

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Mathématiques de la région Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

DISCIPLINE : Théorie des Nombres

THÈSE DE DOCTORAT SUR TRAVAUX

soutenue le 11/12/2013

par

Marco DE IESO

Analyse p -adique et complétés unitaires universels pour $GL_2(F)$

Directeur de thèse : Christophe BREUIL Professeur (Université Paris-Sud 11)

Composition du jury :

<i>Président du jury :</i>	Guy HENNIART	Professeur (Université Paris-Sud 11)
<i>Rapporteurs :</i>	Laurent BERGER	Professeur (ENS de Lyon)
	Ehud DE SHALIT	Professeur (Ebrew University)
<i>Examineurs :</i>	Jean-François DAT	Professeur (Université Paris 6)
	Ariane MÉZARD	Professeur (Université Paris 6)



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Soit p un nombre premier. Les résultats de cette thèse s'inscrivent dans le cadre du programme de Langlands p -adique. Lorsque V est une représentation p -adique de dimension 2 du groupe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, on sait lui associer une représentation p -adique continue $B(V)$ de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Si F est une extension finie non triviale de \mathbb{Q}_p , la question d'associer des représentations p -adiques de $\text{GL}_2(F)$ aux représentations p -adiques de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ dans l'esprit d'une correspondance locale à la Langlands s'annonce beaucoup plus délicate.

Dans ce texte, nous considérons des espaces de Banach p -adiques, munis d'une action linéaire continue de $\text{GL}_2(F)$, qui sont des complétions unitaires universelles de certaines représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $\text{GL}_2(F)$. Celles-ci sont susceptibles de jouer un rôle important dans une éventuelle correspondance de Langlands locale p -adique pour $\text{GL}_2(F)$.

Le résultat principal de cette thèse est démontré dans le Chapitre 3 et généralise des résultats antérieurs de Berger et Breuil. Il consiste en une description explicite de ces complétés unitaires universels à l'aide des fonctions continues sur F d'un certain type. Pour ce faire, nous introduisons dans le Chapitre 2 des espaces de Banach de fonctions de classe C^r , où r est un nombre rationnel positif, et leurs espaces duaux de distributions d'ordre r . Nous construisons une base de Banach et nous donnons un critère de prolongement des formes linéaires définies sur un espace de fonctions localement \mathbb{Q}_p -polynomiales en distributions d'ordre r . Ce faisant, nous généralisons des résultats classiques dus à Amice-Vélu et Vishik.

Dans le Chapitre 4, nous exhibons des cas de non nullité pour les complétions unitaires universelles considérées par construction explicite de réseaux invariants. Cela donne de nouveaux cas de la conjecture proposée par Breuil et Schneider sur l'équivalence entre l'existence de normes invariantes sur certaines représentations localement algébriques de $\text{GL}_d(F)$ et l'existence de certaines représentations de de Rham de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$.

Abstract

Let p be a prime. The subject of this thesis is the p -adic Langlands correspondence. If V is a p -adic representation of dimension 2 of the group $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, it is known how to associate to it a continuous p -adic representation $B(V)$ of $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. If F is a non-trivial finite extension of \mathbb{Q}_p , the issue of associating p -adic representations of $\text{GL}_2(F)$ to p -adic representations of dimension 2 of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ in the spirit of a local Langlands correspondence appears much more delicate.

In this text we consider a class of p -adic Banach spaces, endowed with a continuous linear action of $\text{GL}_2(F)$, which are obtained as universal unitary completions of certain locally \mathbb{Q}_p -analytic representations of $\text{GL}_2(F)$. Such representations are likely to play an important role in a future local p -adic Langlands correspondence for $\text{GL}_2(F)$.

The main result of this thesis is proved in Chapter 3 and generalizes some previous results of Berger and Breuil. It consists in an explicit description of these universal unitary completions by means of a certain class of continuous functions on F . In order to do this, we introduce in Chapter 2 a class of Banach spaces of functions of class C^r , where r is a positive rational number, as well as their dual spaces of distributions of order r . We build a Banach base and we give a criterion for telling when a linear form defined on a space of locally \mathbb{Q}_p -polynomial functions extends to a distribution of order r . As a consequence, we generalize some classical results due to Amice-Vélu and Vishik.

In Chapter 4 we exhibit cases of non-nullity for these universal unitary completions, by an explicit construction of invariant lattices. This also provides new instances of the Breuil-Schneider conjecture about the equivalence between the existence of invariant norms on certain locally algebraic representations of $\text{GL}_d(F)$ and the existence of certain De Rham representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus profonds à mon directeur de thèse, Christophe Breuil. Il a accepté de diriger mon mémoire de Master 2, puis cette thèse de doctorat. Je lui suis reconnaissant de m'avoir proposé un sujet qui s'est révélé profond et riche en développement ainsi que d'avoir partagé avec moi, toujours avec enthousiasme, ses immenses culture et intuition mathématiques. Ses remarques et ses critiques constructives sur les versions préliminaires de ce texte ont énormément contribué à améliorer la clarté de l'exposition et la rigueur dans les démonstrations. Sans sa grande disponibilité et sa patience, cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour.

Je souhaite remercier Laurent Berger et Ehud de Shalit pour avoir accepté la tâche peu gratifiante de rapporter ce travail, ainsi que Jean-François Dat, Guy Henniart et Ariane Mézard de participer à mon jury de thèse. C'est à la fois un grand plaisir et un grand honneur. J'aimerais plus particulièrement remercier Laurent Berger et Guy Henniart : les cours auxquels j'ai eu l'occasion de participer durant le trimestre galoisien m'ont permis de mieux appréhender mon domaine de recherche.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance et mon amitié à Arno, Benjamin, Caroline, Chun hui, Enno, Gabriel, Giovanni, Przemyslaw, Ramla, Shen, Tony, Yongquan et Vito pour avoir toujours montré un intérêt pour mon travail ainsi que pour plusieurs discussions très stimulantes sur certains points de cette thèse. Un grand merci à Ramla pour tous ses conseils et pour avoir toujours pris le temps de m'aider avec la rédaction de la thèse.

Je voudrais mentionner dans ces remerciements mon Professeur de lycée, Luisa Bari, qui m'a encouragé à poursuivre dans la voie scientifique, ainsi que mes Professeurs de l'Université de Padoue, qui ont joué un rôle très important dans ma formation mathématique.

Ces trois dernières années j'ai pu bénéficier de conditions de travail idéales et de l'ambiance du laboratoire de mathématiques d'Orsay. J'en remercie tous les membres, mais surtout Valerie Lavigne pour sa gentillesse et pour sa disponibilité constantes.

Depuis mon arrivée à Paris en Septembre 2008, j'ai eu la chance de faire connaissance avec des gens magnifiques et qui m'ont toujours mis de bonne humeur. Merci Agnese, Alan, Benedetta, Carlotta, Caterina, Chiara, Federica, Federico, Gloria, Guido, Julia, Kinga, Liviana, Marie, Martina, Matteo, Raphael, Stella, Taj pour toutes les soirées passées en votre compagnie.

J'exprime enfin ma profonde reconnaissance à ma mère et à mon père, pour leur soutien sans faille tout au long de ces années. Je tiens également à exprimer ma gratitude à mon frère et à ma soeur pour leur encouragements constants.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	9
1.1. Quelques motivations historiques	9
1.2. Présentation des résultats obtenus	10
1.2.1. Notations	10
1.2.2. Espaces de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F	11
1.2.3. Sur certains complétés unitaires universels explicites pour $\mathrm{GL}_2(F)$	13
1.2.4. Existence de normes invariantes pour GL_2	15
1.3. Questions et perspectives de recherche	17
2. Espaces de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F	19
2.1. Préliminaires	19
2.1.1. Introduction	19
2.1.2. Notations	20
2.1.3. Énoncé des résultats	20
2.2. Fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F	22
2.2.1. Définition	22
2.2.2. Premières propriétés	26
2.3. Lien avec les fonctions localement analytiques	32
2.3.1. Espaces de fonctions localement \mathbb{Q}_p -analytiques	32
2.3.2. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe C^r	34
2.3.3. Construction de sous-espaces fermés	40
2.4. Dualité	41
2.4.1. Distributions d'ordre r	42
3. Sur certains complétés unitaires universels explicites pour $\mathrm{GL}_2(F)$	45
3.1. Introduction, notations et énoncé des résultats	45
3.1.1. Introduction	45
3.1.2. Notations	46
3.1.3. Énoncé des résultats	46
3.1.4. Plan de l'article	49
3.2. Préliminaires	49
3.2.1. Rappels d'analyse fonctionnelle non archimédienne	49
3.2.2. Complétés unitaires universels	50

3.3. Rappels sur les fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F	51
3.3.1. Définitions et compléments	51
3.3.2. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe C^r	54
3.3.3. Distributions d'ordre r	55
3.4. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$	56
3.4.1. Généralités	56
3.4.2. Rappels sur les induites localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$	56
3.4.3. Une $\mathrm{GL}_2(F)$ -représentation de Banach	58
3.5. Réseaux	62
3.5.1. Deux conditions nécessaires de non nullité	62
3.5.2. Passage au dual	64
3.6. Preuve du Théorème principal	67
3.6.1. Preuve de $(A) \implies (B)$	68
3.6.2. Preuve de $(B) \implies (A)$	70
3.6.3. Exemple	76
4. Existence de normes invariantes pour GL_2	79
4.1. Introduction, notations et énoncé des résultats	79
4.1.1. Introduction	79
4.1.2. Notations	80
4.1.3. Énoncé des résultats	81
4.2. Préliminaires	82
4.2.1. Rappels sur l'arbre de Bruhat-Tits	82
4.2.2. Rappels sur les algèbres de Hecke	84
4.3. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$	85
4.3.1. Représentations \mathbb{Q}_p -algébriques de $\mathrm{GL}_2(F)$	85
4.3.2. Réseaux	88
4.3.3. Formulaire	89
4.4. Un critère de séparation	90
4.4.1. Le résultat principal	90
4.4.2. Conséquences	98
Bibliographie	103

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Quelques motivations historiques

Soit p un nombre premier. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale p -adique entre certaines représentations continues de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de Banach munies d'une action continue unitaire de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Cette correspondance, appelée correspondance de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, a été initiée par Breuil [11, 12], et a été établie de manière fonctorielle par Colmez [25, 24], Berger et Breuil [8], et Paškūnas [50]. Elle possède trois propriétés de compatibilité importantes :

- la compatibilité à la réduction modulo p [6] ;
- la compatibilité à la correspondance de Langlands "classique" [34, 25] ;
- la compatibilité local-global avec la cohomologie étale complétée [34].

Ces deux dernières propriétés ont déjà eu des applications remarquables. Par exemple, Kisin montre dans [51] que la compatibilité classique/ p -adique implique, sous des hypothèses techniques faibles, la conjecture sur les multiplicités modulaires de Breuil-Mézard [19]. Combinée avec la preuve de la conjecture de modularité de Serre par Khare-Wintenberger-Kisin, la compatibilité local-global d'Emerton permet alors de prouver la conjecture de Fontaine-Mazur, qui caractérise les représentations de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ provenant des formes modulaires classiques. Pour plus de détails sur la construction de la correspondance de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et sur les applications mentionnées ci-dessus, nous renvoyons le lecteur aux exposés de Berger et Breuil au séminaire Bourbaki [7, 15].

Si F est maintenant une extension finie non triviale de \mathbb{Q}_p , il est naturel de se demander comment associer des représentations p -adiques de $\text{GL}_2(F)$ aux représentations p -adiques de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ dans l'esprit d'une correspondance locale à la Langlands. Cette question est encore très peu comprise (voir [16] pour une vue d'ensemble), et la théorie modulo p pour $\text{GL}_2(F)$, qui semble *a priori* plus accessible que le cas p -adique, s'annonce déjà beaucoup plus compliquée que lorsque $F = \mathbb{Q}_p$. Les résultats de Paškūnas [48], Hu [41], Breuil-Paškūnas [21] et Schraen [60] dans ce sens montrent que l'étude des représentations lisses irréductibles admissibles de $\text{GL}_2(F)$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ devient très subtile.

Néanmoins, certains résultats du cas $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ peuvent être généralisés même s'ils ne suffisent pas pour conduire aux bonnes représentations de $\text{GL}_2(F)$ à savoir celles apparaissant dans la cohomologie étale complétée. L'un d'entre eux, qui est au coeur de cette thèse, consiste

à donner une description explicite du complété unitaire universel de certaines représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques, et à prouver sa non nullité.

Pour ce faire, nous introduisons dans le Chapitre 2 certains espaces de Banach de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F , où r est un nombre rationnel positif ou nul, et donnons un critère de prolongement des formes linéaires sur un espace de fonctions localement \mathbb{Q}_p -polynomiales en distributions d'ordre r , généralisant ainsi des résultats classiques d'Amice-Vélu [2] et Vishik [65]. Ce critère constitue un argument clé dans la preuve du résultat principal de ce texte, donné dans le Chapitre 3, qui décrit le complété unitaire universel de certaines représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques à l'aide d'espaces de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Le Chapitre 4 contient certains cas de non nullité, et apporte en particulier de nouvelles réponses positives à la conjecture proposée par Breuil et Schneider dans [20].

1.2. Présentation des résultats obtenus

1.2.1. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p et une extension finie F de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On choisit une extension finie E de \mathbb{Q}_p , qui sera le corps des coefficients de nos représentations et qui vérifie la condition suivante :

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p],$$

où $S \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{alg}}(F, E)$.

Si L désigne F ou E , on note \mathcal{O}_L l'anneau des entiers de L , ϖ_L une uniformisante de \mathcal{O}_L et $k_L = \mathcal{O}_L/(\varpi_L)$ son corps résiduel. On désigne par $q = p^f$ le cardinal de k_F et par e l'indice de ramification de F sur \mathbb{Q}_p , de sorte que $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$. La valuation p -adique val_F sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est normalisée par $\text{val}_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$ et on pose $|x| = p^{-\text{val}_F(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$.

On désigne par G le groupe $\text{GL}_2(F)$, par K le groupe $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ qui est, à conjugaison près, l'unique sous-groupe ouvert compact maximal de G , et par P le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G .

Soit S' un sous-ensemble de S . Pour tous $|S'|$ -uplets $\underline{n}_{S'} = (n_\sigma)_{\sigma \in S'}$ et $\underline{m}_{S'} = (m_\sigma)_{\sigma \in S'}$ d'entiers positifs ou nuls, on introduit les notations suivantes :

- (i) $\underline{n}_{S'}! \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} n_\sigma!$;
- (ii) $|\underline{n}_{S'}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in S'} n_\sigma$;
- (iii) $\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'} \stackrel{\text{déf}}{=} (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S'}$;
- (iv) $\underline{n}_{S'} \leq \underline{m}_{S'}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S'$;
- (v) $\binom{\underline{n}_{S'}}{\underline{m}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\underline{n}_{S'}!}{\underline{m}_{S'}!(\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'})!}$;
- (vi) pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

Pour alléger l'écriture, nous noterons \underline{n} au lieu de \underline{n}_S tout $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls.

Si V est un E -espace vectoriel topologique, on note V^\vee son dual topologique muni de la topologie forte.

1.2.2. Espaces de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F . — Le Chapitre 2 est consacré à l'étude d'une nouvelle notion de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F , où r est un nombre rationnel positif ou nul.

Lorsque $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$, on dispose d'une bonne théorie de C^r -différentiabilité qui a essentiellement été développée par Schikhof [53], Amice-Vélu [2] et Vishik [65]. Rappelons brièvement la définition de fonction de classe C^r sur \mathbb{Z}_p .

Soit $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow E$ une fonction. Pour tout entier n positif ou nul, on pose :

$$a_n(f) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(n-i).$$

Définition 1.2.1. — Soit r un nombre rationnel positif ou nul. On dit que f est de classe C^r sur \mathbb{Z}_p si $n^r |a_n(f)|$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Si $F \neq \mathbb{Q}_p$, on dispose de plusieurs généralisations de cette définition. Une première idée naturelle, utilisant le fait que \mathcal{O}_F est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang fini, est la suivante.

Posons $d \stackrel{\text{déf}}{=} [F : \mathbb{Q}_p]$, fixons un d -uplet $\vec{r} = (r_i)_{1 \leq i \leq d}$ de nombres rationnels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^d r_i = r$ et une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p : les applications cordonnées dans cette base définissent alors un isomorphisme de \mathbb{Z}_p -modules $\theta: \mathbb{Z}_p^d \rightarrow \mathcal{O}_F$. Dans ce cas, on pose :

$$C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E) \stackrel{\text{déf}}{=} \{f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, f \circ \theta \in \widehat{\bigotimes}_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)\},$$

où $\widehat{\bigotimes}_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$ désigne le séparé complété par rapport à la semi-norme produit de l'espace $\bigotimes_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$. Ce n'est cependant pas le bon espace à étudier, essentiellement pour les deux raisons suivantes :

- (i) l'espace $C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E)$ dépend de \vec{r} et pas seulement de $|\vec{r}| = r$;
- (ii) l'espace $C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E)$ dépend du choix d'une base de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p .

Dans le Chapitre 2, nous proposons une autre définition de cet espace qui fait intervenir tous les plongements de F dans E et peut se résumer par la formule suivante : “une fonction $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r si et seulement si $f(x+y)$ admet un développement limité à l'ordre $[r]$ en tout x , et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément en x ”.

Définition 1.2.2. — On dit que $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r sur \mathcal{O}_F s'il existe pour $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$, des fonctions bornées $D_{\underline{i}}f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ telles que, si l'on définit $\varepsilon_{f,[r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow E$ par :

$$\varepsilon_{f,[r]}(x, y) = f(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!},$$

et que l'on pose, pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$C_{f,r}(h) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x, y)| q^{rh},$$

alors $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$.

Notons $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ le E -espace vectoriel des fonctions de \mathcal{O}_F dans E qui sont de classe C^r . On peut munir $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ d'une norme naturelle, que l'on note $\|\cdot\|_{C^r}$, qui en fait un espace de Banach sur E .

Exemple 1.2.3. — Les fonctions localement \mathbb{Q}_p -analytiques sont en particulier de classe C^r sur \mathcal{O}_F .

Le résultat principal du Chapitre 2, inspiré par [17, §5], généralise certains résultats classiques prouvés par Amice-Vélu [2] et Vishik [65]. Pour l'énoncer, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Fixons J une partie de S et $\underline{d}_{S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons :

$$J' \stackrel{\text{déf}}{=} J \prod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}.$$

Notons $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ l'espace des fonctions de \mathcal{O}_F dans E qui sont localement analytiques selon les plongements σ appartenant à J et localement polynomiales de degré au plus d_σ selon les autres plongements σ , et $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ son adhérence dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Si $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ qui sont localement \mathbb{Q}_p -polynomiales de degré au plus N . Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme linéaire

$$\mu: \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow E$$

s'étende en une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ et si $f \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ on note, pour $a \in \mathcal{O}_F$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} f\right) = \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} f(z) \mu(z),$$

où $\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F}$ désigne la fonction caractéristique de $a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F$.

Théorème 1.2.4. — (i) Soit $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$. Il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{i} \in \mathbb{N}^S$ vérifiant $i_\sigma \leq d_\sigma$ pour tout $\sigma \in S \setminus J'$, on ait :

$$(1.2.1) \quad \left| \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

(ii) Soit $N \geq [r]$ un entier et soit $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Supposons qu'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{i} \in I_{\leq N}$ vérifiant $i_\sigma \leq d_\sigma$ pour tout $\sigma \in S \setminus J$, on ait :

$$(1.2.2) \quad \left| \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

Alors μ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

La méthode utilisée pour prouver le Théorème 1.2.4 généralise celle donnée par Colmez pour \mathbb{Q}_p [23, Théorème II.3.2]. Le (i) se déduit d'une estimation de la norme C^r des fonctions $\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}}$. Le (ii), plus subtil, repose de manière cruciale sur la construction d'une base de Banach de l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

1.2.3. Sur certains complétés unitaires universels explicites pour $\mathrm{GL}_2(F)$. — Soit G un groupe de Lie p -adique de dimension finie. Dans [55, 57], Schneider et Teitelbaum ont défini et débuté l'étude de la catégorie des représentations localement analytiques de G . Une telle représentation est par exemple fournie par le sous-espace des vecteurs localement analytiques d'un espace de Banach p -adique B muni d'une action continue unitaire de G . Rappelons qu'un vecteur $v \in B$ est dit localement analytique si l'application de G dans B définie par $g \mapsto gv$ est localement analytique au sens de [55]. Schneider et Teitelbaum ont montré [57] que si G est le groupe des \mathbb{Q}_p -points d'un groupe réductif défini sur \mathbb{Q}_p et si B est une représentation de Banach unitaire admissible non nulle de G , alors le sous-espace B^{an} des vecteurs localement \mathbb{Q}_p -analytiques de B est dense dans B . Cela suggère que les représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques devraient avoir un grand rôle à jouer dans le programme de Langlands p -adique (voir par exemple [44, 24] pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$).

Si l'on dispose d'une représentation localement analytique I de G , il est intéressant d'étudier son *complété unitaire universel*. Rappelons [33, §1] qu'un complété unitaire universel de I est la donnée d'un espace de Banach p -adique I^\wedge muni d'une action continue unitaire de G , et d'une application E -linéaire, continue et G -équivariante ι de I sur I^\wedge telle que toute application E -linéaire, continue et G -équivariante $I \rightarrow W$, avec W un G -Banach unitaire se factorise de façon unique à travers ι . *Grosso modo*, cela revient à dire que I^\wedge est le complété p -adique de I par rapport à un réseau ouvert *minimal* stable par G . Mentionnons qu'en général, il est très difficile de déterminer si I^\wedge est non nul. Cette notion a été formalisée par Emerton, une fois des exemples de complétés unitaires universels construits par Breuil [12, 14] et Berger-Breuil [8].

Rappelons ici le cas cristallin de [8], qui a été le point de départ de cette thèse.

Soit V une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension 2, absolument irréductible, cristalline, φ -semi-simple et de poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$ avec $k \geq 2$. On sait [22, §5.5] qu'une telle représentation est uniquement déterminée par un couple d'éléments (α, β) de E^\times . Dans ce cas, il se trouve que le $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -Banach unitaire $B(V)$ associé à V par la correspondance de Langlands p -adique est le complété unitaire universel de la représentation localement algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2} E^2 \otimes \mathrm{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1}))$, où $\mathrm{Sym}^{k-2} E^2$ désigne la représentation algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $(0, k-1)$, $\mathrm{nr}(\alpha^{-1})$ (resp. $\mathrm{nr}(p\beta^{-1})$) désigne le caractère non ramifié envoyant p sur α^{-1} (resp. $p\beta^{-1}$), et $\mathrm{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}(\mathrm{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\beta^{-1}))$ désigne la représentation lisse irréductible non ramifiée de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée par la correspondance locale de Hecke à la représentation de Weil déduite de V par [37].

Plus précisément, les techniques introduites par Colmez permettent de démontrer l'existence d'un isomorphisme P -équivariant entre $B(V)^\vee$ et $(\varprojlim_\psi D(V))^b$, où $D(V)$ est le (φ, Γ) -module associé à V et où la limite projective consiste en les suites ψ -compatibles bornées d'éléments de $D(V)$. On peut ainsi prouver que $B(V)$ est non nul, topologiquement irréductible et admissible. Pour prouver l'existence de cet isomorphisme, une étape importante consiste à décrire explicitement de $B(V)$ comme espace de fonctions continues sur \mathbb{Q}_p d'un certain type. Pour l'obtenir nous avons besoin de quelques notations supplémentaires. Notons $B(\alpha)$ l'espace de Banach des fonctions $f: \mathbb{Q}_p \rightarrow E$ telles que :

- (i) $f|_{\mathbb{Z}_p}$ définit un élément de $C^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, E)$;
- (ii) $(\alpha p\beta^{-1})^{\mathrm{val}(z)} z^{k-2} f(1/z)|_{\mathbb{Z}_p - \{0\}}$ se prolonge sur \mathbb{Z}_p en une fonction de $C^{\mathrm{val}(\alpha)}(\mathbb{Z}_p, E)$.

On peut munir $B(\alpha)$ d'une action continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ qui en fait un $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -Banach. Notons ensuite $L(\alpha)$ l'adhérence dans $B(\alpha)$ du sous- E -espace vectoriel engendré par les fonctions :

$$z \mapsto z^j, \\ z \mapsto \begin{cases} (\alpha p \beta^{-1})^{\mathrm{val}(z-a)} (z-a)^{k-2-j} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a; \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{Q}_p$, et $j \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq j < \mathrm{val}(\alpha)$.

On dispose alors du résultat suivant [8, Théorème 4.3.1].

Théorème 1.2.5. — *Il existe un isomorphisme G -équivariant d'espaces de Banach p -adiques :*

$$B(V) \xrightarrow{\sim} B(\alpha)/L(\alpha).$$

Soit maintenant F une extension finie de \mathbb{Q}_p et V une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ cristalline, de dimension 2 sur E , et à poids de Hodge-Tate distincts. On ne dispose pas d'une construction générale qui permet d'associer à V une représentation de Banach unitaire $B(V)$ déterminant V à isomorphisme près (voir [16] pour un état des lieux). Cependant, en utilisant principalement les travaux de Schraen [59] et de Frommer [38] sur la filtration de Jordan-Hölder des induites paraboliques localement \mathbb{Q}_p -analytiques, Breuil [17] parvient à définir une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique $\Pi(V)$ de G dont il commence l'étude. Cette construction, qui généralise une description explicite des vecteurs localement analytiques de $B(V)$ lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ [44, 24], ne permet pas de reconstruire V mais elle donne une première approximation de la représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique qui devrait être associée à V . Plus précisément [17, §4], la représentation $\Pi(V)$ est une somme directe de représentations de la forme

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) = \left(\bigotimes_{\sigma \in S \setminus J} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \right)^{J-an},$$

où :

- J est une partie de S et $\underline{d}_{S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls ;
- χ_1, χ_2 sont deux caractères multiplicatifs localement J -analytiques de F^\times dans E^\times ;
- $(\mathrm{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2)^{J-an}$ désigne l'induite parabolique localement J -analytique, c'est-à-dire l'espace des fonctions localement J -analytiques $f: G \rightarrow E$ telles que $f(bg) = (\chi_1 \otimes \chi_2)(b)f(g)$ sur lequel G agit par translation usuelle à droite ;
- pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ désigne la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2 \otimes_{F, \sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma: \mathrm{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$.

Le Chapitre 3 fournit une description explicite du complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Avant d'énoncer nos résultats, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Posons $r = -\mathrm{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))$ et supposons $r \geq 0$. Notons alors

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}, \quad \chi'_1 = \chi_1, \quad \chi'_2 = \chi_2 \prod_{\sigma \in J' \setminus J} \sigma^{d_\sigma}.$$

On désigne aussi par $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ le E -espace de Banach des fonctions $f: F \rightarrow E$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ définit un élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$;
(ii) $\chi'_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur \mathcal{O}_F en une fonction de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

Cet espace peut être muni d'une action de G qui en fait une G -représentation de Banach. Notons alors $L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ l'adhérence dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ du sous- E -espace vectoriel engendré par les fonctions :

$$z \mapsto z^{\underline{n}_{S \setminus J'}} z^{\underline{m}_{J'}} ,$$

$$z \mapsto \begin{cases} \chi'_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} (z-a)^{-\underline{m}_{J'}} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a ; \end{cases}$$

avec $a \in F$, $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ et $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J'}| + |\underline{m}_{J'}|) > 0$.

Notons $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ le complété unitaire universel de la représentation $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Le résultat principal du Chapitre 3, qui généralise le Théorème 1.2.5, est alors le suivant.

Théorème 1.2.6. — *Il existe un isomorphisme G -équivariant d'espaces de Banach p -adiques :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) / L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) .$$

La première étape consiste à remarquer que les représentations $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ et $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ ont le même complété unitaire universel. La deuxième étape, qui est le coeur de la preuve, consiste à montrer qu'une boule ouverte (de centre 0) du Banach dual de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge$ s'identifie aux distributions μ dans le dual fort de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ et tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ on ait :

$$(1.2.3) \quad \left| \int_{D(a, n)} (z-a)^{\underline{n}_{S \setminus J'}} (z-a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)}$$

$$(1.2.4) \quad \left| \int_{F \setminus D(a, n+1)} \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} (z-a)^{-\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J'}| + |\underline{m}_{J'}| - r)} ,$$

avec $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Un examen approfondi utilisant de manière cruciale le Théorème 1.2.4 montre alors que les conditions (1.2.3) et (1.2.4) sélectionnent exactement les formes linéaires dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$ qui s'annulent sur les fonctions de $L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

1.2.4. Existence de normes invariantes pour GL_2 . — Dans cette partie, nous donnons quelques cas où $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ est non nul avec $J = \emptyset$, ce qui fournit en particulier de nouveaux exemples non triviaux vérifiant la conjecture de Breuil et Schneider [20].

Celle-ci, qui généralise une conjecture antérieure de Schneider et Teitelbaum [58], peut se résumer comme suit : “L'existence d'une filtration faiblement admissible sur un (φ, N) -module D est équivalente à l'existence d'une norme $\mathrm{GL}_d(F)$ -invariante sur une représentation localement algébrique naturellement associée à D ”.

Rappelons l'énoncé précis de la conjecture pour $\mathrm{GL}_2(F)$. Fixons :

- un couple $(\alpha, \beta) \in E^\times \times E^\times$ avec $(\alpha\beta^{-1})^f \notin \{q, q^{-1}\}$;
- un $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$.

Posons $\rho_{\underline{d}} = \bigotimes_{\sigma \in S} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ et notons (r, V) la représentation du groupe de Weil-Deligne de F de dimension 2 sur E , réductible, non ramifiée et envoyant le Frobenius arithmétique sur la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$. Par la correspondance de Langlands locale *modifiée* [20, §4], on peut associer à (r, V) la représentation lisse de $\text{GL}_2(F)$ définie par

$$\pi = \text{Ind}_P^G(\text{nr}(\alpha^{-1}) \otimes \text{nr}(p\beta^{-1})),$$

où, pour tout $\mu \in E^\times$, on note $\text{nr}(\mu): F^\times \rightarrow E^\times$ le caractère trivial sur \mathcal{O}_F^\times qui envoie ϖ_F sur μ^f . Notons que l'hypothèse sur le couple (α, β) nous assure que π est irréductible.

Soit D un φ -module sur $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. On peut lui associer explicitement une représentation de Weil-Deligne par la méthode décrite dans [37]. On la note $\text{WD}(\varphi, D)$ et l'on note $\text{WD}(\varphi, D)^{ss}$ sa F -semi-simplifiée [30, §8.5]. Si l'on pose $D_F = D \otimes_{F_0} F$, l'isomorphisme $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \prod_{\sigma: F \hookrightarrow E} E$ envoyant $h \otimes e$ sur $(\sigma(h)e)_{\sigma_0}$ induit alors un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$D_F \simeq \prod_{\sigma: F \hookrightarrow E} D_{F,\sigma},$$

où l'on a posé $D_{F,\sigma} = (0, 0, \dots, 0, 1_\sigma, 0, \dots, 0) \cdot D_F$. Ainsi, la donnée d'une filtration décroissante exhaustive séparée de D_F par des sous- $(F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E)$ -modules $(\text{Fil}^i D_F)_{i \in \mathbb{Z}}$ (non nécessairement libres) équivaut à la donnée, pour tout $\sigma: F \hookrightarrow E$, d'une filtration décroissante exhaustive séparée de $D_{F,\sigma}$ par des sous- $(F \otimes_{F,\sigma} E)$ -espaces vectoriels $(\text{Fil}^i D_{F,\sigma})_{i \in \mathbb{Z}}$. Une telle filtration $(\text{Fil}^i D_F)_{i \in \mathbb{Z}}$ est *admissible* si son polygone de Hodge est en-dessous de son polygone de Newton (voir la Section 4.4.2 pour plus de détails).

La conjecture de Breuil et Schneider dans le cas de $\text{GL}_2(F)$ s'énonce alors comme suit.

Conjecture 1.2.7. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante, i.e. une norme p -adique $\|\cdot\|$ telle que $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in \rho_{\underline{d}} \otimes \pi$.*
- (ii) *Il existe un φ -module D de rang 2 tel que*

$$\text{WD}(\varphi, D)^{ss} = (r, V)$$

et une filtration faiblement admissible $(\text{Fil}^i D_{F,\sigma})_{i \in \mathbb{Z}}$, sur D_F telle que

$$\text{Fil}^i D_{F,\sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{F,\sigma} \neq 0 \iff i \in \{-d_\sigma - 1, 0\}.$$

Cette conjecture est prouvée pour $F = \mathbb{Q}_p$ [8, 24], mais cette preuve repose de manière cruciale sur la théorie des (φ, Γ) -module de Fontaine, ce qui empêche pour l'instant son adaptation directe à un cadre plus général. Mentionnons que dans [40], Hu démontre en toute généralité implication (i) \Rightarrow (ii). Par ailleurs, des résultats partiels ont été obtenus par Breuil-Schneider [20] et Sorensen [62].

Dans le Chapitre 4, nous démontrons la Conjecture 1.2.7 sous certaines hypothèses techniques portant sur les poids de la filtration. Fixons $\iota: F \hookrightarrow E$ un plongement de F dans E et notons φ_0 le Frobenius arithmétique sur F_0 . Posons

$$S^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{\sigma \in S, d_\sigma \neq 0\}$$

et, pour l dans $\{0, \dots, f-1\}$, notons :

$$J_l \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sigma \in S^+, \sigma([\zeta]) = \iota \circ \varphi_0^l([\zeta]) \text{ pour tout } \zeta \in k_F \right\}.$$

Remarquons que si F est non ramifiée, on a $|J_l| \leq 1$ pour tout l .

Si $i \in \mathbb{Z}$, on désigne par \bar{i} l'unique représentant de $i \bmod f$ dans $\{0, \dots, f-1\}$. On pose alors, pour tout $\sigma \in J_l$:

$$v_\sigma = \inf \left\{ 1 \leq i \leq f, J_{\bar{l+i}} \neq \emptyset \right\},$$

c'est-à-dire la plus petite puissance du Frobenius φ_0 pour passer de J_l à un autre J_k non vide.

Nous démontrons alors résultat suivant.

