THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Valeurs propres des automates cellulaires

Spécialité **mathématiques**
École doctorale ICMS
Soutenue publiquement par **Rezki CHEMLAL**
le **31 mai 2012**

Jury :

Madame Marie-Pierre BÉAL	Université Paris-Est	Directrice de thèse
Madame Valérie BERTHÉ	Université Paris 7	Examinatrice
Monsieur François BLANCHARD	Université Paris-Est	Examinateur
Monsieur Enrico FORMENTI	Université de Nice-Sophia Antipolis	Rapporteur
Monsieur Julien CERVELLE	Université Paris-Est	Examinateur
Monsieur Jean-Paul THOUVENOT	Université Pierre et Marie Curie (P6)	Rapporteur

Résumé

On s'intérèsse dans ce travail aux automates cellulaires unidimensionnels qui ont été largement étudiés mais où il reste beaucoup à faire. La théorie spectrale des automates cellulaires a notamment été peu abordée à l'exception de quelques résultats indirects.

On cherche à mieux comprendre les cadres topologiques et ergodiques en étudiant l'existence de valeurs propres, en particulier celles dites irrationnelles c'est à dire de la forme $e^{2I\pi\alpha}$ où α est un irrationnel et I la racine carrée de -1. Cette question ne semble pas avoir été abordée jusqu'a présent.

Dans le cadre topologique les résultats sur l'équicontinuité de Kůrka et Blanchard et Tisseur permettent de déduire directement que tout automate cellulaire équicontinu possède des valeurs propres topologiques rationnelles. La densité des points périodiques pour le décalage empêche l'existence de valeurs propres topologiques irrationnelles.

La densité des points périodiques pour l'automate cellulaire semble être liée à la question des valeurs propres. Dans le cadre topologique, si l'automate cellulaire possède des points d'équicontinuité sans être équicontinu, la densité des points périodiques a comme conséquence le fait que le spectre représente l'ensemble des racines rationnelles de l'unité c'est à dire tous les nombres de la forme $e^{2I\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Dans le cadre mesuré, la question devient plus difficile. On s'intéresse à la dynamique des automates cellulaires surjectifs pour lesquels la mesure uniforme est invariante en vertu du théorème de Hedlund. La plupart des résultats obtenus demeurent valable dans un cadre plus large.

Nous commençons par montrer que les automates cellulaires ayant des points d'équicontinuité ne possèdent pas de valeurs propres mesurables irrationnelles.Ce résultat se généralise aux automates cellulaires possédant des points μ-équicontinus selon la définition de Gilman. Nous démontrons finalement que les automates cellulaires possédant des points μ-équicontinus possèdent des valeurs propres rationnelles.

Mots clés : automate cellulaire, valeur propre, dynamique topologique, théorie ergodique.

Abstract

We investigate properties of one-dimensional cellular automata. This category of cellular automata has been widely studied but many questions are still open. Among them the spectral theory of unidimensional cellular automata is an open field with few indirect results.
We want a better understanding of both ergodic and topological aspect by investigating the existence of eigenvalues of cellular automata, in particular irrational ones, i.e., those of the form $e^{2I\pi\alpha}$ where α is irrationnal and I the complex root of -1. The last question seems not to have been studied yet.
In the topological field the results of Kůrka & Blanchard and Tisseur about equicontinuous cellular automata have as direct consequence that any equicontinuous CA has rational eigenvalues. Density of shift periodic points leads to the impossibility for CA to have topological irrational eigenvalues.
The density of periodic points of cellular automata seems to be related with the question of eignevalues. If the CA has equicontinuity points without being equicontinuous, the density of periodic points implies the fact that the spectrum contains all rational roots of the unity, i.e., all numbers of the form $e^{2I\pi\alpha}$ with $\alpha \in \mathbb{Q}$.
In the measurable field the question becomes harder. We assume that the cellular automaton is surjective, which implies that the uniform measure is invariant. Most results are still available in more general conditions.
We first prove that cellular automata with equicontinuity points never have irrational measurable eigenvalues. This result is then generalized to cellular automata with μ-equicontinuous points according to Gilman's classification. We also prove that cellular automata with μ-equicontinuous points have rational eigenvalues.
Keywords : cellular automata, eigenvalue, topological dynamics, ergodic theory.

Table des matières

Première partie

Introduction

Avant propos

Les automates cellulaires ont été introduits par Von Neumann [VN51] à la fin des années quarante pour étudier l'autoreproduction de systèmes biologiques. Il opta pour un modèle discret constitué de cellules réparties de manière régulière. Chaque cellule change d'état de manière synchrone et uniforme en tenant compte seulement de l'état de ses voisines.

En 1970, Gardner rend populaire le jeu de la vie de Conway [Con70] en lui consacrant une colonne dans Scientific American. Ce jeu est formé de règles simples permettant le développement de motifs extrêmement complexes. Le jeu est basé sur un quadrillage contenant des cellules vivantes et des cellules mortes. Une cellule vivante survit si elle est entourée de deux ou trois cellules vivantes. Dans les autres cas, elle meurt. Une cellule morte renaît si elle est entourée exactement par trois cellules vivantes. À partir de ces règles simples apparaissent des comportements très variés suivant la configuration initiale considérée.

Zuse [Zus69] publie en 1969 un article où il émet l'hypothèse que les lois physiques sont discrètes et interagissent de façon locale. Ainsi l'univers serait régi par un automate cellulaire. D'autres chercheurs, sans aller à ce point, utiliseront les automates cellulaires comme modèle mathématique de différents phénomènes comme les feux de forêts [BCT90] ou les relations proie-prédateur [FD08] entre autres.

Dans la lignée des travaux de Von Neumann, plusieurs chercheurs se sont intéressés à l'aspect algorithmique des automates cellulaires. Amoroso et Patt [AP75] montrent que la surjectivité et l'injectivité sont décidable en dimension 1. Kari démontre que ces propriétés ne sont pas décidables en dimension supérieure à 1 [Kar90] et que toute propriété non-triviale sur l'ensemble limite est indécidable [Kar94].

La capacité d'un automate cellulaire d'en simuler un autre a conduit à établir la notion de groupage qui permet d'établir une relation d'ordre partiel, pour laquelle les automates cellulaires universels sont placés au plus haut [Rap98][Oli02][The05].

L'étude des automates cellulaires comme systèmes dynamiques a commencé par un premier article de G.Hedlund en 1969 [Hed69] qui permet de caractériser les automates cellulaires comme les transformations continues qui commutent avec l'application décalage ou shift.

En 1984, Wolfram [Wol84] publie une classification informelle des automates cellulaires après une étude expérimentale d'une famille d'automates cellulaires. Suite à cet article, plusieurs chercheurs se mettent à l'étude des automates cellulaires du point de vue dynamique. Culik, Pachl et Yu [CPY89] sont les premiers à proposer une classification formelle à partir des configurations finies se basant sur les comportements asymptotiques. Hurley [Hur90a] classe les automates cellulaires selon leurs attracteurs.

Kůrka [Kur97] propose et compare trois systèmes de classification. Le premier basé sur l'équicontinuité topologique, le second sur les attracteurs et le dernier sur les langages générés par une partition en ouverts-fermés.

Gilman [Gil87] donne une classification basée sur une version mesurable de l'équicontinuité topologique en considérant des automates cellulaires sur des espaces équipés de la mesure de Bernoulli. Gilman démontre également que l'existence de points $\mu-$équicontinus implique l'existence d'un ensemble de mesure totale dont les coordonnées centrales sont ultimement périodiques. Tisseur généralise ce résultat à tous les automates cellulaires équipés de n'importe quelle mesure ergodique pour le décalage [Tis08].

Les travaux de classification sont menés de pair avec d'autres visant à étudier les propriétés des automates cellulaires, là également avec différents outils et perspectives. En dynamique topologique, les propriétés combinatoires des automates cellulaires expansifs ont été étudiées par Blanchard et Maas [BM96] , Nasu [Nas95] et Kůrka [Kur97]. Leurs résultats ont été généralisés par [BFF97].

L'existence d'un ensemble dense de points périodiques pour le décalage entraîne par commutation l'existence d'un ensemble dense de points ultimement périodiques pour l'automate cellulaire. La question de l'existence d'un ensemble dense de points périodiques propres aux automates cellulaires surjectifs demeure en partie ouverte [Bla00]. Boyle et Kitchen [BK99] ont démontrés que tout automate cellulaire fermant possède un ensemble dense de points périodiques. Le même résultat fut obtenu par Blanchard et Tisseur [BT00] pour les automates cellulaires surjectifs avec des points d'équicontinuité.

La commutation avec le décalage a également motivé l'approche directionnelle dans l'étude des automates cellulaires. Sablik [Sab06] s'est intéressé à la dynamique d'un automate cellulaire et de ses décalés qui ont des diagrammes espace-temps similaires. S'inspirant de la notion de direction d'expansivité introduite par Boyle et Lind [BL97], il introduit la notion de direction d'équicontinuité qui généralise les approches de Kůrka [Kur97] et de Gilman [Gil87].

Dans le même cadre, Acerbi, Dennunzio et Formenti [ADF09] ont étudiés d'autres propriétés des automates cellulaires en se limitant aux directions $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.

Les espaces de Cantor sur lesquels sont définis les automates cellulaires confèrent à ces derniers quelques propriétés contre-intuitives. Ainsi les propriétés fortes que possède le décalage dans ces espaces (transitivité, sensibilité aux conditions initiales, ensemble dense de points périodiques) viennent de la distance qui confère un poids qu'on pourrait qualifier d'excessif aux coordonnées centrales. En effet, deux configurations peuvent être considérés proches si elles coïncident sur un intervalle central suffisamment grand, même si elles sont totalement différentes à l'extérieur. Ce constat a motivé des travaux sur les automates cellulaires faisant appel à d'autres topologies. Cattaneo, Formenti, Margara et Mazoyer [CFMM97] ont proposé la pseudo-distance de Besicovitch qui est invariante par le décalage mais ne définit pas une métrique sur l'espace des configurations.

Blanchard, Formenti et Kůrka [BFK97] ont proposés une variante de cette pseudo-distance, celle de Weyl. Les propriétés des automates cellulaires dans les topologies engendrées par ces deux pseudos-distances ont été étudiées dans [BFK97] et [BCF03].

Le théorème de Hedlund [Hed69] établit une relation d'équivalence entre la surjectivité de l'automate et l'invariance de la mesure uniforme dans le cas unidimensionnel. La version de ce théorème en dimension 2 a été établie par Maruoka et Kimura [MK76]. Il existe d'autres mesures invariantes à support restreint (Sturmien, Toeplitz).

Blanchard et Tisseur [BT00] ont montrés que si l'ensemble des points d'équicontinuité est de mesure 1 et que la mesure est ergodique pour le décalage alors ses moyennes de Césaro convergent vers une mesure invariante à la fois pour l'action de l'automate et celle du décalage. D'autres travaux ont porté sur une version "automate cellulaire" de la conjecture de Furstenberg. Les travaux de Host, Maass et Martinez [HMM03], de Pivato [Piv05] et de Sablik [Sab06] ont en commun la recherche de conditions de rigidité concernant la mesure uniforme.

Les propriétés ergodiques des automates cellulaires permutatifs ont été étudiées en premier par Shereshevsky [She92a, She93] qui adaptera la définition des exposants de Lyapounov aux automates cellulaires [She92b]. Cette question sera approfondie par Tisseur [Tis00].

Théorie spectrale des automates cellulaires.

La classification de Wolfram [Wol84] aborde la question des valeurs propres indirectement à travers la notion de périodicité, qui évoque l'existence de valeurs de la forme $e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}$, que nous appelons ici rationnelles par abus de langage.

Bien que tous les systèmes sturmiens (qui sont des sous-ensembles invariants par le shift de l'espace des configurations) soient négligeables pour la mesure uniforme, le fait que l'action du décalage sur les systèmes sturmiens puisse être conjugué à une rotation irrationnelle évoque lui la question de l'existence de valeurs propres de la forme $e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ que nous appelons irrationnelles.

Dans le cadre topologique les résultats sur l'équicontinuité de Kůrka [Kur97] et Blanchard et Tisseur [BT00] permettent de déduire directement que tout automate cellulaire équicontinu possède des valeurs propres topologiques rationnelles.

La question des valeurs propres a été abordée indirectement à travers plusieurs résultats.

L'extension naturelle d'un automate cellulaire expansif est un Bernoulli. Ce résultat fut prouvé par Blanchard et Maas [BM00] pour les automates cellulaires unilatères et par Nasu [Nas95] pour les bilatères. Ces résultats généralisent ceux concernant les propriétés ergodiques des automates cellulaires permutatifs obtenus par Shereshevsky [She97].

Ainsi les automates cellulaires expansifs ne peuvent avoir de valeurs propres ni topologiques ni mesurables.

En soulignant que les automates cellulaires élémentaires sont soit périodiques soit des $K-$systèmes [She97] on retrouve une autre propriété spectrale des automates cellulaires. On remarquera en fin que ces résultats sont possibles uniquement par ce qu'on peut prouver des propriétés plus fortes que le mélange faible.

En 1997 Downarowicz [Dow97] a construit un exemple d'un automate cellulaire défini sur un sous-décalage de Toeplitz muni d'une mesure ergodique pour le décalage ayant un spectre discret. Cet exemple est le seul à notre connaissance dans la littérature traitant ouvertement de la question des valeurs propres des automates cellulaires.

