. Par ailleurs les termes de la matrice A étant des nombres à virgule flottante, la matrice A, présenterait de part sa forme «numérique» une *déficience de rang* i.e. $rang(A, \epsilon) < \min(m, n)$. L'introduction de la notion de *rang numérique* nous parait alors tout à fait légitime.

En ce qui concerne les valeurs singulières de A, elle vérifient la relation suivante :

$$\sigma_{r_\epsilon} > \epsilon > \sigma_{r_\epsilon + 1} \tag{3.4.2}$$

Une définition similaire de *rang numérique* pourrait traduire une autre *finesse* de cette propriété [133, Section 2.5.5, p. 72] :

$$r_\epsilon = rang(A, \epsilon) \equiv \min_{\|A - B\|_2 \leq \epsilon} rang(B) \tag{3.4.3}$$

Cette définition met en lumière la notion *d'approximation* d'une matrice. Le rang numérique r_ϵ et les valeurs singulières permettent de *quantifier* la «distance» ou la «proximité» d'une matrice donnée, à celle d'une matrice de rang *inférieur*. Ce résultat est résumé dans le théorème suivant [133, Section 2.5.5] :

Théorème 6. *Soit la SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ donnée par le Théorème 5 page 72. Si $k < r = rang(A)$ et*

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T \tag{3.4.4}$$

alors

$$\min_{k=rang(B)} \| A - B \|_2 = \| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1} \tag{3.4.5}$$

Le Théorème précédent affirme que la plus petite valeur singulière de A représente la distance (au sens de la norme-2) à la série de toutes les matrices *déficientes de rang* qui suivent. Nous avons de plus pour $r_\epsilon = rang(A, \epsilon)$ l'arrangement suivant des valeurs singulières :

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{r_\epsilon} > \epsilon \geq \sigma_{r_\epsilon+1} \geq \ldots \geq \sigma_p \quad \text{avec} \quad p = \min(m, n) \tag{3.4.6}$$

Pour illustrer ces propriétés fraîchement étudiées, nous proposons d'analyser un cas concret. Une étude qui s'inspire partiellement de [2, Chapitre 1, Section 3] et fait l'objet de la section suivante.

3.5 Étude d'un cas concret : application de la SVD pour la compression et le filtrage de données

Pour illustrer le Théorème 6 page précédente ainsi que le Corollaire 1 page 68 et le Lemme 1 page 68, nous allons appliquer la SVD à deux images, aux contenus fréquentiels très différents. La première, est une image représentant une *fractale de Mandelbrot* contenant des variations spatiales très «fines», i.e. un contenu fréquentiel très *dense* ou *riche*, présentée en Figure 3.5.1. La seconde, est une image représentant un champ de température *séparable* à un instant donné lors de la diffusion pure (équation 2.4.3 page 63), issu d'une simulation numérique d'excitation thermique par un *point source impulsionnel*, d'un milieu semi-infini hétérogène (de diffusivités longitudinales $a_x \neq a_y$). Cette image possède un contenu fréquentiel plutôt *pauvre*, Figure 3.5.2 page suivante. Le choix particulier de cette dernière n'est pas anodin, il va nous permettre dès à présent de montrer une autre possibilité puissante de la SVD, à savoir, la possibilité d'obtenir *deux bases orthonormées* permettant *d'exploiter* la *séparabilité du champ de température*, en réponse à un flux d'excitation sous la forme d'un *Dirac spatio-temporel*. Cette capacité *adroitement utilisée* est le *résultat original* de ce manuscrit de thèse. Elle est à la base de l'algorithme de calcul élaboré : *de la double décomposition en valeurs singulières*, notée ${}^2SVD_{(x,y),t}$ par l'auteur, qui sera présenté en détail dans la troisième partie de ce manuscrit. Cet algorithme permet l'estimation *des propriétés thermophysiques longitudinales* d'un matériau, ainsi que *l'évaluation non destructive*.

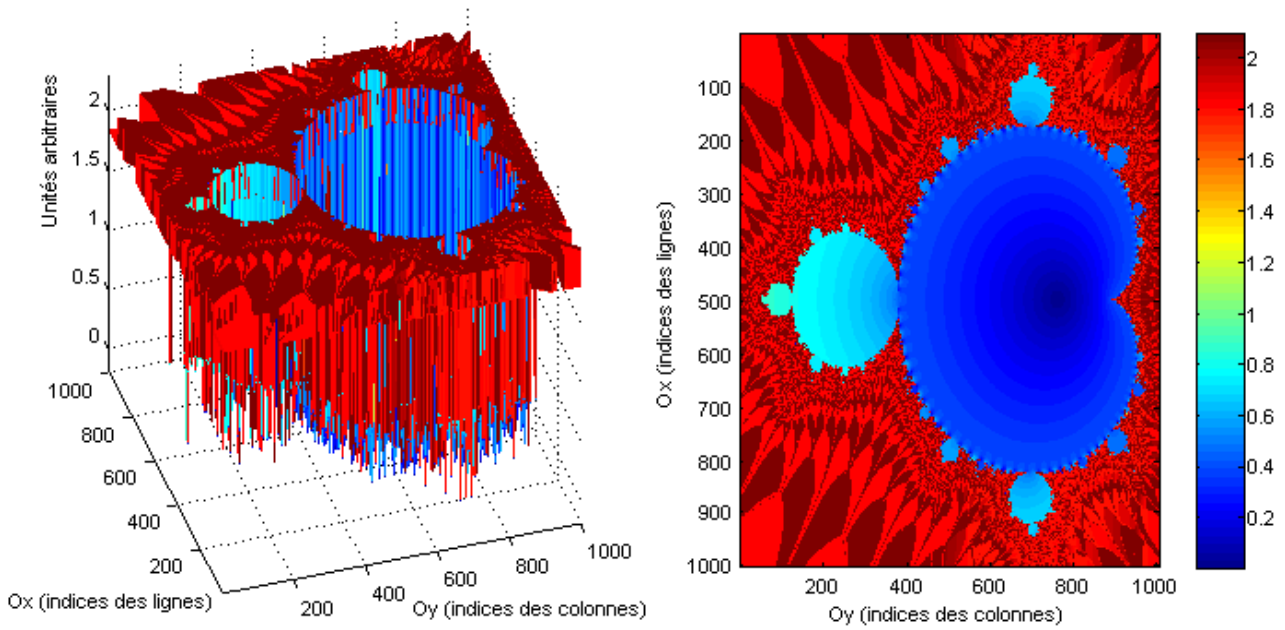


FIGURE 3.5.1: Fractale de Mandelbrot

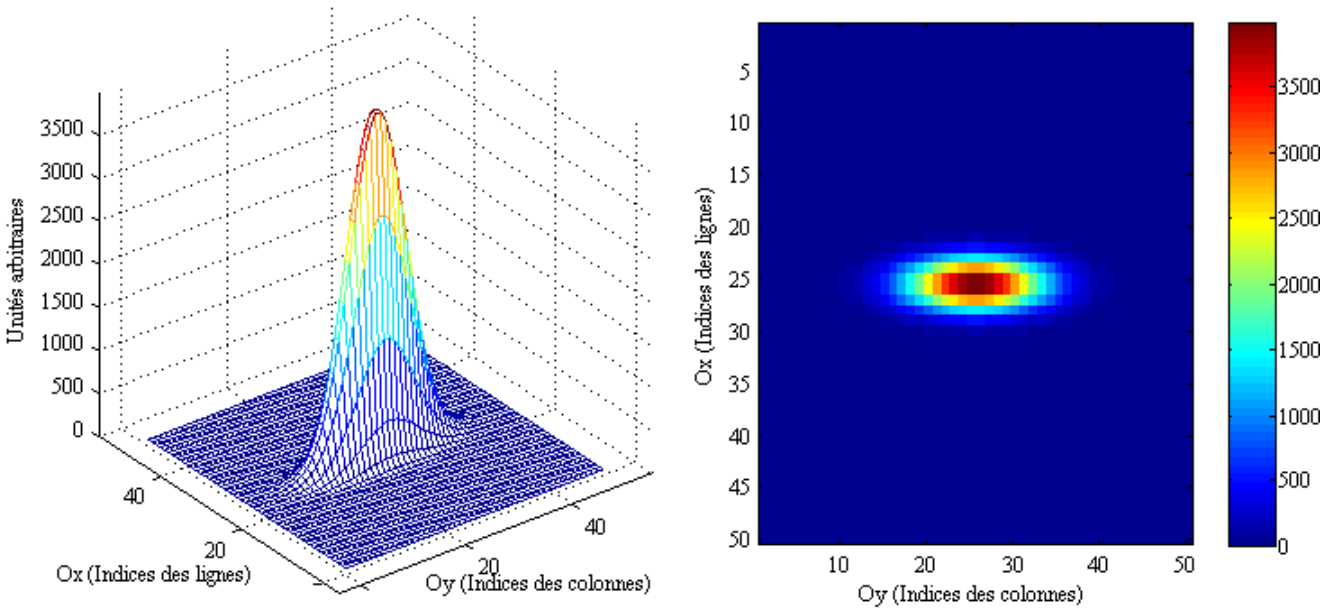


FIGURE 3.5.2: Champ de température à un instant donné suite à un pulse laser simulé sur un milieu semi-infini hétérogène avec $a_x \neq a_y$

Après l'application de la SVD à ces images, chacune d'elles peut s'exprimer comme une somme *réduite* de produits, décrite par l'équation 3.4.4 page 77. La Figure 3.5.3 page suivante, représente les valeurs singulières issues de la décomposition de chacune des images.

Une première constatation, l'allure des courbes diffère selon l'image observée, ce qui corrobore le fait que pour une matrice donnée, la SVD est unique. Comme nous pouvons le voir également, les valeurs singulières décroissent très vite dans les deux cas. Cette décroissance rapide signifie que seules *les premières valeurs singulières,* correspondant aux *premiers termes de la somme* 3.4.4 page 77, représentent l'information contenue dans l'image de façon *significative*. Autrement dit, l'information *pertinente* de l'image se reflète par le nombre de *valeurs singulières prépondérantes* (non «quasi» nulles).

Par ailleurs, les valeurs singulières associées à l'image fractale ont une décroissance plus lente, ce qui apparait nettement sur la courbe logarithmique. Cela est dû au fait que *la complexite* ou *la richesse* d'une image fractale nécessite un nombre de valeurs singulières plus important, pour obtenir une approximation de l'image de départ acceptable ; cela est tout à fait en accord avec le Corollaire 1 page 68.

Lien avec le *rang numérique* r_ϵ L'image fractale est une matrice $A \in \mathbb{R}^{1000\times1000}$. D'après la Figure 3.5.3 page suivante, seules les 500 premières valeurs singulières seraient pertinentes. En termes de *rang numérique*, cela voudrait dire que $r_\epsilon = 500$, vérifiant la relation 3.4.2 page 76 rappelée ci-après : $\sigma_{r_\epsilon} > \epsilon > \sigma_{r_\epsilon+1}$. À titre d'exemple, dans notre cas $\sigma_{r_\epsilon} = 0,9635$ et $\sigma_{r_\epsilon+1} = 4,762 \times 10^{-7}$.

Par ailleurs, l'équation 3.4.4 page 77 s'écrit :

$$A_k = \sum_{i=1}^{k=rang(A,\epsilon)=r_\epsilon} \sigma_i u_i v_i^T \tag{3.5.1}$$

autrement dit les termes $\sigma_i u_i v_i^T$ pour $i > k = r_\epsilon$ sont *tronqués* car leur apport d'information est négligeable. Cela permet tout d'abord d'effectuer une *compression* de la matrice initiale, donc un gain d'espace en terme d'allocation de mémoire d'ordinateur, puis cela permet également de *filtrer* les termes *hautes fréquences* (indices i élevés), qui correspondent aux *variations spatiales très fines* dans l'image fractale. L'aperçu des effets de filtrage par la SVD est plus évident sur l'image représentée en Figure 3.5.4 page suivante. La déficience de rang d_ϵ s'exprime ici comme suit $d_\epsilon = \min(m, n) - r_\epsilon = 1000 - 500 = 500$, donc nous avons 500 colonnes/lignes linéairement dépendantes, qui n'apportent pas d'information *pertinente* supplémentaire et donc peuvent être omises.

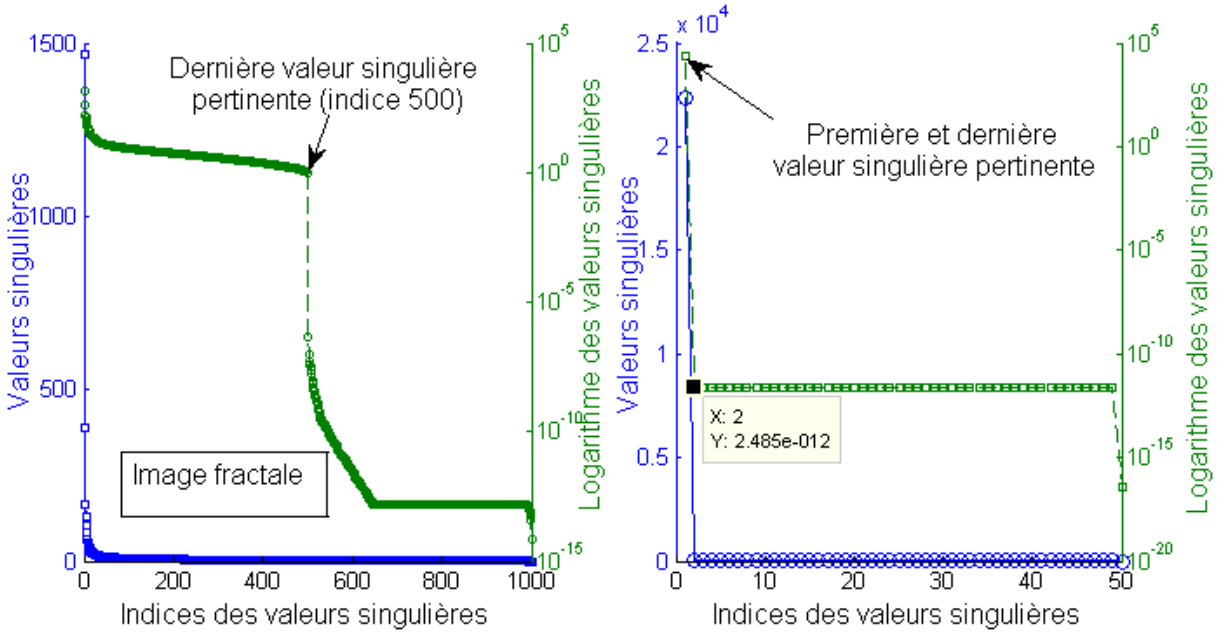


FIGURE 3.5.3: Valeurs singulières σ_i issues de la décomposition de l'image fractale et de l'image représentant un champ de température *séparable* à un instant donné en diffusion pure, suite à un pulse laser simulé

En ce qui concerne l'image représentant le champ de température séparable à un instant donné lors de la diffusion pure, $A \in \mathbb{R}^{50\times 50}$. Ce cas est plus simple, car nous sommes en présence d'une seule première valeur singulière dominante. Les autres étant nulles. Le rang numérique est donc de $r_\epsilon = 1$ et les termes $\sigma_i u_i v_i^T$ pour $i > k = r_\epsilon$ peuvent être *tronqués*. Pour mieux apercevoir les effets du *filtrage* effectué par la SVD, nous proposons de *bruiter* l'image du champ de température précédent, représentée en Figure 3.5.4 page suivante.

Les valeurs singulières issues de la décomposition de cette nouvelle image bruitée sont représentées Figure 3.5.5 page suivante. Comme nous pouvons le voir le contenu en valeurs singulières n'est plus du tout le même, il est plus *dense*, avec cependant une première valeur singulière dominante. Les autres suivent une décroissance progressive, mais ne sont plus négligeables. Le contenu de l'image étant plus *complexe* (présence de bruit), un nombre de termes $\sigma_i u_i v_i^T$ plus important sera nécessaire pour décrire l'image. Dans la troisième partie du manuscrit, nous verrons que c'est dû au fait que *le bruit de mesure n'est pas séparable*. La détermination du *rang numérique* est ici moins évidente, il peut être fonction de la *norme du bruit* présent dans

le signal. Le choix du rang numérique r_ϵ définit donc la quantité de données *filtrée* (l'indice i à partir duquel les termes $\sigma_i u_i v_i^T$ sont tronqués), r_ϵ est par conséquent un paramètre de *filtrage*. Néanmoins, comme nous pouvons le voir, seules les premières valeurs singulières sont *prépondérantes*.

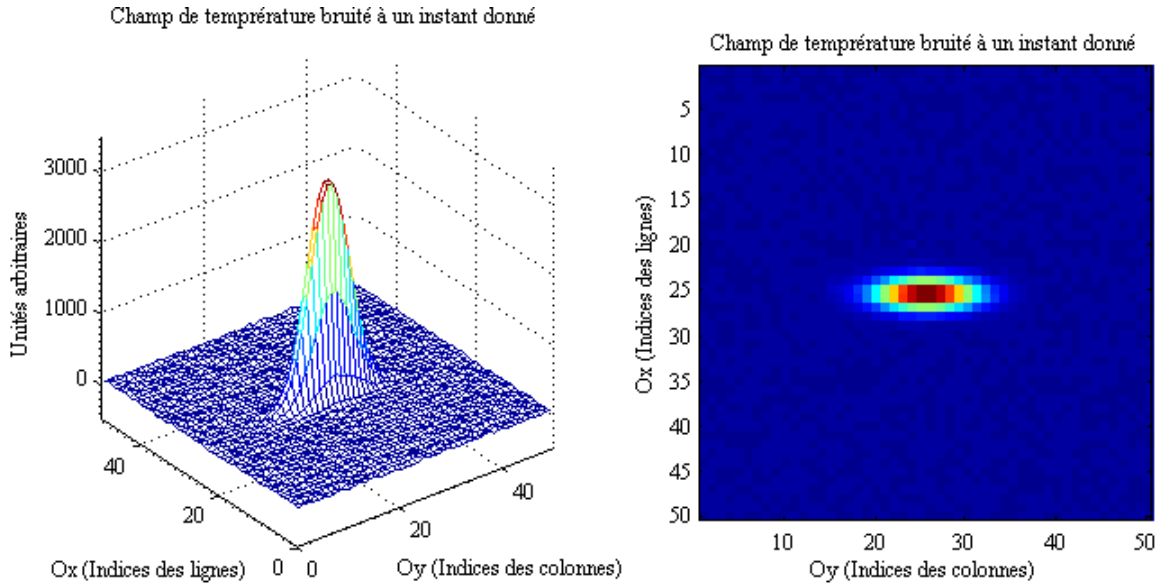


FIGURE 3.5.4: Champ de température *bruité* à un instant donné suite à un pulse laser simulé sur un milieu semi-infini hétérogène avec $a_x \neq a_y$

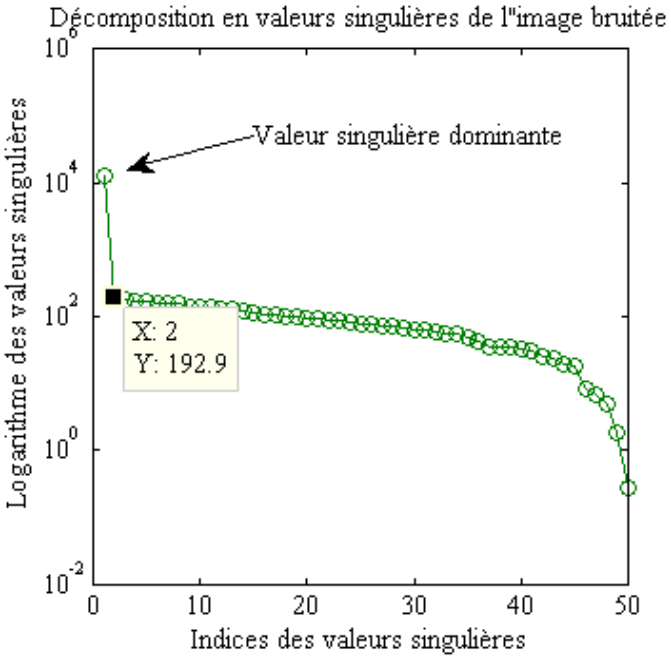


FIGURE 3.5.5: Valeurs singulières σ_i issues de la décomposition de l'image représentant un champ de température séparable *bruité* à un instant donné en diffusion pure, suite à un pulse laser simulé

Étude des termes $\sigma_i u_i v_i^T$: Nous nous proposons maintenant d'étudier les produits $\sigma_i u_i v_i^T$ de plus près. À partir de l'équation 3.5.1 page 79, nous pouvons analyser chaque produit $\sigma_i u_i v_i^T$ de la somme $A_k = \sum_{i=1}^{k=r_\epsilon} \sigma_i u_i v_i^T$ séparément. Pour ce faire, nous écrirons

$$I_i(x, y) = \sigma_i u_i(x) v_i^T(y) \tag{3.5.2}$$

où y est l'indice des colonnes et x l'indice des lignes. Chacunes de ces images I_i peut être interprétée comme une représentation dans l'espace transformé, à une fréquence spatiale donnée, de l'image originelle. Voir le *Parallèle avec la théorie de Fourier* page 66 pour plus de détails. La Figure 3.5.6, représente les 4 premières images (I_i, $i = 1 \dots 4$), obtenues dans l'espace transformé à partir de la décomposition de l'image fractale.

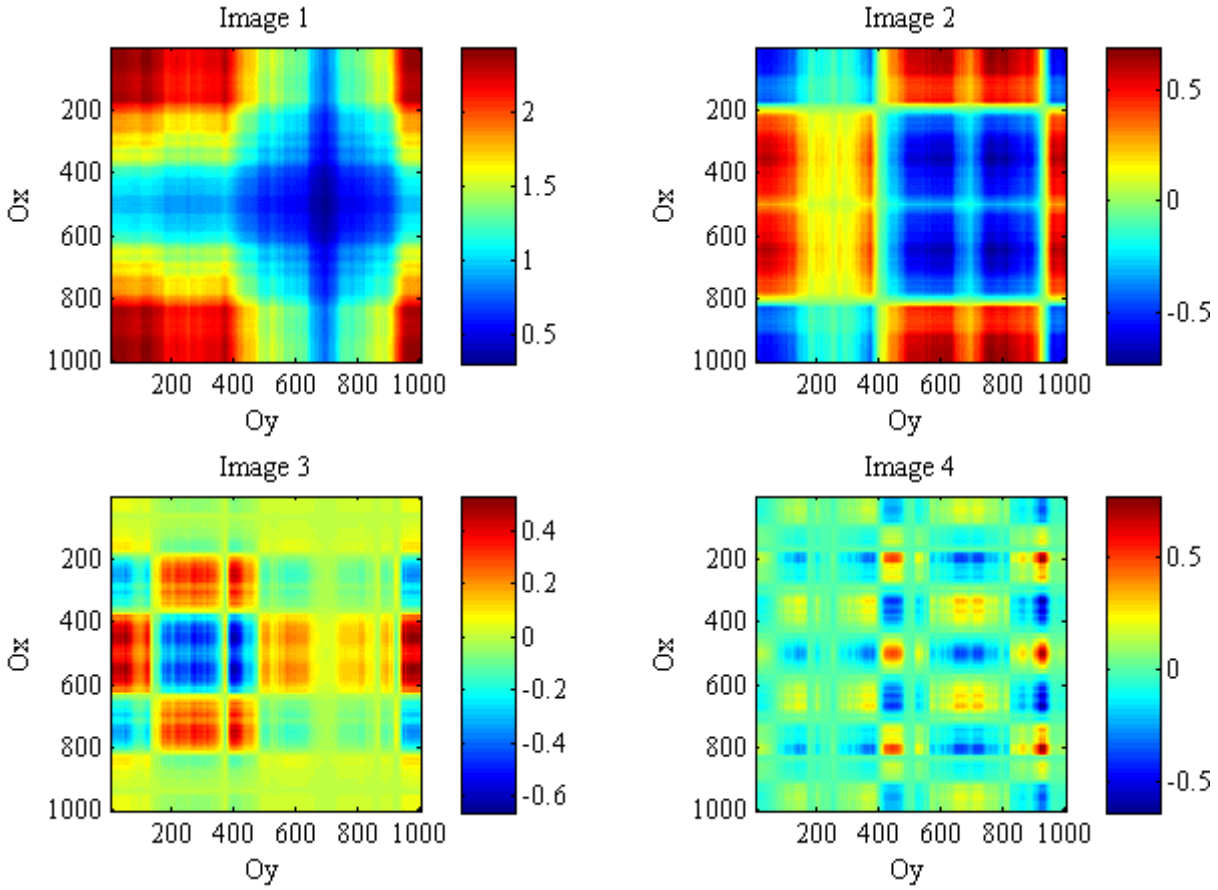


FIGURE 3.5.6: Les 4 images dans l'espace transformé $I_i(y, x) = \sigma_i u_i(y) v_i^T(x)$, issues de la décomposition 3.5.1 page 79 de l'image fractale

La Figure 3.5.7 page suivante, représente ces mêmes images (I_i, $i = 1 \dots 4$) issues de la décomposition du champ de température à un instant donné *non bruité*, Figure 3.5.2 page 79. Il est saisissant de comparer la complexité des images (I_i, $i = 1 \dots 4$) issues de la décomposition de la fractale, à la «pauvreté» de celles issues de la décomposition de l'image non bruitée Figure 3.5.2 page 79. Les premières possèdent un contenu fréquentiel très riche alors que les dernières ont un contenu fréquentiel «quasi» nul en dehors de la première image en Figure 3.5.7 page suivante.

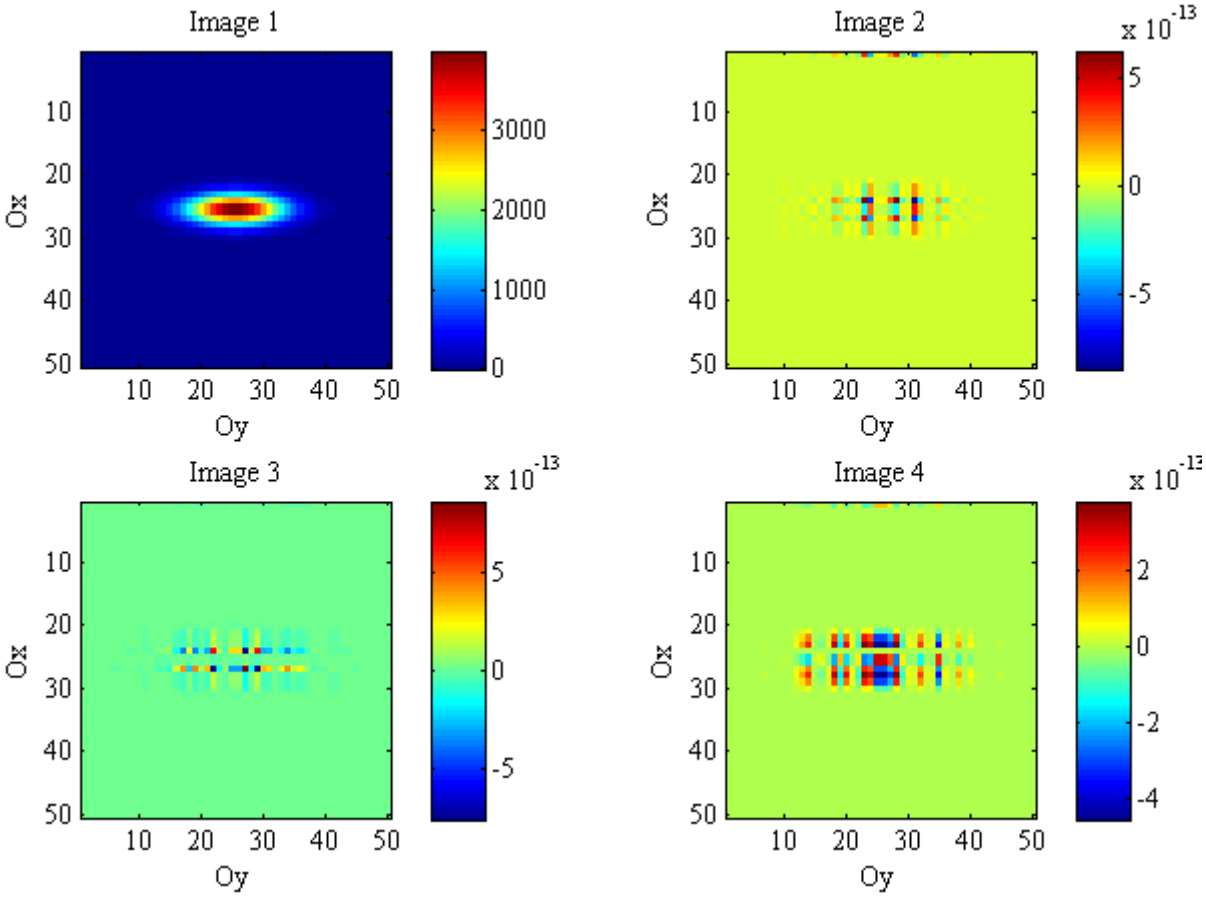


FIGURE 3.5.7: Les 4 images dans l'espace transformé $I_i(y,x) = \sigma_i u_i(y) v_i^T(x)$, issues de la décomposition 3.5.1 page 79 de l'image du champ de température *non bruité* représentée Figure 3.5.2 page 79. Remarquez les échelles de valeurs des images 2 à 4, elles sont «quasi» nulles

Il serait maintenant intéressant de voir quelle serait la conséquence de l'ajout du bruit dans l'image représentant le champ de température à un instant donné, voir Figure 3.5.4.

La Figure 3.5.8 page suivante, présente les images (I_i, $i = 1 \dots 4$) issues de la décomposition cette fois-ci, du champ de température *bruité* à un instant donné. Comme nous pouvons le constater, le contenu fréquentiel des images 2 à 4 a changé, il n'est plus «quasi» nul comme auparavant. La présence de bruit nécessite donc plus de termes $\sigma_i u_i v_i^T$ pour la reconstitution de l'image initiale A, autrement dit, pour prendre en compte *les petites variations* (dues à la présence de bruit) contenues dans l'image originelle, il faut additionner plus de termes $\sigma_i u_i v_i^T$ dans : $A_k = \sum_{i=1}^{k=r_\epsilon} \sigma_i u_i v_i^T$.

Encore un fois, le choix de $k = r_\epsilon$, peut être fonction de la *norme du bruit* présent dans le signal. Réciproquement, si maintenant nous souhaitons *filtrer* les petites variations (ou encore les variations dites *hautes fréquences*, indices i élevés), les termes $\sigma_i u_i v_i^T$ pour $i > k = r_\epsilon$ pourront être *tronqués*.

La contribution des quatre premières images I_i dans la décomposition du signal par la SVD nous paraissant à présent plus claire, nous pouvons alors illustrer le Théorème d'approximation 6 page 77, pour mettre en lumière l'équation 3.4.4 page 77 et sa conséquence sur l'approximation lorsque le nombre de termes de cette somme croit.

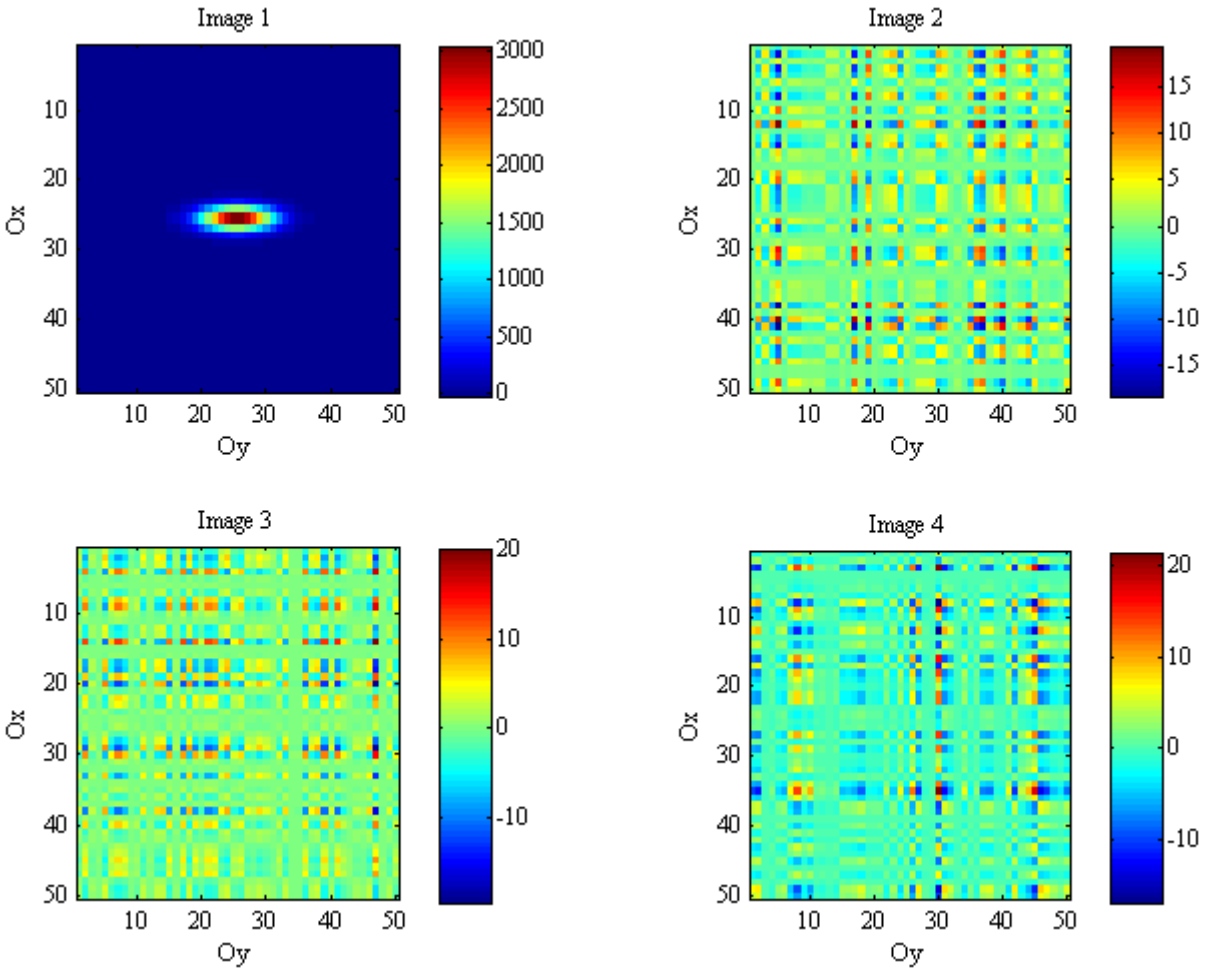


FIGURE 3.5.8: Les 4 images dans l'espace transformé $I_i(y,x) = \sigma_i u_i(y) v_i^T(x)$, issues de la décomposition 3.5.1 page 79 de l'image du champ de température *bruité* représentée Figure 3.5.4 page 81. Remarquez cette fois-ci que les échelles de valeurs des images 2 à 4, ne sont plus «quasi» nulles comme auparavant

Discussion autour du Théorème d'approximation 6 page 77 Nous partons de l'équation 3.4.4 page 77 rappelée ci-après :

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$$

et nous allons voir ce qu'il se passe lorsque le nombre de termes $\sigma_i u_i v_i^T$ dans la somme précédente augmente (i.e. lorsque k croit). La Figure 3.5.9 page suivante, montre quatre images qui représentent dans l'ordre A_1, A_4, A_8, A_{16}, qui sont des images d'approximation de l'image fractale originelle 3.5.1 page 78. Nous constatons sans surprise, que la ressemblance des approximations A_1, A_4, A_8, A_{16}, avec l'image fractale originelle s'améliore lorsque le nombre de termes $\sigma_i u_i v_i^T$ de la somme augmente (i.e. k croit). Bien que la complexité d'une image fractale (variations spatiales très «fines») nécessite un nombre significatif de termes de la somme, l'approximation A_{16} donne déjà un bon aperçu de l'image initiale.

Quant à l'image de contenu fréquentiel plus modeste, Figure 3.5.2 page 79, l'approximation A_1 à elle seule suffit pour représenter l'image initiale, voir Figure 3.5.10 page 86.

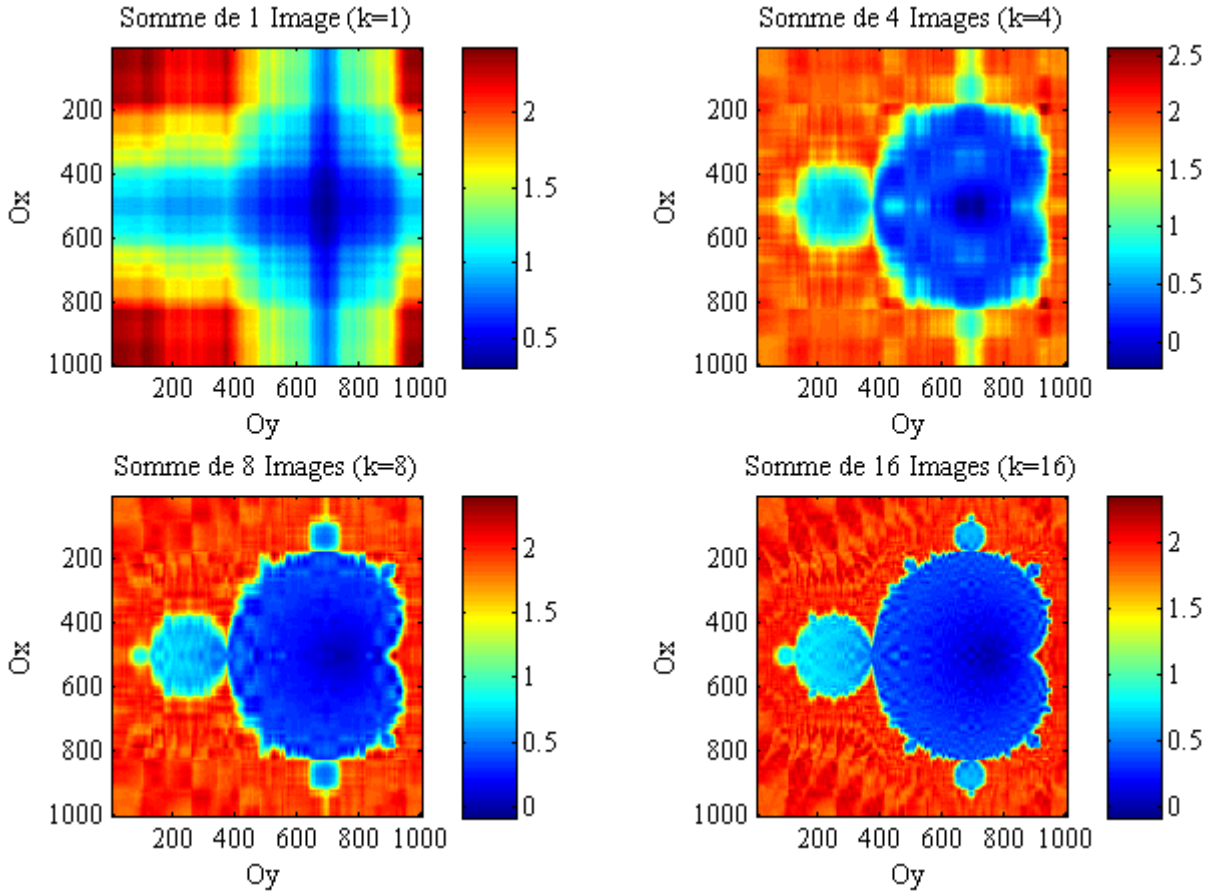


FIGURE 3.5.9: Images recomposées de la fractale 3.5.1 page 78 à partir de la relation $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$, pour les valeurs de $k = 1, 4, 8, 16$ respectivement

Nous pouvons regarder si le Théorème 6 page 77 est vérifié dans le cas de l'image fractale par exemple. Pour ce faire, nous allons nous servir des équations 3.4.5 page 77 et 3.4.6 page 77 rappelées ci-dessous respectivement :

$$\min_{k=rang(A,\epsilon)} = \| A - A_k \|_2 = \sigma_{k+1} = \sigma_{r_\epsilon+1}$$

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{r_\epsilon} > \epsilon \geq \sigma_{r_\epsilon+1} \geq \ldots \geq \sigma_p \quad \text{avec} \quad p = \min(m, n)$$

Nous allons calculer les normes $\| A - A_k \|_2$ pour $k = 1, 4, 8, 16$ et vérifier que les équations ci-dessus sont respectées. Le tableau en Figure 3.5.11 page suivante récapitule les résultats. Comme nous pouvons le constater nous avons une parfaite adéquation des résultats.

Cette propriété puissante de la SVD nous permettra par la suite, connaissant *la norme de l'ensemble des erreurs de mesure* ϵ dans les signaux expérimentaux, de choisir le paramètre de *filtrage* adéquat, à savoir $k = r_\epsilon$, tel que les termes, contenant les erreurs de mesure, $\sigma_i u_i v_i^T$ pour $i > k = r_\epsilon$ soient *filtrés*.

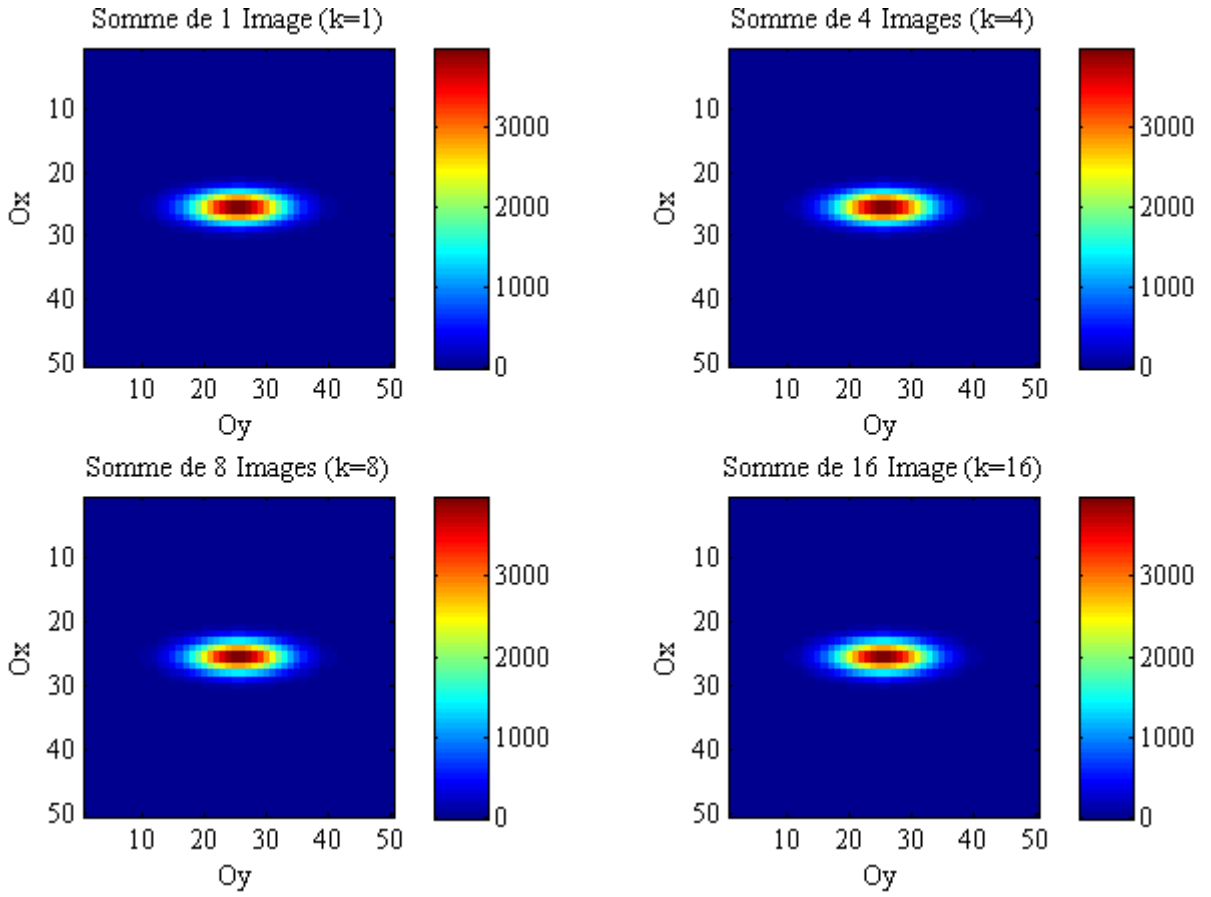


FIGURE 3.5.10: Images recomposées de l'image 3.5.2 page 79 à partir de la relation $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$, pour les valeurs de $k = 1, 4, 8, 16$ respectivement

	$\| A - A_k \|_2$	$\sigma_{r_\epsilon+1}$
$A_{k=1}$	386,6	386,6
$A_{k=4}$	102,7	102,7
$A_{k=8}$	48,1	48,1
$A_{k=16}$	25,1	25,1

FIGURE 3.5.11: Tableau représentant la norme $\| A - A_k \|_2$ pour $k = 1, 4, 8, 16$ et les valeurs singulières $\sigma_{r_\epsilon+1}$ correspondantes

BAMFORD [2, Chapitre 1, Section 3], propose une façon intuitive de représenter la précision des approximations A_k. Le calcul du *pourcentage de signal* contenu dans chacune des approximations s'effectue au moyen de la relation simple suivante :

$$\left[1 - \frac{\| A - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T \|_2}{\| A \|_2}\right] \times 100, \quad k = 1 \ldots \min(m, n) \tag{3.5.3}$$

la quantité précédente désigne donc le pourcentage du signal initial A, contenu dans la représentation tronquée $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$. La Figure 3.5.12 page suivante, propose le tracé de cette équation 3.5.3, dans le cas de l'image fractale et de l'image représentant un champ *bruité* de température à un instant donné en Figure 3.5.4 page 81.

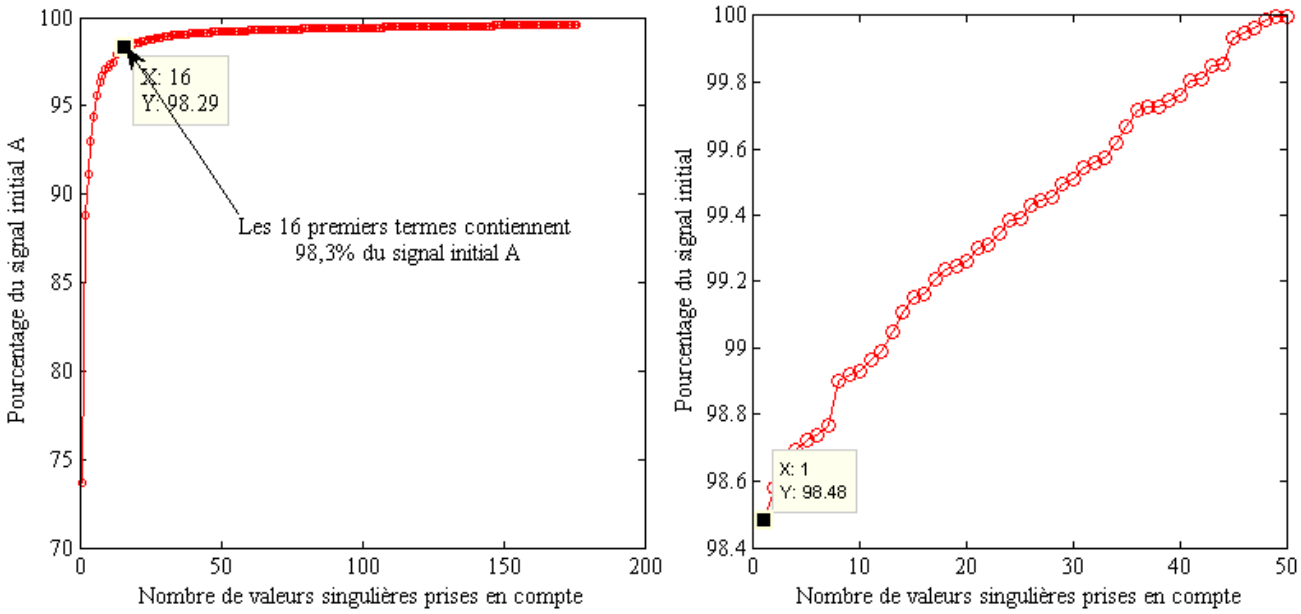


FIGURE 3.5.12: Pourcentage du signal initial contenu dans la somme tronquée $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ pour les images fractale (à gauche) et l'image du champ *bruité* Figure 3.5.4 page 81 (à droite)

Nous pouvons alors faire les remarques suivantes :

- Dans les deux cas, un faible nombre de valeurs singulières suffit pour avoir une approximation de 99% du signal originel, l'application de la SVD permet donc la compression de données. En réalité comme nous venons de le voir, la SVD effectue à la fois *la compression* et *le filtrage* des données, puisque seulement les *premières valeurs singulières* contiennent les données *pertinentes*, le reste étant assimilé au bruit.
- Ces compression et filtrage sont d'autant plus efficaces pour des signaux *séparables*, ce qui fut le cas pour les images 3.5.2 page 79 et 3.5.4 page 81, représentant un champ de température à un instant donné suite à un *pulse* laser simulé. La Figure 3.5.12 montre bien le fait que les premières valeurs singulières représentent la quasi totalité du signal initial, alors que l'image fractale n'étant par nature pas séparable, nécessitera toutes les valeurs singulières pour atteindre les 100% du signal originel. Ceci préconise d'emblée l'utilisation de la SVD sur des *champs de température séparables* étudiés dans la troisième partie de ce manuscrit.

La notion de séparabilité évoquée précédemment est encore plus visible sur le tracé de la Figure 3.5.13 page suivante des vecteurs singuliers U_k et V_k issus de la décomposion de l'image fractale, *non séparable* 3.5.1 page 78 et de l'image du champ de température bruité *séparable* 3.5.4 page 81.

Il est difficile de voir des similitudes ou des différences (présence ou absence de corrélation) entre les vecteurs singuliers U_k et V_k compte tenu de la complexité de l'image fractale. Par contre, si nous comparons par exemple U_1 et V_1 issus de la décomposition de l'image représentant le champ de température bruité 3.5.4 page 81, il est aisé de constater, que chacun d'eux représente une information *distincte* contenue dans l'image, i.e. les nouvelles bases U_k et V_k obtenues sont

décorrélées, par conséquent les informations projetées dans ces bases, le sont également. À savoir que cette image représente un champ de température à un instant donné lors de la diffusion pure, issu d'une simulation numérique d'excitation thermique par un pulse laser, d'un milieu semi-infini *hétérogène* (de diffusivités longitudinales $a_x \neq a_y$). Un pulse laser étant un *Dirac spatio-temporel*, ce qui assure *la séparabilité de la solution analytique* du champ de température mise en avant ici. Autrement dit, l'information concenant la diffusion dans le sens (O_x) est donnée par les U_k et par les V_k dans le sens (O_y). La Figure 3.5.14 page suivante, résume ces assertions.

Par ailleurs, les premiers vecteurs singuliers U_1 et V_1 à eux seuls, suffisent pour décrire le phénomène de diffusion dans les sens O_x et O_y. En effet, les vecteurs singuliers U_k et V_k pour $k > 1$, compte tenu de l'étude menée dans les sections précédentes, sont liés au *bruit de mesure* et peuvent par conséquent être *tronqués*. Nous reverrons plus en détail ces considérations *puissantes* offertes par la SVD dans la troisième partie du manuscrit.