Théorème 1.2.8. — *Supposons que le (ii) de la Conjecture 1.2.7 soit vérifié et supposons que $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$ satisfasse aux deux conditions supplémentaires suivantes :*

- (1) pour tout $l \in \{0, \dots, f-1\}$, $|J_l| \leq 1$;
- (2) pour tout $\sigma \in J_l$,

$$d_\sigma + 1 \leq p^{v_\sigma}.$$

Alors la représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante.

Il est relativement aisé, en reprenant les idées de [11], de décrire la représentation localement algébrique $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ par induction compacte. On en définit alors naturellement un sous- $\mathcal{O}_E[K]$ -module de type fini qui l'engendre sur E , puis nous montrons que si les conditions (1) et (2) du Théorème 1.2.8 sont vérifiées, alors ce réseau est séparé.

Posons $\chi_1 = \text{nr}(\alpha^{-1})$ et $\chi_2 = \text{nr}(\beta^{-1})$. Une conséquence importante du Théorème 1.2.8 est alors donnée par le résultat suivant.

Corollaire 1.2.9. — *Supposons que $J = \emptyset$ et que \underline{d} vérifie les conditions (1) et (2) du Théorème 1.2.8. Alors $I(\chi, \emptyset, \underline{d}) \neq 0$.*

Mentionnons que Vignéras [64] a montré la non-nullité du complété unitaire universel de la représentation $I(\chi, \emptyset, \underline{0})$ lorsque χ_1 et χ_2 sont deux caractères modérément ramifiés. Une preuve récente du même résultat, reposant de manière essentielle sur l'étude du modèle de Kirillov associé à cette représentation, a été donnée par De Shalit et Kazhdan [42].

1.3. Questions et perspectives de recherche

Les résultats démontrés dans ce texte suggèrent qu'il peut être intéressant de travailler selon les deux axes suivants :

- étendre les résultats que nous avons obtenus pour $\text{GL}_2(F)$ au cadre du groupe $\text{GL}_n(F)$, où n est un entier positif ≥ 3 ;
- commencer l'étude des complétés unitaires universels de certaines extensions de séries principales de $\text{GL}_2(F)$.

Pour préciser les deux points mentionnés ci-dessus, nous introduisons quelques notations supplémentaires. Fixons un entier $n \geq 3$. On désigne par $T_n(F)$ le tore déployé des matrices diagonales de $\text{GL}_n(F)$ et par $P_n(F)$ le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de $\text{GL}_n(F)$. Fixons, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, un caractère $\chi_i : F^\times \rightarrow E^\times$ localement J -analytique. Choisissons un caractère algébrique η de $(\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} T_n)(\mathbb{Q}_p)$ qui soit un poids dominant et puisse donc être écrit comme un produit $\prod_{\sigma \in S \setminus J} \eta_\sigma$, avec η_σ un caractère σ -algébrique de $T_n(F)$. Notons $V(\eta)$ la représentation irréductible algébrique de $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \text{GL}_n$

dont le plus haut poids vis-à-vis de $\text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} \mathbf{P}_n$ est η , considérons la représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique suivante de $\text{GL}_n(F)$:

$$I \stackrel{\text{déf}}{=} V(\eta) \otimes \left(\text{Ind}_{\mathbf{P}_n(F)}^{\text{GL}_n(F)} \chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_n \right)^{J-an}.$$

Une question naturelle consiste alors à chercher une description explicite du complété unitaire universel de I à l'aide des espaces de Banach des fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F (en plusieurs variables) introduits dans le Chapitre 2 et des récents travaux de Nagel [47]. Il est ensuite naturel de s'intéresser à d'éventuels cas de non nullité, en commençant par le cas localement algébrique (i.e. $J = \emptyset$).

Rappelons que P est le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de $\text{GL}_2(F)$. Fixons un plongement $\sigma: F \hookrightarrow E$, et deux caractères $\chi_1, \chi_2: F^\times \rightarrow E^\times$ localement σ -analytiques "suffisamment génériques". Une question potentiellement très intéressante dans le cadre du programme de Langlands p -adique pour $\text{GL}_2(F)$ consiste à étudier le complété unitaire universel des extensions de séries principales de la forme

$$0 \rightarrow \left(\text{Ind}_P^{\text{GL}_2(F)} \chi_1 \otimes \chi_2 \right)^{\sigma-an} \rightarrow \Sigma \rightarrow \left(\text{Ind}_P^{\text{GL}_2(F)} \chi_2 \sigma(z) |z|_F \otimes \chi_1 \sigma(z)^{-1} |z|_F^{-1} \right)^{\sigma-an} \rightarrow 0$$

construites dans [43] par Kohlhaase. Il serait par exemple déjà intéressant de savoir si les complétés unitaires universels de ces extensions sont ou non admissibles.

CHAPITRE 2

ESPACES DE FONCTIONS DE CLASSE C^r SUR \mathcal{O}_F

2.1. Préliminaires

2.1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier. La correspondance de Langlands p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, commencée sous l’impulsion de Breuil [12, 11] et établie par Colmez [25] et Paškūnas [50] à la suite des travaux de Colmez [24] et Berger-Breuil [8], est une bijection entre certaines représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Une étape importante dans l’établissement de cette correspondance pour la classe des représentations galoisiennes de dimension 2, absolument irréductibles et devenant cristallines sur une extension abélienne de \mathbb{Q}_p , est la description explicite du complété unitaire universel de certaines induites paraboliques localement algébriques [8, Théorème 4.3.1]. C’est là que l’analyse p -adique, et plus précisément l’espace de Banach des fonctions de classe C^r sur \mathbb{Z}_p , où r désigne un nombre rationnel positif ou nul et \mathbb{Z}_p l’anneau des entiers p -adiques, intervient de manière cruciale. Une question naturelle est la généralisation de cette étape pour certaines représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de \mathbb{Q}_p [28]. Pour cela, nous avons été amenés à introduire et étudier une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F .

Dans le cas où $F = \mathbb{Q}_p$ on dispose d’une bonne théorie de C^r -différentiabilité, qui a été développée essentiellement par Schikhof [53], Barsky [3], Amice-Vélu [2] et Vishik [65]. Nous renvoyons le lecteur à [23] pour un exposé des résultats principaux sur l’espace des fonctions de classe C^r sur \mathbb{Z}_p et son dual des distribution d’ordre r . Pour ce qui est des fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F , où F est une extension finie de \mathbb{Q}_p , on peut choisir une base de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p et l’utiliser comme on pense, mais ce procédé, qui n’est pas canonique, ne donne pas la bonne notion. Dans cet article nous proposons une autre définition, qui fait intervenir les plongements de F dans E , où E désigne une extension finie de \mathbb{Q}_p , et qui peut se résumer par la formule : “ une fonction $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est dite de classe C^r si $f(x + y)$ a un développement limité à l’ordre $[r]$ en tout x , et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément (en x)”. Le premier résultat principal que nous obtenons est la construction d’une base de Banach de l’espace $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ des fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F , qui consiste d’une famille dénombrable de fonctions localement \mathbb{Q}_p -polynomiales. Le deuxième, qui porte sur son dual topologique, donne une condition nécessaire et suffisante pour qu’une forme linéaire définie sur un espace de fonctions localement \mathbb{Q}_p -polynomiales convenable s’étende en une distribution d’ordre r , ce qui généralise des résultats classiques d’Amice-Vélu [2] et Vishik [65].

Mentionnons que Nagel [45, 46], en s'appuyant sur les travaux de Schikhof [53] et De Smedt [32], a également introduit une théorie de C^r -différentiabilité en plusieurs variables pour une large classe de domaines, par exemple pour ceux qui s'écrivent sous la forme \mathbb{Z}_p^n , où n est un entier positif. Étant donné que cette notion est stable par rapport à des isomorphismes linéaires, il serait alors intéressant de comparer les deux constructions dans le cas $n = [F : \mathbb{Q}_p]$ une fois que l'on a choisi une base de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p . Signalons que l'absence, à présent, des critères d'Amice-Vélu pour l'espace introduit par Nagel, fait qu'il n'est pas trivial de comparer les deux approches.

2.1.2. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p et une extension finie F de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On désignera toujours par E une extension finie de \mathbb{Q}_p qui vérifie :

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p], \text{ où } S \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{alg}}(F, E).$$

Si L désigne l'un des corps F ou E , on note \mathcal{O}_L son anneau des entiers, on en fixe une uniformisante ϖ_L et l'on note $k_L = \mathcal{O}_L/(\varpi_L)$ son corps résiduel. On pose $f = [k_F : \mathbb{F}_p]$, $q = p^f$ et l'on désigne par e l'indice de ramification de F sur \mathbb{Q}_p , de sorte que $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$.

La valuation p -adique val_F sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est normalisée par $val_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$ et l'on pose $|x| = p^{-val_F(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$.

Si $n \in \mathbb{N}$ et $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq, =\}$ notons :

$$I_{*n} = \left\{ (i_\sigma)_{\sigma \in S} \in \mathbb{N}^S, \sum_{\sigma \in S} i_\sigma * n \right\}.$$

Si $\underline{n} = (n_\sigma)_{\sigma \in S}$ et $\underline{m} = (m_\sigma)_{\sigma \in S}$ sont des $|S|$ -uplets d'entiers positifs ou nuls, nous posons :

- (i) $\underline{n}! \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S} n_\sigma!$;
- (ii) $|\underline{n}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in S} n_\sigma$;
- (iii) $\underline{n} - \underline{m} \stackrel{\text{déf}}{=} (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S}$;
- (iv) $\underline{n} \leq \underline{m}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S$;
- (v) $\binom{\underline{n}}{\underline{m}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\underline{n}!}{\underline{m}!(\underline{n}-\underline{m})!}$;
- (vi) pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

Une norme p -adique sur un E -espace vectoriel V est une fonction $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

- (i) $\|v + w\| \leq \sup(\|v\|, \|w\|)$ pour tout $v, w \in V$;
- (ii) $\|\lambda v\| \leq |\lambda| \|v\|$ pour tout $\lambda \in E, v \in V$;
- (iii) $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Un espace de Banach p -adique sur E est un E -espace vectoriel topologique complet dont la topologie provient d'une norme p -adique. Dans ce texte tous les espaces de Banach sont p -adique et tels que $\|B\| \subseteq |E|$.

Si V est un E -espace vectoriel topologique, on note V^\vee son dual topologique muni de la topologie forte [54, §9].

2.1.3. Énoncé des résultats. — Dans la Section 2.2 nous introduisons d'abord la notion de fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F , où r est un nombre rationnel positif ou nul. On dit qu'une fonction $f : \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r s'il existe une famille de fonctions bornées $D_{\underline{i}}f : \mathcal{O}_F \rightarrow E$, pour $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, telles que $f(x + y)$ a un développement limité à l'ordre $[r]$ en tout x et si le

reste est $o(|y|^r)$ uniformément (en x). Montrer l'unicité de cette famille de fonctions requiert une estimation technique sur le maximum des valeurs absolues des coefficients dominants d'une fonction \mathbb{Q}_p -algébrique, qui utilise de façon cruciale le théorème d'Artin d'indépendance algébrique des homomorphismes. Dans une deuxième partie on étudie quelques propriétés de l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, E)$: nous montrons que c'est une algèbre de Banach sur E et que, pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, l'opérateur $D_{\underline{i}}$ définit une application continue de C^r dans $C^{r-|\underline{i}|}$. Ensuite, nous donnons une condition suffisante sur une fonction $h: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$ pour que $f \circ h$ soit de classe C^r et nous montrons que si l'on fixe une telle fonction alors l'application qui associe à toute $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ la fonction $f \circ h$ est continue.

Soit J une partie de S et $(d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Nous considérons dans la Section 2.3 le sous-espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ de l'espace des fonctions localement \mathbb{Q}_p -analytiques qui sont localement analytiques selon les plongements σ dans J et localement polynomiales de degré au plus d_σ selon les plongements σ dans $S \setminus J$. Nous montrons que cet espace s'injecte de façon continue dans l'espace des fonctions de classe C^r (Corollaire 2.3.4) et nous en décrivons l'adhérence dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ en utilisant les opérateurs de dérivation $D_{\underline{i}}$ (Corollaire 2.3.16). On note $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ cette adhérence, où J' désigne le sous-ensemble de S défini par :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}.$$

Une deuxième partie de cette section est consacrée à la construction d'une base de Banach (qui dépend de r) de l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Dans le cas $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$ mentionnons que cette base coïncide avec celle construite par Van der Put [63] pour l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p (ou ce qui revient au même pour $C^0(\mathbb{Z}_p, E)$) et généralisée par Colmez [23] pour $C^r(\mathbb{Z}_p, E)$ avec r un nombre rationnel quelconque. Signalons que pour l'espace des fonctions continues sur \mathcal{O}_F cette base a déjà été construite par De Shalit [31, §2]. Donnons un aperçu de notre construction. Fixons un plongement $\rho: F \hookrightarrow E$. Posons $A_{-1} = \emptyset$, $A_0 = \{0\}$ et choisissons pour tout $h \in \mathbb{N}_{>0}$ un système de représentants $A_h \subset \mathcal{O}_F$ des classes de $\mathcal{O}_F / \varpi_F^h \mathcal{O}_F$ de sorte que $A_h \supset A_{h-1}$. Notons alors $A = \coprod_{h \geq 0} A_h \setminus A_{h-1}$. Pour tout $a \in A$ on définit $l(a)$ comme le plus petit entier n_0 tel que $a \in A_{n_0}$. Si $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, on note $e_{a, \underline{i}, r}$ la fonction définie par

$$z \mapsto e_{a, \underline{i}, r}(z) = \rho(\varpi_F)^{[l(a)r]} \mathbf{1}_{a + \varpi_F^{l(a)} \mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z - a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}}.$$

Théorème 2.1.1. — *La famille des $e_{a, \underline{i}, r}$, pour $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, forme une base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$.*

Pour cela on généralise la preuve de [23, I.5.14]. Plus précisément, un premier ingrédient que nous utilisons est une estimation de la norme C^r des $e_{a, \underline{i}, r}$ (Lemme 2.3.7). Un deuxième est la construction explicite, pour toute fonction $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$, d'une suite de fonctions f_h telles que f_h tend vers f dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ quand h tend vers $+\infty$ (Proposition 2.3.10). Nous terminons cette section en décrivant la sous-famille de la famille des $e_{a, \underline{i}, r}$ qui va être une base de Banach pour l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.

Dans la Section 2.4 on s'occupe des duaux topologiques des espaces considérés précédemment. Si $N \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ l'espace des fonctions localement \mathbb{Q}_p -algébriques sur \mathcal{O}_F de degré au plus N dans $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ et $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$. Le résultat principal (Théorème

2.4.2) donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ s'étende en une forme linéaire continue sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$. Cela généralise un résultat dû à Amice-Vélu [2] et Vishik [65].

Théorème 2.1.2. — (i) Soit $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$. Il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\underline{i} \in \mathbb{N}^S$ tel que $i_\sigma \leq d_\sigma$ pour tout $\sigma \in S \setminus J'$, on ait :

$$\left| \int_{a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z - a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

(ii) Soit $N \geq [r]$ un entier et soit $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee$. Supposons qu'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que, pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $\underline{i} \in I_{\leq N}$ tel que $i_\sigma \leq d_\sigma$ pour tout $\sigma \in S \setminus J$, on ait :

$$\left| \int_{a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z - a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

Alors μ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.

Le (i) est conséquence d'une estimation de la norme C^r d'une fonction localement \mathbb{Q}_p -analytique (Proposition 2.3.2). Le (ii) est plus subtil et est entièrement basé, d'après la Section 2.3, sur la connaissance d'une base de Banach explicite de l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.

2.2. Fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F

2.2.1. Définition. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Notons $[r]$ sa partie entière. On dispose de l'espace de Banach de fonctions de classe C^r sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans E . Rappelons [23] que $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow E$ est de classe C^r si $f(x + y)$ a un développement limité à l'ordre $[r]$ en tout x , et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément (en x). Dans cette section on va construire un espace de fonctions de \mathcal{O}_F dans E qui généralise cette idée. La définition que l'on donne ne dépend pas du choix d'une \mathbb{Z}_p -base de \mathcal{O}_F : elle va dépendre juste des plongements de \mathcal{O}_F dans E .

Définition 2.2.1. — On dit que $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r sur \mathcal{O}_F s'il existe des fonctions bornées $D_{\underline{i}}f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$, pour $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{f, [r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow E$ par :

$$\varepsilon_{f, [r]}(x, y) = f(x + y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}$$

et pour tout $h \in \mathbb{N}$

$$C_{f, r}(h) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f, [r]}(x, y)| q^{rh}$$

alors $C_{f, r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$.

Remarque 2.2.2. — (i) Soit f une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Alors $\varepsilon_{f, [r]}(x, 0) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{O}_F$ car, pour tout h on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f, [r]}(x, 0)| \leq \sup_{x \in \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f, [r]}(x, 0)| q^{rh} \leq C_{f, r}(h)$$

et $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$ par hypothèse. Cela implique $D_{\underline{0}}f(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{O}_F$. Comme $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$, *a fortiori* on a :

$$(2.2.1) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x, y)| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty.$$

De plus :

$$(2.2.2) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ |\underline{i}| \geq 1}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty$$

car par définition $D_{\underline{i}}f$ est une fonction bornée sur \mathcal{O}_F pour tout $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$ et $|y^{\underline{i}}| \leq q^{-h}$ pour tout $y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F$ et tout $\underline{i} \in I_{\leq [r]}, |\underline{i}| \geq 1$. On peut réécrire $\varepsilon_{f,[r]}(x, y)$ sous la forme

$$\varepsilon_{f,[r]}(x, y) = (f(x+y) - f(x)) - \sum_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ |\underline{i}| \geq 1}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}$$

et donc (2.2.1) et (2.2.2) impliquent

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |f(x+y) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty$$

c'est-à-dire f est une fonction continue. En particulier une fonction de classe C^0 est une fonction continue.

(ii) Soit f une fonction continue sur \mathcal{O}_F . Alors f est de classe C^0 sur \mathcal{O}_F . En effet, par continuité de f on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |f(x+y) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty$$

et donc si l'on pose :

$$\forall x \in \mathcal{O}_F, \quad D_{\underline{0}}f(x) = f(x)$$

on voit que $D_{\underline{0}}f$ vérifie la Définition 2.2.1 et cela permet de conclure.

Lemme 2.2.3. — Soit $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ une fonction de classe C^r . Alors f est de classe C^l pour tout $l \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $l \leq r$.

Preuve. — Il suffit de prouver que f est de classe C^l pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $l \leq [r]$. La démonstration se fait par récurrence sur $l \leq [r]$. Supposons donc que f soit de classe C^l pour un $l \in \mathbb{N}_{>0}$, $l \leq [r]$. Montrons qu'elle est de classe C^{l-1} . Comme $C_{f,l}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$, alors *a fortiori* on a

$$(2.2.3) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[l]}(x, y)| q^{(l-1)h} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty.$$

D'autre part

$$(2.2.4) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=l}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{h(l-1)} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty.$$

En effet, la fonction $D_{\underline{i}}f$ est bornée sur \mathcal{O}_F pour tout $\underline{i} \in I_{=l}$ par définition et $|y^{\underline{i}}| \leq q^{-hl}$ pour tout $y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F$, $\underline{i} \in I_{=l}$. Donc si l'on pose

$$C = \sup_{\underline{i} \in I_{=l}} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} |D_{\underline{i}}f(x)|$$

on obtient :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=l}} D_{\underline{i}} f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{h(l-1)} \leq Cq^{-h}$$

et $Cq^{-h} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow +\infty$. On peut réécrire $\varepsilon_{f,[l]}(x, y)$ sous la forme :

$$\varepsilon_{f,[l]}(x, y) = \varepsilon_{f,[l-1]}(x, y) - \sum_{\underline{i} \in I_{=l}} D_{\underline{i}} f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}.$$

Les conditions (2.2.3) et (2.2.4) impliquent

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[l-1]}(x, y)| q^{(l-1)h} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty,$$

ce qui permet de conclure. □

Lemme 2.2.4 (Unicité). — Soit $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ une fonction de classe C^r . Alors il existe une unique famille de fonctions

$$\{D_{\underline{i}} f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq[r]}\}$$

qui vérifie la Définition 2.2.1.

Preuve. — Supposons que

$$\{F_{\underline{i}}: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq[r]}\} \quad \text{et} \quad \{G_{\underline{i}}: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq[r]}\}$$

soient deux familles de fonctions qui vérifient la Définition 2.2.1. On veut prouver que $F_{\underline{i}} = G_{\underline{i}}$ pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$. La démonstration se fait par récurrence sur $|\underline{i}|$, $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$. D'après la Remarque 2.2.2 on a $F_{\underline{0}} = f = G_{\underline{0}}$.

Soit $0 < n < [r]$. Supposons $F_{\underline{i}} = G_{\underline{i}}$ pour tout $\underline{i} \in I_{\leq n-1}$. On veut montrer que $F_{\underline{i}} = G_{\underline{i}}$ pour tout $\underline{i} \in I_{=n}$. Par l'hypothèse de récurrence on déduit que pour tout $x, y \in \mathcal{O}_F$ on a :

$$f(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq n-1}} F_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} = f(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq n-1}} G_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}.$$

Notons φ_{n-1} la fonction définie pour tout $x, y \in \mathcal{O}_F$ par :

$$\varphi_{n-1}(x, y) = f(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq n-1}} F_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}.$$

D'après la preuve du Lemme 2.2.3 on sait que

$$(2.2.5) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \varphi_{n-1}(x, y) - \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} F_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{hn} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty$$

et

$$(2.2.6) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \varphi_{n-1}(x, y) - \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} G_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{hn} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

Fixons $x \in \mathcal{O}_F$. Supposons

$$G_{\underline{i}}(x) = F_{\underline{i}}(x) + \alpha_{\underline{i}} \quad \alpha_{\underline{i}} \in E.$$

Alors, par (2.2.6) on a :

$$\sup_{y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \left(\varphi_{n-1}(x, y) - \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} F_{\underline{i}}(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right) - \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{hn} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty,$$

et donc, en utilisant (2.2.5), on déduit que

$$(2.2.7) \quad \sup_{y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{hn} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow +\infty.$$

De plus, comme $\sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}$ est une fonction polynomiale homogène de degré n on a :

$$(2.2.8) \quad \sup_{y \in \varpi_F^{h+e} \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| = q^{-en} \sup_{y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right|.$$

Par (2.2.7) et (2.2.8) on déduit que

$$\forall h \in \mathbb{N}, \quad \sup_{y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{=n}} \alpha_{\underline{i}} \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right| q^{nh} = 0,$$

et donc, d'après le théorème d'Artin d'indépendance algébrique des homomorphismes, que $\alpha_{\underline{i}} = 0$ pour tout $\underline{i} \in I_{=n}$, d'où le résultat. \square

Notons $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ l'ensemble des fonctions de \mathcal{O}_F dans E qui sont de classe C^r . On munit $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ de la norme $\|\cdot\|_{C^r}$ définie par :

$$\|f\|_{C^r} = \sup \left(\sup_{\underline{i} \leq [r]} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}} f(x)}{\underline{i}!} \right|, \sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f, [r]}(x, y)|}{|y|^r} \right)$$

ce qui en fait un espace de Banach sur E .

Exemple 2.2.5. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Soit $\underline{m} = (m_{\sigma})_{\sigma \in S}$ un $|S|$ -uplet d'entiers positifs. Considérons la fonction f de \mathcal{O}_F dans E définie par $z \mapsto z^{\underline{m}}$. Posons :

$$(2.2.9) \quad \frac{D_{\underline{i}} f(z)}{\underline{i}!} = \begin{cases} \binom{\underline{m}}{\underline{i}} z^{\underline{m}-\underline{i}} & \text{si } \underline{i} \leq \underline{m} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{O}_F$ on a :

$$(2.2.10) \quad \varepsilon_{f, [r]}(x, y) = \begin{cases} \sum_{\substack{l \leq \underline{m} \\ [l] \geq [r]+1}} \binom{\underline{m}}{l} y^l x^{\underline{m}-l} & \text{si } r < |\underline{m}| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En revenant à la Définition 2.2.1 on voit que f est bien de classe C^r . D'après (2.2.9) on a :

$$\sup_{z \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}} f(z)}{\underline{i}!} \right| \leq \sup_{z \in \mathcal{O}_F} \left| \binom{\underline{m}}{\underline{i}} z^{\underline{m}-\underline{i}} \right| \leq 1$$

et d'après (2.2.10) on a :

$$\sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f, [r]}(x, y)|}{|y|^r} \leq \sup_{\substack{l \leq \underline{m} \\ [l] \geq [r]+1}} \sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{\left| \binom{\underline{m}}{l} y^l x^{\underline{m}-l} \right|}{|y|^r} \leq 1.$$

On en déduit que l'on a $\|f\|_{C^r} \leq 1$ et comme $\sup_{z \in \mathcal{O}_F} |f(z)| = 1$ on a $\|f\|_{C^r} = 1$.

Remarque 2.2.6. — Notons $d = [F : \mathbb{Q}_p]$. Comme \mathcal{O}_F est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang d , il est naturel de considérer une autre notion de fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Fixons un d -uplet $\vec{r} = (r_i)_{1 \leq i \leq d}$ de nombres rationnels positifs ou nuls tels que $\sum_{i=1}^d r_i = r$ ainsi qu'une base $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p . Notons $\theta: \mathbb{Z}_p^d \rightarrow \mathcal{O}_F$ l'isomorphisme de \mathbb{Z}_p -modules défini par

$$\theta(a_1, \dots, a_d) = \sum_{i=1}^d a_i e_i$$

et, pour tout $z \in \bigotimes_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$, définissons $\|z\|$ comme l'infimum des $\sup_{j \in J} \|v_{j_1}\|_{C^{r_1}} \cdots \|v_{j_d}\|_{C^{r_d}}$ sur toutes les écritures possibles de z sous la forme $\sum_{j \in J} v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_d}$. On munit ainsi $\bigotimes_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$ d'une semi-norme $\|\cdot\|$ et l'on note alors $\widehat{\bigotimes}_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$ le séparé complété de l'espace $\bigotimes_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$ pour cette semi-norme. Posons :

$$C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E) = \{f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, f \circ \theta \in \widehat{\bigotimes}_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)\},$$

que l'on munit de la topologie induite par celle définie sur $\widehat{\bigotimes}_{i=1}^d C^{r_i}(\mathbb{Z}_p, E)$. Il se trouve que $C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E)$ n'est pas le bon espace que l'on veut étudier essentiellement pour deux raisons :

- (i) l'espace $C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E)$ dépend de \vec{r} et pas seulement de $|\vec{r}| = r$;
- (ii) l'espace $C^{\vec{r}}(\mathcal{O}_F, E)$ dépend du choix d'une base de \mathcal{O}_F sur \mathbb{Z}_p .

2.2.2. Premières propriétés. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et f une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Alors, d'après le Lemme 2.2.4 il existe une unique famille de fonctions

$$\{D_{\underline{i}}f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq [r]}\}$$

qui vérifie la Définition 2.2.1. Dans la suite on veut montrer que si l'on choisit une fonction de cette famille, disons $D_{\underline{i}}f$, alors elle est de classe $C^{r-|\underline{i}|}$. Nous aurons besoin du lemme technique suivant qui utilise une estimation sur le maximum des valeurs absolues des coefficients dominants d'une fonction \mathbb{Q}_p -algébrique.

Lemme 2.2.7. — Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $a_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in I_{\leq N}$ une famille d'éléments de E . Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $h \geq n_0$ on a :

$$(2.2.11) \quad \sup_{\underline{i} \in I_{\leq N}} |a_{\underline{i}}| q^{-h|\underline{i}|} \leq C \sup_{z \in \mathfrak{o}_F^h \setminus \mathfrak{o}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{\leq N}} a_{\underline{i}} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right|.$$

Preuve. — Soit $P: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ la fonction définie par :

$$P(z) = \sum_{\underline{i} \in I_{\leq N}} a_{\underline{i}} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!}.$$

Il existe un entier $k \geq 1$ tel que P peut se décomposer de façon unique comme une somme de fonctions :

$$P(z) = P_{N_1}(z) + P_{N_2}(z) + \cdots + P_{N_k}(z),$$

où tout P_{N_j} est homogène de degré N_j avec $0 \leq N_1 < N_2 < \cdots < N_k = N$.

D'après (2.2.8) on déduit que pour tout P_{N_j} non nul il existe $0 < A_{N_j} < B_{N_j}$ tels que

$$A_{N_j} q^{-hN_j} \leq \sup_{z \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |P_{N_j}| \leq B_{N_j} q^{-hN_j}.$$

Cela implique que pour h assez grand le membre de gauche de l'inégalité (2.2.11) est déterminé par P_{N_1} .

Il suffit alors de montrer le lemme lorsque P est homogène de degré N . Or, d'après le théorème d'Artin d'indépendance algébrique des homomorphismes on sait que l'application qui envoie P sur le vecteur des $a_{\underline{i}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie. Comme sur un espace de Banach de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, on peut conclure. \square

Proposition 2.2.8. — Soit $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Alors

(i) $D_{\underline{i}}f \in C^{r-|\underline{i}|}(\mathcal{O}_F, E)$ pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$. De plus il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ on a :

$$\|D_{\underline{i}}f\|_{C^{r-|\underline{i}|}} \leq C \|f\|_{C^r}.$$

(ii) Soient \underline{i} et \underline{j} deux éléments de $I_{\leq[r]}$ tels que $|\underline{i}| + |\underline{j}| \leq [r]$. On a :

$$D_{\underline{j}}(D_{\underline{i}}f) = D_{\underline{i}+\underline{j}}f.$$

Preuve. — Supposons $x \in \mathcal{O}_F$ et $y, z \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F$. En développant $\sigma(y+z)^{i_\sigma}$ pour tout $\sigma \in S$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{(y+z)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} &= \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}f(x) \sum_{\underline{k} \leq \underline{i}} \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \frac{z^{\underline{i}-\underline{k}}}{(\underline{i}-\underline{k})!} \\ &= \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \sum_{\substack{\underline{k} \in \mathbb{N}^S \\ |\underline{k}| \leq [r]-|\underline{i}|}} D_{\underline{k}+\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!}. \end{aligned}$$

On peut alors réécrire $\varepsilon_{f,[r]}(x, y+z) - \varepsilon_{f,[r]}(x+y, z)$ sous la forme

$$(2.2.12) \quad - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \left(D_{\underline{i}}f(x+y) - \sum_{\substack{\underline{k} \in \mathbb{N}^S \\ |\underline{k}| \leq [r]-|\underline{i}|}} D_{\underline{k}+\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \right).$$

D'après les inégalités

$$|\varepsilon_{f,[r]}(x, y+z)| q^{rh} \leq C_{f,r}(h) \quad \text{et} \quad |\varepsilon_{f,[r]}(x+y, z)| q^{rh} \leq C_{f,r}(h)$$

on obtient la majoration

$$(2.2.13) \quad |\varepsilon_{f,[r]}(x, y+z) - \varepsilon_{f,[r]}(x+y, z)| \leq C_{f,r}(h) q^{-rh}.$$

Notons $\varepsilon_{D_{\underline{i}}f,[r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow E$, pour $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ et $h \in \mathbb{N}$, la fonction définie par :

$$(2.2.14) \quad \varepsilon_{D_{\underline{i}}f,[r]}(x, y) = D_{\underline{i}}f(x+y) - \sum_{\substack{\underline{k} \in \mathbb{N}^S \\ |\underline{k}| \leq [r]-|\underline{i}|}} D_{\underline{k}+\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!}.$$

On veut montrer que pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)}| q^{h(r-|\underline{i}|)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

Soit $x \in \mathcal{O}_F$ et $y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F$. Par le Lemme 2.2.7 appliqué à $\sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!}$ il existe une constante $C(x, y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et un entier positif $n(x, y)$ tels que pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ et tout $l \geq n(x, y)$ on a :

$$(2.2.15) \quad |\varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)}| q^{-l|\underline{i}|} \leq C(x, y) \sup_{z \in \varpi_F^l \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)} \frac{z^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right|.$$

Remarquons que l'application de $\mathcal{O}_F \times \varpi_F^h \mathcal{O}_F$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par $(x, y) \mapsto C(x, y)$ est localement constante. Notons C son maximum. De même, l'application de $\mathcal{O}_F \times \varpi_F^h \mathcal{O}_F$ dans \mathbb{N} définie par $(x, y) \mapsto n(x, y)$ est localement constante. Notons n son maximum. En utilisant les inégalités (2.2.15) et (2.2.13) on déduit alors que pour tout $h \geq n$ on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)}| q^{-h|\underline{i}|} \leq C q^{-hr} C_{f,r}(h)$$

et donc, pour tout $h \geq n$ on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, y)}| q^{h(r-|\underline{i}|)} \leq C C_{f,r}(h).$$

On en déduit l'appartenance de $D_{\underline{i}f}$ à $C^{r-|\underline{i}|}(\mathcal{O}_F, E)$ et la majoration

$$\|D_{\underline{i}f}\|_{C^{r-|\underline{i}|}} \leq C \|f\|_{C^r}.$$

Par ce qui précède la fonction $D_{\underline{j}}(D_{\underline{i}f})$, pour $\underline{j} \in I_{\leq[r]-|\underline{i}|}$, est le terme de $\varepsilon_{D_{\underline{i}f, [r]}(x, \cdot)$ qui est facteur de $\frac{y^{\underline{j}}}{\underline{j}!}$, c'est-à-dire

$$D_{\underline{j}}(D_{\underline{i}f}) = D_{\underline{i}+\underline{j}}f,$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 2.2.9. — L'application $D_{\underline{i}}$ de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ dans $C^{r-|\underline{i}|}(\mathcal{O}_F, E)$ définie par $f \mapsto D_{\underline{i}}f$ est bien définie et continue.

Preuve. — Il s'agit d'une conséquence immédiate du (i) de la Proposition 2.2.8. \square

Rappelons qu'une E -algèbre de Banach est une E -algèbre normée (c'est-à-dire vérifiant $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ et $\|1\| \leq \|1\|$) telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit un espace de Banach.

Lemme 2.2.10. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. L'espace $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ est une E -algèbre de Banach.