Le survey de Pivato [Piv08] sur la théorie ergodique des automates cellulaires aborde la question des valeurs propres en terme de relation du spectre d'un automate cellulaire avec le spectre du décalage pour une mesure invariante et ergodique pour ce dernier. Dans ce cas le spectre de l'automate est inclus dans celui du décalage et la propriété du mélange faible passe du décalage à l'automate cellulaire. Enfin Pivato classe la question des valeurs propres comme un problème ouvert dans l'étude de la théorie des automates cellulaires.

La densité des points périodiques pour l'automate cellulaire semble être liée à la question des valeurs propres. Dans le cadre topologique, si l'automate cellulaire agit sur la totalité de l'espace des configurations et possède des points d'équicontinuité, la densité des points périodiques permet d'établir des contraintes sur le spectre de l'automate cellulaire.

Dans le cadre ergodique, Tisseur [Tis08], en continuité des travaux de Gilman [Gil88], a démontré que l'ensemble des points périodiques d'un automate cellulaire équipé d'une mesure invariante μ ayant des points $\mu-$équicontinus est dense dans le support topologique de la mesure. C'est la preuve de ce résultat qui nous a directement inspiré la démonstration d'un résultat concernant les valeurs propres mesurables.

Dans ce travail, on s'intéresse donc aux cas où un automate cellulaire unidimensionnel peut posséder des valeurs propres, qu'elles soient topologiques ou mesurables. Dans les situations où des valeurs propres existent, on cherche à savoir s'il peut y en avoir certaines qui sont irrationnelles.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Notions de dynamique topologique

On commence par rappeler les notions classiques de la théorie des systèmes dynamiques.

Définition 1 *Un système dynamique est une paire* (X, F) *où* X *est un espace métrique compact et* F *une application continue de* X *dans lui même. Un morphisme* $\pi : (X, F) \to (Y, G)$ *entre deux systèmes dynamiques est une application continue* $\pi : X \to Y$ *vérifiant* $\pi \circ F = G \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

(i) Si π *est bijectif on dit que* π *est une conjugaison et que* (X, F) *et* (Y, G) *sont conjugués*
(ii) Si π *est surjectif on dit que* π *est un facteur et que* (X, F) *est une extension de* (Y, G) *ou que* (Y, G) *est un facteur de* (X, F) *.*
(iii) Si π *est injectif on dit que* (X, F) *est un sous-système de* (Y, G)*.*

Définition 2 *1- L'orbite d'un point est l'ensemble* $\{F^i(x), i \in \mathbb{N}^*\}$.
2- Un point $x \in X$ *est périodique pour* F *s'il existe* $n \in N$ *tel que* $F^n(x) = x$
.
3- Un point est dit ultimement périodique si $F^m(x)$ *est un point périodique pour un certain* $m \geq 0$.

Dans le cadre de l'étude d'un système dynamique, une question classique est de savoir à quelle fréquence l'orbite d'un point revient dans son voisinage. Cette question conduit à l'élaboration du concept de transitivité. Un système dynamique (X, F) est transitif si pour tout ouverts $U, V \subset X$ il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $U \cap F^{-n}(V) \neq \emptyset$. Cette définition est équivalente à l'existence d'un point dont l'orbite est dense dans X. La transitivité est une propriété qui se transmet au facteur.

On dit qu'un système dynamique (X, F) est topologiquement faiblement mélangeant si $(X \times X, F \times F)$ est transitif ; topologiquement mélangeant si pour tout ouvert U, V de X il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $U \cap F^{-n}(V) \neq \emptyset$.

Un système (X, F) est minimal s'il n'existe pas de sous-ensemble invariant de X autre que X et l'ensemble vide. Cette définition est équivalente au fait que tous les points possèdent des orbites denses.

Le mélange topologique, tout comme la minimalité, entraînent la transitivité, l'inverse étant en général faux.

La notion de point d'équicontinuité permet de savoir si des trajectoires initialement proches peuvent le rester indéfiniment. On dit qu'un point est un point d'équicontinuité si les trajectoires des points se trouvant dans un voisinage initialement proche peuvent le rester dans un voisnage déterminé. L'inverse est la notion de sensibilité aux conditions initiales où les trajectoires de points distincts s'éloignent les unes des autres d'au moins une quantité donnée. L'expansivité est une version plus puissante de la notion de sensibilité aux conditions initiales.

Définition 3 *Soit (X,F) un système dynamique.*
1. On dit qu'un point $x \in X$ est un point d'équicontinuité s'il vérifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta (x), \forall n \geq 0, d(F^n(y), F^n(x)) < \epsilon.$$

2. On dit que (X,F) est équicontinu si l'ensemble des points d'équicontinuité est X.
3. On dit que (X,F) est topologiquement presque équicontinu si l'ensemble des points d'équicontinuité est un ensemble G_δ dense c'est-à-dire qu'il inclut une intersection dénombrable d'ouverts denses.
4. On dit que (X,F) est sensible aux conditions initiales s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour chaque point $x \in X$,

$$\forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta (x), \exists n \geq 0, d(F^n(y), F^n(x)) \geq \epsilon.$$

5. On dit que (X,F) est expansif si on a :

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \neq y \in X, \exists n \geq 0, d(F^n(x), F^n(y)) \geq \epsilon.$$

Un système dynamique est expansif si et seulement si ses puissances non nulles le sont également. Les propriétés d'expansivité, de transitivité et de mélange fort ou faible sont invariantes par conjugaison topologique.

Proposition 4 ([AAB96]) *Un système dynamique transitif est soit sensible aux conditions initiales soit presque équicontinu.*

1.2 Rappels topologiques et ergodiques

Soit X un espace compact ; l'ensemble des mesures de probabilité sur X sera noté $M(X)$. Pour $\mu \in M(X)$, le support topologique de μ est le plus petit fermé de mesure 1 ; on le note *supp* (μ).

Un système dynamique mesuré est la donnée d'un espace mesuré $(X, \mathbb{B}, \mu)$ et d'une application $F : X \to X$ définie μ presque partout. On dit que l'application mesurable F préserve la mesure μ si pour tout $B \in \mathbb{B}$ on a $\mu(F^{-1}(B)) = \mu(B)$. L'ensemble $M(F)$ des mesures de probabilité F-invariantes est non vide, convexe et compact pour la topologie faible. La notion topologique de transitivité possède un "équivalent" mesurable qui est la notion d'ergodicité. Un système dynamique $(X, \mathbb{B}, F, \mu)$ est dit ergodique si et seulement si les seuls ensembles invariants sont $\emptyset$ et X et totalement ergodique si $(X, \mathbb{B}, F^n, \mu)$ est ergodique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un système dynamique est mélangeant si un événement et l'image d'un autre événement au bout d'un grand nombre d'itérations de F sont de plus en plus près de l'indépendance, autrement dit, si pour tout ensembles mesurables $A, B \in \mathbb{B}$ on a :

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(F^{-n}(A) \cap B\right) = \mu(A)\,\mu(B)$$

On dit qu'un système est faiblement mélangeant si son produit par lui-même est ergodique. Un système dynamique faiblement mélangeant est ergodique. La rotation irrationnelle est un exemple d'un système dynamique ergodique mais non faiblement mélangeant.

Le théorème suivant donne les propriétés utiles pour caractériser l'ergodicité d'un système.

Théorème 5 *Soit* $(X, \mathbb{B}, F, \mu)$ *système dynamique préservant la mesure, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) F *est ergodique.*
(ii) Les seuls éléments B *de* $\mathbb{B}$ *vérifiant* $\mu\left(F^{-1}(B)\,\Delta B\right) = 0$ *sont ceux vérifiant* $\mu(B) = 0$ *ou* $\mu(B) = 1$.
(iii) Pour chaque élément A *de* $\mathbb{B}$ *tel que* $\mu(A) > 0$ *on a* $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} F^{-n}(A)\right) = 1$.
(iv) Pour chaque élément A, B *de* $\mathbb{B}$ *avec* $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$ *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* $\mu\left(F^{-n}(A) \cap B\right) > 0$.
(v) Pour chaque élément A, B *de* $\mathbb{B}$ *avec* $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$ *on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu\left(F^{-i}(A) \cap B\right) = \mu(A)\,\mu(B).$$

Définition 6 *Soit* $(Y, \mathbb{F}, \mu)$ *un espace de probabilité et soit* $(X, \mathbb{B}, m) = (Y, \mathbb{F}, \mu)^{\mathbb{Z}}$. *L'application décalage définie de* X *dans lui-même qui consiste à décaler toutes les coordonnées d'une unité vers la gauche est inversible et préserve la mesure* m.
On dit qu'un système inversible est un Bernoulli s'il est conjugué au décalage de Bernoulli.

Définition 7 *Une application inversible et préservant la mesure* F *définie sur un espace de probabilité* $(X, \mathbb{B}, \mu)$ *est un* K*-système s'il existe une sous-tribu* K *de* $\mathbb{B}$ *vérifiant :*

i) $K \subset F(K)$.
ii) $\vee_{n=0}^{\infty} F^{n}(K) \doteq \mathbb{B}$.
iii) $\cap_{n=0}^{\infty} F^{-n}(K) \doteq \{X, \emptyset\}$,
où la notation $\vee_{n=0}^{\infty} F^{n}(K)$ *désigne la plus petite sous-tribu contenant les ensembles* $F^{n}(K)$ *avec* $n > 0$.

Théorème 8 *Soit* $(X, \mathbb{B}, F, \mu)$ *un système dynamique préservant la mesure, alors* $X = supp(\mu)$ *est un compact invariant. De plus on a les implications suivantes :*

$$\begin{aligned} & (F,\mu) \text{ est un Bernoulli } \Rightarrow (F,\mu) \text{ est un K-système} \\ \Rightarrow \ & (F,\mu) \text{ est mélangeant} \Rightarrow (F,\mu) \text{ est faiblement mélangeant} \\ & \Rightarrow (F,\mu) \text{ est ergodique.} \end{aligned}$$

Il faut noter ici que les implications réciproques sont toutes fausses.

Théorème 9 (de récurrence de Poincaré) *Si* μ *est une mesure* F*-invariante et* $A \in \mathbb{B}$ *un sous-ensemble de* X *de mesure positive, alors pour* $\mu-$*presque tout point* x *de* A *il existe une suite infinie d'entiers* n_k *telle que* $F^{n_k}(x) \in A$.

1.3 Propriétés spectrales des systèmes dynamiques

1.3.1 Valeurs propres topologiques

On notera l'ensemble des fonctions continues définies de l'ensemble X dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ par $\mathbf{C}(X, \mathbb{C})$.

Définition 10 *Soit* (X, F) *un système dynamique.*
1. Une fonction continue non identiquement nulle $g : X \to \mathbb{C}$ *est une fonction propre de* (X, F) *associée à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{C}$ *si elle vérifie* $g \circ F = \lambda.g$.
2. On appelle spectre de (X, F) *et on note* $\delta(X, F)$ *l'ensemble de toutes ses valeurs propres.*
3. On dit que (X, F) *est à spectre discret si l'ensemble de ses fonctions propres est une base de l'espace vectoriel* $\mathbf{C}(X, \mathbb{C})$.
4. On dit que (X, F) *a un spectre trivial si les seules fonctions propres correspondant à la valeur propre 1 sont les fonctions constantes.*

Les systèmes dynamiques transitifs peuvent être caractérisés par leurs propriétés spectrales en vertu du résultat classique suivant :

Proposition 11 *Soit* (X, F) *un système dynamique transitif.*
1. Si $g \in \mathbf{C}(X, \mathbb{C})$ *est une fonction propre associée à la valeur propre* 1 *alors* g *est une fonction constante.*
2. Si $g \in \mathbf{C}(X, \mathbb{C})$ *est une fonction propre associée à la valeur propre* λ *alors* $|\lambda| = 1$ *et* $|g|$ *est une fonction constante.*
3. Si $g,\ h \in \mathbf{C}(X, \mathbb{C})$ *sont deux fonctions propres associées à la même valeur propre* λ *alors il existe une constante* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $f = c.g$*.*
4. Un ensemble de fonctions propres associée à des valeurs propres distinctes est linéairement indépendant dans $\mathbf{C}(X, \mathbb{C})$ *.*
5. Le spectre $\delta(X, F)$ *est un sous-groupe dénombrable de l'ensemble des racines complexes de l'unité.*

1.3.2 Valeurs propres ergodiques.

On notera l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable au sens de Lebesgue par L^2.

Définition 12 *Soit* (X, F, μ) *un système dynamique.*
1. Une fonction de L^2 *non identiquement nulle,* $g : X \to \mathbb{C}$*, est une fonction propre de* F *associée à la valeur propre* λ *au sens de la mesure s'il existe un ensemble mesurable* $G \subset X$ *de mesure 1 tel que* $\forall x \in G : (g \circ F)(x) = \lambda.g(x)$*.*
2. On dit que (X, F) *est à spectre continu si l'ensemble de ses valeurs propres se réduit à 1 et si les seules fonctions propres associées sont les fonctions constantes.*
3.On dit que (X, F) *est à spectre discret si l'ensemble des fonctions propres constitue une base de l'espace* L^2*.*

Par la suite, nous distinguerons les valeurs propres en parlant de *valeur propre topologique* si la fonction propre associée est continue, et de *valeur propre mesurable ou ergodique* si la fonction propre associée est mesurable. On remarquera que tout système dynamique possède au moins la valeur propre 1 associée à la fonction propre $\mathbf{1}(x) = 1$.