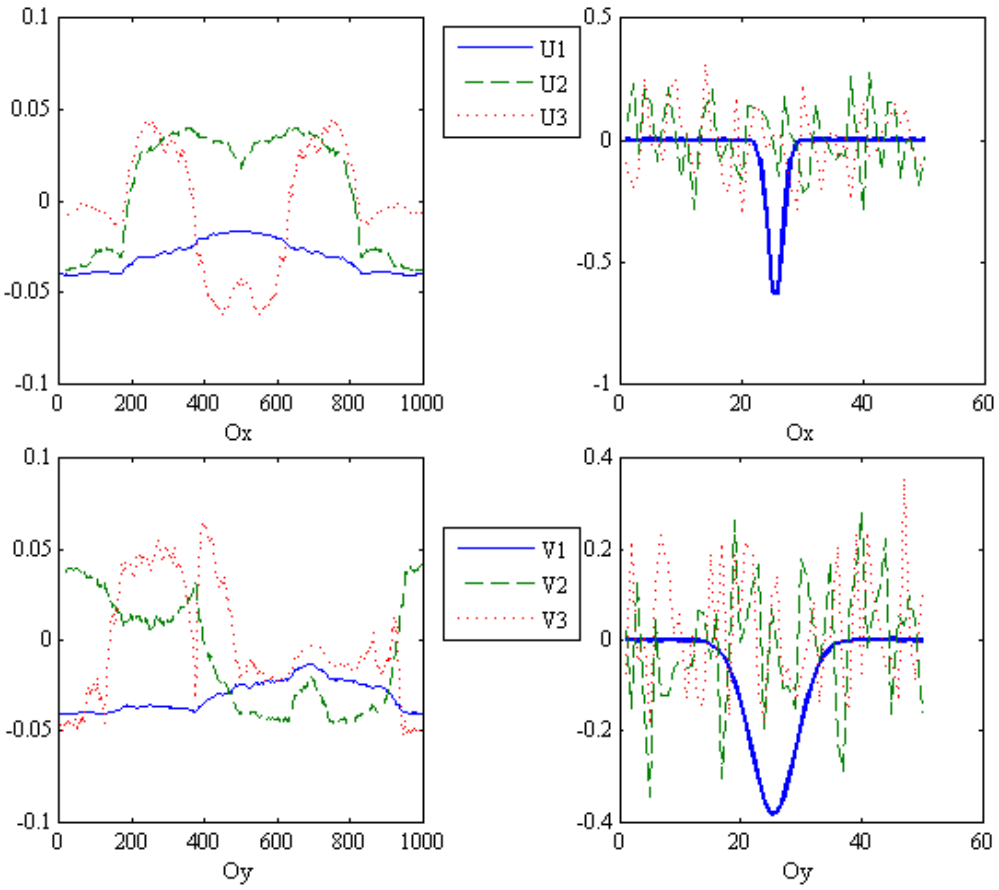


FIGURE 3.5.13: Les trois premiers vecteurs singuliers (U_k et V_k pour $k = 1 \ldots 3$) issus de la décomposition de l'image fractale (à gauche) et du champ de température bruité (à droite)

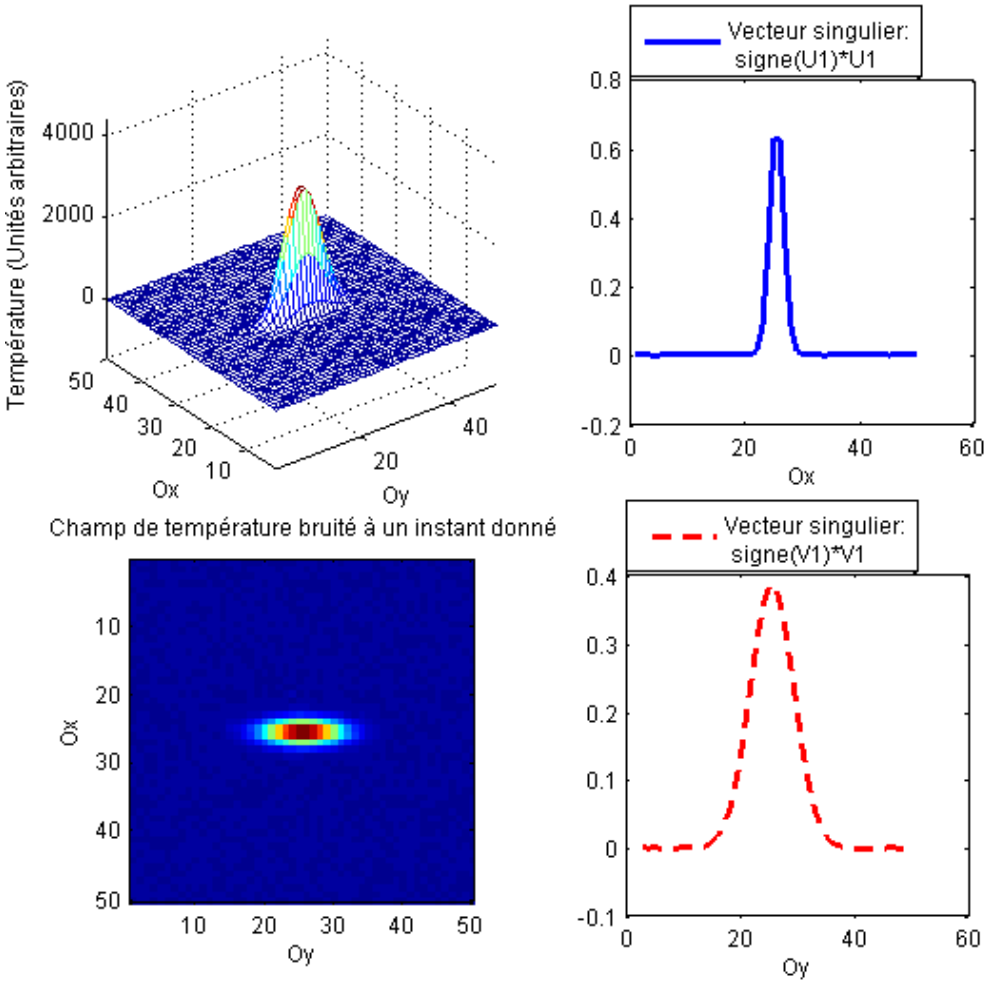


FIGURE 3.5.14: Excitation thermique d'un milieu semi-infini *hétérogène* (de diffusivités longitudinales $a_x \neq a_y$) par un pulse laser ; lien entre la diffusion dans le sens (Ox) et U_1 et dans le sens (Oy) et V_1

3.6 L'Analyse en Composantes Principales (ACP ou PCA pour *Principal Component Analysis* dans la littérature anglo-saxonne)

Il existe un autre outil de *factorisation matricielle* (ou méthode *factorielle*) très robuste, une alternative à la SVD. Elle s'appelle *l'Analyse en Composantes Principales* ou ACP. Une sorte de *variante* de la SVD, elle se base sur une analyse statistique *multivariée* des données, i.e. elle consiste à transformer des variables *corrélées* (au sens statistique du terme) en de nouvelles variables *décorrélées*. Ces nouvelles variables s'appellent «composantes principales» ou «axes principaux». La PCA faisant partie des méthodes *descriptives*, elle ne s'appuie pas sur un modèle *probabiliste*, mais plutôt un modèle *géométrique* et permet ainsi une interprétation *graphique* des données. Elle offre également la possibilité de *compression de données*, les n premiers *axes principaux* représentent presque entièrement l'information (*pertinente*) contenue dans le signal originel.

Cette méthode fut développée dès 1901 par Pearson [134], ses travaux furent repris et complétés par Hotelling dans les années 1930 [135, 1933]. À l'origine des *intervalles de confiance*, statisticien américain de renom, il apportera une contribution considérable à *l'analyse canonique* [136, 1936], une généralisation des *méthodes factorielles*.

Dans le domaine du traitement du signal et de l'analyse des images, la PCA est plutôt connue sous le nom de *transformée de* Karhunen-Loève (*en anglais, Karhunen-Loève transform,* KLT ou *Karhunen-Loève decomposition,* KLD)[137] [138], un outil de décomposition puissant et très utilisé de nos jours.

Illustrons brièvement le principe de l'analyse effectué par la PCA. Soit $x^T = (x_1, \ldots, x_n)^T$ un ensemble de n variables aléatoires, connues à partir de m réalisations *conjointes* de ces variables. Ces n variables aléatoires peuvent être rangées dans une matrice $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} & \ldots & x_{m,n} \end{pmatrix} \tag{3.6.1}$$

Chaque variable aléatoire multivariée $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{m,k})^T$ possède une moyenne $\bar{x}_k$ et un écart type σ_{x_k}. La matrice précédente X peut être *centrée* sur son centre de gravité représenté par le vecteur $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_{1,1} - \bar{x}_1 & \ldots & x_{1,n} - \bar{x}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,1} - \bar{x}_1 & \ldots & x_{m,n} - \bar{x}_n \end{pmatrix} \tag{3.6.2}$$

ou encore *réduite :*

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \frac{x_{1,1} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} & \cdots & \frac{x_{1,n} - \bar{x}_n}{\sigma_{x_n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_{m,1} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}} & \cdots & \frac{x_{m,n} - \bar{x}_n}{\sigma_{x_n}} \end{pmatrix} \tag{3.6.3}$$

La matrice de variance-covariance D des $(x_1, \ldots, x_n)$ s'obtient alors par $D = \bar{X}\bar{X}^T$ et la matrice des corrélations C par $C = \tilde{X}\tilde{X}^T$.

L'application de la PCA à la matrice $\bar{X}$ ou $\tilde{X}$ permet de trouver un *vecteur* ou *axe* $w = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, combinaison linéaire des variables aléatoires $x_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{m,k})^T$, tel que la *variance* de X autour de cet axe soit *maximale.*

Prenons le cas où X est une matrice carrée, la matrice de variance-covariance D l'est également, on peut alors diagonaliser cette matrice sous la forme $D = V\Sigma V^T$. La projection de x^T sur V, donne des composantes $x^T V$ décorrélées de variances σ_i. Hotelling les appela «composantes principales de variance» de x^T. L'application de la PCA à la matrice $\bar{X}$ ou $\tilde{X}$ se ramène donc à un problème de *diagonalisation* des matrices D ou C.

Pour l'étude des matrices rectangulaires $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on utilise la décomposition en valeurs singulières SVD. Une matrice réelle, symétrique $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, possède m valeurs propres et m vecteurs propres orthonormés. Dans le cas d'une matrice rectangulaire $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, les *valeurs singulières* et *vecteurs singuliers* sont liés aux *valeurs propres* et *vecteurs propres* des matrices $XX^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ou $X^T X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. En effet, à partir de l'équation 3.3.1 page 72 nous pouvons écrire en utilisant la propriété d'orthogonalité $V^T V = I$:

$$XX^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U\Lambda U^T \tag{3.6.4}$$

avec $\Lambda = \Sigma\Sigma^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice diagonale contenant les *valeurs propres* $\lambda_k = \Lambda_{kk} = \sigma_k^2$ avec $\lambda_k = 0$ pour k>min(m,n) . Si de plus on compose XX^T à droite par U, on obtient :

$$(XX^T)U = U\Lambda \tag{3.6.5}$$

autrement dit

$$(XX^T)u_k = \sigma_k^2 u_k \tag{3.6.6}$$

nous en déduisons que les colonnes de U sont les *vecteurs propres* de XX^T et les valeurs propres sont les *valeurs singulières* de X élevées au carré. Une écriture similaire sur $X^T X$ donnera :

$$(X^T X)v_k = \sigma_k^2 v_k \tag{3.6.7}$$

Les *vecteurs propres* ou *vecteurs singuliers* u_k, v_k sont donc les *axes principaux* ou les *composantes principales.* La *projection* sur ces composantes de la matrice originelle $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, permet d'étudier son contenu et *révéler* ses propriétés intrinsèques. Des exemples de domaines d'application sont donnés ci-dessous.

Exemples de domaines utilisant la SVD/PCA/KLD

La section précédente nous a permis d'introduire et d'étudier les propriétés de la SVD sur des exemples concrets. Nous avons pu voir ainsi que cette décomposition pouvait s'appliquer aussi bien de façon *empirique*, ce qui fut le cas pour l'image fractale, representée par une matrice sans théorie physique sous-jacente, que de façon *«physique»* s'appliquant à des matrices issues d'un modèle physique bien défini.

De manière générale, les premières utilisations de la SVD furent plutôt empiriques. Cette décomposition servait surtout comme nouvel outil *d'analyse statistique et de compression de données*. À titre d'exemple nous pouvons citer son application dans des domaines tels que la reconnaissance de visages ou encore la compression d'images [139]. Dans le domaine de l'évaluation non destructive des matériaux, les traitements basés sur SVD donnent des résultats intéressants lors de la détection de défauts, notamment de délaminages [104, 105, 106, 1].

De nos jours, les décompositions orthogonales sont devenues d'incontournables outils, qui sont à la base des algorithmes les plus sophistiqués d'estimation de propriétés thermophysiques des matériaux, consulter par exemple [140, 1, 11, 13, 12, 2] et les références proposées dans ces documents. Les domaines faisant appel aux décompositions orthogonales sont de plus en plus nombreux, mettant en place de nouvelles *stratégies* d'estimation *quantitatives*.

3.7 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre nous avons présenté les fondements mathématiques de la *décomposition en valeurs singulières* SVD, ainsi que ses différents aspects pouvant être exploités pour l'analyse d'images. Des exemples concrets nous ont permis de comprendre son fonctionnement. Nous avons proposé notamment le traitement d'images représentant à un instant donné des champs de température séparables. Nous avons pu ainsi observer l'influence de la présence du bruit de mesure sur la décomposition en valeurs singulières du signal expérimental, tout en faisant le lien à l'analogie avec la théorie de Fourier explicitée au chapitre précédent. Nous avons par ailleurs présenté la méthode de l'analyse en composantes principales PCA et son lien avec la SVD. Des exemples de domaines utilisant ces méthodes basées sur *des transformations orthogonales* du signal expérimental ont été cités dans ce chapitre.

Troisième partie

Étude de champs de température séparables. Application à la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux et l'estimation de champs de température initiaux

Courte introduction

Cette nouvelle partie concerne les apports originaux réalisés durant cette thèse. Nous nous proposons, tout en redéveloppant les dispositifs expérimentaux et les méthodes de traitement du signal existants, *d'améliorer les approches modales*. Pour ce faire, nous partons des perspectives proposées dans les travaux précédents. À savoir, que pour pallier au manque de sensibilité local aux paramètres estimés, il est nécessaire d'avoir de forts gradients de température partout sur l'échantillon étudié. Ce qui par exemple peut être obtenu à l'aide de *diodes lasers*, permettant d'exciter le matériau étudié par des *impulsions spatio-temporelles*. Outre leurs caractéristiques expérimentales intéressantes, les *points sources impulsionnels* offrent de multiples avantages analytiques, dont la *séparabilité* que nous allons exploiter dans nos développements.

Chapitre 4

Les développements analytiques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord introduire les modèles de diffusion utilisés et expliciter les conditions assurant la séparabilité du champ de température suivant les variables spatiales. Nous traiterons la solution analytique de la réponse impulsionnelle sur un milieu semi-infini et nous exposerons les multiples avantages de la séparabilité de cette solution. Nous présenterons également le dispositif expérimental servant à la validation de la méthode développée dans ce chapitre. Un bref rappel de l'approche classique basée sur la SVD nous permettra de bien expliquer les principales différences proposées par la nouvelle méthode que nous avons conçue, basée sur une double décomposition en valeurs singulières, notée : ${}^2SVD_{(x,y),t}$. Une fois le principe de cette nouvelle méthode introduit, nous allons illustrer son fonctionnement sur un cas concret. L'algorithme complet d'estimation de profils de diffusivités longitudinales sera ensuite exposé.

4.2 Conduction thermique dans les solides anisotropes

Il existe de nombreux matériaux naturels ou synthétiques dans lesquels la conductivité thermique dépend de la direction de diffusion [141, Chapitre 15]. Les matériaux composites au sens large, sont anisotropes de part leur nature. On doit donc utiliser le *tenseur complet* des conductivités thermiques. L'équation de la chaleur écrite pour l'étude des matériaux anisotropes comporte alors des dérivées croisées en espace, ce qui rend l'étude compliquée. Dans le cas de matériaux *orthotropes* et selon les axes principaux d'anisotropie, ces dérivées s'annulent et l'étude en est grandement simplifiée.

Les matériaux composites présentent des inhomogénéités à l'echelle macroscopique, mais les conséquences sur la diffusion thermique ne sont pas évidentes à définir. Les *techniques d'homogénéisation* permettent de modéliser ces matériaux comme étant homogènes. Les Éléments de Volume Représentatifs ou «EVR» sont définis de telle sorte que les hétérogénéités locales n'aient pas de conséquences significatives à notre échelle d'observation. Les lecteurs peuvent consulter les travaux récents de Thomas et Coll. [59] très intéressants à ce sujet. Notre

champ d'étude se limitera aux *matériaux orthotropes*.

4.3 Solutions aux problèmes multidimensionnels homogènes

Dans un système de coordonnées rectangulaires, la solution au problème multidimensionnel homogène en conduction thermique $T(x, y, z, t)$, peut très simplement s'écrire comme le produit de solutions unidimensionnelles $T(x, y, z, t) = T_1(x, t) \cdot T_2(y, t) \cdot T_3(z, t)$ si et seulement si, le *champ de température initial* dans le milieu, s'exprime comme *le produit de fonctions* chacune dépendante d'une seule variable spatiale [141, Chapitre 2, Section 2-10], [3] et s'il n'y a pas de source interne au cours du temps. Par exemple, pour un problème 3D, le champ de température initial devrait s'écrire comme le produit : $F(x, y, z) = F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z)$.

Le cas d'une excitation thermique uniforme vérifie cette propriété : $T(x, y, t = 0) = T_0$ qui peut aussi s'écrire comme $T(x, y, t = 0) = T_1(x, t = 0) \cdot T_2(y, t = 0)$ avec $T_1(x, t = 0) = 1$ et $T_2(y, t = 0) = T_0$. Le *point source instantané*, correspondant expérimentalement à une impulsion laser, peut être modélisé par un spot parabolique simulant une excitation gaussienne. De par sa définition il est à variable séparable en espace, ce qui le rend très commode à utiliser.

On se propose à présent d'étudier un exemple concret pour se fixer les idées. De plus, cet exemple simple, facilitera la compréhension de la démarche employée dans l*a double décomposition en valeurs singulières* : ${}^2SVD_{(x,y),t}$. Cet exemple ainsi que d'autres développements dont nous servirons, sont extraits de l'ouvrage de Battaglia [142, Section 1.8.8].

Soit un problème de diffusion transitoire dans un milieu bidimensionnel représenté en Figure 4.3.1 page suivante.

Le transfert de chaleur dans le milieu est décrit par les équations comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = a\left(\dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}\right), & x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ t > 0 \\ -\lambda \dfrac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} = hT(x,y,t), & x = x_1,\ x = x_2,\ t > 0 \\ -\lambda \dfrac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} = hT(x,y,t), & y = y_1,\ y = y_2,\ t > 0 \\ T(x,y,t) = T_0, & x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ t = 0 \end{cases} \tag{4.3.1}$$

On note λ la conductivité thermique du milieu, a sa diffusivité et h le coefficient de convection. On se propose de montrer que la solution à ce problème 2D peut s'écrire comme le produit de deux fonctions : $T(x, y, t) = T_1(x, t) \cdot T_2(y, t)$.

Le champ de température initial est uniforme et est donc séparable. Si $T_1(x, t)$ et $T_2(y, t)$ sont respectivement solutions des deux problèmes homogènes suivants :

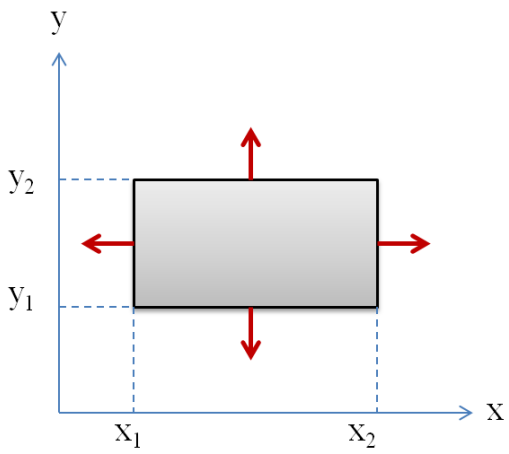


FIGURE 4.3.1: Diffusion transitoire dans un milieu 2D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2} = 0, & x_0 < x < x_1,\ t > 0 \\ -\lambda\dfrac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} = hT_1(x,t), & x = x_0,\ x = x_1,\ t > 0 \\ T_1(x,t) = T_{10}, & x_0 \leq x \leq x_1,\ t = 0 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_2(y,t)}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 T_2(y,t)}{\partial y^2} = 0, & y_0 < y < y_1,\ t > 0 \\ -\lambda\dfrac{\partial T_2(y,t)}{\partial y} = hT_2(y,t), & y = y_0,\ y = y_1,\ t > 0 \\ T_2(y,t) = T_{20}, & y_0 \leq y \leq y_1,\ t = 0 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

alors la solution au problème 2D est le produit des solutions de chaque problème 1D pris séparément : $T(x,y,t) = T_1(x,t) \cdot T_2(y,t)$.

Si à présent on remplace cette dernière expression dans l'équation (4.3.1), on obtient alors :

$$\begin{cases} T_2\dfrac{\partial T_1}{\partial t} + T_1\dfrac{\partial T_2}{\partial t} = a\left(T_2\dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + T_1\dfrac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}\right), & x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ t > 0 \\ -\lambda T_2\dfrac{\partial T_1}{\partial x} = hT_2T_1, & x = x_1,\ x = x_2,\ t > 0 \\ -\lambda T_1\dfrac{\partial T_2}{\partial y} = hT_2T_1, & y = y_1,\ y = y_2,\ t > 0 \\ T_{10}T_{20} = T_0, & x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ t = 0 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

Soit finalement :

$$\begin{cases} T_2\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right) + T_1\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}\right) = 0, & x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ t > 0 \\ -\lambda\dfrac{\partial T_1}{\partial x} = hT_1 & x = x_1,\ x = x_2,\ t > 0 \\ -\lambda\dfrac{\partial T_2}{\partial y} = hT_2 & y = y_1,\ y = y_2,\ t > 0 \\ T_{10}T_{20} = T_0, & x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ t = 0 \end{cases} \tag{4.3.5}$$

Les équations (4.3.2) et (4.3.3) vérifient bien le problème (4.3.5). Ce résultat peut facilement être généralisé à un problème 3D avec des conditions aux limites homogènes.

4.3.1 Modèle de transfert thermique

La Figure 4.3.2 représente le dispositif expérimental. L'excitation thermique par une impulsion laser est associé à une caméra infrarouge. Le faisceau laser est focalisé et est réfléchi sur un miroir dichroïque, réfléchissant dans le domaine visible et semi-transparent dans le domaine infrarouge. Il permet une excitation thermique normale à la surface de l'échantillon et la possibilité de mettre en place un moyen de focalisation du faisceau sur le chemin optique. Après une impulsion laser, la caméra enregistre l'évolution du champ de température à travers le miroir dichroïque. Les images infrarouges obtenues sont ensuite traitées pour estimer les profils de diffusivités thermiques longitudinales du matériau. Le pulse laser permet d'exciter le matériau localement ; la caméra infrarouge couplée avec l'objectif de microscope permet d'atteindre des résolutions spatiales élevées, ce qui offre de nouvelles possibilités de caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux aux petites échelles.

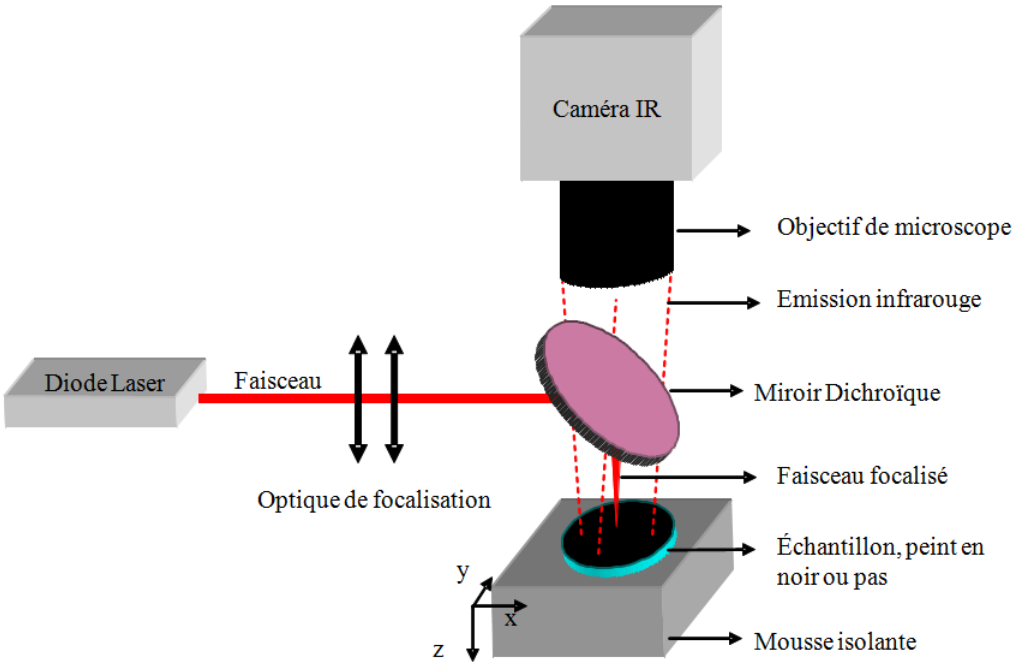


FIGURE 4.3.2: Schéma du dispositif d'excitation par impulsion laser

4.3.2 Solution du point source impulsionnel immobile

Soient (x, y, z) les coordonnées cartésiennes. On considère un terme source local Q, libérant instantanément toute sa chaleur à l'instant initial au point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) dans un milieu infini suivant (Ox) et (Oy) et semi-infini suivant (Oz), représenté Figure 4.3.3.

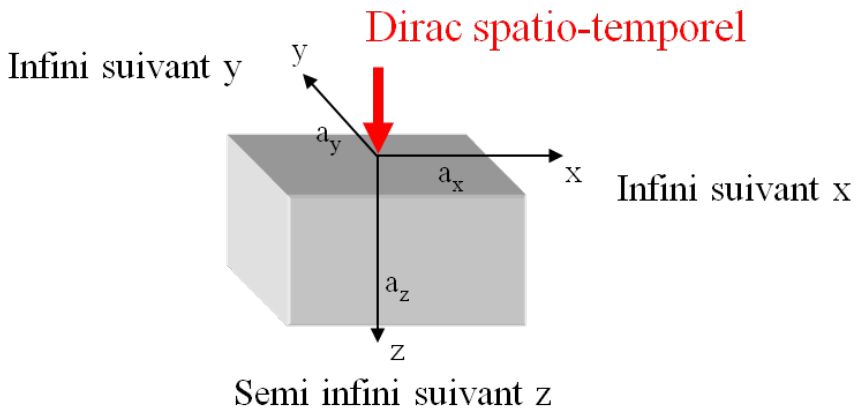


FIGURE 4.3.3: Milieu orthotrope infini selon x et y et semi infini selon z

On se propose de déterminer la réponse impulsionnelle en tout point du milieu au cours du temps, correspondant à un Dirac spatio-temporel. La source de chaleur étant localisée à l'origine $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

L'équation de la chaleur décrivant la diffusion dans le milieu *orthotrope* suivant les axes principaux d'anisotropie s'écrit alors comme suit :

$$\left\{\begin{array}{c} a_x \dfrac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2} + a_y \dfrac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2} + a_z \dfrac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2} = \dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} \\ T(x,y,z,t=0) = 0 \\ -\lambda_x \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x\to-\infty} = 0 \ , \ -\lambda_x \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{x\to+\infty} = 0 \\ -\lambda_y \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y\to-\infty} = 0 \ , \ -\lambda_y \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{y\to+\infty} = 0 \\ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi_0 \cdot \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t) \ , \ -\lambda_z \left.\dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{z\to+\infty} = 0 \\ \varphi_0 \, en \, (J) \end{array}\right. \tag{4.3.6}$$

La solution du système (4.3.6) pour un milieu *semi-infini* suivant les trois directions s'écrit après une transformation de Laplace en temps et une double transformation de Fourier en espace, appliquées au champ de température $T(x, y, z, t)$ [3, 96] :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \int_{x=0}^{x\to+\infty} \int_{y=0}^{y\to+\infty} \int_{t=0}^{t\to+\infty} T(x,y,z,t)\, cos(\alpha x)\, cos(\beta x)\, exp(-pt)\, dxdydt \tag{4.3.7}$$

Suite à ces transformations, le problème (4.3.6) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta(\alpha,\beta,z,p)}{\partial z^2} - \left(\frac{a_x}{a_z}\alpha^2 + \frac{a_y}{a_z}\beta^2 + \frac{p}{a_z}\right)\cdot\theta(\alpha,\beta,z,p) = 0 \\ -\lambda_z \left.\dfrac{d\theta(\alpha,\beta,z,p)}{\partial z}\right|_{z=0} = \varphi_0 \ , \ -\lambda_z \left.\dfrac{d\theta(\alpha,\beta,z,p)}{\partial z}\right|_{z\to+\infty} = 0 \\ avec\ Q = \int_{x=0}^{x\to+\infty}\int_{y=0}^{y\to+\infty}\int_{t=0}^{t\to+\infty}\varphi_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)\,dxdydt,\ en\,(J) \end{cases} \tag{4.3.8}$$

La solution du système précédent (4.3.8) compte tenu des conditions aux limites s'écrit :

$$\theta(\alpha,\beta,z,p) = \frac{Q}{\lambda_z\sqrt{\frac{a_x}{a_z}\alpha^2 + \frac{a_y}{a_z}\beta^2 + \frac{p}{a_z}}}\exp\left(-z\sqrt{\frac{a_x}{a_z}\alpha^2 + \frac{a_y}{a_z}\beta^2 + \frac{p}{a_z}}\right) \tag{4.3.9}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse avec la propriété :

$$L\left[f(k\cdot t)\right] = \frac{F(\frac{p}{k})}{k} avec\ k = a_z$$

la solution précédente devient :

$$\theta(\alpha,\beta,z,p) = \frac{Q}{\rho C_p}L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-z\sqrt{p}\right)\right]\exp\left(-a_x\alpha^2 t\right)\exp\left(-a_y\beta^2 t\right) \tag{4.3.10}$$

Puis nous utilisons la propriété de la transformée de Laplace :

$$L^{-1}\left[\tfrac{1}{\sqrt{p}}\exp\left(-z\sqrt{p}\right)\right] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\tfrac{z^2}{4t}\right)\right]$$

pour arriver à l'expression suivante :

$$\theta(\alpha,\beta,z,p) = \frac{Q}{\rho C_p\sqrt{\pi a_z t}}\exp\left(-\tfrac{z^2}{4a_z t}\right)\exp\left(-a_x\alpha^2 t\right)\exp\left(-a_y\beta^2 t\right) \tag{4.3.11}$$

Finalement, en appliquant une double transformation de Fourier inverse sur l'équation précédente avec la propriété :

$$Fo^{-1}\left[\exp\left(-k\alpha^2\right)\right] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{\pi k}}\exp\left(-\tfrac{x^2}{4k}\right)\right]\ avec\ k = a_x t\ et\ a_y t$$

nous obtenons l'expression de la solution générale du problème (4.3.6) dans le cas d'un matériau orthotrope suivant les axes principaux d'anisotropie :

$$T(x,y,z,t) = \frac{Q}{\rho C_p}\cdot\frac{\exp(-\frac{x^2}{4a_x t})}{\sqrt{\pi a_x t}}\cdot\frac{\exp(-\frac{y^2}{4a_y t})}{\sqrt{\pi a_y t}}\cdot\frac{\exp(-\frac{z^2}{4a_z t})}{\sqrt{\pi a_z t}} \tag{4.3.12}$$

Cette solution devient pour le cas d'un milieu *infini* suivant (Ox) et (Oy) et *semi-infini* suivant (Oz) :

$$T(x,y,z,t) = \frac{Q}{\rho C_p}\cdot\frac{\exp(-\frac{x^2}{4a_x t})}{2\sqrt{\pi a_x t}}\cdot\frac{\exp(-\frac{y^2}{4a_y t})}{2\sqrt{\pi a_y t}}\cdot\frac{\exp(-\frac{z^2}{4a_z t})}{\sqrt{\pi a_z t}} \tag{4.3.13}$$

On remarquera que le milieu étant *semi-infini* suivant (Oz), la relation est double par rapport aux expressions suivant (Ox) et (Oy).

Comme nous pouvons le constater, le champ de température $T(x, y, z, t)$ peut aussi s'écrire comme le produit $T(x, y, z, t) = T_x(x, t) \cdot T_y(y, t) \cdot T_z(z, t)$ et est donc complètement séparable.

Cette solution séparable s'écrit en $z = 0$:

$$T(x, y, z = 0, t) = \frac{Q}{\rho C_p} \cdot \frac{\exp(-\frac{x^2}{4a_x t})}{2\sqrt{\pi a_x t}} \cdot \frac{\exp(-\frac{y^2}{4a_y t})}{2\sqrt{\pi a_y t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi a_z t}} \tag{4.3.14}$$

autrement dit :

$$\begin{aligned} T(x, y, z = 0, t) &= \frac{Q}{\rho C_p} \cdot T_{x,y}(x, y, t) \cdot T_z(z = 0, t) = \frac{Q}{\rho C_p} \cdot T_{x,y}(x, y, t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi a_z t}} \\ &= \frac{Q}{\rho C_p \sqrt{\pi a_z}} \cdot T_{x,y}(x, y, t) \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \propto T_{x,y}(x, y, t) \cdot \frac{C}{\sqrt{t}} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

dans l'équation précédente Fudym et Coll. [9] ont proposé d'introduire une constante de proportionalité $C \in \mathbb{R}$, qui peut être considérée à la place du facteur de proportionalité exact $Q/\rho C_p \sqrt{\pi a_z}$, comme les mesures de température issues da la caméra infrarouge ne sont jamais absolues (nécessité de connaitre l'émissivité, calibration de la caméra etc). Par la suite cette constante C peut également être omise, si elle n'intervient pas dans la procédure d'estimation.

Nous pourrons alors écrire que :

$$\begin{aligned} T_{x,y}(x, y, t) &\propto T(x, y, z = 0, t) \cdot \sqrt{t} \\ \text{et définir} : \tilde{T}(x, y, t) &= T(x, y, z = 0, t) \cdot \sqrt{t} \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Dans le cas *de champs de température séparables*, une approche plus élégante est possible grâce aux transformations dans l'espace de Fourier, cette démarche est explicitée dans le document [18] présenté en *Annexe I*. Nous allons donc seulement énoncer ici le résultat.

Nous prenons la moyenne spatiale des images à chaque instant $\langle T(z = 0, t) \rangle_{x,y}$ et nous divisons la réponse 3D, $T(x, y, z = 0, t)$, par cette moyenne à chaque instant :

$$\begin{aligned} \langle T(z = 0, t) \rangle_{x,y} &= \frac{1}{l_x \cdot l_y} \int_0^{l_y} \int_0^{l_x} T(x, y, z = 0, t) dx dy = \frac{Q}{\rho C_p \sqrt{\pi a_z t}} \\ \tilde{T}(x, y, t) &= \frac{T(x, y, z = 0, t)}{\langle T(z = 0, t) \rangle_{x,y}} \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

(l_x, l_y) étant les dimensions longitudinales de la scène thermique enregistrée par la caméra infrarouge. Les simulations numériques et la validation expérimentale de cette réduction du problème 3D en 2D, peuvent aussi être trouvées dans le document [18], disponible en *Annexe I* de ce manuscrit.

Le problème 3D initial (4.3.6) se ramène donc à l'étude du problème 2D suivant :

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}(x,y,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \dfrac{\partial \tilde{T}(x,y,t)}{\partial x}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \dfrac{\partial \tilde{T}(x,y,t)}{\partial y}) \\ \text{Pour } -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial s}\Big|_{s=x,y} = 0 \text{ pour } (x,y) \to \pm\infty \\ \tilde{T} = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.3.18}$$

Nous exploitons une fois de plus la séparabilité et réécrivons le système précédent (4.3.18) de manière à scinder le problème 2D en l'étude de deux problèmes 1D.

En effet, le champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ peut s'écrire $\tilde{T}(x,y,t) = \tilde{T}_x(x,t) \cdot \tilde{T}_y(y,t)$ avec $\tilde{T}_x(x,t)$ et $\tilde{T}_y(y,t)$ vérifiant respectivement les problèmes 1D suivants :

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}_x(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda_x \dfrac{\partial \tilde{T}_x(x,t)}{\partial x}) \\ \text{Pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{T}_x}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \to \pm\infty \\ \tilde{T}_x = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.3.19}$$

et

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}_y(y,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\lambda_y \dfrac{\partial \tilde{T}_y(y,t)}{\partial y}) \\ \text{Pour } -\infty < y < \infty,\ t > 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{T}_y}{\partial y} = 0 \text{ pour } y \to \pm\infty \\ \tilde{T}_y = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.3.20}$$

4.4 La double décomposition en valeurs singulières : ${}^2SVD_{(x,y),t}$

4.4.1 Approche modale «classique» basée sur la SVD

L'approche que nous allons brièvement rappeler nous permettra de bien comprendre la différence avec la nouvelle approche proposée dans ces travaux, à savoir la ${}^2SVD_{(x,y),t}$. L'approche classique est utilisée dans le domaine du *contrôle non destructif* des matériaux, notamment pour la détection des délaminages ou des inclusions dans les structures composites [104, 105, 106], mais également pour la cartographie des variations des diffusivités transverses autour d'une valeur nominale [1, 2, Chapitre 2, Section 3].

Nous reprenons le formalisme utilisé par Bamford et Coll. [2, Chapitre 2, Section 3]. Soit donc, une série d'images infrarouges représentant des champs de température qui dépendent des variables d'espace (x,y) et du temps t. Cette série d'images $T(x,y,t)$ peut être transformée

en une unique image $\mathbf{T}$. Tout d'abord la série est discrétisée de manière suivante :

$$T(i,j,k) = \frac{1}{(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t)} \int_{x=(i-1)\cdot l/N}^{i\cdot l/N} \int_{y=(j-1)\cdot L/M}^{j\cdot L/M} \int_{t=(k-1)\cdot t_f/P}^{k\cdot t_f/P} T(x,y,t)\cdot dt \cdot dy \cdot dx \qquad (4.4.1)$$
$$T = [T_{i,j,k}]_{i\in[1,N],j\in[1,M],k\in[1,P]}$$

(l, L, t_f) sont les longueur, largeur et durée de la série d'images infrarouges. (N, M, P) sont les nombres de points de discrétisation suivant chaque dimension du champ de température $T(x, y, t)$.

Les données sont ensuite réarrangées suivant la formule :

$$\mathbf{T}(i\cdot(M-1)+j,k) = T(i,j,k)_{i\in[1,N],j\in[1,M],k\in[1,P]} \qquad (4.4.2)$$

ce qui peut être schématisé sur la Figure 4.4.1.

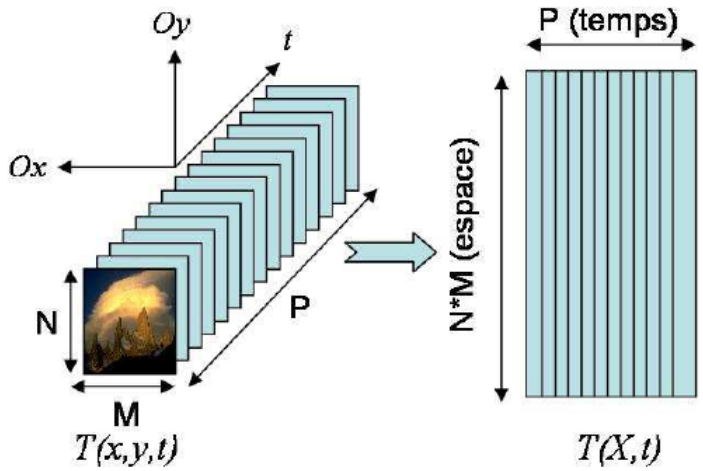


FIGURE 4.4.1: Réarrangement d'une série d'images en une matrice $\mathbf{T}$. Schéma extrait de [2, Chapitre 2, Section 3]

La seconde étape de cette approche classique consiste à décomposer en valeurs singulières la matrice $T(X, t)$ obtenue :

$$T(X,t) \overset{SVD}{=} \sum_{k=1}^{\min(N\cdot M,P)} \gamma_k \cdot U_k(X) \cdot V_k(t)^T \qquad (4.4.3)$$

où γ_k représent les valeurs singulières, les U_k et V_k les vecteurs singuliers ou modes, correspondant respectivement aux informations spatiales et temporelles. La SVD permet donc de séparer l'espace et le temps. La relation (4.4.3) peut également être tronquée :

$$T(X,t) \overset{SVD}{\approx} \sum_{k=1}^{k_0 \ll \min(N\cdot M,P)} \gamma_k \cdot U_k(X) \cdot V_k(t)^T \qquad (4.4.4)$$

De cette manière la SVD permet alors d'effectuer une *compression* du signal. Chaque mode issu de la décomposition peut être identifié à une représentation du signal à une fréquence donnée. Par conséquent, lorsque le bruit de mesure peut être considéré comme étant «haute

fréquence», le fait de tronquer la somme (4.4.4), diminue l'influence du bruit sur le signal recomposé. Consultez *la Partie sur les outils mathématiques* de ce manuscrit pour plus de détails à ce sujet, en particulier le Corollaire 1 page 68, le Lemme 1 page 68.

L'étude de chaque mode spatial ou temporel permet d'analyser le contenu du signal brut et ainsi accèder à des informations pertinentes. La recomposition de modes spatiaux $U_k(x, y)$ à partir de $U_k(X)$ permet par exemple la détection de délaminages dans les structures composites [104, 105, 106]. La procédé de recomposition est le procédé inverse de celui présenté en (4.4.2). Il est illustré sur la Figure 4.4.2.

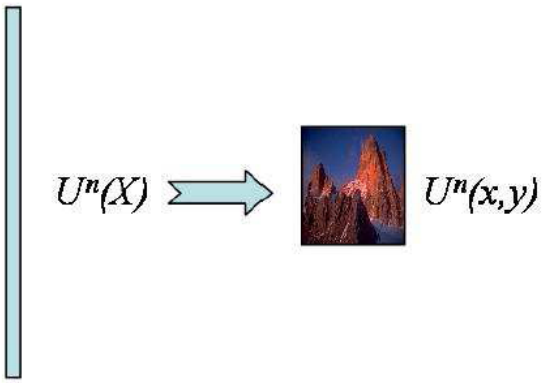


FIGURE 4.4.2: Recomposition d'un mode spatial $U_k(x, y)$ à partir du vecteur singulier $U_k(X)$. Schéma extrait de [2, Chapitre 2, Section 3]

Cette méthode de traitement permet par ailleurs d'effectuer une étude *quantitative* ou *semi-quantitative,* à savoir qu'elle offre par exemple la possibilité de cartographier des variations relatives de diffusivités transverses autour d'une valeur nominale [1, 2, Chapitre 2, Section 3].

Cependant cette approche classique comporte certaines limites. La manière de transformer la série d'images $T(x, y, t)$ en une unique image $\mathbf{T}$ a été héritée du domaine du contrôle non destructif des matériaux, où l'on passe donc de la configuration (x, y, t) en (X, t), i.e. chaque image (x, y) devient un vecteur colonne (X). Cela revient à étudier l'évolution temporelle de chaque point spatial ou pixel *indépendamment.* Dans les cas où la diffusion s'effectue uniquement dans le sens de l'épaisseur, suite à une excitation thermique uniforme, cette approche reste valide et intéressante. Mais dans les cas de diffusion bi ou tridimensionnelle, la diffusion dans le plan ne serait plus prise en compte par cette méthode de traitement du signal brut.

Pour remédier à cela, nous proposons d'exploiter *les informations spatiales contenues dans chaque image,* issue des séquences d'images infrarouges. Pour ce faire, une nouvelle approche basée sur *une double décomposition SVD* a été mise au point. Les développements de cette nouvelle méthode font l'objet de la section suivante.

4.4.2 Une nouvelle approche basée sur la double décomposition SVD

La série des images infrarouges $\tilde{T}(x,y,t)$ que nous traiterons ici est celle issue de la réduction du problème 3D en 2D. Le principe de cette nouvelle méthode qui s'articule en deux étapes s'expose comme suit :

1. Chaque image $\tilde{T}(x,y,t_k)$ est transformée par la SVD une première fois, ce qui permet de séparer les variables spatiales x et y à l'instant t_k cette opération est notée ${}^1SVD_{(x,y)}$:

$$\tilde{T}(x,y,t_k) \overset{{}^1SVD_{(x,y)}}{\approx} \sum_{n=1}^{n_0} \gamma_n(t_k) \cdot U_n(x,t_k) \cdot V_n(y,t_k)^T \tag{4.4.5}$$

   cela marche d'autant mieux que le signal $\tilde{T}(x,y,t)$ est séparable, voir les Sections 4.3 page 96 et 4.3.2 page 99. Cette procédure est réitérée pour tous les pas de temps t_k, $k \in [1,P]$. Nous obtenons alors $\tilde{U}_n(x,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot U_n(x,t)$ qui représente $\tilde{T}_x(x,t)$ dans le premier espace transformé et $\tilde{V}_n(y,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot V_n(y,t)$ qui représente $\tilde{T}_y(y,t)$ dans le premier espace transformé. Nous pouvons vérifier numériquement et expérimentalement que nous avons bien $\dfrac{\tilde{U}_n(x,t)}{\left\|\tilde{U}_n(x,t)\right\|_2} = \dfrac{\tilde{T}_x(x,t)}{\left\|\tilde{T}_x(x,t)\right\|_2}$ et $\dfrac{\tilde{V}_n(y,t)}{\left\|\tilde{V}_n(y,t)\right\|_2} = \dfrac{\tilde{T}_y(y,t)}{\left\|\tilde{T}_y(y,t)\right\|_2}$. $\tilde{U}_n(x,t)$ et $\tilde{V}_n(y,t)$ vérifient donc respectivement les problèmes (4.3.19) et (4.3.20). Pour le cas où $\tilde{T}(x,y,t)$ est complètement séparable, la somme précédente (4.4.5) ne possède qu'un terme, i.e. $n_0 = n = 1$. Consulter la *Discussion autour du Théorème d'approximation* 6 page 77, ainsi que la discussion sur *Le lien avec le rang numérique* r_ϵ 3.5 page 79 pour plus de détails. $n_0 = n$ peut être considéré comme un *premier paramètre de filtrage*.

2. La seconde étape consiste à appliquer une nouvelle fois la SVD cette fois-ci sur $\tilde{U}_n(x,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot U_n(x,t)$ et sur $\tilde{V}_n(y,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot V_n(y,t)$ séparément, pour un n donné, $n = n_0 = 1$ pour le cas séparable :

$$\tilde{U}_n(x,t) \overset{{}^1SVD_{(x,t)}}{\approx} \sum_{r=1}^{r_0} \eta^x_{n,r} \cdot U^x_{n,r}(x) \cdot V^x_{n,r}(t)^T \tag{4.4.6}$$

$$\tilde{V}_n(y,t) \overset{{}^1SVD_{(y,t)}}{\approx} \sum_{r=1}^{r_0} \eta^y_{n,r} \cdot U^y_{n,r}(y) \cdot V^y_{n,r}(t)^T \tag{4.4.7}$$

   cette seconde décomposition permet tout d'abord de *séparer l'epace et le temps*, mais également permet de *filtrer le bruit* contenu dans les $\tilde{U}_n(x,t)$ et $\tilde{V}_n(y,t)$, *le second paramètre de filtrage* étant r_0. Ces opérations sont notées ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$.

Finalement nous obtenons après les transformations successives suivantes :

$${}^1SVD_{(x,y)} + {}^1SVD_{(x,t)} + {}^1SVD_{(y,t)} \equiv {}^2SVD_{(x,y),t} \tag{4.4.8}$$

l'expression du champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ dans le second espace transformé :

$$\tilde{T}(x,y,t) \overset{{}^2SVD_{(x,y),t}}{\approx} \sum_{n=1}^{n_0} \gamma_n(t) \cdot \left[\sum_{r=1}^{r_0} \underbrace{(\eta^x_{n,r} \cdot U^x_{n,r}(x) \cdot V^x_{n,r}(t)^T)}_{U_n(x,t)} \cdot \underbrace{(\eta^y_{n,r} \cdot U^y_{n,r}(y) \cdot V^y_{n,r}(t)^T)^T}_{V_n(y,t)} \right] \tag{4.4.9}$$

Cette dernière expression pourrait être injectée dans le système 4.3.18 page 102 pour mettre en place un algorithme d'estimation des diffusivités thermiques longitudinales du matériau dans le second espace transformé. Cependant, la lourdeur évidente de l'expression (4.4.9) nous pousse à chercher une stratégie différente. Cette stratégie est possible grâce à la *séparabilité* de $\tilde{T}(x,y,t)$. À savoir que les expressions filtrées une première fois $\tilde{U}_n(x,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot U_n(x,t)$ et $\tilde{V}_n(y,t) = \sqrt{\gamma_n(t)} \cdot V_n(y,t)$ avec $(n=1)$, représentent $\tilde{T}_x(x,t)$ et $\tilde{T}_y(y,t)$ dans le premier espace transformé et peuvent donc être directement injectées dans les systèmes (4.3.19) et (4.3.20) respectivement. Nous y reviendrons un peu plus loin, voyons pour l'instant le fonctionnement de la double décomposition en valeurs singulières sur un cas concret.

4.4.3 Étude qualitative d'un cas concret, réponse au point source impulsionnel

Nous nous proposons d'appliquer la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ sur le champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$. Une approche de type «volumes finis» [103] est utilisée pour simuler l'évolution temporelle du champ de température, défini par les relations (4.3.14), (4.3.15), (4.3.16), ou (4.3.17). Ce champ sera donc issu d'une simulation numérique d'une excitation thermique par impulsion laser sur un milieu semi-infini hétérogène (de diffusivités longitudinales $a_{\mathrm{x}} = 10^{-6}$ et $a_y = 10^{-7 m^2/s}$). Le dispositif illustrant le principe de l'expérience est décrit Figure 4.3.2 page 98. Les conditions de milieu semi-infini sont vérifiées en pratique du moment où la chaleur ne diffuse pas au delà des frontières choisies, au bout du temps que l'on définit pour effectuer les simulations. Les temps caractéristiques de diffusion $\tau_x = l_x^2/a_x$, $\tau_y = l_y^2/a_y$ et $\tau_z = l_z^2/a_z$ doivent être supérieurs au temps de la simulation pour que le comportement de milieu semi-infini soit vérifié. De plus, il n'est pas nécessaire que $(l_x \times l_y)$ les dimensions longitudinales spécifiées dans le modèle, correspondent aux dimensions réelles de l'échantillon simulé ou de la scène thermique enregistrée par la caméra infrarouge. Les bords peuvent être choisis librement, tant qu'aucun flux de chaleur ne les traverse. Le champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ est corrompu par un bruit additif blanc gaussien. La Figure 4.4.3 page suivante, représente ce champ aux instant t_0 et t_f.

Nous appliquons la première décomposition en espace ${}^1SVD_{(x,y)}$ sur $\tilde{T}(x,y,t_k)$ à tous les pas de temps t_k. La décomposition de chaque image nous fournit les $U_n(x,t_k)$ et $V_n(y,t_k)$. Chaque image étant un champ de température *séparable*, nous n'avons alors, qu'une valeur singulière *dominante* $\gamma_1(t_k)$. Bien que sa valeur décroit au cours du temps, nous avons toujours $\gamma_1(t_k) \gg \gamma_{n>1}(t_k)$, voir les tracés en Figure 4.4.4 page suivante. Dans ces conditions, nous pouvons alors assimiler les modes $U_{n>1}(x,t_k)$ et $V_{n>1}(y,t_k)$ au bruit de mesure, n pouvant être vu comme un paramètre de filtrage ; consultez à ce sujet la discussion sur *Le lien avec le rang numérique* r_ϵ 3.5 page 79, ainsi que la Section 3.5 page 78. Il est important ici de remarquer que *le bruit de mesure n'est pas séparable*. La présence de multiples valeurs singulières non nulles $\gamma_{n>1}(t_k)$, en est la conséquence. Finalement, seuls les modes $U_1(x,t_k)$ et $V_1(y,t_k)$ sont à considérer, ils sont représentés en Figure 4.4.5 page 108.