Preuve. — Soient $f, g \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Posons pour tout $x, y \in \mathcal{O}_F$:

$$\nu_{fg, [r]}(x, y) = f(x+y)g(x+y) - \left(\sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right) \left(\sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{j}}g(x) \frac{y^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right).$$

Si on additionne et on soustrait le terme $f(x+y) \left(\sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{j}}g(x) \frac{y^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right)$, on obtient :

$$(2.2.16) \quad \nu_{fg, [r]}(x, y) = f(x+y) \varepsilon_{g, [r]}(x, y) + \left(\sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{j}}g(x) \frac{y^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right) \varepsilon_{f, [r]}(x, y).$$

Comme f est une fonction bornée sur \mathcal{O}_F et $g \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ on a :

$$(2.2.17) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |f(x+y)\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|q^{rh} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

De manière analogue, comme les fonctions $D_{\underline{j}}g$, pour tout $\underline{j} \in I_{\leq[r]}$, sont bornées sur \mathcal{O}_F par définition et $g \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ on a :

$$(2.2.18) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \left(\sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{j}}g(x) \frac{y^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right) \varepsilon_{f,[r]}(x,y) \right| q^{rh} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

Et donc, par (2.2.17) et (2.2.18) on déduit

$$(2.2.19) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\nu_{fg,[r]}(x,y)|q^{rh} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, on peut réécrire $\nu_{fg,[r]}(x,y)$ pour tout $x,y \in \mathcal{O}_F$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x+y)g(x+y) - \sum_{\underline{k} \in I_{\leq[r]}} \left(\sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{i}} D_{\underline{i}}f(x)D_{\underline{j}}g(x) \right) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!} + \\ + \sum_{\underline{k} \in I_{>[r]}} \left(\sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{i}} D_{\underline{i}}f(x)D_{\underline{j}}g(x) \right) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\forall x,y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{fg,[r]}(x,y) = f(x+y)g(x+y) - \sum_{\underline{k} \in I_{\leq[r]}} \left(\sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{i}} D_{\underline{i}}f(x)D_{\underline{j}}g(x) \right) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!}$$

Par (2.2.19) et puisque l'on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \left| \sum_{\underline{k} \in I_{>[r]}} \left(\sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{i}} D_{\underline{i}}f(x)D_{\underline{j}}g(x) \right) \frac{y^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \right| q^{rh} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty$$

on déduit

$$(2.2.20) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{fg,[r]}(x,y)|q^{rh} \rightarrow 0 \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty.$$

La condition (2.2.20) implique que fg est de classe C^r et l'égalité suivante

$$\forall \underline{k} \in I_{\leq[r]}, \quad D_{\underline{k}}(fg) = \sum_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \binom{\underline{k}}{\underline{i}} D_{\underline{i}}f D_{\underline{j}}g.$$

Il nous reste à montrer l'inégalité suivante :

$$(2.2.21) \quad \forall f,g \in C^r(\mathcal{O}_F, E), \quad \|fg\|_{C^r} \leq \|f\|_{C^r} \|g\|_{C^r}.$$

(i) On a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{k}}(fg)(x)}{\underline{k}!} \right| \leq \sup_{\underline{i}+\underline{j}=\underline{k}} \left(\sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}f(x)}{\underline{i}!} \right| \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{j}}g(x)}{\underline{j}!} \right| \right) \leq \|f\|_{C^r} \|g\|_{C^r}.$$

(ii) En utilisant l'égalité (2.2.16) on en déduit la minoration

$$\sup_{x,y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{fg,[r]}(x,y)|}{|y|^r} \leq \|f\|_{C^r} \|g\|_{C^r}.$$

En revenant à la définition de $\|\cdot\|_{C^r}$ on déduit de (i) et de (ii) l'inégalité (2.2.21). \square

2.2.2.1. Composition de fonctions. — Soit $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ une fonction de classe C^r et h une fonction de \mathcal{O}_F dans \mathcal{O}_F . Dans ce paragraphe nous donnons une condition suffisante sur h pour que $f \circ h: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ soit de classe C^r .

Commençons par la définition suivante.

Définition 2.2.11. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. On dit que $h: \mathcal{O}_F \rightarrow F$ est de classe $C^{r,id}$ sur \mathcal{O}_F s'il existe des fonctions bornées $h^{(i)}: \mathcal{O}_F \rightarrow F$, pour $0 \leq i \leq [r]$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{h,[r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow F$ par :

$$\varepsilon_{h,[r]}(x, y) = f(x + y) - \sum_{i=0}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$C_{h,r}(k) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^k \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{h,[r]}(x, y)| q^{rk}$$

alors $C_{h,r}(k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Le même raisonnement donné dans la Remarque 2.2.2 nous dit qu'une fonction $h: \mathcal{O}_F \rightarrow F$ de classe $C^{r,id}$ est continue.

Lemme 2.2.12 (Unicité). — Soit h une fonction de \mathcal{O}_F dans F de classe $C^{r,id}$. Alors il existe une unique famille de fonctions

$$\{h^{(i)}: \mathcal{O}_F \rightarrow F, 0 \leq i \leq [r]\}$$

qui vérifie la Définition 2.2.11.

Preuve. — La preuve étant similaire à celle du Lemme 2.2.4, nous y renvoyons le lecteur. \square

Notons $C^{r,id}(\mathcal{O}_F, F)$ l'ensemble des fonctions de \mathcal{O}_F dans F qui sont de classe $C^{r,id}$. On munit $C^{r,id}(\mathcal{O}_F, F)$ de la norme $\|\cdot\|_{C^{r,id}}$ définie par :

$$\|h\|_{C^{r,id}} = \sup \left(\sup_{0 \leq i \leq [r]} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{h^{(i)}(x)}{i!} \right|, \sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{h,[r]}(x, y)|}{|y|^r} \right)$$

ce qui en fait un espace de Banach sur F .

Proposition 2.2.13 (Composition de fonctions). — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Si $h: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$ est une fonction de classe $C^{r,id}$ alors

- (i) $\forall f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$, $f \circ h \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$;
- (ii) l'application de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ définie par $f \mapsto f \circ h$ est continue.

Preuve. — Le cas $[r] = 0$ est immédiat et est laissé au lecteur. Supposons donc $[r] \geq 1$. Posons pour tout $x, y \in \mathcal{O}_F$:

$$(2.2.22) \quad \varepsilon_{f \circ h, [r]}(x, y) = f(h(x + y)) - \sum_{\underline{j} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{j}} f(h(x)) \frac{\left(\sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!} \right)^{\underline{j}}}{\underline{j}!}.$$

Si on additionne et on soustrait le terme $f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right)$, on obtient :

$$f(h(x+y)) - f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right) + f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right) - \sum_{\underline{j} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{j}} f(h(x)) \frac{\left(\sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right)^{\underline{j}}}{\underline{j}!}.$$

On peut réécrire $f(h(x+y)) - f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right)$ sous la forme

$$f(h(x+y)) - f(h(x+y) - \varepsilon_{h,[r]}(x,y)).$$

Comme f est une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F et donc par le Lemme 2.2.3 de classe C^1 , et $h \in C^{r,id}(\mathcal{O}_F, F)$, on a pour y suffisamment petit :

$$(2.2.23) \quad |f(h(x+y)) - f(h(x+y) - \varepsilon_{h,[r]}(x,y))| \leq (\sup_{\sigma \in S} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} |D_{e_\sigma} f(x)|) |\varepsilon_{h,[r]}(x,y)|.$$

L'inégalité (2.2.23) et le fait que h est une fonction de classe $C^{r,id}$ sur \mathcal{O}_F impliquent

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^l \mathcal{O}_F} |f(h(x+y)) - f(h(x+y) - \varepsilon_{h,[r]}(x,y))| q^{rl} \rightarrow 0 \quad \text{quand } l \rightarrow +\infty.$$

Par ailleurs, comme f est une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F alors

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^l \mathcal{O}_F} \left| f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right) - \sum_{\underline{j} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{j}} f(h(x)) \frac{\left(\sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right)^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right| q^{rl}$$

tend vers 0 quand l tend vers $+\infty$. Avec ce qui précède on en déduit :

$$(2.2.24) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^l \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f \circ h, [r]}(x,y)| q^{rl} \rightarrow 0 \quad \text{quand } l \rightarrow +\infty.$$

La condition (2.2.24) implique que $f \circ h$ est une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F et que $D_{\underline{i}}(f \circ h)$ est le terme de $\varepsilon_{f \circ h, [r]}(\cdot, y)$ qui est facteur de $\frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}$.

Il nous reste à montrer le (ii).

- Par ce qui précède on a :

$$\forall \underline{i} \in I_{\leq [r]}, \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}(f \circ h)(x)}{\underline{i}!} \right| \leq \sup(1, \|h\|_{C^{r,id}}^r) \|f\|_{C^r}.$$

- Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon_{h,[r]}(x,y) \in \mathcal{O}_F$ pour tout $x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^m \mathcal{O}_F$. Par l'inégalité (2.2.23) on a :

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^m \mathcal{O}_F} |f(h(x+y)) - f(h(x+y) - \varepsilon_{h,[r]}(x,y))| |y|^{-r} \leq \|h\|_{C^{r,id}} \|f\|_{C^r}.$$

De plus, comme f est une fonction de classe C^r on a :

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^m \mathcal{O}_F} \left| f\left(h(x) + \sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right) - \sum_{\underline{j} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{j}} f(h(x)) \frac{\left(\sum_{i=1}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!}\right)^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \right| |y|^{-r} \\ & \leq \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^m \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x,y)| |y|^{-r} \\ & \leq \|f\|_{C^r}. \end{aligned}$$

- Supposons $y \notin \varpi_F^m \mathcal{O}_F$. En utilisant (2.2.22) on déduit

$$\sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \notin \varpi_F^m \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f \circ h, [r]}(x, y)|}{|y|^r} \leq q^{mr} \sup(\|f\|_{C^r}, \|f\|_{C^r} \|h\|_{C^r, id}).$$

En revenant à la définition de $\|\cdot\|_{C^r}$ on déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ telle que $\|f \circ h\|_{C^r} \leq C \|f\|_{C^r}$ pour tout $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$. D'où le résultat. \square

2.3. Lien avec les fonctions localement analytiques

2.3.1. Espaces de fonctions localement \mathbb{Q}_p -analytiques. — Soit $J \subseteq S$ et soit $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour tout $\sigma \in S \setminus J$. Nous allons rappeler la construction de l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$, puis nous montrons que cet espace s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$.

Pour $a \in \mathcal{O}_F$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{O}(a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F \rightarrow E$ de la forme

$$f(z) = \sum_{\substack{\underline{m}=(m_\sigma)_{\sigma \in S} \in \mathbb{N}^S \\ m_\sigma \leq d_\sigma \text{ si } \sigma \in S \setminus J}} a_{\underline{m}}(a)(z-a)^{\underline{m}}$$

avec $a_{\underline{m}}(a) \in E$ et $|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)} \rightarrow 0$ quand $|\underline{m}| \rightarrow +\infty$. C'est un espace de Banach sur E pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{a,n}$ définie par :

$$\|f\|_{a,n} = \sup_{\underline{m}} \left(|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)} \right).$$

Pour $h \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ telles que

$$\forall a \in \mathcal{O}_F, \quad f|_{a + \varpi_F^h \mathcal{O}_F} \in \mathcal{O}(a + \varpi_F^h \mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}).$$

On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_h}$ définie par

$$(2.3.1) \quad \|f\|_{\mathcal{F}_h} = \sup_{a \bmod \varpi_F^h} \|f|_{a + \varpi_F^h \mathcal{O}_F}\|_{a,h},$$

ce qui en fait un espace de Banach sur E . On voit immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix des représentants. De plus, on sait par [54, p. 107] que les inclusions

$$\mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}) \subseteq \mathcal{F}_{h+1}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$$

sont continues et compactes.

Définition 2.3.1. — On note $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ pour lesquelles il existe un entier positif ou nul h tel que $f \in \mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$.

On munit l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ de la topologie de la limite inductive, ce qui en fait un espace de type compact.

Proposition 2.3.2. — Pour $h \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ on a $\mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, S) \subset C^r(\mathcal{O}_F, E)$ et, quel que soit g dans $\mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, S)$ on a :

$$\|g\|_{C^r} \leq \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{rh}.$$

Preuve. — Soit $g \in \mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, S)$. Fixons un système de représentants A_h des classes de $\mathcal{O}_F/\varpi_F^h\mathcal{O}_F$. Par hypothèse on peut écrire g sous la forme

$$g(x) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^S} a_{\underline{m}}(a)(x-a)^{\underline{m}}$$

quels que soient $a \in A_h$ et $x \in a + \varpi_F^h\mathcal{O}_F$. Posons pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, tout $a \in A_h$ et tout $x \in a + \varpi_F^h\mathcal{O}_F$:

$$(2.3.2) \quad \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} = \sum_{\substack{\underline{m} \in \mathbb{N}^S \\ \underline{m} \geq \underline{i}}} a_{\underline{m}}(a) \binom{\underline{m}}{\underline{i}} (x-a)^{\underline{m}-\underline{i}}.$$

Montrons d'abord que l'on a l'inégalité suivante :

$$(2.3.3) \quad \forall x \in \mathcal{O}_F, \quad \left| \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} \right| \leq \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{h|\underline{i}|}.$$

En effet par la formule (2.3.2) on a les inégalités suivantes pour tout $a \in A_h$ et tout $x \in a + \varpi_F^h\mathcal{O}_F$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} \right| &\leq \sup_{\underline{m}} \left| a_{\underline{m}}(a) \binom{\underline{m}}{\underline{i}} (x-a)^{\underline{m}-\underline{i}} \right| \\ &\leq \sup_{\underline{m}} \left(|a_{\underline{m}}(a)| q^{-h|\underline{m}|} \right) q^{h|\underline{i}|} \\ &= \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{h|\underline{i}|}. \end{aligned}$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de $a \in A_h$ on en déduit l'inégalité pour tout $x \in \mathcal{O}_F$. Posons :

$$(2.3.4) \quad \forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{g,[r]}(x, y) = g(x+y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}g(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}.$$

Donnons d'abord une estimation de $|\varepsilon_{g,[r]}(x, y)|$ pour tout $x \in \mathcal{O}_F$ et tout $y \in \varpi_F^h\mathcal{O}_F$. En développant $g(x+y)$ pour $x \in a + \varpi_F^h\mathcal{O}_F$ on obtient :

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^S} a_{\underline{m}}(a) ((x-a) + y)^{\underline{m}} \\ &= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{N}^S} \sum_{\underline{i} \leq \underline{m}} a_{\underline{m}}(a) \binom{\underline{m}}{\underline{i}} (x-a)^{\underline{m}-\underline{i}} y^{\underline{i}}. \end{aligned}$$

La formule (2.3.2) et celle ci-dessus permettent de réécrire $\varepsilon_{g,[r]}(x, y)$ sous la forme

$$\varepsilon_{g,[r]}(x, y) = \sum_{\underline{i} \in I_{>[r]}} \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} y^{\underline{i}}.$$

Par l'inégalité (2.3.3) on a :

$$|\varepsilon_{g,[r]}(x, y)| = \sup_{\underline{i} \in I_{>[r]}} \left| \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} y^{\underline{i}} \right| \leq \sup_{\underline{i} \in I_{>[r]}} \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{(h-\text{val}_F(y)/f)|\underline{i}|} \leq \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{(h-\text{val}_F(y)/f)([r]+1)}$$

(rappelons que $q = p^f$ est la cardinalité du corps résiduel de F), d'où

$$(2.3.5) \quad |\varepsilon_{g,[r]}(x, y)| q^{r \text{val}_F(y)/f} \leq \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{(h-\text{val}_F(y)/f)([r]+1)} q^{r \text{val}_F(y)/f}.$$

Comme $-(\text{val}_F(y)/f)([r]+1)+r\text{val}_F(y)/f$ tend vers $-\infty$ quand $\text{val}_F(y) \rightarrow +\infty$, cela montre que g est de classe C^r .

La majoration $\|g\|_{C^r} \leq \|g\|_{\mathcal{F}_h} q^{rh}$ se déduit de la formule (2.3.4) et des majorations (2.3.3) et (2.3.5). \square

Définition 2.3.3. — Notons $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ l'espace $\mathcal{F}(U, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ pour $U = \mathcal{O}_F$ et $J = S$ (et donc $S \setminus J = \emptyset$) ou, autrement dit, le E -espace vectoriel des fonctions $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ localement \mathbb{Q}_p -analytiques.

Corollaire 2.3.4. — L'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$.

Preuve. — Comme l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ est muni de la topologie de la limite inductive le résultat est une conséquence immédiate de la Proposition 2.3.2. \square

2.3.2. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe C^r . — Conservons les notations du §2.3.1. Si I est un ensemble, on note $c_0(I)$ l'espace des fonctions $f: I \rightarrow E$ telles que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad |\{i \in I, |f(i)| \geq \varepsilon\}| < +\infty$$

et on le munit de la norme définie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{i \in I} |f(i)|.$$

Soit V un espace de Banach sur E . Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de V est une *base de Banach* de V si l'application de $c_0(I)$ dans V définie par $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$ est un isomorphisme d'espaces de Banach. Rappelons que tout E -espace de Banach V possède des bases de Banach [54, Proposition 10.1] et que, si $\|V\| \subseteq |E|$, il existe un ensemble I tel que V est isométrique à $(c_0(I), \|\cdot\|_\infty)$ [54, Remarque 10.2].

Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Le but de ce paragraphe est d'exhiber une agréable base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$, qui dépend de r et qui consiste d'une famille dénombrable de fonctions localement \mathbb{Q}_p -polynomiales. Si $F = \mathbb{Q}_p$ cette base coïncide avec celle construite par Van der Put [63] pour l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p , et généralisée par Colmez [23] pour r quelconque. Signalons que pour l'espace des fonctions continues sur \mathcal{O}_F cette base a déjà été construite par De Shalit [31, §2].

Posons $A_{-1} = \emptyset$ et $A_0 = \{0\}$. Choisissons pour tout $h \in \mathbb{N}_{>0}$ un système de représentants $A_h \subset \mathcal{O}_F$ des classes de $\mathcal{O}_F/\varpi_F^h \mathcal{O}_F$ de sorte que $A_h \supset A_{h-1}$ et notons

$$A = \coprod_{h \geq 0} A_h \setminus A_{h-1}.$$

On a de même $A = \bigcup_{h \geq 0} A_h$. Pour tout $a \in A$ on définit $l(a)$ comme le plus petit entier n_0 tel que $a \in A_{n_0}$. De plus, on fixe une numérotation a_1, a_2, \dots des éléments de A de sorte que si $a_m \in A_i$ et $a_n \in A_{i+1} \setminus A_i$ alors $m < n$.

Si U est un ouvert de \mathcal{O}_F alors $\mathbf{1}_U$ désigne sa fonction caractéristique.

Posons pour tout $N, h \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) = \sum_{\underline{d} \in I_{\leq N}} \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, \emptyset, \underline{d});$$

$$\mathcal{F}_h^N(\mathcal{O}_F, S) = \sum_{\underline{d} \in I_{\leq N}} \mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, \emptyset, \underline{d}).$$

L'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S)$ (resp. $\mathcal{F}_h^N(\mathcal{O}_F, S)$) est un sous- E -espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ (resp. $\mathcal{F}_h(\mathcal{O}_F, S)$).

Proposition 2.3.5. — Soit $h \in \mathbb{N}$.

(i) Les fonctions

$$\mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}}$$

pour $a \in A_h$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ forment une base de $\mathcal{F}_h^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$;

(ii) Les fonctions

$$\mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}}$$

pour $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ forment une base de $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$.

Preuve. — Notons $f_{a,\underline{i}}$ et $g_{a,\underline{i}}$ pour $a \in A_h$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ les fonctions définies pour $z \in \mathcal{O}_F$ par :

$$f_{a,\underline{i}}(z) = \mathbf{1}_{a+\varpi_F^h\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^h} \right)^{\underline{i}}$$

$$g_{a,\underline{i}}(z) = \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}}.$$

Les fonctions $f_{a,\underline{i}}$ pour $a \in A_h$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ forment une base de $\mathcal{F}_h^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$. On fixe deux numérotations :

$$\eta: A_h \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\iota: A_h \times I_{\leq[r]} \longrightarrow \mathbb{N}$$

de sorte que $\iota(a, \underline{i}) < \iota(b, \underline{j})$ si une parmi les trois conditions suivantes est satisfaite :

- (i) $|\underline{i}| < |\underline{j}|$;
- (ii) $|\underline{i}| = |\underline{j}|$ et $\underline{i} < \underline{j}$ par rapport à l'ordre lexicographique ;
- (iii) $\underline{i} = \underline{j}$ et $\eta(a) < \eta(b)$.

En écrivant $\left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}} = \left(\varpi_F^{h-l(a)} \frac{z-a-b\varpi_F^{l(a)}}{\varpi_F^h} + b \right)^{\underline{i}}$ pour $z \in \mathcal{O}_F$ et en développant on obtient :

$$\begin{aligned} g_{a,\underline{i}}(z) &= \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}} = \left(\sum_{b \in A_{h-l(a)}} \mathbf{1}_{a+b\varpi_F^{l(a)}+\varpi_F^h\mathcal{O}_F}(z) \right) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}} \\ &= \sum_{b \in A_{h-l(a)}} \sum_{\underline{m} \leq \underline{i}} s_{\underline{m}} f_{a+b\varpi_F^{l(a)}, \underline{m}}(z) \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$s_{\underline{m}} = \binom{\underline{i}}{\underline{m}} (\varpi_F^{h-l(a)})^{\underline{m}} b^{\underline{i}-\underline{m}}.$$

La matrice permettant de passer des $g_{a,\underline{i}}$ aux $f_{a,\underline{i}}$ pour $a \in A_h$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ est triangulaire par blocs, à coefficients entiers, chaque bloc diagonal étant une matrice triangulaire inférieure avec des éléments de $\mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ sur la diagonale. Cela entraîne le (i) et le (ii). \square

Fixons un plongement $\rho: F \hookrightarrow E$. Si $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, on note $e_{a,\underline{i},r}$ l'élément de $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ défini par :

$$z \mapsto e_{a,\underline{i},r}(z) = \rho(\varpi_F)^{[l(a)r]} \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}}.$$

La Proposition 2.3.5 implique la remarque suivante.

Remarque 2.3.6. — (i) Les $e_{a,\underline{i},r}$ pour $a \in A_h$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ forment une base de $\mathcal{F}_h^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$.
(ii) Les $e_{a,\underline{i},r}$ pour $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ forment une base de $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$.

Lemme 2.3.7. — Si $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ alors

$$\|e_{0,\underline{i},r}\|_{C^r} = 1 \quad \text{et} \quad \|e_{a,\underline{i},r}\|_{C^r} \leq q^{-([l(a)r]-l(a)r+r-|\underline{i}|)} \leq q \quad \text{si } a \in A \setminus \{0\}.$$

Preuve. — Supposons $a = 0$ et notons $f = e_{0,\underline{i},r}$. Alors par l'Exemple 2.2.5 on a :

$$\sup_{\underline{m} \in I_{\leq[r]}} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{m}} f(x)}{\underline{i}!} \right| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x,y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f,[r]}(x,y)|}{|y|^r} = 0,$$

ce qui entraîne $\|f\|_{C^r} = 1$.

Supposons maintenant $a \in A \setminus \{0\}$ (et donc $l(a) \geq 1$). Soit $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$. Notons $g = e_{a,\underline{i},r}$. On a pour tout $\underline{m} \in I_{\leq[r]}$ tel que $\underline{m} \leq \underline{i}$:

$$\frac{D_{\underline{m}} g(x)}{\underline{m}!} = \rho(\varpi_F)^{[l(a)r]} (\varpi_F^{-l(a)})^{\underline{m}} \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(x) \binom{\underline{i}}{\underline{m}} \left(\frac{x-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{(\underline{i}-\underline{m})}$$

et $\frac{D_{\underline{m}} g(x)}{\underline{m}!} = 0$ sinon. On en déduit pour tout $\underline{m} \in I_{\leq[r]}$:

$$\left| \frac{D_{\underline{m}} g(x)}{\underline{m}!} \right| \leq q^{-[l(a)r]} q^{l(a)|\underline{m}|} \leq q^{-[l(a)r]} q^{l(a)|\underline{i}|} \leq q^{-([l(a)r]-l(a)r+r-|\underline{i}|)}$$

Notons que l'on a :

$$\varepsilon_{g,[r]}(x,y) = \rho(\varpi_F)^{[l(a)r]} \left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(x+y) - \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F}(x) \right) \left(\frac{x+y-a}{\varpi_F^{l(a)}} \right)^{\underline{i}},$$

d'où $\varepsilon_{g,[r]}(x,y) = 0$ si $y \in \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$ ou si ni x ni $x+y$ n'appartiennent à $a + \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$. Pour conclure il reste à étudier deux cas :

(i) si $y \in \mathcal{O}_F \setminus \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$ et $x+y \in a + \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$, on a :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|}{|y|^r} \leq q^{-[l(a)r]} q^{r(l(a)-1)} \leq q^{-([l(a)r]-l(a)r+r-|\underline{i}|)}.$$

(ii) si $y \in \mathcal{O}_F \setminus \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$ et $x \in a + \varpi_F^{l(a)}\mathcal{O}_F$, on a :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x,y)|}{|y|^r} = q^{-[l(a)r]} q^{l(a)|\underline{i}|} |y|^{|\underline{i}|-r} \leq q^{-([l(a)r]-l(a)r+r-|\underline{i}|)}.$$

En revenant à la définition de $\|\cdot\|_{C^r}$ on en déduit le lemme. □

Lemme 2.3.8. — Soit $h \in \mathbb{N}$. Si $b_a \in E$ pour tout $a \in A_h$ alors

$$\sup_{a \in A_h} |b_a| \leq \left\| \sum_{a \in A_h} b_a e_{a,0,r} \right\|_{C^r} q^r.$$

Preuve. — La démonstration se fait par récurrence sur h , le cas $h = 0$ étant trivial. D'après la construction de l'ensemble A , pour tout $a \in A_h \setminus A_{h-1}$ il existe $u_a \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que $a + u_a \varpi_F^{h-1} \in A_{h-1}$. Notons f la fonction définie par :

$$f(z) = \sum_{a \in A_h} b_a e_{a,0,r}(z).$$

Comme les $e_{a,\underline{0},r}$ sont localement constantes on vérifie immédiatement que $D_{\underline{i}}f = 0$ pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]} \setminus \{0\}$ et donc on a $\varepsilon_{f,[r]}(x,y) = f(x+y) - f(x)$. De plus, pour tout $a \in A_{h-1}$ la fonction $e_{a,\underline{0},r}$ est constante modulo $\varpi_F^{h-1}\mathcal{O}_F$ et, par construction de l'ensemble A , on a :

$$\sum_{c \in A_h \setminus A_{h-1}} b_c \mathbf{1}_{c + \varpi_F^{h-1}\mathcal{O}_F}(a) = \sum_{c \in A_h \setminus A_{h-1}} b_c \mathbf{1}_{c + \varpi_F^h\mathcal{O}_F}(a) = 0.$$

En effet, si $a \in A_{h-1}$ alors $a \notin c + \varpi_F^h\mathcal{O}_F$ quel que soit $c \in A_h$. On obtient alors pour $a \in A_h \setminus A_{h-1}$:

$$\varepsilon_{f,[r]}(a, u_a \varpi_F^{h-1}) = f(a + u_a \varpi_F^{h-1}) - f(a) = -\rho(\varpi_F)^{[rh]} b_a$$

ce qui implique

$$(2.3.6) \quad \sup_{a \in A_h \setminus A_{h-1}} |b_a| \leq \sup_{a \in A_h \setminus A_{h-1}} q^{[hr]} |\varepsilon_{f,[r]}(a, u_a \varpi_F^{h-1})| \leq q^{[hr]} q^{r(1-h)} \|f\|_{C^r},$$

d'où

$$(2.3.7) \quad \sup_{a \in A_h \setminus A_{h-1}} |b_a| \leq \|f\|_{C^r} q^r.$$

De plus, par le Lemme 2.3.7 si $a \in A_h \setminus A_{h-1}$ on a :

$$(2.3.8) \quad \|e_{a,\underline{0},r}\|_{C^r} \leq q^{-([hr]-hr+r)}.$$

Par l'égalité

$$\sum_{a \in A_{h-1}} b_a e_{a,\underline{0},r} = f - \sum_{a \in A_h \setminus A_{h-1}} b_a e_{a,\underline{0},r}$$

couplée aux inégalités (2.3.6) et (2.3.8) on déduit :

$$(2.3.9) \quad \left\| \sum_{a \in A_{h-1}} b_a e_{a,\underline{0},r} \right\|_{C^r} \leq \sup \left(\|f\|_{C^r}, \sup_{a \in A_h \setminus A_{h-1}} |b_a| \|e_{a,\underline{0},r}\|_{C^r} \right) \leq \|f\|_{C^r}.$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$(2.3.10) \quad \sup_{a \in A_{h-1}} |b_a| \leq \left\| \sum_{a \in A_{h-1}} b_a e_{a,\underline{0},r} \right\|_{C^r} q^r.$$

Les relations (2.3.7), (2.3.9) et (2.3.10) nous permettent alors de conclure. \square

Si $f \in \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ on note $b_{a,\underline{i},r}(f)$, pour $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, les coefficients de f dans la base des $e_{a,\underline{i},r}$.

Lemme 2.3.9. — *Il existe $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ on a :*

$$\sup_{a \in A} \sup_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} |b_{a,\underline{i},r}(f)| \leq C \|f\|_{C^r}.$$

Preuve. — La démonstration se fait par récurrence sur $[r]$, le cas $[r] = 0$ étant trivial. Soit $\tau \in S$. Par hypothèse de récurrence il existe $C_\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que :

$$\sup_{a \in A} \sup_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} |b_{a,\underline{i},r}(D_{e_\tau} f)| \leq C_\tau \|D_{e_\tau} f\|_{C^{r-1}}.$$

Notons que pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ on a $b_{a,\underline{i},r}(D_{e_\tau} f) = i_\tau b_{a,\underline{j},r}(f)$, où $\underline{j} = (j_\sigma)_{\sigma \in S}$ est défini par

$$j_\sigma = \begin{cases} i_\sigma & \text{si } \sigma \neq \tau \\ i_\tau + 1 & \text{si } \sigma = \tau, \end{cases}$$

avec $i_\tau \leq [r]$ car $f \in \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$. Donc, quitte à changer la constante C_τ , on en déduit que

$$\sup_{a \in A} \sup_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ i_\tau \geq 1}} |b_{a, \underline{i}, r}(f)| \leq C_\tau \|D_{e_\tau} f\|_{C^{r-1}}.$$

D'après le (i) de la Proposition 2.2.8 il existe une constante $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que $\|D_{e_\tau} f\|_{C^{r-1}} \leq M \|f\|_{C^r}$ d'où l'inégalité

$$\sup_{a \in A} \sup_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ i_\tau \geq 1}} |b_{a, \underline{i}, r}(f)| \leq C_\tau M \|f\|_{C^r},$$

et comme ceci vaut pour n'importe quel $\tau \in S$ on déduit

$$(2.3.11) \quad \sup_{a \in A} \sup_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ |\underline{i}| \geq 1}} |b_{a, \underline{i}, r}(f)| \leq \sup_{\tau \in S} \{C_\tau\} M \|f\|_{C^r}.$$

Pour terminer, il ne reste qu'à majorer les coefficients restants. Considérons pour cela la fonction f_0 définie par :

$$f_0 = f - \sum_{a \in A} \sum_{\substack{\underline{i} \in I_{\leq [r]} \\ |\underline{i}| \geq 1}} b_{a, \underline{i}, r}(f) e_{a, \underline{i}, r}.$$

Par le Lemme 2.3.8, l'inégalité (2.3.11) et le Lemme 2.3.7 on a :

$$\sup_{a \in A} |b_{a, 0, r}(f)| \leq \|f_0\|_{C^r} q^r \leq C \|f\|_{C^r}$$

où l'on a posé

$$C = \sup \{q^r, \sup_{\tau \in S} \{C_\tau\} M q^{r+1}\}.$$

D'où le résultat. □

Proposition 2.3.10. — Soit $h \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ on note f_h l'élément de $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ défini par :

$$f_h(z) = \sum_{a \in A_h} \mathbf{1}_{a + \varpi_F^h \mathcal{O}_F}(z) \left(\sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}} f(a) \frac{(z-a)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right).$$

Alors :

(i) Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $h \geq n_0$ on a :

$$\|f_{h+1} - f_h\|_{\mathcal{F}_{h+1}} \leq C_{f,r}(h) C q^{-rh};$$

(ii) f_h tend vers f dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ quand h tend vers $+\infty$.

Preuve. — (i) D'après l'égalité

$$f_{h+1}(z) = \sum_{a \in A_h} \sum_{b \in A_1} \mathbf{1}_{a + b\varpi_F^h + \varpi_F^{h+1} \mathcal{O}_F}(z) \left(\sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}} f(a + b\varpi_F^h) \frac{(z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right)$$

on déduit que $f_{h+1}(z) - f_h(z)$ peut se récrire sous la forme

$$\sum_{a \in A_h} \sum_{b \in A_1} \mathbf{1}_{a + b\varpi_F^h + \varpi_F^{h+1} \mathcal{O}_F}(z) \left(\sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} D_{\underline{i}} f(a + b\varpi_F^h) \frac{(z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} - D_{\underline{i}} f(a) \frac{(z - a)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right).$$

En développant, pour $a \in A_h$ et $b \in A_1$, $\sigma(z - a)^{i\sigma} = \sigma((z - a - b\varpi_F^h) + b\varpi_F^h)^{i\sigma}$ pour tout $\sigma \in S$ on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \left(D_{\underline{i}} f(a + b\varpi_F^h) \frac{(z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} - D_{\underline{i}} f(a) \frac{(z - a)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} \right) \\
&= \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \left(D_{\underline{i}} f(a + b\varpi_F^h) \frac{(z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{i}}}{\underline{i}!} - \sum_{\substack{\underline{k} \in I_{\leq[r]} \\ \underline{k} \leq \underline{i}}} D_{\underline{i}} f(a) \frac{(z - a - \varpi_F^h b)^{\underline{k}}}{\underline{k}!} \frac{(\varpi_F^h b)^{\underline{i} - \underline{k}}}{(\underline{i} - \underline{k})!} \right) \\
&= \sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} \left(D_{\underline{j}} f(a + b\varpi_F^h) \frac{(z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{j}}}{\underline{j}!} - \sum_{\substack{\underline{s} \in I_{\leq[r]} \\ |\underline{s}| \leq [r] - |\underline{j}|}} D_{\underline{j} + \underline{s}} f(a) \frac{(z - a - \varpi_F^h b)^{\underline{j}}}{\underline{j}!} \frac{(\varpi_F^h b)^{\underline{s}}}{\underline{s}!} \right) \\
&= \sum_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} \frac{1}{\underline{j}!} \left(D_{\underline{j}} f(a + b\varpi_F^h) - \sum_{\substack{\underline{s} \in I_{\leq[r]} \\ |\underline{s}| \leq [r] - |\underline{j}|}} D_{\underline{j} + \underline{s}} f(a) \frac{(\varpi_F^h b)^{\underline{s}}}{\underline{s}!} \right) (z - a - b\varpi_F^h)^{\underline{j}}.
\end{aligned}$$

Par la preuve de la Proposition 2.2.8 il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et un $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $h \geq n_0$, tout $a \in A_h$ et tout $b \in A_1$ on a :

$$\left| D_{\underline{j}} f(a + b\varpi_F^h) - \sum_{\substack{\underline{s} \in I_{\leq[r]} \\ |\underline{s}| \leq [r] - |\underline{j}|}} D_{\underline{j} + \underline{s}} f(a) \frac{(\varpi_F^h b)^{\underline{s}}}{\underline{s}!} \right| \leq q^{h(|\underline{j}| - r)} C_{f,r}(h) C.$$

On en déduit pour tout $h \geq n_0$

$$\|f_{h+1} - f_h\|_{\mathcal{F}_{h+1}} \leq \sup_{\underline{j} \in I_{\leq[r]}} \left(q^{-(h+1)|\underline{j}|} q^{h(|\underline{j}| - r)} C_{f,r}(h) C \right) = q^{-rh} C_{f,r}(h) C,$$

d'où le (i).