Proposition 13 *Soit* $(X, \mathbb{B}, F, \mu)$ *un système dynamique surjectif. Si* λ *est une valeur propre mesurable de* F *alors* $|\lambda| = 1$*. Si de plus* $\lambda \neq 1$ *alors toute* *fonction propre associée à la valeur propre λ est d'intégrale nulle. Enfin si F est ergodique toute fonction propre est de module constant.*

Comme les valeurs propres continues ou mesurables sont toujours de module 1 elles peuvent s'écrire sous la forme $e^{2I\pi\alpha}$; par abus de langage nous parlerons de valeur propre rationnelle si $\alpha \in \mathbb{Q}$ et de valeur propre irrationnelle dans le cas contraire.

Les valeurs propres (et les fonctions propres associées) permettent de savoir si la dynamique d'un système est récurrente ou non. Ainsi l'ergodicité est équivalente au fait que toutes les fonctions invariantes soient constantes, ce qui veut dire que toutes les fonctions propres associées à la valeur propre 1 sont constantes, ce qui est une propriété spectrale. De même, le mélange faible est équivalent au fait que toutes les fonctions propres sont constantes.On peut donc caractériser le mélange faible mesurable par l'absence de valeurs propres autres que l'unité, cette dernière n'ayant pour fonctions propres que les constantes. La propriété correspondante n'est pas valable dans le cadre topologique.

Théorème 14 *Soit (X, F, μ) un système dynamique, F est faiblement mélangeant si et seulement si F est à spectre continu.*

Pour la preuve de ce résultat classique voir par exemple [Wal82].

Chapitre 2

Propriétés spectrales des automates cellulaires

2.1 Notations et premières définitions

2.1.1 Espace de configurations

Soit A un alphabet et $\mathbb{M}$ un monoïde abélien, généralement, on considère $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^E, \mathbb{Z}^D$ ou $\mathbb{N}^E \times \mathbb{Z}^D$ avec $D, E \in \mathbb{N}$. Dans notre cas il sera essentiellement question de $\mathbb{Z}$. Un élément du monoïde est appelé cellule.

L'espace de configurations $A^{\mathbb{M}}$ est l'espace des fonctions définies de $\mathbb{M}$ dans A que nous pouvons considérer comme des configurations d'éléments de A indexées par $\mathbb{M}$.

Si A est muni de la topologie discrète, $A^{\mathbb{M}}$ muni de la topologie produit est un espace compact, métrisable, parfait et totalement discontinu. On munit cet espace de la distance de Cantor définie par $d(x, y) = 2^{-n}$ avec $n = min\{|i| : x_i \neq y_i\}$.

Pour tout sous-ensemble $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ et tout élément $x \in A^{\mathbb{M}}$ on note $x_{\mathbb{U}} \in A^{\mathbb{U}}$ la restriction de x à $\mathbb{U}$. Réciproquement pour un mot $u \in A^{\mathbb{U}}$ on définit le cylindre centré sur u par $[u]_{\mathbb{U}} = \left\{x \in A^{\mathbb{M}} : x_{\mathbb{U}} = u\right\}$.

Quand le monoïde est simplement $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, le cylindre centré sur $u \in A$ qui commence à la coordonnée $l \in \mathbb{M}$ est noté par commodité $[u]_l = \left\{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_{[l, l+|u|)} = u\right\}$. Quand l'indice l est omis, c'est le cylindre $[u]_0$ qui est désigné.

On notera l'intérieur d'un ensemble X par X^0 et la fermeture par $\overline{X}$. On notera par $B_\delta(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon δ.

2.1.2 Décalage et sous-décalage

L'action du monoïde $\mathbb{M}$ sur lui-même induit une action sur $A^{\mathbb{M}}$ par décalage définie pour tout $m \in \mathbb{M}$ par :

$$\begin{array}{l} \sigma^m_{A^{\mathbb{M}}} : A^{\mathbb{M}} \to A^{\mathbb{M}} \\ (x_i)_{i\in\mathbb{M}} \mapsto (x_{i+m})_{i\in\mathbb{M}} \end{array}$$

Quand $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on notera σ pour σ^1.

Un sous-décalage est un sous-ensemble fermé de $A^{\mathbb{M}}$ invariant par σ.

Pour un sous-décalage Σ et $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ fini, on note $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U}) = \{x_{\mathbb{U}} : x \in \Sigma\}$ l'ensemble des motifs de Σ de base $\mathbb{U}$. Comme Σ est $\sigma-$invariant tout motif appartenant à $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U}+m)$ appartient aussi à $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U})$ pout tout $m \in \mathbb{M}$. On note $\mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U})$ l'ensemble des motifs.

Lorsque $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ on parlera de mot fini plutôt que de motif. On notera A^n l'ensemble des mots de longueur n.

Un sous-décalage Σ est de type fini s'il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ fini et $\mathcal{E} \subset A^{\mathbb{U}}$ tels que $x \in \Sigma$ si et seulement si $\sigma^m(x)_{\mathbb{U}} \in \mathcal{E}$ pour tout $m \in \mathbb{M}$. Un sous-décalage de type fini Σ peut être caractérisé par l'ensemble des mots interdits $\mathcal{F}$ qui n'apparaissent jamais à aucune position dans les éléments de Σ. On le note dans ce cas $\Sigma_{\mathcal{F}}$.

Définition 15 *Soient Σ et Σ' deux sous-décalages de $A^{\mathbb{M}}$.$F : \Sigma \to \Sigma'$ est un automate cellulaire s'il existe $\mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ fini et une fonction $f : \mathcal{L}_\Sigma(\mathbb{U}) \to \mathcal{L}_{\Sigma'}(\{0_{\mathbb{M}}\})$ appelée fonction locale telle que pour tout $x \in \Sigma$ et pour tout $m \in \mathbb{M}$ on a :*

$$F(x)_m = f\left((x_{m+u})_{u\in\mathbb{U}}\right)$$

On appelle rayon de F la valeur $r = \max\{|m| : m \in \mathbb{U}\}$.

Quand $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ les automates cellulaires de rayon 1 définis sur l'alphabet $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ sont dits élémentaires.

La définition précédente des automates cellulaires, basée sur le concept de fonction locale, est commode d'un point de vue algorithmique. Cependant la caractérisation topologique due à Hedlund est considérée comme le point de départ de l'étude des automates cellulaires du point de vue dynamique.

Théorème 16 ([Hed69]) *Soient Σ et Σ' deux sous-décalages de $A^{\mathbb{M}}$. Une fonction F définie de Σ vers Σ' est un automate cellulaire si et seulement si elle est continue et commute avec le décalage* $(\sigma^m \circ F = F \circ \sigma^m$ *pour tout* $m)$.

2.2 Quelques classes d'automates cellulaires.

Dans ce qui suit $\mathbb{M} = \mathbb{Z}$ à l'exception de quelques cas signalés, pour ne pas alourdir la notation on notera directement $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire.

2.2.1 Automates cellulaires permutatifs.

Les automates cellulaires permutatifs se caractérisent par de fortes propriétés combinatoires. Shereshevsky [She92a] fut le premier à étudier les propriétés de cette catégorie d'automates cellulaires.

Définition 17 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire avec la règle locale $f : A^{d+1} \to A$.*
1- On dit que F est permutatif à gauche si $\forall u \in A^d, \forall b \in A, \exists! a \in A, f(au) = b$.
2- On dit que F est permutatif à droite si $\forall u \in A^d, \forall b \in A, \exists! a \in A, f(ua) = b$.
3- On dit que F est bi-permutatif s'il est à la fois permutatif à gauche et à droite.

Proposition 18 ([Hed69]) *Un automate cellulaire permutatif à gauche ou à droite est surjectif.*

Proposition 19 ([SA93]) *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire bi–permutatif de voisinage $[r, s]$ avec $r < 0 < s$. Il est conjugué à $\left(\left(A^{s-r}\right)^{\mathbb{N}}, \sigma\right)$.*

2.2.2 Automates cellulaires fermants.

Définition 20 *1- Les points x, y sont dit asymptotiques à gauche si $x_{(-\infty,n)} = y_{(-\infty,n)}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.*
2- Les points x, y sont dit asymptotiques à droite si $x_{(n,+\infty)} = y_{(n,+\infty)}$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.
3- Un automate cellulaire $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est fermant à droite si pour tout deux points distincts asymptotiques à gauche $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$: $F(x) \neq F(y)$.
4- Un automate cellulaire $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est fermant à gauche si pour tout deux points distincts asymptotiques à droite $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$: $F(x) \neq F(y)$.
5- Un automate cellulaire $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est bifermant s'il est fermant à gauche ou à droite.

Remarque 21 *Tout automate cellulaire permutatif à gauche (resp. à droite) est fermant à gauche (resp. à droite).*

Le théorème suivant résume les propriétés combinatoires des automates cellulaires fermants.

Théorème 22 ([Hed69]) *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1- $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est bifermant.
2-$\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est ouvert (l'image de tout ouvert est un ouvert).
3- Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ on a $Card\left(F^{-1}(x)\right) = p$.
4- Il existe $p \in \mathbb{N}$ et des applications $F_1, ..., F_p : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ continues tel que pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ on a $F^{-1}(x) = \{F_1, ..., F_p\}$ et $F_i \neq F_j$ pour $i \neq j$.

Le résultat suivant a été démontré au départ pour des automates cellulaires fermants et fut généralisé ensuite par Acerbi, Dennunzio et Formenti [ADF09] à l'ensemble des automates cellulaires.

Proposition 23 ([ADF09]) *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire surjectif, pour $p > 0$ suffisamment grand $\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma^p \circ F\right)$ est un facteur de l'application décalage.*

2.2.3 Automates cellulaires expansifs

Dans le cas des automates cellulaires unidimensionnels l'expansivité peut être vue comme une généralisation de la permutativité [SA93]. En dimension supérieure Shereshevsky [She93] relève l'impossibilité d'existence de tels systèmes.

Proposition 24 *Tout automate cellulaire* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *expansif de rayon* r *est conjugué à* $\left(\Sigma_{[-r,r]}\left(F\right), \sigma\right)$.

Théorème 25 ([Kur97],[Nas95]) *Tout automate cellulaire expansif est ouvert et conjugué à un sous-décalage de type fini.*

Proposition 26 ([BM00],[Nas95]) *Un automate cellulaire expansif est mélangeant.*

2.3 Dynamique topologique des automates cellulaires

Dans le cadre des automates cellulaires plusieurs particularités sont à signaler. D'abord la dichotomie établie par la proposition 4 parmi les systèmes dynamiques transitifs se généralise à tous les automates cellulaires grâce au résultat suivant, dû à Codenotti et Margara [CM96] :

Proposition 27 *Un automate cellulaire transitif est sensible aux conditions initiales.*

Une autre particularité des automates cellulaires concerne la caractérisation de l'existence de points d'équicontinuités : elle est synonyme de l'existence de mots bloquants. Un mot bloquant est un mot dont les images successives par l'action de l'automate sont insensibles aux changements de son voisinage.

Définition 28 *Soit* $s > 0$, *un mot* w *de longueur* $\geq s$ *est dit* s*-bloquant pour l'automate cellulaire* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *s'il existe un entier* $p \in |w| - s$ *tel que :*

$$\forall x, y \in [w]_0, \forall n \geq 0, F^n(x)_{[p,p+s)} = F^n(y)_{[p,p+s)}.$$

Proposition 29 ([Kur97]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *un automate cellulaire de rayon* $r > 0$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *n'est pas sensible aux conditions initiales.*
2. $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *admet un mot* r*-bloquant.*
3. $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *est topologiquement presque équicontinu.*

Proposition 30 *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *un automate cellulaire de rayon* $r > 0$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *est équicontinu.*
2. *Il existe* $k > 0$ *tel que chaque mot* $u \in A^{2k+1}$ *est un mot* r*-bloquant.*
3. *Il existe une prépériode* $m \geq 0$ *et une période* $p > 0$ *tel que* $F^{m+p} = F^m$.

Proposition 31 ([BT00]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *un automate cellulaire surjectif équicontinu ; alors il existe* $p > 0$ *tel que* $F^p = Id$ *; en particulier* F *est bijectif.*

On notera que sous les hypothèses des deux dernières propositions on a l'existence de valeurs propres rationnelles.

2.4 Théorie ergodique des automates cellulaires

2.4.1 Mesures invariantes pour les automates cellulaires

Le théorème de Bogolubov-Krylov établit l'existence d'une mesure invariante pour tout système dynamique compact équipé de sa tribu borélienne. Dans le cas des automates cellulaires, on munit le système $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ de la tribu borélienne $\mathbb{B}$ engendrée par les cylindres de $A^{\mathbb{Z}}$. Nous commençons par donner quelques exemples de mesures classiques pour les automates cellulaires.

Mesures portés par les orbites périodiques

Un élément a de l'espace des configurations est périodique de période p pour le décalage s'il vérifie $\sigma^p(a) = a$. Le nombre des éléments p-périodiques pour le décalage est donné par $Card(A)^p$.

On dit qu'une mesure est *p-périodique* si son support est inclus dans l'ensemble des points p-périodiques pour le décalage.

Les mesures à support périodique sont invariantes à la fois pour l'action du décalage et de l'automate. Elles ont un support fini ; il est possible d'obtenir des mesures invariantes avec un support dénombrable dense, cependant toutes ces mesures sont considérés comme triviales et l'attention est plus particulièrement portée sur les mesures supportées par un ensemble configurations qui ne sont pas toutes périodiques.