Il est important de noter, que les $U_1(x,t_k)$, respectivement $V_1(y,t_k)$ peuvent changer de signe au cours du temps. Il est alors primordial de *régulariser le signe* de manière à ce que

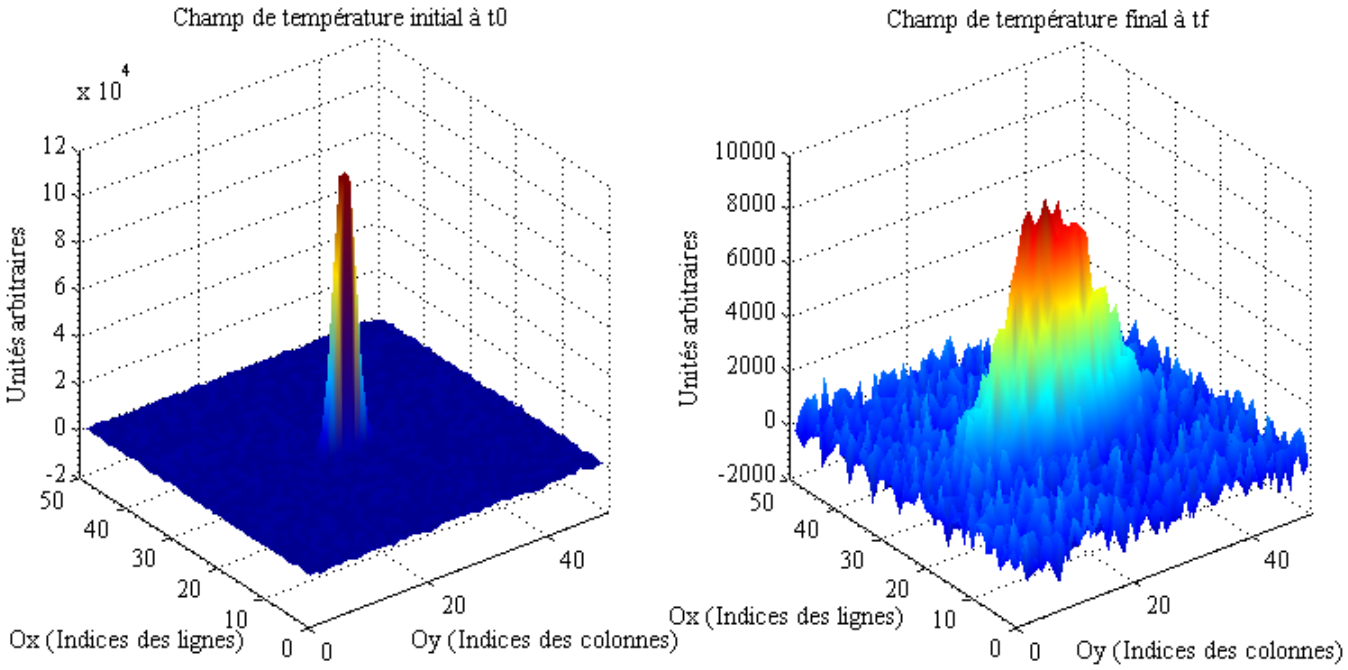


FIGURE 4.4.3: Champs de température aux instants t_0 et t_f suite à une impulsion laser sur un milieu semi-infini hétérogène (de diffusivités longitudinales $a_x \neq a_y$)

tous les termes $U_1(x, t_k)$ soient orientés dans le même sens, idem pour les termes $V_1(y, t_k)$. Ces changements de signe ou oscillations, ne sont théoriquement pas complètement expliqués dans la littérature. Des éléments de réponse peuvent être trouvés dans [117, Chapitre 1, Section 1.2.2, page 8].

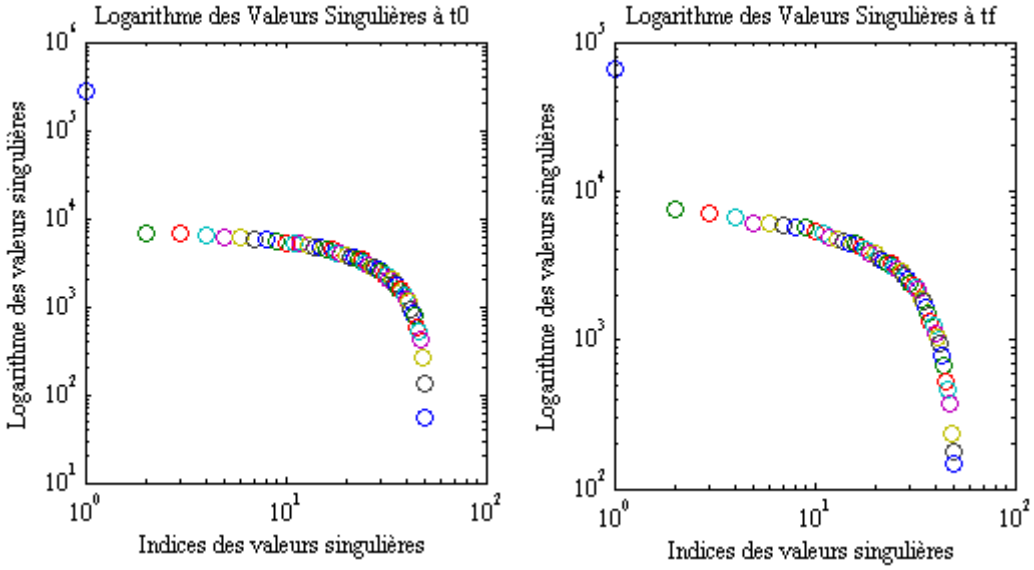


FIGURE 4.4.4: Tracé des valeurs singulières aux instants t_0 et t_f

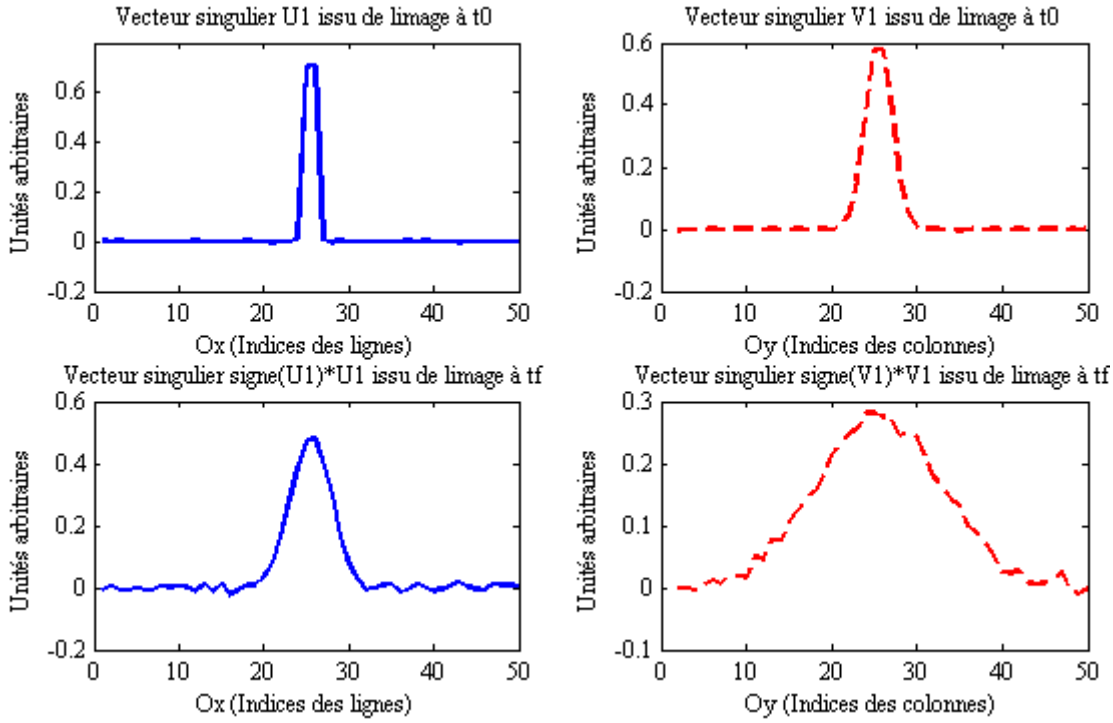


FIGURE 4.4.5: Représentation des modes $U_1(x,t_k)$ et $V_1(y,t_k)$ aux instants t_0 et t_f suite à la première décomposition en espace : ${}^1SVD_{(x,y)}$ sur $\tilde{T}(x,y,t_k)$

Cette même décomposition est appliquée sur tous les pas de temps t_k de manière à obtenir les $U_1(x,t)$ et $V_1(y,t)$, puis $\tilde{U}_1(x,t) = \sqrt{\gamma_1(t)} \cdot U_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t) = \sqrt{\gamma_1(t)} \cdot V_1(y,t)$. Ils sont représentés Figure 4.4.6 et Figure 4.4.7 page suivante respectivement.

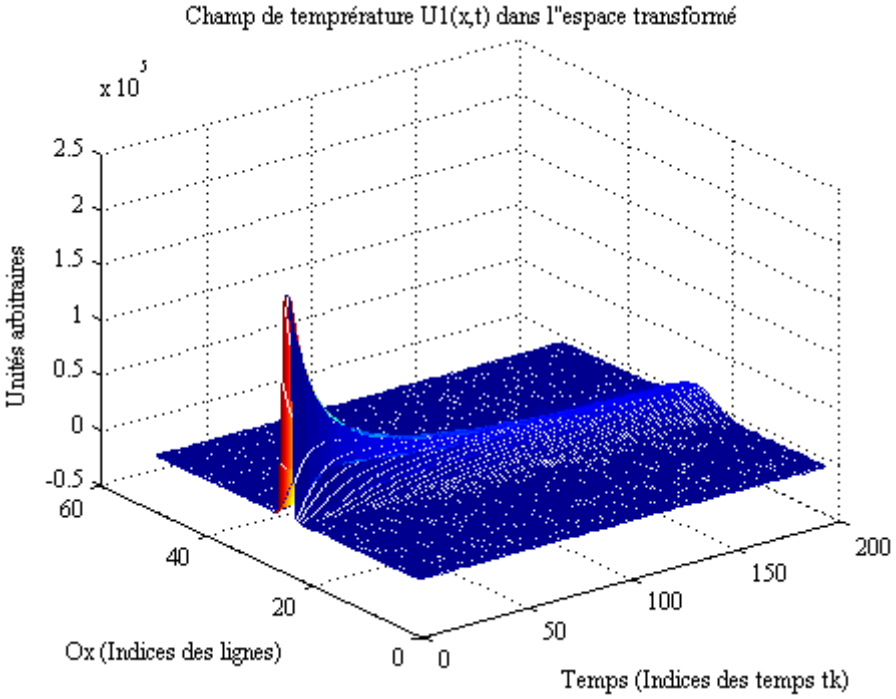


FIGURE 4.4.6: Champ de température $\tilde{U}_1(x,t) = \sqrt{\gamma_1(t)} \cdot U_1(x,t)$ dans l'espace transformé

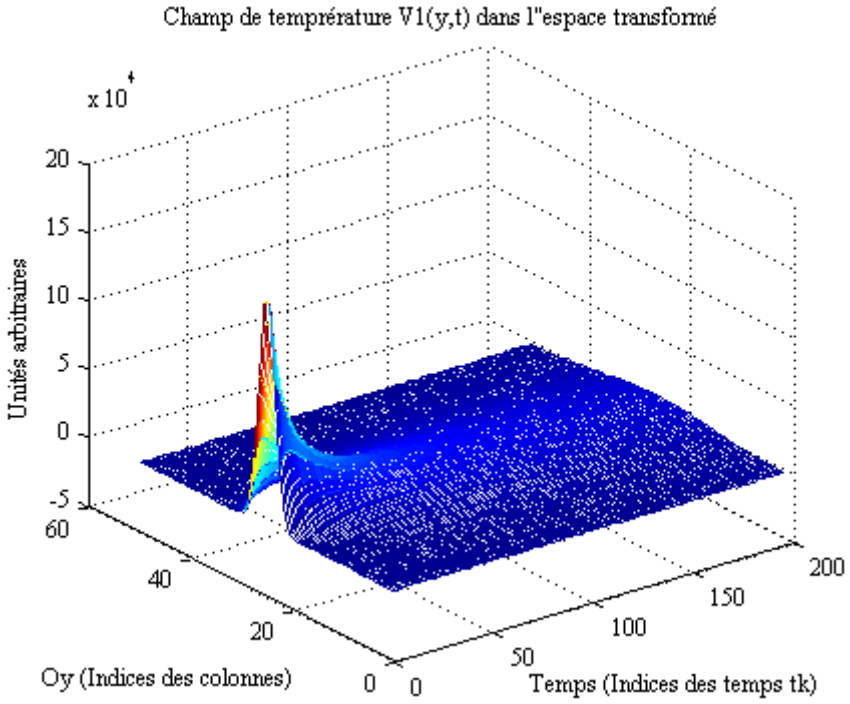


FIGURE 4.4.7: Champ de température $\tilde{V}_1(y,t) = \sqrt{\gamma_1(t)} \cdot V_1(y,t)$ dans l'espace transformé

La seconde étape consiste à effectuer *une séparation espace-temps*. Les champs de température précédents après avoir subi un premier filtrage, vont être décomposés respectivement par ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$. Une séparation espace-temps est ainsi réalisée à partir des équations (4.4.6) et (4.4.7). De plus, un deuxième filtrage avec le paramètre r_0 est opéré sur les données permettant la maîtrise du bruit de mesure. Si l'on trace les valeurs singulières $\eta^x_{1,r}$ et $\eta^y_{1,r}$, obtenues respectivement après la seconde décomposition, nous pouvons alors constater qu'il y a plusieurs valeurs singulières dominantes. Nous pouvons alors à partir de l'expression (3.5.3), calculer le pourcentage du signal initial contenu dans les sommes tronquées (4.4.6) et (4.4.7) pour un r_0 donné. Les expressions suivantes sont alors calculées :

$$\left[1 - \frac{\| \tilde{U}_1(x,t) - \sum_{r=1}^{r_0} \eta^x_{1,r} \cdot U^x_{1,r}(x) \cdot V^x_{1,r}(t)^T \|_2}{\| \tilde{U}_1(x,t) \|_2}\right] \times 100 \tag{4.4.10}$$

$$\left[1 - \frac{\| \tilde{V}_1(y,t) - \sum_{r=1}^{r_0} \eta^y_{1,r} \cdot U^y_{1,r}(y) \cdot V^y_{1,r}(t)^T \|_2}{\| \tilde{V}_1(y,t) \|_2}\right] \times 100 \tag{4.4.11}$$

la Figure 4.4.8 page suivante illustre les résultats obtenus.

Nous pouvons alors en conclure que seuls les 5 à 6 premiers termes de la somme, i.e. $r_0 = 5,6$ ou encore les 5 à 6 premières valeurs singulières, suffisent pour obtenir 99% du signal originel. Cinq termes sur cinquante suffisent, cela permet donc d'effectuer une compression de 90% du signal. Les autres termes étant liés au bruit sont simplement filtrés. La Figure 4.4.9 page suivante ainsi que la Figure 4.4.10 page 111, représentent respectivement les $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ filtrés avec $r_0 = 5$. Les $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ initiaux sont illustrés en Figure 4.4.6 page précédente et Figure 4.4.7 respectivement.

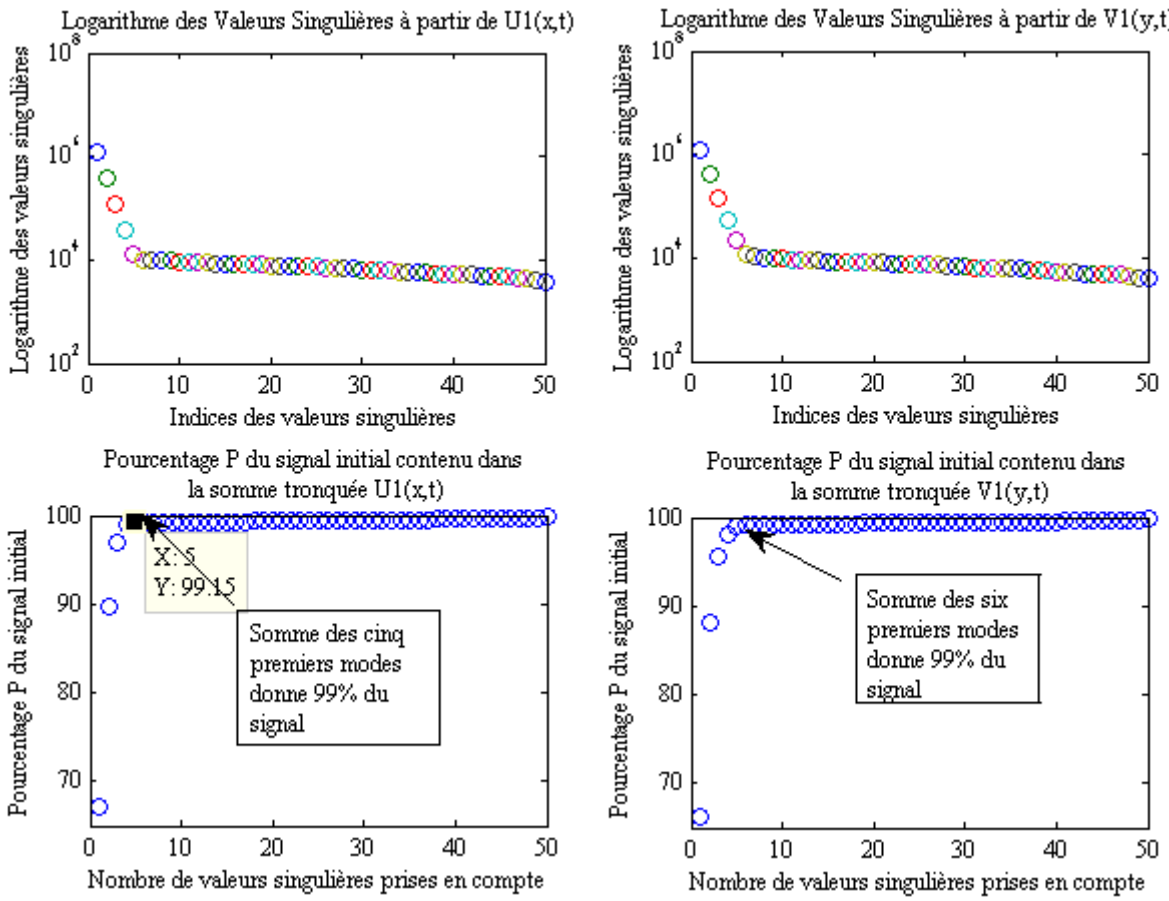


FIGURE 4.4.8: Tracé des valeurs singulières $\eta^x_{1,r}$ et $\eta^y_{1,r}$ ainsi que du pourcentage du signal initial contenu dans les sommes tronquées $\sum_{r=1}^{r_0} \eta^x_{1,r} \cdot U^x_{1,r}(x) \cdot V^x_{1,r}(t)^T$ et $\sum_{r=1}^{r_0} \eta^y_{1,r} \cdot U^y_{1,r}(y) \cdot V^y_{1,r}(t)^T$

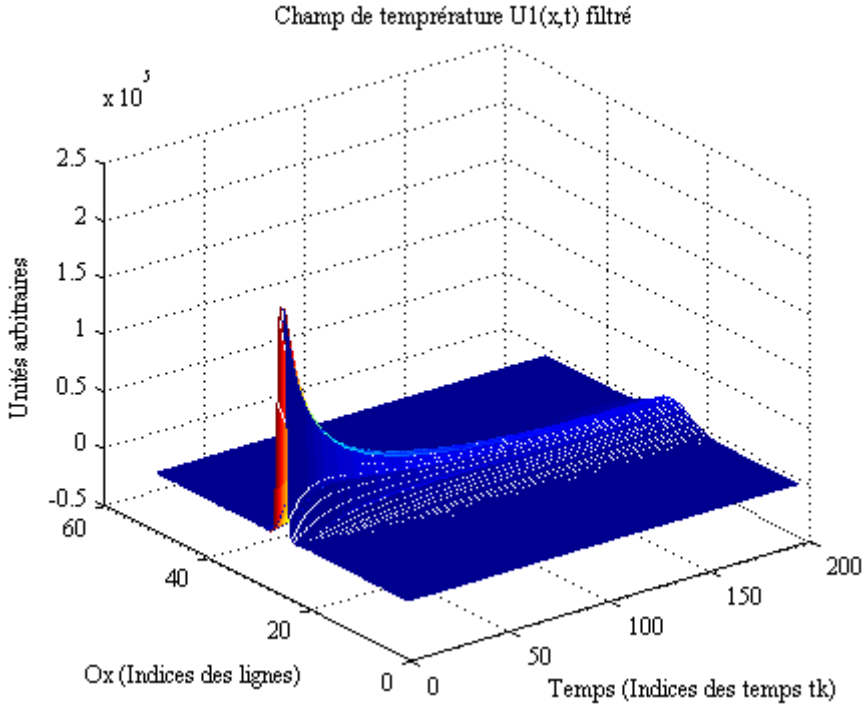


FIGURE 4.4.9: Champ de température $\tilde{U}_1(x,t)$ filtré

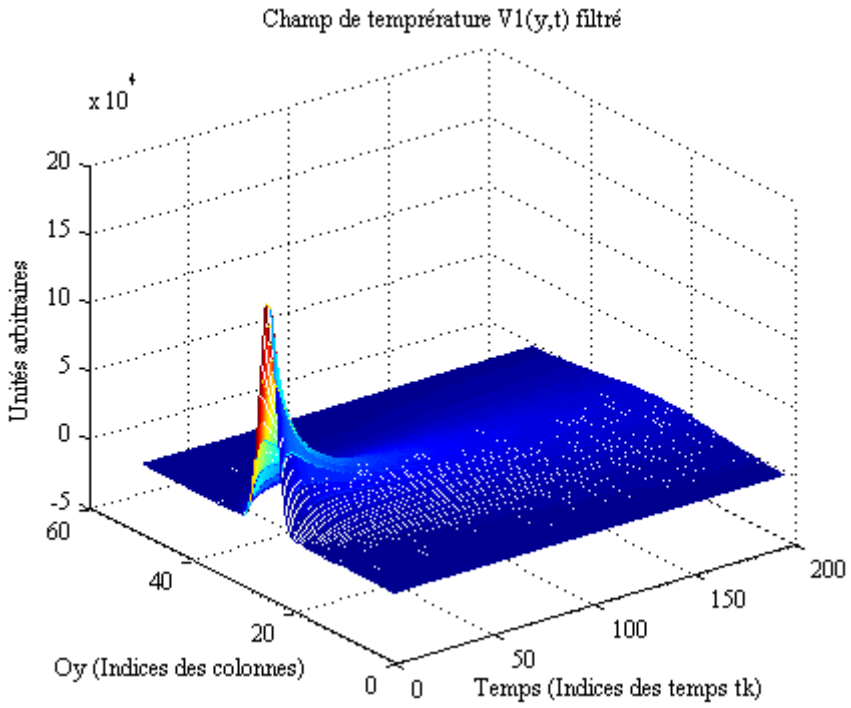


FIGURE 4.4.10: Champ de température $\tilde{V}_1(y,t)$ filtré

4.5 Exploitation de la séparabilité du champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ pour l'estimation de profils de diffusivités longitudinales

4.5.1 Modèle de diffusion thermique et algorithme d'estimation

Le champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ que nous traiterons ici est celui issu de la réduction du problème 3D en 2D, présenté en Section 4.3.2 page 99. Les expressions (4.3.15), (4.3.16) ou (4.3.17) rappellent les justifications du passage d'un champ de température 3D en 2D. Plus de détails peuvent être trouvés dans le document [18] présenté en *Annexe I*.

En Section 4.3.1 page 98 nous avons examiné la manière dont le problème 2D pouvait à son tour être scindé en l'étude de deux problèmes 1D. Le champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$ étant séparable en $\tilde{T}(x,y,t) = \tilde{T}_x(x,t) \cdot \tilde{T}_y(y,t)$ avec $\tilde{T}_x(x,t)$ et $\tilde{T}_y(y,t)$ vérifiant respectivement les problèmes 1D : (4.3.19) et (4.3.20) que nous rappelons et développons ci-desous :

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}_x(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \lambda_x}{\partial x}\dfrac{\partial \tilde{T}_x(x,t)}{\partial x} + \lambda_x \dfrac{\partial^2 \tilde{T}_x(x,t)}{\partial x^2} \\ \text{Pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}_x}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \to \pm\infty \\ \tilde{T}_x = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.5.1}$$

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}_y(y,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \lambda_y}{\partial y}\dfrac{\partial \tilde{T}_y(y,t)}{\partial y} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 \tilde{T}_y(y,t)}{\partial y^2} \\ \text{Pour } -\infty < y < \infty,\ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}_y}{\partial y} = 0 \text{ pour } y \to \pm\infty \\ \tilde{T}_y = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.5.2}$$

Nous avions supposé que le milieu était homogène dans la direction (Oz) et qu'il n'y avait pas de pertes convectives en $z = 0$. Les conditions de milieu semi-infini en pratique, sont vérifiées du moment où la chaleur ne diffuse pas au delà des frontières choisies au bout du temps que l'on définit pour effectuer les simulations. Il n'est pas nécessaire que $(l_x \times l_y)$ les dimensions longitudinales spécifiées dans le modèle, correspondent aux dimensions réelles de l'échantillon simulé ou réel. Les bords peuvent donc être choisis librement, tant qu'aucun flux de chaleur ne les traverse.

Nous nous proposons ici d'adapter la méthode proposée par Bamford et Coll. [11] pour l'estimation de diffusivités thermiques longitudinales locales. Cette méthode a été présentée dans la *Partie bibliographique* en Section 1.4 page 42. La différence notoire par rapport à la démarche de Bamford et Coll., réside dans le fait d'injecter dans le modèle de transfert, des données qui ont été filtrées à deux reprises : une première fois *uniquement spatialement*, puis une seconde fois de manière plus classique, avec une *séparation de variables espace-temps*. Bamford effectuait une prise de moyenne suivant (Ox) ou (Oy) du champ de température

$\tilde{T}(x,y,t)$, pour obtenir les champs de température moyennés $\tilde{T}_x(x,t)$ et $\tilde{T}_y(y,t)$. Cela permettait de réduire l'influence du bruit de mesure. Les champs de température moyennés étaient ensuite décomposés en valeurs singulières de manière classique, puis étaient injectés dans le modèle de transfert, l'inversion s'effectuant dans l'espace transformé. Excepté le fait que Bamford et Coll. travaillaient en face arrière, notre nouvelle approche permet donc d'effectuer en plus *un premier filtrage uniquement spatial des données* brutes.

Dans la Section précédente 4.4.2 page 105, nous avons vu que les champs de température $\tilde{U}_n(x,t)$ et $\tilde{V}_n(y,t)$ représentaient $\tilde{T}_x(x,t)$ et $\tilde{T}_y(y,t)$ dans le premier espace transformé. Ils vérifient donc les problèmes 1D (4.5.1) et (4.5.2) et peuvent directement y être injectés. Nous réécrivons les problèmes 1D précédents en :

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{U}_n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \lambda_x}{\partial x}\dfrac{\partial \tilde{U}_n(x,t)}{\partial x} + \lambda_x \dfrac{\partial^2 \tilde{U}_n(x,t)}{\partial x^2} \\ \text{Pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{U}_n}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \to \pm\infty \\ \tilde{U}_n = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.5.3}$$

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{V}_n(y,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial \lambda_y}{\partial y}\dfrac{\partial \tilde{V}_n(y,t)}{\partial y} + \lambda_y \dfrac{\partial^2 \tilde{V}_n(y,t)}{\partial y^2} \\ \text{Pour } -\infty < y < \infty,\ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{V}_n}{\partial y} = 0 \text{ pour } y \to \pm\infty \\ \tilde{V}_n = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases} \tag{4.5.4}$$

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser au problème 1D suivant (Ox) : (4.5.3). Les développements présentés ci-dessous pourront être transposés au problème 1D suivant (Oy) : (4.5.4).

La discrétisation du champ de température $\tilde{U}_n(x,t)$ par une approche de type «volumes finis» [103], permet d'obtenir la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_n$ de taille (l,c) :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_{i,k} = \dfrac{1}{\Delta x \cdot \Delta t} \int_{x=(i-1)\cdot l_x/l}^{i\cdot l_x/l} \left[\int_{t=(k-1)\cdot t_f/c}^{k\cdot t_f/c} \tilde{U}_n(x,t)\cdot dt \right] dx \\ \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} = \left[\tilde{\mathbf{U}}_{i,k}\right]_{i\in[1,l],k\in[1,c]} \end{cases} \tag{4.5.5}$$

avec i la variable discrétisée d'espace et k la variable de temps. Nous obtenons ainsi la forme discrétisée de l'équation (4.5.3) qui peut s'écrire sous la forme matricielle compacte suivante :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}} \left(\frac{P_l}{2\cdot\Delta x} \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right) + \mathbf{A}_{\mathbf{x}} \left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2} \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \right) = \tilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{n}} \frac{P_c^T}{\Delta t} \tag{4.5.6}$$

avec $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ la matrice diagonale contenant les valeurs locales de diffusivité longitudinale $\{a_x(i) = \dfrac{\lambda_x(i)}{\rho C_p(i)}\}_{i=1..l}$ et $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}$ la matrice diagonale contenant les valeurs locales $\{\dot{a}_x(i) = \dfrac{\dot{\lambda}_x(i)}{\rho C_p(i)}\}_{i=1..l}$, $\dot{\lambda}_x(i)$ étant la dérivée de la conductivité locale par rapport à la variable spatiale x.

Nous utiliserons les opérateurs différentiels suivants :

$$P_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_l^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in M(l)$$
$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M(c) \tag{4.5.7}$$

l'opérateur de dérivation P_l est choisi centré, l'exposant dans l'opérateur P_l^2 n'est qu'une notation pour faciliter sa distinction.

L'estimation des matrices de paramètres $\mathbf{A_x}$ et $\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{x}$ pourrait être effectuée par une approche nodale. Cependant, cela nécessiterait l'inversion directe de (4.5.6), une méthode lourde en temps de calcul, demandant au préalable une étude de sensibilité pour déterminer l'espace spatio-temporel optimal pour les estimations. Pour éviter cette approche, nous proposons en alternative d'appliquer la seconde décomposition ${}^2SVD_{(x,t)}$ de manière à séparer l'espace et le temps et obtenir une nouvelle formulation de l'équation (4.5.6) dans le second espace transformé.

Nous rappelons à présent l'expression (4.4.6) de $\tilde{U}_n(x,t)$:

$$\tilde{U}_n(x,t) \overset{{}^1SVD_{(x,t)}}{\approx} \sum_{r=1}^{r_0} \eta_{n,r}^x \cdot U_{n,r}^x(x) \cdot V_{n,r}^x(t)^T$$

pour simplifier son formalisme nous procédons à un changement de notation comme suit [1] :

$$\tilde{U}_n(x,t) \overset{{}^1SVD_{(x,t)}}{\approx} \sum_{k=1}^{r_0} s_k \cdot U_k(x) \cdot V_k(t)^T \tag{4.5.8}$$

nous injectons alors (4.5.8) dans l'équation (4.5.6) et nous obtenons sous la forme matricielle :

$$\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{x} \left(\frac{P_l}{2 \cdot \Delta x} \mathbf{U} \right) \mathbf{\Sigma V^T} + \mathbf{A_x} \left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2} \mathbf{U} \right) \mathbf{\Sigma V^T} = \mathbf{U \Sigma} \left(\frac{P_c}{\Delta t} \mathbf{V} \right)^T \tag{4.5.9}$$

l'orthonormalité de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ en composant à gauche par $(\mathbf{\Sigma V^T})^{-1}$ permet d'écrire :

$$\dot{\mathbf{A}}_\mathbf{x} \left(\frac{P_l}{2 \cdot \Delta x} \mathbf{U} \right) + \mathbf{A_x} \left(\frac{P_l^2}{\Delta x^2} \mathbf{U} \right) = \mathbf{U \Sigma} \left(\frac{P_c}{\Delta t} \mathbf{V} \right)^T \mathbf{V \Sigma}^{-1} \tag{4.5.10}$$

1. Il est important de ne pas confondre $\tilde{U}_n$ et U_k

Nous pouvons simplifier les notations encore une fois en posant :

$$\frac{P_l}{2\cdot\Delta x}\mathbf{U}=\dot{\mathbf{U}},\quad \frac{P_l^2}{\Delta x^2}\mathbf{U}=\ddot{\mathbf{U}},\quad \frac{P_c}{\Delta t}\mathbf{V}=\dot{\mathbf{V}} \tag{4.5.11}$$

Cette seconde décomposition assure *la séparabilité espace-temps* et permet de dire que $\ddot{\mathbf{U}}$, respectivement $\dot{\mathbf{U}}$ correspondent à des dérivées seconde, respectivement première, uniquement spatiales dans le second espace transformé. De plus, $\dot{\mathbf{V}}$ représente une dérivée première temporelle uniquement. Il en vient alors :

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\dot{\mathbf{U}}+\mathbf{A}_{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{U}}=\mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\left(\dot{\mathbf{V}}^T\mathbf{V}\right)\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \tag{4.5.12}$$

puis :

$$\dot{\mathbf{U}}^T\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}+\ddot{\mathbf{U}}^T\mathbf{A}_{\mathbf{x}}=\tilde{\mathbf{U}}^T \tag{4.5.13}$$

ou encore :

$$\mathbf{X}\beta=\mathbf{0} \tag{4.5.14}$$

avec $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}^T & \ddot{\mathbf{U}}^T & -\tilde{\mathbf{U}}^T\end{bmatrix}$, $\beta=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{x}}\\ \mathbf{A}_{\mathbf{x}}\\ \mathbf{I}_l\end{bmatrix}$ et $\tilde{\mathbf{U}}^T=(\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T(\dot{\mathbf{V}}\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{U}^T$.

Nous pouvons également réécrire (4.5.14) pour chaque mode séparément :

$$\mathbf{X}_k\beta_k=\mathbf{0},\quad k\in[1,c] \tag{4.5.15}$$

où β_k représente le vecteur paramètre estimé pour le mode k et $\mathbf{X}_k=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{U}}_k^T & \ddot{\mathbf{U}}_k^T & -\tilde{\mathbf{U}}_k^T\end{bmatrix}_{k\in[1,c]}$.

Pour chaque mode k nous avons :

$$(\mathbf{X}_k^T\mathbf{X}_k)\beta_k=\mathbf{0},\ k\in[1,c] \tag{4.5.16}$$

Cette dernière expression permet de déduire des relations locales pour chaque position $i\in[1,l]$, i étant donc la variable d'espace discrète et chaque mode $k\in[1,c]$ de manière suivante :

$$X_k^T(i)X_k(i)\beta_k(i)=0 \tag{4.5.17}$$

où :

$$\begin{cases}X_k(i)=\begin{bmatrix}\dot{U}_k(i) & \ddot{U}_k(i) & \tilde{U}_k(i)\end{bmatrix}\\ \tilde{U}_k(i)=\sum_{j=1}^{r_0}\dfrac{s_j}{s_k}\cdot U_j(i)(\dot{V}_j^TV_k)\\ \beta_k(i)=\begin{bmatrix}\dot{a}_x^k(i) & a_x^k(i) & 1\end{bmatrix}^T\end{cases} \tag{4.5.18}$$

avec $\dot{a}_x^k(i)=(\dfrac{\dot{\lambda}_x^k}{\rho C_p})(i)$, l'indice k représente l'indice du mode employé pour l'estimation. Dans la pratique, la somme ci-dessus est tronquée se limitant seulement aux modes prépondérants et permettant ainsi un second filtrage du bruit, le paramètre de réglage étant r_0. Nous avons vu dans l'exemple précédent, voir Figure 4.4.8 page 110, qu'il y avait 5 à 6 modes à prendre en

compte, i.e. $r_0 = 5,6$. Bien sûr, cela dépend du niveau du bruit dans le signal à traiter, mais dans notre cadre d'étude on aura souvent $r_0 \leq 10$. Par ailleurs, nous pouvons remarquer que les coefficients de pondération s_j/s_k décroissent quand j augmente, donc les termes d'indices supérieurs ont moins d'influence dans la somme.

La relation (4.5.17) peut aussi s'écrire :

$$Y_k(i)\beta_k(i) = 0 \tag{4.5.19}$$

Le vecteur paramètre local $\beta_k(i)$ pourrait être estimé directement à partir de l'expression (4.5.19), cependant dans les endroits de faible sensibilité, une telle inversion mènerait à des estimations biaisées. Pour éviter cela, il est préférable d'intégrer cette équation sur une fenêtre spatiale glissante comme suit :

$$\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} Y_k(j)\beta_k(j) = 0 \tag{4.5.20}$$

où ξ est la taille de la fenêtre spatiale sur laquelle l'intégration est effectuée. Dans un premier temps, le vecteur paramètre $\beta_k(j)$ peut être considéré constant sur l'intervalle $[i - \xi/2, i + \xi/2,]$ de façon à ce que l'équation (4.5.20) s'écrive :

$$Y_k^{int}(i)\beta_k(i) = 0 \quad \forall k \in [1, c]\,, i \in [\xi/2, \dots l - \xi/2] \tag{4.5.21}$$

avec

$$Y_k^{int}(i) = \textstyle\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} Y_k(j) \quad \forall k \in [1, c]\,, i \in [\xi/2, \dots l - \xi/2] \tag{4.5.22}$$

Pour mieux expliciter la matrice $Y_k^{int}(i)$ nous pouvons utiliser les notations suivantes :

$$Y_k^{int}(i) = \begin{bmatrix} \left\|\dot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2 & sym & sym \\ \left\langle \dot{U}_k^{\,i} \mid \ddot{U}_k^{\,i} \right\rangle & \left\|\ddot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2 & sym \\ \left\langle \dot{U}_k^{\,i} \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle & \left\langle \ddot{U}_k^{\,i} \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle & \left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.5.23}$$

avec

$$\dot{U}_k^{\,i} = \left[\dot{U}_k(i - \xi/2) \cdots \dot{U}_k(i + \xi/2)\right]^T \tag{4.5.24}$$

et

$$\left\langle \dot{U}_k^{\,i} \mid \ddot{U}_k^{\,i} \right\rangle = \sum_{\varsigma=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \dot{U}_k(\varsigma)\ddot{U}_k(\varsigma) \tag{4.5.25}$$

La matrice $Y_k^{int}(i)$ est donc une matrice de covariance locale et peut être notée :

$$Y_k^{int}(i) = cov(\dot{U}_k^{\,i}, \ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^i) \tag{4.5.26}$$

Pour faire apparaitre la matrice de corrélation $\mathbf{C}_k(i) = cor(\dot{U}_k^{\,i}, \ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^i)$, la matrice de covariance (4.5.23) peut être composée à gauche et à droite et mise sous la forme :

$$Y_k^{int}(i) = W_k^{1/2}(i)\mathbf{C}_k(i)W_k^{1/2}(i) \tag{4.5.27}$$

avec

$$W_k(i) = \begin{bmatrix} \left\|\dot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left\|\ddot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left\|\tilde{U}_k^{i}\right\|_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.5.28}$$

et

$$\mathbf{C}_k(i) = \begin{bmatrix} 1 & sym & sym \\ \rho(\dot{U}_k^{\,i}, \ddot{U}_k^{\,i}) & 1 & sym \\ \rho(\dot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i}) & \rho(\ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i}) & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5.29}$$

où

$$\rho(\ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i}) = \frac{\left\langle \ddot{U}_k^{\,i} \mid \tilde{U}_k^{i} \right\rangle}{\left\|\ddot{U}_k^{\,i}\right\|_2 \cdot \left\|\tilde{U}_k^{i}\right\|_2}$$

$$\rho(\ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i}) = \frac{\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \left(\ddot{U}_k^{\,j} - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \ddot{U}_k^{\,j}\right) \cdot \left(\tilde{U}_k^{j} - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \tilde{U}_k^{j}\right)}{\sqrt{\left(\ddot{U}_k^{\,j} - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \ddot{U}_k^{\,j}\right)^2 \cdot \left(\tilde{U}_k^{i} - \frac{1}{\zeta}\sum_{j=i-\xi/2}^{i+\xi/2} \tilde{U}_k^{i}\right)^2}} \tag{4.5.30}$$

avec $\zeta = card(\left[i - \xi/2, i + \xi/2\right])$ le cardinal de l'ensemble $\left[i - \xi/2, i + \xi/2\right]$.

Le coefficient ρ_k est compris entre $-1 < \rho_k < 1$, lorsqu'il tend vers $\left|\rho_k\right| \to 1$, alors la relation entre les deux termes en question est forte.

L'analyse à l'aide des corrélations a été introduite par Bamford et Coll. [11, 2], l'aspect novateur de cette approche est celui de permettre *une étude de sensibilité dans l'espace transformé* (cette approche a été ensuite transposée aux méthodes nodales voir par exemple [14, 16, 17, 18]).

L'étude des corrélations permet de déterminer quels paramètres peuvent être estimés dans l'espace transformé avant tout calcul. Par exemple, dans le cas où $\left|\rho(\dot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i})\right| \approx 0$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i})\right| \approx 1$ alors le modèle (4.5.1) peut se simplifier localement en :

$$\begin{cases} \rho C_p \dfrac{\partial \tilde{T}_x(x,t)}{\partial t} = \lambda_x \dfrac{\partial^2 \tilde{T}_x(x,t)}{\partial x^2} \\ \text{Pour } -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}_x}{\partial x} = 0 \text{ pour } x \to \pm\infty \\ \tilde{T}_x = 0 \text{ pour } t = 0 \end{cases}$$

autrement dit, d'après les relations à partir de l'équation (4.5.13) on aurait :

$$\left\|\ddot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2 \cdot a_x^k(i) + \left\langle \ddot{U}_k^{\,i} \mid \tilde{U}_k^{i} \right\rangle = 0 \tag{4.5.31}$$

d'où on peut estimer $a_x^k(i)$:

$$a_x^k(i) = -\rho(\ddot{U}_k^{\,i}, \tilde{U}_k^{i}) \cdot \frac{\left\|\tilde{U}_k^{i}\right\|_2^2}{\left\|\ddot{U}_k^{\,i}\right\|_2^2} \tag{4.5.32}$$

De la même manière, si $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \gg \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right|$ et $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \gg \left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right|$ le modèle se simplifie localement sous la forme :

$$\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2 \cdot \dot{a}_x^k(i) + \left\langle \dot{U}_k^i \mid \tilde{U}_k^i \right\rangle = 0 \tag{4.5.33}$$

et on peut alors estimer $\dot{a}_x^k(i)$:

$$\dot{a}_x^k(i) = -\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \frac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2^2}{\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2^2} \tag{4.5.34}$$

Dans tous les cas quand $0 < \left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| < 1$ et $0 < \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| < 1$ ne peuvent clairement identifiés comme égaux à 0 ou à 1 (à ϵ près), les deux paramètres $a_x^k(i)$ et $\dot{a}_x^k(i)$ peuvent être estimés simultanément à partir des expressions suivantes :

$$\begin{cases} a_x^k(i) = -\dfrac{\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) - \rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \rho(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i)}{1 - \rho^2(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i,)} \cdot \dfrac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2}{\left\|\ddot{U}_k^i\right\|_2} \\ \dot{a}_x^k(i) = -\dfrac{\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) - \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot \rho(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i)}{1 - \rho^2(\ddot{U}_k^i, \dot{U}_k^i,)} \cdot \dfrac{\left\|\tilde{U}_k^i\right\|_2}{\left\|\dot{U}_k^i\right\|_2} \end{cases} \tag{4.5.35}$$

Enfin, lorsque $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$ ou lorsque $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 0$ et $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 0$ aucune estimation n'est possible. Les équations (4.5.32) et (4.5.34) ne sont que des cas particuliers de (4.5.35) quand $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \approx 0$.

Ainsi l'analyse des corrélations permet de déterminer *les zones spatiales optimales pour les estimations* des diffusivités thermiques longitudinales ou encore de simplifier le modèle de transfert dans l'espace transformé. Nous obtenons alors des profils de diffusivités locales $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2 \ldots l-\xi/2}$ estimés à partir d'un certain nombre de modes $k \leq r_0$, dominants et optimaux pour l'estimation. Finalement, pour obtenir un seul profil de diffusivité $\{a_x(i)\}$ à partir de $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2,\ldots l-\xi/2}$, il est possible d'effectuer une moyenne pondérée des profils $\{a_x^k(i)\}_{i=\xi/2 \ldots l-\xi/2}$ obtenus pour chaque mode k. Les expressions suivantes sont des possibilités que nous avons utilisé dans notre étude :

$$\begin{aligned} a_x(i) &= \frac{\sum_{k \leq r_0} \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \cdot a_x^k(i)}{\sum_{k \leq r_0} \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)}, \quad i = \xi/2, \ldots l - \xi/2 \\ a_x(i) &= \frac{\sum_{k \leq r_0} (1 - \rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)) \cdot a_x^k(i)}{\sum_{k \leq r_0} (1 - \rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i))}, \quad i = \xi/2, \ldots l - \xi/2 \end{aligned} \tag{4.5.36}$$

dans le second cas, plus $\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)$ est faible, plus $(1 - \rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i))$ tend vers l'unité.

Il est important de remarquer que le nombre de modes k utilisés pour obtenir un unique profil de diffusivité $a_x(i)$ à partir des $a_x^k(i)$, peut être différent de celui employé dans la somme de l'expression (4.5.18), i.e. $k \leq r_0$. Cela dépendra du seuil ϵ fixé pour les différents coefficients de corrélation, par exemple pour $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \approx 1$, ce serait $\epsilon_1 \leq \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \leq 1$ ou pour $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \approx 0$, ce serait $0 \leq \left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \leq \epsilon_2$. Nous l'analyserons un peu plus loin.

Dans le cas de milieux hétérogènes un *coefficient de corrélation global* peut être utilisé pour l'estimation d'un profil unique de diffusivité $a_x(i)$, il est défini comme suit :

$$\rho(\ddot{U}_k, \tilde{U}_k) = \frac{\sum_{j=1}^{l} \left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \ddot{U}_k^j \right) \cdot \left(\tilde{U}_k^j - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \tilde{U}_k^j \right)}{\sqrt{\left(\ddot{U}_k^j - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \ddot{U}_k^j \right)^2 \cdot \left(\tilde{U}_k^i - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \tilde{U}_k^i \right)^2}} \tag{4.5.37}$$

4.6 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre nous avons exposé les modèles de diffusion utilisés aux solutions analytiques séparables. Nous avons étudié la réponse impulsionnelle sur un milieu semi-infini, ainsi que les multiples avantages permis par la séparabilité de champs de température. En effet, dans ces conditions il devient aisé de traiter des problèmes tridimensionnels en les réduisant à l'étude de problèmes monodimensionnels. En exploitant la séparabilité il devient alors possible d'estimer des profils de diffusivités longitudinales dans les axes principaux d'anisotropie de manière indépendante. Par ailleurs, il devient possible de tenir compte de la diffusion dans l'épaisseur du matériau. En effet, les mesures de champs de température ne sont accessibles qu'en face avant ou arrière de l'échantillon, la prise en compte de la diffusion en épaisseur est alors essentielle pour l'estimation de diffusivités longitudinales de matériaux orthotropes.

La nouvelle approche basée sur une double décomposition en valeurs singulières à été introduite. Par rapport aux approches classiques elle permet de travailler dans les cas de diffusion bi ou tridimensionnelle et d'exploiter le *contenu spatial* des images infrarouges, ce qui est rendu notamment possible grâce à la séparabilité du champ de température. Elle offre par ailleurs la possibilité d'étudier le contenu du signal traité (comme la complexité ou la richesse du signal, ou encore sa séparabilité) via l'observation des valeurs singulières. Il devient alors possible de *filtrer le bruit de mesure de manière pertinente*, par deux paramètres de réglage proposés par la méthode.

Nous avons adapté l'algorithme d'estimation proposé par Bamford et Coll. [11] à la méthode de la *double décomposition en valeurs singulières*. Cela permet d'effectuer une analyse de sensibilité grâce à l'étude des corrélations entre les différents termes du modèle de diffusion et restreindre ainsi les estimations aux zones où la sensibilité aux paramètres recherchés est élevée. L'estimation étant réalisée dans l'espace transformé.

Nous allons à présent procéder aux validations numériques et expérimentales de la méthode exposée dans ce chapitre.

Chapitre 5

Validation numérique et expérimentale de la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ pour l'estimation de diffusivités longitudinales dans le cas de matériaux homogènes

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord mener une validation numérique simulant une impulsion laser sur un matériau homogène de faible épaisseur, de telle sorte que la diffusion au sein du milieu pourra être considérée comme bidimensionnelle. Cela nous permettra dans un premier temps de ne pas prendre en compte la diffusion dans l'épaisseur. Dans cet exemple simulé, les différents paramètres influents de la méthode d'estimation seront étudiés. Nous procéderons ensuite aux validations expérimentales sur deux échantillons distincts. Le premier étant une lame de verre mince homogène, le second une plaque de PVC. Pour ce dernier, nous allons illustrer la manière dont la diffusion dans l'épaisseur est traitée expérimentalement.

5.2 Simulation d'une impulsion laser sur un matériau 2D homogène

Nous utilisons une approche de type «volumes finis» [103] pour simuler l'évolution temporelle d'une impulsion laser sur un milieu homogène 2D, pour lequel les conditions infinies aux bords sont vérifiées. Le champ de température séparable $T(x, y, t) = T(x, t) \cdot T(y, t)$ issu du problème

(4.5.1) a été obtenu avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}(l_x \times l_y) &= 10 \times 10\,mm \\ \Delta x = \Delta y &= 170\,\mu m \\ \Delta t &= 20\,ms \\ t_f &= 3\,s \\ \rho C_p &= 10^7\,{}^J\!/_{m^3 K} \\ \lambda_x(x) &= 2,34\,{}^W\!/_{m\cdot K}\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Un faible bruit de mesure aux caractéristiques suivantes a été ajouté :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}(t) + \epsilon(t) = \{T_{i,j}(t)\}_{i=1\ldots l,\, j=1\ldots c} + \epsilon_{i,j}(t) \tag{5.2.2}$$

avec $\epsilon_{i,j}(t)$ du bruit *blanc additif gaussien* d'écart type $\sigma(T) = {}^{T_{max}}\!/_{100}$ avec un rapport signal sur bruit défini comme :

$$SNR = \left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c} var\left[T_{i,j}(t)\right]\right)\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c} var\left[\epsilon_{i,j}(t)\right]\right)^{-1} = 267 \tag{5.2.3}$$

De plus, le nombre de maille $n_m = \dfrac{\dfrac{\lambda_x(x)}{\rho C_p}\cdot \Delta t}{\Delta x^2} = 0,16$ assurant la stabilité des schémas numériques, est bien compris entre $0 < n_m < {}^1\!/_4$ pour le cas 2D [141, Chapitre 12, Section 12-10]. La Figure 5.2.1 page suivante, représente ce champ de température à l'instant initial.

La première décomposition *espace-espace* ${}^1SVD_{(x,y)}$ permet d'obtenir les $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ représentés en Figure 5.2.2 page suivante. Les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ et $\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)$ à partir du traitement de $\tilde{U}_1(x,t)$ obtenu pour $r_0 = k = 5$, $\xi = 1,7\,mm$ peuvent être tracés par rapport à l'indice du mode associé et leur position dans l'espace. Nous les illustrons Figure 5.2.3 page 123.

Première constatation que nous pouvons faire, c'est celle de bien retrouver dans la partie centrale de l'échantillon (rapport signal sur bruit élevé), les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ et $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \to 0$ pour les modes $k \leq 3$. Les dérivées seconde spatiale et première temporelle, sont fortement corrélées, alors que les dérivées première spatiale et première temporelle, sont complètement décorrélées. Cela peut être mieux observé sur la Figure 5.2.4 page 123. En effet, les tracés normalisés de $\ddot{U}_1^i, \tilde{U}_1^i$ sont superposés, alors que ceux de $\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i$, sont complètement décorrélés (sauf sur les bords), simplifiant ainsi le modèle de transfert initial à celui décrit à l'équation (4.5.32). Cela permet une estimation de la diffusivité thermique dans les zones où la sensibilité y est élevée. Par ailleurs, les coefficients de corrélation $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \to 0$ et $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ se dégradent fortement à partir du mode 3, ne permettant plus d'estimation. Ce qui corrobore le fait que l'information pertinente se trouve dans les premiers modes et que les modes restants peuvent être filtrés.