(ii) D'après la Proposition 2.3.2 et par le (i) on a pour tout $h \geq n_0$:

$$\|f_{h+1} - f_h\|_{C^r} \leq \|f_{h+1} - f_h\|_{\mathcal{F}_{h+1}} q^{r(h+1)} \leq q^r C_{f,r}(h) C$$

et comme $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$ on en déduit que f_h a une limite dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Comme par ailleurs $f_h(a) = f(a)$ si $a \in A_h$ par définition de f_h , cette limite coïncide avec f sur A , et donc partout par continuité, ce qui termine la preuve du (ii). \square

Le théorème suivant est essentiellement un corollaire des résultats que l'on a prouvés ci-dessus :

Théorème 2.3.11. — *La famille des $e_{a,\underline{i},r}$, pour $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$, forme une base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$.*

Preuve. — Considérons l'application

$$\theta: c_0(A \times I_{\leq[r]}) \rightarrow C^r(\mathcal{O}_F, E), \quad (b_{a,\underline{i}}) \mapsto \sum_{a \in A} \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} b_{a,\underline{i}} e_{a,\underline{i},r}.$$

Par le Lemme 2.3.7 on déduit que θ est bien une application continue de $c_0(A \times I_{\leq[r]})$ dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Notons φ l'application de $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ dans $c_0(A \times I_{\leq[r]})$ qui à tout $f \in \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ associe les coefficients de f dans la base des $e_{a,\underline{i},r}$ (Remarque 2.3.6 (ii)). Le Lemme 2.3.9 implique que cette application est continue une fois que l'on munit $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ de la topologie

induite par celle de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. Comme $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ est dense dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ par la Proposition 2.3.10, alors φ s'étend de façon unique en une application continue, que l'on désignera du même nom, de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ dans $c_0(A \times I_{\leq[r]})$. Comme $\theta \circ \varphi(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, E)$ on en déduit que $\theta \circ \varphi = id$. De manière analogue on a $\varphi \circ \theta = id$, ce qui prouve le résultat. \square

Remarque 2.3.12. — Soit $l \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ tel que $l < r$. Alors $C^r(\mathcal{O}_F, E) \subsetneq C^l(\mathcal{O}_F, E)$. En effet il suffit de considérer la fonction f définie par :

$$f = \sum_{a \in A} \rho(\varpi_F)^{[rl(a)] - [l(a)]} e_{a, \underline{0}, l}.$$

Le Théorème 2.3.11 implique que f est une fonction de classe C^l mais pas de classe C^r .

2.3.3. Construction de sous-espaces fermés. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $J \subseteq S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour $\sigma \in S \setminus J$. Nous allons définir un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ qui dépend de J et de $(d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}$ et puis nous construisons une base de Banach de cet espace à partir de la base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ décrite au §2.3.2.

Posons :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}$$

et désignons par e_σ le vecteur de \mathbb{N}^S ayant toutes ses composantes nulles sauf celle d'indice σ qui est égal à 1. Notons pour tout $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$:

$$\forall \sigma \in S, 0 \leq i \leq [r], \quad \frac{\partial^i}{\partial z_\sigma^i} f = D_{ie_\sigma} f.$$

Définition 2.3.13. — On note $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ le sous- E -espace vectoriel des fonctions f de classe C^r sur \mathcal{O}_F telles que

$$\forall \sigma \in S \setminus J', \quad \frac{\partial^{d_\sigma+1}}{\partial z_\sigma^{d_\sigma+1}} f = 0.$$

D'après le Corollaire 2.2.9 l'opérateur $D_{\underline{i}}$ est continu pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ ce qui implique que l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ est bien un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. On le munit de la topologie induite par celle de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ qui en fait un espace de Banach sur E .

Si L désigne J ou J' posons pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, L, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus L}) = \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) \cap \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, L, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus L}).$$

Remarque 2.3.14. — Par définition de l'espace $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, S)$ on voit que

$$\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'}) = \mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}).$$

Posons :

$$Y = \{\underline{i} \in \mathbb{N}^S, i_\sigma \leq d_\sigma \text{ si } \sigma \in S \setminus J\}$$

$$Y' = \{\underline{i} \in \mathbb{N}^S, i_\sigma \leq d_\sigma \text{ si } \sigma \in S \setminus J'\},$$

et notons que $Y \cap I_{\leq[r]} = Y' \cap I_{\leq[r]}$.

Proposition 2.3.15. — La famille des $e_{a, \underline{i}, r}$, pour $a \in A$ et $\underline{i} \in Y' \cap I_{\leq[r]}$, est une base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.

Preuve. — Soit $f \in C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ et $\tau \in S \setminus J'$. Par le Théorème 2.3.11 il existe une unique suite $(b_{a,\underline{i}})_{a,\underline{i}}$ d'éléments de E tendant vers 0 tel que f s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{a \in A} \sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} b_{a,\underline{i}} e_{a,\underline{i},r}.$$

Par continuité de l'opérateur $\frac{\partial^{d_\tau+1}}{\partial z_\tau^{d_\tau+1}}$ (Corollaire 2.2.9) on obtient :

$$\frac{\partial^{d_\tau+1}}{\partial z_\tau^{d_\tau+1}} f = \sum_{a \in A} \sum_{\underline{i} \in I_{\leq [r]}} \frac{\partial^{d_\tau+1}}{\partial z_\tau^{d_\tau+1}} b_{a,\underline{i}} e_{a,\underline{i},r}.$$

Or, si \underline{j} désigne l'élément de \mathbb{N}^S défini par :

$$j_\sigma = \begin{cases} i_\sigma - d_\tau - 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ i_\sigma & \text{sinon} \end{cases}$$

un calcul simple montre que

$$\frac{\partial^{d_\tau+1}}{\partial z_\tau^{d_\tau+1}} e_{a,\underline{i},r} = \begin{cases} i_\tau(i_\tau - 1) \dots (i_\tau - d_\tau) e_{a,\underline{j},r} & \text{si } i_\tau \geq d_\tau + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que $\frac{\partial^{d_\sigma+1}}{\partial z_\sigma^{d_\sigma+1}} f = 0$ pour tout $\sigma \in S \setminus J'$ si et seulement si f s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{a \in A} \sum_{\underline{i} \in Y' \cap I_{\leq [r]}} b_{a,\underline{i}} e_{a,\underline{i},r},$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 2.3.16. — *Si N est un entier tel que $N \geq [r]$ alors l'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ est dense dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.*

Preuve. — La démonstration découle directement de la Proposition 2.3.15. \square

2.4. Duaux

Conservons les notations du §2.3.3 et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$. Si N est tel que $N \geq [r]$, alors le Corollaire 2.3.16 assure que l'inclusion

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}) \subseteq C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$$

induit une injection

$$C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee \hookrightarrow \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee.$$

Dans cette section nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme linéaire $\mu: \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J}) \rightarrow E$ s'étende en une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$. Elle généralise un résultat dû à Amice-Vélu [2] et Vishik [65].

2.4.1. Distributions d'ordre r . —

Définition 2.4.1. — On appelle *distribution $(J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ -tempérée d'ordre r sur \mathcal{O}_F* toute forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$.

On note $(C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'}), \|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma})$ l'espace des distributions $(J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ -tempérées d'ordre r sur \mathcal{O}_F muni de la topologie forte.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee$ et si $f \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ on note, pour $a \in \mathcal{O}_F$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} f\right) = \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} f(z) \mu(z)$$

où $\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F}$ désigne la fonction caractéristique de $a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F$.

Théorème 2.4.2. — (i) Soit $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$. Il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{i} \in Y'$, on ait :

$$(2.4.1) \quad \left| \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

(ii) Soit $N \geq [r]$ un entier et soit $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})^\vee$. Supposons qu'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{i} \in Y \cap I_{\leq N}$, on ait :

$$(2.4.2) \quad \left| \int_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{nr}.$$

Alors μ se prolonge de manière unique en une distribution $(J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$ -tempérée d'ordre r sur \mathcal{O}_F .

Preuve. — (i) Soient $a \in \mathcal{O}_F$, $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{i} \in Y'$. Notons $f_{a, \underline{i}, n}$ la fonction définie par :

$$f_{a, \underline{i}, n}(z) = \mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}}.$$

C'est un élément de l'espace $\mathcal{F}_n(\mathcal{O}_F, S)$. Rappelons que $\mathcal{F}_n(\mathcal{O}_F, S)$ est un E -espace de Banach, la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_n}$ étant définie par la formule (2.3.1) (§2.3.1). On vérifie que $\|f_{a, \underline{i}, n}\|_{\mathcal{F}_n} = 1$. En utilisant la Proposition 2.3.2 on obtient :

$$\begin{aligned} |\mu(f_{a, \underline{i}, n})| &\leq \|\mu\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma} \|f_{a, \underline{i}, n}\|_{C^r} \\ &\leq \|\mu\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma} q^{rn} \|f_{a, \underline{i}, n}\|_{\mathcal{F}_n} \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma} q^{rn} \end{aligned}$$

d'où le résultat une fois que l'on a posé $C_\mu = \|\mu\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma} q^{rn}$.

(ii) L'unicité d'une telle extension découle du Corollaire 2.3.16 : l'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ est dense dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})$. Montrons l'existence. Si $a \in A$ et $\underline{i} \in I_{\leq [r]} \cap Y$ posons :

$$b_{a, \underline{i}} = \mu(e_{a, \underline{i}, r}) = \mu\left(\rho(\varpi_F)^{[r]l(a)} \mathbf{1}_{a+\varpi_F^{l(a)} \mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^{l(a)}}\right)^{\underline{i}}\right).$$

Comme par hypothèse il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{i} \in Y \cap I_{\leq N}$ on a :

$$\left| \mu\left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n \mathcal{O}_F}(z) \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}}\right) \right| \leq C_\mu q^{nr},$$

on déduit $|b_{a,\underline{i}}| \leq C_\mu q$ pour tout $a \in A$ et tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]} \cap Y$. Par la Proposition 2.3.15 il existe un unique élément $\tilde{\mu}$ de $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ tel que l'on a $\tilde{\mu}(e_{a,\underline{i},r}) = b_{a,\underline{i}}$ pour tout $a \in A$ et tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]} \cap Y$. Notons :

$$\lambda = \tilde{\mu}|_{\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})} - \mu.$$

Montrons que λ est identiquement nulle sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$. Remarquons qu'elle est identiquement nulle sur $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})$ par construction. De plus, le point (i) implique que $\tilde{\mu}|_{\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})}$ satisfait (2.4.2). Cela implique que λ satisfait aussi (2.4.2). Soit $a \in \mathcal{O}_F$, $\underline{i} \in Y \cap I_N$ et $m \in \mathbb{N}$. On peut réécrire la fonction $\mathbf{1}_{a+b\varpi_F^n} \mathcal{O}_F(z) z^{\underline{i}}$ sous la forme :

$$\sum_{b \in A_m} \sum_{\underline{s} \leq \underline{i}} \mathbf{1}_{(a+b\varpi_F^n)+\varpi_F^{n+m}} \mathcal{O}_F(z) \binom{\underline{i}}{\underline{s}} (a+b\varpi_F^n)^{\underline{i}-\underline{s}} (z - (a+b\varpi_F^n))^{\underline{s}}.$$

Or, si $|\underline{s}| \leq [r]$ on a :

$$\lambda \left(\mathbf{1}_{(a+b\varpi_F^n)+\varpi_F^{n+m}} \mathcal{O}_F(z) (z - (a+b\varpi_F^n))^{\underline{s}} \right) = 0.$$

Supposons donc $|\underline{s}| > [r]$. Comme λ satisfait (2.4.2) déduit :

$$\left| \lambda \left(\mathbf{1}_{(a+b\varpi_F^n)+\varpi_F^{n+m}} \mathcal{O}_F(z) (z - (a+b\varpi_F^n))^{\underline{s}} \right) \right| \leq Cq^{(n+m)(r-|\underline{s}|)}$$

d'où

$$\left| \lambda \left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n} \mathcal{O}_F(z) z^{\underline{i}} \right) \right| \leq Cq^{(n+m)(r-([r]+1))}.$$

On voit que cette quantité tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, et cela implique

$$\lambda \left(\mathbf{1}_{a+\varpi_F^n} \mathcal{O}_F(z) z^{\underline{i}} \right) = 0.$$

On en déduit l'égalité $\tilde{\mu}|_{\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J})} = \mu$, ce qui permet de conclure. \square

Par ce qui précède on peut munir l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ d'une norme équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}$, mais plus commode.

Corollaire 2.4.3. — (i) Si l'on définit $\|\mu\|_{r,Y}$, pour $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ par la formule

$$\|\mu\|_{r,Y} = \sup_{a \in \mathcal{O}_F, n \in \mathbb{N}} \sup_{\underline{i} \in Y} \left(\left| \int_{a+\varpi_F^n} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| q^{-nr} \right)$$

alors $\|\cdot\|_{r,Y}$ est une norme sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}$.

(ii) Si $N \geq [r]$ et si l'on définit $\|\mu\|_{r,N}$, pour $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ par la formule

$$\|\mu\|_{r,N} = \sup_{a \in \mathcal{O}_F, n \in \mathbb{N}} \sup_{\underline{i} \in Y \cap I_{\leq N}} \left(\left| \int_{a+\varpi_F^n} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{i}} \mu(z) \right| q^{-nr} \right)$$

alors $\|\cdot\|_{r,N}$ est une norme sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$ équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}$.

Preuve. — Les preuves de (i) et (ii) étant similaires, on se contentera de prouver la première assertion. Par le Théorème 2.4.2, on déduit que $\|\cdot\|_{r,Y}$ est une norme sur l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee$. De plus, l'application identité :

$$id: (C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}) \rightarrow (C^r(\mathcal{O}_F, J', (d_\sigma)_{\sigma \in S \setminus J'})^\vee, \|\cdot\|_{r,Y})$$

est continue par l'inégalité de la preuve de (i) du Théorème 2.4.2. Et donc, d'après le théorème de l'image ouverte [54, Proposition 8.6], c'est un isomorphisme de E -espaces de Banach ce qui implique que la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_r, J', (d_\sigma)_\sigma}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{r,Y}$. \square

CHAPITRE 3

SUR CERTAINS COMPLÉTÉS UNITAIRES UNIVERSELS EXPLICITES POUR $GL_2(F)$

3.1. Introduction, notations et énoncé des résultats

3.1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale p -adique entre certaines représentations continues de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$. Cette correspondance, qui a pris le nom de correspondance de Langlands p -adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$, a été initiée par Breuil [11, 12], puis établie par Colmez [25] et Paškūnas [50] à la suite de travaux de Berger-Breuil [8] et Colmez [24].

Si F est une extension finie non triviale de \mathbb{Q}_p , la question d'associer des représentations p -adiques de $G \stackrel{\text{déf}}{=} GL_2(F)$ aux représentations p -adiques de dimension 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ dans l'esprit d'une correspondance locale à la Langlands est loin d'être résolue et les résultats obtenus pour l'instant sont très partiels. En utilisant principalement les travaux de Frommer [38] et de Schraen [59] sur la filtration de Jordan-Hölder des induites paraboliques localement \mathbb{Q}_p -analytiques, Breuil [17] définit cependant une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique $\Pi(V)$ de G pour la plupart des représentations cristallines V de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ de dimension 2 et à poids de Hodge-Tate distincts. En général, la représentation $\Pi(V)$ ne permet pas de reconstruire la représentation galoisienne de départ, mais l'on s'attend toutefois à ce qu'elle intervienne comme sous-objet de la bonne représentation, ce qui fait des complétés unitaires universels de ses constituants fondamentaux des objets pertinents.

L'objet du présent article est de donner une description explicite du complété unitaire universel de certaines induites paraboliques localement \mathbb{Q}_p -analytiques, et notamment de celles qui interviennent dans la construction de la représentation $\Pi(V)$. L'espoir qu'une telle description est possible provient de [8, Théorème 4.3.1], où les auteurs décrivent le complété unitaire universel d'une induite parabolique localement algébrique de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à l'aide de l'espace des fonctions de classe C^r sur \mathbb{Z}_p , où r est un nombre rationnel positif qui dépend de l'induite considérée.

Pour cela, nous avons introduit et étudié dans [27] une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F , où r désigne un nombre rationnel positif et \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F . Cette notion s'appuie principalement sur des travaux d'Amice, Amice-Velù, Colmez, Van der Put et Vishik [1, 2, 23, 63, 65] et repose sur l'idée cruciale suivante : une fonction $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r si $f(x+y)$ a un développement limité à l'ordre $[r]$, où $[r]$ désigne la partie entière de r , en tout x et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément en x .

Tester la non nullité des complétés unitaires universels que nous avons construits est, en général, une question délicate qui n'est complètement résolue que pour $F = \mathbb{Q}_p$ [8, Corollaire 5.3.1] via la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine [35]. Mentionnons par ailleurs que [8, Theorem 4.3.1] est un ingrédient important dans la preuve de ce résultat. Toutefois, on démontre la non nullité dans quelques cas à partir de résultats de Vignéras [64], qui furent redémontrés par Kazhdan et de Shalit [42], et de [29].

3.1.2. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p et une extension finie F de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On désignera toujours par E une extension finie de \mathbb{Q}_p qui vérifie :

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p], \text{ où } S \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{alg}}(F, E).$$

Si L désigne l'un des corps F ou E , on note \mathcal{O}_L son anneau des entiers, on en prend une uniformisante ϖ_L et l'on note $k_L = \mathcal{O}_L/(\varpi_L)$ son corps résiduel. On pose $f = [k_F : \mathbb{F}_p]$, $q = p^f$ et l'on désigne par e l'indice de ramification de F sur \mathbb{Q}_p , de sorte que $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$.

La valuation p -adique val_F sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est normalisée par $val_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$ et l'on pose $|x| = p^{-val_F(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$.

Si $a \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $D(a, n) = a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ le disque de centre a et de rayon q^{-n} .

On désigne par G le groupe $\text{GL}_2(F)$, par T le tore déployé des matrices diagonales de G et par P le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G .

Soit S' un sous-ensemble de S . Si $\underline{n}_{S'} = (n_\sigma)_{\sigma \in S'}$ et $\underline{m}_{S'} = (m_\sigma)_{\sigma \in S'}$ sont des $|S'|$ -uplets d'entiers positifs ou nuls, nous posons :

- (i) $\underline{n}_{S'}! \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} n_\sigma!$;
- (ii) $|\underline{n}_{S'}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in S'} n_\sigma$;
- (iii) $\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'} \stackrel{\text{déf}}{=} (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S'}$;
- (iv) $\underline{n}_{S'} \leq \underline{m}_{S'}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S'$;
- (v) $\binom{\underline{n}_{S'}}{\underline{m}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\underline{n}_{S'}!}{\underline{m}_{S'}!(\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'})!}$;
- (vi) pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

Pour alléger l'écriture, nous notons \underline{n} au lieu de \underline{n}_S un $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls.

Enfin, si V est un E -espace vectoriel topologique, on note V^\vee son dual topologique muni de la topologie forte [54, §9].

3.1.3. Énoncé des résultats. — L'énoncé du résultat principal nécessite l'introduction d'un certain nombre de constructions. Soit J une partie de S et soit $\underline{d}_{S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Soient χ_1, χ_2 deux caractères localement J -analytiques de F^\times dans E^\times . Nous renvoyons le lecteur à la Définition 3.4.1 pour la notion de localement J -analytique.

Posons :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > -val_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))\}.$$

Notons $\chi_1 \otimes \chi_2$ le caractère de T défini par :

$$(\chi_1 \otimes \chi_2)\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(d),$$

ainsi que la représentation localement J -analytique de P qu'il définit par inflation. Notons :

- $(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2)^{J-an}$ l'induite parabolique localement J -analytique, définie comme l'espace des fonctions localement J -analytiques $f: G \rightarrow E$ telles que $f(bg) = (\chi_1 \otimes \chi_2)(b)f(g)$ sur lequel G agit par translations à droite;
- $(\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$, pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$, la représentation algébrique irréductible de $\text{GL}_2 \otimes_{F,\sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma: \text{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$.

Considérons la représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique suivante de G :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\bigotimes_{\sigma \in S \setminus J} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \right)^{J-an}.$$

Remarquons tout d'abord que $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ définit un faisceau sur $\mathbf{P}^1(F)$ dont les sections globales sont les fonctions $f: F \rightarrow E$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- $f|_{\mathcal{O}_F}$ définit un élément de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$;
- $\chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur \mathcal{O}_F en une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$.

Par ailleurs, des formules explicites munissent ce faisceau d'une action continue de G . D'après la preuve de [33, Proposition 1.21], le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est le complété par rapport au sous- $\mathcal{O}_E[P]$ -réseau engendré par les vecteurs

$$\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}, \quad \mathbf{1}_{F - \mathcal{O}_F}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{-\underline{m}_J}$$

pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. Notons alors $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ par rapport à ce réseau.

Avant de donner une description explicite de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$, nous démontrons d'abord deux résultats qui ajoutent des conditions supplémentaires aux données initiales et permettent d'éviter des cas pathologiques bien de simplifier le problème. Le premier ingrédient donne deux conditions nécessaires de non nullité sur $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$.

Proposition 3.1.1. — *Les deux conditions suivantes sont nécessaires pour que $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ soit non nul :*

- le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est entier;
- on a l'inégalité $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J}| \geq 0$.

C'est un résultat bien connu lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ [33, Lemma 2.1] ainsi que dans le cas localement algébrique, c'est-à-dire lorsque $J = \emptyset$ [49, Lemme 7.9]. En particulier, si les conditions de la Proposition 3.1.1 sont satisfaites, alors on a $r \stackrel{\text{déf}}{=} -\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) \geq 0$.

Notons $\chi'_1 = \chi_1$, $\chi'_2 = \chi_2 \prod_{\sigma \in J' \setminus J} \sigma^{d_\sigma}$ et remarquons que l'on a une immersion fermée G -équivariante :

$$(3.1.1) \quad I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \hookrightarrow I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}).$$

Un deuxième ingrédient important donné par la proposition suivante, essentiellement démontrée par Breuil [17, Théorème 7.1] en ayant recours aux techniques développées par Amice-Vélu et Vishik, qui fournit des indications concernant la structure de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$, et plus précisément concernant ses vecteurs localement \mathbb{Q}_p -analytiques.

Proposition 3.1.2. — *Supposons que les conditions de la Proposition 3.1.1 soient satisfaites. Alors les conditions suivantes sont équivalentes et vérifiées.*

- Toute application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow B$, où B est un G -Banach unitaire, s'étend de manière unique en une application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \rightarrow B$.

- (ii) L'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ s'étend de manière unique en une application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$.
- (iii) L'application (3.1.1) induit un isomorphisme de G -Banach unitaires :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge$$

D'après la Proposition 3.1.2 (iii), on est donc ramené à considérer $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge$. Par un calcul analogue à celui mené dans la preuve de [8, Théorème 4.3.1], on trouve qu'une boule ouverte (de centre 0) du Banach dual de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge$ s'identifie aux distributions μ dans le dual fort de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ et tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ on ait les deux inégalités suivantes :

$$(3.1.2) \quad \left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J'}} (z - a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)};$$

$$(3.1.3) \quad \left| \int_{F \setminus D(a, n+1)} \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} (z - a)^{-\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J'}| + |\underline{m}_{J'}| - r)};$$

avec $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

D'autre part, une étude fine du dual fort de l'espace de Banach des fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F , ou plus précisément de son sous-espace fermé $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ (§3.3.1.2), fournit la condition nécessaire et suffisante suivante pour qu'une forme linéaire sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ (voir §3.3.2 pour une définition de cet espace) s'étende en une distribution sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ (Théorème 3.3.8). Notons que pour $F = \mathbb{Q}_p$ il s'agit d'un résultat bien connu et dû à Amice-Vélu et Vishik [2, 65].

Théorème 3.1.3. — (i) Soit $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$. Il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ et tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ on ait :

$$\left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J'}} (z - a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)}.$$

(ii) Soit N un entier tel que $N \geq [r]$ et μ une forme linéaire sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Supposons qu'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| \leq N$, on ait :

$$\left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.$$

Alors μ se prolonge de manière unique en une distribution sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

On est ainsi amené à considérer l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ des fonctions $f: F \rightarrow E$ qui vérifient les deux conditions suivantes :

- (i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ définit un élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$;
- (ii) $\chi'_2 \chi'_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur \mathcal{O}_F en une fonction de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

C'est un espace de Banach p -adique naturellement muni d'une action continue de G et une étude approfondie utilisant de manière cruciale le Théorème 3.1.3 montre que les conditions (3.1.2) et (3.1.3) sélectionnent exactement les formes linéaires de $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$ qui annulent les fonctions d'un sous-espace $L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ de $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ que l'on définit dans la Section §3.4.3.

Le résultat principal de cet article, qui généralise [8, Théorème 4.3.1] lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, est alors le suivant.

Théorème 3.1.4. — Il existe un isomorphisme G -équivariant d'espaces de Banach p -adiques :

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) / L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}).$$

Signalons au passage une conséquence immédiate du Théorème 3.1.4.

Corollaire 3.1.5. — L'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) / L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est un espace de Banach muni d'une action continue unitaire de G . C'est le plus grand quotient de $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ ayant cette propriété.

3.1.4. Plan de l'article. — Dans la Section 3.2, nous rappelons quelques généralités d'analyse fonctionnelle p -adique ainsi que la notion de complété unitaire universel introduite dans [33]. La Section 3.3 est constituée de rappels sur les espaces des fonctions de classe C^r et leurs duals. Nous introduisons dans la Section 3.4 les représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ qui font l'objet de notre étude, puis nous construisons la représentation de Banach $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Dans la Section 3.5, nous donnons deux conditions nécessaires pour que le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ soit non nul et nous commençons l'étude des espaces duals $(I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge)^\vee$ et $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. La Section 3.6, qui est le cœur de cet article, contient la démonstration du Théorème 3.1.4 ainsi qu'un exemple de construction explicite.

3.2. Préliminaires

3.2.1. Rappels d'analyse fonctionnelle non archimédienne. — Ce paragraphe regroupe des notions d'analyse fonctionnelle non archimédienne dont on se servira par la suite. Nous renvoyons à [54] pour plus de détails.

Un E -espace vectoriel topologique V est dit *localement convexe* si l'origine possède une base de voisinage constituée de sous- \mathcal{O}_E -modules de V . Cela revient à demander que la topologie de V puisse être définie par une famille de semi-normes non archimédiennes [54, Propositions 4.3 et 4.4].

Soit V un E -espace vectoriel localement convexe. Un *réseau* \mathcal{L} de V est un sous- \mathcal{O}_E -module de V tel que pour tout $v \in V$, il existe un élément non nul $a \in E^\times$ tel que $av \in \mathcal{L}$. En particulier, on remarque que tout sous- \mathcal{O}_E -module ouvert de V est un réseau de V . Deux réseaux \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 de V sont dits *commensurables* s'il existe $a \in E^\times$ tel que $a\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq a^{-1}\mathcal{L}_1$. La commensurabilité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ des réseaux ouverts de V .

Un réseau \mathcal{L} de V est dit *séparé* si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varpi_E^n \mathcal{L} = 0$ ou, de manière équivalente, si \mathcal{L} ne contient pas de E -droite.

Un sous-ensemble $B \subseteq V$ est dit *borné* si, pour tout réseau ouvert $\mathcal{L} \subseteq V$, il existe $a \in E$ tel que $B \subseteq a\mathcal{L}$.

On dit que V est *tonnelé* si tout réseau fermé de V est ouvert.

On dit que V est de *Fréchet* s'il est complet et métrisable ou, de manière équivalente, s'il est complet, séparé, et si sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes. Lorsque sa topologie peut être définie par une unique norme, on dit que V est un espace de *Banach*.

Si \mathcal{L} est un réseau ouvert, borné et séparé de V , on définit la *jauge* de \mathcal{L} par :

$$\forall v \in V, \quad \|v\|_{\mathcal{L}} = \inf_{v \in a\mathcal{L}} |a|.$$

C'est une norme sur V et la topologie qu'elle définit sur V coïncide avec la topologie initiale [54, Corollaire 4.12].

On dit que V est de *type compact* s'il existe un isomorphisme de E -espaces vectoriels topologiques

$$V \xrightarrow{\sim} \varinjlim_n V_n,$$

où $\{V_n\}_{n \geq 1}$ est un système inductif d'espaces de Banach sur E tel que les morphismes de transition soient injectifs et compacts.

Soit W un E -espace vectoriel localement convexe. On note $\mathrm{Hom}_E(V, W)$ l'espace des fonctions E -linéaires et continues sur V à valeurs dans W . Si l'on fixe un sous-ensemble borné $B \subseteq V$ et que l'on se donne une semi-norme continue p sur W , alors la formule :

$$p_B(f) = \sup_{v \in B} p(f(v))$$

définit une semi-norme sur $\mathrm{Hom}_E(V, W)$. Si \mathcal{B} est maintenant une famille de sous-ensembles bornés de V , la topologie localement convexe définie sur $\mathrm{Hom}_E(V, W)$ par la famille de semi-normes $\{p_B; B \in \mathcal{B}, p \text{ semi-norme continue sur } W\}$ est appelée \mathcal{B} -topologie. En particulier, si \mathcal{B} est la famille de tous les singletons, la \mathcal{B} -topologie correspondante est aussi appelée *topologie faible*. Si \mathcal{B} est la famille de tous les sous-ensembles bornés de V , la \mathcal{B} -topologie correspondante est appelée *topologie forte*.

3.2.2. Complétés unitaires universels. — Soit G le groupe des \mathbb{Q}_p -points d'un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur \mathbb{Q}_p . La notion de complété unitaire universel d'un espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue de G a été formalisée par Emerton [33, §1], après que des exemples de complétés unitaires universels aient été construits par Breuil [12, 14] et Berger-Breuil [8]. Nous rappelons dans ce paragraphe le contexte dans lequel s'insère cette notion, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un complété unitaire universel.

Définition 3.2.1 ([56, 14]). — Un G -Banach est un espace de Banach B sur E muni d'une action à gauche de G telle que l'application $G \times B \rightarrow B$ qui décrit cette action soit continue. Un G -Banach B est dit *unitaire* si, pour un choix de norme $\|\cdot\|$ définissant la topologie de B , on a $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et tout $v \in B$.

Remarque 3.2.2. — Si le groupe G est compact, tout G -Banach est unitaire. Ceci n'est pas vrai si G n'est pas supposé compact.

Soit V un E -espace vectoriel localement convexe muni d'une action continue de G . Un complété unitaire universel de V est un G -Banach unitaire qui satisfait une certaine propriété universelle. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 3.2.3 ([33], Définition 1.1). — Avec les notations précédentes, un *complété unitaire universel de V* est la donnée d'un G -Banach unitaire B et d'une application E -linéaire, continue et G -équivariante $\iota: V \rightarrow B$ telle que toute application E -linéaire, continue et G -équivariante $V \rightarrow W$, où W est un G -Banach unitaire, se factorise de façon unique à travers ι .

Remarque 3.2.4. — Si V admet un complété unitaire universel (B, ι) , alors ce complété est unique à isomorphisme près. Comme l'adhérence dans B de $\iota(V)$ vérifie la propriété universelle énoncée dans la Définition 3.2.3, on en déduit que l'application ι est d'image dense.

Le lemme suivant fournit une condition nécessaire et suffisante pour que V admette un complété unitaire universel [33, Lemme 1.3].

Lemme 3.2.5. — *La G -représentation V admet un complété unitaire universel si et seulement si l'ensemble des classes de commensurabilité des réseaux ouverts G -stables de V , qui est partiellement ordonné pour l'inclusion, possède un élément minimal.*

3.3. Rappels sur les fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F

Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Dans [27] nous avons introduit une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F qui s'appuie principalement sur les travaux d'Amice, Amice-Velù, Colmez, Van der Put et Vishik [1, 2, 23, 63, 65]. Cette section va nous permettre de rappeler un certain nombre de constructions et de résultats concernant l'espace des fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Nous renvoyons à [27] pour plus de détails et à [45, 46] pour d'autres définitions possibles.

3.3.1. Définitions et compléments. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Notons $[r]$ sa partie entière. Si $n \in \mathbb{N}$ et si $*$ $\in \{<, \leq, >, \geq, =\}$, on pose :

$$I_{*n} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \underline{i} \in \mathbb{N}^S, \sum_{\sigma \in S} i_{\sigma} * n \right\}.$$

Définition 3.3.1. — On dit que $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ est de classe C^r sur \mathcal{O}_F s'il existe une famille de fonctions bornées $\{D_{\underline{i}}f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq[r]}\}$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{f,[r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow E$ par :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{f,[r]}(x, y) = f(x + y) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}f(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!},$$

et pour tout $h \in \mathbb{N}$

$$C_{f,r}(h) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x, y)| q^{rh},$$

alors $C_{f,r}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers $+\infty$.