Mesure uniforme et surjectivité

Mesure de Bernoulli Ce sont les mesures les plus simples puisque l'état d'une cellule est indépendant du reste de la configuration. Pour tout $a \in A$ on associe un réel $p_a \in [0,1]$ de telle sorte que $\sum_{a\in A} p_a = 1$. La mesure de Bernoulli est la mesure induite par le vecteur de probabilité $(p_a)_{a\in A}$ et qui vérifie pour tout cylindre $[u]$:

$$\lambda_{(p_a)_{a\in A}}([u]) = \prod_{i=1}^{|u|} p_{u_i}.$$

Une mesure de Bernoulli est σ-fortement mélangeante.

Mesure uniforme La mesure uniforme μ sur $A^{\mathbb{Z}}$ est la mesure de Bernoulli qui donne la même probabilité à chaque lettre de l'alphabet. Elle joue un rôle important dans la théorie ergodique des automates cellulaires à cause du résultat suivant :

Théorème 32 ([Hed69]) *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire et ν la mesure uniforme sur $A^{\mathbb{Z}}$ alors F préserve ν si et seulement si F est surjectif.*

Les propriétés ergodiques de la mesure uniforme sous l'action d'un automate cellulaire surjectif demeurent encore peu connues en général. Dans ce cas, cependant, on ne connaît pas non plus beaucoup de situations où on sait construire d'autres mesures invariantes que la mesure uniforme.

2.5 Classification de Gilman

Gilman a proposé une classification des automates basée sur une version mesurable de l'existence de points d'équicontinuité. Les automates cellulaires considérés par lui sont équipés d'une mesure de Bernoulli et ne sont pas nécessairement surjectifs. Ce choix, qui peut surprendre, est dû au fait que Gilman construisait un modèle mathématique pour les simulations de l'évolution des AC effectuées par Wolfram au début des années 80.

On réinterprète ce modèle dans le cadre ergodique. Cette classification voit l'apparition d'une catégorie d'automates cellulaires qui ne possèdent pas de points d'équicontinuité topologiques mais possèdent des points d'équicontinuité au sens de la mesure. Nous démontrons par la suite que les automates de cette catégorie ne possèdent que des valeurs propres rationnelles.

Définition 33 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \mu\right)$ un automate cellulaire muni d'une mesure de Bernoulli μ et $[i_1, i_2]$ un intervalle fini ; pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$ on définit $B_{[i_1,i_2]}(x)$ par :*

$$B_{[i_1,i_2]}(x) = \left\{y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall j : F^j(x)(i_1, i_2) = F^j(y)(i_1, i_2)\right\}.$$

Pour tout intervalle $[i_1, i_2]$ la relation définie sur $A^{\mathbb{Z}}$ par

$$x\mathfrak{R}y \text{ si et seulement si } \forall j : F^j(x)(i_1, i_2) = F^j(y)(i_1, i_2)$$

est une relation d'équivalence et les ensembles fermés $B_{[i_1,i_2]}(x)$ en sont les classes d'équivalences.

Définition 34 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \mu\right)$ un automate cellulaire muni d'une mesure de Bernoulli μ. Un point x est un point $\mu-$équicontinu si pour chaque $m > 0$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\left([x(-n,n)] \cap B_{[-m,m]}(x)\right)}{\mu([x(-n,n)])} = 1.$$

S'il existe des points $\mu-$équicontinus, l'automate est dit presque équicontinu pour μ.

On dit que F est presque expansif s'il existe $m > 0$ tel que pour chaque $x \in X$ on ait $\mu(B_m(x)) = 0$.

Définition 35 *L'ensemble des automates cellulaires* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \mu\right)$ *munis d'une mesure de Bernoulli* μ *se répartit dans les classes suivantes :*
1- $F \in \mathcal{A}$ *si* F *possède des points d'équicontinuité (s'il est topologiquement presque équicontinu).*
2- $F \in \mathcal{B}$ *si* F *possède des points* $\mu-$*équicontinus mais n'appartient pas à* $\mathcal{A}$.
3- $F \in \mathcal{C}$ *si* F *est presque expansif.*

Remarque 36 *Un automate cellulaire topologiquement presque équicontinu muni de la mesure uniforme* μ *est presque équicontinu pour la mesure* μ *; de plus tout point équicontinu est un point* μ*-équicontinu.*

Dans [Gil87] Gilman donne l'exemple suivant d'un automate cellulaire qui possède des points $\mu-$équicontinus mais ne possédant pas de points d'équicontinuités.

Exemple 37 *Soit l'automate cellulaire* F *défini sur l'ensemble* $\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}}$ *et la règle locale suivante :*

*00	*01	*02	*10	*11	*12	*20	*21	*22
0	1	0	0	1	0	2	0	2

*La lettre * peut être remplacée par n'importe quelle lettre de l'alphabet* $\{0,1,2\}$, *la lettre 2 se déplace vers la droite et la lettre 1 se déplace vers la gauche, la collision de 1 et 2 annule les deux.*
L'existence de points $\mu-$*équicontinus dépend des paramètres de la mesure de Bernoulli : si* $p(2) > p(1)$ *alors la probabilité que 2 ne disparaisse jamais est positive, ce qui implique l'existence d'un point* $\mu-$*équicontinu. Comme l'existence d'un nombre suffisant de 1 à droite peut modifier les coordonnées centrales, il n'y a pas de points d'équicontinuité.*

2.6 Densité des points périodiques

La commutation avec le décalage et la densité des points périodiques pour le décalage ont comme conséquence directe qu'il existe un ensemble dense de points ultimement périodiques pour l'automate cellulaire. Boyle et Kitchens [BK99] ont prouvés que les automates cellulaires fermants possèdent un ensemble dense de points périodiques propres. Le même résultat a été obtenu par Blanchard et Tisseur [BT00] pour les automates cellulaires surjectifs presque équicontinus. La question de savoir si tout automate cellulaire surjectif possède un ensemble dense de points périodiques demeure ouverte.

Théorème 38 ([BK99]) *Tout automate cellulaire fermant possède un ensemble dense de points qui sont périodiques à la fois pour l'action du décalage et de l'automate celllulaire.*

Théorème 39 ([BT00]) *Tout automate cellulaire surjectif presque équicontinu possède un ensemble dense de points périodiques pour l'action du décalage et de l'automate cellulaire.*

Le théorème précédent possède une conséquence dont la preuve élémentaire n'a pas encore été rédigée à notre connaissance.

Corollaire 40 *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire surjectif; si F n'est pas équicontinu et possède un ensemble dense de points périodiques, alors l'ensemble des plus petites périodes de ces points n'est pas borné.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des plus petites périodes est borné.
Il existe alors $p_1, p_2, ..., p_k$ et $\Pi_1, \Pi_2, ...\Pi_k$ tels que :

$$\forall x \in \Pi_i : F^{p_i}(x) = x \text{ et } F^s(x) \neq x : s < p_i.$$

Soit $p = ppcm\,(p_1, p_2, ..., p_k)$ le plus petit multiple commun de toutes les périodes ; alors on a :

$$\forall x \in \Pi = \cup_{i=1}^{k} \Pi_i : F^p(x) = x.$$

Comme l'ensemble des points périodiques est dense pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ il existe une suite d'éléments périodiques x_n tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, on obtient :

$$F^p(x) = F^p\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} F^p(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Ainsi on obtient $F^p = Id$ et d'après la proposition F est équicontinu ce qui constitue une contradiction. ■

Théorème 41 ([ADF09]) *Les propriétés suivantes sont soit toutes vraies soit toutes fausses :*
1. Tout automate cellulaire surjectif possède un ensemble dense de points périodiques.
2. Tout automate cellulaire surjectif possède un ensemble dense de points périodiques à la fois pour le décalage et l'automate cellulaire.
3. Tout automate cellulaire fermant et topologiquement mélangeant possède un ensemble dense de points périodiques.

On rappelle que tout automate cellulaire fermant est surjectif.

Proposition 42 ([Tis08]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu)$ *un automate cellulaire muni d'une mesure invariante* μ *; si* F *possède des points* $\mu-$*équicontinus alors l'ensemble des points périodiques pour* F *est dense dans le support topologique de* μ.

Nous montrons plus loin que la densité des points périodiques pour le décalage a comme conséquence directe l'impossibilité pour un automate cellulaire d'avoir des valeurs propres topologiques irrationnelles.

2.7 Systèmes sturmiens

La complexité d'un mot u est l'application $P_n(u)$ qui à chaque $n \in \mathbb{N}$ associe le nombre des différents facteurs de u de longueur n. Un élément de $A^{\mathbb{Z}}$ est une suite sturmienne si et seulement si elle vérifie $P_n(u) = n + 1$.

On peut associer à chaque suite sturmienne u un sous-décalage défini par la fermeture de son orbite par le décalage : $X_u = \overline{\{\sigma^n u, n \in \mathbb{Z}\}}$.

Définition 43 *Un système sturmien est un système dynamique* (X_u, σ) *où* X_u *est la fermeture de l'orbite d'une suite sturmienne* u *sous l'action du décalage.*

Muni du décalage, un système sturmien est minimal. C'est un exemple d'un automate cellulaire ayant des valeurs propres topologiques irrationnelles (quand il agit sur un fermé invariant de l'espace des configurations) ; équipé de son unique mesure invariante, il possède les mêmes valeurs propres mesurables irrationnelles.

2.8 Propriétés spectrales des automates cellulaires

Nous avons signalé jusqu'ici un ensemble de résultats indirects concernant les propriétés spectrales des automates cellulaires.

Les résultats suivants, dus à Shereshevsky, donnent des informations importantes sur les propriétés ergodiques des automates cellulaires. Dans le premier théorème les situations qui entraînent qu'un automate cellulaire muni d'une mesure invariante est un Bernoulli ont comme conséquence qu'il ne possède pas de valeurs propres mesurables. Le second théorème entraîne la même conséquence puisqu'un $K-$système ne peut pas posséder de valeurs propres.

Théorème 44 ([She97]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *avec un voisinage* $[L...R]$. *Supposons qu'on a l'une des situations suivantes :*
Soit (a) $0 \leq L < R$ *et* F *est permutatif à droite ;*
ou (b) $L < R \leq 0$ *et* F *est permutatif à gauche ;*
ou (c) $L < R$ *et* F *est bi-permutatif ;*
ou (d) est expansif.
Alors F *préserve la mesure uniforme* ν *et* $(A^{\mathbb{Z}}, F, \nu)$ *est un Bernoulli.*

Théorème 45 ([She97]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *avec un voisinage* $[L...R]$. *Supposons qu'on a l'une des situations suivantes :*
Soit (a) $0 \leq L < R$ *et* F *est surjectif.*
ou (b) $L < R \leq 0$ *et* F *est surjectif.*
ou (c) $R \neq 0$ *et* F *est permutatif à droite.*
ou (d) $L \neq 0$ *et* F *est permutatif à gauche.*
Alors F *préserve la mesure uniforme* ν *et* $(A^{\mathbb{Z}}, F, \nu)$ *est un* $K-$ *système.*

Le résultat élémentaire suivant souligne une propriété particulière des automates cellulaires.

Proposition 46 ([Moo05]) *Un automate cellulaire transitif est topologiquement faiblement mélangeant.*

La proposition suivante, due à Pivato [Piv08], permet d'établir des relations intéressantes entre le spectre du décalage et celui de l'automate cellulaire.

Proposition 47 ([Piv08]) *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *un automate cellulaire et* μ *une mesure ergodique et invariante pour le décalage ; on a alors :*
1- $\delta(\sigma) \subset \delta(F)$.
2- Si $\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu\right)$ *est à spectre discret alors* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu\right)$ *l'est également.*
3- Si μ *est ergodique pour* F *et si* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu\right)$ *est faiblement mélangeant alors* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu\right)$ *l'est également.*

La proposition suivante constitue l'équivalent ergodique de la proposition 46. C'est un cas particulier de la proposition précédente avec une preuve plus élémentaire.

Proposition 48 *Si* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ *est un automate cellulaire ergodique, il ne peut posséder de valeur propre irrationnelle ; autrement dit* F *est faiblement mélangeant.*

Preuve. Supposons qu'il existe G un sous-ensemble de X tel que $\nu(G) = 1$ où ν est la mesure uniforme et g la fonction propre associée à $e^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ définie sur G. On a alors :

$$g(F(x)) = e^{2i\pi\alpha} g(x) \Rightarrow g\left(F\left(\sigma^{-n}(x)\right)\right) = e^{2i\pi\alpha} g\left(\sigma^{-n}(x)\right).$$

Par division terme à terme et par commutation avec le décalage on obtient

$$\frac{g\left(F\left(\sigma^{-n}(x)\right)\right)}{g(F(x))} = \frac{g\left(\sigma^{-n}(x)\right)}{g(x)} \Rightarrow \frac{g\left(\sigma^{-n}(F(x))\right)}{g(F(x))} = \frac{g\left(\sigma^{-n}(x)\right)}{g(x)}.$$

Comme g est une fonction propre la propriété $g(x) = 0$ est invariante par F et l'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ est par conséquent invariant.

Comme ν est ergodique l'ensemble $g^{-1}(\{0\})$ est soit de mesure nulle soit de mesure 1. La fonction g n'étant pas presque partout nulle est donc non-nulle presque partout. Ainsi les quotients sont bien définis presque partout.

En posant $h = \dfrac{g \circ \sigma^{-n}}{g}$ on obtient $h(F(x)) = h(x)$ donc h est une fonction invariante pour l'action de F et par ergodicité elle est constante. Dans ce qui suit nous allons montrer que la fonction h ne peut être constante.