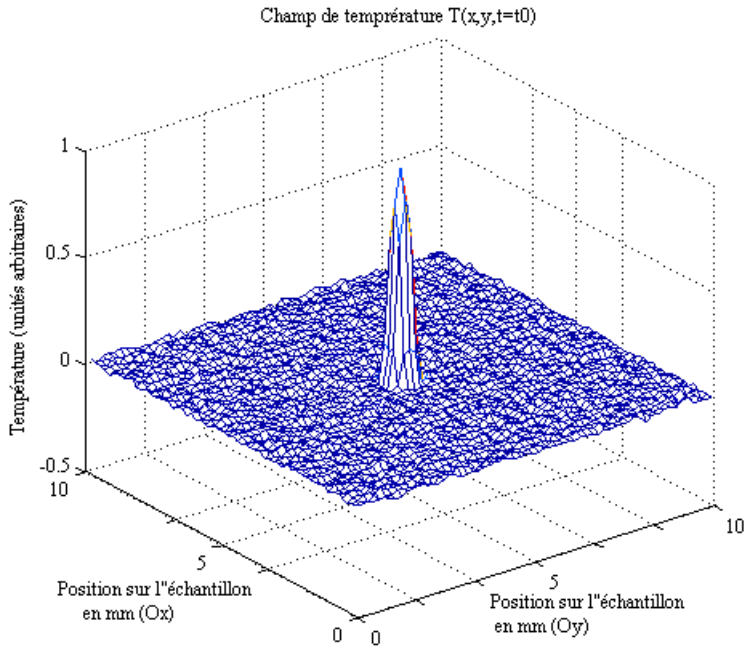


FIGURE 5.2.1: Champ de temprérature simulé $T(x, y, t = t_0)$

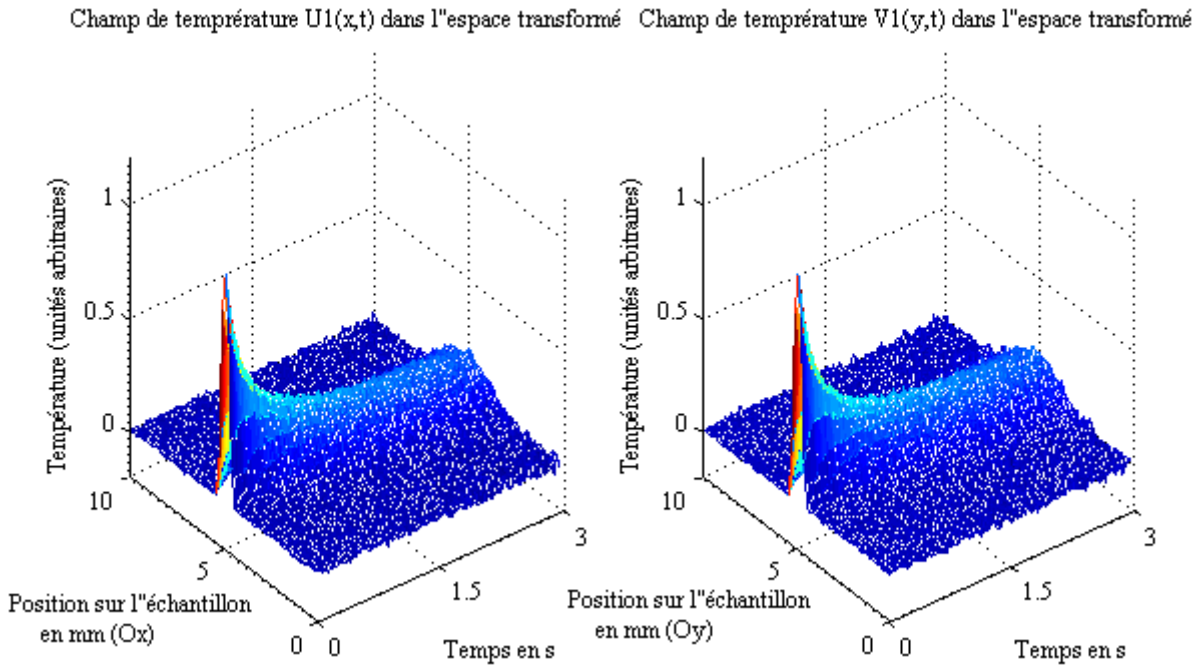


FIGURE 5.2.2: Les $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ obtenus après la première décomposition ${}^1SVD_{(x,y)}$

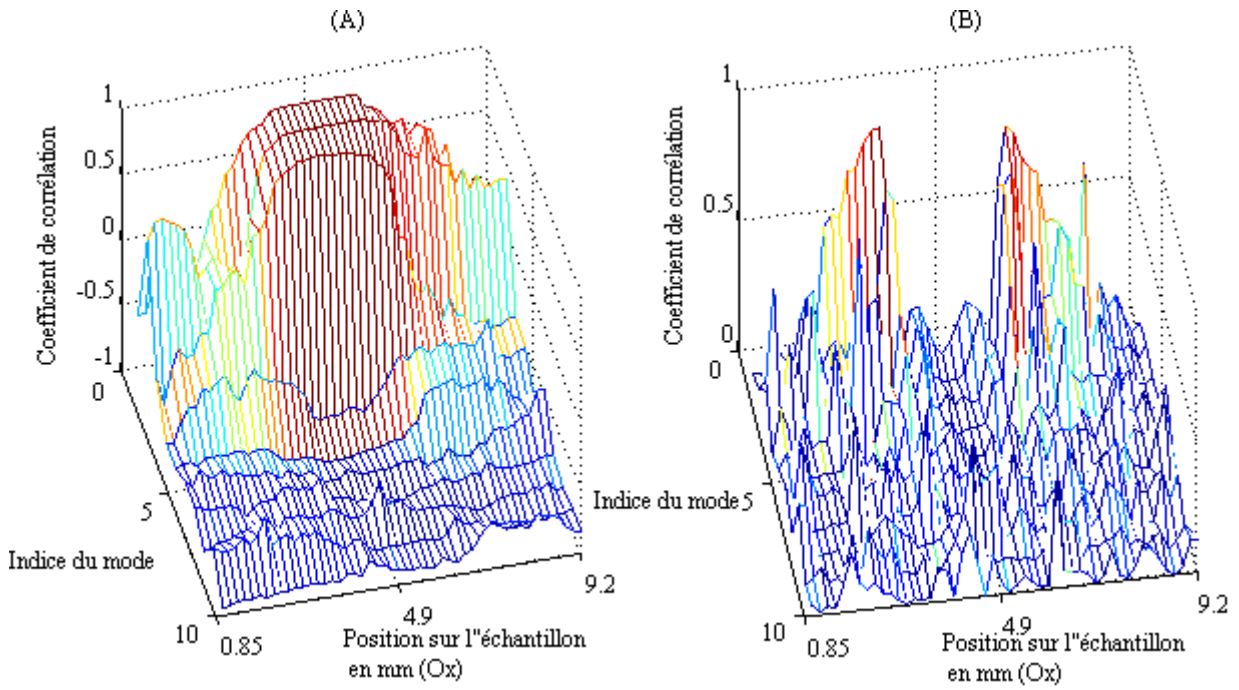


FIGURE 5.2.3: Les coefficients de corrélation $\left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \to 1$ en (A) et $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \to 0$ en (B) pour une fenêtre spatiale de $\xi = 1,7\,mm$, dans les zones où le rapport signal sur bruit est bon

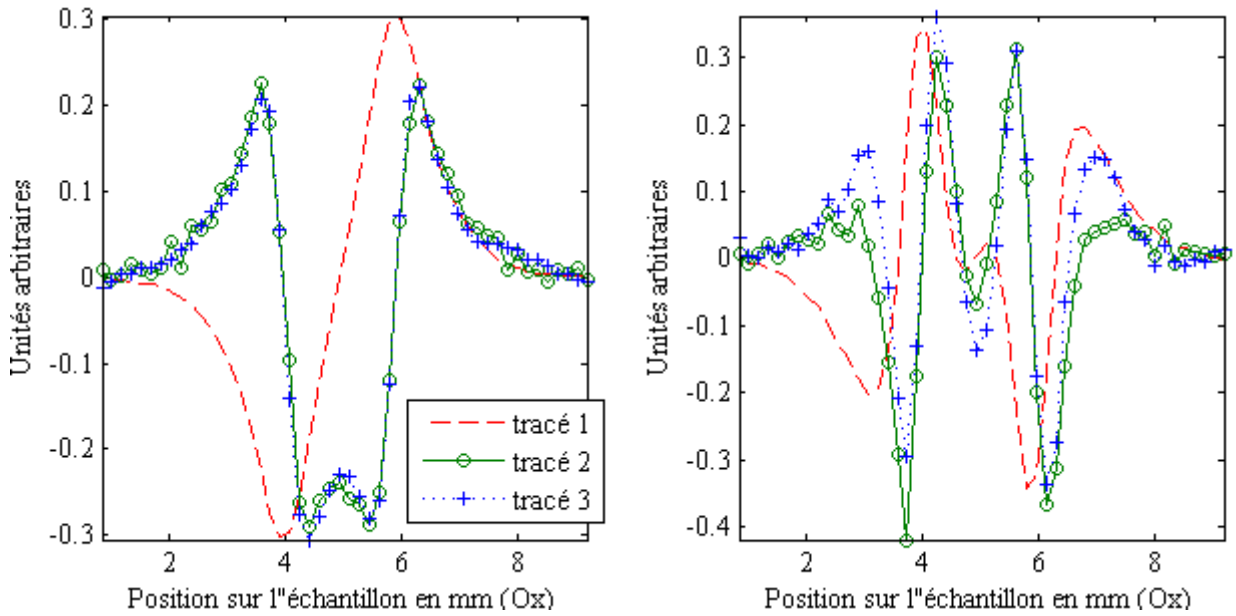


FIGURE 5.2.4: Tracés normalisés des dérivées spatiales et temporelles pour une fenêtre spatiale de $\xi = 1,7\,mm$. Sur le graphique de gauche nous avons $\dot{U}_1^i$ (tracé 1), $\ddot{U}_1^i$ (tracé 2) et $\tilde{U}_1^i$ (tracé 3). À droite nous avons $\dot{U}_2^i$ (tracé 1), $\ddot{U}_2^i$ (tracé 2) et $\tilde{U}_2^i$ (tracé 3)

La seconde décomposition ${}^1SVD_{(x,t)}$ sur $\tilde{U}_1(x,t)$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$ sur $\tilde{V}_1(y,t)$ permet d'obtenir les profils de diffusivités thermiques longitudinales Figure 5.2.5 page suivante. Le tracé des écarts relatifs $e_p = \dfrac{\left|a_p - a_p^{exact}\right|}{a_p^{exact}} \times 100$, $p = x, y$ en Figure 5.2.6 page 125 permet de constater qu'ils sont de l'ordre de 1%, pour une fenêtre spatiale de $\xi = 1,7\,mm$, ce qui représente 10

valeurs dans ce cas de figure. Nous verrons un peu plus loin, que le fait de prendre une fenêtre spatiale plus large, augmente le rapport signal sur bruit sur des plages spatiales plus étendues, permettant ainsi l'estimation sur des zones plus importantes.

Remarque. Nous ne connaissons pas les incertitudes des valeurs obtenues. Pour cela il faudrait déterminer la manière dont le bruit de mesure se propage à travers l'algorithme d'estimation. Nous laisserons cette étude en perspective de ces travaux de thèse. Un travail similaire a été réalisé pour déterminer la propagation des incertitudes dans *l'espace modal* pour la méthode KLD par Palomo del Barrio et Coll. [140].

Les valeurs estimées sur les bords s'écartent de la valeur exacte, car le *rapport signal sur bruit y est trop faible*, cela se traduit en termes de corrélations $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \nrightarrow 1$ et $\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i) \nrightarrow 0$. Les corrélations locales n'étant pas bonnes, par conséquent les valeurs de diffusivités estimées dans ces zones s'éloignent du profil exact. Il est possible de fixer un critère permettant de filtrer ces données, par exemple $\epsilon_1 \leq \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \leq 1$, dans ce cas de figure ϵ_1 représente le seuil admissible pour les valeurs de corrélations servant à l'estimation. Nous le fixerons souvent à $0,9$. Ainsi les valeurs en dehors de ce seuil peuvent être filtrées et mises à zéro. Cependant, nous faisons le choix d'afficher dans nos graphiques ces valeurs au lieu de les mettre à zéro, de manière à voir comment les estimations se dégradent sur les bords.

Nous avons observé que dans la partie centrale de l'échantillon, le profil de diffusivités approche le profil exact avec un écart relatif inférieur ou égal à 1%. Ce biais est aussi lié *au choix de la largeur de la fenêtre spatiale* ξ utilisée pour effectuer les estimations, comme nous allons le voir. L'influence de la *fenêtre spatiale* ξ sera donc mise en évidence, en plus du nombre de modes $r_0 = k$ pris en compte.

Nous allons maintenant procéder à la quantification de l'influence de ces différents paramètres.

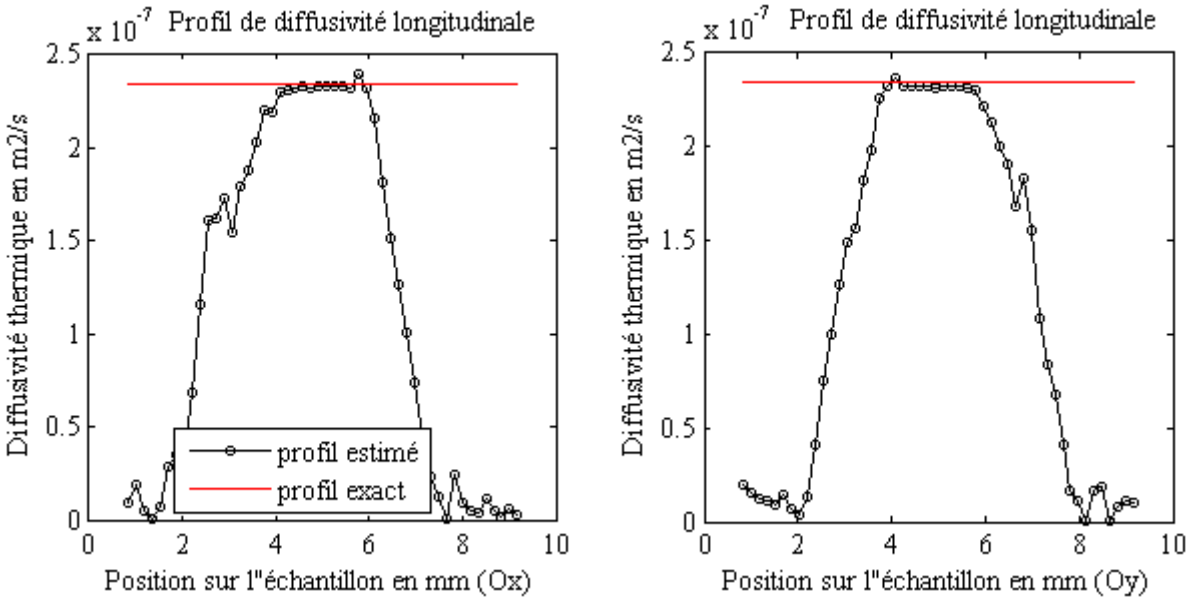


Figure 5.2.5: Profils de diffusivités longitudinales obtenus à partir des expressions (4.5.32), (4.5.36) pour 5 modes

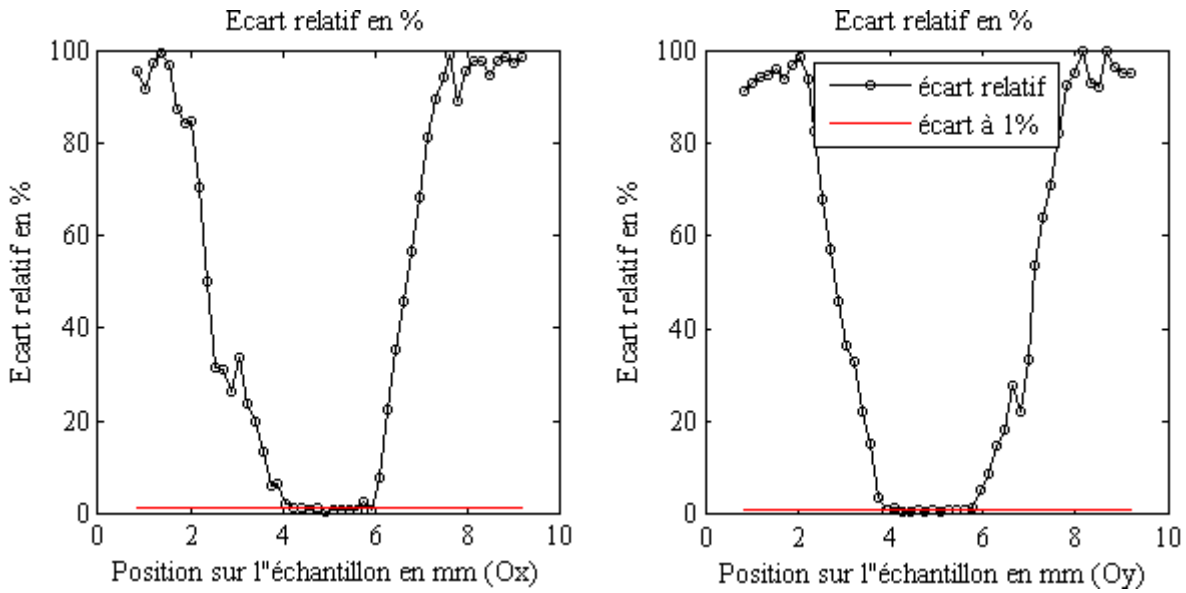


FIGURE 5.2.6: Écarts relatifs $e_p = \dfrac{\left|a_p - a_p^{exact}\right|}{a_p^{exact}} \times 100$, $p = x, y$

5.2.1 Étude de l'influence du nombre de modes r_0 pris en compte dans la somme de l'expression (4.5.18)

Pour ce faire, nous traçons à partir de l'expression (4.4.10) le pourcentage du signal contenu dans $\tilde{U}_1(x,t)$ tronqué à r_0 modes en Figure 5.2.7 page suivante. Comme nous pouvons le constater, pour $r_0 = 5$, $\tilde{U}_1(x,t)$ tronqué, contient 97% du signal originel. Pour $r_0 = 22$ nous avons 98%, une différence négligeable pour 17 modes de plus. De manière générale, r_0 est donc un paramètre permettant de filtrer précisément le bruit de mesure, voir le *Chapitre 2* de la partie *Outils mathématiques*, pour plus de développements à ce sujet.

Nous fixerons $r_0 = 5$, le reste du signal pouvant être assimilé au bruit de mesure. La somme dans l'expression de $\tilde{U}_k(i)$ dans (4.5.18) se calculera donc avec $r_0 = 5$.

Le profil de diffusivités unique $a_x(i)$ obtenu à partir des $a_x^k(i)$ dans les expressions (4.5.32) et (4.5.36) doit lui cependant, être calculé pour $k < r_0$. Nous allons le montrer ci-après.

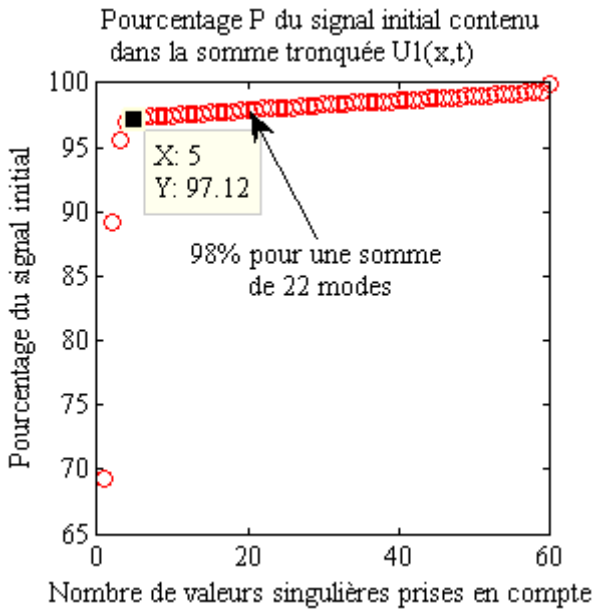


FIGURE 5.2.7: Tracé du pourcentage du signal initial contenu dans la sommes tronquées $\tilde{U}_1(x,t) \approx \sum_{r=1}^{r_0} \eta_{1,r}^x \cdot U_{1,r}^x(x) \cdot V_{1,r}^x(t)^T$ pour un r_0 donné

5.2.2 Étude de l'influence de la taille de la fenêtre spatiale ξ utilisée pour l'estimation de $a_x(i)$

Le choix de la largeur de la fenêtre spatiale ξ sur laquelle les estimations sont faites, peut s'expliquer aisément de manière intuitive. À savoir, qu'il peut être compris comme un paramètre de régularisation : lorsque ξ est faible, l'influence du bruit de mesure augmente et la précision sur les estimations de $a_x(i)$ décroit alors ; à l'opposé, lorsque ξ est grand, l'influence du bruit sur les estimations diminue, car un lissage spatial est réalisé localement. Nous remarquerons cependant, que de *faibles variations de diffusivités locales* seraient indétectables si ce lissage est trop important (présence de fissures de faibles dimensions par exemple, normales à la surface de l'échantillon).

Pour les matériaux homogènes, le choix d'une fenêtre spatiale «assez large» augmentera les zones sensibles (rapport signal sur bruit élevé), dans lesquelles les estimations pourront être effectuées. Les corrélations vont alors également s'améliorer permettant ainsi l'estimation sur des plages spatiales plus étendues, au détriment d'une légère baisse de précision sur les estimations.

Sur l'exemple précédent nous avions $\xi = 1,7\,mm$, si maintenant on passe à $\xi = 3,4\,mm$, 10 valeurs de plus par rapport au cas précédent, nous obtenons le profil tracé en Figure 5.2.8 page suivante. Comme nous pouvons le constater, de plus larges zones deviennent sensibles par rapport à celles représentées Figure 5.2.5 page 124. En effet, le lissage spatial des données devient plus ample, par conséquent la sensibilité locale augmente et les diffusivités peuvent y être estimées. L'écart relatif augmente cependant légèrement, mais reste sous la barre des 2%. Les coefficients de corrélation obtenus pour $\xi = 3,4\,mm$ sont illustrés Figure 5.2.9 page suivante.

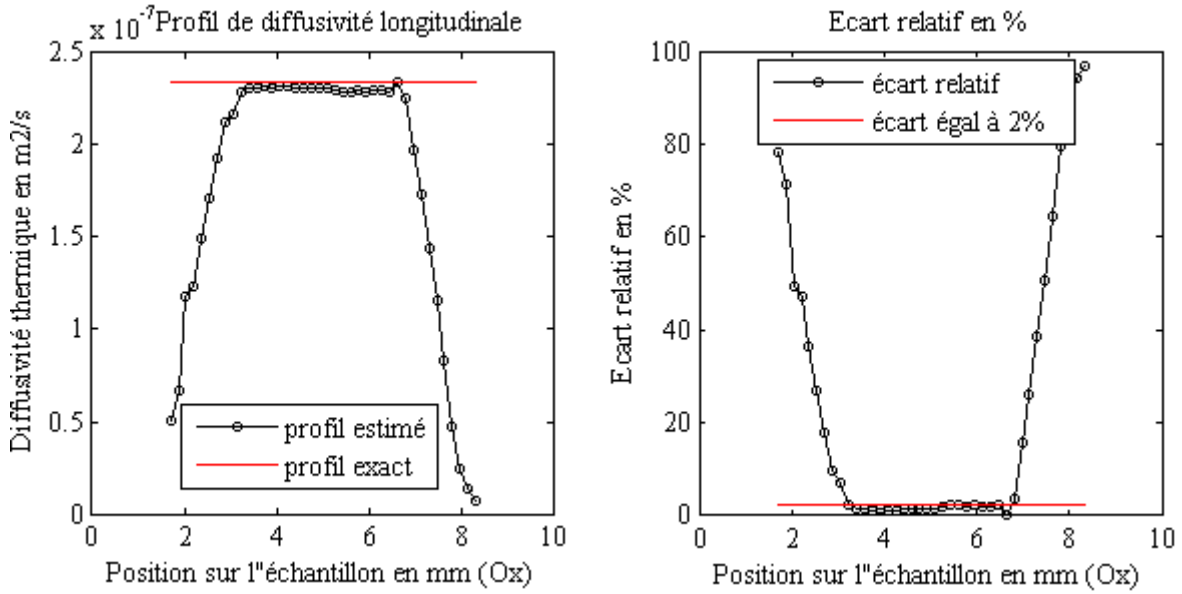


FIGURE 5.2.8: Nouveau profil $a_x(i)$ et écart relatif, obtenus avec une fenêtre spatiale de $\xi = 3,4\,mm$

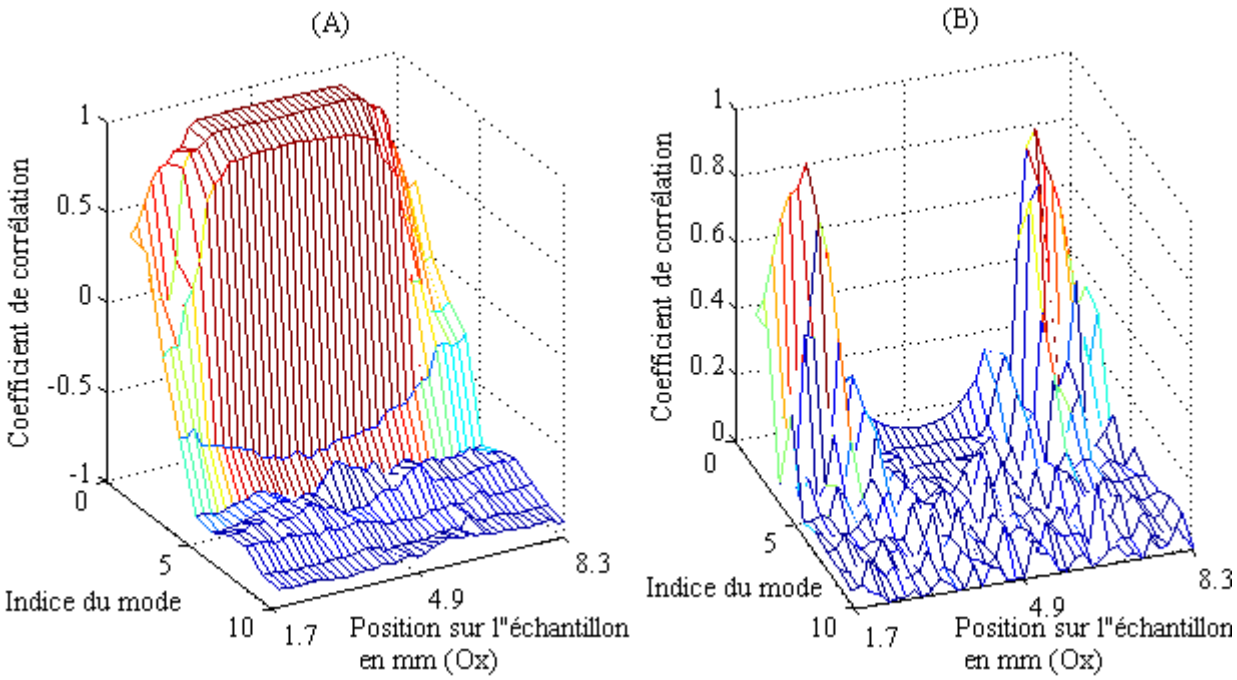


FIGURE 5.2.9: Les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ en (A) et $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \to 0$ en (B) pour une fenêtre spatiale de $\xi = 3,4\,mm$

5.2.3 Étude de l'influence du nombre de modes k pris en compte pour l'estimation de $a_x(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$

La fenêtre spatiale est toujours prise égale à $\xi = 3,4\,mm$. Nous obtenons alors les profils de diffusivités $a_x^k(i)$ présentés Figures 5.2.10 page suivante et 5.2.11 page suivante. Nous pouvons clairement voir que pour les modes indicés $k > 2$, les profils de diffusivités $a_x^k(i)$ divergent rapidement de la valeur nominale. Par conséquent, bien que les profils $a_x^k(i)$ pour $k > 2$ seront

pondérés par les coeffitients de corrélation ρ_k correspondants (via les expressions (4.5.36)), ce qui en diminuera la divergence sur l'unique profil $a_x(i)$, il est cependant préférable de ne prendre en compte que les profils $a_x^k(i)$ pour $k \leq 2$, ceci est illustré sur la Figure 5.2.12 page suivante. Le meilleur résultat étant obtenu pour le premier mode. Les profils $a_x^k(i)$ pouvant être pris en compte, sont ceux pour lesquels $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ ou $\left|\rho(\dot{U}_k^i, \ddot{U}_k^i)\right| \to 0$. Nous pouvons par exemple fixer un seuil pour $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$, $\epsilon_1 \leq \left|\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)\right| \leq 1$. Les estimations en Figures 5.2.5 page 124 et 5.2.8 page précédente, ont été obtenues avec un seuil $\epsilon_1 = 0,9$.

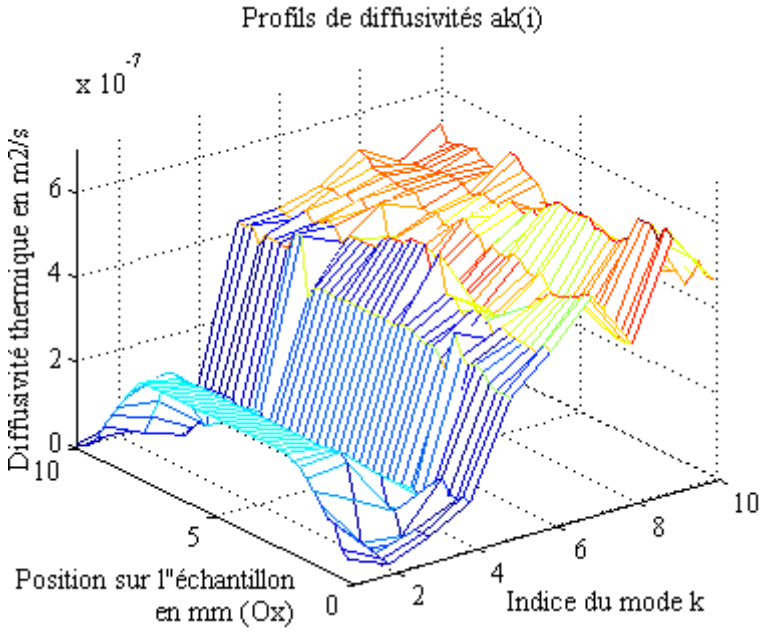


FIGURE 5.2.10: Les profils de diffusivités $a_x^k(i)$ pour $k = 1 \ldots 10$

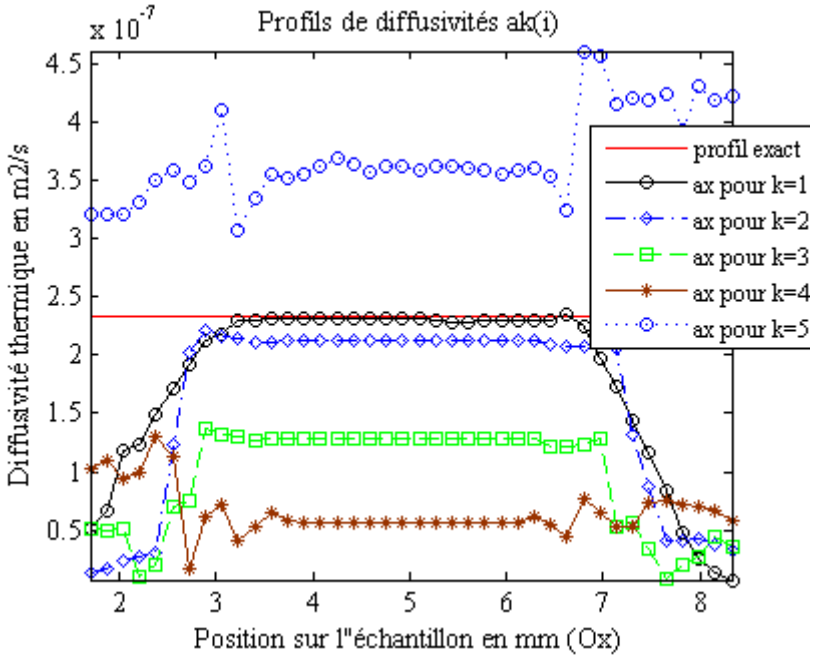


FIGURE 5.2.11: Les profils de diffusivités $a_x^k(i)$ pour $k = 1 \ldots 5$

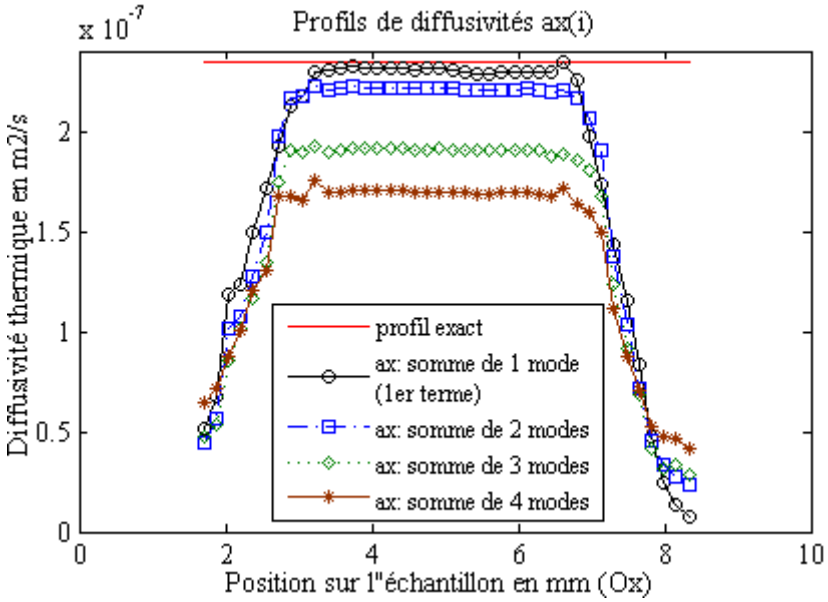


FIGURE 5.2.12: Profils uniques $a_x(i)$ obtenus en sommant sur $k = 1, 2, 3, 4$ modes respectivement

5.2.4 Cartographie des diffusivités thermiques du milieu homogène : $\mathbf{a}_{x,y}$

Afin d'obtenir une «cartographie» des diffusivités thermiques longitudinales du milieu, l'opération suivante pourrait être réalisée :

$$\mathbf{a}_{x,y}(i,j) = \sqrt{[a_x(i)]^T \cdot [a_y(j)]} \tag{5.2.4}$$

le résultat obtenu est représenté en Figure 5.2.13 page suivante. Cette opération s'apparente à une *moyenne géométrique* entre les valeurs dans la direction (Ox) et les valeurs dans la direction (Oy). Ce genre de représentation reste discutable, puisque nous ne disposons que de profils «moyens» de diffusivités dans les directions (Ox) et (Oy). Des éléments de réponse quant à la possibilité d'effectuer ce genre de cartographies seront apportés lors de l'étude des matériaux hétérogènes au *Chapitre* 6 page 140.

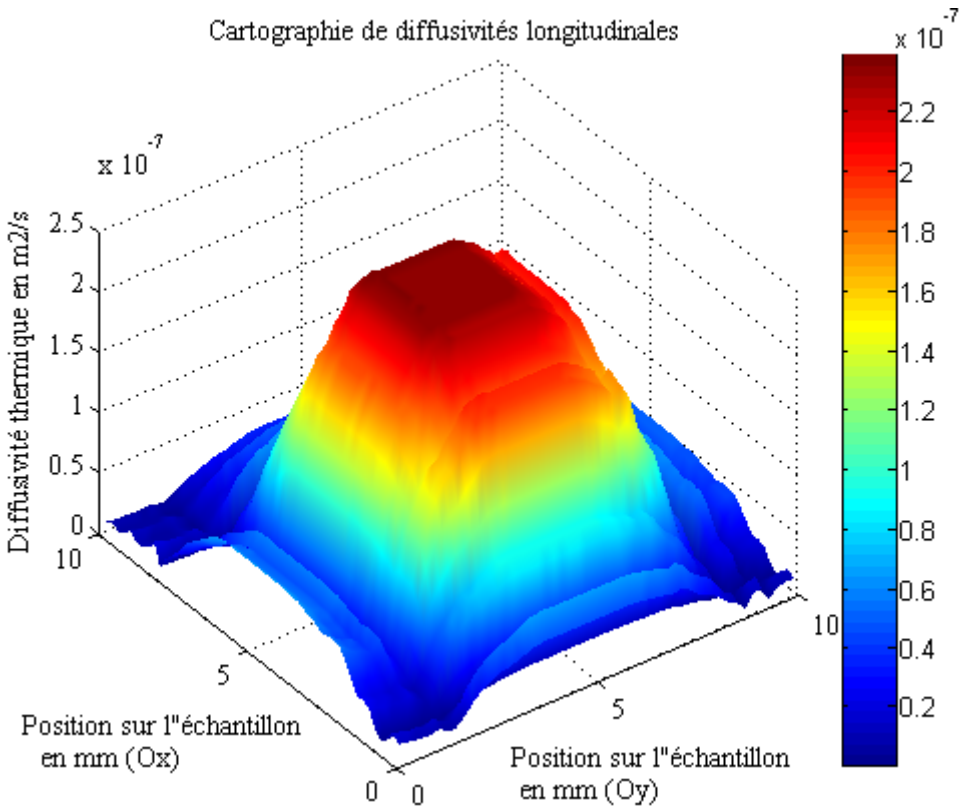


FIGURE 5.2.13: Cartographie des diffusivités thermiques du milieu homogène $\mathbf{a}_{x,y} = \sqrt{[a_x(i)]^T \cdot [a_y(i)]}$

5.3 Validation expérimentale de la méthode dans le cas d'une réponse impulsionnelle sur une lame de verre homogène

5.3.1 Réponse expérimentale au point source impulsionnel

Une validation expérimentale est réalisée sur un milieu homogène pouvant être considéré comme 2D : une lame de verre (de $170\,\mu m$ d'épaisseur et $5\,cm$ de diamètre) peinte en noir sur la face supérieure et posée sur une mousse isolante. Une diode laser fibrée de longueur d'onde de $805\,nm$, avec une puissance variant de 100 à $1000\,mW$ est utilisée pour exciter la lame de verre localement. Le diamètre de la tache obtenu à l'instant initial est d'environ $450\,\mu m$. L'évolution temporelle du champ de température $T(x, y, t)$ est enregistrée avec une fréquence d'acquisition de $50\ Hz$ ($\Delta t = 20\,ms$) par une caméra infrarouge ORION CEDIP, munie d'une matrice de 256×256 détecteurs en Antimoine d'Indium (InSb) opérant dans le spectre d'ondes courtes allant de $2\,\mu m$ à $5\,\mu m$. *L'objectif de microscope* permet d'atteindre des résolutions spatiales de l'ordre de $\Delta x \approx 25\mu m$, offrant ainsi de nouvelles possibilités pour la caractérisation de propriétés thermophysiques aux petites échelles. Le champ de température obtenu avec $\Delta x = \Delta y \approx 25\mu m$, a pour dimensions $(l_x \times l_y) = 6,4 \times 6,4\,mm$. Le dispositif expérimental est illustré Figure 4.3.2 page 98.

L'influence du bruit et les éventuelles corrélations entre les détecteurs de la matrice du capteur infrarouge sont atténuées en considérant un champ de température *lissé* par une moyenne mobile spatiale de 8×8 pixels. Pour assurer la stabilité des schémas numériques, le nombre de maille n_m est inférieur à $1/4$. La résolution spatiale obtenue est alors d'environ $\Delta x \approx 200\mu m$.

Le champ de température $T(x, y, t)$ est décomposé une première fois par la ${}^1SVD_{(x,y)}$, nous obtenons alors les $\tilde{U}_1(x, t)$ et $\tilde{V}_1(y, t)$ représentés Figure 5.3.1 page suivante.

Les secondes décompositions ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$ sur $\tilde{U}_1(x, t)$ et $\tilde{V}_1(y, t)$ permettent d'apprécier les pourcentages du signal contenus dans les sommes tronquées de $\tilde{U}_1(x, t)$ et $\tilde{V}_1(y, t)$. Ces pourcentages sont illustrés Figure 5.3.2 page suivante. Comme nous pouvons le constater le contenu fréquentiel est quasi le même pour les deux champs de température ; de plus, seulement 4 premiers modes suffisent pour obtenir plus de 98% du signal originel. Cela est dû au fait que le lissage spatial effectué au préalable sur le champ de température initial $T(x, y, t)$ a diminué l'influence du bruit de mesure. Nous fixons pour la suite le paramètre $r_0 = 5$.

Nous injectons respectivement les sommes tronquées de $\tilde{U}_1(x, t)$ et $\tilde{V}_1(y, t)$ dans l'algorithme de calcul explicité dans les sections précédentes et nous obtenons les cartographies des coefficients de corrélation pour une fenêtre spatiale de $\xi = 2\,mm$ en Figure 5.3.3 page 133.

Sur la quasi totalité de la lame de verre dans les directions (Ox) et (Oy), nous retrouvons bien le comportement d'un milieu homogène, à savoir $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ pour les deux directions. On constate également que seuls les premiers modes sont pertinents, une décroissance a lieu à partir du 4 mode.

Nous procédons ensuite à l'estimation des diffusivités longitudinales en définissant les pa-

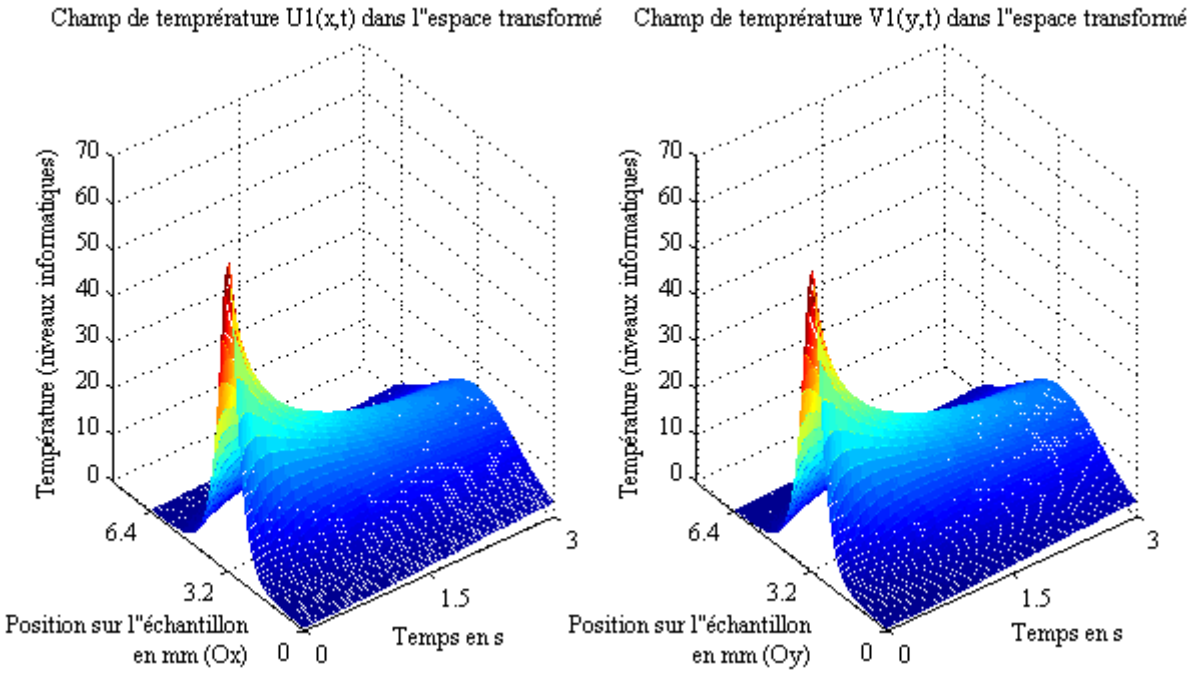


FIGURE 5.3.1: Champs de température $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$, obtenus en appliquant la ${}^1SVD_{(x,y)}$ sur le champ de température expérimental

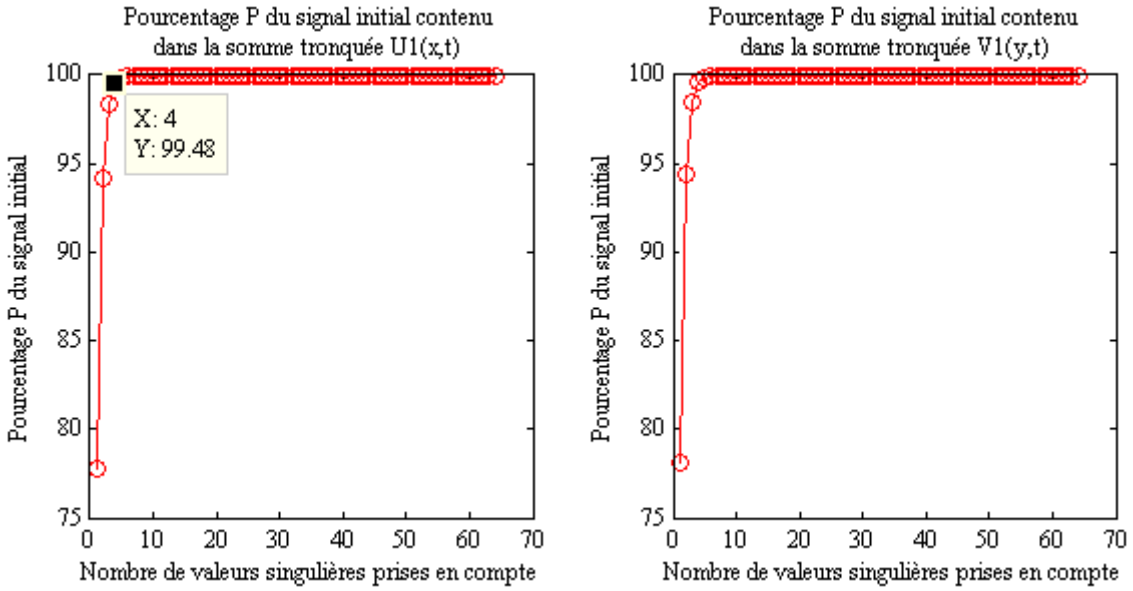


FIGURE 5.3.2: Pourcentage du signal initial contenu dans les sommes tronquées $\sum_{r=1}^{r_0} \eta_{1,r}^x \cdot U_{1,r}^x(x) \cdot V_{1,r}^x(t)^T$ et $\sum_{r=1}^{r_0} \eta_{1,r}^y \cdot U_{1,r}^y(y) \cdot V_{1,r}^y(t)^T$

ramètres suivants : $0,9 \leq \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \leq 1$ pour le coefficient de corrélation, $r_0 = 5$, $k = 1$ pour l'obtention des profils uniques $a_x(i)$ et $a_y(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$ et $a_y^k(i)$. Nous obtenons alors les résultats représentés Figure 5.3.4 page 134. Nous avons également appliqué sur nos mesures la méthode d'estimation de PHILIPPI ET COLL. [89, 50], décrite dans la *Partie bibliographique*. Cette méthode permet d'estimer une valeur *unique* de diffusivité longitudinale dans les directions (Ox) et (Oy) pour un matériau *homogène*. Nous avons obtenu une diffusivité de

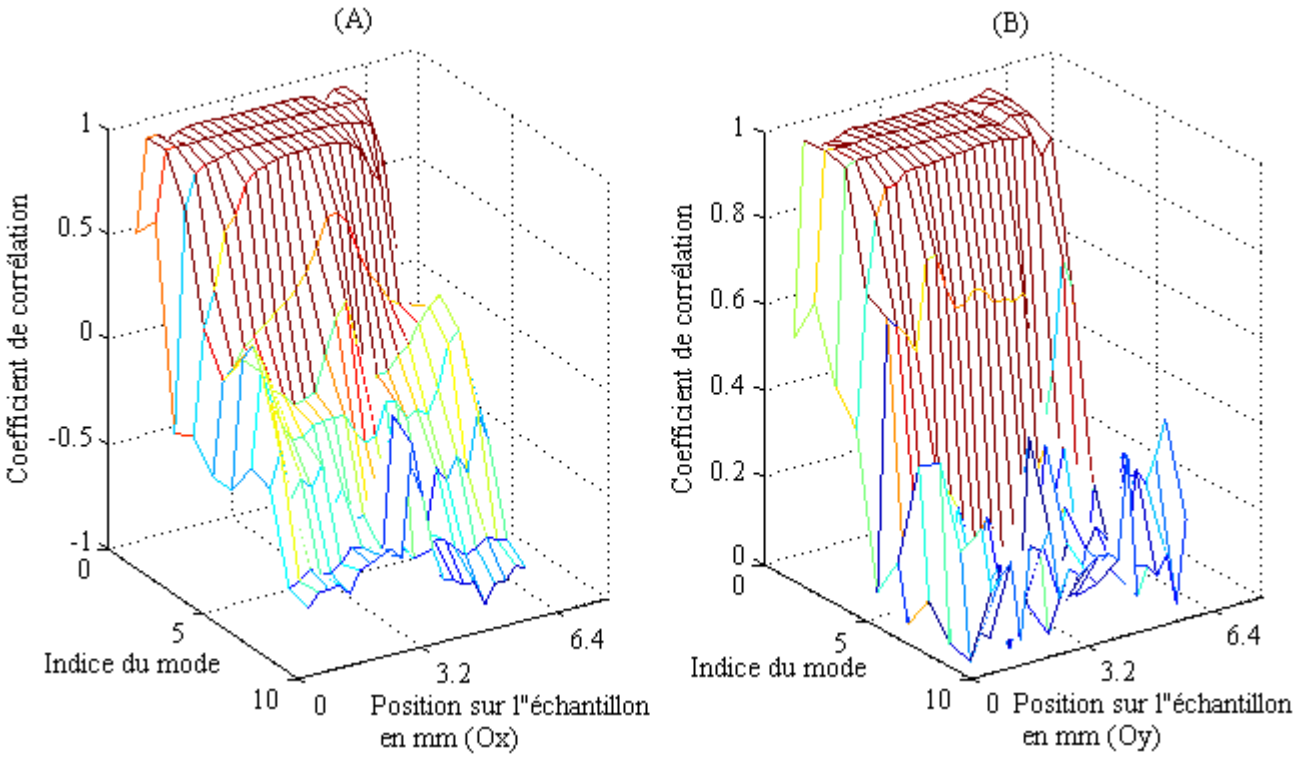


FIGURE 5.3.3: Les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Ox) en (A) et $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Oy) en (B)

$3,97 \cdot 10^{-7 m^2/s}$ et $3,96 \cdot 10^{-7 m^2/s}$ pour les directions (Ox) et (Oy) respectivement. Les valeurs estimées par l'algorithme ${}^2SVD_{(x,y),t}$, sont donc très proches de celles obtenues par la méthode de PHILIPPI ET COLL. Les écarts relatifs entre les valeurs obtenues par ces deux méthodes sont tracés Figure 5.3.5 page suivante.

La valeur de la diffusivité du verre proposée dans la littérature est de l'ordre de $3,4 \cdot 10^{-7 m^2/s}$ [143], [33]. C'est une valeur *moyenne* comme cela a été spécifié dans les références citées.

Ainsi, nous retrouvons l'ordre de grandeur proposé dans la littérature pour les valeurs de diffusivités estimées. Cela permet de valider l'algorithme de calcul basé sur la *double décomposition en valeurs singulières* de manière expérimentale, pour la caratérisation de *matériaux homogènes* de faible épaisseur.