Si f est une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F , il existe une unique famille de fonctions

$$\{D_{\underline{i}}f: \mathcal{O}_F \rightarrow E, \underline{i} \in I_{\leq[r]}\}$$

satisfaisant à la Définition 3.3.1 [27, Lemme 2.4]. Notons $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ l'ensemble des fonctions $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ de classe C^r sur \mathcal{O}_F et munissons-le de la norme $\|\cdot\|_{C^r}$ définie par :

$$\|f\|_{C^r} = \sup \left(\sup_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}f(x)}{\underline{i}!} \right|, \sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{f,[r]}(x, y)|}{|y|^r} \right).$$

C'est alors un espace de Banach sur E , et même une E -algèbre de Banach [27, Lemme 2.9], c'est-à-dire une E -algèbre normée dont l'espace vectoriel normé sous-jacent est un espace de Banach.

On demontre maintenant le résultat suivant, dont on se servira par la suite.

Lemme 3.3.2. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ une fonction de classe C^r . Notons $g: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ la fonction définie par :

$$\forall z \in \mathcal{O}_F, \quad g(z) = \mathbf{1}_{D(0,n)}(z) f\left(\frac{z}{\varpi_F^n}\right).$$

Alors $g \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$ et $\|g\|_{C^r} \leq q^{nr} \|f\|_{C^r}$.

Preuve. — Pour tout $\underline{i} \in I_{\leq[r]}$ et tout $z \in \mathcal{O}_F$ posons :

$$(3.3.1) \quad D_{\underline{i}}g(z) = \left(\frac{1}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{\varpi_F^n \mathcal{O}_F}(z) D_{\underline{i}}f\left(\frac{z}{\varpi_F^n}\right).$$

On a alors :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{g,[r]}(x, y) = \mathbf{1}_{D(0,n)}(x+y) f\left(\frac{x+y}{\varpi_F^n}\right) - \sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \frac{1}{\underline{i}!} \mathbf{1}_{D(0,n)}(x) D_{\underline{i}}f\left(\frac{x}{\varpi_F^n}\right) \left(\frac{y}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}}.$$

Par suite, on voit immédiatement que l'on a :

$$\forall h \geq n, \quad \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^h \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{g,[r]}(x, y)| \leq \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^{h-n} \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{f,[r]}(x, y)|,$$

ce qui implique que g est de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Pour montrer l'inégalité sur la norme on remarque que (3.3.1) assure que l'on a :

$$(3.3.2) \quad \forall \underline{i} \in I_{\leq[r]}, \quad \sup_{z \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}g(z)}{\underline{i}!} \right| \leq \left| \left(\frac{1}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{i}} \right| \sup_{z \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}f(z)}{\underline{i}!} \right| \leq q^{n|\underline{i}|} \|f\|_{C^r} \leq q^{nr} \|f\|_{C^r}.$$

On conclut alors en distinguant quatre cas :

- Si $x, y \in \varpi_F^n \mathcal{O}_F$, alors on a :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x, y)|}{|y|^r} \leq \frac{|\varepsilon_{f,[r]}(\frac{x}{\varpi_F^n}, \frac{y}{\varpi_F^n})|}{|y|^r} \leq q^{nr} \|f\|_{C^r}.$$

- Si $x \in \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ et $y \notin \varpi_F^n \mathcal{O}_F$, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x, y)|}{|y|^r} &= \frac{|\sum_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} D_{\underline{i}}g(x) \frac{y^{\underline{i}}}{\underline{i}!}|}{|y|^r} \leq \sup_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \left| \frac{D_{\underline{i}}g(x)}{\underline{i}!} \right| |y|^{|\underline{i}|-r} \\ &\leq \sup_{\underline{i} \in I_{\leq[r]}} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{D_{\underline{i}}f(x)}{\underline{i}!} \right| |\varpi_F^n|^{-|\underline{i}|} |y|^{|\underline{i}|-r} \\ &\leq q^{nr} \|f\|_{C^r}. \end{aligned}$$

- Si $x \notin \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ et $x+y \notin \varpi_F^n \mathcal{O}_F$, alors on a $\varepsilon_{g,[r]}(x, y) = 0$.
- Si $x \notin \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ et $x+y \in \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ alors on a enfin :

$$\frac{|\varepsilon_{g,[r]}(x, y)|}{|y|^r} = \frac{\left| f\left(\frac{x}{\varpi_F^n} + \frac{y}{\varpi_F^n}\right) \right|}{|y|^r} \leq q^{nr} \|f\|_{C^r}.$$

□

3.3.1.1. Composition de fonctions. — Soit $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ une fonction de classe C^r sur \mathcal{O}_F et soit $h: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$ une fonction. Nous allons rappeler [27, §2.2.1] une condition suffisante sur h pour que $f \circ h: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ soit à son tour de classe C^r sur \mathcal{O}_F . Pour cela, nous avons besoin d'introduire la définition suivante.

Définition 3.3.3. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. On dit que $h: \mathcal{O}_F \rightarrow F$ est de classe $C^{r,id}$ sur \mathcal{O}_F s'il existe une famille de fonctions bornées $\{h^{(i)}: \mathcal{O}_F \rightarrow F, 0 \leq i \leq [r]\}$ telle que, si l'on définit $\varepsilon_{h,[r]}: \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F \rightarrow F$ par :

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_F, \quad \varepsilon_{h,[r]}(x, y) = f(x + y) - \sum_{i=0}^{[r]} h^{(i)}(x) \frac{y^i}{i!},$$

et que l'on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$C_{h,r}(k) = \sup_{x \in \mathcal{O}_F, y \in \varpi_F^k \mathcal{O}_F} |\varepsilon_{h,[r]}(x, y)| q^{rk},$$

alors $C_{h,r}(k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

Notons $C^{r,id}(\mathcal{O}_F, F)$ l'ensemble des fonctions de \mathcal{O}_F dans F qui sont de classe $C^{r,id}$ sur \mathcal{O}_F . On le munit de la norme $\|\cdot\|_{C^{r,id}}$ définie par :

$$\|h\|_{C^{r,id}} = \sup \left(\sup_{0 \leq i \leq [r]} \sup_{x \in \mathcal{O}_F} \left| \frac{h^{(i)}(x)}{i!} \right|, \sup_{x, y \in \mathcal{O}_F} \frac{|\varepsilon_{h,[r]}(x, y)|}{|y|^r} \right),$$

ce qui en fait un espace de Banach sur F .

Proposition 3.3.4 ([27], Proposition 2.12). — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Si $h: \mathcal{O}_F \rightarrow \mathcal{O}_F$ est une fonction de classe $C^{r,id}$ sur \mathcal{O}_F alors :

- (i) $\forall f \in C^r(\mathcal{O}_F, E), f \circ h \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$;
- (ii) l'application de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ dans $C^r(\mathcal{O}_F, E)$ définie par $f \mapsto f \circ h$ est continue.

3.3.1.2. Construction de sous-espaces fermés. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, J \subseteq S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour $\sigma \in S \setminus J$. Nous allons définir un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$, dépendant de J et de $\underline{d}_{S \setminus J}$, qui va jouer un rôle important dans la suite.

Posons :

$$J' \stackrel{\text{déf}}{=} J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}$$

et désignons par e_σ le vecteur de \mathbb{N}^S ayant toutes ses composantes nulles sauf celle d'indice σ qui est égale à 1. Pour tout $f \in C^r(\mathcal{O}_F, E)$, tout $\sigma \in S$ et tout $i \in \{0, \dots, [r]\}$, posons :

$$\frac{\partial^i}{\partial z_\sigma^i} f = D_{ie_\sigma} f.$$

Définition 3.3.5. — On note $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ le sous- E -espace vectoriel des fonctions f de classe C^r sur \mathcal{O}_F telles que :

$$\forall \sigma \in S \setminus J', \quad \frac{\partial^{d_\sigma+1}}{\partial z_\sigma^{d_\sigma+1}} f = 0.$$

D'après [27, Corollaire 2.8], l'opérateur $D_{\underline{i}}$ est continu pour tout $\underline{i} \in I_{\leq [r]}$ ce qui implique que l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est bien un sous-espace fermé de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$. On le munit de la topologie induite par celle de $C^r(\mathcal{O}_F, E)$, et on en fait ainsi un espace de Banach sur E .

3.3.2. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe C^r . — Soit U une partie ouverte de \mathcal{O}_F , soit $J \subseteq S$ et soit $d_\sigma \in \mathbb{N}$ pour tout $\sigma \in S \setminus J$. Pour $a \in U$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $D(a, n) \subseteq U$, on note $\mathcal{O}(D(a, n), J, \underline{d}_{S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: D(a, n) \rightarrow E$ de la forme

$$f(z) = \sum_{\substack{\underline{m}=(m_\sigma)_{\sigma \in S} \in \mathbb{N}^S \\ m_\sigma \leq d_\sigma \text{ si } \sigma \in S \setminus J}} a_{\underline{m}}(a)(z-a)^{\underline{m}}$$

avec $a_{\underline{m}}(a) \in E$ et $|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)} \rightarrow 0$ quand $|\underline{m}| \rightarrow +\infty$. C'est un espace de Banach sur E pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_{a,n}$ définie par :

$$\|f\|_{a,n} = \sup_{\underline{m}} \left(|a_{\underline{m}}(a)|q^{-n(|\underline{m}|)} \right).$$

Comme U est ouvert et compact, il existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall a \in U, \forall h \geq h_0, \quad D(a, h) \subseteq U.$$

Pour tout $h \geq h_0$, on note $\mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: U \rightarrow E$ telles que :

$$\forall a \in U, \quad f|_{D(a,h)} \in \mathcal{O}(D(a, h), J, \underline{d}_{S \setminus J}).$$

On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_h}$ définie par :

$$(3.3.3) \quad \|f\|_{\mathcal{F}_h} = \sup_{a \bmod \varpi_F^h, a \in U} \|f|_{D(a,h)}\|_{a,h},$$

ce qui en fait un espace de Banach sur E . On voit immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix du système des représentants. De plus, on sait par [54, p. 107] que les inclusions

$$\mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \hookrightarrow \mathcal{F}_{h+1}(U, J, \underline{d}_{S \setminus J})$$

sont continues et compactes.

Définition 3.3.6. — On note $\mathcal{F}(U, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ pour lesquelles il existe $h \geq h_0$ tel que $f \in \mathcal{F}_h(U, J, \underline{d}_{S \setminus J})$.

On munit cet espace de la topologie de la limite inductive, ce qui en fait un espace de type compact. Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\underline{d} \in I_{\leq N}} \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, \emptyset, \underline{d});$$

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S) \cap \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}).$$

Les espaces $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, S)$ et $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ sont des sous- E -espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. En outre, on dispose des deux faits suivants :

- l'espace $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ [27, Corollaire 3.4];
- pour tout entier $N \geq [r]$, l'espace $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est dense dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ [27, Corollaire 3.16].

Notons que le deuxième point découle de l'existence d'une base de Banach de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ constituée de fonctions dans $\mathcal{F}^{[r]}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$.

3.3.3. Distributions d'ordre r . — Conservons les notations du §3.3.2 et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Si N est tel que $N \geq [r]$, alors [27, Corollaire 3.16] assure que l'inclusion

$$\mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \subseteq C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$$

induit une injection

$$C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee \hookrightarrow \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee.$$

Dans cette section, nous allons rappeler une caractérisation possible des formes linéaires $\mu: \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow E$ qui s'étendent en des formes linéaires continues sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. Elle généralise un résultat dû à Amice-Vélu et Vishik [2, 65].

Définition 3.3.7. — On appelle *distribution $(J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ -tempérée d'ordre r sur \mathcal{O}_F* toute forme linéaire continue sur l'espace de Banach $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

On note $(C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_{r, J', (d_\sigma)_\sigma})}$ l'espace des distributions $(J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ -tempérées d'ordre r sur \mathcal{O}_F muni de la topologie forte.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Si $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ et si $f \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ on note, pour $a \in \mathcal{O}_F$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu(\mathbf{1}_{D(a, n)} f) = \int_{D(a, n)} f(z) \mu(z).$$

Théorème 3.3.8 ([27], Théorème 4.2). — (i) Soit $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$. Il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ et tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$, on ait :

$$(3.3.4) \quad \left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J'}} (z - a)^{\underline{m}_{J'}} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)}.$$

(ii) Soit $N \geq [r]$ un entier et soit $\mu \in \mathcal{F}^N(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Supposons qu'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ vérifiant $|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| \leq N$, on ait :

$$(3.3.5) \quad \left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.$$

Alors μ se prolonge de manière unique en une distribution $(J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ -tempérée d'ordre r sur \mathcal{O}_F .

Remarque 3.3.9. — La preuve du Théorème 3.3.8 utilise de manière cruciale la construction explicite d'une base de Banach de l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$, qui dépend de r et est donnée pour une famille dénombrable de fonctions localement polynômiales [27, Proposition 3.15]. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, cette base coïncide avec celle construite par Van der Put [63] pour l'espace des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p et généralisée par Colmez pour r quelconque [23, Théorème I.5.14]. Signalons que pour l'espace des fonctions continues sur \mathcal{O}_F , cette base avait déjà été construite par De Shalit [31, §2].

Remarque 3.3.10. — Une conséquence directe du Théorème 3.3.8 est la suivante [27, Corollaire 4.3]. Si pour $\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee$, on définit $\|\mu\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J}}$ par la formule

$$\|\mu\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J}} = \sup_{a \in \mathcal{O}_F, n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J \\ \underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}}} \left(\left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| q^{-n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} \right),$$

alors $\|\cdot\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J}}$ est une norme sur $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ qui est équivalente à $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_{r, J', (d_\sigma)_\sigma}}$.

3.4. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$

3.4.1. Généralités. — On fixe désormais une fois pour toutes une partie J de S . Si G est un groupe de Lie localement F -analytique, on note G_0 le groupe de Lie localement \mathbb{Q}_p -analytique obtenu à partir de G par restriction des scalaires de F à \mathbb{Q}_p [9, §5.14]. Si V est un E -espace vectoriel localement convexe séparé, on peut définir, comme dans [55, §2] l'espace des fonctions localement \mathbb{Q}_p -analytiques de G dans V : c'est simplement l'espace des fonctions localement analytiques de G_0 dans V . On note $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G, V)$ cet espace, que l'on munit de l'action à gauche usuelle de G .

Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . On dispose d'une action \mathbb{Q}_p -linéaire de \mathfrak{g} sur $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G, V)$ définie par :

$$(\mathfrak{t}f)(g) = \left. \frac{d}{dt} \left(t \mapsto f(\exp(-t\mathfrak{t})g) \right) \right|_{t=0}$$

où $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$ désigne l'application exponentielle définie localement au voisinage de 0 [55, §2]. Cette action se prolonge en une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$. Puisque \mathfrak{g} est un F -espace vectoriel, $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ est une algèbre de Lie sur l'anneau $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, ce qui permet d'obtenir un isomorphisme d'espaces vectoriels sur E :

$$(3.4.1) \quad \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \bigoplus_{\sigma \in S} \mathfrak{g} \otimes_{F, \sigma} E.$$

Définition 3.4.1 ([59], Définition 1.3.1). — Une fonction localement \mathbb{Q}_p -analytique $f: G \rightarrow V$ est dite *localement J -analytique* si l'action de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ sur f se factorise par $\bigoplus_{\sigma \in J} \mathfrak{g} \otimes_{F, \sigma} E$.

L'ensemble des fonctions localement J -analytiques est un sous-espace fermé de $C^{\mathbb{Q}_p\text{-an}}(G, V)$ que l'on note $C^{J\text{-an}}(G, V)$ et que l'on munit de la topologie induite.

Définition 3.4.2 ([59], Définition 1.3.4). — Soit V un espace vectoriel muni d'une topologie séparée localement convexe tonnelée. On dit que V est une *représentation localement J -analytique de G* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) le groupe G agit sur V par endomorphismes continus ;
- (ii) pour tout $v \in V$, l'application de G dans V définie par l'action de G sur v est localement J -analytique.

Remarque 3.4.3. — Dans la Définition 3.4.2, supposer que V est tonnelé assuré, grâce au Théorème de Banach-Steinhaus [54, Théorème 6.15], que l'action de G sur V est continue.

Exemple 3.4.4. — L'espace localement convexe $C^{J\text{-an}}(G, V)$ muni de l'action à gauche usuelle de G est une représentation localement J -analytique.

3.4.2. Rappels sur les induites localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$. — On pose $G = \mathrm{GL}_2(F)$. On note T le tore déployé constitué des matrices diagonales de G , P le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G , et N le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures de G .

Si (ρ, V) est une représentation localement J -analytique de P , on note $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)^{J\text{-an}}$ l'espace des fonctions $f: G \rightarrow V$ localement J -analytiques telles que :

$$\forall g \in G, \forall p \in P, \quad f(pg) = \rho(p)f(g).$$

On munit cet espace d'une action à gauche E -linéaire de G en posant $(gf)(g') = f(g'g)$: on obtient ainsi une représentation localement J -analytique de G .

Soit χ un caractère localement \mathbb{Q}_p -analytique de T , que l'on peut voir comme une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique de P par inflation. Nous allons construire maintenant des sous-représentations localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$. Ensuite, en utilisant l'espace des fonctions localement analytiques sur \mathcal{O}_F construit dans la Section §3.3.2, nous en donnerons une nouvelle description.

Pour $t_1, t_2 \in F^\times$ assez proches de 1, on a

$$\chi\left(\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}\right) = \prod_{\sigma \in S} \sigma(t_1)^{d_{1,\sigma}} \sigma(t_2)^{d_{2,\sigma}},$$

avec $d_{1,\sigma}, d_{2,\sigma} \in E$. Notons alors J le sous-ensemble de S formé des éléments σ tels que

$$d_{2,\sigma} - d_{1,\sigma} \notin \mathbb{N}.$$

Quitte à considérer la représentation $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} \otimes ((\prod_{\sigma \in S \setminus J} \sigma^{d_{1,\sigma}}) \circ \det)^{-1}$, on peut supposer que l'on a, au voisinage de 1

$$\chi\left(\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}\right) = \chi_1(t_1) \chi_2(t_2) \prod_{\sigma \in S \setminus J} \sigma(t_2)^{d_\sigma},$$

avec χ_1 et χ_2 deux caractères localement J -analytiques de P et d_σ est un entier positif ou nul. On pose $u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et, pour tout $\sigma \in S$, on note u_σ l'élément de $\mathfrak{gl}_2(F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ défini par u via l'isomorphisme (3.4.1) sur la composante associée à σ . Si $\sigma \in S \setminus J$, on pose $\mathfrak{z}_\sigma = (u_\sigma)^{d_\sigma+1}$ et l'on définit ϵ_σ par :

$$\epsilon_\sigma\left(\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix}\right) = \sigma(t_1 t_2^{-1}).$$

D'après [59, Proposition 1.3.11], l'élément \mathfrak{z}_σ induit une application de $\text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an}$ dans $\text{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^{d_\sigma+1})^{S-an}$, encore notée \mathfrak{z}_σ , qui est surjective et dont le noyau est isomorphe à

$$(\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \otimes_E \text{Ind}_P^G(\chi^\sigma)^{S \setminus \{\sigma\} - an}.$$

On a ici utilisé les notations suivantes :

- pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ on note $(\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ la représentation algébrique irréductible de $\text{GL}_2 \otimes_{F,\sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma : \text{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$;
- On définit le caractère χ^σ par :

$$\chi^\sigma = \chi_1 \otimes \left(\chi_2 \prod_{\tau \in S \setminus (J \sqcup \{\sigma\})} \tau^{d_\tau} \right).$$

On en déduit immédiatement, pour toute partie S' de $S \setminus J$, l'isomorphisme suivant :

$$\bigcap_{\sigma \in S'} \ker \mathfrak{z}_\sigma \xrightarrow{\sim} \left(\bigotimes_{\sigma \in S'} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S \setminus J) \setminus S'} \sigma^{d_\sigma} \right)^{S \setminus S' - an}.$$

Posons $m_\sigma = d_\sigma + 1$. D'après la preuve de [59, Proposition 1.3.11], on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}_P^G(\chi)^{S-an} & \xrightarrow{\mathfrak{z}_\sigma} & \text{Ind}_P^G(\chi \epsilon_\sigma^{m_\sigma})^{S-an} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S))^2 & \xrightarrow{\left(-\frac{\partial^{m_\sigma}}{\partial z_\sigma^{m_\sigma}}, -\frac{\partial^{m_\sigma}}{\partial \bar{z}_\sigma^{m_\sigma}} \right)} & (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S))^2 \end{array}$$

où

- $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S)$ désigne l'espace $\mathcal{F}(U, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ pour $U = \mathcal{O}_F$ et $J = S$ (donc $S \setminus J = \emptyset$);
- la flèche verticale de gauche (resp. de droite) est un isomorphisme topologique explicitement donné par :

$$f \longmapsto \left((z \mapsto f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varpi_F z \end{bmatrix}\right)), (z \mapsto f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & -1 \end{bmatrix}\right)) \right).$$

On en déduit donc l'existence d'un isomorphisme topologique :

$$(3.4.2) \quad \left(\bigotimes_{\sigma \in S'} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S \setminus J) \setminus S'} \sigma^{d_\sigma} \right)^{S \setminus S' - an} \simeq (\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S \setminus S', \underline{d}_{S'}))^2.$$

Posons alors :

$$I(\chi, S \setminus S', \underline{d}_{S'}) = \left(\bigotimes_{\sigma \in S'} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{(S \setminus J) \setminus S'} \sigma^{d_\sigma} \right)^{S \setminus S' - an}$$

et notons V le E -espace vectoriel des fonctions $f: F \rightarrow E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ appartient à $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S \setminus S', \underline{d}_{S'})$;
- (ii) $\chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur \mathcal{O}_F en une fonction de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S \setminus S', \underline{d}_{S'})$.

L'application

$$(3.4.3) \quad \begin{aligned} V &\longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S \setminus S', \underline{d}_{S'}) \oplus \mathcal{F}(\mathcal{O}_F, S \setminus S', \underline{d}_{S'}) \\ f &\longmapsto \left((z \mapsto f(\varpi_F z)), (z \mapsto \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} f(1/z)) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E -espaces vectoriels qui permet de munir V de la topologie localement convexe induite par cette application. Les isomorphismes (3.4.2) et (3.4.3) et l'égalité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{-cz+a} & -c \\ 0 & -cz+a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{dz-b}{-cz+a} \end{bmatrix}$$

assurent alors que l'action de G sur $I(\chi, S \setminus S', \underline{d}_{S'})$ se traduit sur V de la façon suivante : pour tout $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$, tout $f \in V$, et tout $z \in F - \{\frac{a}{c}\}$, on a

$$(3.4.4) \quad \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f \right) (z) = \chi_1(\det(g)) \chi_2 \chi_1^{-1}(-cz+a) (-cz+a)^{\underline{d}_{S \setminus J}} f\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right).$$

Ils assurent en outre que si $c \neq 0$, alors on peut prolonger gf par continuité en $z = \frac{a}{c}$ en une fonction appartenant à V .

3.4.3. Une $\text{GL}_2(F)$ -représentation de Banach. — Soit $\chi_1, \chi_2: F^\times \rightarrow E^\times$ deux caractères localement J -analytiques et $\underline{d}_{S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons $r = -\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))$ et supposons $r \geq 0$. Posons :

$$J' = J \coprod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}, \quad \chi'_1 = \chi_1, \text{ et } \chi'_2 = \chi_2 \prod_{\sigma \in J' \setminus J} \sigma^{d_\sigma}.$$

À l'aide des espaces définis au §3.3.1.2, nous allons définir un nouveau G -Banach attaché au triplet (J', χ'_1, χ'_2) .

Notons $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ le E -espace vectoriel des fonctions $f: F \rightarrow E$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $f|_{\mathcal{O}_F}$ appartient à $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$;
- (ii) $\chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f(1/z)|_{\mathcal{O}_F - \{0\}}$ se prolonge sur \mathcal{O}_F en un élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.

L'application

$$(3.4.5) \quad \begin{aligned} B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) &\longrightarrow C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \\ f &\longmapsto \left((z \mapsto f(\varpi_F z)), (z \mapsto \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f(1/z)) \right) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E -espaces vectoriels. On munit alors $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ de la topologie localement convexe déduite de cette application, ce qui en fait un espace de Banach sur E pour la norme $\|\cdot\|_B$ définie comme suit : si (f_1, f_2) désigne l'élément de $(C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}))^2$ correspondant à $f \in B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ via l'isomorphisme (3.4.5), alors :

$$(3.4.6) \quad \|f\|_B = \sup(\|f_1\|_{C^r}, \|f_2\|_{C^r}).$$

Pour $f \in B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ et $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$, considérons la fonction définie par

$$(3.4.7) \quad (gf)(z) = \chi_1(\det(g)) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(-cz + a)(-cz + a)^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f\left(\frac{dz - b}{-cz + a}\right)$$

pour tout $z \neq \frac{a}{c}$ (si $c \neq 0$). Le prochain résultat montre que gf se prolonge par continuité en $z = \frac{a}{c}$ en un élément de $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ et que, pour l'action de G définie par la formule (3.4.7), l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est un G -Banach.

Lemme 3.4.5. — *L'action à gauche de G sur l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ donnée par la formule (3.4.7) est bien définie et se fait par automorphismes continus.*

Preuve. — Soit $f = (f_1, f_2) \in B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. En utilisant l'isomorphisme (3.4.5), on voit que l'on a d'autre part, pour tout $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$

$$(gf)_1(z) = \chi'_1(\det(g)) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(-c\varpi_F z + a)(-c\varpi_F z + a)^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f_1\left(\frac{dz - \frac{b}{\varpi_F}}{-c\varpi_F z + a}\right)$$

si $\frac{d\varpi_F z - b}{-c\varpi_F z + a} \in \varpi_F \mathcal{O}_F$ et

$$(gf)_1(z) = \chi'_1(\det(g)) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(d\varpi_F z - b)(d\varpi_F z - b)^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f_2\left(\frac{-c\varpi_F z + a}{d\varpi_F z - b}\right)$$

si $\frac{d\varpi_F z - b}{-c\varpi_F z + a} \in F \setminus \varpi_F \mathcal{O}_F$; et d'autre part,

$$(gf)_2(z) = \chi'_1(\det(g)) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(-c + az)(-c + az)^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f_1\left(\frac{-\frac{b}{\varpi_F} + \frac{d}{\varpi_F}}{az - c}\right)$$

si $\frac{-bz + d}{az - c} \in \varpi_F \mathcal{O}_F$ et

$$(gf)_2(z) = \chi'_1(\det(g)) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(-bz + d)(-bz + d)^{\underline{d}_{S \setminus J'}} f_2\left(\frac{az - c}{-bz + d}\right)$$

si $\frac{-bz + d}{az - c} \in F \setminus \varpi_F \mathcal{O}_F$.

Il suffit maintenant de montrer que l'application

$$(3.4.8) \quad \begin{aligned} C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) &\longrightarrow C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \\ (f_1, f_2) &\longmapsto ((gf)_1, (gf)_2) \end{aligned}$$

est bien définie et continue. Par la décomposition de Bruhat $G = P \cup PwN$, il nous suffit de montrer la stabilité et la continuité de l'application (3.4.8) pour les matrices g de la forme $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & \varpi_F \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $\lambda \in F^\times$, ce qui est une conséquence des formules ci-dessus, de la Proposition 3.3.4 et du fait que l'espace $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est une E -algèbre de Banach [27, Lemme 2.9]. \square

Le Lemme 3.4.5 et le Théorème de Banach-Steinhaus [54, Théorème 6.15] impliquent alors que l'espace $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est un G -Banach.

Soit $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Fixons $S_k \subset \mathcal{O}_F^\times$ un système de représentants des classes de $(\mathcal{O}_F / \varpi_F^k \mathcal{O}_F)^\times$, et notons l le plus petit entier positif tel que $\chi'_1|_{D(a_i, l)}$ et $\chi'_2|_{D(a_i, l)}$ soient des fonctions J' -analytiques sur l'ouvert $D(a_i, l)$ pour tout $a_i \in S_l$.

Supposons de plus que le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est entier, ce qui équivaut à demander que

$$(3.4.9) \quad \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi'_1(p)) + \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi'_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J'}| = 0.$$

Lemme 3.4.6. — *Les fonctions de F dans E définies par les formules suivantes sont des éléments de $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$:*

$$\begin{aligned} z &\mapsto z^{\underline{n}_{S \setminus J'}} z^{\underline{m}_{J'}}, \\ z &\mapsto \begin{cases} \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} (z-a)^{-\underline{m}_{J'}} & \text{si } z \neq a \\ 0 & \text{si } z = a; \end{cases} \end{aligned}$$

avec $a \in F$, $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ et $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J'}| + |\underline{m}_{J'}|) > 0$.

Preuve. — Le même raisonnement que celui permettant de prouver [8, Lemme 4.2.2] s'applique : il suffit de montrer que la fonction $f: \mathcal{O}_F \rightarrow E$ définie par

$$f(z) = \begin{cases} \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

appartient à $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. Soit f_0 la fonction nulle sur \mathcal{O}_F et, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, posons :

$$f_n(z) = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F \setminus D(0, n)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}}.$$

La fonction f_n est bien dans $C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ puisqu'elle est en fait dans $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. Par [54, Lemme 9.9], il suffit de montrer que $f_{n+1} - f_n$ tend vers 0 dans l'espace dual de l'espace de Banach des distributions $(J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ -tempérées d'ordre r sur \mathcal{O}_F . Autrement dit, on veut montrer que

$$\sup_{\mu \in C^r(\mathcal{O}_F, J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\vee} \frac{\left| \int_{\mathcal{O}_F} (f_{n+1}(z) - f_n(z)) \mu(z) \right|}{\|\mu\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J'}}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Remarquons que

$$(3.4.10) \quad \begin{aligned} f_{n+1}(z) - f_n(z) &= \mathbf{1}_{D(0, n) \setminus D(0, n+1)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}} \\ &= \sum_{a_i \in S_l} \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^l, n+l)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}}. \end{aligned}$$

Comme χ'_1 et χ'_2 sont des caractères J' -analytiques sur $D(a_i, l)$ pour tout $a_i \in S_l$, on sait que pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) &= \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(\varpi_F^n) \mathbf{1}_{D(a_i, l)}\left(\frac{z}{\varpi_F^n}\right) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}\left(\frac{z}{\varpi_F^n}\right) \\ &= \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(\varpi_F^n) \mathbf{1}_{D(a_i, l)}\left(\frac{z}{\varpi_F^n}\right) \sum_{\underline{h}_{J'} \geq \underline{0}} b_{\underline{h}_{J'}}(a_i) \left(\frac{z}{\varpi_F^n} - a_i\right)^{\underline{h}_{J'}} \\ &= \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(\varpi_F^n) \sum_{\underline{h}_{J'} \geq \underline{0}} \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) b_{\underline{h}_{J'}}(a_i) \left(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{h}_{J'}}. \end{aligned}$$

Grâce à la condition (3.4.9), on sait que $|\chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(\varpi_F^n)| = q^{-n(2r - |d_{S \setminus J'}|)}$. Ainsi, en écrivant $z^{-\underline{m}_{J'}} = (z - a_i \varpi_F^n + a_i \varpi_F^n)^{-\underline{m}_{J'}}$ et en développant, on obtient, pour tout $a_i \in S_l$:

$$\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) z^{-\underline{m}_{J'}} = \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) (a_i \varpi_F^n)^{-\underline{m}_{J'}} \sum_{\underline{t}_{J'} \geq \underline{0}} \lambda_{\underline{t}_{J'}} a_i^{-\underline{t}_{J'}} \left(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^n}\right)^{\underline{t}_{J'}},$$

où les $\lambda_{\underline{t}_{J'}}$ sont des éléments de \mathcal{O}_E . De même on obtient, pour tout $a_i \in S_l$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} \\ &= \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) \sum_{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} \mu_{\underline{k}_{S \setminus J'}}(a_i \varpi_F^n)^{\underline{k}_{S \setminus J'}} (z - a_i \varpi_F^n)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'} - \underline{k}_{S \setminus J'}}, \end{aligned}$$

avec $\mu_{\underline{k}_{S \setminus J'}} \in \mathbb{N}_{>0}$.

Pour tout $\underline{0} \leq \underline{\alpha}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ et tout $\underline{\beta}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$, notons alors $f_{\underline{\alpha}_{S \setminus J'}, \underline{\beta}_{J'}} : \mathcal{O}_F \setminus \{0\} \rightarrow E$, la fonction définie par :

$$f_{\underline{\alpha}_{S \setminus J'}, \underline{\beta}_{J'}}(z) = z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{\alpha}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{\beta}_{J'}}.$$

Par (3.4.10), on a :

$$|\mu(f_{n+1}(z) - f_n(z))| = \sup_{a_i \in S_l} |\mu(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J'}, \underline{m}_{J'}}(z))|.$$

Si l'on note $C_1 = \sup_{a_i \in S_l} \sup_{\underline{h}_{J'}} |b_{\underline{h}_{J'}}(a_i)|$, les égalités précédentes montrent alors que pour tout $a_i \in S_l$, on a :

$$\begin{aligned} &|\mu(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) \chi'_2 \chi'_1{}^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} z^{-\underline{m}_{J'}})| \\ &\leq C_1 q^{-n(2r - |d_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}|)} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'} \\ \underline{k}_{S \setminus J'}}} q^{-n(|\underline{k}_{S \setminus J'}| - |\underline{l}_{J'}|)} |\mu(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J'} + \underline{k}_{S \setminus J'}, \underline{l}_{J'}}(z - a_i \varpi_F^n))|, \end{aligned}$$

où $\underline{l}_{J'}$ varie dans $\mathbb{N}^{J'}$ et où $\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$. D'après la Remarque 3.3.10, on a aussi :

$$|\mu(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^n, n+l)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J'} + \underline{k}_{S \setminus J'}, \underline{l}_{J'}}(z - a_i \varpi_F^n))| \leq \|\mu\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J'}} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'} \\ \underline{k}_{S \setminus J'}}} q^{(n+l)(r + |\underline{k}_{S \setminus J'}| - |\underline{l}_{J'}| - |d_{S \setminus J'}| + |\underline{n}_{S \setminus J'}|)},$$

d'où l'on déduit que

$$|\mu(f_{n+1}(z) - f_n(z))| \leq C_1 \|\mu\|_{r, \underline{d}_{S \setminus J'}} q^{-n(r - |\underline{m}_{J'}| - |\underline{n}_{S \setminus J'}|)} \sup_{\substack{\underline{l}_{J'} \\ \underline{k}_{S \setminus J'}}} q^{l(r + |\underline{k}_{S \setminus J'}| - |\underline{l}_{J'}| - |d_{S \setminus J'}| + |\underline{n}_{S \setminus J'}|)},$$

ce qui prouve le résultat car $r > |\underline{m}_{J'}| + |\underline{n}_{S \setminus J'}|$. \square

D'après le Lemme 3.4.6, on sait que pour tout $a \in F$, tout $\underline{m}_{J'} \in \mathbb{N}^{J'}$ et tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J'} \leq \underline{d}_{S \setminus J'}$ tels que $r - |\underline{n}_{S \setminus J'}| - |\underline{m}_{J'}| > 0$, les fonctions $[z \mapsto z^{\underline{n}_{S \setminus J'}} z^{\underline{m}_{J'}}]$ et $[z \mapsto \chi_2' \chi_1'^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J'} - \underline{n}_{S \setminus J'}} (z-a)^{-\underline{m}_{J'}}]$ sont dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. Notons $L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ l'adhérence dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ du sous- E -espace vectoriel engendré par ces fonctions. Un calcul direct laissé au lecteur permet de vérifier l'énoncé suivant.