On considère l'ensemble $G_n(\epsilon)$ défini par :

$$G_n(\epsilon) = \{x \in G : \forall y \in G : x(-n, n) = y(-n, n) \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon\}.$$

Comme g est mesurable on a pour tout ϵ fixé $\lim_{n\to\infty} \nu\left(G_n\left(\epsilon\right)\right) = 1$.
Comme ν est ergodique le module de la fonction propre g est constant ; on peut donc noter $r = \left|g\left(x\right)\right|$.
Comme α est irrationnel et pour tout δ suffisamment petit il existe un entier p tel que : $B_\delta\left(e^{2i\pi p\alpha}\right) \cap B_\delta\left(e^{2i\pi(-p)\alpha}\right) = \emptyset$.

Considérons à présent les deux mots w_1, w_2 vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in [w_1] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(x\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi(p+q)\alpha}\right). \\ \forall x \in [w_2] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(x\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi(q)\alpha}\right). \end{cases}$$

Soient les mots w_1uw_2 et w_1uw_1 avec $|u| = n$; on a alors :

$$\begin{cases} \forall x \in [w_1uw_2] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(x\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi(p+q)\alpha}\right). \\ \forall x \in [w_2uw_1] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(x\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi q\alpha}\right). \end{cases}$$

D'un autre coté on a :

$$\begin{cases} \forall x \in [w_1uw_2] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(\sigma^{-n+|w_1|}\left(x\right)\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi q\alpha}\right). \\ \forall x \in [w_2uw_1] \cap G_n\left(\epsilon\right) : g\left(\sigma^{-n+|w_1|}\left(x\right)\right) \in B_\delta\left(re^{2i\pi(p+q)\alpha}\right). \end{cases}$$

On a par conséquent :

$$\begin{cases} \forall x \in [w_1uw_2] \cap E\left(\epsilon\right) \Rightarrow h\left(x\right) \in B_\delta\left(e^{2i\pi p\alpha}\right). \\ \forall x \in [w_2uw_1] \cap E\left(\epsilon\right) \Rightarrow h\left(x\right) \in B_{s\delta}\left(e^{2i\pi(-p)\alpha}\right). \end{cases}$$

Ainsi h ne peut être constante et donc F ne peut être ergodique. ■

Deuxième partie

Valeurs propres des automates cellulaires.

Introduction

On s'intéresse dans cette partie à l'étude du spectre d'un automate cellulaire.

Dans le cadre topologique la situation est relativement simple, la densité des points périodiques pour le décalage empêche l'existence de valeurs propres topologiques irrationnelles. On en déduit que les automates transitifs ne possèdent pas de valeurs propres topologiques.

L'existence de valeurs propres rationnelles est une conséquence directe de l'existence de points d'équicontinuité. En revanche nous proposons des exemples d'automates cellulaires sensibles qui possèdent des valeurs propres topologiques.

Une particularité à signaler dans le cas des automates cellulaires presque équicontinus mais non équicontinus dont le spectre rationel est infini.

Dans le cadre mesuré, la question devient plus difficile. On s'intéresse à la dynamique des automates cellulaires surjectifs pour lesquels la mesure uniforme est invariante en vertu du théorème de Hedlund [Hed69]. La plupart des résultats obtenus peuvent être transposés au cas d'automates cellulaires munis de n'importe quelle mesure invariante. Cependant, il n'y a pas beaucoup d'exemples dans lesquels on en connaît une qui soit distincte de la mesure uniforme ; c'est pourquoi nous nous limitons à ce cas.

Nous commençons par montrer que les automates cellulaires ayant des points d'équicontinuité ne possèdent pas de valeurs propres irrationnelles mesurables.

Ce résultat se généralise aux automates cellulaires possédant des points μ-équicontinus selon la définition de Gilman. La preuve est directement inspirée du travail de Tisseur [Tis08], lui-même en continuité de ceux de Blanchard-Tisseur [BT00] et Gilman [Gil87][Gil88].

Nous démontrons enfin que les automates cellulaires possédant des points μ-équicontinus selon la définition de Gilman possèdent des valeurs propres rationnelles.

Chapitre 3

Exemples et premiers résultats

Le résultat élémentaire suivant joue un rôle important en théorie des automates cellulaires.

Proposition 49 *Soit $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ un automate cellulaire, alors tout point de $A^{\mathbb{Z}}$ périodique pour le décalage est ultimement périodique pour F et l'ensemble des points ultimement périodiques de F est dense dans $A^{\mathbb{Z}}$.*

Preuve. Soit x un point périodique de période n pour le shift ; alors on a par commutation entre le shift et l'automate cellulaire :

$$F(\sigma^n(x)) = \sigma^n(F(x)) = F(x).$$

Ce qui signifie que $F(x)$ est périodique de période n pour le shift et par conséquent toutes les images de x par F sont périodiques de période n pour le shift.

Comme chaque point périodique pour le shift de période n est une suite infinie d'un mot de longueur n et que le nombre de possibilités pour la formation de ces mots est limité il existe alors une prépériode $m \geq 0$ et une période $p > 0$ telles que $F^{m+p}(x) = F^m(x)$. ■

Exemple 50 *Automate cellulaire équicontinu surjectif avec des valeurs propres topologiques.*
On considère l'alphabet $\mathbb{A} = \{0, 1, ...N-1\}$ et l'automate cellulaire circulaire défini par :

$$\begin{cases} (F(x))_i = x_i + 1 \text{ si } x_i \neq N-1 \\ (F(x))_i = 1 \text{ si } x_i = N-1 \end{cases}.$$

Cet automate cellulaire possède les valeurs propres $\left(e^{2I\pi\left(\frac{p}{N}\right)}\right)_{1\leq p\leq N-1}$ *associées aux fonctions propres* $\left(g\left(x\right)=e^{2I\pi\left(\frac{p}{N}\right)x_0}\right)_{1\leq p\leq N-1}$.
En effet on a :

$$\forall p\in\left[1,N-1\right]:g\left(F\left(x\right)\right)=e^{2I\pi\left(\frac{p}{N}\right)\left(x_0+1\right)}=e^{2I\pi\left(\frac{p}{N}\right)}e^{2I\pi\left(\frac{p}{N}\right)x_0}.$$

Exemple 51 *Automate cellulaire surjectif presque equicontinu de Kurka* $\left(5^{\mathbb{Z}},B\right)$ *où* $5=\{000,001,010,011,100\}$ *et*

$$B\left(x,y,z\right)=\left(x_i,\left(1+x_i\right)y_{i+1}+x_{i-1}z_i,\left(1+x_i\right)z_{i-1}+x_{i+1}y_i\right).$$

Cet automate est bijectif et presque équicontinu. Sa dynamique peut être expliquée en termes de mouvements de particules, le mot 100 est un mot bloquant (w) le mot 001 (l) joue le rôle d'une particule qui se déplace vers la gauche, quand elle entre en collision avec le mur (w) elle se déplace vers la droite, le mot 010 joue le rôle d'une particule se déplaçant vers la droite (r), quand elle entre en collision avec le mur elle revient vers la gauche, le mot 011 symbolise la rencontre d'une particule se déplaçant vers la droite avec une autre se déplaçant vers la gauche.
Soient les ensembles $W_k=F^k\left[w\underset{N}{\underleftrightarrow{00...0}}lw\right]$ *avec* $0\leq k\leq 2N$ *et l'ensemble* $W=\overset{2N}{\underset{k=0}{\cup}}W_k$.

Soit la fonction $g\left(x\right)=1_{W_N}\left(x\right)e^{\frac{2I\pi}{N+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{2N}k.\mathbf{1}_{W_k}(x)\right)}$ *où* 1_{W_N} *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble* W_N. *La fonction* g *ne lit que les mots* $w00...0lw$ *et leurs images.*

La fonction g *est continue et non partout nulle. Elle est associée à la valeur propre* $e^{\frac{2I\pi}{2N}}$ *et son existence permet de conclure à la non-transitivité du système.*

Exemple 52 *L'automate cellulaire sensible* $\sigma\times B$.
Cet automate cellulaire est sensible et possède la valeur propre $e^{\frac{2I\pi}{N+1}}$ *associée à la fonction propre* $h\left(x,y\right)=1_{W_N}\left(y\right)e^{\frac{2I\pi}{N+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{2N}k.\mathbf{1}_{W_k}(y)\right)}$ *où* 1_{W_N} *désigne la fonction caractéristique de l'ensemble* W_N.

Chapitre 4

Valeurs propres topologiques des automates cellulaires

Le résultat suivant permet de conclure que tout automate cellulaire avec des valeurs propres rationnelles possède un facteur équicontinu.

Proposition 53 *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *un automate cellulaire ayant des valeurs propres rationnelles continues de la forme* $e^{2I\pi\frac{p}{q}}, p, q \in \mathbb{Z}$ *avec* p *et* q *premiers entre eux alors* F *possède un facteur topologique qui est un automate cellulaire circulant.*

Preuve. Soit g une fonction propre continue associée à la valeur propre $e^{2I\pi\left(\frac{p}{q}\right)}$. L'image par g de l'ensemble $\mathbb{A}^{\mathbb{Z}}$ est un ensemble discret :

$$Im\left(g\right) = \left\{\lambda_k : 0 \leq k \leq q-1\right\}.$$

Comme $Im\left(g\right)$ est un ensemble discret alors $g^{-1}\left\{\lambda_k\right\}$ est un ouvert-fermé de $Im\left(g\right)$. On peut l'écrire sous la forme :

$$g^{-1}\left\{\lambda_k\right\} = \cup_{j=1}^{n_k}\left[w_j^k\right],$$

avec w_j^k un mot de longueur N indépendante de j et k. Ainsi la fonction g donne aux éléments d'un même cylindre la même valeur.

Soit l'ensemble $W := \cup_{k=0}^{q-1}\cup_{j=1}^{n_k}\left\{w_j^k\right\}$ et la fonction π définie par $\forall w_j^k \in W : \pi\left(w_j^k\right) = k$.
La fonction π permet de conjuguer F à l'automate cellulaire circulant $\left(\left\{0, ..q-1\right\}^{\mathbb{Z}}, C\right)$ définie par $C\left(x\right)_i = \left(x_i + 1\right) mod\, q$. ■

Remarque 54 *Si l'automate cellulaire est de rayon 0 alors la valeur propre est de la forme* $e^{2I\pi\left(\frac{p}{q}\right)}$ *avec* $q \leq Card\,(A)$*, en effet comme* F *est de rayon* 0 *il envoie chaque lettre de l'alphabet sur une autre, ainsi il existe une lettre qui se répète au bout d'au plus* $Card(A)$ *itérations.*

Le résultat suivant est une conséquence directe de la proposition 31

Corollaire 55 *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F)$ *un automate cellulaire surjectif équicontinu alors* F *possède des valeurs propres de la forme* $e^{\frac{2I\pi}{p}}$.

La remarque 54 est un cas particulier du corollaire précédent car tout automate cellulaire de rayon 0 est équicontinu.

Définition 56 *Soit* $x \in A^{\mathbb{Z}}$*, on appelle séquelle du mot* $x\,(s,t)$ *la suite de mots* $\left\{F^k\,(x)\,(s,t)\,, k \in \mathbb{N}\right\}$.

Par la proposition 29 tout automate cellulaire de rayon r avec des points d'équicontinuité possède au moins un mot $r-$bloquant. Le résultat classique suivant est une conséquence de cette dernière affirmation.

Lemme 57 *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *un automate cellulaire surjectif de rayon* r *qui possède des points d'équicontinuité et* w *un mot* $r-$*bloquant ; alors pour tout mot* u *situé entre deux occurrences de* w*, la séquelle du mot* u *est ultimement périodique.*

Preuve. Soit w un mot r-bloquant il existe alors un entier $p \in [0, r-s]$ tel que :

$$\forall x, y \in [w]_0\,, \forall n \geq 0, F^n\,(x)\,(p, p+r) = F^n\,(y)\,(p, p+r)\,.$$

Les images du mot w ne dépendent pas du contexte à droite ou à gauche de celui-ci.
Soit maintenant u un mot quelconque, le mot wuw est également un mot bloquant, ainsi les éléments appartenant au cylindre $[wuw]_0$ possèdent les mêmes images entre les coordonnées $p+r$ et $|w|+|u|+p+r$. Considérons le point périodique pour le shift $(wuw)^{\infty} \in [wuw]_0\,,$

Comme il est périodique pour le shift, il est ultimement périodique pour l'action de l'automate F et par conséquent la suite
$\left\{F^k\,(wuw)\,(p,|w|+|u|+p+r)\,,k\in\mathbb{N}\right\}$ est ultimement périodique.

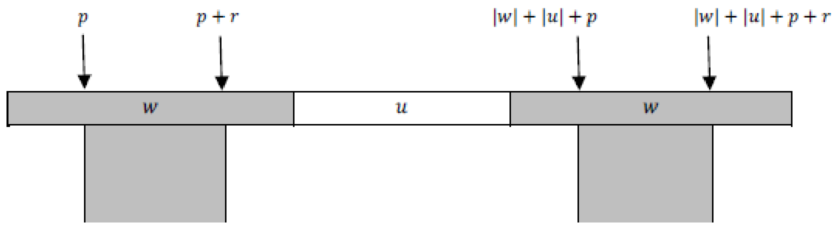

Fig.1 :ultime périodicité de la séquelle d'un mot bloquant.