Quant aux valeurs obtenues, nous pouvons faire plusieurs remarques. Tout d'abord elles sont très sensibles au paramètre expérimental Δx. L'objectif de microscope étant à focale fixe, l'objet à caractériser doit être placé dans son *plan focal objet* pour avoir une *bonne mise au point* et ainsi connaitre précisément la valeur de la résolution spatiale Δx. Bien entendu, elle peut être relevée à l'aide d'une mire calibrée, cependant si l'échantillon n'est pas dans le *plan focal objet*, les images infrarouges obtenues seraient «floues» (donc Δx imprécis) et les estimations biaisées. Le positionnement de l'objet à caractériser se faisant manuellement à l'aide de positionneurs micrométriques, il existe par conséquent une incertitude liée au paramètre expérimental Δx. Pour affiner cette valeur, il est également possible d'étudier les performances relatives de résolution spatiale de la caméra infrarouge. La *Fonction de Transfert de Modulation* ou MTF (*Modulation Transfer Function* en anglais) ou encore la *Fonction de Réponse à*

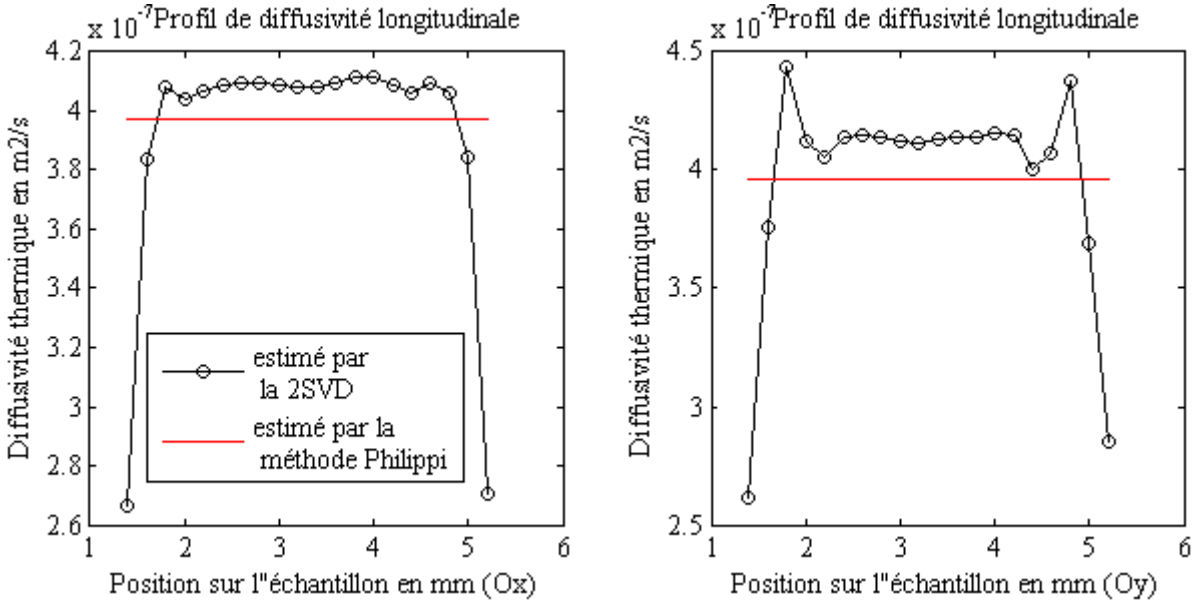


FIGURE 5.3.4: Profil de diffusivités longitudinales obtenus à partir des expressions (4.5.32), (4.5.36)

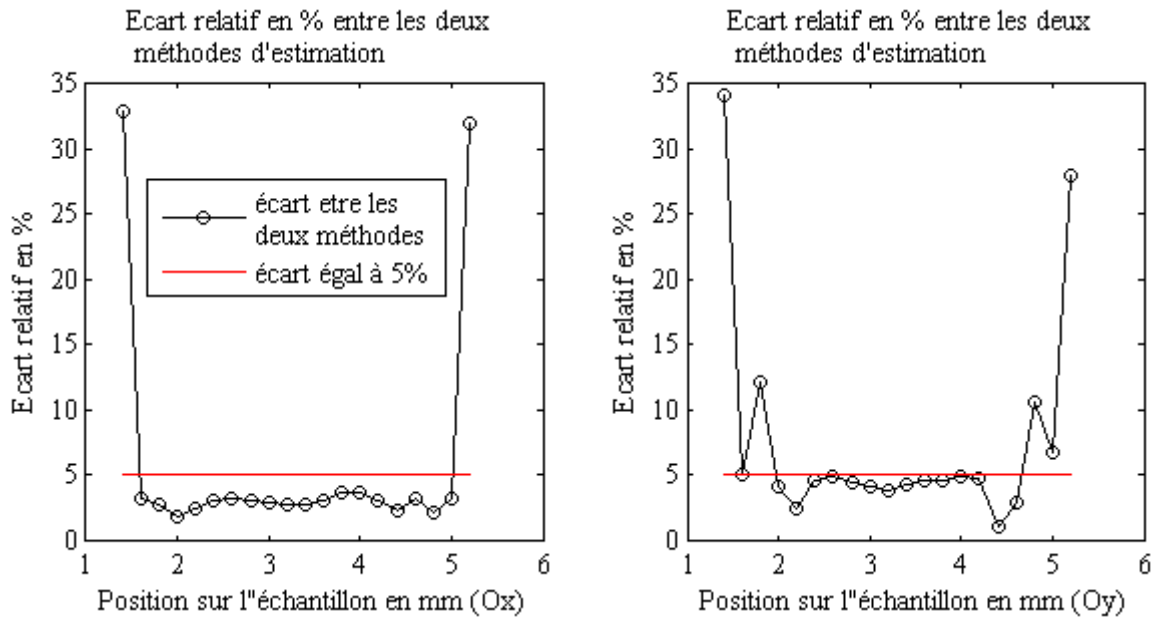


FIGURE 5.3.5: Écart relatif entre les valeurs estimées par la méthode de Philippi et la ${}^2SVD_{(x,y),t}$

une Fente ou SRF (*Slit Response Function* en anglais) sont des méthodes qui permettent de caractériser la résolution optique d'un système.

Par ailleurs, le rayonnement infrarouge passe au travers d'un miroir dichroïque, son état de surface (présence de poussières ou de taches) peut donc avoir une influence sur les mesures.

5.4 Validation expérimentale de la méthode dans le cas d'une réponse impulsionnelle sur une plaque de PVC homogène

5.4.1 Réponse expérimentale au point source impulsionnel

Le dispositif expérimental reste inchangé excepté la caméra utilisée. Cette fois-ci, l'expérience a été réalisée avec une caméra SC7000 TITANIUM de FLIR ATS. Elle possède une matrice de 320×256 détecteurs en Antimoine d'Indium (InSb) opérant dans le spectre d'ondes courtes allant de $2\,\mu m$ à $5\,\mu m$. La résolution spatiale passe à $\Delta x = \Delta y \approx 30\mu m$. La séquence d'images infrarouges a été recoupée pour obtenir un format de 256×256 pixels. Les dimensions longitudinales du champ de température $T(x, y, z = 0, t)$ deviennent $(l_x \times l_y) = 7,7 \times 7,7\,mm$, l'épaisseur de l'échantillon change à $l_z = 1\,cm$. Compte tenu de la faible diffusivité du PVC, l'échantillon peut aussi être considéré comme semi-infini dans la direction (Oz). La valeur de la diffusivité pour le PVC solide proposée dans la littérature [1] est en moyenne de $1 \cdot 10^{-7} m^2/s$. La fourchette des valeurs possibles étant assez large, nous réaliserons les estimations par deux méthodes différentes comme précédemment pour pouvoir comparer les résultats.

La fréquence d'acquisition de la caméra étant toujours de $50\,Hz$ ($\Delta t = 20\,ms$).

La différence par rapport à l'expérience précédente réside dans le fait que la diffusion dans l'épaisseur doit être prise en compte cette fois-ci. Le passage du modèle 3D à 2D s'effectue à l'aide des relations (4.3.17), nous obtenons ainsi un champ de température $\tilde{T}(x, y, t) = \dfrac{T(x, y, z = 0, t)}{\langle T(z = 0, t) \rangle_{x,y}}$.

Cette fois-ci nous choisissons de ne pas effectuer de lissage spatial préalable de manière à voir les conséquences sur les résultats obtenus. Cependant pour assurer la stabilité des schémas numériques, nous prendrons une valeur sur quatre du champ initial, dans les deux directions spatiales. Ainsi le champ se réduit à 64×64 pixels, avec une résolution d'environ $\Delta x = \Delta y \approx 120\mu m$.

Avant d'effectuer la double décomposition en valeurs singulières nous vérifions que l'expression de la moyenne spatiale du champ de température (4.3.17) vérifie bien le comportement du milieu semi-infini selon (Oz), à savoir qu'elle suit bien la pente $-1/2$:

$$\langle T(z = 0, t) \rangle_{x,y} = \frac{Q}{\rho C_p \sqrt{\pi a_z t}}$$

Le résultat obtenu est tracé en Figure 5.4.1 page suivante. Nous retrouvons bien la pente $-1/2$ sur une partie du tracé, montrant ainsi que le comportement du milieu semi-infini suivant (Oz) peut être validé. L'estimation sera effectuée sur la partie temporelle vérifiant bien cette propriété, dans notre cas entre $0,6\,s$ et $2\,s$.

Le champ de température $\tilde{T}(x, y, t)$ obtenu est décomposé une première fois par la ${}^1SVD_{(x,y)}$, nous obtenons alors les $\tilde{U}_1(x, t)$ et $\tilde{V}_1(y, t)$.

1. http ://www.matbase.com/material/polymers/commodity/hard-pvc/properties

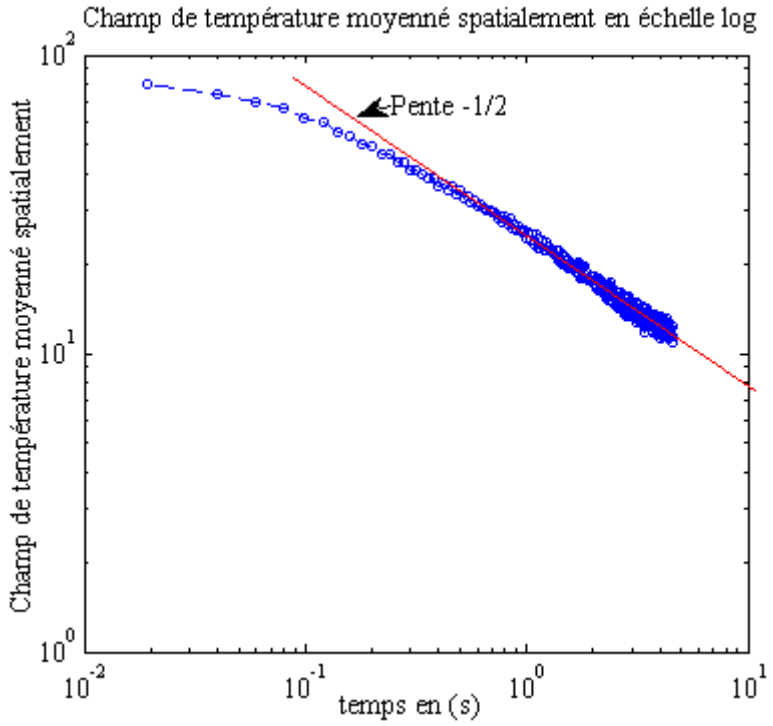


FIGURE 5.4.1: Champ de température $\langle T(z=0,t)\rangle_{x,y}$ issu de l'expression (4.3.17)

Lorsque les secondes décompositions ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$ sur $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ respectivement ont été effectuées, il a été constaté que les 2 premiers modes contenaient plus de 98% du signal initial de $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ respectivement. L'algorithme *extrait* littéralement *l'information pertinente* et la concentre sur les deux premiers modes, ce n'est donc pas dû à un lissage spatial préalable du champ de température $\tilde{T}(x,y,t)$, pouvant être considéré comme un pré-traitement de données. Nous fixons pour la suite de manière assez large le paramètre $r_0 = 5$.

Nous injectons les sommes tronquées de $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ dans le code de calcul et nous obtenons les cartographies des coefficients de corrélation pour une fenêtre spatiale de $\xi = 2,4\,mm$, en Figure 5.4.2 page suivante. Dans la partie centrale du matériau nous retrouvons bien le comportement d'un milieu homogène à savoir $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ pour les deux directions, de plus, seuls les premiers modes sont pertinents. Une légère différence néanmoins entre les deux coefficients de corrélation peut être constatée. En effet, $\rho(\ddot{U}_1^i, \tilde{U}_1^i)$ dans la direction (Oy) est inférieur à $\rho(\ddot{U}_1^i, \tilde{U}_1^i)$ suivant (Ox), nous verrons un peu plus loin une possible explication à cette différence.

Nous procédons ensuite à l'estimation des diffusivités longitudinales en définissant les paramètres suivants : $0,9 \leq \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \leq 1$ pour le coefficient de corrélation, $r_0 = 5$, $k = 1$ pour l'obtention des profils uniques $a_x(i)$ et $a_y(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$ et $a_y^k(i)$. Les résultats sont illustrés en Figure 5.4.3 page suivante.

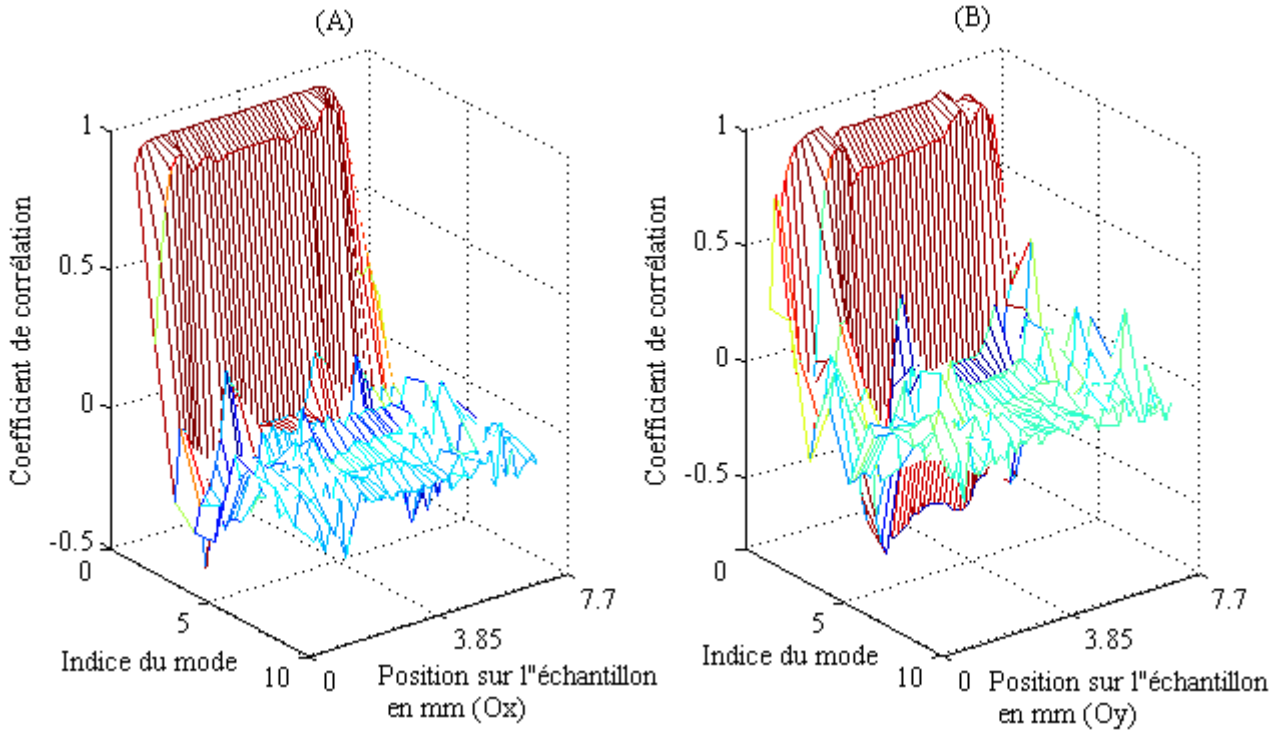


FIGURE 5.4.2: Les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Ox) en (A) et $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Oy) en (B)

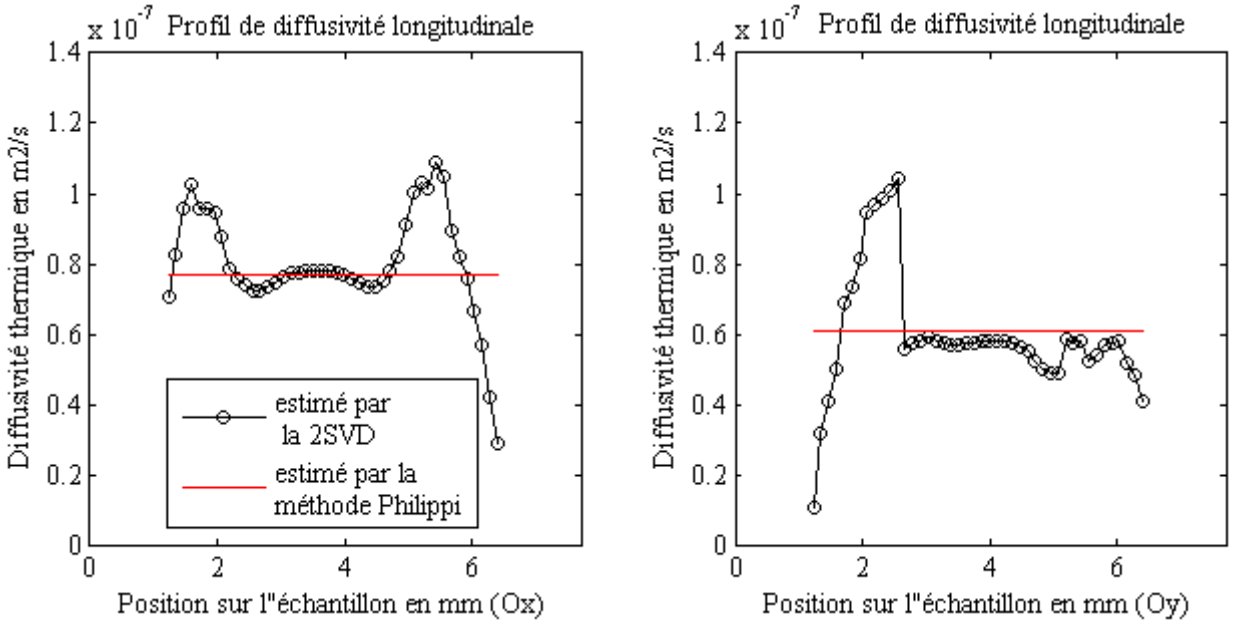


FIGURE 5.4.3: Profil de diffusivités longitudinales obtenus à partir des expressions (4.5.32), (4.5.36)

Les résultats obtenus respectent de manière approchée l'ordre de grandeur proposé dans la littérature qui est d'environ $1 \cdot 10^{-7} m^2/s$. Cependant la diffusivité estimée par les deux méthodes dans la direction (Oy) est nettement plus faible, c'est peut être dû au fait que l'objectif de microscope et par conséquent la *matrice de détecteurs infrarouges*, n'est pas *normale à la surface*

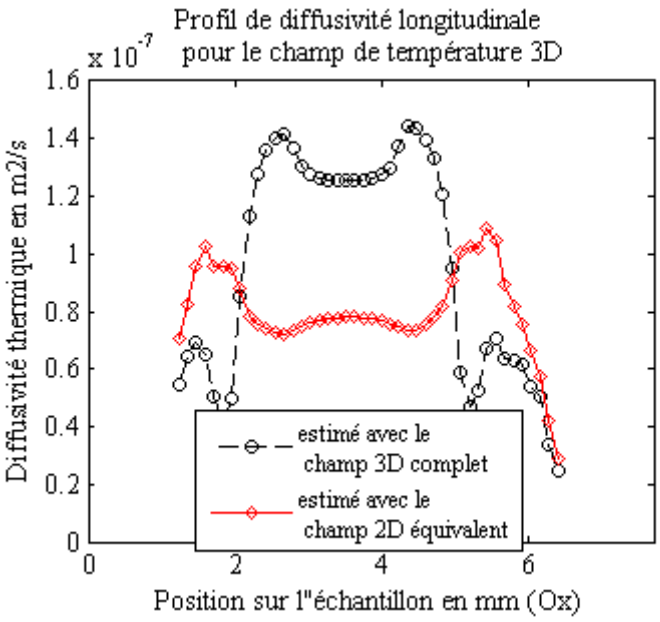


FIGURE 5.4.4: Profil de diffusivités longitudinales obtenu dans la direction (Ox) en traitant le champ de température 3D complet $T(x, y, z = 0, t)$

d'observation, i.e. Δy est différent de Δx.

Il est donc préférable d'effectuer cette validation expérimentale dans de meilleurs conditions et sur un échantillon bien calibré. Néanmoins, à partir de ces données nous pouvons vérifier si le passage du modèle 3D à 2D via les expressions (4.3.17) influe sur les estimations et marche ainsi expérimentalement.

À savoir, si le fait de diviser le champ de température enregistré 3D, $T(x, y, z = 0, t)$, par sa moyenne à chaque instant $\langle T(z = 0, t)\rangle_{x,y}$, pour obtenir un champ de température 2D équivalent $\tilde{T}(x, y, t) = \dfrac{T(x, y, z = 0, t)}{\langle T(z = 0, t)\rangle_{x,y}}$, influe sur les estimations. Pour ce faire, nous injectons directement le champ de température 3D, $T(x, y, z = 0, t)$, dans le code de calcul et non plus $\tilde{T}(x, y, t)$, le résultat pour la direction (Ox) est illustré en Figure 5.4.4.

Le profil ainsi obtenu est nettement supérieur à celui estimé précédemment, comme nous ne prenons plus en compte la diffusion dans l'épaisseur.

Bien qu'une analyse expérimentale sur d'autres échantillons calibrés reste nécessaire, nous pouvons dans une première approche valider l'algorithme *de la double décomposition en valeurs singulières* pour la caractérisation de diffusivités longitudinales de *matériaux homogènes épais*.

Le cas des matériaux hétérogènes est étudié dans le chapitre suivant.

5.5 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre nous avons abordé plusieurs cas de figure d'estimation de profils de diffusivités longitudinales. Tout d'abord la validation sur des simulations numériques nous a permis de retrouver les profils des diffusivités longitudinales définis pour les simulations avec un biais d'estimation inférieur à 2%. Par ailleurs, les différents paramètres influents de la méthode d'estimation ont été étudiés, qui sont : le nombre de modes r_0 pris en compte, le nombre de modes pris en compte pour l'estimation du profil unique de diffusivités $a_x(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$, la taille du fenêtrage spatial. Nous avons pu constater que les informations pertinentes sont littéralement extraites des données brutes servant aux estimations, permettant ainsi une compression optimale des données, ce qui a pour conséquence de réduire considérablement les temps de calculs. En effet, l'analyse de sensibilité basée sur l'étude des corrélations locales entre les dérivées partielles du signal, permet de réduire la quantité de données traitées en limitant les calculs aux régions spatiales où la sensibilité aux paramètres recherchés est maximale, l'estimation se faisant dans l'espace transformé.

Nous avons mené une validation expérimentale sur deux cas de figure distincts. La première expérience portait sur la caractérisation de diffusivités longitudinales d'une lame de verre mince, pour laquelle la diffusion de la chaleur a été supposée bidimensionnelle. Nous avons ainsi pu retrouver l'ordre de grandeur proposé dans la littérature pour la diffusivité du verre. Pour corroborer les résultats estimés par la méthode basée sur la double décomposition en valeurs singulières, nous avons utilisé la méthode de Philippi, bien connue pour la caractérisation de diffusivités longitudinales de matériaux *homogènes*. Comparativement, les résultats obtenus sont proches pour les deux méthodes, ce qui nous a permis dans une première approche de valider le code calcul. Nous avons également discuté de l'importance de bien connaitre la *résolution spatiale* pour l'estimation des valeurs de diffusivités.

La seconde expérience portait sur la caractérisation d'une plaque de PVC homogène. La différence par rapport au matériau précédent résidait dans le fait que la diffusion en épaisseur devait être prise en compte cette fois-ci. Nous avons procédé de la même manière que précédemment et avons effectué l'estimation par les deux méthodes pour pouvoir comparer les résultats. Ces résultats sont une nouvelle fois très proches, bien que les diffusivités estimées dans la direction (Oy) sont inférieures à celles obtenues dans la direction (Ox). Ce qui pourrait s'expliquer par le fait que les résolutions spatiales Δx et Δy sont légèrement différentes l'une de l'autre. Les ordres de grandeur obtenus pour les diffusivités estimées par les deux méthodes appartiennent aux plages de valeurs proposées dans la littérature.

Nous avons également vérifié l'influence sur les estimations de la prise en compte ou non de la diffusion en épaisseur. Il est observé que les résultats obtenus sont nettement différents suivant que l'on tient compte ou pas de la diffusion en épaisseur. Bien que d'autres expériences bien calibrées restent nécessaires, nous avons pu valider dans une première approche la méthode basée sur la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ pour la caractérisation de *matériaux homogènes épais*.

Chapitre 6

Étude numérique de matériaux hétérogènes. Application de la double décomposition ${}^2SVD_{(x,y),t}$ au Contrôle Non Destructif (CND)

6.1 Introduction

Dans ce nouveau chapitre nous allons traiter le cas des matériaux hétérogènes. Pour simplifier notre étude nous supposons la diffusion bidimensionnelle. À travers les différentes simulations numériques nous nous proposons d'étudier le comportement du code de calcul ${}^2SVD_{(x,y),t}$ appliqué aux matériaux hétérogènes. La nouveauté par rapport au chapitre précédent réside dans l'utilisation d'excitations thermiques spatialement périodiques, mais toujours séparables. Nous travaillerons par ailleurs aux échelles centimétriques, les principes exposés restant toujours valables aux micro-échelles. Quelques applications au contrôle non destructif des matériaux seront proposées, ainsi qu'une nouvelle approche pour la caractérisation de propriétés thermophysiques de matériaux hétérogènes, basée sur le traitement local du modèle de diffusion thermique et la parallélisation du code de calcul ${}^2SVD_{(x,y),t}$.

6.2 Simulation de plusieurs impulsions laser sur un matériau 2D hétérogène

Dans cette étude nous allons travailler à *l'échelle centimétrique*. Dans le cas des matériaux hétérogènes, l'influence de la taille de la fenêtre spatiale ξ utilisée pour l'estimation de $a_x(i)$ prend toute son importance. Nous avons vu que dans le cas des matériaux homogènes son choix était assez libre. Plus cette fenêtre est large, plus l'influence du bruit de mesure diminue, améliorant ainsi la sensibilité locale sur des zones plus étendues. Cependant, pour les matériaux hétérogènes ce serait au détriment de la *résolution spatiale*. En effet, les petites variations

spatiales seraient tout simplement *lissées*. La fenêtre ξ doit être choisie en fonction de la résolution spatiale désirée, généralement faible, ce qui a pour conséquence de dégrader localement le facteur signal sur bruit. Pour remédier à cela expérimentalement, il est possible d'utiliser *un réseau périodique de spots laser*, pour imposer de forts gradients de température locaux. La seule condition étant d'assurer la séparabilité du champ de température. Ce qui est rendu possible à l'aide de dispositifs optiques créant des motifs périodiques de type «fentes d'Young» ou en redirigeant plusieurs faisceaux lasers à l'aide de miroirs (aux petites échelles seulement). Il est encore possible d'utiliser un masque spatial associé à une lampe flash comme proposé par Krapez et Coll. [4, 5] et Batsale et Coll. [6] ces dispositifs étant plus adaptés aux échelles centimétriques (consulter la *Partie bibliographique*). La Figure 6.2.1 illustre de tels champs de température.

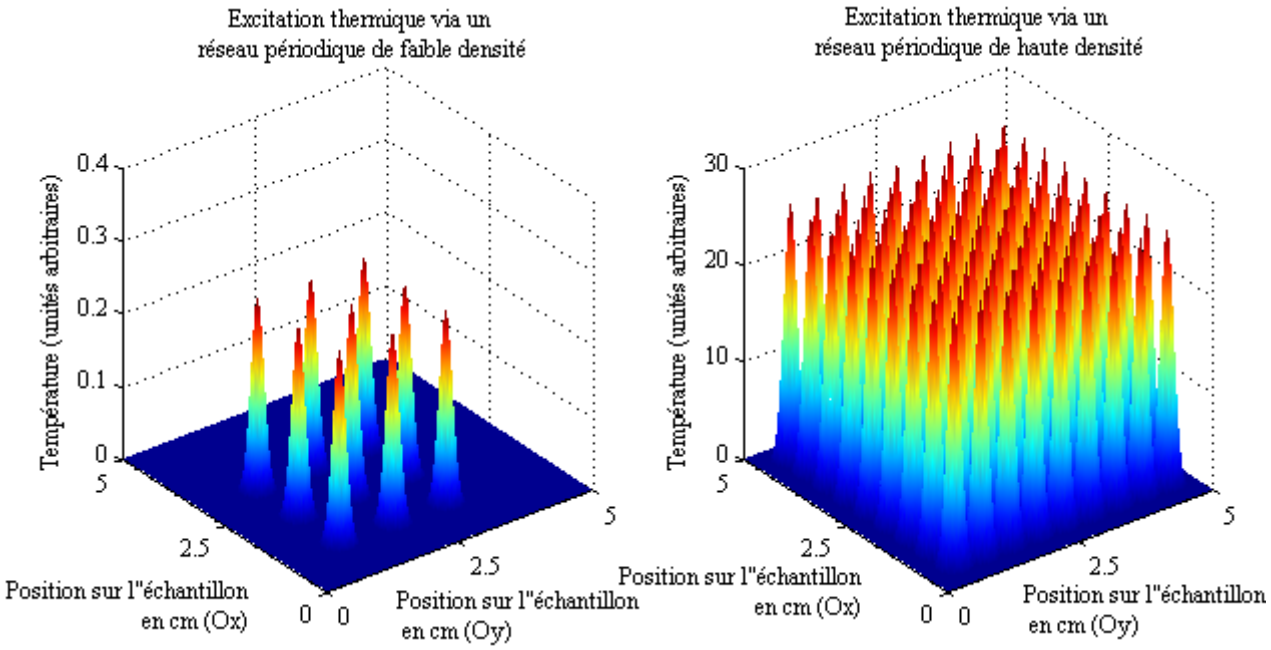


Figure 6.2.1: Réseaux périodiques de champs de température séparables possibles pour l'étude

Nous utilisons une approche de type «volumes finis» [103] pour simuler l'évolution temporelle de plusieurs impulsions laser sur un milieu hétérogène 2D, pour lequel les conditions infinies aux bords sont vérifiées. Ce champ de température simulé est par nature séparable : $T(x,y,t) = T(x,t) \cdot T(y,t)$. Il est issu du problème (4.5.1), calculé avec les paramètres suivants :

$$\begin{gathered}
(l_x \times l_y) = 10 \times 10\, cm \\
\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-4}\, m \\
\Delta t = 40\, ms \\
t_f = 6\, s \\
\rho C_p = 10^7 {}^{J}/_{m^3 K} \\
\lambda_{x,y}(x,y) = 1\, {}^{W}/_{m \cdot K} \text{ dans la partie saine du milieu} \\
\lambda^d_{x,y}(x,y) = 0,3\, {}^{W}/_{m \cdot K} \text{ à l'endroit du défaut}
\end{gathered} \tag{6.2.1}$$

Un faible bruit de mesure aux caractéristiques suivantes a été ajouté :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}(t) + \epsilon(t) = \{T_{i,j}(t)\}_{i=1\ldots l,\, j=1\ldots c} + \epsilon_{i,j}(t) \tag{6.2.2}$$

avec $\epsilon_{i,j}(t)$ du bruit *blanc additif gaussien* d'écart type $\sigma(T) = {}^{T_{max}}/_{100}$ avec un rapport signal sur bruit défini comme :

$$SNR = \left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j}^{c} var\left[T_{i,j}(t)\right]\right)\left(\sum_{i=1}^{l}\sum_{j}^{c} var\left[\epsilon_{i,j}(t)\right]\right)^{-1} = 683 \tag{6.2.3}$$

De plus, le nombre de maille pour $\lambda_{x,y}(x,y) = 1\,{}^{W}/_{m\cdot K}$, $n_m = \dfrac{\dfrac{\lambda_{x,y}(x,y)}{\rho C_p}\cdot\Delta t}{\Delta x^2} = 0,16$ assurant la stabilité des schémas numériques est bien compris entre $0 < n_m < {}^{1}/_{4}$ pour le cas 2D [141, Chapitre 12, Section 12-10].

Il est important de comprendre avant d'aller plus loin que l'estimation de diffusivités $a_{x,y}(x,y)$ en tout point du milieu n'est pas possible, mais seulement celle de profils moyens de diffusivités dans les directions (Ox) et (Oy), dans des conditions spatiales particulières explicitées plus loin :

$$\begin{aligned} a_x(x) &= \frac{1}{l_y}\int_0^{l_y} a_{x,y}(x,y)dy \\ a_y(y) &= \frac{1}{l_x}\int_0^{l_x} a_{x,y}(x,y)dx \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Nous allons expliquer la raison pour laquelle cela marche ainsi.

6.2.1 Adaptation de la SVD Analytique (ASVD) de Bamford et Coll. [1, 2, Chapitre 2]

Bamford et Coll. ont développé une décomposition simple, comparable à la SVD classique, qui permet de mieux cerner physiquement ce qui se passe lors du calcul de la SVD sur des champs de température. La SVD Analytique (ASVD) a été développée pour le cas de décompositions *espace-temps* $(X,t) = (x\cdot y, t)$. Nous avons adapté cette décomposition dans le cas *espace-espace* (x,y), l'équivalent de l'opération ${}^{1}SVD_{(x,y)}$.

Nous partons du champ de température $T(x,y,t)$ dont chaque image à l'instant t_k peut être décomposée en $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$ comme précédemment. Nous écrivons l'algorithme récursif suivant pour le calcul de ces termes à l'instant t_k.

$$\Psi_1(x,y,t_k) = T(x,y,t_k) \text{ initialisation} \tag{6.2.5}$$

les termes $\Psi_n(x,y,t_k),\ n\in\mathbb{N}$ sont des «résidus» entre une fonction et son approximation à l'ordre n. Pour $n=1$, les résidus sont tout simplement le champ de température $T(x,y,t_k)$. Chaque approximation suivante est effectué en décomposant $\Psi_n(x,y,t_k),\ n\in\mathbb{N}$ en un produit de fonctions séparables qui sont des «projections» de $\Psi_n(x,y,t_k)$ suivant les directions de l'espace (Ox) et (Oy), nous obtenons respectivement $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$, calculés de la manière

suivante [1] :

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n(x,t_k) &= \frac{\{\Psi_n \cdot \{\Psi_n\}_x\}_y(x)}{\left\|\{\Psi_n \cdot \{\Psi_n\}_x\}_y(x)\right\|_x} \\ \tilde{V}_n(y,t_k) &= \frac{\{\Psi_n \cdot \{\Psi_n\}_y\}_x(y)}{\left\|\{\Psi_n \cdot \{\Psi_n\}_y\}_x(x)\right\|_y}\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

ces projections sont illustrées Figure 6.2.2.

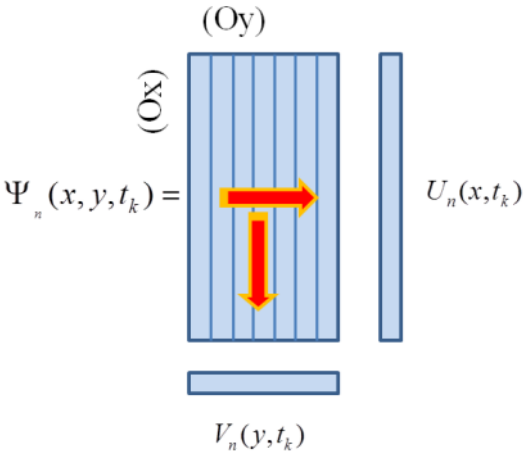


FIGURE 6.2.2: Projections de $\Psi_n(x,y,t_k)$ sur les moyennes $\{\Psi_n(x,y,t_k)\}_x$ et $\{\Psi_n(x,y,t_k)\}_y$ respectivement, pour l'obtention des $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$

La «norme» associée à la décomposition de $\Psi_n(x,y,t_k)$ par les fonctions $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$ est donnée par :

$$\gamma_n(t_k) = \{\{\Psi_n \cdot \tilde{V}_n\}_y \cdot \tilde{U}_n\}_x = \left\|\{\Psi_n \cdot \tilde{V}_n\}_x\right\|_y \tag{6.2.7}$$

Nous pouvons alors écrire une approximation séparable de $\Psi_n(x,y,t_k)$ qui est :

$$\phi_n(x,y,t_k) = \gamma_n(t_k) \cdot \tilde{U}_n(x,t_k) \cdot \tilde{V}_n(y,t_k) \tag{6.2.8}$$

les résidus de cette approximation sont simplement :

$$\Psi_{n+1}(x,y,t_k) = \Psi_n(x,y,t_k) - \phi_n(x,y,t_k) \tag{6.2.9}$$

Finalement chaque image du champ de température $T(x,y,t_k)$, décomposée à l'instant t_k en $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$, peut être approximée par :

$$T(x,y,t_k) = \sum_{h=1}^{n_0} \gamma_h(t_k) \cdot \tilde{U}_h(x,t_k) \cdot \tilde{V}_h(y,t_k)^T \tag{6.2.10}$$

Cette dernière expression comme nous pouvons le voir est équivalente à l'équation (4.4.5). BAMFORD ET COLL. [1, 2, CHAPITRE 2] ont démontré le fonctionnement de cette SVD Analytique en la comparant à la SVD classique dans le cas de décompositions *espace-temps*, nous avons adapté cet algorithme au cas *espace-espace* et vérifié son bon fonctionnement.

1. Avec les notations suivantes : $\{\Psi_n\}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{l_x} \Psi_n(x,y,t_k)dx$ et $\{\Psi_n\}_y = \frac{1}{l_y}\int_0^{l_y} \Psi_n(x,y,t_k)dy$
Les normes spatiales L^2 sont notées $\left\|\cdot\right\|_p$ avec $p = x, y$

D'après les expressions en (6.2.6), nous pouvons constater que les $\tilde{U}_n(x,t_k)$ et $\tilde{V}_n(y,t_k)$ ne sont donc que des projections de $T(x,y,t_k)$ sur ses moyennes suivant (Ox) et (Oy). C'est la raison pour laquelle nous pouvons seulement espérer d'obtenir dans le cas de *matériaux hétérogènes*, des estimations de profils moyens de diffusivités dans les directions (Ox) et (Oy). En réalité, c'est plus complexe que cela comme nous allons le voir à travers les exemples ci-dessous.

En ce qui concerne les matériaux homogènes, le problème ne se pose pas, mais nous estimons aussi des *profils «moyens» de diffusivités*, lissant ainsi d'éventuelles hétérogénéités dans le milieu homogène.

6.3 Étude du premier cas de figure d'un milieu hétérogène

Le premier champ de diffusivité simulé $a_{x,y}(x,y)$ est présenté Figure 6.3.1. Nous simulons trois défauts débouchants, normaux à la surface d'observation, aux dimensions suivantes $(l_x \times l_y)$ en cm : (10×1), $(10 \times 0,5)$ et $(10 \times 0,05)$.

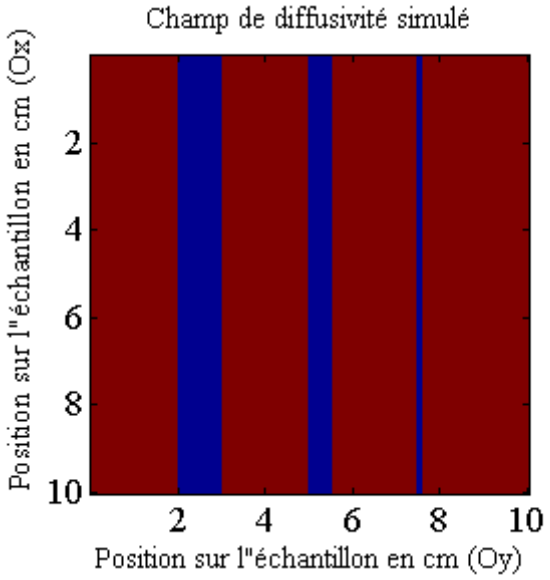


FIGURE 6.3.1: Champ de diffusivité simulé $a_{x,y}(x,y)$

Les profils moyens de diffusivités $a_x(x)$ et $a_y(y)$ dans les directions (Ox) et (Oy) obtenus à partir du champ de diffusivités simulé $a_{x,y}(x,y)$ en Figure 6.3.1 sont illustrés Figure 6.3.2 page suivante.

Le champ de température $T(x,y,t)$ obtenu est décomposé une première fois par la ${}^1SVD_{(x,y)}$, nous obtenons alors les $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ représentés Figure 6.3.3 page suivante.

Après les secondes décompositions ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$ sur $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$, nous avons relevé que les 5 premiers modes contiennent plus 99% du signal initial $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ respectivement. Nous fixons donc pour la suite le paramètre $r_0 = 5$. Quant au choix de la fenêtre

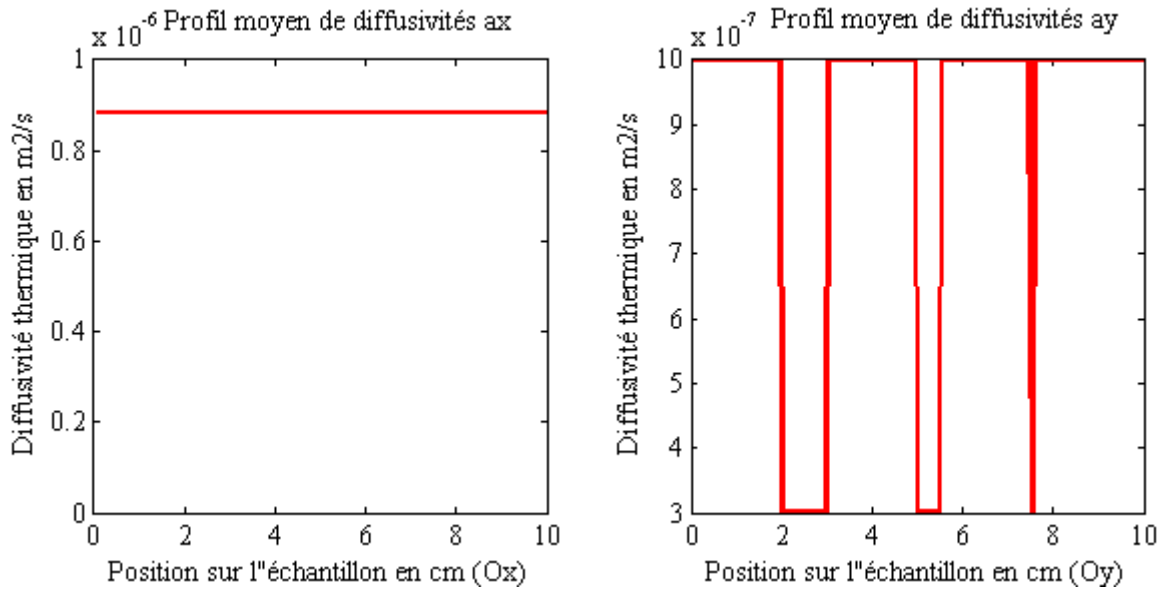


FIGURE 6.3.2: Les profils moyens de diffusivités $a_x(x)$ et $a_y(y)$ dans les directions (Ox) et (Oy)

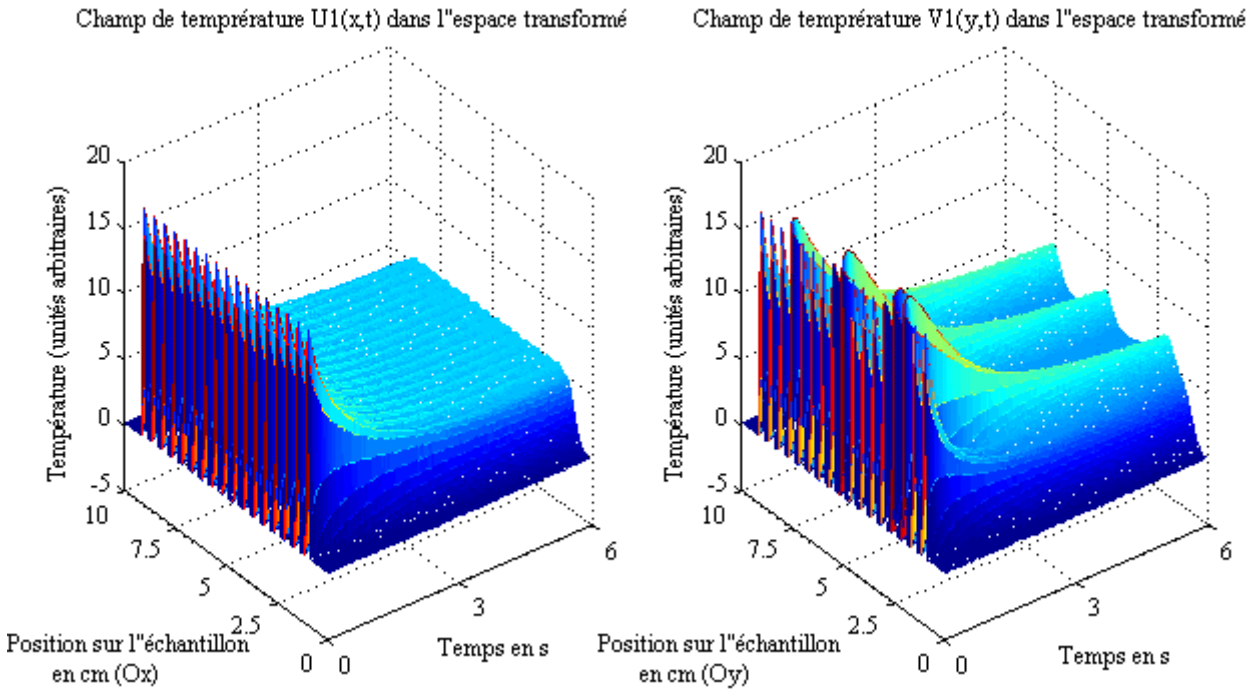


FIGURE 6.3.3: Champs de température $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ obtenus avec une densité d'excitation de $0,8$ spots par mm^2

spatiale, nous la prenons égale à la valeur de la période du champ d'excitation, i.e. la valeur de la distance entre deux spots consécutifs, donc $\xi = 5\,mm$. L'influence du choix de cette valeur dans le cas de plusieurs sources d'excitation, a été étudié par BAMFORD ET COLL. dans [2, Chapitre 3], [11]. Il a été montré que lorsque la taille de la fenêtre spatiale est inférieure à la valeur de la période du champ d'excitation, l'écart relatif entre les valeurs des diffusivités exactes et estimées augmente. Même constat lorsque la taille de la fenêtre spatiale est supérieure à la

valeur de la période du champ d'excitation. La taille *optimale* pour ξ étant *égale à la valeur de la période* du champ d'excitation ou au multiple de cette période.

Nous injectons les sommes tronquées de $\tilde{U}_1(x,t)$ et $\tilde{V}_1(y,t)$ dans le code de calcul et nous obtenons les cartographies des coefficients de corrélation en Figure 6.3.4. Nous retrouvons bien le comportement d'un milieu homogène aux endroits sans défaut, i.e. $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$. Au droit des défauts, cette corrélation est plus faible, puisque $\rho(\dot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ n'est plus négligeable comme ce fut le cas pour les matériaux homogènes ; le modèle complet défini par les expressions (4.5.3), (4.5.4), (4.5.35) doit alors être pris en compte. Le tracé des coefficients de corrélation permet à lui seul de détecter une éventuelle anomalie. On retrouve ainsi la présence des 3 défauts. De plus, nous pouvons remarquer que pour les défauts les plus larges, la corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \to 1$ suivant (Oy). En effet, *localement* le défaut étant *homogène*, le modèle de diffusion complet peut être simplifié.

Par ailleurs, toujours seuls les premiers modes restent pertinents. Suivant la direction (Ox) et (Oy) nous avons 3 modes vérifiant $0,9 \leq \rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i) \leq 1$.

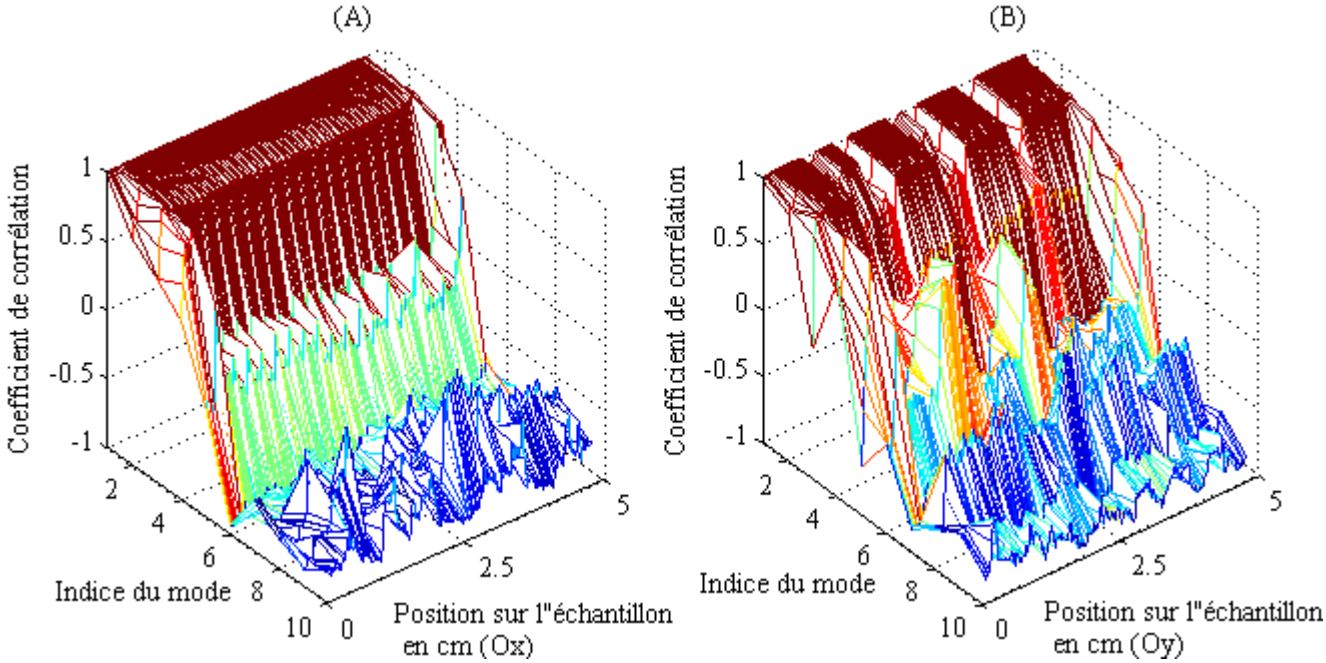


FIGURE 6.3.4: Les coefficients de corrélation $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Ox) en (A) et $\rho(\ddot{U}_k^i, \tilde{U}_k^i)$ suivant (Oy) en (B)

Nous procédons ensuite à l'estimation des diffusivités longitudinales en utilisant le coefficient de corrélation global (4.5.37) ; nous avons pris $k = 1$, pour l'obtention des profils uniques $a_x(i)$ et $a_y(i)$ à partir des profils $a_x^k(i)$ et $a_y^k(i)$. Les résultats sont en Figure 6.3.5 page suivante.