Lemme 3.4.7. — *Le sous-espace $L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$ est stable par G dans $B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$.*

Posons alors

$$\Pi(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \stackrel{\text{déf}}{=} B(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) / L(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}).$$

C'est un espace de Banach sur E qui est munit, d'après les Lemmes 3.4.5 et 3.4.7, d'une action de G par automorphismes continus.

3.5. Réseaux

3.5.1. Deux conditions nécessaires de non nullité. — Soit $\chi_1, \chi_2: F^\times \rightarrow E^\times$ deux caractères localement J -analytiques et $\underline{d}_{S \setminus J}$ un $|S \setminus J|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons $r = -\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p))$ et considérons la représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) = \left(\bigotimes_{\sigma \in S \setminus J} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \right)^{J-an}$$

que nous avons construite dans la Section §3.4.2. Soit $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})(F)$ le sous-espace fermé de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ formé des fonctions à support compact. Il est stable sous l'action de P et il engendre $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ sous G . En outre, il contient l'espace $\mathcal{O}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ et l'on vérifie immédiatement que

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) = \sum_{g \in G} g \mathcal{O}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J}).$$

D'après la preuve de [33, Proposition 1.21], le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ par rapport au sous- $\mathcal{O}_E[G]$ -réseau engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}$ avec $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. En utilisant la décomposition d'Iwasawa $G = PK$ et la compacité de K , on voit qu'il suffit de compléter par rapport au sous- $\mathcal{O}_E[P]$ -réseau Λ engendré par les vecteurs $\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}$ et $\mathbf{1}_{F - \mathcal{O}_F}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{-\underline{m}_J}$ avec $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. Notons $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ le complété de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ par rapport à Λ : c'est un G -Banach unitaire pour lequel on dispose des deux conditions nécessaires de non nullité suivantes.

Proposition 3.5.1. — *Les deux conditions suivantes sont nécessaires pour que $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ soit non nul :*

- (i) *le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est à valeurs entières ;*
- (ii) *on a l'inégalité $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J}| \geq 0$.*

Preuve. — Supposons que $(I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge, \|\cdot\|)$ soit non nul. En particulier, l'application canonique $\iota: I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ est non nulle. Soit donc $f \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ tel que $\iota(f) \neq 0$. Comme ι est G -équivariante et comme $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ est un G -Banach unitaire, on a :

$$\left| \chi_1(p) \chi_2(p) p^{|\underline{d}_{S \setminus J}|} \right| \|\iota(f)\| = \|\iota(f)\|,$$

ce qui prouve (i).

Montrons maintenant que si $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J}| < 0$, alors $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ est nul. Ceci équivaut à prouver que pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$, on a :

$$(3.5.1) \quad \forall \lambda \in E, \forall n \geq 0, \quad \lambda \mathbf{1}_{D(0,n)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \in \Lambda.$$

Nous allons raisonner par récurrence sur $|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|$.

Supposons tout d'abord $|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| = 0$. Soit $\lambda \in E$ et $n \in \mathbb{N}$. Notons m le plus petit entier positif tel que $\text{val}_F(\chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}}) < \text{val}_F(\lambda)$ et fixons $R \subset \mathcal{O}_F$ un système de représentants des classes de $\mathcal{O}_F / \varpi_F^m \mathcal{O}_F$. Comme Λ est stable sous l'action de P , la formule (3.4.4) assure que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^m & \varpi_F^n a_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right] \mathbf{1}_{D(0,n)} = \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda.$$

On en déduit que

$$\sum_{a_i \in R} \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} = \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda,$$

ce qui assure que $\lambda \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda$.

Supposons maintenant que (3.5.1) soit vrai pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| \leq l$ où l est un entier positif. Soit $\underline{i} \in \mathbb{N}^S$ tel que :

$$|\underline{i}| = l + 1 \quad \text{et} \quad i_\sigma \leq d_\sigma, \quad \text{pour tout } \sigma \in S \setminus J.$$

Comme Λ est stable sous l'action de P , la formule (3.4.4) assure que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \left[\begin{smallmatrix} \varpi_F^m & \varpi_F^n a_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right] z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} = \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^m} \right)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda,$$

avec $\mu_k \in \mathbb{Z}$. On en déduit, en développant $\left(\frac{z - a_i \varpi_F^n}{\varpi_F^m} \right)^{\underline{i}}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, que l'on a :

$$\forall a_i \in R, \quad \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{z}{\varpi_F^m} \right)^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} \in \Lambda.$$

Ceci assure en particulier que l'on a :

$$\sum_{a_i \in R} \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \varpi_F^{-m \underline{i}} z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(\varpi_F^n a_i, n+m)} = \chi_2(\varpi_F^m) \varpi_F^{m \underline{d}_{S \setminus J}} \varpi_F^{-m \underline{i}} z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda,$$

ce qui implique que $\lambda z^{\underline{i}} \mathbf{1}_{D(0,n)} \in \Lambda$, et permet de conclure. \square

Remarque 3.5.2. — La condition (i) de la Proposition 3.5.1 peut s'exprimer par l'égalité suivante :

$$(3.5.2) \quad \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J}| = 0.$$

On termine cette section par quelques remarques sur le cas localement algébrique. Soient $\chi_1, \chi_2: F^\times \rightarrow E^\times$ deux caractères localement constants et \underline{d} un $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls. Posons :

$$I(\chi, \underline{d}) = \left(\bigotimes_{\sigma \in S} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 | \cdot |^{-1} \right),$$

où $\text{Ind}_P^G(\chi_1 \otimes \chi_2 | \cdot |^{-1})$ désigne l'induite lisse usuelle. D'après la Proposition 3.5.1 et d'après [49, Lemme 7.9] on connaît deux conditions nécessaires pour que $I(\chi, \underline{d})^\wedge$ soit non nul, à savoir :

- (i) $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| = 0$;
- (ii) $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| \geq 0$ et $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| \geq 0$.

On voit que (i) et (ii) sont équivalentes à

- (i') $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) + \text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + [F : \mathbb{Q}_p] + |\underline{d}| = 0$;
- (ii') $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) \leq 0$ et $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_1(p)) \leq 0$.

Rappelons la conjecture suivante qui est un cas particulier d'une conjecture plus générale due à Breuil et Schneider [20].

Conjecture 3.5.3. — *Avec les notations précédentes, les conditions (i') et (ii') sont aussi des conditions suffisantes à la non nullité de $I(\chi, \underline{d})^\wedge$.*

Remarque 3.5.4. — La Conjecture 3.5.3 est démontrée dans les cas suivants :

- lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ [8, Corollaire 5.3.1] ;
- orsqe $\chi_2\chi_1^{-1}$ est un caractère modérément ramifié avec $\underline{d} = \underline{0}$ [64, Proposition 0.10], ou [42, Théorème 1.2] pour une preuve alternative ;
- lorsque $\chi_2\chi_1^{-1}$ est un caractère non ramifié avec certaines conditions sur \underline{d} [29].

3.5.2. Passage au dual. — On conserve les notations du §3.5.1. Supposons que les conditions (i) et (ii) de la Proposition 3.5.1 soient satisfaites, ce qui implique en particulier que $r \geq 0$. Posons à nouveau :

$$J' = J \prod \{\sigma \in S \setminus J, d_\sigma + 1 > r\}, \quad \chi'_1 = \chi_1, \quad \chi'_2 = \chi_2 \prod_{\sigma \in J' \setminus J} \sigma^{d_\sigma}.$$

On sait que l'on dispose d'une immersion fermée G -équivariante :

$$(3.5.3) \quad I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \hookrightarrow I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}).$$

Le prochain résultat donne des informations sur les vecteurs localement \mathbb{Q}_p -analytiques de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$.

Proposition 3.5.5. — *Supposons que les conditions de la Proposition 3.5.1 soient satisfaites. Alors les conditions suivantes sont équivalentes et vérifiées :*

- (i) *Toute application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow B$, avec B un G -Banach unitaire, s'étend de manière unique en une application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \rightarrow B$.*
- (ii) *L'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ s'étend de manière unique en une application continue, E -linéaire et G -équivariante $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$.*
- (iii) *L'application (3.5.3) induit un isomorphisme de G -Banach unitaires :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge.$$

Preuve. — L'équivalence des conditions (i), (ii) et (iii) est claire. Breuil montre (i) en supposant de plus que l'application de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ dans B est injective [17, Théorème 7.1]. Une preuve analogue, qui utilise de façon cruciale [17, Lemme 6.1], permet de démontrer le cas général. \square

D'après la Proposition 3.5.5 (iii), donner une description explicite de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ revient à donner une description explicite de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})^\wedge$. On peut ainsi supposer que :

$$(3.5.4) \quad \forall \sigma \in S \setminus J, \quad r \geq d_\sigma + 1,$$

ou encore que $J = J'$.

Rappelons (§3.5.1) que le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est le complété par rapport au sous- $\mathcal{O}_E[P]$ -réseau Λ engendré par les vecteurs :

$$(3.5.5) \quad \mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S \setminus J}}z^{\underline{m}_J} \quad \text{et} \quad \mathbf{1}_{F-\mathcal{O}_F}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}-\underline{n}_{S \setminus J}}z^{-\underline{m}_J}$$

pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$.

De plus, on note $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ le dual continu de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ muni de la topologie forte. Si $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ et $f \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$, on note, pour tout ouvert U de F :

$$\mu(\mathbf{1}_U f) = \int_U f(z)\mu(z).$$

D'après la Remarque 3.2.4, l'application canonique $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ est d'image dense. Par suite on a une injection continue

$$(3.5.6) \quad (I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge)^\vee \hookrightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee.$$

Le résultat suivant donne une caractérisation utile de l'image de l'application (3.5.6).

Proposition 3.5.6. — *Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Alors μ appartient à $(I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge)^\vee$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$:*

$$(3.5.7) \quad \left| \int_{D(a,n)} (z-a)^{\underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r-|\underline{n}_{S \setminus J}|-|\underline{m}_J|)};$$

$$(3.5.8) \quad \left| \int_{F \setminus D(a,n+1)} \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J}-\underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)}.$$

Preuve. — La distribution μ s'étend en une forme linéaire continue sur $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :

$$(3.5.9) \quad \forall f \in \Lambda, \quad \left| \int_F f(z)\mu(z) \right| \leq C_\mu.$$

En utilisant (3.5.5) et l'identité

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S \setminus J}}z^{\underline{m}_J}) = \mathbf{1}_{F-\mathcal{O}_F}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}-\underline{n}_{S \setminus J}}z^{-\underline{m}_J},$$

on obtient immédiatement que (3.5.9) est équivalente aux deux conditions suivantes :

$$(3.5.10) \quad \left| \mu(b(\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S \setminus J}}z^{\underline{m}_J})) \right| \leq C_\mu;$$

$$(3.5.11) \quad \left| \mu(b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S \setminus J}}z^{\underline{m}_J})) \right| \leq C_\mu;$$

pour tout $b \in \left\{ \begin{bmatrix} \varpi_F^n & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{Z}, a \in F \right\}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$.

Or, en appliquant la formule (3.4.4) et d'après (3.5.2), on obtient que

$$\begin{aligned} \left| \mu \left(\begin{bmatrix} \varpi_F^n & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathbf{1}_{\mathcal{O}_F}(z)z^{\underline{n}_{S \setminus J}}z^{\underline{m}_J}) \right) \right| &= \left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)\chi_2(\varpi_F^n)\varpi_F^{n\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{z-a}{\varpi_F^n} \right)^{\underline{m}_J} \right) \right| \\ &= q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}|+|\underline{m}_J|-r)} \left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J} \right) \right| \end{aligned}$$

d'où la condition (3.5.7).

Un calcul analogue montre que la condition (3.5.11) est équivalente à la condition (3.5.8). \square

Définition 3.5.7. — On appelle *distribution* $(J, \underline{d}_{S \setminus J})$ -tempérée d'ordre r sur F une forme linéaire continue sur l'espace de Banach $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$.

D'après ce que l'on a vu dans la Section §3.3.2, on sait que $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ s'injecte de façon continue dans $C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ et que son image y est dense. En utilisant le fait que $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ (resp. $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$) s'identifie topologiquement à deux copies de $\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ (resp. $C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})$), on en déduit l'existence d'une injection $\mathrm{GL}_2(F)$ -équivariante continue

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \hookrightarrow B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}),$$

dont l'image est dense dans $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$, puis d'une injection continue

$$(3.5.12) \quad B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee \hookrightarrow I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee.$$

Le résultat suivant donne une caractérisation utile de l'image de l'application (3.5.12).

Proposition 3.5.8. — Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Alors μ est tempérée d'ordre r sur F si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que l'on ait :

$$(3.5.13) \quad \left| \int_{D(a, n)} (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 1$;

$$(3.5.14) \quad \left| \int_{F \setminus D(0, n+1)} \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{-\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - r)}$$

pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \leq 0$;

$$(3.5.15) \quad \left| \int_{D(\frac{1}{a}, n - \frac{2 \operatorname{val}_F(a)}{f})} \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout entier $n > \frac{\operatorname{val}_F(a)}{f}$.

Preuve. — L'application (3.4.2) (resp. (3.4.5)) induit un isomorphisme topologique de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ dans $(\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee)^2$ (resp. de $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ dans $(C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee)^2$). Si l'on note (μ_1, μ_2) l'élément de $(\mathcal{F}(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee)^2$ qui correspond à μ via cet isomorphisme, il est clair que μ est tempérée d'ordre r sur F si et seulement si les distributions μ_1 et μ_2 sont $(J, \underline{d}_{S \setminus J})$ -tempérées d'ordre r sur \mathcal{O}_F . D'après le Théorème 3.3.8, la distribution μ_1 (resp. μ_2) est $(J, \underline{d}_{S \setminus J})$ -tempérée d'ordre r sur \mathcal{O}_F si et seulement s'il existe une constante $C_{\mu_1} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ (resp. $C_{\mu_2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) telle que pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$, on ait :

$$(3.5.16) \quad \left| \mu_1 \left(\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_{\mu_1} q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} ;$$

$$(3.5.17) \quad \left| \mu_2 \left(\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_{\mu_2} q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} .$$

La fonction f correspondant au couple

$$(f_1, f_2) = (\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) (z - a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{\underline{m}_J}, 0)$$

via (3.4.3) est la fonction $\mathbf{1}_{D(\varpi_F a, n+1)}(z) \left(\frac{z}{\varpi_F} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{z}{\varpi_F} - a\right)^{\underline{m}_J}$. Ainsi, la condition (3.5.16) se traduit par

$$\left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(\varpi_F a, n+1)}(z) (z - \varpi_F a)^{\underline{n}_{S \setminus J}} (z - \varpi_F a)^{\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_{\mu_1} q^{(n+1)(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$, d'où (3.5.13).

La fonction f correspondant au couple

$$(f_1, f_2) = (0, \mathbf{1}_{D(a,n)}(z)(z-a)^{\underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{\underline{m}_J})$$

via (3.4.3) est la fonction $\mathbf{1}_{\{z: |\frac{1}{z}-a| \leq |\varpi_F^n|\}}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}}(\frac{1}{z}-a)^{\underline{n}_{S \setminus J}}(\frac{1}{z}-a)^{\underline{m}_J}$. Nous devons ici distinguer deux cas.

- Si $a \in D(0, n)$, on a $\{z: |\frac{1}{z}-a| \leq |\varpi_F^n|\} = F \setminus D(0, -n+1)$; la condition (3.5.17) se traduit alors par

$$(3.5.18) \quad \left| \mu \left(\mathbf{1}_{F \setminus D(0, -n+1)}(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a \right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a \right)^{\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_{\mu_2} q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - r)}$$

pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n \geq 0$. En développant $(\frac{1}{z}-a)^{\underline{n}_{S \setminus J}}$ et $(\frac{1}{z}-a)^{\underline{m}_J}$, on voit directement l'équivalence des conditions (3.5.18) et (3.5.14).

- Si $a \in \mathcal{O}_F \setminus D(0, n)$, on a $\{z: |\frac{1}{z}-a| \leq |\varpi_F^n|\} = D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f})$, et la condition (3.5.17) se traduit alors par la condition (3.5.15). □

Corollaire 3.5.9. — Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Alors μ appartient à $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ si et seulement s'il existe une constante $C_\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant (3.5.13), (3.5.14), (3.5.15) ainsi que les deux conditions supplémentaires suivantes :

$$(3.5.19) \quad \int_F z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \mu(z) = 0;$$

$$(3.5.20) \quad \int_F \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J} \mu(z) = 0$$

pour tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la Proposition 3.5.8 et du Lemme 3.4.6. □

3.6. Preuve du Théorème principal

Conservons les notations du §3.5.1 et supposons que les conditions (i) et (ii) de la Proposition 3.5.1 soient vérifiées. Rappelons que cela revient à dire que le caractère central de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est entier et que l'inégalité $\text{val}_{\mathbb{Q}_p}(\chi_2(p)) + |\underline{d}_{S \setminus J}| \geq 0$ est vérifiée. De plus, par la Proposition 3.5.5 on sait que calculer le complété unitaire universel de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ revient à calculer le complété unitaire universel de $I(\chi', J', \underline{d}_{S \setminus J'})$. On peut donc supposer que $J = J'$.

Nous nous proposons de montrer que les conditions (3.5.7) et (3.5.8) sélectionnent exactement les distributions $(J, \underline{d}_{S \setminus J})$ -tempérées d'ordre r sur F annulant toutes les fonctions de la forme $[z \mapsto z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}]$ et $[z \mapsto \chi_2\chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}}(z-a)^{-\underline{m}_J}]$ avec $a \in F$, $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$. Plus précisément nous allons prouver le résultat suivant.

Théorème 3.6.1. — Soit $\mu \in I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- (A) La distribution μ vérifie les conditions (3.5.7) et (3.5.8);
- (B) La distribution μ vérifie les conditions (3.5.13), (3.5.14), (3.5.15), (3.5.19) et (3.5.20).

3.6.1. Preuve de (A) \implies (B). — Supposons que μ vérifie les conditions (3.5.7) et (3.5.8). Alors μ vérifie *a fortiori* (3.5.13) et (3.5.14). Pour montrer que (3.5.7) implique (3.5.15), quitte à changer la constante C_μ , on a besoin de l'équivalence suivante.

Lemme 3.6.2. — *Quitte à modifier la constante C_μ , la condition (3.5.15) est équivalente à la condition suivante :*

(i) *Il existe un entier $n_0 > 0$ tel que (3.5.15) est satisfaite pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n > n_0 + \frac{\text{val}_F(a)}{f}$.*

Preuve. — (3.5.15) \implies (i) est immédiat.

Montrons que (i) \implies (3.5.15). Soit $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $\frac{\text{val}_F(a)}{f} < n \leq n_0 + \frac{\text{val}_F(a)}{f}$. Si l'on pose $n' = n + n_0$, on peut écrire alors $D\left(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)$ comme union de disques de la forme $D' = D\left(\frac{1}{a'}, n' - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)$ avec $|a| = |a'|$ (et donc $|a - a'| \leq q^{-n}$). En écrivant $\left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{i}} = \left(\left(\frac{1}{z} - a'\right) + (a' - a)\right)^{\underline{i}}$ avec $\underline{i} \in \{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J\}$, puis en développant, on obtient que

$$\begin{aligned} & \left| \mu\left(\mathbf{1}_{D'}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J}\right) \right| \\ & \leq \sup_{\substack{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \\ \underline{0} \leq \underline{l}_J \leq \underline{m}_J}} \left\{ |a - a'|^{|\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{k}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - |\underline{l}_J|} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \left| \mu\left(\mathbf{1}_{D'}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a'\right)^{\underline{k}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a'\right)^{\underline{l}_J}\right) \right| \right\} \\ & \leq \sup_{\substack{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \\ \underline{0} \leq \underline{l}_J \leq \underline{m}_J}} q^{n(-|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{k}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J| + |\underline{l}_J|)} C_\mu q^{n'(r - |\underline{k}_{S \setminus J}| - |\underline{l}_J|)} \quad \text{par (i)} \\ & = C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} q^{(n' - n)r} \\ & \leq C'_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $C'_\mu \stackrel{\text{déf}}{=} C_\mu q^{n_0 r}$. Comme le dernier terme ne dépend pas du choix de a on peut conclure. \square

Proposition 3.6.3. — *Quitte à modifier la constante C_μ , la condition (3.5.7) implique la condition (3.5.15).*

Preuve. — Notons n_0 le plus petit entier positif tel que $(\chi_2 \chi_1^{-1})|_{D(1, n_0)}$ soit une fonction J -analytique. D'après le Lemme 3.6.2 il suffit de montrer que la condition (3.5.15) est satisfaite pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout $n > n_0 + \frac{\text{val}_F(a)}{f}$. Posons $D = D\left(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)$. D'après l'égalité

$$\mathbf{1}_D(z) \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} = \mathbf{1}_D(z) (-1)^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{-\underline{n}_{S \setminus J}} a^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}},$$

on obtient, en écrivant $z^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} = \left(z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}}$ et en développant, que

$$\mathbf{1}_D(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} = \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} \mu_{\underline{k}_{S \setminus J}} a^{-\underline{k}_{S \setminus J} + \underline{n}_{S \setminus J}} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{k}_{S \setminus J}},$$

avec $\mu_{\underline{k}_{S \setminus J}} \in \mathbb{N}$. De même, en écrivant $z^{-\underline{m}_J} = (z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a})^{-\underline{m}_J}$ et en développant, on a :

$$\mathbf{1}_D(z)z^{-\underline{m}_J} = \mathbf{1}_D(z)a^{\underline{m}_J} \sum_{\underline{r}_J \geq \underline{0}} \lambda_{\underline{r}_J} a^{\underline{r}_J} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{r}_J},$$

avec $\lambda_{\underline{r}_J} \in \mathbb{N}$ on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_D(z) \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J} &= \mathbf{1}_D(z) (-1)^{\underline{m}_J} z^{-\underline{m}_J} a^{\underline{m}_J} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{m}_J} \\ &= \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{r}_J \geq \underline{0}} \lambda_{\underline{r}_J} a^{2\underline{m}_J + \underline{r}_J} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{m}_J + \underline{r}_J}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, pour tout $z \in D$, on a

$$az \in D\left(1, n - \frac{\text{val}_F(a)}{f}\right) \subseteq D(1, n_0),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z) &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(az) \\ &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{l}_J \geq \underline{0}} b_{\underline{l}_J} (az - 1)^{\underline{l}_J} \\ &= \chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})\mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{l}_J \geq \underline{0}} b_{\underline{l}_J} a^{\underline{l}_J} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{l}_J}, \end{aligned}$$

avec $b_{\underline{l}_J} \in E$ et $|b_{\underline{l}_J}|q^{-n_0} \rightarrow 0$ quand $|\underline{l}_J| \rightarrow +\infty$. Notons alors $C = \sup_{\underline{l}_J} |b_{\underline{l}_J}|$. Comme, d'après (3.5.2), on a $|\chi_2\chi_1^{-1}(a^{-1})| = |a|^{|\underline{d}_{S \setminus J}| - 2r}$, on déduit des égalités précédentes que :

$$\begin{aligned} & \left| \mu\left(\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J}\right) \right| \\ & \leq C|a|^{|\underline{d}_{S \setminus J}| - 2r} \sup_{\substack{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J} \\ \underline{l}_J \geq \underline{0}, \underline{r}_J \geq \underline{0}}} \left\{ |a|^{2|\underline{m}_J| + |\underline{r}_J| + |\underline{l}_J| - |\underline{k}_{S \setminus J}| + |\underline{n}_{S \setminus J}|} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left| \mu\left(\mathbf{1}_D(z) \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{k}_{S \setminus J}} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{m}_J + \underline{l}_J + \underline{r}_J}\right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Comme la condition (3.5.7) implique l'inégalité

$$\left| \mu\left(\mathbf{1}_D(z) \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{k}_{S \setminus J}} \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{m}_J + \underline{l}_J + \underline{r}_J}\right) \right| \leq C_\mu \left| \frac{\varpi_F^n}{a^2} \right|^{|\underline{d}_{S \setminus J}| - |\underline{k}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| + |\underline{l}_J| + |\underline{r}_J| - r},$$

on en déduit finalement que

$$\left| \mu\left(\mathbf{1}_D(z)\chi_2\chi_1^{-1}(z)z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J}\right) \right| \leq CC_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)},$$

ce qui prouve le résultat annoncé. \square

D'après la Proposition 3.6.3, on peut étendre μ en une distribution $(J, \underline{d}_{S \setminus J})$ -tempérée d'ordre r sur F . Il reste à montrer que μ , vu comme élément de $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$, est nul sur l'espace $L(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$. Or, d'après (3.5.7), on a, pour tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$:

$$\left| \int_{D(0, n)} z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty$$

tandis que d'après (3.5.8), on a, pour tout $a \in F$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$:

$$\left| \int_{F \setminus D(a, n+1)} \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z-a)^{-\underline{m}_J} \mu(z) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ceci prouve la nullité recherchée et permet de terminer la preuve de l'implication (A) \implies (B).

3.6.2. Preuve de (B) \implies (A). — Montrer que les conditions (3.5.13), (3.5.14), (3.5.15), (3.5.19) et (3.5.20) impliquent les conditions (3.5.7) et (3.5.8) requiert quelques préliminaires. Commençons par donner une autre caractérisation des conditions (3.5.7) et (3.5.8).

Lemme 3.6.4. — *La condition (3.5.7) est satisfaite (quitte à changer C_μ) si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i) (3.5.7) est vérifiée pour tout $a \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a, n) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \emptyset$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;
- (ii) (3.5.7) est vérifiée pour tout $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;
- (iii) (3.5.7) est vérifiée pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

Preuve. — Seule l'implication (i) + (ii) + (iii) \implies (3.5.7) est à prouver. Pour cela il suffit de vérifier la condition (3.5.7) pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$.

Notons $R \subset \mathcal{O}_F$ un système de représentants des classes de $\mathcal{O}_F / \varpi_F \mathcal{O}_F$ contenant 0 et fixons $m \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $n + m > 0$. On a alors :

$$\mathbf{1}_{D(0, n)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} = \mathbf{1}_{D(0, n+m)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{a_i \in R - \{0\}} \mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^{n+j}, n+j+1)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}.$$

En utilisant (ii) et l'inégalité $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$, on obtient que :

$$\left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(0, n+m)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_\mu q^{(n+m)(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.$$

Il reste à minorer les termes de la somme. Soit $a_i \in R - \{0\}$ et $0 \leq j \leq m-1$. En écrivant $z^{\underline{n}_{S \setminus J}} = (z - a_i \varpi_F^{n+j} + a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{n}_{S \setminus J}}$ (resp. $z^{\underline{m}_J} = (z - a_i \varpi_F^{n+j} + a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{m}_J}$) et en développant, on obtient que

$$\begin{aligned} & \left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^{n+j}, n+j+1)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \right) \right| \\ & \leq \sup_{\substack{0 \leq \underline{l}_{S \setminus J} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \\ 0 \leq \underline{k}_J \leq \underline{m}_J}} \left\{ \left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(a_i \varpi_F^{n+j}, n+j+1)}(z) (a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{l}_{S \setminus J}} (a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{k}_J} \right. \right. \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \cdot (z - a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{n}_{S \setminus J} - \underline{l}_{S \setminus J}} (z - a_i \varpi_F^{n+j})^{\underline{m}_J - \underline{k}_J} \right) \right| \right\} \\ & \leq \sup_{\substack{0 \leq \underline{l}_{S \setminus J} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \\ 0 \leq \underline{k}_J \leq \underline{m}_J}} q^{-(n+j)(|\underline{l}_{S \setminus J}| + |\underline{k}_J|)} C_\mu q^{(n+j+1)(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{l}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J| + |\underline{k}_J|)} \quad \text{par (i)} \\ & \leq C_\mu q^r q^{(n+j)(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}. \end{aligned}$$

Comme $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$, on a :

$$q^{(n+j)(r-|\underline{n}_{S \setminus J}|-|\underline{m}_J|)} \leq q^{n(r-|\underline{n}_{S \setminus J}|-|\underline{m}_J|)},$$

d'où le résultat. \square

Rappelons que pour tout entier $k \geq 1$ on désigne par $S_k \subset \mathcal{O}_F^\times$ un système de représentants des classes de $(\mathcal{O}_F/\varpi_F^k \mathcal{O}_F)^\times$, et que l désigne le plus petit entier positif tel que $\chi_1|_{D(a_i, l)}$ et $\chi_2|_{D(a_i, l)}$ soient des fonctions J -analytiques sur l'ouvert $D(a_i, l)$ pour tout $a_i \in S_l$. Notons $D(a, n, n+1) = D(a, n) \setminus D(a, n+1)$ pour tout $a \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 3.6.5. — *Supposons que la condition (3.5.7) soit satisfaite. Alors la condition (3.5.8) est satisfaite si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.*

- (i) (3.5.8) est vraie pour tout $a \in F$, tout $n \geq 0$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$;
- (ii) (3.5.8) est vraie pour $a = 0$, pour tout $n \leq 0$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$.

Preuve. — (3.5.8) \Rightarrow (i), (ii) est immédiat.

Montrons (i) + (ii) \Rightarrow (3.5.8). Pour cela, il suffit de vérifier la condition (3.5.8) dans les trois cas suivants :

- $a \in F$, tout $n < 0$, $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$;
- $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$;
- $a = 0$, $n > 0$, $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) \leq 0$.

Remarquons d'abord que l'on a :

$$\forall a \in F, n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{1}_{D(a, n, n+1)} = \sum_{a_i \in S_l} \mathbf{1}_{D(a+a_i \varpi_F^n, n+1)}.$$

Ainsi, un raisonnement analogue à celui prouvant le lemme 3.4.6 permet de montrer, en utilisant (3.5.7), que pour tout $a \in F$, tout $n \in \mathbb{Z}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ on a, quitte à modifier C_μ :

$$(3.6.1) \quad \left| \mu \left(\mathbf{1}_{D(a, n, n+1)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z-a)(z-a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z-a)^{-\underline{m}_J} \right) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - r)}.$$

On conclut alors comme suit.

Premier cas. Soit $n < 0$ et fixons un entier $m \geq 1$ tel que $n + m > 0$. Puisque

$$\forall a \in F, \quad \mathbf{1}_{F \setminus D(a, n)} = \mathbf{1}_{F \setminus D(a, n+m)} - \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{D(a, n+j, n+j+1)},$$

on déduit le premier cas de (i) et de (3.6.1).

Deuxième cas. Soit $a \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Choisissons $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n - m < 0$ et $F \setminus D(a, n - m) = F \setminus D(0, n - m)$. En utilisant l'égalité

$$\mathbf{1}_{F \setminus D(a, n)} = \mathbf{1}_{F \setminus D(a, n-m)} + \sum_{j=0}^{m+1} \mathbf{1}_{D(a, n-m-j, n-m-j+1)},$$

on déduit le deuxième cas de (ii) et de (3.6.1).

Troisième cas. Le même raisonnement que celui mené dans le deuxième cas s'applique. \square

Remarquons que (3.5.13) est exactement (3.5.7) avec $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$, tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et que (3.5.14) est exactement (3.5.8) pour $a = 0$, pour tout $n \leq 0$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$. D'après les Lemmes 3.6.4 et 3.6.5 il reste alors à montrer :

- (i) (3.5.7) pour tout $a \in F$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a, n) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \emptyset$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$;
- (ii) (3.5.7) pour $a = 0$, pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$;
- (iii) (3.5.8) pour tout $a \in F$, tout $n \geq 0$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

La proposition suivante montre que (3.5.15) implique (i).

Proposition 3.6.6. — *La condition (3.5.15) implique la condition (3.5.7) pour tout disque $D(a, n)$ avec $a \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $D(a, n) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \emptyset$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$.*

Preuve. — Un calcul analogue à celui de la Proposition 3.6.3 montre que la condition (3.5.15) est équivalente à

$$(3.6.2) \quad \left| \int_{D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f})} z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu |a|^{2r - |\underline{d}_{S \setminus J}|} q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}$$

pour tout $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$, tout $\underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$, tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ et tout entier $n > \frac{\text{val}_F(a)}{f}$.