■

Proposition 58 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}},F\right)$ un automate cellulaire surjectif qui possède des points d'équicontinuité mais n'est pas équicontinu ; alors il possède une infinité de valeurs propres rationnelles.*

Preuve. 1) Existence de valeurs propres.
Puisque F possède des points d'équicontinuités, par la proposition 1 il existe au moins un mot bloquant w.
En vertu du lemme 57 pour tout n et tout mot $(a_{-n}...a_0...a_n)$ de longueur $2n+1$ la suite $\left(F^i\,(wa_{-n}...a_0...a_nw)^{\infty}\,(-n,n)\right)_{k>0}$ est donc ultimement périodique ; ainsi il existe une prépériode m et une période p telles que pour tout $i\in\mathbb{N}$:

$$F^m\,(wa_{-n}...a_0...a_nw)^{\infty}\,(-n,n+2)=F^{m+ip}\,(wa_{-n}...a_0...a_nw)^{\infty}\,(-n,n)\,.$$

Soient les ensembles $W_k=F^{k+m}\,[wa_{-n}...a_0...a_nw]$ avec $0\le k\le p$ et l'ensemble $W=\bigcup\limits_{k=0}^{p}W_k$.

Soit la fonction g définie par :

$$g\,(x)=\mathbf{1}_W\,(x)\,e^{\frac{2I\pi}{p}\left(\sum\limits_{k=0}^{p}k.\mathbf{1}_{W_k}(x)\right)}.$$

où $\mathbf{1}_W$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble W.
La fonction g est continue et non partout nulle, elle est associée à la valeur

propre $e^{\frac{2I\pi}{p}}$.
2) Infinité des valeurs propres.
Supposons que les valeurs propres soient en nombre fini ; il existe alors s périodes $p_1, p_2, ...p_s$ telles que les valeurs propres s'écrivent

$$\lambda_1 = e^{\frac{2I\pi.}{p_1}}, \lambda_2 = e^{\frac{2I\pi.}{p_2}}, ...,, \lambda_s = e^{\frac{2I\pi.}{p_s}}.$$

Pour tout x dans $A^{\mathbb{Z}}$ et tout $n > 0$ les points $(wx(-n,n)w)^{\infty}$ sont périodiques pour F (voir [BT00]).
Ainsi les cylindres $[wx(-n,n)w]$ sont périodiques pour F et tout x dans $A^{\mathbb{Z}}$ peut donc être associé à une valeur propre.

Soit $P = \underset{1 \leq i \leq s}{ppcm}(p_i)$ et soit $(wx(-n,n)w)^{\infty}$ la suite de points périodiques pour le shift tels que :

$$(wx(-n,n)w)^{\infty}(-n,n) = x(-n,n)$$

On a alors pour tout x dans $A^{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} F^P(x) &= F^P\left(\lim_{k\to\infty}(wx(-n,n)w)^{\infty}\right) = \lim_{k\to\infty} F^P\left((wx(-n,n)w)^{\infty}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left((wx(-n,n)w)^{\infty}\right) = x. \end{aligned}$$

On obtient donc $F^P = Id$ et donc F est équicontinu ce qui constitue une contradiction. ■

Proposition 59 *Un automate cellulaire ne peut avoir de fonction propre continue associée à une valeur propre irrationnelle.*

Preuve. Supposant que g est une fonction propre de $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ associée à la valeur propre $e^{2I\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, l'ensemble des points périodiques pour le shift étant dense, chaque point de $A^{\mathbb{Z}}$ est limite d'une suite de points périodiques, ainsi si g s'annule sur l'ensemble des points périodiques pour le shift alors elle est constamment nulle sur $A^{\mathbb{Z}}$.

Donc g ne s'annule pas sur l'ensemble des points périodiques pour le shift et il existe un point x périodique pour le shift avec $g(x) \neq 0$ vérifiant :

$$g\left(F^{m+kp}(x)\right) = e^{2Ip\pi\alpha} g\left(F^m(x)\right).$$

ce qui entraine que $e^{2Ip\pi\alpha} = 1$ et par conséquent α est rationnel ce qui contredit l'hypothèse. ■

Chapitre 5

Valeurs propres mesurables des automates cellulaires

Dans cette partie on s'intéresse aux valeurs propres mesurables sous deux angles. On veut d'abord savoir dans quelles situations les valeurs propres ne peuvent pas exister ; ensuite s'il peut y avoir des valeurs propres irrationnelles.

Nous ne résolvons aucune des deux questions mais nous rappelons ou établissons un ensemble de résultats préliminaires.

Moothathu a démontré qu'un automate cellulaire transitif est topologiquement faiblement mélangeant. L'équivalent ergodique de ce résultat a été établi par Pivato [Piv08].

Dans le cadre topologique la densité des points périodiques pour le décalage empêche l'existence d'une valeur propre irrationnelle (proposition 59). Cet argument devient caduc dans le cadre mesuré, l'ensemble des points périodiques pour un automate cellulaire étant de mesure nulle pour la mesure uniforme.

Nous commençons par démontrer un résultat simple concernant l'impossibilité pour les automates cellulaires avec des points d'équicontinuité d'avoir des valeurs propres irrationnelles avant d'énoncer plus loin un résultat similaire concernant les automates cellulaires presque équicontinus au sens de la mesure.

Dans ce qui suit $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ désigne un automate cellulaire surjectif muni de le mesure uniforme qui est alors F-invariante, $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \mu\right)$ désignera un automate cellulaire muni de n'importe quelle mesure invariante pour l'action de F.

Proposition 60 (Pivato [Piv08]) *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ *un automate cellulaire et* μ *une mesure ergodique et invariante pour le shift on a alors :*
1- $\delta(\sigma) \subset \delta(F)$.
2- Si $\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu\right)$ *est à spectre discret alors* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu\right)$ *l'est également.*
3- Si μ *est ergodique pour* F *et si* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \sigma, \mu\right)$ *est faiblement mélangeant alors* $\left(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu\right)$ *l'est également.*

Définition 61 *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ *un automate cellulaire, on définit l'ensemble mesurable* Q_n *par :*

$$Q_n = \left\{x : \left(F^i(x)(-n,n)\right)_{i \in \mathbb{N}} \text{ ultimement périodique}\right\}.$$

Le lemme suivant constitue l'élément principal de la preuve des propositions 63 et 71 : si pour un automate cellulaire l'ensemble des points dont la séquelle des coordonnées centrales est ultimement périodiques est de mesure 1, alors il ne possède pas de valeur propre irrationnelle mesurable.

Lemme 62 *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ *un automate cellulaire surjectif; si* $\nu(Q_n) = 1$ *pour tout* n *alors* F *ne possède pas de valeur propre irrationnelle mesurable.*

Preuve. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, g une fonction mesurable et H un sous-ensemble de $A^{\mathbb{Z}}$ tel que $\nu(H) = 1$ vérifiant :

$$\forall x \in H : g(F(x)) = e^{2I\pi\alpha} g(x).$$

Remarquons d'abord que l'ensemble $g^{-1}\{0\}$ est invariant par l'action de F : en effet, comme la valeur propre $e^{2I\pi\alpha}$ est de module 1, le module de g ne change pas sous l'action de F.

On supposera dans ce qui suit que $\nu\left(g^{-1}\{0\}\right) = 0$. Quand $\nu\left(g^{-1}\{0\}\right) \neq 0$ il suffit de remplacer ν par la mesure conditionnelle sur le complémentaire de $g^{-1}\{0\}$, qui est alors F-invariante.

Pour tout $d > 0$ notons E_d l'ensemble mesurable des éléments de $A^{\mathbb{Z}}$ vérifiant $|g(x)| > d$.

On fixe $d > 0$ tel que $\nu(E_d) = a > 0$ et soit $\epsilon = 5\epsilon_1 < \dfrac{a}{2}$.

Pour tout $\eta > 0$ on définit l'ensemble mesurable $H_n(\eta)$ par :

$$H_n(\eta) = \{x \in H : \forall y \in H : x(-n,n) = y(-n,n) \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \eta\}.$$

Comme g est mesurable on a pour tout η fixé $\lim_{n\to\infty} \nu\left(H_n\left(\eta\right)\right) = 1$ et comme on a $\nu\left(Q_n\right) = 1$ pour tout n alors :

$$\lim_{n\to\infty} \nu\left(H_n\left(\eta\right) \cap Q_n\right) = 1.$$

Soit $\eta < d$.

Pour $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{5}$ il existe $m > 0$ tel que pour tout $n > m$ on ait :

$$\nu\left(H_n\left(\eta_0\right) \cap Q_n\right) > 1 - \epsilon_1 \Rightarrow \nu\left(H_n\left(\eta_0\right)\right) > 1 - \epsilon_1 \text{ et } \nu\left(Q_n\right) > 1 - \epsilon_1.$$

Fixons à présent une valeur $n > m$, soit k un entier et soit $Q_n\left(k\right)$ la partie mesurable de Q_n où la prépériode et la période sont bornées par k. Quand k tend vers l'infini $Q_n\left(k\right)$ tend vers Q_n, pour $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{5}$ il existe alors k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$:

$$\nu\left(Q_n\left(k\right)\right) \geq \nu\left(Q_n\right) - \epsilon_1 \geq 1 - 2\epsilon_1.$$

On fixe une valeur $k \geq k_0$. Comme les points de $F^k\left(Q_n\left(k\right)\right)$ sont périodiques sur les coordonnées $\left(-n, n\right)$ la période est bornée du fait que le nombre de mots de longueur $2n+1$ est borné, donc pour tous les points de $Q_n\left(k\right)$ il y a une période p commune :

$$\forall x \in S, \forall N \in \mathbb{N} : F^k\left(x\right)\left(-n, n\right) = F^{k+Np}\left(x\right)\left(-n, n\right).$$

Par invariance de ν par F on obtient :

$$\begin{aligned} \nu\left(F^k\left(E_{d_0} \cap Q_n\left(k\right) \cap F^{-Np}\left(H_n\left(\eta_0\right)\right)\right)\right) &\geq \nu\left(E_{d_0}\right) + \nu\left(Q_n\left(k\right)\right) \\ &\quad + \nu\left(H_n\left(\eta_0\right)\right) - 2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \nu\left(F^k\left(E_{d_0} \cap Q_n\left(k\right) \cap F^{-Np}\left(H_n\left(\eta_0\right)\right)\right)\right) &\geq a - \epsilon_1 + 1 - 2\epsilon_1 + 1 - \epsilon_1 - 2. \\ &\geq a - 4\epsilon_1. \end{aligned}$$

On pose $S_N = E_d \cap F^{-k}\left(H_n\left(\eta\right) \cap Q_n\left(k\right) \cap F^{-Np}\left(H_n\left(\eta\right)\right)\right)$.

C'est l'ensemble mesurable des points qui donnent à g des valeurs supérieurs à d dans un intervalle de longueur 2η et dont les images au bout de k itérations seront périodiques de période p.

À présent on va montrer que l'ensemble S_N est de mesure positive. En effet on a :

$$\nu(S_N) \geq \nu(H_n(\eta_0)) + \nu\left(F^k\left(E_d \cap Q_n(k) \cap F^{-Np}(H_n(\eta_0))\right)\right) - 1.$$

D'où on obtient :

$$\nu(S_N) \geq a - 4\epsilon_1 + 1 - \epsilon_1 - 1 \geq a - 5\epsilon_1.$$

et finalement :

$$\nu(S_N) \geq a - \epsilon > \frac{a}{2}.$$

Ainsi pour tout N l'ensemble S_N est de mesure positive.

On va démontrer à présent que pour certaines valeurs de N les valeurs prises par g sur l'ensemble S_N s'écarteraient plus qu'il n'est normal quand α est irrationnel.

On obtient par définition de l'ensemble $H_n(\eta)$:

$$\forall x \in S_N, \forall N \in \mathbb{N} : \left|g\left(F^k(x)\right) - g\left(F^{k+Np}(x)\right)\right| < \eta. \tag{5.1}$$

On a d'un autre coté :

$$\forall x \in S_N, \forall N \in \mathbb{N} : \left|g\left(F^k(x)\right) - g\left(F^{k+Np}(x)\right)\right| = \left|e^{2Ik\pi\alpha} - e^{2I(k+Np)\pi\alpha}\right| |g(x)|.$$

Cette dernière équation est équivalente à :

$$\left|g\left(F^k(x)\right) - g\left(F^{k+Np}(x)\right)\right| = \left|1 - e^{2INp\pi\alpha}\right| |g(x)|.$$

D'après la définition de l'ensemble E_d on a $|g(x)| > d$ sur l'ensemble S_N et on a supposé que $\eta < d$.

Comme α est irrationnel l'ensemble $\left\{e^{2INp\pi\alpha}, N \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans le cercle unité, il existe donc N_0 tel que $\left|1 - e^{2IN_0p\pi\alpha}\right| > 1$ d'où on obtient :

$$\left|g\left(F^k(x)\right) - g\left(F^{k+N_0p}(x)\right)\right| = \left|1 - e^{2IN_0p\pi\alpha}\right| |g(x)| > 1.d > \eta. \tag{5.2}$$

Les inégalités (5.1) et (5.2) sont contradictoires donc α ne peut pas être irrationnel. ■

Le lemme 62 s'applique d'une façon très simple au cas des automates cellulaires surjectifs ayant des points d'équicontinuités.

Proposition 63 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire. Si $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ est topologiquement presque équicontinu alors il ne peut admettre de valeur propre mesurable irrationnelle pour la mesure uniforme ν.*

Preuve. Notons W_n l'ensemble des points contenant une occurrence du mot bloquant w à droite après n et une autre à gauche avant $-n$. Il est clair que $\nu([w]) > 0$, et par ergodicité du shift on a donc $\nu(W_n) = 1$ pour tout n.