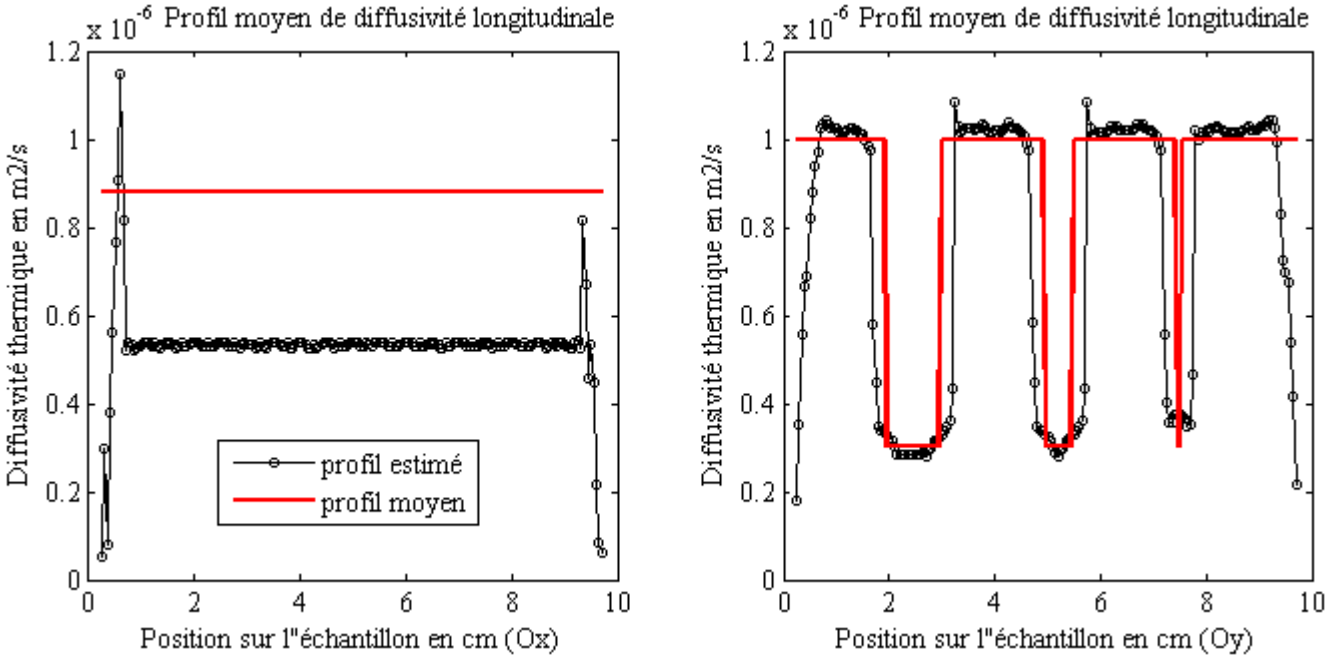


FIGURE 6.3.5: Profils moyens de diffusivités longitudinales dans les directions (Ox) et (Oy)

Le profil moyen de diffusivité longitudinale estimé suivant la direction (Ox) est nettement inférieur à celui calculé par la relation (6.2.4). Nous pourrions donc en conclure que les profils estimés par l'algorithme de la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ ne correspondent pas aux profils moyens longitudinaux. Cependant, le résultat obtenu suivant (Oy) révèle une nuance à cette conclusion préliminaire. En effet, si les défauts traversent complètement le milieu à caractériser (du moins la partie du milieu comprise dans la scène thermique enregistrée par la caméra infrarouge), les estimations de profils moyens sont en bonne adéquation avec ceux calculés par les expressions (6.2.4).

Pour les défauts de dimensions (10×1) et $(10 \times 0,5)$, le profil de diffusivité estimé colle bien au profil moyen calculé, bien qu'un lissage induit par la méthode soit visible. Les défauts estimés sont plus larges quel le profil exact. De plus, pour le plus petit défaut de dimensions $(10 \times 0,05)$ les valeurs obtenues sont légèrement plus faibles. Le paramètre influent mis en évidence ici est celui de la largeur de la fenêtre spatiale ξ, comme cela a été discuté auparavant. Pour y remédier, une solution possible serait d'augmenter la densité d'excitation thermique, si bien sûr cela est faisable expérimentalement, pour pouvoir ainsi réduire la taille de la fenêtre spatiale. Nous rappelons que la taille de la fenêtre ξ est égale à la période spatiale de l'excitation thermique, i.e. la distance entre deux spots consécutifs.

Pour compléter cette étude nous allons traiter un second exemple.

6.4 Étude du second cas de figure d'un milieu hétérogène

Le nouveau champ de diffusivité simulé $a_{x,y}(x,y)$ est présenté Figure 6.4.1 page suivante. Nous simulons deux défauts débouchants, normaux à la surface d'observation, aux dimensions

$(l_x \times l_y)$ en cm : $(3,5 \times 0,5)$, et $(2,5 \times 0,05)$. Ce champ de diffusivité hétérogène peut également être considéré et traité comme étant celui d'un matériau diphasique.

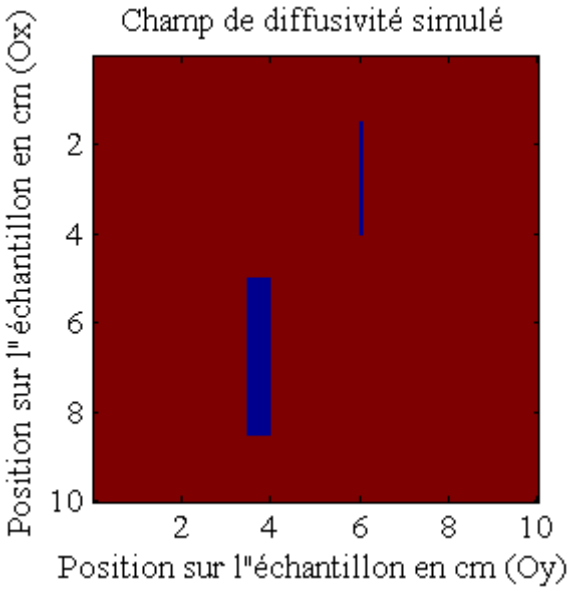


FIGURE 6.4.1: Champ de diffusivité simulé $a_{x,y}(x, y)$

Les paramètres de simulation restent inchangés. Les résultats estimés sont exposés en Figure 6.4.2.

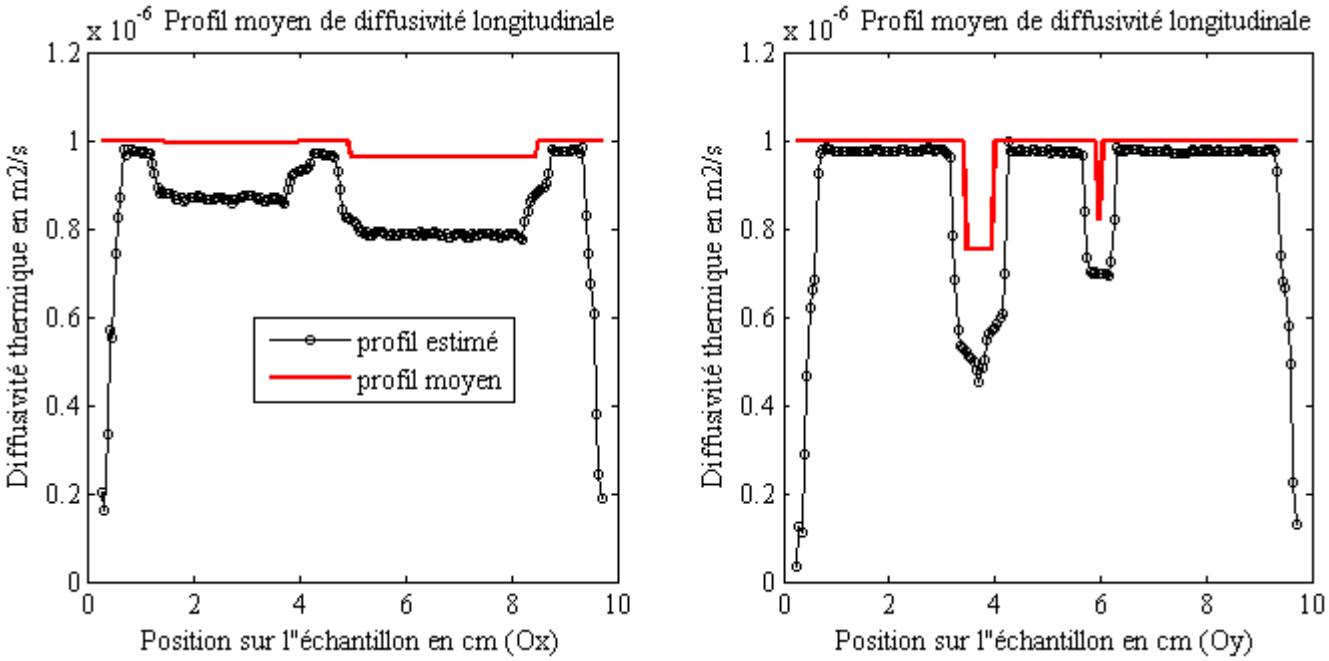


FIGURE 6.4.2: Profils moyens de diffusivités longitudinales dans les directions (Ox) et (Oy)

Première constatation, nous retrouvons les tendances dans les valeurs estimées, correspondant aux profils moyens de diffusivités calculés. Nous pouvons également corroborer les résultats obtenus dans ce nouveau cas de figure avec ceux du cas précédent. À savoir, pour les hétéro-

généités ne traversant plus le milieu de part en part, les profils moyens de diffusivités estimés sont nettement inférieurs au profils moyens calculés.

Par ailleurs, dans ce nouveau cas de figure, une différence notable en termes d'amplitude peut être constatée sur *les parties homogènes du milieu*. Ce qui n'était pas le cas précédemment. Ce résultat important, était prévisible, car en effet le champ de température $T(x, y, t)$ n'est plus complétement séparable. Pour bien comprendre ce qu'il se passe, nous allons l'illustrer comme suit.

Champ de diffusivité «quasi» séparable

Nous nous proposons d'appliquer la première décomposition en valeurs singulières spatiale ${}^1SVD_{(x,y)}$, sur les champs de température $T(x, y, t_k)$ à l'instant suivant l'excitation initiale, pour les deux cas de figure étudiés et représentés en Figures 6.3.1 page 144 et 6.4.1 page précédente.

Suite à ces décompositions, nous traçons les valeurs singulières obtenues en Figure 6.4.3. Comme nous pouvons le voir, des *valeurs singulières intermédiaires* apparaissent pour le cas du champ de diffusivité représenté Figure 6.4.1 page précédente. Ce champ est effectivement «moins» séparable par rapport au premier.

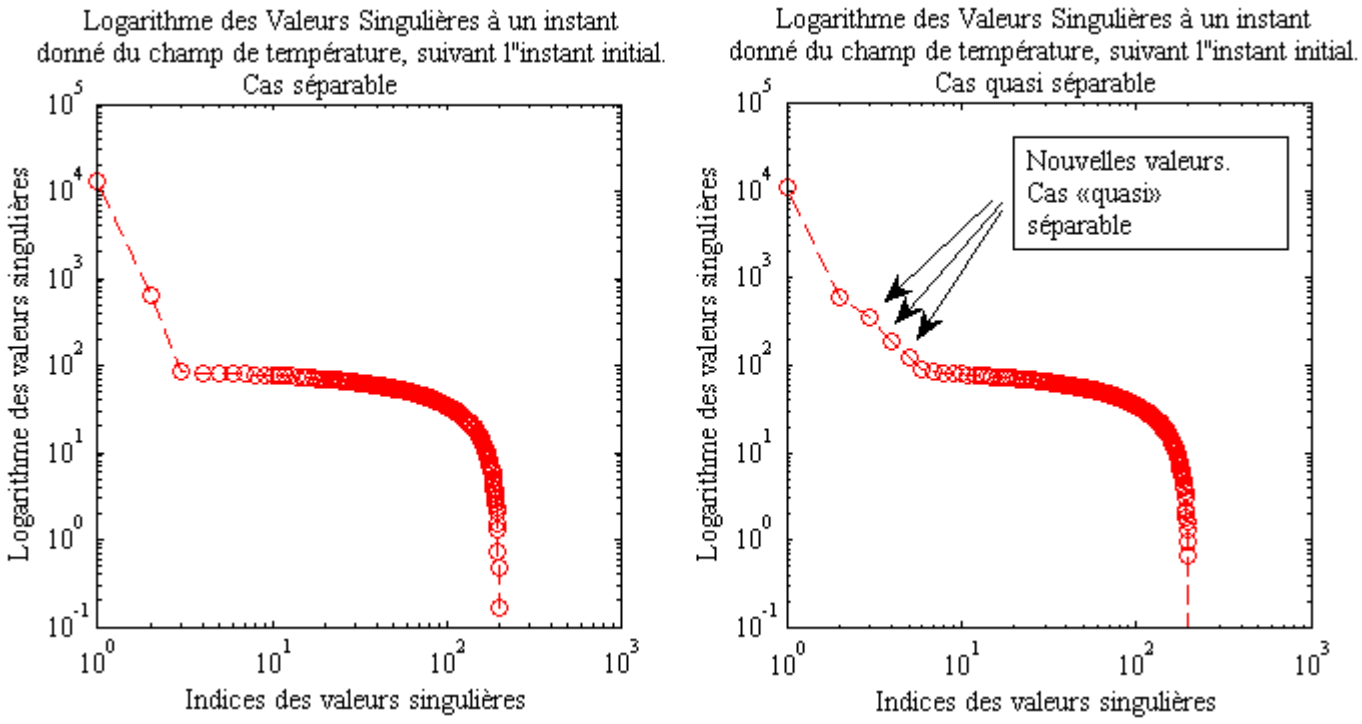


FIGURE 6.4.3: Logarithme des valeurs singulières à un instant donné du champ de température, suivant l'instant initial, pour les deux cas de figure étudiés

Jusqu'à présent, nous avons traité les données avec dans l'expression (4.4.5), $\gamma_{n=1}(t_k)$. Chaque image étant un champ de température *séparable*, nous n'avions alors qu'une valeur singulière *dominante* $\gamma_1(t_k) \gg \gamma_{n>1}(t_k)$, les autres valeurs pouvant être négligées. Faisant ainsi on introduit un certain biais dans les estimations. Lorsque le champ de diffusivité devient «moins» séparable, le champ de température correspondant le devient aussi, par conséquent

de nouvelles valeurs singulières apparaissent. Si on les néglige aussi, *le biais introduit* dans les estimations de diffusivités longitudinales *augmente*, comme nous pouvons le constater en Figure 6.4.2 page 148.

Il est très délicat de prendre en compte les valeurs singulières $\gamma_{n>1}(t)$, car les vecteurs singuliers associés $\tilde{U}_{n>1}(x,t)$ et $\tilde{V}_{n>1}(y,t)$, ne vérifient pas les modèles de diffusion tels que : (4.5.3) et (4.5.4) respectivement. Du point de vue de la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux, cela peut paraitre gênant, bien que nous allons pouvoir lever cette difficulté autrement. Du point de vue de *l'Évaluation Non Destructive des matériaux* (END), cette manière de procéder reste relativement satisfaisante, puisque même pour des défauts de faibles dimensions nous retrouvons sur les profils estimés, la présence des hétérogénéités/défauts. De plus, leur présence est *magnifiée* par la méthode comme nous pouvons le constater sur les graphiques Figure 6.4.2 page 148. Cette méthode nous donne aussi les coordonnées géométriques approchées de l'endroit où se situent les défauts (qui sont donc étroitement liées à la largeur de la fenêtre spatiale ξ).

Pour pallier au problème lié à la précision des estimations des profils moyens de diffusivités, la solution que nous proposons est la suivante : le champ de température $T(x,y,t_k)$ à chaque instant, peut être *maillé spatialement*. Les dimensions des mailles dépendant de la taille des hétérogénéités à caractériser, i.e. pour que localement les propriétés du milieu soient homogènes dans les mailles. Ensuite la méthode de la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$ est implémentée pour traiter *chaque maille séparément*. L'avantage non négligeable de cette méthode réside dans le fait qu'elle autorise une *parallélisation massive* des calculs. Le principe de la méthode est illustré sur la Figure 6.4.4.

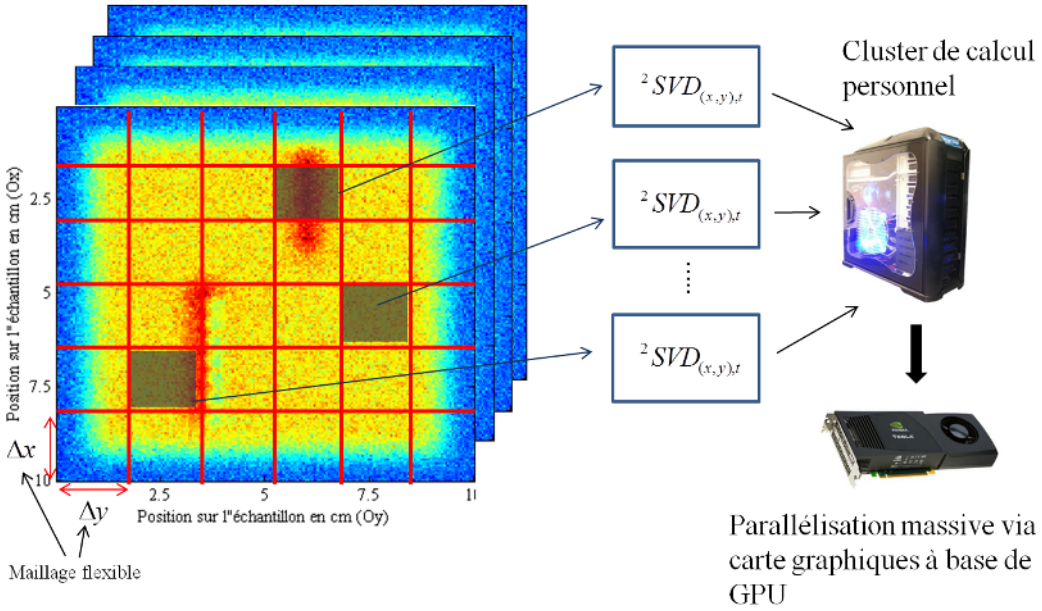


FIGURE 6.4.4: Parallélisation du code de calcul ${}^2SVD_{(x,y),t}$ pour la caractérisation des propriétés thermophysiques des matériaux. Le champ de température $T(x,y,t_k)$ est maillé spatialement à chaque instant

Nous proposons un exemple de ce genre de calcul. La Figure 6.4.5 montre un zoom sur une maille dans laquelle le code de calcul ${}^2SVD_{(x,y),t}$ est appliqué. Le résultat obtenu est illustré en Figure 6.4.6. Nous retrouvons ainsi la valeur de la diffusivité de l'hétérogénéité/défaut *avec une meilleure précision.*

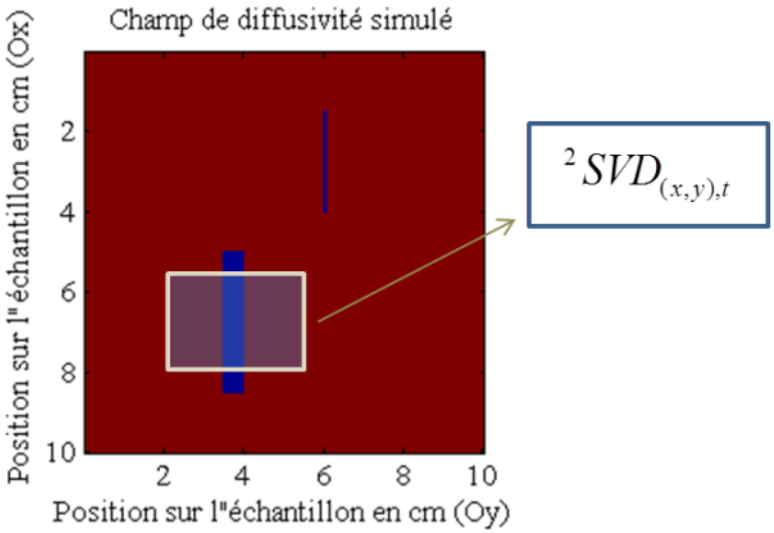


FIGURE 6.4.5: Exemple d'implémentation du code de calcul ${}^2SVD_{(x,y),t}$ sur une maille

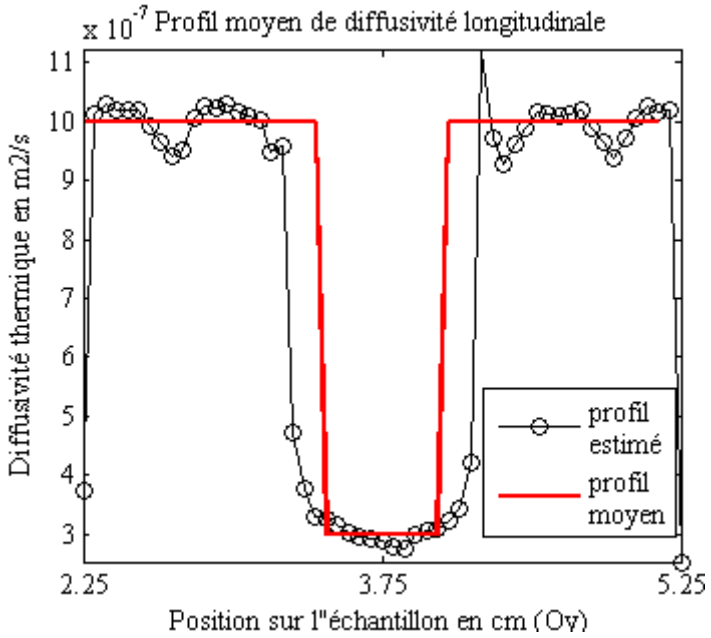


FIGURE 6.4.6: Profil moyen de diffusivités longitudinales calculé et estimé sur une seule maille

6.5 Synthèse du chapitre

Nous venons de traiter dans ce chapitre le cas de matériaux hétérogènes à l'aide *d'excitations thermiques spatialement périodiques*. L'intérêt de ce type d'excitation étant d'imposer à la surface de l'échantillon de forts gradients de température localisés, de manière à accroitre dans ces régions la sensibilité aux paramètres estimés. Ce type d'excitation crée à la surface du matériau des champs de température *séparables* (les conditions expérimentales à vérifier pour que cela soit vrai, sont la périodicité spatiale des points sources, ainsi que l'instantanéité de l'illumination de ces derniers). Dans ces conditions, nous pouvons alors appliquer les méthodes exposées dans les chapitres précédents. Cependant, des précautions supplémentaires doivent être prises en compte pour la caractérisation des diffusivités longitudinales pour les matériaux hétérogènes. À savoir, l'algorithme d'estimation basé sur la ${}^2SVD_{(x,y),t}$ pour estimer avec un *biais minimal*, nécessite que les champs de température gardent un certain *degré de séparabilité* au cours du temps, i.e. les propriétés thermophysiques à l'échelle de la scène thermique ne doivent pas avoir de fortes variations (hétérogénéités). Pour lever cette difficulté nous avons proposé de *mailler* le champ de température global et d'appliquer la méthode d'estimation *localement* dans les mailles préalablement définies. Ce type de méthode pourrait dans certaines conditions expérimentales, trouver des applications pour la caractérisation de propriétés thermophysiques de matériaux à changement de phase [140].

Du point de vue de détection de défauts, nous avons observé que la présence de discontinuités, même de faibles dimensions, est magnifiée par le code de calcul. Ce qui offre des perspectives intéressantes pour le *contrôle non destructif* des matériaux.

Nous avons uniquement traité le cas de diffusion 2D sur des simulations numériques. La prise en compte de la diffusion dans l'épaisseur reste à étudier, ainsi que les différentes validations expérimentales nécessaires.

Chapitre 7

Estimation de la répartition de champs de température initiaux séparables, bi ou tridimensionnels

7.1 Introduction

Les caméras infrarouges actuelles offrent de multiples avantages pour la cartographie de champs de température bidimensionnels. Une quantité colossale d'informations peut être enregistrée et traitée. Les techniques de traitement évoluent elles aussi, permettant d'aborder des problématiques anciennes sous un nouveau jour. L'une d'entre elles, est celle de la recherche du *champ de température initial,* qui précède la diffusion dans un milieu souvent *tridimensionnel.* L'analyse de champs de température tridimensionnels à partir de données bidimensionnelles est une étude complexe en soi. En effet, si l'objet observé est une plaque plane de faible épaisseur, le problème pourra être considéré uniquement bidimensionnel. Par contre, si l'objet est une plaque épaisse, on devra alors en plus prendre en compte la diffusion dans le sens de l'épaisseur.

Certaines hypothèses simplificatrices, expérimentalement réalisables, permettent d'aborder ces cas complexes. Le fait de supposer que la répartition de *température initiale est séparable*, permet de ramener l'étude du problème tridimensionnel à celle de trois problèmes monodimensionnels, comme cela a été explicité au *Chapitre* 4 page 95. Ceci constitue une première approche simplifiée pour l'étude de problèmes tridimensionnels.

De manière générale, nous disposons d'une image bruitée à l'instant initial, mais la grande quantité d'images infrarouges enregistrées aux instants ultérieurs lors de la diffusion, permet de réduire le bruit de mesure et «remonter» de façon approchée au champ de température initial. Le problème tridimensionnel est différent de ceux traités pour la plaque mince et abouti aux systèmes très mal conditionnés. Nous examinerons donc les cas monodimensionnels avant de les assembler.

À titre de comparaison nous utiliserons dans cette étude deux approches. La première est celle du thermicien, basée sur les transformations de Fourier, une approche que nous pouvons qualifier de «physique». La seconde est celle du traiteur de signaux, connaissant peu ou pas

la «physique» de la diffusion thermique, elle est basée sur la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$ du champ de température séparable.

7.2 Modèle de transfert thermique

On considère une plaque paralléllépipédique de dimensions (L, l, e). Les bords de la plaque en $(x = 0, x = L; y = 0, y = l)$ sont supposés isolés. Le champ de température est observé sur la face en $(z = 0)$. L'objectif étant de retrouver le champ de température initial.

Le problème direct est résumé par le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = a(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2}) \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0,L} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0,l} = 0 \\ \lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = h \cdot T, \quad -\lambda \left.\dfrac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=e} = h \cdot T \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Nous avons vu au *Chapitre* 4 page 95, que la solution au problème multidimensionnel homogène en conduction thermique $T(x, y, z, t)$, peut simplement s'écrire comme le produit de solutions unidimensionnelles $T(x, y, z, t) = T_x(x, t) \cdot T_y(y, t) \cdot T_z(z, t)$ si et seulement si, le *champ de température initial* dans le milieu, s'exprime comme *le produit de fonctions* chacune dépendante d'une seule variable spatiale $T(x, y, z, t = 0) = F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z)$ [141, Chapitre 2, Section 2-10], [3]. Cela revient donc à étudier trois problèmes monodimensionnels, qui peuvent être regroupés par la suite. Nous allons donc aborder des cas particuliers 1D, avant de traiter le problème 3D complet.

7.3 Cas de la diffusion monodimensionnelle suivant (Ox)

7.3.1 Approche par la transformation de Fourier

Nous allons étudier l'évolution du champ de température dans une plaque mince soumise à une excitation thermique de type flash à l'instant initial et de forme géométrique non uniforme selon (Ox).

La plaque est supposée suffisamment mince pour pouvoir négliger les phénomènes de diffusion dans épaisseur selon (Oz). Les pertes convectives en $(z = 0, e)$ sont prises en compte grâce à une hypothèse d'ailette. Le système à étudier s'écrit :

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{2h}{\lambda e} T(x,t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0,L} = 0 \end{gathered} \tag{7.3.1}$$

Nous considérons une condition de flux instantané imposé sur l'une des faces de l'échantillon, traduite par une condition initiale, telle que :

$$T(x,0) = 1 \; si \; b_1 < x < b_2 \; et \; T(x,0) = 0 \; partout \; ailleurs \tag{7.3.2}$$

Une transformée de Fourier spatiale [49, 96] permet une analyse du problème comme suit :

$$\begin{gathered} \theta(\alpha_n, t) = \textstyle\int_0^L T(x,t)\cos(\alpha_n t)dx \\ avec \; \alpha_n = \dfrac{n\pi}{L}, \; n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{7.3.3}$$

Le système précédent devient alors :

$$-\alpha_n^2 \theta(\alpha_n, t) - \frac{2h}{\lambda e}\theta(\alpha_n, t) = \frac{1}{a}\frac{\partial\theta(\alpha_n, t)}{\partial t} \tag{7.3.4}$$

La condition initiale s'écrit :

$$\theta(\alpha_n, 0) = \frac{\sin(\alpha_n b_2) - \sin(\alpha_n b_1)}{\alpha_n} \tag{7.3.5}$$

La solution du problème direct est alors :

$$\theta(\alpha_n, t) = \exp(-(a \cdot \alpha_n^2 + H) \cdot t) \cdot \theta(\alpha_n, 0), \quad \forall n, \; et \; H = \frac{2h}{\rho C_p e} \tag{7.3.6}$$

Sous forme vectorielle pour toute fréquence spatiale α_n cette solution s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \theta(\alpha_0,t) \\ \theta(\alpha_1,t) \\ \vdots \\ \theta(\alpha_n,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-(a\cdot\alpha_0^2+H)\cdot t) & 0 & 0 & 0 \\ & \exp(-(a\cdot\alpha_1^2+H)\cdot t) & 0 & 0 \\ sym & & \ddots & 0 \\ & sym & & \exp(-(a\cdot\alpha_n^2+H)\cdot t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\alpha_0,0) \\ \theta(\alpha_1,0) \\ \vdots \\ \theta(\alpha_n,0) \end{bmatrix} \tag{7.3.7}$$

Sous forme matricielle condensée nous obtenons :

$$\theta(\mathbf{t}) = \mathbf{diag}(\exp(-(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{n}^\mathbf{2} + \mathbf{H}) \cdot \mathbf{t})) \cdot \theta(\mathbf{0}) \tag{7.3.8}$$

Comme nous pouvons le constater, la relation liant les deux vecteurs $\theta(\mathbf{t})$ et $\theta(\mathbf{0})$ est linéaire. On peut considérer le vecteur $\theta(\mathbf{0})$ comme étant le vecteur paramètre à estimer et le vecteur $\theta(\mathbf{t})$ comme le vecteur de données.

En thermographie infrarouge, nous disposons d'un grand nombre d'images $\theta(\mathbf{t})$ après l'instant initial. La relation matricielle entre le vecteur de données aux instants t_k et le vecteur paramètre $\theta(\mathbf{0})$ peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \theta(\mathbf{0}) \\ \theta(\mathbf{t_1}) \\ \vdots \\ \theta(\mathbf{t_k}) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{diag}(\exp(-(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}^\mathbf{2}+\mathbf{H})\cdot\mathbf{t_1})) \\ \vdots \\ \mathbf{diag}(\exp(-(\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\alpha}^\mathbf{2}+\mathbf{H})\cdot\mathbf{t_k})) \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot [\theta(\mathbf{0})] = \mathbf{X_1} \cdot [\theta(\mathbf{0})] \tag{7.3.9}$$

La matrice $\mathbf{X_1}$ est appelée de manière classique, matrice de sensibilité. La particularité de ce problème réside dans le fait que le vecteur paramètre $\theta(\mathbf{0})$ est inclu dans le vecteur de données. Il n'est par conséquent pas possible de parler de méthode inverse ici. En effet pour connaitre le champ initial $\theta(\mathbf{0})$ il faut connaitre la diffusivité a, cependant cette diffusivité peut être estimée à tout instant ultérieur sans connaissance du champ de température initial. Ce problème est par ailleurs mal-posé, puisque très sensible au bruit de mesure aux hautes fréquences spatiales, i.e. α_n pour n grand. Cependant, la technique d'inversion peut permettre de réduire le bruit de mesure sur le paramètre recherché en traitant une grande quantité de données disponibles.

Pour ce faire, on suppose que la valeur mesurée $\hat{\theta}(\mathbf{t_k})$ peut être exprimée par la relation :

$$\hat{\theta}(\mathbf{t_k}) = \theta(\mathbf{t_k}) + \mathbf{e}_{\theta(t_k)} \tag{7.3.10}$$

avec $\mathbf{e}_{\theta(t_k)}$ est un vecteur de variables aléatoires représentant le bruit de mesure. Si on suppose que $\mathbf{e}_{\theta(t_k)}$ est de moyenne nulle pour tout k, de plus si la matrice de covariance du vecteur $\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{e}_{\theta(0)} & \mathbf{e}_{\theta(t_1)} & \cdots & \mathbf{e}_{\theta(t_k)} \quad \cdots \end{array} \right]^T$ est connue à une constante multiplicative près, notée Ω, si les variables explicatives et les paramètres a et H sont connus sans erreur, dans ces conditions nous pouvons appliquer le théorème de Gauss-Markov [10], donnant l'estimateur optimal à variance minimale de $\theta(\mathbf{0})$ soit $[\theta(\mathbf{0})]_{VM}$:

$$[\theta(\mathbf{0})]_{VM} = (\mathbf{X_1}^T \Omega^{-1} \mathbf{X_1})^{-1} \mathbf{X_1}^T \Omega^{-1} \cdot \left[\begin{array}{c} \theta(\mathbf{0}) \\ \theta(\mathbf{t_1}) \\ \vdots \\ \theta(\mathbf{t_k}) \\ \vdots \end{array} \right] \tag{7.3.11}$$

Le calcul de Ω se fait avec le champ de température dans l'espace réel. Ce champ est enregistré par la caméra en N_x points différents x_i compris entre 0 et L à l'instant t_k. Si les erreurs de mesure de température en chaque point x_i à chaque instant t_k sont supposées indépendantes et de même écart-type σ, on peut alors montrer [88], que la matrice de covariance $\mathbf{e}_{\theta(t_k)}$ est diagonale et s'écrit :

$$\mathbf{cov}(\mathbf{e}_{\theta(t_k)}) = \frac{\sigma^2 L^2}{N_x} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{array} \right] \tag{7.3.12}$$

Comme Ω peut être défini à une constante multiplicative près, on peut prendre seulement la matrice diagonale $\mathbf{D}$ telle que :

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{array} \right] \tag{7.3.13}$$

d'où :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{7.3.14}$$

Nous pouvons alors exprimer chaque composante $\theta(\alpha_n, 0)_{VM}$ du vecteur $[\theta(\mathbf{0})]_{VM}$ pour tout n comme suit :

$$\theta(\alpha_n, 0)_{VM} = \frac{\sum_{k=0}^{N_t} \hat{\theta}(\alpha_n, t_k) \exp(-(a \cdot \alpha_n^2 + H) \cdot t_k)}{\sum_{k=0}^{N_t} \exp(-2 \cdot (a \cdot \alpha_n^2 + H) \cdot t_k)} \tag{7.3.15}$$

On peut vérifier que cette dernière expression reste vraie même si la matrice $\mathbf{D}$ n'est pas diagonale, i.e. qu'il n'est pas nécessaire que le bruit de mesure soit d'écart-type constant pour chaque fréquence spatiale. Bien que l'indépendance des mesures en temps et en espace doit être assurée.

Les termes diagonaux de la matrice de covariance de $\theta(\alpha_n, 0)_{VM}$ s'écrivent :

$$cov(\theta(0,0)_{VM}) = \frac{\sigma^2 L^2}{N_x} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{N_t} \exp(-2 \cdot H \cdot t_k)} \right) \tag{7.3.16}$$

et

$$cov(\theta(\alpha_n, 0)_{VM}) = \frac{\sigma^2 L^2}{2N_x} \left(\frac{1}{\sum_{k=0}^{N_t} \exp(-2 \cdot (a \cdot \alpha_n^2 + H) \cdot t_k)} \right), \ \forall n \neq 0 \tag{7.3.17}$$

Par conséquent, l'écart-type des estimateurs de la température initiale σ_E peut être encadré comme suit :

$$\frac{\sigma}{\sqrt{N_t}} < \sigma_E < \sigma \tag{7.3.18}$$

Nous pouvons en conclure que pour des temps proches de l'instant initial, l'estimation est meilleure. L'estimation est également meilleure aux basses fréquences spatiales (ce qui d'ailleurs correspond, de manière équivalente, aux premières valeurs singulières pour la décomposition en valeurs singulières). Enfin, la possibilité de traiter un grand nombre d'images N_t améliore les estimations.

Le champ de température dans l'espace réel $\tilde{T}(x, 0)_{VM}$ est obtenu en effectuant une transformée de Fourier inverse sur $\theta(\alpha_n, 0)_{VM}$, issu de l'expression (7.3.15).

7.3.2 Approche par la décomposition en valeurs singulières ${}^1SVD_{(x,t)}$

Comme nous allons le voir, c'est une approche plus intuitive, qui s'apparente à celle d'un traiteur de signaux ne connaissant pas la *«physique»* de la diffusion de la chaleur.

Nous partons du champ de température $\hat{T}(x, t)$ représentant les mesures enregistrées par la caméra avec les mêmes hypothèses sur le bruit de mesure que précédemment, à savoir les erreurs de mesure de température en chaque point x_i à chaque instant t_k sont supposées indépendantes et de même écart-type σ.

Nous appliquons sur le champ de température $\hat{T}(x,t)$ la décomposition en valeurs singulières *espace-temps* ${}^1SVD_{(x,t)}$ comme suit :

$$\tilde{T}(x,t)_{SVD} \overset{{}^1SVD_{(x,t)}}{\approx} \sum_{r=1}^{r_0} \eta_r^x \cdot U_r^x(x) \cdot V_r^x(t)^T \tag{7.3.19}$$

Nous obtenons alors le champ de température filtré $\tilde{T}(x,t)_{SVD}$, le paramètre de filtrage étant r_0. Pour un r_0 donné, le champ de température initial recherché est $\tilde{T}(x,0)_{SVD}$. La précision sur le résultat obtenu dépend donc de r_0. Plus ce paramètre est important, plus on ajoute du bruit de mesure à partir d'un certain mode, généralement $r_0 = 1, 2, 3$.

7.3.3 Expériences numériques

Le champ de température simulé $\hat{T}(x,t)$ a été obtenu avec les données suivantes :

$$\begin{array}{cc} L = 10\,cm & a = \dfrac{\lambda_x}{\rho C_p} \\ \Delta x = 0,2\,cm & h = 40\,{}^{W}\!/_{m^2 \cdot K} \\ N_t = 200 & e = 10^{-3} m \\ \Delta t = 0,04\,s & b_2 = 0,8 \cdot L \\ \rho C_p = 0,1 \cdot 10^6 {}^{J}\!/_{m^3 K} & b_1 = 0,3 \cdot L \\ \lambda_x = 1\,{}^{W}\!/_{m \cdot K} & \sigma = \dfrac{\hat{T}_{max}}{10} \\ n \in [1, 100] & \end{array} \tag{7.3.20}$$

Les résultats obtenus pour les champs de température $\tilde{T}(x,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,0)_{SVD}$ sont exposés en Figure 7.3.1 page suivante.

Première constatation, pour les deux méthodes, nous retrouvons relativement bien le profil de température initial. L'estimation par la décomposition en valeurs singulières pour $r_0 = 3$ semble donner de meilleurs résultats. Pour nous en convaincre, nous réitérons 500 fois la même expérience et nous calculons les écarts quadratiques relatifs pour chaque expérience réalisée comme suit :

$$e_{Fourier} = \frac{\left\| \tilde{T}(x,0)_{VM} - T(x,t)_{exact} \right\|_2}{\left\| T(x,t)_{exact} \right\|_2} \tag{7.3.21}$$

et

$$e_{SVD} = \frac{\left\| \tilde{T}(x,0)_{SVD} - T(x,t)_{exact} \right\|_2}{\left\| T(x,t)_{exact} \right\|_2} \tag{7.3.22}$$

nous calculons ensuite la moyenne des écarts quadratiques obtenus pour les 500 expériences réalisées : $\overline{e}_{Fourier}$ et $\overline{e}_{SVD}$. Pour finir, nous calculons les écarts relatifs entre les écarts quadratiques moyens $\overline{e}_{Fourier}$ et $\overline{e}_{SVD}$ via les expressions :

$$e_1^{relatif} = \frac{\left| \overline{e}_{Fourier} - \overline{e}_{SVD} \right|}{\overline{e}_{SVD}} \times 100 \tag{7.3.23}$$

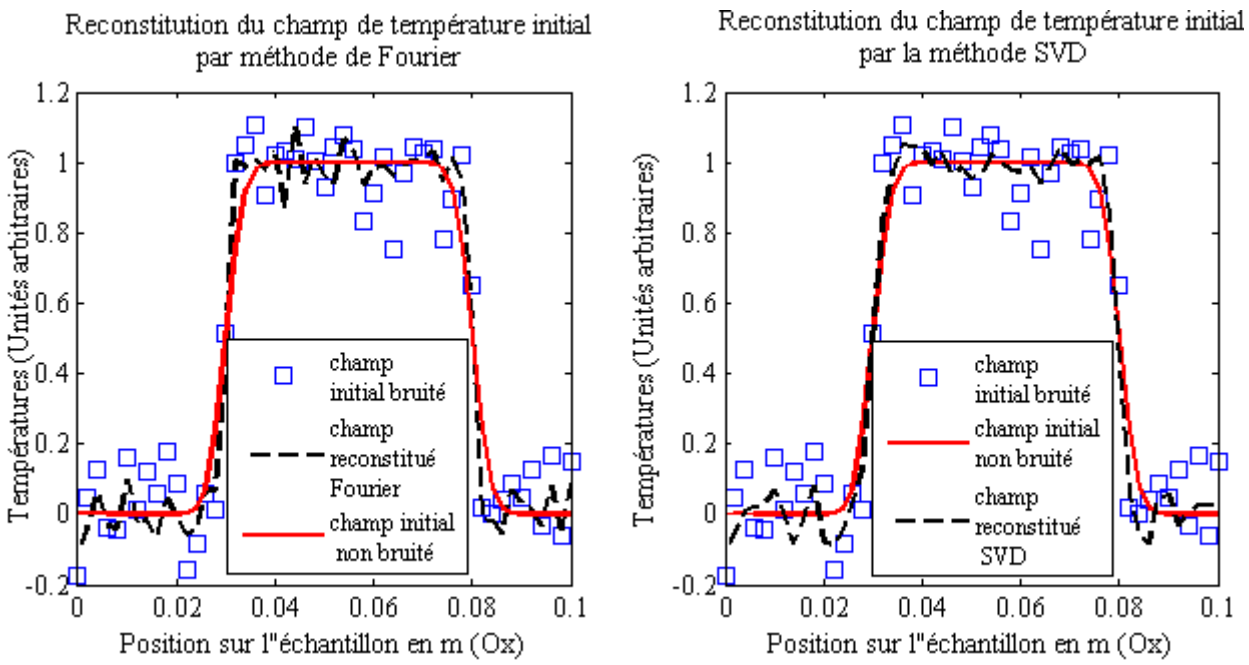


FIGURE 7.3.1: Champs de températures reconstitués $\tilde{T}(x,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,0)_{SVD}$ pour $r_0 = 3$

$$e_2^{relatif} = \frac{\left|\overline{e}_{Fourier} - \overline{e}_{SVD}\right|}{\overline{e}_{Fourier}} \times 100 \tag{7.3.24}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous :

r_0	$\overline{e}_{SVD}$	$\overline{e}_{Fourier}$	$e_1^{relatif}$ $en\,\%$	$e_2^{relatif}$ $en\,\%$
1	$0,037$	$0,136$	271	73
2	$0,097$	$0,136$	40	29
3	$0,102$	$0,137$	33	26
4	$0,107$	$0,137$	28	22
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13	$0,137$	$0,136$	0,1	0,3

Comme nous pouvons le constater la SVD donne de meilleurs résultats pour un r_0 allant jusqu'au $13^{ème}$ mode, mode pour lequel les deux méthodes donnent des résultats similaires. Au-delà du $13^{ème}$ la méthode par la transformation de Fourier est meilleure.

Pour illustrer davantage la méthode SVD, nous traçons en Figure (7.3.2), les valeurs singulières η_r^x issues de l'expression (7.3.19). Comme nous pouvons le voir, nous avons une seule valeur singulière dominante $\eta_{r=1}^x$. La somme tronquée (7.3.19) pourrait donc s'exprimer avec un terme unique, lissant ainsi considérablement les données et donnant une meilleure précision quant à l'estimation du champ de température initial. D'après le tableau, nous avons un écart relatif de 271% entre les deux méthodes d'estimation pour $r_0 = 1$, un écart donc conséquent.

Nous rappelons, qu'il n'est pas nécessaire de connaitre la «physique» de la diffusion pour appliquer la décomposition en valeurs singulières. Autrement dit, tout traiteur de signaux peut

obtenir de bons résultats sans connaitre la physique des transferts thermiques. Ce qui représente un avantage incontestable.

Pour finir l'étude du cas monodimensionnel, nous traçons l'évolution du champ de température bruité, ainsi que celui du champ lissé par la SVD en Figure 7.3.3.

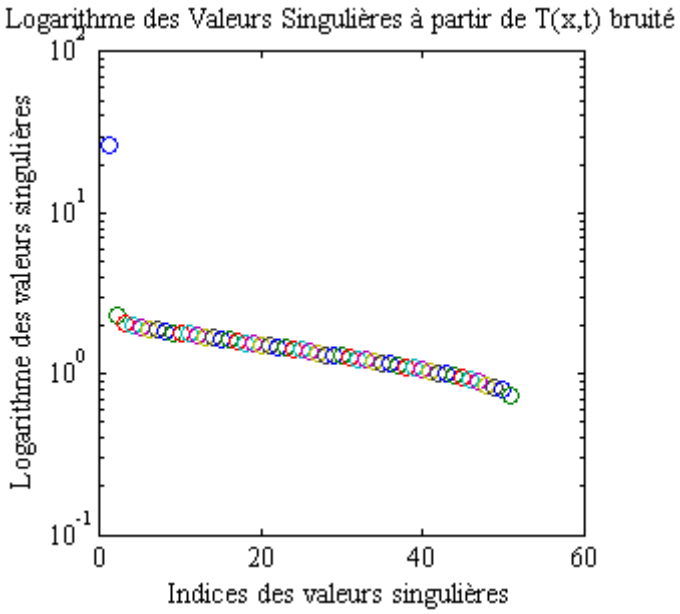


FIGURE 7.3.2: Valeurs singulières η_r^x issues de l'expression (7.3.19)

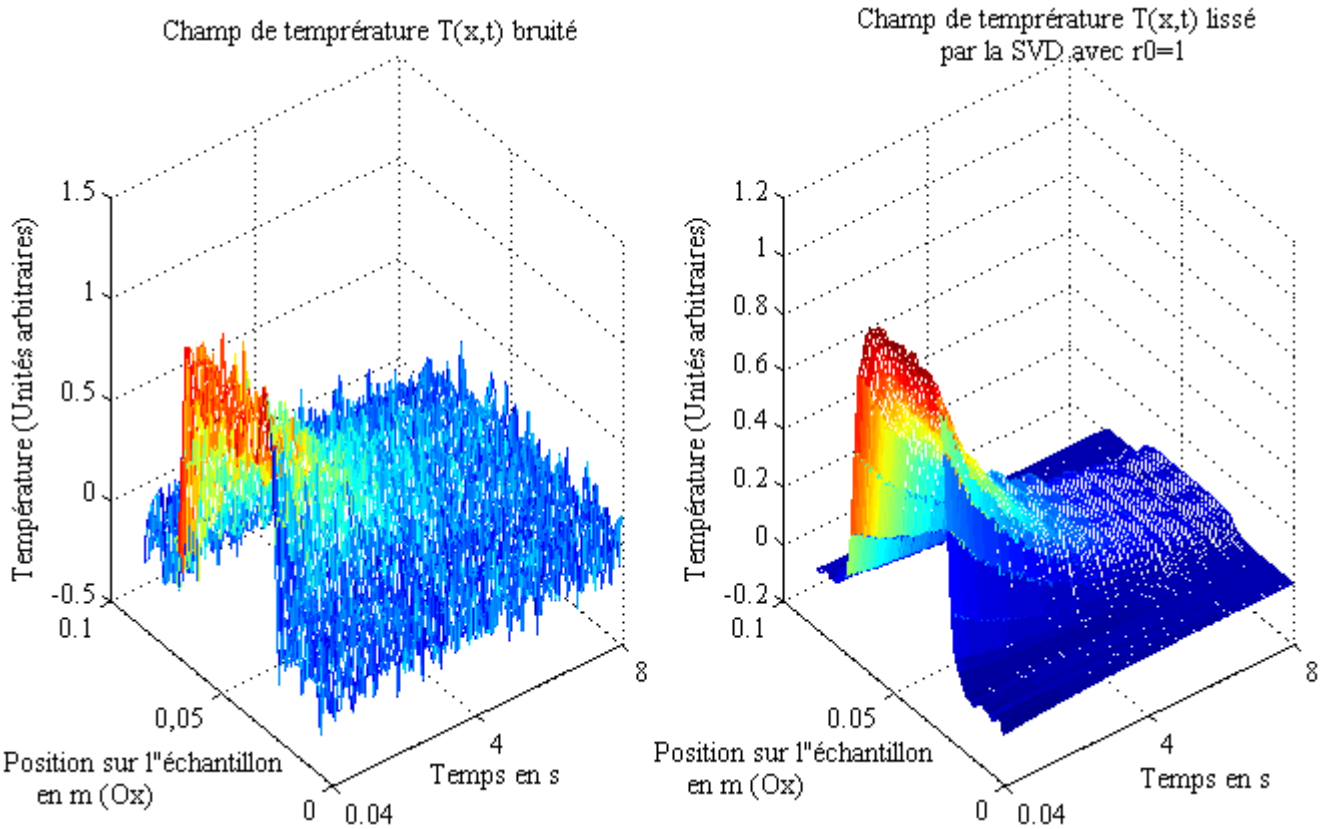


FIGURE 7.3.3: Champs de température bruité et lissé par la SVD avec $r_0 = 1$

7.4 Cas de diffusion bidimensionnelle suivant (Ox) et (Oy)

7.4.1 Approche par le transformation de Fourier

Le système à résoudre s'écrit maintenant :

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}-\frac{2h}{\lambda e}T(x,y,t)=\frac{1}{a}\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t}\\ \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x}\Big|_{x=0,L}=0\\ \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}\Big|_{y=0,l}=0\end{gathered} \tag{7.4.1}$$

Une condition initiale séparable possible peut être :

$$T(x,y,0)=1\ si\ b_1<x<b_2\ et\ b_1<y<b_2,\ T(x,y,0)=0\ partout\ ailleurs \tag{7.4.2}$$

On peut alors effectuer deux transformées de Fourier spatiales selon (Ox) et (Oy) telles que :

$$\begin{gathered}\theta(\alpha_n,\beta_m,t)=\int_0^l\int_0^L T(x,y,t)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)dxdy\\ avec\ \alpha_n=\frac{n\pi}{L},\ \beta_m=\frac{m\pi}{l},\ (n,m)\in\mathbb{N}^2\end{gathered} \tag{7.4.3}$$

Le système devient après transformation :

$$-(\alpha_n^2+\beta_m^2)\theta(\alpha_n,\beta_m,t)-\frac{2h}{\lambda e}\theta(\alpha_n,\beta_m,t)=\frac{1}{a}\frac{\partial\theta(\alpha_n,\beta_m,t)}{\partial t} \tag{7.4.4}$$

avec la condition initiale suivante :

$$\theta(\alpha_n,\beta_m,0)=(\frac{\sin(\alpha_n b_2)-\sin(\alpha_n b_1)}{\alpha_n})\cdot(\frac{\sin(\beta_m b_2)-\sin(\beta_m b_1)}{\beta_m}) \tag{7.4.5}$$

La solution du problème direct s'écrit alors :

$$\theta(\alpha_n,\beta_m,t)=\exp(-(a\cdot(\alpha_n^2+\beta_m^2)+H)\cdot t)\cdot\theta(\alpha_n,\beta_m,0),\quad \forall n,m\ et\ H=\frac{2h}{\rho C_p e} \tag{7.4.6}$$

Si on applique le même raisonnement que précédemment, on s'aperçoit que le problème bidimensionnel est très similaire au problème monodimensionnel. L'expression (7.3.15) devient alors :

$$\theta(\alpha_n,\beta_m,0)_{VM}=\frac{\sum_{k=0}^{N_t}\hat{\theta}(\alpha_n,\beta_m,t_k)\exp(-(a\cdot(\alpha_n^2+\beta_m^2)+H)\cdot t_k)}{\sum_{k=0}^{N_t}\exp(-2\cdot(a\cdot(\alpha_n^2+\beta_m^2)+H)\cdot t_k)} \tag{7.4.7}$$

Cependant, nous devons remarquer que si le principe reste le même, la quantité d'opérations à effectuer devient plus importante, $(N_x\times N_y)$ opérations au lieu de N_x. Le fait de supposer que

la condition initiale est séparable nous permet de simplifier la relation précédente en :

$$\theta(\alpha_n,\beta_m,0)_{VM}=\frac{\sum_{k=0}^{N_t}\hat{\theta}(\alpha_n,0,t_k)\exp(-(a\cdot\alpha_n^2+H)\cdot t_k)}{\sum_{k=0}^{N_t}\exp(-2\cdot(a\cdot\alpha_n^2+H)\cdot t_k)}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{N_t}\hat{\theta}(0,\beta_m,t_k)\exp(-(a\cdot\beta_m^2+H)\cdot t_k)}{\sum_{k=0}^{N_t}\exp(-2\cdot(a\cdot\beta_m^2+H)\cdot t_k)} \tag{7.4.8}$$

Ainsi le problème bidimensionnel se trouve réduit à l'étude de deux problèmes monodimensionnels, soit (N_x+N_y) opérations. Par conséquent, la quantité de calculs à réaliser diminue considérablement.