Soit $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $n > \frac{\text{val}_F(a)}{f}$. Posons $D = D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f})$. Pour tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ on a alors les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_D(z) \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} &= \mathbf{1}_D(z) (-1)^{\underline{n}_{S \setminus J}} a^{-\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \\ &= \mathbf{1}_D(z) (-1)^{\underline{n}_{S \setminus J}} a^{-\underline{n}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a + a\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \\ &= \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{0} \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} \lambda_{\underline{k}_{S \setminus J}} a^{\underline{k}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{k}_{S \setminus J}} \end{aligned}$$

avec $\lambda_{\underline{k}_{S \setminus J}} \in \mathbb{N}$. Un calcul analogue au précédent montre que :

$$\mathbf{1}_D(z) \left(z - \frac{1}{a}\right)^{\underline{m}_J} = \mathbf{1}_D(z) \sum_{\underline{r}_J \geq \underline{0}} \mu_{\underline{r}_J} a^{-2\underline{m}_J - \underline{r}_J} \left(\frac{1}{z} - a\right)^{\underline{r}_J + \underline{m}_J}$$

avec $\mu_{r_J} \in \mathbb{N}$. Ces deux égalités combinées à la condition (3.6.2) impliquent que :

$$\begin{aligned}
& \left| \mu \left(\mathbf{1}_D(z) \left(z - \frac{1}{a} \right)^{\underline{n}_{S \setminus J}} \left(z - \frac{1}{a} \right)^{\underline{m}_J} \right) \right| \\
& \leq \left| a^{-\underline{n}_{S \setminus J}} a^{-2\underline{m}_J} \sup_{\substack{r_J \geq 0 \\ 0 \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}}} a^{\underline{k}_{S \setminus J}} a^{-r_J} \mu \left(\mathbf{1}_D(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a \right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{k}_{S \setminus J}} \left(\frac{1}{z} - a \right)^{r_J + \underline{m}_J} \right) \right| \\
& \leq C_\mu |a|^{-|\underline{n}_{S \setminus J}| - 2|\underline{m}_J|} \sup_{\substack{r_J \geq 0 \\ 0 \leq \underline{k}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}}} |a|^{|\underline{k}_{S \setminus J}| - |r_J|} |a|^{2r - |\underline{d}_{S \setminus J}|} q^{n(r - |\underline{d}_{S \setminus J}| + |\underline{k}_{S \setminus J}| - |r_J| - |\underline{m}_J|)} \\
& = C_\mu |a|^{2r - 2|\underline{n}_{S \setminus J}| - 2|\underline{m}_J|} q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)} \\
& = C_\mu q^{(n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f})(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.
\end{aligned}$$

Lorsque $a \in \mathcal{O}_F - \{0\}$ et $n > \frac{\text{val}_F(a)}{f}$, $D(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f})$ parcourt tous les disques $D(b, m) \subset F$ avec $b \in F$ et $m \in \mathbb{N}$ dans F tels que $D(b, m) \cap \varpi_F \mathcal{O}_F = \emptyset$, ce qui permet conclure. \square

En utilisant les conditions (3.5.19) et (3.5.20) on voit que montrer (ii) et (iii) revient à montrer (quitte à modifier la constante C_μ) que, d'une part,

$$(3.6.3) \quad \left| \int_{F \setminus D(0, n)} z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}$$

pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$ et

$$(3.6.4) \quad \left| \int_{D(a, n+1)} \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J} \mu(z) \right| \leq C_\mu q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - r)}$$

pour tout $a \in F$, tout $n \geq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$.

Rappelons que l'on a posé, pour tout $f \in B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$,

$$(3.6.5) \quad \|f\|_B = \sup(\|f_1\|_{C^r}, \|f_2\|_{C^r}),$$

où (f_1, f_2) désigne l'élément de $C^r(\mathcal{O}_F, J, \underline{d}_{S \setminus J})^2$ qui correspond à f via l'isomorphisme (3.4.5).

Les conditions (3.6.3) et (3.6.4) sont alors une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 3.6.7. — • Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \leq 0$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ vérifiant $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$ on a :

$$\|\mathbf{1}_{F \setminus D(0, n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.$$

• Il existe une constante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $a \in F$, tout entier $n \geq 1$, tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ vérifiant $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$, on a :

$$\|\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{n(|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J| - r)}.$$

Preuve. — Pour tout $0 \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}$ et tout $\underline{m}_J \in \mathbb{N}^J$ tels que $r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0$, notons $f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}$ la fonction de \mathcal{O}_F dans E définie par :

$$\forall z \in \mathcal{O}_F, \quad f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(z) = \chi_2 \chi_1^{-1}(z) z^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} z^{-\underline{m}_J}.$$

D'après le Lemme 3.4.6 c'est une fonction de classe C^r . Posons :

$$(3.6.6) \quad C = \sup \left\{ \|f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}\|_{C^r} : \underline{0} \leq \underline{n}_{S \setminus J} \leq \underline{d}_{S \setminus J}, \underline{m}_J \in \mathbb{N}^J \text{ et } r - (|\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|) > 0 \right\}.$$

Par (3.6.5), on sait que

$$\|\mathbf{1}_{F \setminus D(0, n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B = \|\mathbf{1}_{D(0, -n)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(z)\|_{C^r}.$$

On peut réécrire $\|\mathbf{1}_{D(0, -n)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(z)\|_{C^r}$ sous la forme :

$$\left| \chi_2 \chi_1^{-1} (\varpi_F^{-n}) (\varpi_F^{-n})^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (\varpi_F^{-n})^{-\underline{m}_J} \right| \left\| \mathbf{1}_{D(0, -n)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(\frac{z}{\varpi_F^{-n}} \right) \right\|_{C^r}.$$

Comme (3.5.2) assure que l'on a :

$$\left| \chi_2 \chi_1^{-1} (\varpi_F^{-n}) (\varpi_F^{-n})^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (\varpi_F^{-n})^{-\underline{m}_J} \right| = q^{n(2r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)},$$

et comme le Lemme 3.3.2 assure que

$$\left\| \mathbf{1}_{D(0, -n)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(\frac{z}{\varpi_F^{-n}} \right) \right\|_{C^r} \leq C q^{-nr},$$

on en déduit que

$$\|\mathbf{1}_{F \setminus D(0, n+1)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{n(r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|)}.$$

On distingue maintenant deux cas.

(i) Supposons $a \in \varpi_F \mathcal{O}_F$. Par (3.6.5), on a alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J}\|_B \\ = \|\mathbf{1}_{D(\frac{a}{\varpi_F}, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(\varpi_F z - a)\|_{C^r}. \end{aligned}$$

Comme la norme C^r est invariante par translation, on en déduit l'égalité suivante :

$$\|\mathbf{1}_{D(\frac{a}{\varpi_F}, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(\varpi_F z - a)\|_{C^r} = \|\mathbf{1}_{D(0, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(\varpi_F z)\|_{C^r}.$$

On peut réécrire $\|\mathbf{1}_{D(0, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J}(\varpi_F z)\|_{C^r}$ sous la forme :

$$\left| \chi_2 \chi_1^{-1} (\varpi_F^n) (\varpi_F^n)^{(\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J})} (\varpi_F^n)^{-\underline{m}_J} \right| \left\| \mathbf{1}_{D(0, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(\frac{z}{\varpi_F^{n-1}} \right) \right\|_{C^r}.$$

D'après (3.5.2), on a :

$$\left| \chi_2 \chi_1^{-1} (\varpi_F^n) (\varpi_F^n)^{(\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J})} (\varpi_F^n)^{-\underline{m}_J} \right| = q^{n(-2r + |\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|)}$$

tandis que le Lemme 3.3.2 assure que l'on a :

$$\left\| \mathbf{1}_{D(0, n-1)}(z) f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(\frac{z}{\varpi_F^{n-1}} \right) \right\|_{C^r} \leq C q^{(n-1)r}.$$

On en conclut que

$$\|\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J}\|_B \leq C q^{-r} q^{n(-r + |\underline{n}_{S \setminus J}| + |\underline{m}_J|)}.$$

(ii) Supposons que $a \notin \varpi_F \mathcal{O}_F$. Par (3.6.5), on a :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{D(a, n)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1}(z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J}\|_B \\ = \left| \chi_2 \chi_1^{-1}(a) a^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} a^{-\underline{m}_J} \right| \left\| \mathbf{1}_{D\left(\frac{1}{a}, n - \frac{2 \text{val}_F(a)}{f}\right)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(z - \frac{1}{a} \right) \right\|_{C^r}. \end{aligned}$$

En écrivant $z^{\underline{n}_{S \setminus J}} = (z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a})^{\underline{n}_{S \setminus J}}$, $z^{\underline{m}_J} = (z - \frac{1}{a} + \frac{1}{a})^{\underline{m}_J}$, puis en développant et en utilisant l'invariance par translation de la norme C^r , on obtient que

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{1}_{D\left(\frac{1}{a}, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)}(z) z^{\underline{n}_{S \setminus J}} z^{\underline{m}_J} f_{\underline{n}_{S \setminus J}, \underline{m}_J} \left(z - \frac{1}{a}\right) \right\|_{C^r} \\ & \leq \sup_{\substack{0 \leq \underline{\alpha}_J \leq \underline{m}_J \\ 0 \leq \underline{\beta}_{S \setminus J} \leq \underline{n}_{S \setminus J}}} |a|^{-|\underline{\alpha}_J| - |\underline{\beta}_{S \setminus J}|} \left\| \mathbf{1}_{D\left(0, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)}(z) f_{\underline{\beta}_{S \setminus J}, \underline{\alpha}_J}(z) \right\|_{C^r}. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.3.2, on a :

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{1}_{D\left(0, n - \frac{2\text{val}_F(a)}{f}\right)}(z) f_{\underline{\beta}_{S \setminus J}, \underline{\alpha}_J}(z) \right\|_{C^r} \\ & \leq C \left| \chi_2 \chi_1^{-1} \left(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\right) \left(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\right)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{\beta}_{S \setminus J}} \left(\frac{\varpi_F^n}{a^2}\right)^{-\underline{\alpha}_J} \right| \left| \frac{\varpi_F^n}{a^2} \right|^{-r}. \end{aligned}$$

Comme la borne supérieure du membre de droite de l'inégalité ci-dessus est atteinte pour $\underline{\alpha}_J = \underline{m}_J$ et $\underline{\beta}_{S \setminus J} = \underline{n}_{S \setminus J}$ on déduit de (3.5.2) que

$$\left\| \mathbf{1}_{D(a, n)}(z) \chi_2 \chi_1^{-1} (z - a) (z - a)^{\underline{d}_{S \setminus J} - \underline{n}_{S \setminus J}} (z - a)^{-\underline{m}_J} \right\|_B \leq C q^{r - |\underline{n}_{S \setminus J}| - |\underline{m}_J|},$$

ce qui prouve le résultat. \square

Le Lemme 3.6.7 termine la preuve de l'implication (B) \implies (A), et donc la preuve du Théorème 3.6.1. Ainsi, on a montré que l'espace de Banach dual du complété cherché est isomorphe dans $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ au sous-espace de Banach de $B(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ formé des μ s'annulant sur $L(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$, c'est-à-dire à $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$. En particulier, $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee$ est un G -Banach unitaire.

Rappelons que dans [56], Schneider et Teitelbaum introduisent la catégorie $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)$ des \mathcal{O}_E -modules sans torsion, linéairement topologiques, séparés compacts, où les morphismes sont les applications \mathcal{O}_E -linéaires continues. Pour tout objet M de $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)$ on définit le E -espace de Banach $(M^d, \|\cdot\|)$ par :

$$M^d \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{O}_E}^{\text{cont}}(M, E) \text{ muni de la norme } \|l\| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in M} |l(x)|.$$

Notons $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}$ la catégorie ayant les mêmes objets que la catégorie $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)$ mais dont morphismes sont définis par :

$$\text{Hom}_{\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}}(A, B) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)}(A, B) \otimes E.$$

Dans [56, Théorème 1.2], il est montré que le foncteur $M \mapsto M^d$ induit une anti-équivalence de catégories entre $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)_{\mathbb{Q}}$ et la catégorie des E -espaces de Banach.

Corollaire 3.6.8. — *Il existe un isomorphisme G -équivariant d'espaces de Banach p -adiques :*

$$I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge \xrightarrow{\sim} \Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}).$$

Preuve. — L'argument est analogue à celui permettant de prouver [8, Théorème 4.3.1]. D'après [54, Lemme 9.9], on a une injection fermée G -équivariante

$$\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \hookrightarrow \left(\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\vee \right)^\vee,$$

ce qui assure notamment que $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ est un G -Banach unitaire. Par la propriété universelle du complété unitaire universel, l'application $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J}) \rightarrow \Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$ induit alors un morphisme G -équivariant continu de $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$ vers $\Pi(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})$, qui induit à son tour un morphisme continu sur les duaux munis de leur topologie faible, qui sont des éléments de $\text{Mod}_{\text{comp}}^{fl}(\mathcal{O}_E)_\mathbb{Q}$. Or, d'après le Théorème 3.6.1, ce morphisme est bijectif et continu. C'est donc, d'après [12, Lemme 4.2.2] un isomorphisme pour les topologies faibles. Par dualité [56, Théorème 1.2], on obtient alors l'isomorphisme topologique $\text{GL}_2(F)$ -équivariant de l'énoncé. \square

Remarque 3.6.9. — Le Corollaire 3.6.8 généralise [8, Théorème 4.3.1] pour $F = \mathbb{Q}_p$. Mentionnons que ce résultat joue un rôle important dans la preuve par Berger et Breuil de la non nullité de l'espace $I(\chi, J, \underline{d}_{S \setminus J})^\wedge$.

3.6.3. Exemple. — Introduisons quelques notations supplémentaires et rappelons la construction des représentations considérées dans [17]. Si $\lambda \in E^\times$, on désigne par $\text{unr}_F(\lambda) : F^\times \rightarrow E^\times$ le caractère non ramifié défini par $x \mapsto \lambda^{\text{val}_F(x)}$. Soient $\alpha, \tilde{\alpha} \in E^\times$ et $\underline{k} \in \mathbb{N}_{>1}^S$. Fixons J_1, J_2 deux sous-ensembles de S tels que $J_1 \subseteq J_2 \subseteq S$. Considérons les deux caractères algébriques suivants :

$$\chi_1 = \text{unr}_F(\alpha^{-1}) \prod_{\sigma \in J_1} \sigma^{k_\sigma - 1}, \quad \chi_2 = \text{unr}_F(p\tilde{\alpha}^{-1}) \prod_{\sigma \in J_1} \sigma^{-1} \prod_{\sigma \in J_2 \setminus J_1} \sigma^{k_\sigma - 2},$$

et posons :

$$\pi(J_1, J_2) = \left(\bigotimes_{\sigma \in S \setminus J_2} (\text{Sym}^{k_\sigma - 2} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \right)^{J_2 - an}.$$

D'après la Proposition 3.5.1, on connaît deux conditions nécessaires pour que le complété unitaire universel de la représentation \mathbb{Q}_p -analytique $\pi(J_1, J_2)$ soit non nul. Un calcul immédiat montre qu'elles sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$(3.6.7) \quad -(\text{val}_F(\alpha) + \text{val}_F(\tilde{\alpha})) + \sum_{\sigma \in S} (k_\sigma - 1) = 0;$$

$$(3.6.8) \quad -\text{val}_F(\tilde{\alpha}) + \sum_{\sigma \in S \setminus J_1} (k_\sigma - 1) \geq 0.$$

Supposons que (3.6.7) et (3.6.8) soient vérifiées. On a alors en particulier l'inégalité suivante :

$$-\text{val}_F(\alpha) + \sum_{\sigma \in J_1} (k_\sigma - 1) \leq 0.$$

Posons $r = \text{val}_F(\alpha) - \sum_{\sigma \in J_1} (k_\sigma - 1)$ et

$$J_3 = J_2 \coprod \{\sigma \in S \setminus J_2, k_\sigma - 1 > r\}.$$

D'après la Proposition 3.5.5, on sait que l'application fermée et G -équivariante

$$\pi(J_1, J_2) \hookrightarrow \pi(J_1, J_3) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\bigotimes_{\sigma \in S \setminus J_3} (\text{Sym}^{k_\sigma - 2} E^2)^\sigma \right) \otimes_E \left(\text{Ind}_P^G \chi_1 \otimes \chi_2 \prod_{\sigma \in J_3 \setminus J_2} \sigma^{k_\sigma - 2} \right)^{J_3 - an}$$

induit un isomorphisme G -équivariant de $\pi(J_1, J_2)^\wedge$ dans $\pi(J_1, J_3)^\wedge$. Posons alors

$$\chi'_1 = \chi_1, \quad \chi'_2 = \chi_2 \prod_{\sigma \in J_3 \setminus J_2} \sigma^{k_\sigma - 2},$$

et

$$B(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3}) = C^r(\mathcal{O}_F, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3}) \oplus C^r(\mathcal{O}_F, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3}).$$

C'est un espace de Banach sur E muni d'une action continue de G (voir la preuve du Lemme 3.4.5). D'après le Lemme 3.4.6, la fonction $h_{(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3}, (m_\sigma)_{\sigma \in J_3}}$ définie par

$$h_{(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3}, (m_\sigma)_{\sigma \in J_3}}(z) = \chi'_2 \chi_1'^{-1}(z) \prod_{\sigma \notin J_3} \sigma(z)^{k_\sigma - 2 - n_\sigma} \prod_{\sigma \in J_3} \sigma(z)^{-m_\sigma}$$

se prolonge sur \mathcal{O}_F en une fonction de classe C^r . Si l'on désigne par $L(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3})$ le sous-espace de $B(\chi, J_3, (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3})$ engendré par les couples de fonctions

$$\left(z \mapsto \prod_{\sigma \notin J_3} \sigma(\varpi_F z)^{n_\sigma} \prod_{\sigma \in J_3} \sigma(\varpi_F z)^{m_\sigma}, z \mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3}, (m_\sigma)_{\sigma \in J_3}}(z) \right) \quad \text{et}$$

$$\left(z \mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3}, (m_\sigma)_{\sigma \in J_3}}(\varpi_F z - a), z \mapsto h_{(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3}, (m_\sigma)_{\sigma \in J_3}}(1 - az) \prod_{\sigma \notin J_3} \sigma(z)^{n_\sigma} \prod_{\sigma \in J_3} \sigma(z)^{m_\sigma} \right)$$

avec $a \in F$, $(m_\sigma)_{\sigma \in J_3} \in \mathbb{N}^{J_3}$ et $(n_\sigma)_{\sigma \notin J_3} \leq (k_\sigma - 2)_{\sigma \notin J_3}$ tels que $r - \sum_{\sigma \notin J_3} n_\sigma - \sum_{J_3} m_\sigma > 0$, le Corollaire 3.6.8 assure alors que l'on a

$$\pi(J_1, J_2)^\wedge \xrightarrow{\sim} B(\chi, J_3, \underline{k}_{S \setminus J_3} - 2) / L(\chi, J_3, \underline{k}_{S \setminus J_3} - 2).$$

CHAPITRE 4

EXISTENCE DE NORMES INVARIANTES POUR GL_2

4.1. Introduction, notations et énoncé des résultats

4.1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier et F une extension finie de \mathbb{Q}_p . Cet article s'inscrit dans le cadre du programme de Langlands local p -adique, qui a pour objet de relier certaines représentations p -adiques continues de dimension d de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ avec certaines représentations de $GL_d(F)$.

Si $F = \mathbb{Q}_p$ et $d = 2$ alors tout est essentiellement bien compris : on dispose à présent, notamment grâce aux travaux de Colmez [25] et Paškūnas [50], d'une correspondance $V \mapsto \Pi(V)$ associant une représentation unitaire admissible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ à une E -représentation V de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, de dimension 2. Cette correspondance est compatible avec la correspondance de Langlands locale classique et avec la cohomologie étale complétée [34].

Les autres cas s'annoncent beaucoup plus délicats (voir [16] pour une vue d'ensemble). En particulier, Breuil et Schneider ont formulé dans [20] une conjecture, qui généralise une conjecture antérieure de Schneider et Teitelbaum [58], et qui laisse entrevoir un lien profond entre la catégorie des représentations continues de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension d et qui sont de de Rham, et certaines représentations localement algébriques de $GL_d(F)$. L'idée à l'origine de cette conjecture est la suivante : d'après la théorie de Colmez et Fontaine [26], on sait qu'une représentation de de Rham peut être décrite par un espace vectoriel muni d'une action du groupe de Weil-Deligne de F et d'une filtration, les deux étant reliés par une relation dite de *faible admissibilité*. À cet objet peut alors être associée une représentation lisse π de $GL_d(F)$ par la correspondance de Langlands modifiée [20, pp. 16-17]. D'autre part, les poids de Hodge-Tate de la filtration permettent de construire une représentation algébrique irréductible de $GL_d(F)$ que l'on note ρ . La conjecture de Breuil et Schneider dit alors essentiellement que l'existence d'une filtration faiblement admissible devrait être équivalente à l'existence d'une norme sur la représentation localement algébrique $\rho \otimes \pi$. Mentionnons que des résultats partiels en ce sens ont été obtenus par Hu [40] et Sorensen [62].

Soit D un φ -module de rang 2 sur $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ et muni d'une filtration faiblement admissible. En imposant des hypothèses techniques supplémentaires sur les poids de la filtration, nous montrons dans cet article que la représentation localement algébrique $\Pi(D)$ associée à D selon le procédé mentionné ci-dessus admet une norme G -invariante. Cela permet de donner une réponse positive à la conjecture de Breuil et Schneider. Les techniques que nous employons pour démontrer ce résultat sont classiques [11].

4.1.2. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p et une extension finie F de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$. On note \mathcal{O}_F l'anneau des entiers de F , \mathfrak{p}_F son idéal maximal et $k_F = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}_F$ son corps résiduel. On désigne par $q = p^f$ le cardinal de k_F et par e l'indice de ramification de F sur \mathbb{Q}_p , de sorte que l'on a $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$. On note $F_0 = \text{Frac}(W(k_F))$ le sous-corps non ramifié maximal de F et φ_0 le Frobenius sur F_0 . On note $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ le groupe de Galois absolu de F et $W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$ son groupe de Weil. La théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme $\text{rec} : W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)^{ab} \rightarrow F^\times$ que l'on normalise en envoyant les Frobenius arithmétiques sur les inverses des uniformisantes.

On désignera par E une extension finie de \mathbb{Q}_p , qui sera le corps des coefficients de nos représentations et vérifiera

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p],$$

où $S \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{alg}}(F, E)$. On note \mathcal{O}_E l'anneau des entiers de E et \mathfrak{p}_E son idéal maximal.

On fixe une uniformisante $\varpi_F \in \mathfrak{p}_F$ et on note val_F la valuation p -adique sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$ normalisée par $\text{val}_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$. Si $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ on pose $|x| = p^{-\text{val}_F(x)}$. Si $\lambda \in k_F$ alors $[\lambda]$ désigne le représentant de Teichmüller de λ dans \mathcal{O}_F . Pour tout $\mu \in E^\times$, on note $\text{nr}(\mu) : F^\times \rightarrow E^\times$ le caractère trivial sur \mathcal{O}_F^\times et envoyant ϖ_F sur μ^f .

On désigne par G le groupe $\text{GL}_2(F)$, par K le groupe $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ qui est, à conjugaison près, l'unique sous-groupe compact maximal de G , par I le sous-groupe d'Iwahori standard de K et par $I(1)$ son pro- p -Iwahori. On rappelle que I est l'ensemble des éléments de K dont la réduction modulo \mathfrak{p}_F est une matrice triangulaire supérieure et que $I(1)$ est le sous-groupe des éléments de I dont la réduction modulo \mathfrak{p}_F est une matrice unipotente. L'application de réduction modulo \mathfrak{p}_F induit alors un homomorphisme surjectif :

$$\text{red} : K \longrightarrow \text{GL}_2(k_F).$$

On désigne par $Z \simeq F^\times$ le centre de G et par P le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G . On pose :

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \alpha w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varpi_F & 0 \end{bmatrix}$$

et, si $\lambda \in \mathcal{O}_F$,

$$w_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Pour tous $|S|$ -uplets $\underline{n} = (n_\sigma)_{\sigma \in S}$ et $\underline{m} = (m_\sigma)_{\sigma \in S}$ d'entiers positifs ou nuls on introduit les notations suivantes :

- (i) $\underline{n}! = \prod_{\sigma \in S} n_\sigma!$;
- (ii) $|\underline{n}| = \sum_{\sigma \in S} n_\sigma$;
- (iii) $\underline{n} - \underline{m} = (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S}$;
- (iv) $\underline{n} \leq \underline{m}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S$;
- (v) $\binom{\underline{n}}{\underline{m}} = \frac{\underline{n}!}{\underline{m}!(\underline{n}-\underline{m})!}$;
- (vi) Pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}} = \prod_{\sigma \in S} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

4.1.3. Énoncé des résultats. — On fixe :

- un plongement $\iota: F \hookrightarrow E$;
- $(\lambda_1, \lambda_2) \in E^\times \times E^\times$, avec $(\lambda_1 \lambda_2^{-1})^f \notin \{q, q^{-1}\}$;
- un $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls \underline{d} .

Notons :

$$S^+ = \{\sigma \in S, d_\sigma \neq 0\}.$$

Partitionnons S^+ en regardant l'action des $\sigma \in S^+$ sur le corps résiduel de F . Plus précisément, pour l dans $\{0, \dots, f-1\}$ posons :

$$J_l = \left\{ \sigma \in S^+, \sigma([\zeta]) = \iota \circ \varphi_0^l([\zeta]) \text{ pour tout } \zeta \in k_F \right\}.$$

Remarquons que lorsque F est non ramifiée, on a $|J_l| \leq 1$ pour tout l .

Si $i \in \mathbb{Z}$, on désigne par \bar{i} l'unique représentant de $i \bmod f$ dans $\{0, \dots, f-1\}$. On pose alors, pour tout $\sigma \in J_l$:

$$v_\sigma = \inf \left\{ 1 \leq i \leq f, J_{\bar{l+i}} \neq \emptyset \right\},$$

c'est-à-dire la plus petite puissance du Frobenius φ_0 pour passer de J_l à un autre J_k non vide.

Notons $\chi: \mathrm{GL}_2(F) \rightarrow F^\times$ le caractère défini par :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varpi_F^{-\mathrm{val}_F(\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right))} / f$$

et, pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$ notons $(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2 \otimes_{F, \sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma: \mathrm{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$. On fixe une racine carrée de ϖ_F . Posons :

$$\rho_{\underline{d}} = \bigotimes_{\sigma \in S} (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \quad \text{et} \quad \underline{\rho}_{\underline{d}} = \bigotimes_{\sigma \in S} \left((\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \otimes_E (\sigma \circ \chi)^{\frac{d_\sigma}{2}} \right).$$

Notons enfin

$$\pi = \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{nr}(\lambda_1^{-1}) \otimes \mathrm{nr}(p\lambda_2^{-1}))$$

l'induite parabolique lisse non ramifiée usuelle. Notons que l'hypothèse sur le couple (λ_1, λ_2) nous assure que π est irréductible.

La conjecture de Breuil et Schneider peut dans ce cas être reformulée comme suit (voir la Section 4.4.2 pour plus de détails).

Conjecture 4.1.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante, i.e. une norme p -adique telle que $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et $v \in \rho_{\underline{d}} \otimes \pi$.*
- (ii) *les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$(1) \quad \mathrm{val}_F(\lambda_1^{-1}) + \mathrm{val}_F(p\lambda_2^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma = 0;$$

$$(2) \quad \mathrm{val}_F(p\lambda_2^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma \geq 0;$$

$$(3) \quad \mathrm{val}_F(p\lambda_1^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma \geq 0.$$

L'implication (i) \Rightarrow (ii) de la Conjecture 4.1.1 découle des travaux de Paškūnas [49, Lemma 7.9]. En effet, cette implication est démontrée par Hu dans un cadre plus général [40] en faisant recours à un résultat d'Emerton [33, Lemma 1.6]. Il reste donc à montrer l'implication (ii) \Rightarrow (i).

Le cas $\lambda_1 \in \mathcal{O}_E^\times$ (resp. $\lambda_2 \in \mathcal{O}_E^\times$) est traité par la Proposition 4.4.10 et nous permet de supposer que $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathcal{O}_E^\times$. En reformulant $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ comme induite compacte (Proposition 4.4.1), on en définit naturellement un sous- $\mathcal{O}_E[K]$ -module de type fini $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ qui l'engendre sur E , a_p étant un élément de \mathfrak{p}_E qui dépend de $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$. Prouver la Conjecture 4.1.1 équivaut alors à prouver que $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ est séparé, i.e. qu'il ne contient pas de E -droite. On montre dans cet article que c'est bien le cas, une fois que certaines hypothèses sur le vecteur \underline{d} sont satisfaites.

Plus précisément, la définition de $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ donnée dans la Section 4.4.1 assure que l'on dispose d'un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_E[G]$ -modules :

$$\theta: \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}}^0}{(T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}}^0)} \rightarrow \Theta_{\underline{d}, a_p},$$

où, $\rho_{\underline{d}}^0$ est un \mathcal{O}_E -réseau de $\rho_{\underline{d}}$ et T est l'opérateur de Hecke usuel [4]. Le résultat principal de l'article donne une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur \underline{d} pour que l'application θ soit injective (et donc un isomorphisme).

Théorème 4.1.2. — *On reprend les notations précédentes. L'application θ est injective si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) Pour tout $l \in \{0, \dots, f-1\}$, $|J_l| \leq 1$;
- (ii) Pour tout $\sigma \in J_l$,

$$d_\sigma + 1 \leq p^{v_\sigma}.$$

Corollaire 4.1.3. — *Supposons que le (ii) de la Conjecture 4.1.1 soit vérifié et que $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$ satisfait les conditions (i) et (ii) du Théorème 4.1.2. Alors, le \mathcal{O}_E -réseau $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ est séparé.*

Remarque 4.1.4. — • Si F est non ramifiée alors la condition (i) du Théorème 4.1.2 est automatiquement satisfaite ;

- dans [28], nous avons donné une description explicite du complété unitaire universel de la représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ à l'aide de certains espaces de Banach de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F [27], où r est un nombre rationnel positif convenable. Une conséquence immédiate du Corollaire 4.1.3 est que ce complété unitaire universel est non nul ;
- mentionnons que Grosse-Klönne [39] montre la Conjecture 4.1.1 dans le cas où la représentation π est réductible.

4.2. Préliminaires

4.2.1. Rappels sur l'arbre de Bruhat-Tits. — Nous renvoyons à [10] et [61] pour plus de détails concernant la construction et les propriétés de l'arbre de Bruhat-Tits de G .

Soit \mathcal{T} l'arbre de Bruhat-Tits de G : ses sommets sont en bijection équivariante avec les classes G/KZ pour l'action à gauche de G . L'arbre \mathcal{T} est par ailleurs muni d'une distance pour laquelle G agit par isométries. Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle *cerce de rayon n* l'ensemble des sommets de \mathcal{T} situés à distance n du sommet standard ⁽¹⁾ s_0 .

1. Défini comme le sommet donné par la classe d'homothétie du réseau standard $\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F$ de $F \oplus F$

Rappelons que l'on a la décomposition de Cartan :

$$G = \coprod_{n \in \mathbb{N}} KZ\alpha^{-n}KZ = \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} IZ\alpha^{-n}KZ \right) \coprod \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} IZ\beta\alpha^{-n}KZ \right).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les classes de $KZ\alpha^{-n}KZ/KZ$ correspondent aux sommets s_i de \mathcal{T} tels que $d(s_i, s_0) = n$. Posons $I_0 = \{0\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$,

$$I_n = \{[\mu_0] + \varpi_F[\mu_1] + \dots + \varpi_F^{n-1}[\mu_{n-1}], (\mu_0, \dots, \mu_{n-1}) \in (k_F)^n\} \subseteq \mathcal{O}_F.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mu \in I_n$ posons :

$$g_{n,\mu}^0 = \begin{bmatrix} \varpi_F^n & \mu \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g_{n,\mu}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F\mu & \varpi_F^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Notons que $g_{0,0}^0$ est la matrice identité, que $g_{0,0}^1 = \alpha$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in I_n$, on a $g_{n,\mu}^1 = \beta g_{n,\mu}^0 w$. Par ailleurs, les $g_{n,\mu}^0$ et $g_{n,\mu}^1$ définissent un système de représentants de G/KZ :

$$(4.2.1) \quad G = \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}, \mu \in I_n} g_{n,\mu}^0 KZ \right) \coprod \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}, \mu \in I_n} g_{n,\mu}^1 KZ \right);$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons :

$$S_n^0 = IZ\alpha^{-n}KZ = \coprod_{\mu \in I_n} g_{n,\mu}^0 KZ, \quad S_n^1 = IZ\beta\alpha^{-n}KZ = \coprod_{\mu \in I_n} g_{n,\mu}^1 KZ$$

puis notons $S_n = S_n^0 \coprod S_n^1$ et $B_n = B_n^0 \coprod B_n^1$, où $B_n^0 = \coprod_{m \leq n} S_m^0$ et $B_n^1 = \coprod_{m \leq n} S_m^1$. En particulier

on a $S_0 = KZ \coprod \alpha KZ$.

Remarque 4.2.1. — Rappelons, comme dans [10], que $S_n^0 \coprod S_{n-1}^1$ (resp. $B_n^0 \coprod B_{n-1}^1$) est l'ensemble des sommets de \mathcal{T} de distance n (resp. inférieure ou égale à n) de KZ . De même $S_n^1 \coprod S_{n-1}^0$ (resp. $B_n^1 \coprod B_{n-1}^0$) est l'ensemble des sommets de \mathcal{T} de distance n (resp. inférieure ou égale à n) de αKZ .

On désigne par R le corps E ou son anneau des entiers \mathcal{O}_E . Soit σ une représentation R -linéaire continue de KZ sur un R -module libre de rang fini V_σ . On note $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ la représentation de G sur R de R -module sous-jacent égal à l'ensemble des fonctions $f: G \rightarrow V_\sigma$ à support compact modulo Z telles que

$$\forall \kappa \in KZ, \forall g \in G, \quad f(\kappa g) = \sigma(\kappa)f(g),$$

sur lesquelles G agit par translation à droite (i.e. $(g \cdot f)(g') \stackrel{\text{déf}}{=} f(g'g)$). Comme dans [4], si $g \in G$ et si $v \in V_\sigma$, on note $[g, v]$ l'élément de $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ défini comme suit :

$$[g, v](g') = \begin{cases} \sigma(g'g)(v) & \text{si } g' \in KZg^{-1}; \\ 0 & \text{si } g' \notin KZg^{-1}. \end{cases}$$

On a alors les égalités suivantes :

$$\forall g_1, g_2, g \in G, \quad g_1[g_2, v] = [g_1g_2, v] \quad \text{et} \quad \forall g \in G, \forall \kappa \in KZ, \quad [g\kappa, v] = [g, \sigma(\kappa)(v)]$$

Rappelons le résultat suivant qui décrit une base du $R[G]$ -module $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ [4, §2].