Soit $x \in W_n$; par le lemme 57 il existe alors une prépériode m et une période p telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $F^m(x)(-n,n) = F^{m+kp}(x)(-n,n)$.

La suite $\left(F^k(x)[-n,n]\right)_{k>0}$ est donc ultimement périodique pour tout $x \in Bl_n$.

On rappelle ici la définition de l'ensemble Q_n donnée plus haut.

$$Q_n = \left\{x : \left(F^i(x)(-n,n)\right)_{i\in\mathbb{N}} \text{ ultimement périodique}\right\}.$$

On a donc pour tout n : $W_n \subset Q_n$ d'où $\nu(Q_n) = 1$ pour tout n.

D'après le lemme 62, F ne possède pas de valeur propre irrationnelle mesurable. ∎

Dans cette partie on va prouver l'impossibilité pour un automate cellulaire d'avoir des valeurs propres irrationnelles quand il est presque équicontinu au sens de Gilman.

Définition 64 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire et $[i_1, i_2]$ un intervalle fini de $A^{\mathbb{Z}}$ pour $x \in A^{\mathbb{Z}}$. On définit $B_{[i_1,i_2]}(x)$ par :*

$$B_{[i_1,i_2]}(x) = \left\{y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall j : F^j(x)(i_1,i_2) = F^j(y)(i_1,i_2)\right\}.$$

Pour tout intervalle $[i_1, i_2]$ la relation définie par $x\mathfrak{R}y$ si et seulement si $\forall j$: $F^j(x)(i_1,i_2) = F^j(y)(i_1,i_2)$ est une relation d'équivalence et les $B_{[i_1,i_2]}(x)$ sont les classes d'équivalences. Dans [Gil87] on trouve la preuve du lemme suivant qui décrit les propriétés des ensembles $B_{[i_1,i_2]}(x)$:

Lemme 65 *Soit $\left(A^{\mathbb{Z}}, F\right)$ un automate cellulaire et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*
1. $B_{[-n,n]}(x)$ est un ensemble fermé.
2. $F\left(B_{[-n,n]}(x)\right) \subset B_{[-n,n]}(F(x))$.
3. F est équicontinu en x si et seulement si $x \in B_{[-m,m]}(x)^\circ$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.
4. La restriction de F à $\overline{O_x}$ est équicontinu si et seulement $B_{[-m,m]}(x)$ est ultimement périodique pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Définition 66 *Soit* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \mu\right)$ *un automate cellulaire muni d'une mesure invariante* μ*, un point* x *est un point* $\mu-$*équicontinu si pour chaque* $m > 0$ *on a :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu\left([x(-n,n)] \cap B_{[-m,m]}(x)\right)}{\mu([x(-n,n)])} = 1.$$

On dit que F *est presque expansif s'il existe un* $m > 0$ *tel que pour chaque* $x \in X : \mu\left(B_{[-m,m]}(x)\right) = 0.$

Remarque 67 *La définition a comme conséquence que chaque point d'équicontinuité est* μ*-équicontinu.*

Définition 68 *Parmi les automates cellulaires munis d'une mesure invariante* μ *on définit les classes suivantes :*
1- $(F, \mu) \in \mathcal{A}$ *si* F *possède des points d'équicontinuité.*
2- $(F, \mu) \in \mathcal{B}$ *si* F *possède des points* $\mu-$*équicontinus mais n'appartient pas à* $\mathcal{A}$*.*
3- $(F, \mu) \in \mathcal{C}$ *si* F *est presque expansif.*

A noter qu'on n'utilise pas la classe $\mathcal{C}$ complémentaire des classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par la suite, elle est citée uniquement pour compléter la définition.

Remarque 69 *Si* F *est surjectif, les points d'équicontinuité forment un ensemble de mesure 1. Par conséquent tout automate cellulaire surjectif topologiquement presque équicontinu muni de la mesure uniforme* ν *est presque équicontinu pour la mesure* ν*.*

Proposition 70 (Tisseur [Tis08]) *Soit* $(A^{\mathbb{Z}}, F, \mu)$ *un automate cellulaire muni d'une mesure invariante* μ*. Si* F *possède des points* $\mu-$ *équicontinus alors l'ensemble des points périodiques pour* F *est dense dans le support topologique de* μ*.*

La preuve de la proposition suivante développe un raisonnement dû à Gilman [Gil88] et à Tisseur [Tis08].

Proposition 71 *Un automate cellulaire surjectif* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ *appartenant à la classe* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *ne peut posséder de valeur propre mesurable irrationnelle.*

Preuve. Soit r le rayon de l'automate cellulaire et soit x un point ν-équicontinu : on a donc $\nu\left(B_{[-r,r]}(x)\right) > 0$.
Notons W_n l'ensemble des points contenant une occurrence du mot $x(-r,r)$ à droite après n et une autre à gauche avant $-n$.
Par ergodicité du décalage on a : $\lim_{n\to\infty} \nu(W_n) = 1$.

On fixe un entier $p > 0$. On a :

$$\nu\left(\sigma^{-p}B_{[-r,r]}(x) \cap \left(B_{[-r,r]}(x)\right)\right) > 0.$$

Il existe donc un intervalle J translaté de $[-r,r]$ tel que pour tout $y \in \sigma^{-p}B_{[-r,r]}(x) \cap \left(B_{[-r,r]}(x)\right)$ on ait :

$$\forall i \geq 0 : F^i(y)(-r,r) = F^i(y)(-r+p, r+p).$$

Posons $y(-r,r) = w$ et notons u le mot entre deux occurrences de w, notons enfin y^- la partie à gauche du premier w et y^+celle a droite du second w.

En insérant le mot uw dans y entre les mots w et u on obtient un nouvel élément $y^{(1)}$ contenant deux occurrences successives du mot uw.

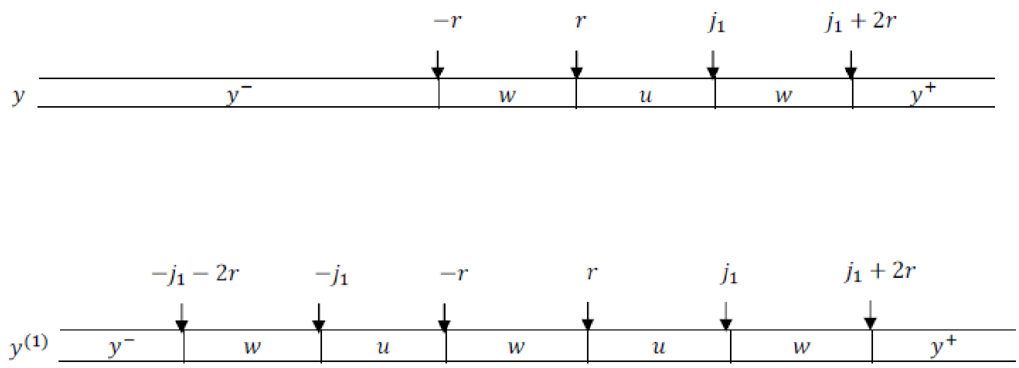

Fig2 :Création récursive d'un élément périodique pourle décalage.

La répétition de ce procédé permet de créer une suite $y^{(i)}$ contenant à chaque étape une occurrence supplémentaire du mot uw.
On commence par démontrer par récurrence sur l'action de F que $y^{(i)}$ appartient à $B_{[-ij_1-(i+1)r, ij_1+(i+1)r]}(x)$ pour tout $i > 0$.
Pour $i = 1$ on démontre que $y^{(1)} \in B_{[-j_1+2r, j_1+2r]}(x)$.

Comme les images du mot $y^{(1)}(j_1, j_1 + 2r) = w$ dépendent à droite du mot infini y^+ et à gauche du mot wu et de la colonne infinie des images qui se trouvent dessous, d'un autre côté les images du mot $y^{(1)}(-j_1 - 2r, -j_1) = w$ dépendent à gauche du mot infini y^- et à droite du mot wu et de la colonne infinie des images qui se trouvent dessous.

D'après la définition de l'ensemble $B_{[-r,r]}(x)$, les images de $x(-r, r) = w$ sont indépendantes du contexte à droite et à gauche de w. On obtient donc :

$$\forall i : F^i\left(y^{(1)}\right)(-r, r) = F^i\left(y^{(1)}\right)(-r, r).$$

On a alors : $y^{(1)} \in B_{[-j_1+2r, j_1+2r]}(x)$.

Supposons à présent que $y^{(i)} \in B_{[-ij_1-(i+1)r, ij_1+(i+1)r]}(x)$ et on veut démontrer que $y^{(i+1)} \in B_{[-(i+1)j_1-(i+2)r,(i)i+1j_1+(i+2)r]}(x)$.
Les mêmes arguments qu'à l'étape $i = 1$ permettent de conclure que les images du mot $y^{(i)}(ij_1, ij_1 + (i+1)r) = w$ dépendent à droite du mot infini y^+ et à gauche du mot wu et de la colonne infinie des images qui se trouvent dessous, d'un autre coté les images du mot $y^{(1)}(-ij_1, -ij_1 - (i+1)r) = w$ dépendent à gauche du mot infini y^- et à droite du mot wu et de la colonne infinie des images qui se trouvent dessous.
Comme chaque élément $y^{(i)}$ appartient à $B_{[-ij_1-(i+1)r, ij_1+(i+1)r]}(x)$ il en résulte qu'il appartient également à $B_{[-r,r]}(x)$.

En suivant l'action de σ on constate que la suite des configurations $y^{(i)} = y^- w \underbrace{uw...uw}_{\leftarrow (i-1) \rightarrow} y^+$ contenant à chaque étape une occurrence supplémentaire du mot uw converge vers l'élément $(uw)^\infty$ périodique pour le shift qui coïncide avec y sur les coordonnées $(-r, r)$.
Comme l'ensemble $B_{[-r,r]}(x)$ est fermé le point périodique $(uw)^\infty$ est dans $B_{[-r,r]}(x)$, la suite de mots $\left(F^i(x)(-r, r)\right)_{i \geq 0}$ est par conséquent ultimement périodique.
On a donc pour tout n : $W_n \subset Q_n$ 64 d'où $\nu(Q_n) = 1$ pour tout n.

D'après le lemme 62 F ne possède pas de valeur propre irrationnelle mesurable. ■

Remarque 72 *La proposition 63 est un cas particulier de la proposition 71. Bien qu'on ait peu d'exemples d'automates cellulaires de la classe $\mathcal{B}$, la preuve de la proposition 71 est plus naturelle car elle repose sur une seule hypothèse probabiliste, contrairement à celle de la proposition 63 qui mélange arguments topologiques et probabilistes. Toutefois cette dernière a le mérite de permettre une meilleure compréhension de la preuve de la proposition 71.*

Proposition 73 *Un automate cellulaire surjectif* $\left(A^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}, F, \nu\right)$ *appartenant à la classe* $\mathcal{B}$ *possède des valeurs propres rationnelles.*

Preuve. Soit r le rayon de l'automate cellulaire et soit x un point ν-équicontinu ; on a donc $\nu\left(B_{[-r,r]}(x)\right) > 0$.
Notons W_n l'ensemble des points contenant une occurrence du mot $x(-r,r)$ à droite après n et une autre à gauche avant $-n$.
Par ergodicité du décalage on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(W_n) = 1$.
D'après la preuve de la proposition 14 pour presque tout élément de l'ensemble W_n la suite $F^k(x)(-n,n)$ est ultimement périodique.

Soit W_{n_k} la partie de l'ensemble W_n où la prépériode est au plus k, on a donc $\lim\limits_{k\to\infty} W_{n_k} = W_n$.

Il existe par conséquent n_0 et k_0 tel que $\nu\left(W_{n_{0k_0}}\right) > 0$.

Comme le nombre de mots de longueur $2n_0 + 1$ est borné, la période l'est également. On en déduit qu'il existe une période p commune.
Soit l'ensemble $W = \bigcup\limits_{k=k_0}^{k_0+p} W_k$.

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \mathbf{1}_W(x)\, e^{\frac{2I\pi}{p}\left(\sum\limits_{k=k_0}^{k_0+p} k.\mathbf{1}_{W_k}(x)\right)}.$$

La fonction g est mesurable et non presque partout nulle, elle est associée à la valeur propre $e^{\frac{2I\pi}{p}}$. ■

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés à l'étude du spectre d'un automate cellulaire unidimensionnel. Dans le cadre topologique la densité des points périodiques pour le décalage empêche l'existence de valeurs propres irrationnelles. Elle a également comme conséquence le fait que tout automate cellulaire avec des points d'équicontinuité mais non équicontinu possède un spectre "rationnel" infini.

Dans le cadre ergodique nous avons démontré que tout automate cellulaire avec des points d'équicontinuité topologiques ne peut posséder de valeurs propres irrationnelles mesurables. Le même résultat est valable pour les automates cellulaires ayant des points de μ-équicontinuité selon la définition de Gilman.

Plusieurs questions dans le cadre unidimensionnel demeurent ouvertes :

Moothathu [Moo05] a démontré que tout automate cellulaire transitif est topologiquement faiblement mélangeant, la version ergodique de ce résultat a été établie par Pivato [Piv08]. On ne connaît pas d'exemple d'automate cellulaire faiblement mélangeant mais non mélangeant, que ce soit dans le cadre topologique ou ergodique.

Savoir si la transitivité est équivalente au mélange topologique et si l'ergodicité est équivalente au mélange mesurable constituerait une bonne étape dans la compréhension de la dynamique des automates cellulaires en dimension 1.