Le champ de température dans l'espace réel $\tilde{T}(x,y,0)_{VM}$ est obtenu en effectuant les transformées de Fourier inverses sur les $\theta(\alpha_n,0,0)_{VM}$, $\theta(0,\beta_m,0)_{VM}$, ce qui donne les

$$\begin{aligned}\tilde{T}(x,0)_{VM}&=\frac{1}{l}\int_0^l\tilde{T}(x,y,0)_{VM}dy\\ \tilde{T}(y,0)_{VM}&=\frac{1}{L}\int_0^L\tilde{T}(x,y,0)_{VM}dx\end{aligned} \tag{7.4.9}$$

puis nous calculons le produit :

$$\tilde{T}(x,y,0)_{VM}=\tilde{T}(x,0)_{VM}^T\cdot\tilde{T}(y,0)_{VM} \tag{7.4.10}$$

Nous rappelons que prendre $\alpha_n=0$ ou $\beta_m=0$ dans l'espace de Fourier, revient à calculer la moyenne spatiale selon (Ox) ou (Oy) respectivement. Consulter le document [18] disponible en *Annexe I* pour plus de détails.

7.4.2 Approche par la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$

Encore une fois, c'est une approche plus intuitive. Nous partons du champ de température $\hat{T}(x,y,t)$ représentant les mesures enregistrées par la caméra avec les mêmes hypothèses sur le bruit de mesure que précédemment, à savoir les erreurs de mesure de température en chaque point x_i et y_j et à chaque instant t_k sont supposées indépendantes et de même écart-type σ.

Nous appliquons sur le champ de température $\hat{T}(x,y,t)$ la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$ comme suit :

1. La première décomposition *espace-espace* ${}^1SVD_{(x,y)}$ pour $n_0=1$ nous donne :

$$\tilde{T}(x,y,t)\overset{{}^1SVD_{(x,y)}}{\approx}\sum_{n=1}^{n_0}\gamma_n(t)\cdot U_n(x,t)\cdot V_n(y,t)^T \tag{7.4.11}$$

2. Les secondes décompositions cette fois-ci *espace-temps* ${}^1SVD_{(x,t)}$ et ${}^1SVD_{(y,t)}$ nous donnent les :

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(x,t)&\overset{{}^1SVD_{(x,t)}}{\approx}\sum_{r=1}^{r_0}\eta_{1,r}^x\cdot U_{1,r}^x(x)\cdot V_{1,r}^x(t)^T\\ \tilde{V}_1(y,t)&\overset{{}^1SVD_{(y,t)}}{\approx}\sum_{r=1}^{r_0}\eta_{1,r}^y\cdot U_{1,r}^y(y)\cdot V_{1,r}^y(t)^T\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

Le paramètre de filtrage étant toujours r_0. Nous obtenons alors les champs de température filtrés $\tilde{U}_n(x,t)$ et $\tilde{V}_n(y,t)$ équivalents dans l'espace transformé des $\tilde{T}(x,t)_{SVD}$ et $\tilde{T}(y,t)_{SVD}$. Le

champ de température initial se calcule alors via l'expression suivante à l'instant $t = 0$:

$$\tilde{T}(x,y,t)_{SVD} \overset{^2SVD_{(x,y),t}}{\approx} \gamma_1(t) \cdot \left[\sum_{r=1}^{r_0} \underbrace{(\eta^x_{1,r} \cdot U^x_{1,r}(x) \cdot V^x_{1,r}(t)^T)}_{U_1(x,t)} \cdot \underbrace{(\eta^y_{1,r} \cdot U^y_{1,r}(y) \cdot V^y_{1,r}(t)^T)^T}_{V_1(y,t)} \right] \quad (7.4.13)$$

7.4.3 Expériences numériques

Le champ de température simulé $\hat{T}(x,y,t)$ a été obtenu avec les données suivantes :

$$\begin{array}{ll} L = 10\,cm & a = \dfrac{\lambda_x}{\rho C_p} \\ l = 10\,cm & \\ \Delta x = \Delta y = 0,2\,cm & h = 40\,{}^{W}/_{m^2 \cdot K} \\ N_t = 200 & e = 10^{-3} m \\ \Delta t = 0,04\,s & b_2 = 0,8 \cdot L, l \\ \rho C_p = 0,1 \cdot 10^{6\,J}/_{m^3 K} & b_1 = 0,3 \cdot L, l \\ \lambda_x = 1\,{}^{W}/_{m \cdot K} & \sigma = \dfrac{\hat{T}_{max}}{10} \\ n, m \in [1, 100] & \end{array} \quad (7.4.14)$$

Les champs de température initiaux $\hat{T}(x,y,0)$ exact et bruité sont représentés Figure 7.4.1.

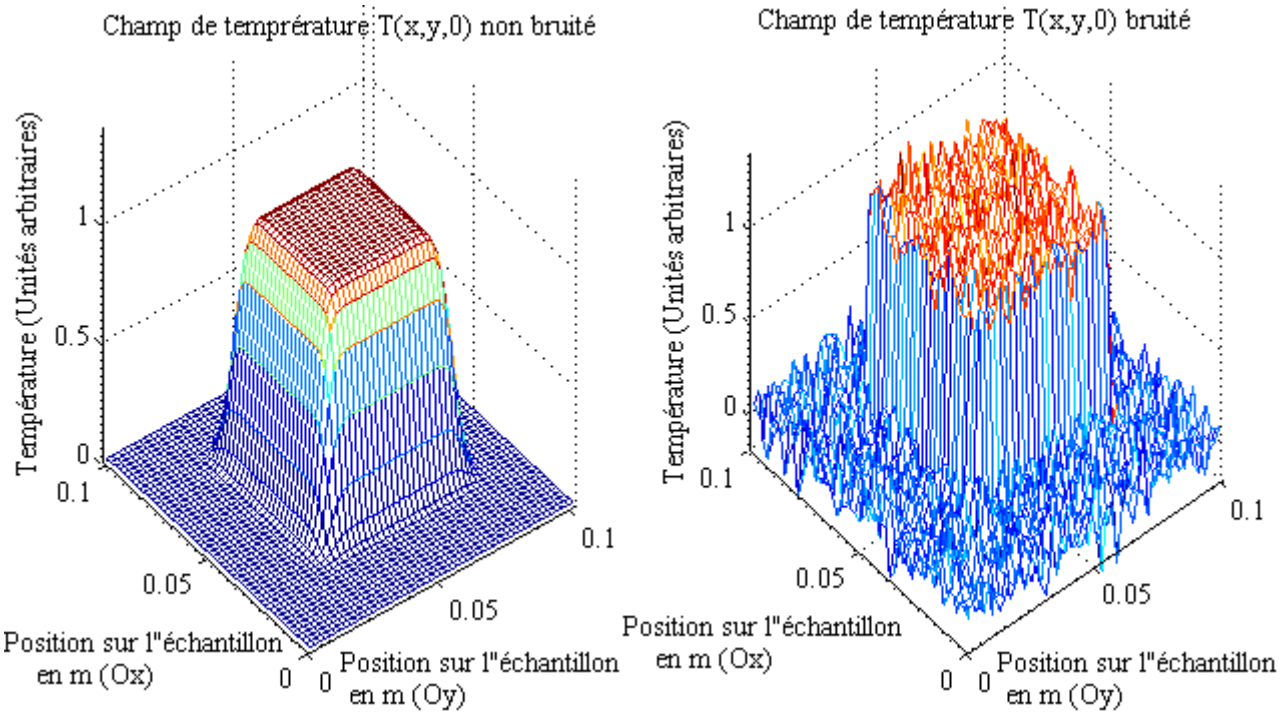


FIGURE 7.4.1: Champs de température initiaux exact et bruité $\hat{T}(x,y,0)$

Les champs de température initiaux reconstitués $\tilde{T}(x,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,0)_{SVD}$ sont illustrés Figure 7.4.2 page suivante. Comme nous pouvons le constater encore une fois la SVD offre de meilleurs résultats, ici avec $r_0 = 1$.

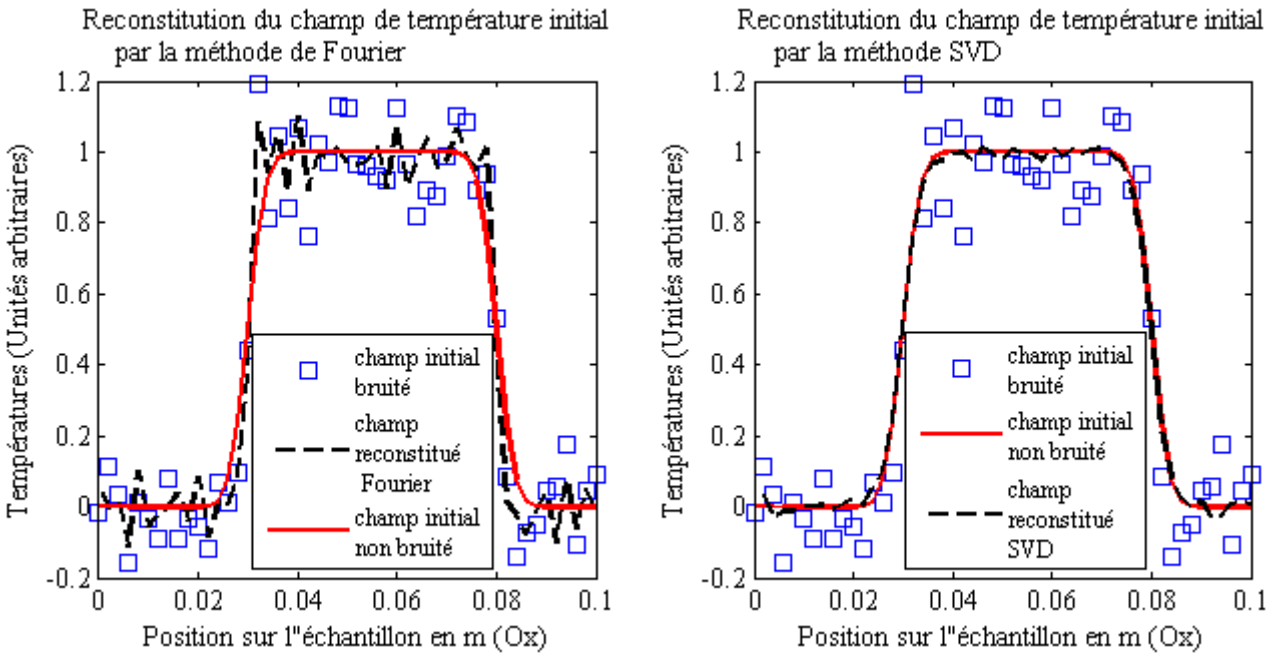


FIGURE 7.4.2: Champs de température reconstitués $\tilde{T}(x,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,0)_{SVD}$ pour $r_0 = 1$

Les champs de température initiaux reconstitués suivant (Oy), $\tilde{T}(y,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(y,0)_{SVD}$ sont illustrés Figure 7.4.3.

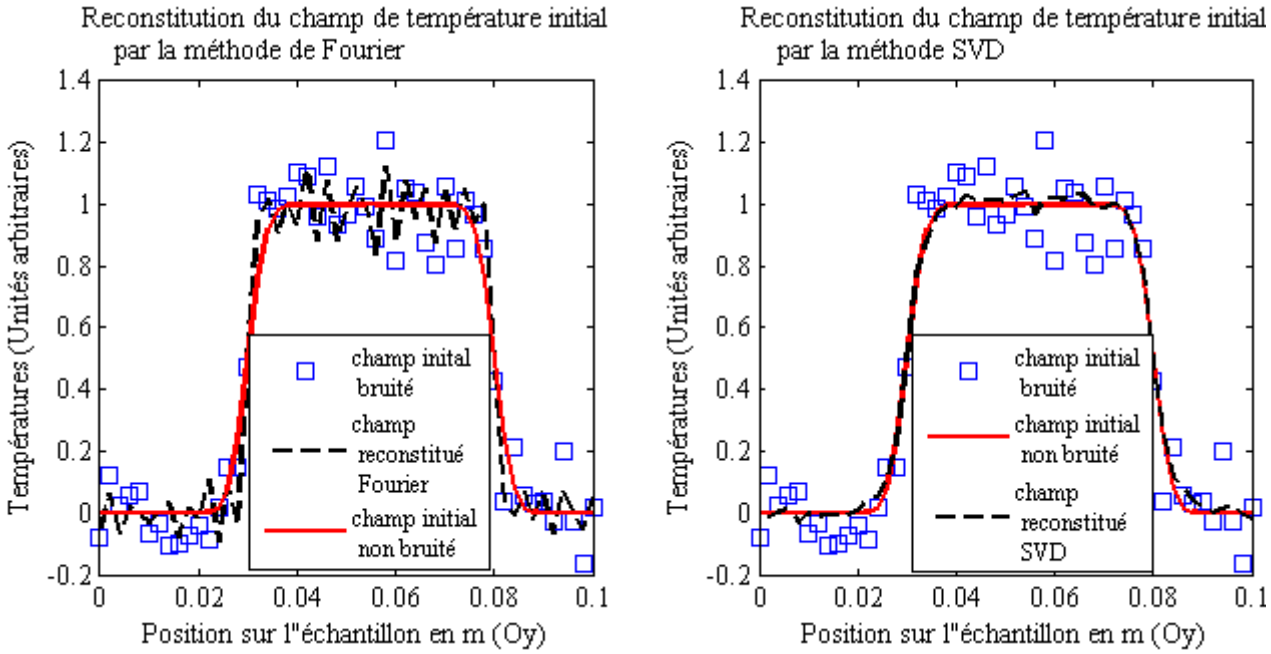


FIGURE 7.4.3: Champs de température reconstitués $\tilde{T}(y,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(y,0)$ pour $r_0 = 1$

Finalement, les résultats obtenus pour les champs de température bidimensionnels initiaux reconstitués $\tilde{T}(x,y,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,y,0)_{SVD}$ sont exposés en Figure 7.4.4 page suivante. La reconstitution est nettement meilleure avec la SVD. Nous pouvons par ailleurs remarquer que pour les deux cas, le bruit est non séparable, cela est bien visible sur les bords des champs de température reconstitués.

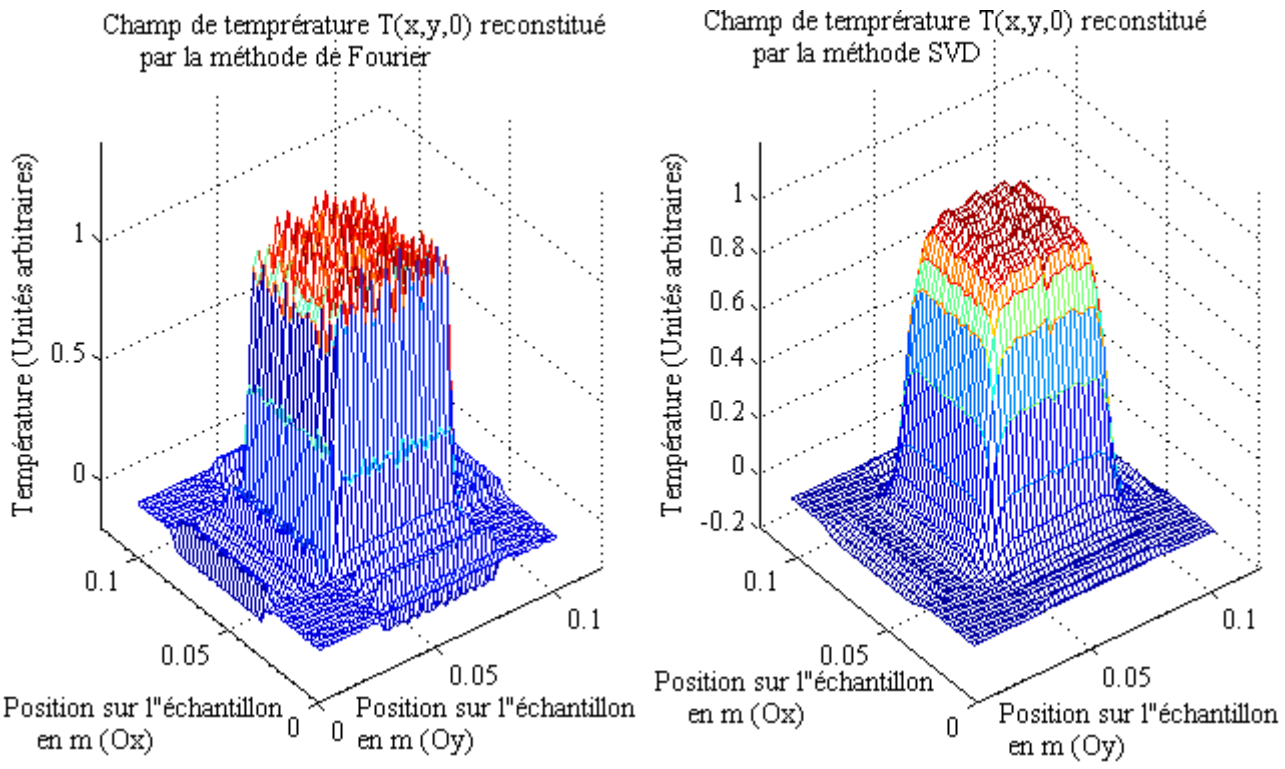


FIGURE 7.4.4: Champs de température reconstitués $\tilde{T}(x,y,0)_{VM}$ et $\tilde{T}(x,y,0)_{SVD}$ pour $r_0 = 1$

7.5 Cas de diffusion tridimensionnelle suivant (Ox), (Oy) et (Oz)

7.5.1 Approche par la double décomposition en valeurs singulières ${}^2SVD_{(x,y),t}$

Pour le cas de la diffision en trois dimensions nous allons seulement considérer la méthode ${}^2SVD_{(x,y),t}$, comme elle donne de meilleurs résultats par rapport à la méthode utilisant les transformations de Fourier. Dans la pratique, les champs de température expérimentaux dont nous disposons sont enregistrés en face avant ou arrière de l'échantillon, suivant l'accessibilité et la méthode employée. Pour notre étude nous nous plaçons en face avant en $(z = 0)$ et nous considérons un milieu semi-infini suivant (Oz).

La méthode par rapport au cas bidimensionnel ne change pas. Nous nous servons tout simplement des expressions (7.4.11) et (7.4.12) précédemment introduites. Cette fois-ci le champ de température 3D simulé en $(z = 0)$, $\hat{T}(x,y,z=0,t)$ y est directement injecté. Nous obtenons alors le champ de température reconstitué $\tilde{T}(x,y,z=0,0)_{SVD}$.

Les champs de température initiaux bruité et non bruité sont représentés Figure 7.5.1 page suivante.

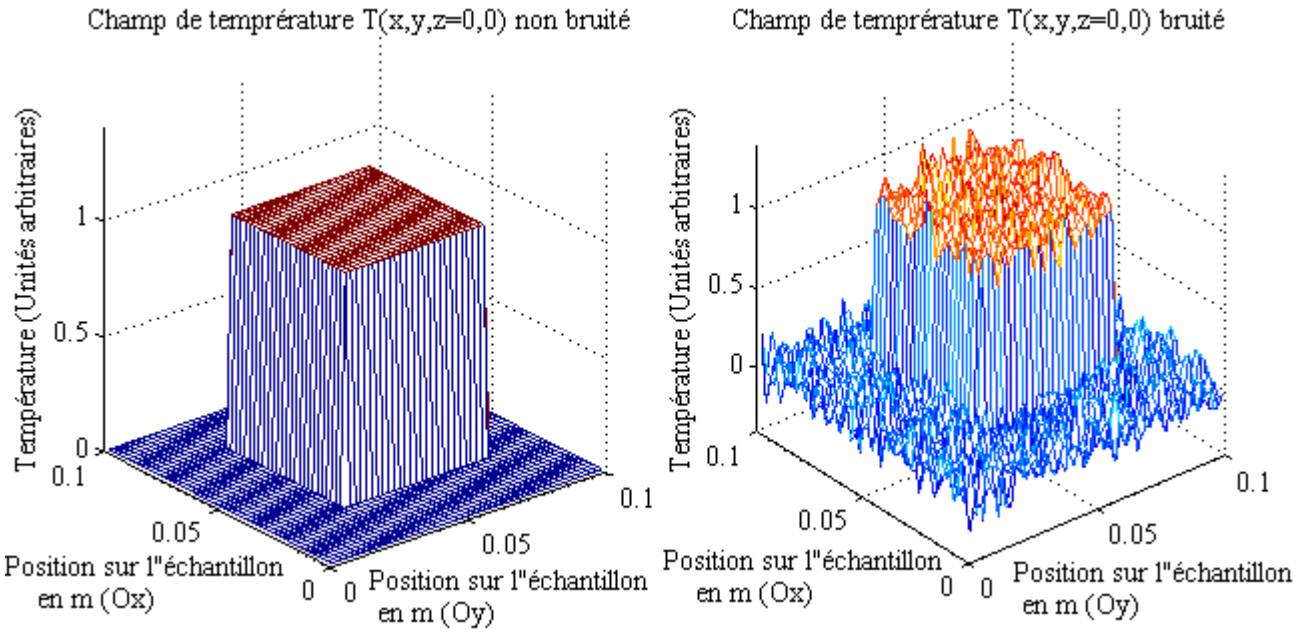


FIGURE 7.5.1: Champs de température initiaux exact et bruité $\hat{T}(x, y, z = 0, 0)$

La reconstitution du champ 3D, $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$, pour $r_0 = 4$ est représentée en Figure 7.5.2 page suivante. Nous retrouvons ainsi le champ de température initial 3D en $(z = 0)$. La seule différence par rapport au cas 2D réside dans le fait qu'il est nécessaire de sommer plus de termes dans les sommes (7.4.12), i.e. le paramètre $r_0 > 1$. Pour étudier l'influence de ce paramètre, nous calculons l'écart quadratique e_{3D} pour un r_0 donné entre le champ de température simulé initial exact $\hat{T}(x, y, z = 0, 0)$ et le champ reconstitué $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$:

$$e_{3D} = \frac{\left\|\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD} - \hat{T}(x, y, z = 0, 0)\right\|_2}{\left\|\hat{T}(x, y, z = 0, 0)\right\|_2} \tag{7.5.1}$$

Nous traçons l'écart quadratique e_{3D} en Figure 7.5.3 page suivante. Cet écart quadratique est le plus important pour les deux premiers termes et le plus faible pour le $3^{ème}$ terme, à partir de ce dernier l'écart quadratique croit progressivement. Le choix optimal est donc obtenu pour $r_0 = 3$.

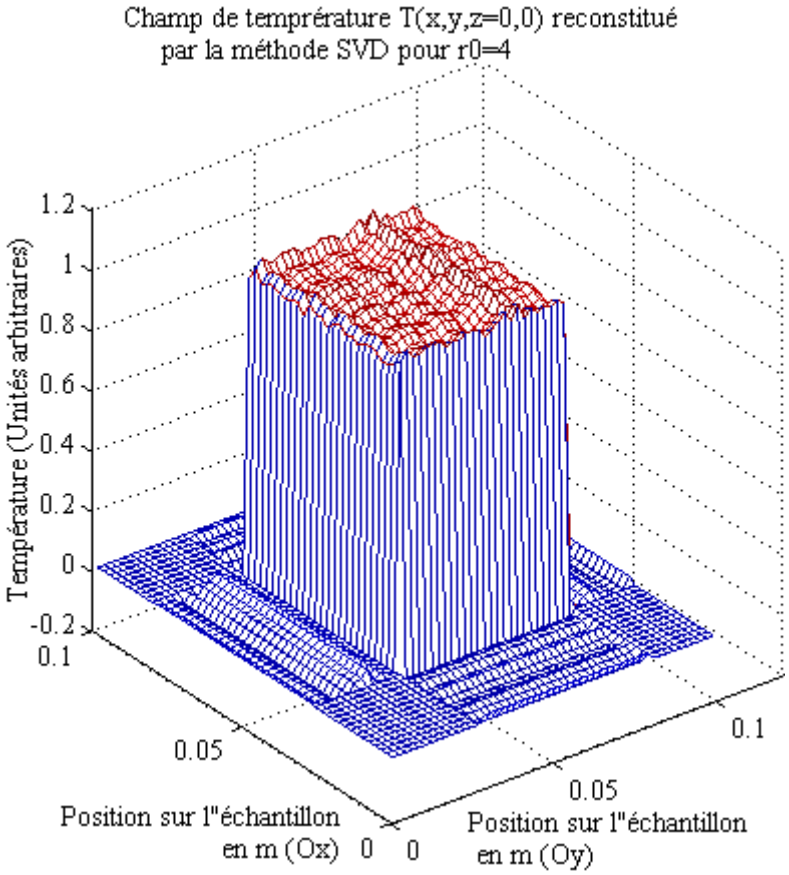


FIGURE 7.5.2: La reconstitution du champ 3D $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$ pour $r_0 = 4$

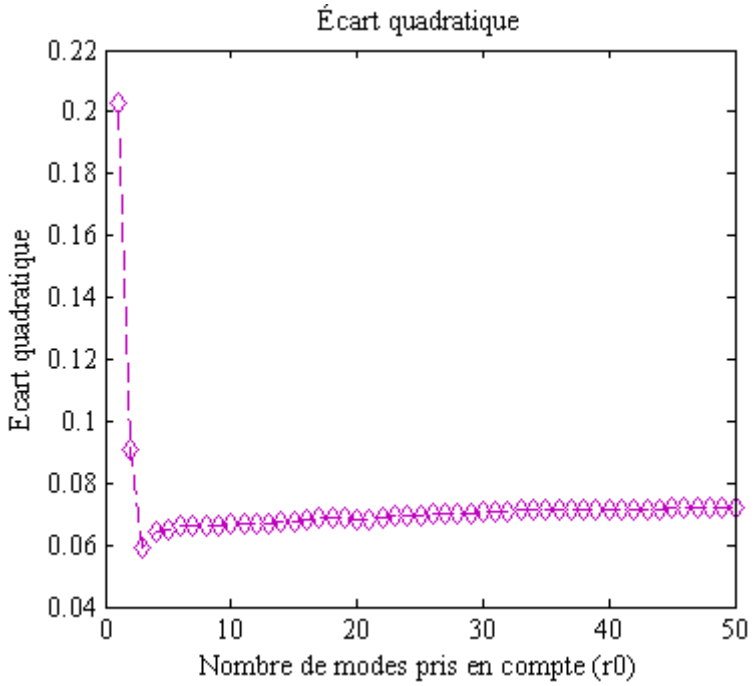


FIGURE 7.5.3: Écart quadratique e_{3D} entre le champ de température initial simulé exact $\hat{T}(x, y, z = 0, t)$ et le champ de température initial reconstitué $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$

7.5.2 Application possible au contrôle non destructif des matériaux

Il nous reste un dernier point à aborder. Nous n'avons jusqu'à présent pas testé la méthode d'estimation dans le cas où le bruit de mesure devient très important. Voyons ce qu'il se passe lorsque le rapport signal sur bruit se dégrade fortement. Nous prenons pour illustration ce rapport égal à $SNR = 1$, autrement dit le bruit de mesure est du même ordre de grandeur que le signal. La Figure 7.5.4, représente les champs de température initiaux exact et bruité. Le résultat d'estimation obtenu est présenté en Figure 7.5.5 page suivante.

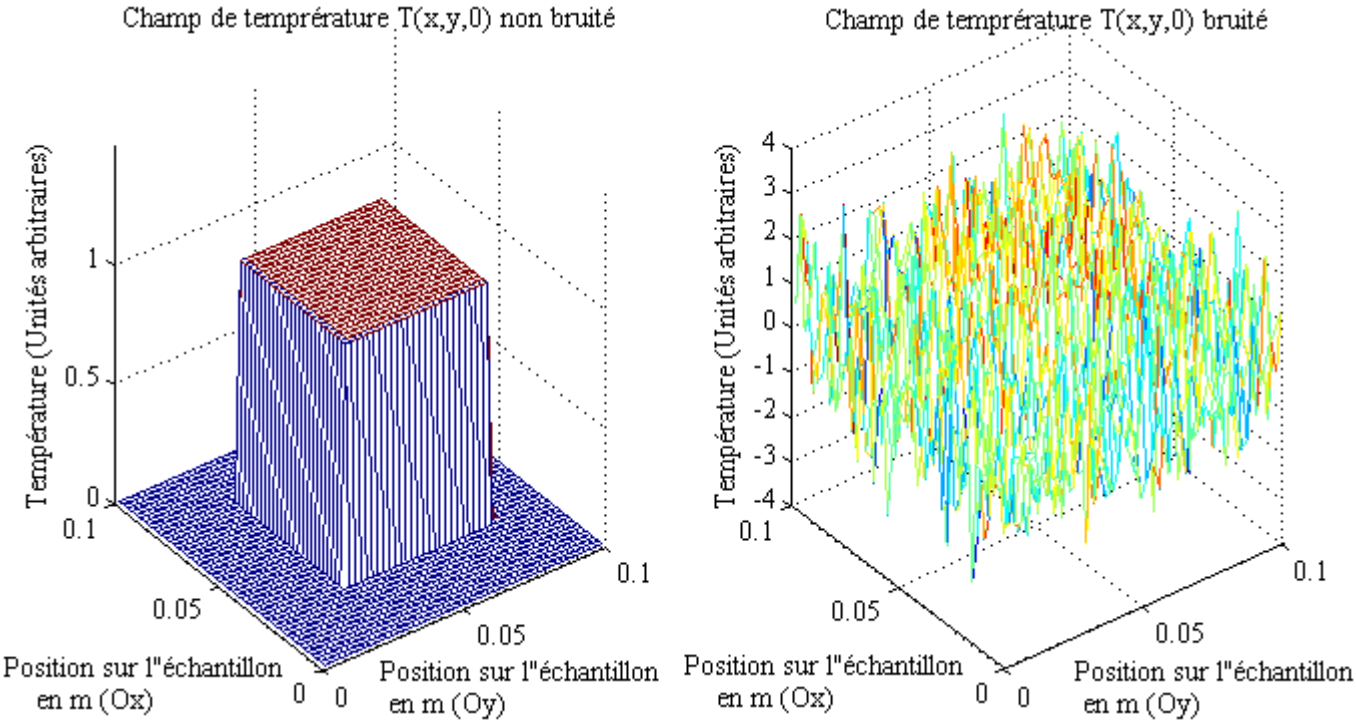


FIGURE 7.5.4: Champs de température initiaux exact et bruité $\hat{T}(x, y, z = 0, 0)$ avec $SNR = 1$

Nous faisons de même, mais cette fois-ci en essayant de reconstituer le champ de température initial, suite à une excitation par un *point source impulsionnel*. Les champs de température initiaux exact et bruité simulés sont illustrés en Figure 7.5.6 page suivante. Le résultat d'estimation est présenté en Figure 7.5.7 page 170.

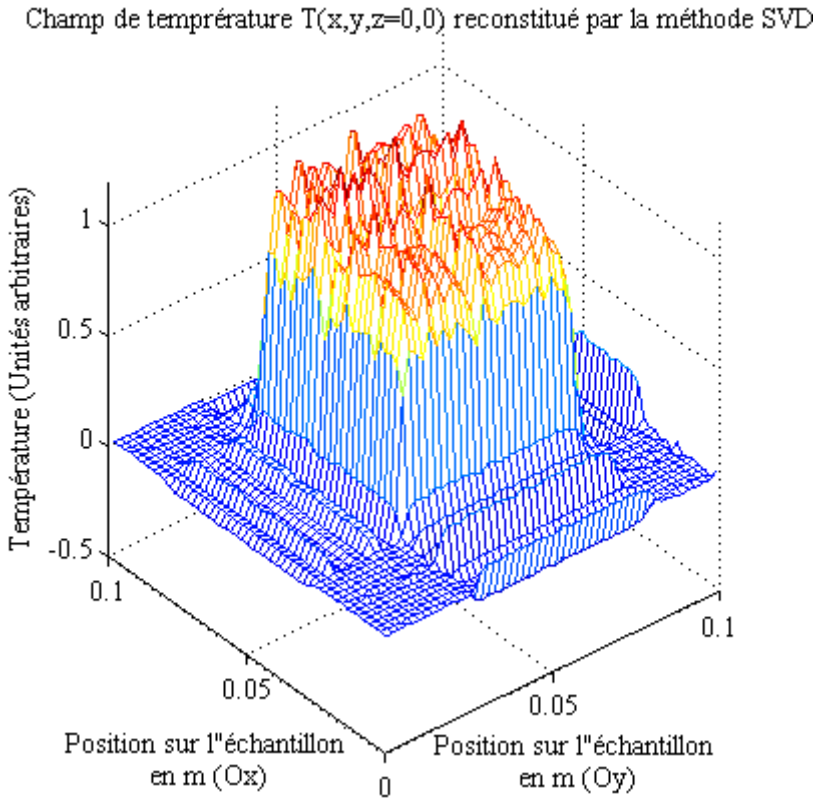


FIGURE 7.5.5: La reconstitution du champ 3D initial $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$ avec $r_0 = 3$ pour $SNR = 1$

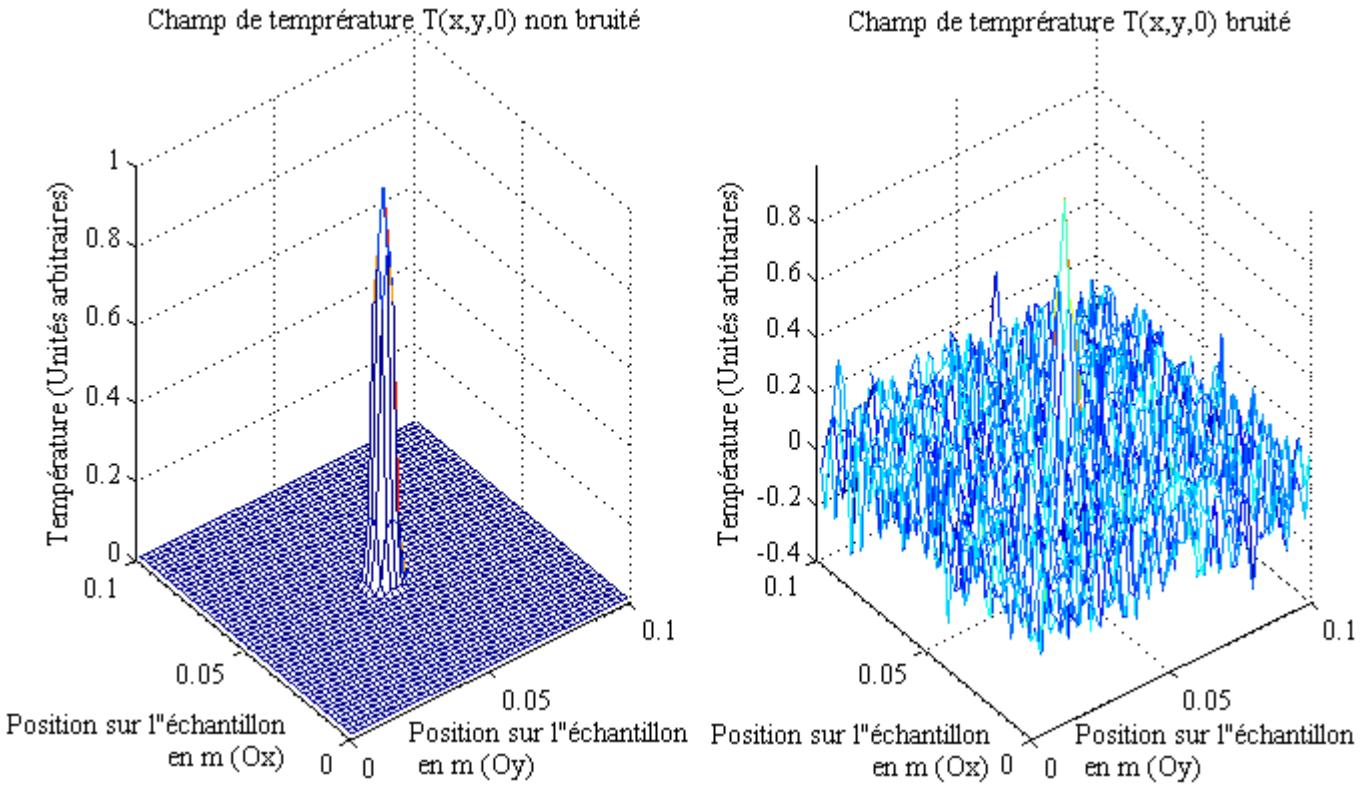


FIGURE 7.5.6: Champs de température initiaux exact et bruité $\hat{T}(x, y, z = 0, 0)$ suite à une excitation par un point source impulsionnel avec $SNR = 1,38$

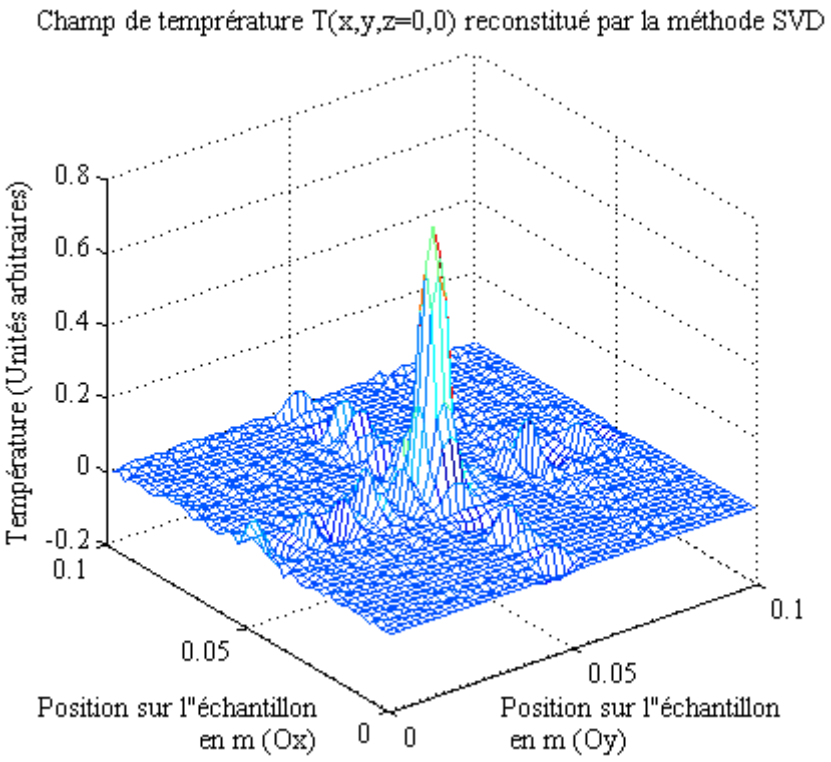


FIGURE 7.5.7: La reconstitution du champ 3D initial $\tilde{T}(x, y, z = 0, 0)_{SVD}$ avec $r_0 = 4$ pour $SNR = 1,38$ suite à une excitation par un point source impulsionnel

Des résultats que nous pouvons qualifier de très intéressants compte tenu de la simplicité de la méthode, qui démontre sa robustesse quant au bruit de mesure et offre ainsi de nouvelles perspectives d'imagerie dans des *conditions expérimentales difficiles*, mais également de nouvelles perspectives *quantitatives* pour les caméras à bas coûts.

Nous tenons à souligner que le paramètre influent n'est pas tellement le niveau du bruit de mesure, il peut être relativement conséquent, en contre partie le nombre d'images traitées doit lui être proportionnellement équivalent. Autrement dit, pour un niveau de bruit donné, en traitant une quantité de données bruitées suffisantes, nous pouvons aisément remonter au champ de température initial. En ce sens on se rapproche de la philosophie des méthodes périodiques, à savoir que le bruit de mesure est réduit de manière importante en réitérant l'expérience n fois [19], ce qui dans notre cas revient à traiter une grande quantité de données.

La méthode qui vient d'être exposée pourrait trouver des applications dans le domaine du *contrôle non destructif*. En effet, l'analyse des champs de température fortement bruités, suite à une impulsion flash uniforme sur des matériaux composites comportant des délaminages ou des inclusions, pourrait être grandement améliorée grâce à cette nouvelle méthode. Le traitement d'une grande quantité de données permettrait d'accroitre les très faibles contrastes thermiques engendrés par la présence de défauts.

7.6 Synthèse du chapitre

Dans ce chapitre nous avons abordé une ancienne problématique sous un nouveau jour, qui est celle de l'estimation de champs de température initiaux. Pour ce faire, nous avons utilisé deux approches, l'une basée sur les transformations de Fourier, l'autre sur une double décomposition en valeurs singulières. Elles diffèrent tout d'abord sur le plan éthique. Si l'une nécessite la connaissance du modèle de diffusion et *surtout des valeurs de diffusivités longitudinales*, l'autre se contente du traitement de données brutes, simplement injectées dans le code de calcul.

L'autre différence notoire, est la précision des résultats obtenus par les deux méthodes. Ils sont nettement meilleurs pour l'approche par la décomposition en valeurs singulières, clairement plus robuste quant au bruit de mesure. L'hégémonie des traitements empiriques, basées sur des approches statistiques de traitements d'une grande quantité de données est ici illustrée.

De nouvelles applications possibles sont dans le domaine de l'imagerie dans des conditions expérimentales difficiles, ou encore le domaine du contrôle non destructif, pour l'amélioration de très faibles contrastes thermiques engendrés par la présence de défauts/inclusions dans les structures composites.

Conclusions et perspectives

Les principales contributions de ce travail ont tout d'abord consisté à revisiter de manière numérique et expérimentale la réponse au *point source impulsionnel*. Nous avons pu ainsi exploiter la *séparabilité* des champs de température obtenus pour réduire l'étude de problèmes tridimensionnels en plusieurs problèmes monodimensionnels.

Nous avons repris les modèles de diffusion proposés par Batsale et Coll. [6], Krapez et Coll. [5], ainsi que certains de leurs principes expérimentaux. En effet, l'excitation thermique non uniforme, impose localement de forts gradients thermiques à la surface du matériau caractérisé, par conséquent le rapport signal sur bruit augmente à ces endroits et la sensibilité aux paramètres estimés devient optimale.

Ce travail a porté principalement sur des tentatives de réduction du bruit de mesure liées aux méthodes impulsionnelles tout en permettant des manipulations et un traitement rapide d'une grande quantité d'information, qui sont bien dans l'esprit de l'amélioration de méthodes de contrôle non destructif. Il offre une «alternative» aux méthodes périodiques qui, à notre connaissance, ne permettent pas une séparabilité spatiale et donc un traitement et une acquisition rapide des données.

Durant cette thèse, nous avons adapté et amélioré les méthodes d'inversion dans *l'espace modal* proposés par Bamford et Coll. [11, 2]. Ces méthodes consistent à utiliser *des transformations orthogonales du signal*, comme outils de *compression préalable de données*, *de réduction et maîtrise du bruit de mesure*.

La compression préalable de données commence par la détermination d'une base orthogonale adéquate, composée de *fonctions singulières*. Elle s'effectue par la *projection des données brutes* sur la base obtenue. Les données compressées sont ensuite injectées dans un modèle de transfert et sont inversées dans l'espace transformé pour permettre une analyse quantitative.

Nous avons pu également transposer l'analyse de sensibilité, basée sur l'étude locale des *corrélations entre les dérivées partielles du signal* expérimental. Cette analyse *préliminaire,* permet de déterminer l'espace optimal (sensibilité maximale aux paramètres considérés) dans lequel les estimations sont effectuées. Ce qui permet de limiter les calculs aux endroits où le modèle diffusif est valide et permet ainsi de réduire considérablement la quantité de données traitées.

L'analogie avec la théorie dans l'espace de Fourier nous a permis d'apporter de nouveaux éléments de réponse pour mieux cerner la «physique» des approches modales.

Le résultat original de cette thèse a consisté, tout en utilisant la *séparabilité* des champs de température suite à une réponse au *point source impulsionnel* ou *plusieurs points sources impulsionnels*, à proposer *une nouvelle méthode d'inversion* basée sur la *double décomposition en valeurs singulières* ${}^2SVD_{(x,y),t}$ du signal expérimental. Cette méthode par rapport aux précédentes, permet de tenir compte de la diffusion bi ou tridimensionnelle et offre ainsi *une meilleure exploitation du contenu spatial* des images infrarouges. Une étude complète de la méthode a été exposée. Des exemples numériques et expérimentaux nous ont permis de valider dans une première approche cette nouvelle méthode d'estimation pour la caractérisation de diffusivités longitudinales de matériaux hétérogènes. Des applications de ce code de calcul pour le contrôle non destructif des matériaux ont également été proposées.

La principale critique que nous pouvons faire de ces travaux de thèse, est liée aux validations expérimentales insuffisantes. Cependant les validations expérimentales nécessaires sont en cours au département TREFLE de l'Institut I2M et vont certainement se poursuivre dans une filiale de TESTIA en Russie, une structure spécialisée dans le contrôle non destructif appartenant au groupe EADS.

Même si le travail expérimental ne transparait pas dans ce document, les réflexions qui ont été menées sont issues de longues séries d'expérimentation systématiques et d'autres tentatives où la double décomposition est inefficace (la méthode du *Flying Spot Aléatoire* par exemple, ou encore dans les cas de champs de température initiaux non séparables).

Une ancienne problématique qui consiste à retrouver les champs de température initiaux à partir de données bruitées aux instants suivant l'excitation, a été également abordée sous un nouveau jour. La principale difficulté dans ces problèmes est la nécessité de connaitre les diffusivités thermiques du matériau orthotrope. De plus, les transferts sont souvent tridimensionnels et donc complexes à gérer. Encore une fois, la réponse au point source impulsionnel, assure la séparabilité du champ de température et permet de réduire l'étude du problème 3D complet à l'étude de problèmes 1D plus simples. L'application de *la double décomposition en valeurs singulières* a permis d'obtenir des résultats intéressants compte tenu de la simplicité de la méthode. En effet, les méthodes modales sont basées sur des approches statistiques de traitement d'une grande quantité de données, censément plus robustes quant au bruit de mesure, comme cela a pu être observé.

L'inconvénient majeur des méthodes impulsionnelles était jusqu'à présent le bruit de mesure. Les méthodes périodiques en ce sens, offrent de meilleurs résultats. Cependant ces nouvelles approchent modales convergent vers la philosophie des méthodes périodiques en termes de réduction conséquente du bruit de mesure. Cela offre de nouvelles perspectives d'imagerie dans des *conditions expérimentales difficiles*, mais également de nouvelles perspectives *quantitatives* pour les caméras à bas coûts. Des applications dans le domaine du contrôle non destructif pour la détection de défauts peuvent donc être envisagées.

Annexe I

Simple possibilities of thermal diffusivity estimation for small-sized samples, with a laser pulse heating and infrared cameras

by V. Ayvazyan*, J.-C. Batsale*, C. Pradere*

*TREFLE laboratory UMR 8508 : CNRS-ENSAM-UB1, Esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence.
vigen.ayvazyan@bordeaux.ensam.fr , christophe.pradere@bordeaux.ensam.fr, jean-christophe.batsale@bordeaux.ensam.fr

Abstract

The laser pulse heating is nowadays a very convenient and cheap way for the extension of metrological possibilities of infrared cameras. Laser diodes and simple optical systems, such as dichroic mirors (see Fig. 1), offer large possibilities to implement front face analysis of homogeneous solids. The front face temperature field can be processed from the knowledge of suitable analytical expressions which main characteristics will be presented here.

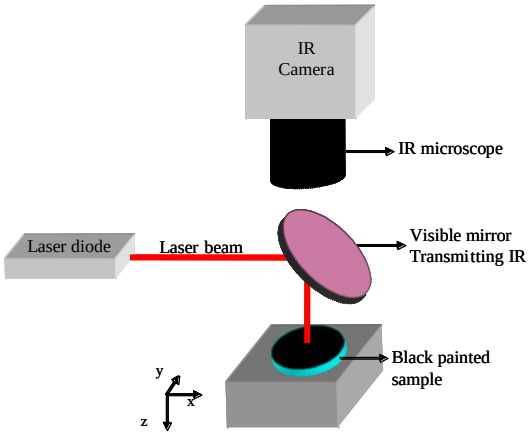


Fig. 1. *Optical devices for the measurement of thermal diffusivities with an infrared camera at small scales (the diameter of the laser beam is lower than one millimeter)*

1. Analytical solution

The analytical expression of the temperature response field of a point source heat pulse, imposed on the front face of a semi-infinite orthotropic solid at *x=y=z=0* yields:

$$T(x,y,z,t)=\frac{Q}{\rho c}\frac{\exp\left(-x^2/(4a_x t)\right)}{\sqrt{\pi a_x t}}\frac{\exp\left(-y^2/(4a_y t)\right)}{\sqrt{\pi a_y t}}\frac{\exp\left(-z^2/(4a_z t)\right)}{\sqrt{\pi a_z t}} \qquad (1)$$

with:

a_x, a_y, a_z : thermal diffusivities versus *x,y,z* direction ($m^2 s^{-1}$)

Q : Energy of the pulse point source (*J*)

ρc : volumic heat capacity ($Jm^{-3}K^{-1}$)

Such expression is separable and can be expressed as a product of 3 responses related each other to a 1D diffusion behaviour. It is very convenient for the estimation of thermal diffusivities following *x, y* and *z* directions, a_x, a_y, a_z .

In the past, from these considerations, several methods such as hot wire, hot plane or hot disk (see [1], [2]) have been developed with solid thin film or thin wire heating and measuring at the same time and the same place as the probe, the temperature response (with the same resistive probe or an additional thermocouple). The drawback of these methods is related to the inertia of the measurement device and the thermal contact resistance between the probe and the substrate. Generally, such contact methods do not allow the investigation of small-sized samples and the single located temperature information must be strongly related to the shape of the heating area (plane, wire or point).

The transposition of such methods to the use of laser heating and non contact infrared cameras presents several advantages linked to the absence of inertia related to heating and temperature measurement. Even if the absolute levels of the heat flux and temperature are not easily accessible, space averaging of the temperature frames offer three estimation possibilities in a single experiment.

2. Processing the front face temperature field

One way to process the front surface temperature field (*T(x,y,z=0,t)*) is to consider the Fourier cosine transform on the space variables (x,y) (see [3] , [4]), such as:

$$\theta(\alpha_n, \beta_m, z=0,t) = \int_0^L \int_0^l T(x,y,z=0,t)\cos(\alpha_n x)\cos(\beta_m y)dxdy \qquad (2)$$

with *L* and *l* are the lateral size of the sample and $\alpha_n = n\pi / L$ and $\beta_m = m\pi / l$ are dicrete eigenvalues.

The Fourier transform method can be applied if the heating is a pulse but not necessary a point source. In the case of a point source, the short time approximation (when *l* and *L* are assumed to be large or infinite) of the Fourier transform of expression (1) is:

$$\theta(\alpha_n, \beta_m, z=0,t) = \frac{Q}{\rho c}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a_z t}}\right)\exp\left(-\frac{z^2}{4a_z t}\right)\exp\left(-a_x {\alpha_n}^2 t\right)\exp\left(-a_y {\beta_m}^2 t\right) \quad (3)$$

This last expression demonstrates that from a single point source experiment the consideration of marginal space averaging (from $\alpha_n = 0$ or $\beta_m = 0$ in Fourier space) such as:

$$\left\langle \left\langle T(z=0,t)\right\rangle_x \right\rangle_y = \frac{1}{lL}\int_0^L \int_0^l T(x,y,z=0,t)dxdy \; ; \quad \left\langle T(y,z=0,t)\right\rangle_x = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,y,z=0,t)\,dx \qquad (4)$$

will give 3 different transient behaviours as follows:

$$\left\langle \left\langle T(z=0,t)\right\rangle_x \right\rangle_y = \frac{Q}{\rho c L l}\frac{1}{\sqrt{a_z \pi t}}, \quad (5.a)$$

$$\left\langle T(y,z=0,t)\right\rangle_x = \frac{Q}{\rho c L}\frac{1}{\sqrt{a_z \pi t}}\frac{\exp\left(-y^2/(4a_y t)\right)}{\sqrt{a_y \pi t}}, \quad (5.b)$$

$$\left\langle T(x,z=0,t)\right\rangle_y = \frac{Q}{\rho c l}\frac{1}{\sqrt{a_z \pi t}}\frac{\exp\left(-x^2/(4a_x t)\right)}{\sqrt{a_x \pi t}} \qquad (5.c)$$

(these expressions are obtained from equation (3) after inverse Fourier transform)

Such behaviours allow considering accurately the different diffusion regimes in 1D, 2D or 3D mode, and give a way to verify the experimental behaviours. The previous expressions (5) will be illustrated through several examples of experiments in the following sections.

3. Laser pulse heating setup

3.1 Study of spatial average value of temperature in *x* and *y* directions (see (5.a))

The sample under study is a Silica-Phenolic composite with a thickness of 6 mm and *L=l=20* mm, used for thermal protection systems, such as thermal shields on space shuttles, its transverse thermal diffusivity is about $3.5*10^{-7}$ $m^2.s^{-1}$. The sample's surface is covered with a thin black paint in order to have the same absorption all over the surface and decrease reflections on it.

The experimental set-up is given in (Fig. 1).The heat source is a 1 W power laser diode, 830 nm wavelength, which illuminates the sample's surface during about 360 ms. Optical lens is used to focus the laser beam and a dichroic mirror to guide the laser beam onto the sample. The dichroic mirror is reflective for visible radiation (between 400 nm and 1000 nm wavelengths) and is transparent for IR radiation (95% transmission between 2 and 5 µm wavelengths). The emitted IR radiation from the heated sample goes through dichroic mirror and is measured by an IR camera (*FLIR ATS Titanium* InSb camera with 320*256 pixels detector and 1.9-5.2 µm wavelength detection band, coupled with microscope IR lens). This set-up allows recording the temperature time evolution of the sample surface (see Fig. 2.)

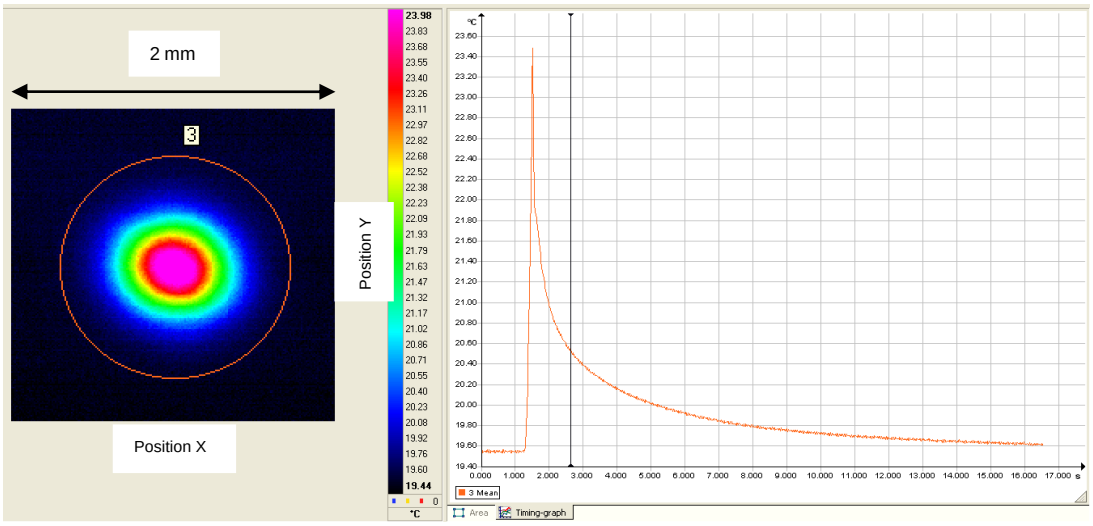
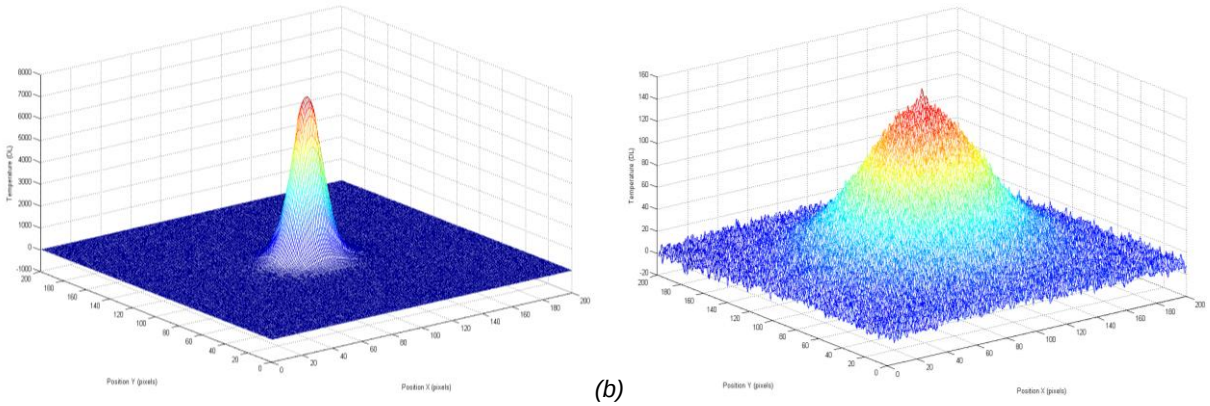


Fig. 2. *Average temperature evolution of sample's surface for the pixels inside the circle (1 pixel corresponds approximately to 30 µm on the sample). The peak observed on the graph corresponds to the heat pulse, which illuminates the sample* during about 360 ms *at ½ W. The temperature increase inside the circle is less than 5 °C. The integration time is equal to 500 µs and camera's acquisition frequency is 50 Hz. About 17 s are needed to perform the experiment, 800 IR images are recorded*

3-D representations of the temperature field are represented in (Fig.3).



(a) *(b)*

Fig. 3. *Measured temperature fields: (a) just after heat pulse (b) during themal relaxation, semi-infinite behaviour*

From these measurements, the logarithm of the spatial average value (in *x* and *y* directions) of the temperature increase is plotted versus the logaritm of time (Fig. 4). The -1/2 slope correspondig to the semi-infinite behaviour is well observed for times higher than three times the pulse duration.

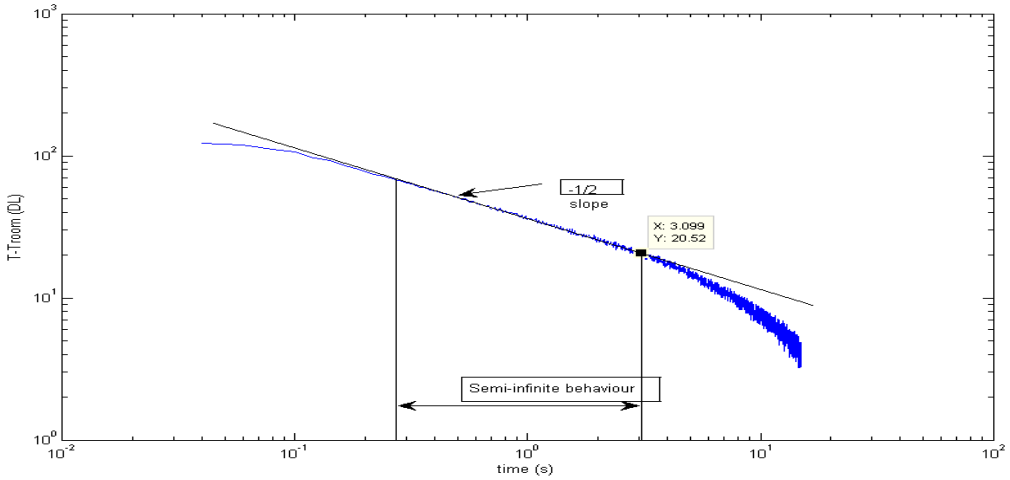


Fig. 4. The logarithm of spatial average value of the temperature increase ($T-T_{room}$) is plotted versus the logaritm of time. T_{room} is the room temperature supposed to be the initial uniform temperature of the sample. The -1/2 slope is well observed until t=3 s

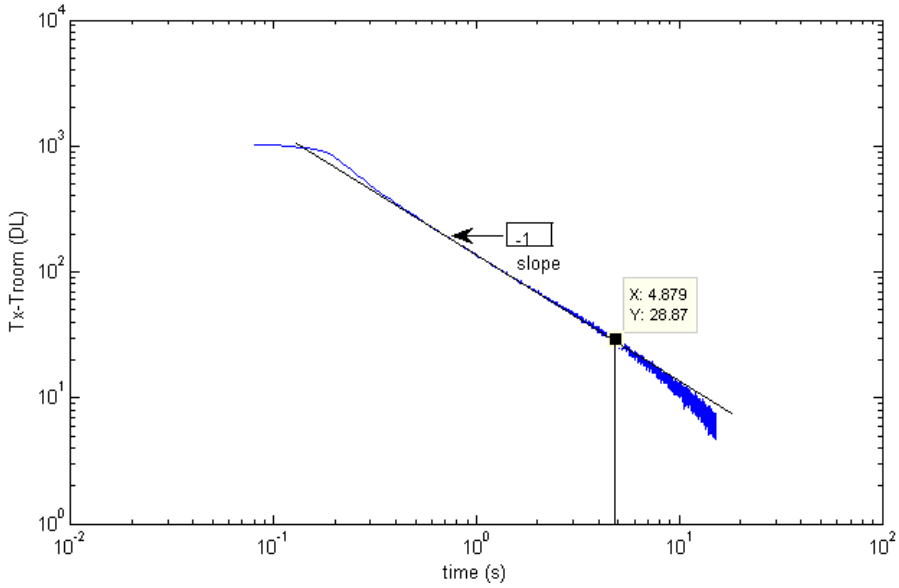
3.2 Study of partial spatial average value of temperature in *x* or *y* direction (see (5.b) or (5.c))

The partial spatial average values of temperature, in *x and y* directions, given by expressions (5.b) and (5.c) respectively at *y*=0 and *x*=0 are as follows:

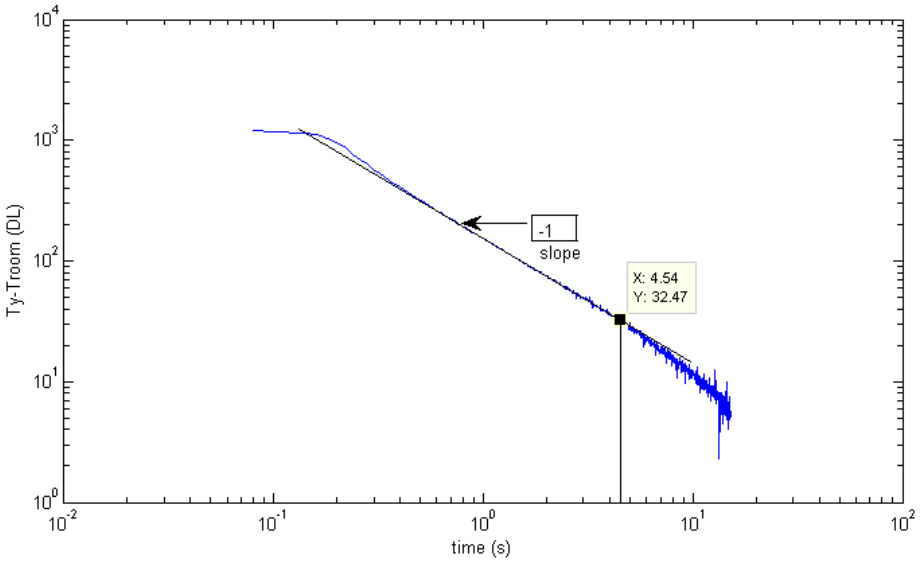
$$\langle T(y=0,z=0,t)\rangle_x = \frac{Q}{\rho c L}\frac{1}{\sqrt{a_z \pi}}\frac{1}{\sqrt{a_y \pi}}\frac{1}{t} \qquad (6.a)$$

$$\langle T(x=0,z=0,t)\rangle_y = \frac{Q}{\rho c l}\frac{1}{\sqrt{a_z \pi}}\frac{1}{\sqrt{a_x \pi}}\frac{1}{t} \qquad (6.b)$$

From the previous IR measurements, the logarithm of partial spatial average values of temperature increase, in *x* and y directions, are plotted versus logarithm of time Fig. 5. The -1 slope is well observed for both cases, which validates expressions (5.b) and (5.c) and also (6.a) and (6.b).



(a)



(b)

Fig. 5. (a) The logarithm of partial spatial average value of the temperature *in x direction* (T_x-T_{room}) is plotted versus logaritm of time. The -1 slope is well observed until t=4.9 s, than signal-to-noise ratio is low. (b) The logarithm of partial spatial average value of the temperature *in y direction* (T_y-T_{room}) is plotted versus logaritm of time. The -1 slope is also well observed until t=4.5 s, than signal-to-noise ratio is low

4. Simulation of different diffusion regimes

The 3D analytical expression of the temperature response field of a point source heat pulse, imposed on the front face of a semi-infinite orthotropic solid at *x=y=z=0* yields to equation (1), which is separable and can be expressed as a product of 3 responses related each other to a 1D diffusion behaviour. At z=0, this equation is then:

$$T(x,y,z=0,t)=\frac{Q}{\rho c}\frac{1}{\sqrt{\pi a_z t}}\frac{\exp\left(-x^2/(4a_x t)\right)}{\sqrt{\pi a_x t}}\frac{\exp\left(-y^2/(4a_y t)\right)}{\sqrt{\pi a_y t}} \quad (7)$$

The last expression (7) is close to 2D analytical expression of the temperature response which is as follows:

$$T(x,y,t)=\frac{Q}{\rho c}\frac{\exp\left(-x^2/(4a_x t)\right)}{\sqrt{\pi a_x t}}\frac{\exp\left(-y^2/(4a_y t)\right)}{\sqrt{\pi a_y t}} \quad (8)$$

If we now multiply expression (7) by $\sqrt{t}$ then we get:

$$\sqrt{t}\times T(x,y,z=0,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_z}}\frac{Q}{\rho c}\frac{\exp\left(-x^2/(4a_x t)\right)}{\sqrt{\pi a_x t}}\frac{\exp\left(-y^2/(4a_y t)\right)}{\sqrt{\pi a_y t}}=\frac{1}{\sqrt{\pi a_z}}T(x,y,t) \quad (9)$$

The 3D response multiplied by $\sqrt{t}$ is equal to 2D response multiplied by the factor $\frac{1}{\sqrt{\pi a_z}}$.

Theoretical simulations (Fig. 6) are performed to show this point. Furthermore, if we multiply expression (5.b) or (5.c) by $\sqrt{t}$, we will get 1D diffusion regime in *y* and *x* directions respectively. This interesting feature, due to separability of analytical solution (1), allows considering different 1D regimes, all obtained from a 3D response *T(x,y,z=0,t)*.

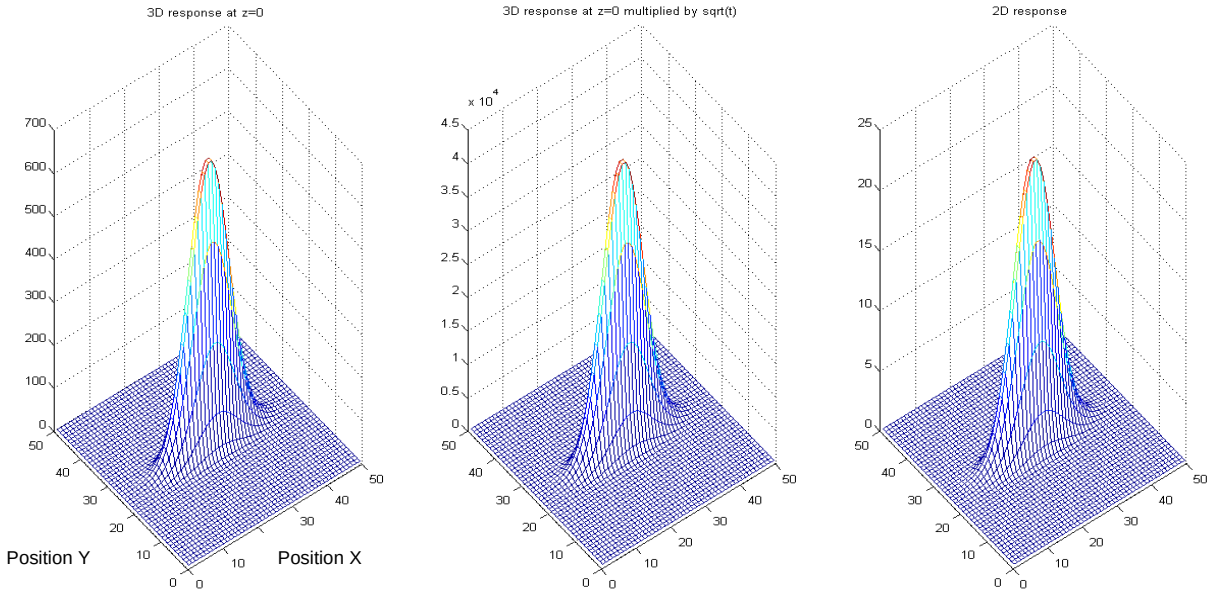


Fig. 6. *Instantaneous response of different diffusion regimes after heat pulse. For the simulation we set thermal diffusivities to $a_x=10^{-5}$, $a_y=10^{-6}$, $a_z=10^{-7}$ and $\frac{Q}{\rho c}=1$. We can easily verify that their is a factor $\frac{1}{\sqrt{\pi a_z}}$ between graphs (b) and (c)*

5. Processing of 3D temperature response. Inplane diffusivity estimation

5.1 Inverse processing

From expression (7), $\sqrt{t}\times T(x,y,z=0,t)\propto \tilde{T}(x,y,t)$ verifies a pure inplane diffusion in *x* and *y* directions. In order to estimate the inplane diffusivity it is then suitable to consider the 2D finite differences approximation of heat equation with explicit scheme, by considering the temperature signal $\tilde{T}(x,y,t)=T_{i,j}^{k}$ of one pixel at node *i,j* and at time *k*:

$$Fo_{i,j}\Delta T_{i,j}^{k}=\delta T_{i,j}^{k} \qquad (10)$$

with: $\Delta T_{i,j}^{k}=\left(T_{\mathrm{i+1,j}}^{k}+T_{\mathrm{i-1,j}}^{k}+T_{\mathrm{i,j+1}}^{k}+T_{\mathrm{i,j-1}}^{k}-4T_{i,j}^{k}\right)$ and $\delta T_{i,j}^{k}=T_{i,j}^{k+1}-T_{i,j}^{k}$ the laplacian and the temporal derivative of the temperature, $Fo_{i,j}=\frac{a_{i,j}\Delta t}{\Delta x^{2}}$ is the non-dimensional Fourier local number with: $a_{i,j}$ the local thermal diffusivity (m² s^{-1}), Δx the pixel size (m) with $\Delta x = \Delta y$, Δt the time step (s). The main difficulty consists in finding the pixels verifying this diffusive model (10).

A simple way to process the temperature response, is to study the correlation coefficient $\rho_{i,j}^{F_t}$ between laplacian and temporal derivative, defined as follows [5]:

$$\rho_{i,j}^{F_t}=\frac{\sum_{F_t}\Delta T_{i,j}^{k}\delta T_{i,j}^{k}}{\sqrt{\sum_{F_t}\Delta T_{i,j}^{k\,2}}\sqrt{\sum_{F_t}\delta T_{i,j}^{k\,2}}} \qquad (11)$$

with F_t a temporal window of length $F_t=\left[k,k+lt\right],\ k\in[1,N-lt]$, *k* is the time step and *lt* the length of the temporal window.

If such correlation coefficient is near to 1, it is a proof that the purely diffusive model (10) is verified. The inverse thermal Fourier number could be calculated [5] with the formulation:

$$\frac{1}{Fo_{i,j}^{F_t}} = \frac{\sum_{F_t} \Delta T_{i,j}^k \delta T_{i,j}^k}{\sum_{F_t} \delta T_{i,j}^{k\,2}} = \frac{\rho_{i,j}^{F_t} \sqrt{\sum_{F_t} \Delta T_{i,j}^{k\,2}}}{\sqrt{\sum_{F_t} \delta T_{i,j}^{k\,2}}} \quad (12)$$

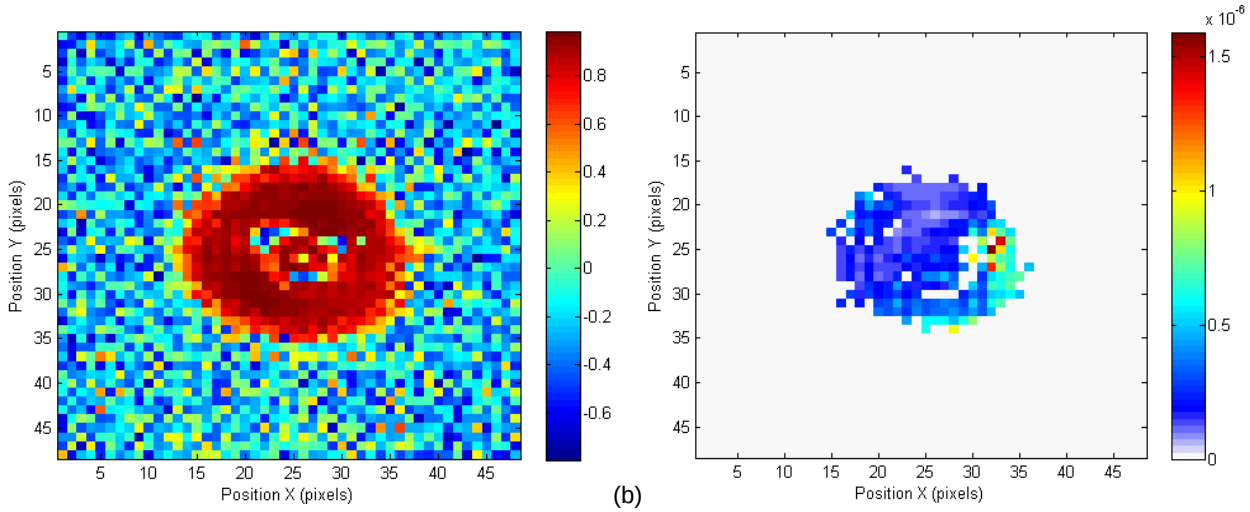
For the inplane diffusivity estimation with equation (12), we first calculate the correlation equation (11) with a temporal window. When the value of the correlation coefficient is close to 1, we estimate the inverse Fourier number which is related to thermal diffusivity. Otherwise, the estimation is not performed and a zero value is affected to that node. At the end of the process we obtain a global inverse Fourier number by calculating:

$$\frac{1}{Fo_{i,j}^{est}} = \sum_{k=1}^{N-Ft} \frac{1}{Fo_{i,j}^{k}} . \left(\rho_{i,j}^{k} \to 1\right) \Big/ \sum_{k=1}^{N-Ft} \left(\rho_{i,j}^{k} \to 1\right) \quad (13)$$

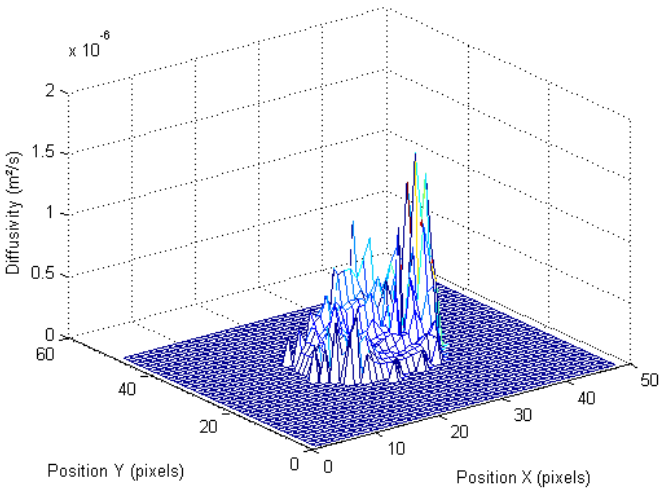
Then we deduce thermal diffusivity at each node from expression: $Fo_{i,j}^{est} = \frac{a_{i,j} \Delta t}{\Delta x^2}$

5.2 Experimental results

An experimental validation is performed with the previous configuration. The spatial resolution $\Delta x = \Delta y$ obtained with the microscope objective is about 30 µm for each pixel and the acquisition frequency is 50 frames per second (Δt = 20 ms). The number of pixels in the *x* and *y* directions is identical and equals to 200. To decrease the influence of noise and the spatial correlation between pixels, due to the non uniformity correction feature of IR detector, the measured temperature field is averaged by a 4 by 4 square. As a result, the size of the field in *x* and *y* directions is divided by four and the pixel sizes Δx and Δy become equal to 120 µm. The temporal window for calculations is set to F_t =2. The correlation coefficient and inplane diffusivity mappings are represented Fig.7 just after the heat pulse at the time step *t=2s*.



(a) (b)



(c)

Fig. 7. *(a) Correlation coefficient mapping of the sample for* F_t =10 at the time step *t=2s (b)-(c) Inplane diffusivity mapping*

The correlation coefficient between laplacian and temporal derivative is close to 1 in the heated area (Fig. 7 (a)). The diffusion model (10) is verified in this zone. The local diffusivities could then be estimated (Fig. 7 (b)-(c)). Outside this area the signal-to-noise ratio is low, the correlation coefficient $\rho_{i,j}^{k} << 1$. The local diffusivities could not be estimated.

6. Conclusion. Perspectives

The results presented in this paper are a preliminary step in order to validate the point source method and to show different processing possibilities with IR cameras.

The perspectives of the use of the point source are for example to exploit the possibilities of superposition of such sources by a space shift of the laser. One way to study very short times will be also explored with heterodyne methods [6].

REFERENCES

[1] CARLSLAW H.S., JAEGER J.-C., "Conduction of Heat in solids", Oxford, Clarendon Press, 1959

[2] GUSTAFSON SE., "Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials", Rev. Of Sci. Instrum., Vol. 62, 797, 1991

[3] PHILIPPI I., BATSALE J.-C., MAILLET D., DEGIOVANNI A., "Measurement of thermal diffusivity through processing of infrared images", Rev. Sci. Instrum., 66, pp182-192, 1995

[4] KRAPEZ J.C., SPAGNOLO L., FRIEB M., MAIER H.P. NETTER F., "Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography", International Journal of Thermal Sciences 43 967-977, 2004.

[5] PRADÈRE C., MORIKAWA J., TOUTAIN J., BATSALE J.-C., HAYAKAWA E., HASHIMOTO T., "Microscale thermography of freezing biological cells in view of cryopreservation", QIRT Journal, Vol. 6., No. 1, pp. 37-61, 2006

[6] CLERJAUD L., PRADÈRE C., BATSALE J.-C., DILHAIRE S., "Heterodyne method: thermal diffusivity estimation with periodic local heating in a large range of frequencies (25 Hz to upper than 1 kHz)", QIRT Journal, Vol. 7., No. 1, pp. XX-XX, 2010 (in press)

Bibliographie

[1] M. Bamford et J.C. Batsale : Analytical singular value decomposition of infrared image sequences : microcrack detection on ceramic composites under mechanical stresses. *Comptes Rendus - Mecanique*, 336(5):440–447, 2008.

[2] M. Bamford : *Méthode flash et thermographie infrarouge pour la cartographie des propriétés thermophysiques : Application à la caractérisation en thermomécanique*. Thèse de doctorat, 260 p. 2007, Université Bordeaux 1.

[3] H.S. Carslaw et J.C. Jaeger : *Conduction of Heat in Solids (Second Edition)*. Oxford University Publications,, 510p.,1959.

[4] J.-C. Krapez : Simultaneous measurement of in-plane and out-of-plane diffusivity by using a grid-like mask. Sept. 29-30, 1999.

[5] J.-C. Krapez, L. Spagnolo, M. Friess, H.-P. Maier et G.U. Neuer : Measurement of in-plane diffusivity in non-homogeneous slabs by applying flash thermography. *International Journal of Thermal Sciences*, 43(10):967–977, 2004.

[6] J.C. Batsale, J.L. Battaglia et O. Fudym : Autoregressive algorithms and spatially random flash excitation for 2d non destructive evaluation with infrared cameras. *QIRT Journal*, 1:5–20, 2004.

[7] C. Gruss et D. Balageas : Theoretical and experimental applications of the flying spot camera. *Quantitative Infrared Thermography (QIRT 92), Eurotherm Seminar Series 27, Éditions Européennes Thermique et Industrie Paris 1992, QIRT Open Archives*.

[8] C. Gruss, F. Lepoutre et D. Balageas : Non destructive evaluation using a flying-spot camera. *6th European Conference on Non Destructive Testing, Nice (France), October 24-28, 1994*.

[9] O. Fudym, J.C. Batsale et J.L. Battaglia : Thermophysical properties mapping in semi-infinite longitudinally cracked plates by temperature image processing. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 15(2):163–176, 2007.

[10] J. V. Beck et K. J. Arnold : *Parameter Estimation in Engineering and Science*. John Wiley and Sons, NY, p. 502, 1977.

[11] M. Bamford, J.C. Batsale et O. Fudym : Nodal and modal strategies for longitudinal thermal diffusivity profile estimation : Application to the non destructive evaluation of

sic/sic composites under uniaxial tensile tests. *Infrared Physics and Technology*, 52(1):1–13, 2009.

[12] M. Bamford, M. Florian, G.L. Vignoles, J.-C. Batsale, C.A.A. Cairo et L. Maillé : Global and local characterization of the thermal diffusivities of sicf/sic composites with infrared thermography and flash method. *Composites Science and Technology*, 69(7-8):1131–1141, 2009.

[13] M. Bamford, M. Florian, G.L. Vignoles et J.C. Batsale : Global and local characterization of thermal diffusivities of sic/sic composites with infrared thermography and flash method. *Composites Science and Technology*, 69:1131–1141, 2009.

[14] C. Pradère, J. Toutain, J.C. Batsale, E. Morikawa et T. Hashimoto : Microscale thermography of freezing biological cells in view of cryopreservation. *Quantitative InfraRed Thermography QIRT*, (6):37–61, 2009.

[15] C. Pradère, C. Hany, J. Toutain et J.C. Batsale : Thermal analysis for velocity, kinetics and enthalpy reaction measurements in microfludic devices. *Experimental Heat Transfer*, 23:44–62, 2010.

[16] C. Ravey : *Estimation de champs de diffusivités, de vitesses et de sources de chaleur par thermographie infrarouge sur des systemes microfluidiques*. Thèse de doctorat, École doctorale N°432 Sciences des Métiers de l'Ingénieur - ENSAM, 2011.

[17] J.C. Batsale, C. Pradère et V. Ayvazyan : Estimation de cartographies de diffusivité thermique par thermographie infrarouge. *19ème Congrès Français de Mécanique*, Marseille, 24-28 août 2009.

[18] V. Ayvazyan, J.C. Batsale et C. Pradère : Simple possibilities of thermal diffusivity estimation for small-sized samples, with a laser pulse heating and infrared cameras. *10th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography*, July 27-30, 2010, Québec (Canada).

[19] L. Clerjaud : *Méthode d'hétérodynage pour la caractérisation de propriétés thermophysiques par thermographie infrarouge dans une large gamme spatiale et temporelle*. Thèse de doctorat, Universités Bordeaux 1, 06-2010.

[20] J. Hladik : *Métrologie des propriétés thermophysiques des matériaux*. Masson, 1990.

[21] J.-C. Courtier et P. Giacomo : *Vocabulaire de la mesure.* Techniques de l'ingénieur [R 113], 09-2003.

[22] A.-M. Bianchi, Y. Fautrelle et J. Etay : *Transferts thermiques*. Broché, 550p., 12-2004.

[23] G. Bonnier et E. Devin : *Couples thermoélectriques*. Techniques de l'ingénieur [R 2 590], 12-1997.

[24] J.-L. Battaglia, H. Elmoussami et L. Puigsegur : Modélisation du comportement thermique d'un outil de fraisage : approche par identification de système non entier. thermal modelling of a milling tool : a noninteger system identification approach. *Comptes Rendus Mecanique*, 330(12):857 – 864, 2002.

[25] A. Kusiak, J.-L. Battaglia et J. Rech : Tool coatings influence on the heat transfer in the tool during machining. *Surface and Coatings Technology*, 195(1):29 – 40, 2005.

[26] Elena Palomo del Barrio et J.-L. Dauvergne : *A non-parametric method for estimating enthalpy-temperature functions of shape-stabilized phase change materials*, volume 54. 2011.

[27] L. Thiery : *Microsondes thermoélectriques.* Techniques de l'ingénieur [R 2 765], 03-2006.

[28] B. Lenoir, J.-P. Michenaud et A. Dauscher : *Thermoélectricité : des principes aux applications.* Techniques de l'ingénieur [K 730], 05-2010.

[29] J.-C. Lecordier, C. Petit et P. Paranthoen : *Mesure locale et instantanée de la température des fluides.* Techniques de l'ingénieur [R 2 760], 10-1985.

[30] D. Pajani : *Mesure par thermographie infrarouge.* ADD Editeur, 450p., 1989.

[31] F. Papini et P. Gallet : *Thermographie infrarouge. Image et mesure.* Masson, 239p., 1994.

[32] G. Gaussorgues : *La thermographie infrarouge. Technique et documentation.* 587p., 1999.

[33] X. Maldague : *Nondestructive evaluation of materials by infrared thermography.* John Wiley and Sons Pub., 224p., 2001.

[34] M. Vollmer et K.-P. Möllmann : *Infrared thermal imaging.* Wiley-VCH, 611p., 2010.

[35] P. Thureau : *Fluxmètres thermiques.* Techniques de l'ingénieur [R 2 900], 10-1996.

[36] Département Energétique Fondamentale et Appliquée (DEFA) ONERA : *Capteurs en couches minces et microtechnologie. Capteurs thermiques.* http ://www.onera.fr/dmph/capteurs-couches-minces-microtechnologie/capteurs-thermiques.

[37] Cellule de Transfert de technologie Thermicar : Contrôle non destructif et caractérisation thermique. http ://www.trefle.u-bordeaux1.fr/thermicar/index.html.

[38] Entreprise Thermoconcept : Caractérisation thermique des matériaux et la thermographie infrarouge. http ://www.thermoconcept-sarl.com/index.html.

[39] L. Berreur, B. Maillard et S. Nösperger : L'industrie française des matériaux composites. Rapport technique, Etude stratégique réalisée par Nodal Consultants pour le compte de DiGITIP / SIM, 05-2002.

[40] D.L. Balageas, A.A. Deom et D.M. Boscher : Characterization and non-destructive testing of carbon-epoxy composites by a pulsed photothermal method. *Materials Evaluation*, 45(4):461–465, 1987.

[41] V. Vavilov : Infrared thermographic detection and characterisation of impact damage in carbon fibre composites : Results of the round robin test. *Proc. of the Eurotherm Seminar 60 "Quantitative Infrared Thermography-QIRT'98"*, pages 43–52, 1998.

[42] S.M Shepard et R. Ducar : Quantitative infrared defect detection in composite aerospace structures. *Int. SAMPE Symposium Proc.*, 45, 2000.

[43] S.M. Shepard : Flash thermography of aerospace composites. *4th Pan American Conference for NDT*, 2007.

[44] W.J. Parker, R.J. Jenkins, C.P. Butler et G.L. Abbott : Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of Applied Physics*, 32(9):1679–1684, 1961.

[45] A. Degiovanni : Diffusivité et méthode flash. *Rev. Gen. Therm.*, (185):420–442, 1977.

[46] D.L. Balageas : Flash thermal diffusivity measurements with a novel temperature-time history analysis. *Proceedings of the Symposium on Thermophysical Properties*, pages 87–93, 1982.

[47] A. Degiovanni et M. Laurent : Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique pour la méthode «flash». *Rev. Phys. Appl.*, 21:227–237, 1986.

[48] B. Hay, J.-R. Flitz et J.-C. Batsale : *Mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash.* Techniques de l'ingénieur [R 2 955], 03-2004.

[49] J.C. Batsale, D. Maillet et A. Degiovanni : Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales-calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37(1): 111–127, 1994.

[50] I. Philippi, J.C. Batsale, D. Maillet et A. Degiovanni : Measurement of thermal diffusivities through processing of infrared images. *Review of Scientific Instruments*, 66(1):182–192, 1995.

[51] D. Mourand, J. Gounot et J.-C. Batsale : New sequential method to process noisy temperature response from flash experiment measured by infrared camera. *Review of Scientific Instruments*, 69(3):1437–1440, 1998.

[52] M. Varenne, J.-C. Batsale et C. Gobbé : Estimation of local thermophysical properties of a one-dimensional periodic heterogeneous medium by infrared image processing and volume averaging method. *Journal of Heat Transfer*, 122(1):21–26, 2000.

[53] M. Varenne, J.-C. Batsale et C. Gobbé : Estimation of the local thermal conductivity field of a plane heterogeneous medium with infrared image processing and the volume-averaging method. *High Temperatures - High Pressures*, 32(3):329–336, 2000.

[54] D. Mourand et J.-C. Batsale : Sequential method for thermal diffusivity discrimination by infrared thermography : Application to the use of an uncooled plane-array camera. *High Temperatures - High Pressures*, 33(2):127–134, 2001.

[55] L. Spagnolo, J.-C. Krapez, M. Friess, H.P. Maier et G. Neuer : Flash thermography with a periodic mask : Profile evaluation of the principal diffusivities for the control of composite materials. volume 5073, pages 392–400, 2003.

[56] M. Diot : *Capacités thermiques.* Techniques de l'ingénieur [R 2970], 01-1993.

[57] L. Elegant et J. Rouquerol : *Application des microcalorimètres aux mesures thermiques.* Techniques de l'ingénieur [R 3010], 12-1996.

[58] J. Grenet et B. Legendre : *Analyse calorimétrique differentielle à balayage (DSC).* Techniques de l'ingénieur [P 1 205], 12-2010.

[59] M. Thomas : *Propriétés thermiques de matériaux composites : caractérisation expérimentale et approche microstructurale.* Thèse de doctorat, Ecole polytechnique de l'Université de Nantes, 05-2008.

[60] A. Degiovanni : *Conductivité et diffusivité thermique des solides.* Techniques de l'ingénieur [R 2 850], 01-1994.

[61] J.-C. Krapez : *Mesure de l'effusivité thermique : Introduction.* Techniques de l'ingénieur [R 2 957], 04-2007.

[62] J.-C. Krapez : *Mesure de l'effusivité thermique : Méthodes par contact.* Techniques de l'ingénieur [R 2 958], 04-2007.

[63] J.-C. Krapez : *Mesure de l'effusivité thermique : Méthodes photothermiques.* Techniques de l'ingénieur [R 2 959], 04-2007.

[64] F. De Ponte et S. Klarsfeld : *Conductivité thermique des isolants.* Techniques de l'ingénieur [R 2 930], 06-2002.

[65] A. S. Brahim Djelloul : *Radiomètrie photothermique sous excitation aléatoire : application à la mesure de propriétés thermophysiques.* Thèse de doctorat, Université de Reims, 07-2008.

[66] S. Brahim, J.L. Bodnar et P. Grossel : Thermal diffusivity measurement by photothermal radiometry under random excitation and parametric analysis. *Journal of Physics : Conference Series*, 214, 2010. cited By (since 1996) 0.

[67] V. Schick : *Caractérisation d'une mémoire à changement de phase : Mesure de propriétés thermiques de couches minces à haute température.* Thèse de doctorat, Universités Bordeaux 1, 06-2011.

[68] F. Lepoutre : *Mesures thermiques par l'effet mirage.* Techniques de l'ingénieur [R2 959], 04-1986.

[69] D.L. Balageas : *Rencontre S.F.T, Toulouse*, Mai 1984.

[70] E. Hendler, R. Crosbie et J.D. Hardy : Measurement of heating of the skin during exposure to infrared radiation. *Journal of Applied Physiology*, 12(1):77–85, 1958.

[71] R.D. Cowan : Proposed method of measuring thermal diffusivity at high temperatures. *Journal of Applied Physics*, 32(7):1363–1370, 1961.

[72] R.D. Cowan : Pulse method of measuring thermal diffusivity at high temperatures. *Journal of Applied Physics*, 34(4):926–927, 1963.

[73] A.J. Ångstsröm : Bestimmung der warme leitung durch periodische temperaturanderung. *Annalen der Physik und Chemie*, 114:513–530, 1861.

[74] C. Pradère, J.M. Goyhénèche, J.C. Batsale, S. Dilhaire et R. Pailler : Thermal diffusivity measurements on a single fiber with microscale diameter at very high temperature. *International Journal of Thermal Sciences*, 45(5):443–451, 2006.

[75] C. Pradere, J.C. Batsale, J.M. Goyhénèche, R. Pailler et S. Dilhaire : Thermal properties of carbon fibers at very high temperature. *Carbon*, 47(3):737–743, 2009.

[76] D. Pajani : *Thermographie. Principes et mesures.* Techniques de l'ingénieur [R 2 740], 09-2001.

[77] D. Pajani et L. Audaire : *Thermographie. Technologies et applications.* Techniques de l'ingénieur [R 2 741], 09-2001.

[78] R.M. Pujola et D.L. Balageas : Derniers développements de la méthode flash adaptée aux matériaux composites à renforcement orienté. *High Temperatures - High Pressures*, 17:623–632, 1985.

[79] D.L. Balageas et A.M. Luc : Transient thermal behavior of directional reinforced composites : Applicability limits of homogeneous property model. *AIAA journal*, 24(1): 109–114, 1986.

[80] D.M. Boscher, D.L. Balageas et A.A. Deom : Non-destructive evaluation of carbon epoxy laminates using transient infrared thermography. *Proc. 16th NDE Symp.*, 1987.

[81] P. Cielo, X. Maldague, A.A. Deom et R. Lewak : Thermographic nondestructive evaluation of industrial materials and structures. *Materials Evaluation*, 45(4):452–460, 1987.

[82] X. Maldague, J.-C. Krapez et P. Cielo : Temperature recovery and contrast computations in nde thermographic imaging systems. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 10(1):19–30, 1991.

[83] D. Balageas : Thickness or diffusivity measurements from front-face flash experiments using the tsr (thermographic signal reconstruction) approach. *10th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography July 27-30, 2010, Québec (Canada).*

[84] D. Balageas, B. Chapuis, G. Deban et F. Passilly : Quantitative assessment of the improvement of the detection of defects by pulse thermography thanks to the tsr approach in the case of a smart composite repair patch. *10th International Conference on Quantitative InfraRed Thermography July 27-30, 2010, Québec (Canada)*.

[85] J.C. Krapez, D. Balageas, A. Déom et F. Lepoutre : Early detection by stimulated infrared thermography. comparison with ultrasonics and holo/shearography, in advances for signal processing for non destructive evaluation of materials. *Kluwer Academic Publisher, The Netherlands*, pages 303–321, 1994.

[86] J.C. Krapez et D. Balageas : Early detection of thermal contrast in pulsed stimulated infrared thermography. *QIRT'94, ed. D. Balageas, G. Busse, G. Carlomagno, Ed. Europ. Thermique et Industrie, Paris*, pages 260–266, 1995.

[87] D. Maillet : *Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres et à la conduction inverse en thermique*. Thèse de doctorat, I.N.P.L, Nancy, 1991.

[88] I. Philippi : *Mesure sans contact de diffusivité thermique de plaques minces en mouvement uniforme*. Thèse de doctorat, I.N.P.L, Nancy, Octobre 1994.

[89] I. Philippi, J.C. Batsale, D. Maillet et A. Degiovanni : Traitement d'images infrarouges par transformation intégrale. *Rev. Gén. Therm.*, 392-393(392-393):486–496, 1994.

[90] D. Maillet, I. Philippi, A. Bendada et A. Degiovanni : Integral transforms and parameter estimation in diffusive transfer. pages 463–471, 1998.

[91] A. Bendada : *Topographie infrarouge stimulée. Estimation d'une résistance d'interface non-uniforme*. Thèse de doctorat, I.N.P.L, Nancy, Mai 1995.

[92] J.C. Batsale, A. Bendada, D. Maillet et A. Degiovanni : Distribution of a thermal contact resistance : Inversion using experimental laplace and fourier transformations and an asymptotic expansion. *Inverse Problems in Engineering : Theory and Practice Conf.*, pages 139–146, 1993.

[93] D. Maillet, J.-C. Batsale, A. Bendada et A. Degiovanni : Integral methods and non-destructive testing through stimulated infrared thermography [méthodes intégrales et contrôle non destructif par thermographie infrarouge stimulée]. *Revue Generale de Thermique*, 35(409):14–27, 1996.

[94] A. Degiovanni, J.C. Batsale et D. Maillet : Measurement of in-plane diffusivity of anisotropic solid samples. survey of the techniques developed at lemta [mesure de la diffusivité longitudinale de matériaux anisotropes : Panorama des techniques développées au lemta]. *Revue Generale de Thermique*, 35(410):141–147, 1996.

[95] A. Bendada, D. Maillet, J.C. Batsale et A. Degiovanni : Reconstruction of a non-uniform interface thermal resistance by inverse conduction. *Inverse Prob. Eng. J.*, 6:79–123, 1998.

[96] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni et C. Moyne : *Thermal quadrupoles. Solving the heat equation through integral tranhsforms.* Wiley, 2000.

[97] E. Ruffio : *Estimation de paramètres et de conditions limites thermiques en conduction instationnaire pour des matériaux anisotropes. Apport des algorithmes stochastiques à la conception optimale d'expérience.* Thèse de doctorat, ENSMA, Institut P' département Fluides, Thermique, Combustion, 2011.

[98] Y. Souhar : *Caractérisation thermique de matériaux anisotropes à hautes températures.* Thèse de doctorat, Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, Ecole Doctorale EMMA, 2011.

[99] J.R. Lesniak et D.J. Bazile : Forced-diffusion thermography technique and projector design. *Proc. SPIE*, 2766:210–217, 1996.

[100] J.R. Lesniak, D.J. Bazile et M.J. Zickel : Coating tolerant thermography for the detection of cracks in structures. *NDT Solutions*, 1997.

[101] J. Lesniak, D. Bazile et B. Boyce : Coating-tolerant thermography inspection system. *Nondestructive Evaluation of Bridges and Highways III, Proceedings of SPIE, Volume 3587, Newport Beach, CA, March 3-5, 1999*, 1999. cited By (since 1996) 1.

[102] S. Van Huffel et J. Vandewalle : *The Total Least Squares Problem.* SIAM, p. 300, 1991.

[103] S.V. Patankar : *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Minkowycz and Sparrow Eds. (Mc Graw Hill), 1980.

[104] N. Rajic : Principal component thermography for flaw contrast enhancement and flaw depth characterisation in composite structures. *Composites Structures*, 58:521–528, 2002.

[105] S. Marinetti, E. Grinzato, P.G. Bison, E. Bozzi, M. Chimenti, G. Pieri et O. Salvetti : Statistical analysis of ir thermographic sequences by pca. *Infrared Physics and Technology*, 46:85–91, 2004.

[106] J. Rousseau : Identification de défauts par l'analyse de films thermographiques à l'aide de la méthode svd. *Congrès Français de Thermique, Reims, 30 mai - 2 juin 2005.*

[107] J.C. Krapez, L. Legrandjacques, F. Lepoutre et D. Balageas : Optimization of the photothermal camera for crack detection. *QIRT'98 Eurotherma Seminar 60 Lodz (Poland)*, September 07-10, 1998.

[108] *Métrologie Thermique et Techniques Inverses. École d'hiver, 25-30 janvier 1999, Vol 1 : Cours.* Presses Universitaires de Perpignan, 346 p., 2001.

[109] *Métrologie Thermique et Techniques Inverses. École d'hiver, 25-30 janvier 1999, Vol 2 : Ateliers.* Presses Universitaires de Perpignan, 268 p., 2001.

[110] Metti 5 : *Thermal Measurements and Inverse Techniques. Advanced Spring School. Volume 1 : Lectures. Roscoff, June 13-18.* Presses de l'imprimerie de l'université centrale de Nantes, 2011.

[111] Metti 5 : *Thermal Measurements and Inverse Techniques. Advanced Spring School. Volume 2 : Tutorials. Roscoff, June 13-1.* Presses de l'imprimerie de l'université centrale de Nantes, 2011.

[112] D. Petit et D. Maillet : *Techniques inverses et estimation de paramètres. Partie 1.* Techniques de l'ingénieur [AF 4 515], 01-2008.

[113] D. Petit et D. Maillet : *Techniques inverses et estimation de paramètres. Partie 2.* Techniques de l'ingénieur [AF 4 516], 01-2008.

[114] D. Maillet, Y. Jarny et D. Petit : *Problèmes Inverses en diffusion thermique. Modèles diffusifs, mesures, sensibilités.* Techniques de l'ingénieur [BE 8 265], 10-2010.

[115] J. Hadamard : *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press, New Haven,CT, 1923.

[116] G.M. Wing et J.D. Zahrt : *A Primer on Integral Equations of the First Kind.* SIAM, Philadelphia, 135 p., 1991.

[117] Per C. Hansen : *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems.* SIAM, Philadelphia, 247 p., 1998.

[118] M. Kern : *Problèmes Inverses.* Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci, Inria, ROCQUENCOURT, BP 105, 78153 LE CHESNAY, Michel.Kern@inria.fr, 2002-2003, http ://www-rocq.inria.fr/ kern/Teaching/ESILV/inverse.pdf.

[119] C. Gasquet et P. Witomski : *Fourier Analysis and Applications. Filtering, Numerical Computation, Wavelets.* Springer-Verlag, 442 p., 1999.

[120] Helcio R.B. Orlande, O. Fudym, D. Maillet et Renato M. Cotta : *Thermal Measurements and Inverse Techniques.* CRC Press Taylor and Francis Group, 756 p., 2011.

[121] B. Osgood : *The Fourier Transform and its Applications. Lectures notes for EE 261.* http ://see.stanford.edu/see/courseinfo.aspx ?coll=84d174c2-d74f-493d-92ae-c3f45c0ee091. Electrical Engineering Department, Stanford University.

[122] E. Picard : Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains problèmes de physique mathématique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, 148:pp. 1563–1568, 1909.

[123] E. Picard : Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 25:pp. 79–97, 1910.

[124] G.W. Stewart : On the early history of the singular value decomposition. *SIAM Review. JSTOR*, 35:pp. 551–566, Dec. 1993.

[125] E. Schmidt : Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen. i teil. entwicklung willkürlichen funktionen nach system vorgeschriebener. *Math. Ann.*, 63:pp. 433–476, 1907.

[126] F. Riesz : Über orthogonale funktionensystem. *Götinger Nachr.*, pages pp. 116–122, 1907.

[127] J. Horvath : On the riesz-fischer theorem. *University of Maryland, College Park*, http ://www.univie.ac.at/NuHAG/FEICOURS/ws0506/Riesz-Fisher.pdf.

[128] C. Eckart et G. Young : The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1:211–218, 1936.

[129] L. Mirsky : Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *Quart. J. Math. Oxford*, 11:50–59, 1960.

[130] G. H. Golub, A. Hoffman et G. W. Stewart : The gereralization of the eckart-young-mirsky matrix approximation theorem. *Linear Algebra Appl.*, 88/89:322–327, 1987.

[131] G. H. Golub et W. Kahan : Calculating the singular the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2:205–224, 1965.

[132] G. H. Golub et C. Reinsch : Singular value decomposition and least squares solution. *Numer. Math.*, 14:403–420, 1970.

[133] G.H. Golub et C. F. Van Loan : *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, third edition édition, 695 p. 1996.

[134] K. Pearson : On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 2:559–572, 1901.

[135] H. Hotelling : Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24:417–441, 1933.

[136] H. Hotelling : Relation between two sets of variates. *Biometrika*, 28:322–377, 1936.

[137] K. Karhunen : *Über lineare methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Thèse de doctorat, 1947.

[138] M. Loève : *Probability Theory*, volume 2. Graduate Texts in Mathematics 46, Springer-Verlag, 4th édition, 1978.

[139] A. Ranade, S.-S. Mahabalarao et S. Kale : A variation on svd based image compression, image and vision computing. 25 issue 6:771–777, 2007.

[140] Palomo del Barrio, J.L. Dauvergne et C. Pradère : Thermal characterization of materials using karhunen-loève decomposition techniques. part i. - orthotropic materials. *Inverse Problems in Science and Engineering*, In press.

[141] M. Necati Özisic : *Heat Conduction (Second Edition)*. John Wiley and Sons, INC., 692p., 1993.

[142] J.L. Battaglia : *Transferts thermiques dans les procédés de mise en forme des matériaux.* Hermes Science publications, Lavoisier, 360p., 2007.

[143] Holman : *Heat Transfer 9th edition.* McGraw-Hill, 2002.