On souhaite également savoir si le résultat concernant l'inexistence de valeurs propres mesurables irrationnelles pour les automates cellulaires ayant des points d'équicontinuité peut être obtenu pour les automates cellulaires fermants.

En dimensions supérieures un automate cellulaire ne peut pas avoir de valeurs propres topologiques irrationnelles à cause de la densité des points périodiques pour le décalage.

Dans le cadre mesurable on est tenté d'obtenir une version en dimensions supérieures de la proposition 63.

La preuve des résultats d'inexistence des valeurs propres irrationnelles mesurables est basée sur l'ultime périodicité de la séquelle d'un mot bloquant.En dimension supérieure ou égale à deux ce résultat constitue toujours une question ouverte et conditionne la validité du lemme 62 aux dimensions supérieures.

Bibliographie

[ADF09] L. Acerbi, A. Dennunzio and E. Formenti. *Shifting and Lifting of Cellular Automata*, S.B. Cooper, B. Lowe, and A. Sorbi (Eds.) : CiE 2007, LNCS 4497, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (2007), 1–10.

[AAB96] E. Akin, J. Auslander, and K. Berg. *When is a transitive map chaotic ?*, Convergence in ergodic theory and probability,Bergelson, March, Rosenblatt, eds, de Gruyter, Berlin-New York, (1996), 25–40.

[AP75] S. Amoroso and Y. Patt. *Decision procedure for surjectivity and injectivity of parallel maps for tessellation structures*, J. Comput. System Sci. **6** (1975), 448–464.

[BCT90] P. Bak, K.Chen, and C. Tang. A forest-fire model and some thoughts on turbulence. Phys. Lett., **147** (1990) 297–300.

[Bla00] F. Blanchard. *Dense periodic points in cellular automata.* http ://www.math.iupui.edu/~mmisiure/open/.

[BCF03] F. Blanchard, J. Cervelle, and E. Formenti. *Periodicity and transitivity for cellular automata in Besicovitch topologies.* Mathematical foundations of computer science, Springer, Berlin **(2747)** (2003) 228–238.

[BFK97] F. Blanchard, E. Formenti, and P. Kůrka. *Cellular automata in the Cantor, Besicovitch, and Weyl topological spaces.* Complex Systems, **11**(2) (1997), 107– 123 .

[BKM97] F. Blanchard, P. Kůrka, and A. Maass. *Topological and meausre theoretic properties of one dimensional cellular automata.* Physica D. **103** (1997), 86–99.

[BM96] F. Blanchard and A. Maass. *Dynamical behaviour of Coven's cellular automata*, Theoret. Computer Sci. (1996), 291–302.

[BM97] F. Blanchard and A. Maass. *Dynamical properties of expansive one-sided cellular automata*, Israel J. Math. (1997), 149–174.

[BT00] F. Blanchard and P. Tisseur. *Some properties of cellular automata with equicontinuous points.* Ann. Inst . Henri Poincaré **36** (2000), 569–582.

[BFK90] M. Boyle, J. Franks, and B. Kitchens. *Automorphisms of one-sided subshifts of finite type*. Ergodic Theor. Dynam. Sys., **10**(3) (1990) 421–449 .

[BFF97] M. Boyle, D. Fiebig, and U. Fiebig. *A dimension group for local homeomorphisms and endomorphisms of onesided shifts of finite type*. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, **487** (1997) 27–59, .

[BK99] M. Boyle and B. Kitchens. *Periodic points in cellular automata*, preprint (1999). Indagationes Math.

[BL97] M. Boyle and D. Lind. *Expansive subdynamics*. Trans. Amer. Math. Soc., **349**(1) (1997), 55–102.

[BM00] M. Boyle and A. Maass. *Expansive invertible onesided cellular automata*. J. Math. Soc. Japan, **52**(4) (2000), 725–740.

[CDM04] G. Cattaneo, A. Dennunzio, and L. Margara. *Solution of some conjectures about topological properties of linear cellular automata*. Theoret. Computer Sci., **325** (2004), 249–271.

[CFM00] G. Cattaneo, M. Finelli, and L. Margara. *Investigating topological chaos by elementary cellular automata dynamics.* Theoret. Computer Sci. **244** (2000), 219–241.

[CFQ95] G.G. Cattaneo, P. Flocchini and C. Quaranta Vogliotti. *An effective classification of elementary cellular automata*, SIF Conf. Proc. National Workshop on Nonlinear Dynamics, Editrice Compositori Bologna. **48** (1995), 69–78.

[CFMM00] G. Cattaneo, E. Formenti, G. Manzini and L. Margara. *Ergodicity, transitivity, and regularity for linear cellular automata over* $\mathbb{Z}_m$. Theoret. Computer Sci. **233**(1-2) (2000), 147–164.

[CFMM97] G. Cattaneo, E. Formenti, L. Margara and J. Mazoyer. *A shift-invariant metric on* $S^{\mathbb{Z}}$ *inducing a nontrivial topology.* Lecture Notes in Comput. Sci. 1295, 179–188. Springer, Berlin, 1997.

[CM96] B. Codenotti and L. Margara. *Transitive Cellular Automata are Sensitive*. Amer. Math. Monthly **103** (1996), 58–62.

[Con70] J. Conway. *Mathematical games*. Sci. Amer. (1970), 120–123.

[Cov80] E.M. Coven. *Topological entropy of block maps*. Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), 590–594 .

[CH79] E.M. Coven and G.A. Hedlund. *Periods of some non-linear shifts registers*. J. Combin. Theory Set A **27** (1979), 186-197.

[CPY89] K. Culik, II, J. Pachl, and S. Yu. *On the limit sets of cellular automata*. SIAM J. Comput., **18**(4) (1989), 831–842.

[CY88] K. Culik II and S. Yu. *Undecidability of CA classification schemes*. Complex Systems, **2**(2) (1988), 177–190.

[DM08] P. Di Lena and L. Margara. *Computational complexity of dynamical systems : the case of cellular automata*. Information and Computation, **206** (2008), 1104–1116.

[Dow97] T.Downarowicz. *The royal couple conceals their mutual relationship : a noncoalescent Toeplitz flow*. Israel J. Math. **97** (1997), 239–251.

[Dur98] B. Durand. Global properties of cellular automata. In E. Goles and S. Martinez, editors, Cellular Automata and Complex Systems. Kluwer, 1998.

[FD08] F. Farina and A. Dennunzio. *A predator-prey CA with parasitic interactions and environmentals effects*. Fundamenta Informaticae, **83** (2008), 337–353.

[Gil87] R.H. Gilman. *Classes of linear automata*. Ergodic Theor. Dynam. Sys., **7** (1987), 105-118.

[Gil88] R.H. Gilman. *Periodic behavior of linear automata*, Lecture Notes in Mathematics Dynamical Systems 1342, 216–219. Springer, New York,1988.

[Hed69] G. Hedlund. *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical systems*. Math. Syst. Theory, **4**(3) (1969), 320–375.

[HMM03] B. Host, A. Maass, and S. Martinez. *Uniform Bernoulli measure in dynamics of permutative cellular automata with algebraic local rules*. Discrete Contin. Dyn. Syst., **9**(6) (2003), 1423–1446 .

[Hur90a] M. Hurley. *Attractors in cellular automata*. Ergodic Theor. Dynam. Systems, **10**(1) (1990), 131–140.

[Hur90b] M. Hurley. *Ergodic aspects of cellular automata*. Ergodic Theory Dynam. Systems, **10**(4) (1990), 671–685.

[Hur92] M. Hurley. *Attractors in restricted cellular automata*. Proc. Amer. Math. Soc,**115**(2) (1992), 563–571.

[Ish92] S. Ishii. *Measure-theoretic approach to the classification of cellular automata*. Discrete Appl. Math., **39**(2) (1992), 125–136 .

[INO83] M. Ito, N. Osato, and M. Nasu. *Linear Cellular Automata over* $\mathbb{Z}_m$. J. Comput. System Sci. 27, 125-i˜0, 1983.

[Kar90] J. Kari. *Reversibility of 2D cellular automata is undecidable*, Physica D **45** (1990), 379–385.

[Kar94] J. Kari. *Rice's theorem for the limit sets of cellular automata*, Theoret. Comput. Sci. **127** (1994), 229–254.

[Kit98] B.P. Kitchens. Symbolic Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Kle97] R. Kleveland. *Mixing properties of one-dimensional cellular automata*. Proc. Amer. Math. Soc. **125**(6), (1997), 1755–1766.

[Kur97] P. Kůrka. Languages, *equicontinuity and attractors in cellular automata*. Ergodic Theor. Dynam. Syst. **(17)** (1997), 229–254.

[Kur05] P. Kůrka. *On the measure attractor of a cellular automaton*. Discrete Contin.Dyn. Syst. (2005), 524–535.

[Kur03] P. Kůrka. Topological and symbolic dynamics. Cours spécialisés, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[KM00] P. Kůrka and A. Maass. *Limit sets of cellular automata associated to probability measures*. J. Statist. Phys., **100**(5-6) (2000), 1031–1047.

[KM02] P. Kůrka and A. Maass. *Stability of subshifts in cellular automata*. Fund. Inform., **52**(1-3) (2002), 143–155.

[Lin84] D.A. Lind, *Applications of ergodic theory and sofic systems to cellular automata*, Physica 10D (1984), 36–44.

[Lin87] D.A. Lind. *Entropies of automorphisms of a topological Markov shift*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 589–595.

[MM98] A. Maass and S. Martinez. *On Cesàro limit distribution of a class of permutative cellular automata*. J. Statist. Phys., **90** (1-2) (1998), 435–452.

[MK76] A. Maruoka and M. Kimura. *Condition for injectivity of global maps for tessellation automata*. Information and Control **32** (2) (1976), 158–162.

[Moo05] T.K. Subrahmonian Moothathu. *Homogeneity of surjective cellular automata*. Discrete Contin. Dyn. Sys., **13** (1) (2005), 195–202.

[Nas95] M. Nasu. *Textile systems for endomorphisms and automorphisms of the shift*, Mem. Amer. Math. Soc. **114(546)** (1995) viii- 215.

[Oli02] N. Ollinger. Automates cellulaires : structures. Thèse de doctorat de l'École normale supérieure de Lyon, décembre 2002. Informatique Fondamentale.

[Pet89] K. Petersen. Ergodic theory, volume 2 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Piv05] M. Pivato. *Invariant measures for bipermutative cellular automata*. Discrete Contin. Dyn. Sys., **12(4)** (2005), 723–736.

[Piv08] M. Pivato. *The ergodic theory of cellular automata*. Mathematical basis of cellular automata, Encyclopedia of Complexity and System Science. Springer Verlag, 2008.

[Rap98] I. Rapaport. Ordre induit sur les automates cellulaires par l'opération de regroupement. Thèse de doctorat de l'École normale supérieure de Lyon, juin 1998. Informatique Fondamentale.

[RS91] T.D. Rogers, and M. Shirvani. *On ergodic one-dimensional cellular automata*. Comm. Math. Phys.**136** (3) (1991), 599–605.

[Sab06] M. Sablik. Etude de l'action conjointe d'un automate cellulaire et du décalage : Une approche topologique et ergodique. Thèse de doctorat de l'université de la Méditerranée, Faculté des Sciences de Luminy, Marseille. 2006.

[She92a] M.A. Shereshevsky. *Ergodic properties of certain surjective cellular automata*. Monatsh. Math. **114**(3-4) (1992), 305–316.

[She92b] M.A. Shereshevsky. *Lyapunov exponents for one-dimensional cellular automata*. J. Nonlinear Sci. **2**(1) (1992), 1–8.

[She93] M.A. Shereshevsky. *Expansiveness, entropy and polynomial growth for groups acting on subshifts by automorphisms.* Indag. Math. (N.S.) **4**(2) (1993), 203–210.

[She96] M.A. Shereshevsky. *On continuous actions commuting with actions of positive entropy*. Colloq. Math. **70**(2) (1996), 265–269.

[She97] M.A. Shereshevsky. *K-property of permutative cellular automata*. Indag. Math. (N.S.) **8**(3) (1997) 411–416.

[SA93] M.A. Shereshevsky and V.S. Afraimovich. *Bipermutative cellular automata are topologically conjugate to the one-sided Bernoulli shift*. Random Comput. Dynam. **1** (1) (1993), 91–98.

[The05] G. Theyssier. Automates cellulaires : un modèle de complexités. PhD thesis Ecole Normale Supérieure de Lyon, décembre 2005. Informatique Fondamentale.

[Tis00] P. Tisseur. *Cellular automata and Lyapunov exponents*. Nonlinearity, **13**(5) :1547–1560, 2000.

[Tis08] P. Tisseur. *A low complexity class of cellular automata*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.I 346.(2008).

[VN51] J. Von Neumann. *The general and logical theory of automata*. In Cerebral Mechanisms in Behavior. The Hixon Symposium, pages 1–31 ; discussion, 32–41. John Wiley and Sons Inc., New York, N. Y., 1951.

[Wal82] P.Walters. An introduction to ergodic theory, Graduate Texts in Mathematics 79. Springer-Verlag, New York, 1982.

[Wil75] S.J. Willson. *On the Ergodic Theory of Cellular Automata*. Math. Sys. Th. **9**(2) (1975),132–141.

[Wol84] S. Wolfram. *Universality and complexity in cellular automata*. Phys. D, **10**(1-2) (1984), 1–35.

[Zus69] K. Zuse. Rechnender raum. Elektronische Datenverarbeitung, (vol. 8) :336–344,1967.