Proposition 4.2.2. — Soit \mathcal{B} une base de V_σ sur R et \mathcal{G} un système de représentants des classes à gauche de G/KZ . Alors la famille de fonctions $\mathcal{I} \stackrel{\text{déf}}{=} \{[g, v], g \in \mathcal{G}, v \in \mathcal{B}\}$ forme une base de $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$.

Remarque 4.2.3. — La représentation $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ est isomorphe à la représentation de G portée par le $R[G]$ -module $R[G] \otimes_{R[KZ]} V_\sigma$. Plus précisément, si $g \in G$ et $v \in V_\sigma$, alors l'élément $g \otimes v$ correspond à la fonction $[g, v]$.

D'après la Proposition 4.2.2 et la décomposition (4.2.1), toute fonction $f \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ s'écrit de façon unique comme somme finie de la forme :

$$f = \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{\mu \in I_n} ([g_{n,\mu}^0, v_{n,\mu}^0] + [g_{n,\mu}^1, v_{n,\mu}^1]),$$

avec $v_{n,\mu}^0, v_{n,\mu}^1 \in V_\sigma$, et où n_0 est un entier positif qui dépend de f . On appelle *support* de f l'ensemble des $g_{n,\mu}^i$ tels que $v_{n,\mu}^i \neq 0$. On écrira $f \in S_n$ (resp. B_n, S_n^0 , etc.) si le support de f est contenu dans S_n (resp. B_n, S_n^0 , etc.).

Soit π une représentation R -linéaire continue de G sur un R -module. D'après [4, §2], on dispose d'un isomorphisme canonique de R -modules :

$$\text{Hom}_{R[G]}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma, \pi) \simeq \text{Hom}_{R[KZ]}(\sigma, \pi|_{KZ}),$$

qui traduit le fait que le foncteur d'induction c-Ind_{KZ}^G est un adjoint à gauche du foncteur de restriction et est appelé *réciprocité de Frobenius compacte*.

4.2.2. Rappels sur les algèbres de Hecke. — Soit σ une représentation R -linéaire continue de KZ sur un R -module libre V_σ de rang fini. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(KZ, \sigma)$ associée à KZ et σ est la R -algèbre définie par :

$$\mathcal{H}(KZ, \sigma) = \text{End}_{R[G]}(\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma).$$

On peut interpréter $\mathcal{H}(KZ, \sigma)$ comme une algèbre de convolution. Notons en effet $\mathcal{H}_{KZ}(\sigma)$ le R -module des fonctions $\varphi: G \rightarrow \text{End}_R(V_\sigma)$ à support compact modulo Z telles que

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in KZ, \forall g \in G, \quad \varphi(\kappa_1 g \kappa_2) = \sigma(\kappa_1) \circ \varphi(g) \circ \sigma(\kappa_2).$$

C'est une R -algèbre unifère pour le produit de convolution défini, pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_{KZ}(\sigma)$ et pour tout $g \in G$, par la formule suivante :

$$\varphi_1 * \varphi_2(g) = \sum_{xKZ \in G/KZ} \varphi_1(x) \varphi_2(x^{-1}g).$$

Elle admet pour élément unité la fonction φ_e définie par

$$\varphi_e(g) = \begin{cases} \sigma(g) & \text{si } g \in KZ, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que l'application bilinéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{KZ}(\sigma) \times \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma &\longrightarrow \text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma \\ (\varphi, f) &\longmapsto \langle \varphi, f \rangle(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{xKZ \in G/KZ} \varphi(x)(f(x^{-1}g)), \end{aligned}$$

munit $\text{c-Ind}_{KZ}^G \sigma$ d'une structure de $\mathcal{H}_{KZ}(\sigma)$ -module à gauche qui commute à l'action de G .

Lemme 4.2.4. — *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{KZ}(\sigma) &\longrightarrow \mathcal{H}(KZ, \sigma) \\ \varphi &\longmapsto T_\varphi(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \varphi, f \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme de R -algèbres. En particulier, si $g \in G$ et si $v \in V_\sigma$, l'action de T_φ sur $[g, v]$ est donnée par

$$(4.2.2) \quad T_\varphi([g, v]) = \sum_{xKZ \in G/KZ} [gx, \varphi(x^{-1})(v)].$$

Preuve. — Ce résultat découle de [4, Proposition 5] lorsque σ est supposée lisse. Le cas général résulte de [58, Lemme 1.2]. \square

Supposons à présent que $R = E$. Notons $\mathbf{1}$ la représentation triviale de KZ et supposons que σ soit la restriction à KZ d'une représentation localement \mathbb{Q}_p -analytique (au sens de [55] et [57]) de G sur V_σ . D'après [58, §1], l'application

$$\begin{aligned} \iota_\sigma: \mathcal{H}_{KZ}(\mathbf{1}) &\longrightarrow \mathcal{H}_{KZ}(\sigma) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi \cdot \sigma)(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(g)\sigma(g) \end{aligned}$$

est alors un homomorphisme injectif de E -algèbres. Avant de donner une condition assurant la bijectivité de ι_σ nous rappelons l'existence d'une action \mathbb{Q}_p -linéaire de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G sur l'espace V_σ définie par :

$$\forall \mathfrak{x} \in \mathfrak{g}, \forall v \in V_\sigma, \quad \mathfrak{x}v = \frac{d}{dt} \exp(t\mathfrak{x})v|_{t=0},$$

où $\exp: \mathfrak{g} \dashrightarrow G$ désigne l'application exponentielle définie localement autour de 0 [55, §2]. Cette action se prolonge en une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, et permet d'obtenir le résultat suivant.

Lemme 4.2.5. — *Si le $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module V_σ est absolument irréductible, l'application ι_σ est bijective.*

Preuve. — Ce résultat est démontré dans [58, Lemme 1.4] lorsque V_σ est une représentation F -analytique avec F un sous-corps de E . Les mêmes arguments s'appliquent *mutatis mutandis* dans notre cadre de travail. \square

4.3. Représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$

4.3.1. Représentations \mathbb{Q}_p -algébriques de $\mathrm{GL}_2(F)$. — Pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$, on note $(\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2 \otimes_{F, \sigma} E$ dont le plus haut poids vis-à-vis de P est $\chi_\sigma: \mathrm{diag}(x_1, x_2) \mapsto \sigma(x_2)^{d_\sigma}$. Pour tout $\sigma \in S$ on choisit une racine carrée de $\sigma(\varpi_F)$ dans E , on note alors $\chi: \mathrm{GL}_2(F) \rightarrow F^\times$ le caractère défini par :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \varpi_F^{-\mathrm{val}_F(\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}))} / f$$

et l'on pose

$$(\underline{\mathrm{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma = (\mathrm{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \otimes_E (\sigma \circ \chi)^{\frac{d_\sigma}{2}}.$$

On identifie $(\underline{\mathrm{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ avec la représentation de G portée par le E -espace vectoriel

$$\bigoplus_{i_\sigma=0}^{d_\sigma} E x_\sigma^{d_\sigma - i_\sigma} y_\sigma^{i_\sigma}$$

des polynômes homogènes de degré d_σ en x_σ et y_σ à coefficients dans E , sur lequel G agit par la formule suivante :

$$(4.3.1) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x_\sigma^{d_\sigma - i_\sigma} y_\sigma^{i_\sigma}) = (\sigma \circ \chi(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}))^{\frac{d_\sigma}{2}} (\sigma(a)x_\sigma + \sigma(c)y_\sigma)^{d_\sigma - i_\sigma} (\sigma(b)x_\sigma + \sigma(d)y_\sigma)^{i_\sigma}.$$

Si $w_\sigma \in (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ et si $g \in G$, on notera simplement gw_σ le vecteur donné par l'action de g sur w_σ .

Remarque 4.3.1. — La formule (4.3.1) assure en particulier que, pour tout $w_\sigma \in (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$,

$$\begin{bmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{bmatrix} w_\sigma = w_\sigma.$$

Fixons un $|S|$ -uplet d'entiers positifs ou nuls $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$ et posons :

$$I_{\underline{d}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \underline{i} = (i_\sigma)_{\sigma \in S} \in \mathbb{N}^S, 0 \leq i_\sigma \leq d_\sigma \text{ pour tout } \sigma \in S \}.$$

Notons $\rho_{\underline{d}}$ (resp. $\underline{\rho}_{\underline{d}}$) la représentation de G d'espace vectoriel sous-jacent

$$V_{\rho_{\underline{d}}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\sigma \in S} (\text{Sym}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \quad \left(\text{resp.} \quad V_{\underline{\rho}_{\underline{d}}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\sigma \in S} (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma \right),$$

sur lequel un élément $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ agit composante par composante. En particulier pour tout

$\bigotimes_{\sigma \in S} w_\sigma \in V_{\underline{\rho}_{\underline{d}}}$ on a :

$$(4.3.2) \quad \underline{\rho}_{\underline{d}} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \left(\bigotimes_{\sigma \in S} w_\sigma \right) = \bigotimes_{\sigma \in S} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} w_\sigma \right).$$

Ce sont deux représentations absolument irréductibles de G qui restent absolument irréductibles lorsque l'on se restreint à l'action d'un sous-groupe ouvert de G [20, §2].

Pour tout $\underline{i} \in I_{\underline{d}}$, on pose :

$$e_{\underline{d}, \underline{i}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\sigma \in S} e_{d_\sigma, i_\sigma},$$

où, pour tout $\sigma \in S$, e_{d_σ, i_σ} désigne le monôme $x_\sigma^{d_\sigma - i_\sigma} y_\sigma^{i_\sigma}$. On note alors $U_{\underline{d}}$ l'endomorphisme de $V_{\underline{\rho}_{\underline{d}}}$ défini par

$$U_{\underline{d}} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\sigma \in S} U_{d_\sigma},$$

où U_{d_σ} désigne, pour tout $\sigma \in S$, l'endomorphisme de $(\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ dont la matrice dans la base $(e_{d_\sigma, i_\sigma})_{0 \leq i_\sigma \leq d_\sigma}$ est la matrice diagonale

$$(4.3.3) \quad U_{d_\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma(\varpi_F)^{d_\sigma} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma(\varpi_F)^{d_\sigma - 1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemme 4.3.2. — Il existe une unique fonction $\psi: G \longrightarrow \text{End}_E(V_{\underline{\rho}_{\underline{d}}})$ à support dans $KZ\alpha^{-1}KZ$ telle que :

- (i) pour tous $\kappa_1, \kappa_2 \in KZ$ on a $\psi(\kappa_1 \alpha^{-1} \kappa_2) = \underline{\rho}_{\underline{d}}(\kappa_1) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \underline{\rho}_{\underline{d}}(\kappa_2)$;
- (ii) $\psi(\alpha^{-1}) = U_{\underline{d}}$.

Preuve. — Supposons qu'il existe $\psi_1, \psi_2: G \longrightarrow \text{End}_E(V_{\underline{\rho}_d})$ à supports dans $KZ\alpha^{-1}KZ$ et vérifiant (i) et (ii). D'après (ii) on déduit que $\psi_1(\alpha^{-1}) = \psi_2(\alpha^{-1})$ et donc, en utilisant (i), on a $\psi_1(g) = \psi_2(g)$ pour tout $g \in KZ\alpha^{-1}KZ$, d'où l'unicité. Concentrons-nous sur l'existence d'une telle ψ . Il faut vérifier que ψ est bien définie, c'est-à-dire que si $\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2 = \alpha^{-1}$ avec $\kappa_1, \kappa_2 \in KZ$, alors $\psi(\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2) = \psi(\alpha^{-1})$. Notons $u_\sigma = \frac{d_\sigma}{2}$ pour tout $\sigma \in S$. D'après les formules (4.3.1) et (4.3.2) on a, pour tout $\underline{i} \in I_d$,

$$\underline{\rho}_d(\alpha^{-1})(e_{\underline{d}, \underline{i}}) = \varpi_F^{u_{\underline{i}}} e_{\underline{d}, \underline{i}}.$$

Ainsi, l'automorphisme $\underline{\rho}_d(\alpha^{-1})$ de l'espace $V_{\underline{\rho}_d}$ est donné, dans la base $\{e_{\underline{d}, \underline{i}}, \underline{i} \in I_d\}$, par la matrice $\varpi_F^{-u} \psi(\alpha^{-1})$. Par suite, si $\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2 = \alpha^{-1}$ avec $\kappa_1, \kappa_2 \in KZ$, alors on a

$$\underline{\rho}_d(\kappa_1) \circ \varpi_F^{-u} \psi(\alpha^{-1}) \circ \underline{\rho}_d(\kappa_2) = \varpi_F^{-u} \psi(\alpha^{-1}),$$

d'où

$$\underline{\rho}_d(\kappa_1) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \underline{\rho}_d(\kappa_2) = \psi(\kappa_1\alpha^{-1}\kappa_2) = \psi(\alpha^{-1}),$$

ce qui achève la démonstration. □

Grâce au Lemme 4.2.4, on sait que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d)$ est naturellement isomorphe à l'algèbre de convolution $\mathcal{H}_{KZ}(\underline{\rho}_d)$ des fonctions $\varphi: G \longrightarrow \text{End}_E(V_{\underline{\rho}_d})$ à support compact modulo Z telles que

$$\forall \kappa_1, \kappa_2 \in KZ, \forall g \in G, \quad \varphi(\kappa_1 g \kappa_2) = \underline{\rho}_d(\kappa_1) \circ \varphi(g) \circ \underline{\rho}_d(\kappa_2).$$

L'application ψ du Lemme 4.3.2 correspond donc à l'opérateur $T \in \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d)$, dont l'action sur les éléments $[g, v]$ pour $g \in G$ et $v \in V_{\underline{\rho}_d}$ est donnée par la formule (4.2.2).

Lemme 4.3.3. — *Il existe un isomorphisme de E -algèbres :*

$$\mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d) \simeq E[T].$$

Preuve. — Comme l'espace $V_{\underline{\rho}_d}$ est un $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module absolument irréductible, le Lemme 4.2.5 assure que l'application

$$\begin{aligned} \iota_{\underline{\rho}_d}: \mathcal{H}_{KZ}(\mathbf{1}) &\longrightarrow \mathcal{H}_{KZ}(\underline{\rho}_d) \\ f &\longmapsto (f \cdot \underline{\rho}_d)(g) \stackrel{\text{déf}}{=} f(g) \underline{\rho}_d(g) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de E -algèbres. Le Lemme 4.2.4 permet alors d'en déduire l'existence d'un unique morphisme de E -algèbres $u_{\underline{\rho}_d}: \mathcal{H}(KZ, \mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d)$ rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{KZ}(\mathbf{1}) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(KZ, \mathbf{1}) \\ \iota_{\underline{\rho}_d} \downarrow & & u_{\underline{\rho}_d} \downarrow \\ \mathcal{H}_{KZ}(\underline{\rho}_d) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d) \end{array}$$

Par construction, l'application $u_{\underline{\rho}_d}$ est alors un isomorphisme de E -algèbres. Notons T_1 l'élément de $\mathcal{H}(KZ, \mathbf{1})$ qui correspond à $\mathbf{1}_{KZ\alpha^{-1}KZ}$ via la réciprocity de Frobenius. Un raisonnement analogue à celui de [5, Proposition 4] montre alors que $\mathcal{H}(KZ, \mathbf{1})$ est isomorphe à

l'algèbre de polynômes $E[T_1]$. Comme $u_{\underline{\rho}_d}(T_1) = (\prod_{\sigma \in S} \sigma(\varpi_F)^{-\frac{d_\sigma}{2}})T$ on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque 4.3.4. — Un raisonnement simple utilisant l'arbre de Bruhat-Tits de G montre que l'opérateur T est injectif sur l'espace $\text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_d}^G$.

4.3.2. Réseaux. — Conservons les notations de la Section 4.3.1 et notons $(\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E^2)^\sigma$, pour $\sigma \in S$ et $d_\sigma \in \mathbb{N}$, la représentation du groupe KZ d'espace sous-jacent le \mathcal{O}_E -module $\bigoplus_{i_\sigma=0}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E x_\sigma^{d_\sigma-i_\sigma} y_\sigma^{i_\sigma}$ des polynômes homogènes de degré d_σ , sur lequel un élément $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$ agit par

$$(4.3.4) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x_\sigma^{d_\sigma-i_\sigma} y_\sigma^{i_\sigma}) = (\sigma(a)x_\sigma + \sigma(c)y_\sigma)^{d_\sigma-i_\sigma} (\sigma(b)x_\sigma + \sigma(d)y_\sigma)^{i_\sigma}$$

tandis que la matrice $\begin{bmatrix} \varpi_F & 0 \\ 0 & \varpi_F \end{bmatrix} \in Z$ agit comme l'identité. Si $w_\sigma \in (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E^2)^\sigma$ et si $g \in G$, on note simplement gw_σ le vecteur résultant de l'action de g sur w_σ .

Définition 4.3.5. — Soit V un E -espace vectoriel. Un *réseau* \mathcal{L} de V est un sous- \mathcal{O}_E -module de V tel que, pour tout $v \in V$, il existe un élément non nul $a \in E^\times$ pour lequel $av \in \mathcal{L}$. Un réseau \mathcal{L} est dit *séparé* si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varpi_E^n \mathcal{L} = 0$, ce qui équivaut à demander qu'il ne contienne aucune E -droite.

Exemple 4.3.6. — Le \mathcal{O}_E -module $(\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E^2)^\sigma$ est un réseau séparé de $(\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ qui est de plus stable sous l'action de KZ .

Notons $\underline{\rho}_d^0$ la représentation de KZ d'espace sous-jacent

$$V_{\underline{\rho}_d^0} = \bigotimes_{\sigma \in S} (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E^2)^\sigma,$$

sur lequel un élément $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de KZ agit par

$$(4.3.5) \quad \underline{\rho}_d^0 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \left(\bigotimes_{\sigma \in S} w_\sigma \right) = \bigotimes_{\sigma \in S} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} w_\sigma \right).$$

L'Exemple 4.3.6 assure que le \mathcal{O}_E -module $V_{\underline{\rho}_d^0}$ est un réseau séparé de l'espace $V_{\underline{\rho}_d}$ construit dans le paragraphe 4.3.1. Par suite, le \mathcal{O}_E -module $\text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_d}^G$ est aussi un réseau séparé de l'espace $\text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_d}^G$ et est par construction stable sous l'action de G .

Par la Remarque 4.2.3, on en déduit l'existence d'une application injective de $\mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d^0)$ dans $\mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d)$. De plus, on vérifie que l'opérateur $T \in \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d)$ défini dans le Paragraphe 4.3.1 induit par restriction un endomorphisme G -équivariant de $\text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_d}^G$ que l'on note encore T . D'après le Lemme 4.3.3, on obtient aussi un isomorphisme de \mathcal{O}_E -algèbres entre $\mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d^0)$ et l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}_E[T]$. Le Lemme 4.2.4 permet de résumer ce qui précède à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{KZ}(\underline{\rho}_d^0) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d^0) \simeq \mathcal{O}_E[T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{KZ}(\underline{\rho}_d) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}(KZ, \underline{\rho}_d) \simeq E[T] \end{array}$$

4.3.3. Formulaire. — On garde les notations des Sections 4.3.1 et 4.3.2. Pour $0 \leq m \leq n$, on note $[\]_m : I_n \rightarrow I_m$ l'application "troncature" définie par :

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} \varpi_F^i [\mu_i] \right]_m = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} \varpi_F^i [\mu_i] & \text{si } m \geq 1, \\ 0 & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

On dispose alors des deux résultats suivants (voir [10, §2.5]), où ψ désigne la fonction définie dans le Lemme 4.3.2.

Lemme 4.3.7. — Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in I_n$ et $v \in V_{\rho_d^0}$. On a :

$$T([g_{n,\mu}^0, v]) = T^+([g_{n,\mu}^0, v]) + T^-([g_{n,\mu}^0, v]),$$

où

$$T^+([g_{n,\mu}^0, v]) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n+1,\mu+\varpi_F^n \lambda}^0, (\rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda))(v)]$$

et

$$T^-([g_{n,\mu}^0, v]) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} [g_{n-1, [\mu]_{n-1}}^0, (\rho_d^0(w_{([\mu]_{n-1}-\mu)/\varpi_F^{n-1}}) \circ \psi(\alpha^{-1}))](v) & \text{si } n \geq 1, \\ [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v)] & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Lemme 4.3.8. — Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in I_n$ et $v \in V_{\rho_d^0}$. On a :

$$T([g_{n,\mu}^1, v]) = T^+([g_{n,\mu}^1, v]) + T^-([g_{n,\mu}^1, v]),$$

où

$$T^+([g_{n,\mu}^1, v]) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\lambda \in I_1} [g_{n+1,\mu+\varpi_F^n \lambda}^1, (\psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda w))(v)],$$

et

$$T^-([g_{n,\mu}^1, v]) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} [g_{n-1, [\mu]_{n-1}}^1, (\rho_d^0(w_{([\mu]_{n-1}-\mu)/\varpi_F^{n-1}}) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w))(v)] & \text{si } n \geq 1, \\ [\text{Id}, (\rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w))(v)] & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

En utilisant l'égalité $g_{n,\mu}^1 = \beta g_{n,\mu}^0 w$, ces deux Lemmes permettent d'obtenir les deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} T^+([g_{n,\mu}^1, v]) &= \beta T^+([g_{n,\mu}^0, \rho_d^0(w)(v)]), \\ T^-([g_{n,\mu}^1, v]) &= \beta T^-([g_{n,\mu}^0, \rho_d^0(w)(v)]), \end{cases}$$

ainsi que le résultat suivant.

Corollaire 4.3.9. — Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mu, \lambda \in I_n$, $i, j \in \{0, 1\}$ et $v_1, v_2 \in V_{\rho_d^0}$. Si $i \neq j$ ou si $\mu \neq \lambda$ alors $T^+([g_{n,\mu}^i, v_1])$ et $T^+([g_{n,\lambda}^j, v_2])$ sont de supports disjoints.

Lemme 4.3.10. — Soit $v = \sum_{0 \leq i \leq d} c_i e_{d,i} \in V_{\rho_d^0}$ et $\lambda \in \mathcal{O}_F$. On a :

$$(\rho_d(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d(w_\lambda))(v) = \sum_{0 \leq j \leq d} \left(\varpi_F^j \sum_{j \leq i \leq d} c_i \binom{i}{j} (-\lambda)^{i-j} \right) e_{d,j}.$$

Preuve. — D'après la formule (4.3.4), on a, pour tout $\sigma \in S$ et tout $0 \leq i_\sigma \leq d_\sigma$:

$$(4.3.6) \quad (w \circ U_{d_\sigma} \circ w_\lambda)(e_{d_\sigma, i_\sigma}) = \sum_{j_\sigma=0}^{i_\sigma} \binom{i_\sigma}{j_\sigma} \sigma(\varpi_F)^{j_\sigma} \sigma(-\lambda)^{i_\sigma - j_\sigma} e_{d_\sigma, j_\sigma}.$$

Grâce à la formule (4.3.5), on en déduit que

$$\begin{aligned} (\rho_{\underline{d}}(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_{\underline{d}}(w_\lambda))(v) &= \sum_{0 \leq \underline{i} \leq \underline{d}} c_{\underline{i}} \sum_{0 \leq \underline{j} \leq \underline{i}} \binom{\underline{i}}{\underline{j}} \varpi_F^{\underline{j}} (-\lambda)^{\underline{i} - \underline{j}} e_{\underline{d}, \underline{j}} \\ &= \sum_{0 \leq \underline{j} \leq \underline{d}} \left(\varpi_F^{\underline{j}} \sum_{\underline{j} \leq \underline{i} \leq \underline{d}} c_{\underline{i}} \binom{\underline{i}}{\underline{j}} (-\lambda)^{\underline{i} - \underline{j}} \right) e_{\underline{d}, \underline{j}}. \end{aligned}$$

□

4.4. Un critère de séparation

4.4.1. Le résultat principal. — Conservons les notations des Sections 4.3.2 et 4.3.3 et fixons un plongement ι de F dans E . Notons :

$$S^+ = \{\sigma \in S, d_\sigma \neq 0\} \subseteq S.$$

Partitionnons S^+ en regardant l'action des $\sigma \in S^+$ sur le corps résiduel de F . Plus précisément, pour tout $l \in \{0, \dots, f-1\}$ posons :

$$J_l = \left\{ \sigma \in S^+, \sigma(\lambda) = \iota \circ \varphi_0^l(\lambda) \quad \forall \lambda \in I_1 \right\},$$

où $I_1 = \{[\zeta], \zeta \in k_F\}$. En particulier, remarquons que

$$\coprod_{l \in \{0, \dots, f-1\}} J_l = S^+ \quad \text{et que} \quad \forall l \in \{0, \dots, f-1\}, |J_l| \leq e.$$

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ on note \bar{i} l'unique représentant de $i \bmod f$ dans $\{0, \dots, f-1\}$. On pose alors, pour tout $\sigma \in J_l$, $\gamma_\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} l$ et

$$v_\sigma = \inf \left\{ 1 \leq i \leq f, J_{\overline{l+i}} \neq \emptyset \right\},$$

c'est-à-dire la plus petite puissance du Frobenius φ_0 pour passer de J_l à un autre J_k non vide.

Soit $a_p \in \mathfrak{p}_E$. On pose

$$\Pi_{\underline{d}, a_p} = \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}}}{(T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}})}.$$

C'est une représentation localement algébrique de G qui peut se réaliser comme le produit tensoriel d'une représentation algébrique par une représentation lisse. On dispose plus précisément du résultat suivant, qui est une généralisation immédiate de [11, Proposition 3.3].

Proposition 4.4.1. — Posons $u_\sigma = \frac{d_\sigma}{2}$ pour tout $\sigma \in S$.

(i) Si $a_p \notin \{\pm((q+1)\varpi_F^{u_\sigma})\}$, alors $\Pi_{\underline{d}, a_p}$ est algébriquement irréductible et

$$\Pi_{\underline{d}, a_p} \simeq \rho_{\underline{d}} \otimes \text{Ind}_P^G(\text{nr}(\lambda_1^{-1}) \otimes \text{nr}(p\lambda_2^{-1})),$$

où λ_1 et λ_2 vérifient

$$\lambda_1^f \lambda_2^f = q\varpi_F^d, \quad \lambda_1^f + \lambda_2^f = a_p.$$

(ii) Si $a_p \in \{\pm((q+1)\varpi_F^u)\}$, alors on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \rho_{\underline{d}} \otimes \text{St}_G \otimes (\text{nr}(\delta) \circ \det) \rightarrow \Pi_{\underline{d}, a_p} \rightarrow \rho_{\underline{d}} \otimes (\text{nr}(\delta) \circ \det) \rightarrow 0$$

où $\text{St}_G = C^0(\mathbf{P}^1(F), E)/\{\text{constantes}\}$ désigne la représentation de Steinberg de G , et où $\delta = (q+1)/a_p$.

Comme dans [11, §3.3], on définit :

$$\Theta_{\underline{d}, a_p} = \text{Im}\left(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0 \rightarrow \Pi_{\underline{d}, a_p}\right),$$

ceci revient à poser

$$(4.4.1) \quad \Theta_{\underline{d}, a_p} = \frac{\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0}{\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0 \cap (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)}.$$

C'est un réseau de $\Pi_{\underline{d}, a_p}$ et, puisque $\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$ est un $\mathcal{O}_E[G]$ -module de type fini, on voit que $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ est aussi un $\mathcal{O}_E[G]$ -module de type fini. Comme T laisse stable $\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$, alors

$$(4.4.2) \quad (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0) \subseteq (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0) \cap \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0,$$

ce qui permet de déduire de (4.4.1) l'existence d'un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_E[G]$ -modules :

$$\theta: \frac{\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0}{(T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)} \twoheadrightarrow \Theta_{\underline{d}, a_p}.$$

Nous allons déterminer un critère d'injectivité pour l'application θ . Commençons par démontrer deux conditions de non-injectivité.

Lemme 4.4.2. — *Supposons qu'il existe $l \in \{0, \dots, f-1\}$ tel que $|J_l| > 1$. Alors l'application θ n'est pas injective.*

Preuve. — Notons que θ est injective si et seulement si (4.4.2) est une égalité. Pour conclure il nous suffit donc de montrer qu'il existe un élément h de $\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$ tel que

$$(T - a_p)(h) = T(h) - a_p h \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0,$$

mais $h \notin \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$.

Par hypothèse, il existe $l \in \{0, \dots, f-1\}$, tel que $|J_l| > 1$. Autrement dit, il existe $\sigma, \tau \in S^+$ distincts tels que $\sigma(\lambda) = \tau(\lambda)$ pour tout $\lambda \in I_1$. Notons $\underline{\alpha} = (\alpha_\xi)_{\xi \in S}$ et $\underline{\beta} = (\beta_\xi)_{\xi \in S}$ les éléments de $I_{\underline{d}}$ définis par

$$\alpha_\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \sigma, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \sigma \end{cases} \quad \beta_\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \tau, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Posons $v_1 \stackrel{\text{déf}}{=} e_{\underline{d}, \underline{\alpha}} \in \rho_{\underline{d}}$, $v_2 \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)e_{\underline{d}, \underline{\beta}} \in \rho_{\underline{d}}$ et $v \stackrel{\text{déf}}{=} \delta^{-1}(v_1 + v_2) \in \rho_{\underline{d}}$ où $\delta \in \{\iota(\varpi_F), a_p\}$ est l'élément de valuation minimale dans cet ensemble. Nous allons montrer que, pour $h = [\text{Id}, v] \notin \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$, on a $T(h) - a_p h \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$. D'après le Lemme 4.3.7, on a :

$$\begin{aligned} T(h) - a_p h &= T^+(h) + T^-(h) - a_p h \\ &= \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1, \lambda}^0, (\rho_{\underline{d}}^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_{\underline{d}}^0(w\lambda))(v)] + [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v)] - a_p [\text{Id}, v]. \end{aligned}$$

Comme $a_p[\text{Id}, v] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0$, il suffit de vérifier que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$(4.4.3) \quad [g_{1,\lambda}^0, (\rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda))(v)] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0 \quad \text{pour tout } \lambda \in I_1,$$

$$(4.4.4) \quad [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v)] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0.$$

Pour tout $\lambda \in I_1$ et tout $\xi \in S$, posons $\varphi_{\lambda,\xi} = w \circ U_{d_\xi} \circ w_\lambda$, où U_{d_ξ} désigne la matrice diagonale définie par (4.3.3). En utilisant la formule (4.3.4) on obtient que

$$\varphi_{\lambda,\xi}(e_{d_\xi,\alpha_\xi}) = \begin{cases} -\sigma(\lambda)e_{d_\sigma,0} + \sigma(\varpi_F)e_{d_\sigma,1} & \text{si } \xi = \sigma, \\ e_{d_\xi,0} & \text{si } \xi \neq \sigma; \end{cases}$$

et

$$\varphi_{\lambda,\xi}(e_{d_\xi,\beta_\xi}) = \begin{cases} -\tau(\lambda)e_{d_\tau,0} + \tau(\varpi_F)e_{d_\tau,1} & \text{si } \xi = \tau, \\ e_{d_\xi,0} & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Posons alors, pour tout $\lambda \in I_1$, $\varphi_\lambda = \rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda)$. D'après la formule (4.3.5), on a :

$$(4.4.5) \quad \forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v_1) \in -\sigma(\lambda)e_{d_\sigma,0} + \sigma(\varpi_F)\rho_d^0,$$

$$(4.4.6) \quad \forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v_2) \in \tau(\lambda)e_{d_\tau,0} + \tau(\varpi_F)\rho_d^0.$$

Comme σ et τ sont égaux sur I_1 , on en déduit que :

$$\forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v) = \delta^{-1}\varphi_\lambda(v_1 + v_2) \in (\delta^{-1}(\sigma(\varpi_F) + \tau(\varpi_F)))\rho_d^0,$$

ce qui montre que la condition (4.4.3) est vérifiée. Un calcul immédiat donne ensuite que :

$$(4.4.7) \quad U_{d_\xi}(e_{d_\xi,\alpha_\xi}) = \begin{cases} \sigma(\varpi_F)^{d_\sigma-1}e_{d_\sigma,1} & \text{si } \xi = \sigma, \\ \xi(\varpi_F)^{d_\xi}e_{d_\xi,0} & \text{si } \xi \neq \sigma, \end{cases}$$

et

$$(4.4.8) \quad U_{d_\xi}(e_{d_\xi,\beta_\xi}) = \begin{cases} \tau(\varpi_F)^{d_\tau-1}e_{d_\tau,1} & \text{si } \xi = \tau, \\ \xi(\varpi_F)^{d_\xi}e_{d_\xi,0} & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Comme $|J_l| > 1$, on déduit respectivement de (4.4.7) et de (4.4.8) que $\psi(\alpha^{-1})(v_1) \in \tau(\varpi_F)\rho_d^0$ et que $\psi(\alpha^{-1})(v_2) \in \sigma(\varpi_F)\rho_d^0$. On obtient ainsi que

$$\psi(\alpha^{-1})(v) = \delta^{-1}\psi(\alpha^{-1})(v_1 + v_2) \in (\delta^{-1}(\sigma(\varpi_F) + \tau(\varpi_F)))\rho_d^0 \subseteq \rho_d^0,$$

ce qui montre que la condition (4.4.4) est vérifiée et termine la démonstration. \square

Lemme 4.4.3. — *Supposons qu'il existe $\sigma \in J_l$ tel que*

$$d_\sigma + 1 > p^{v_\sigma}.$$

Alors l'application θ n'est pas injective.

Preuve. — Un raisonnement analogue à celui mené dans la démonstration du Lemme 4.4.2 montre qu'il suffit de construire explicitement un élément $h \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0$ tel que

$$(T - a_p)(h) \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0 \quad \text{et} \quad h \notin \text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_d^0.$$

Pour ce faire nous allons distinguer trois cas.

- (1) $|S^+| \geq 2$ et $d_\sigma \geq p^{v_\sigma}$;

- (2) $|S^+| = 1$ et $d_\sigma \geq p^{v_\sigma} + 1$;
(3) $|S^+| = 1$ et $d_\sigma = p^{v_\sigma}$.

Cas (1). On peut supposer $v_\sigma < f$ car sinon, il existe par hypothèse un entier $l \in \{0, \dots, f-1\}$ tel que $|J_l| \geq 2$, et ce cas est alors traité par le Lemme 4.4.2. Il existe donc $\tau \in S^+$ tel que

$$\forall \lambda \in I_1, \quad \sigma(\lambda)^{p^{v_\sigma}} = \tau(\lambda).$$

Notons $\underline{\alpha} = (\alpha_\xi)_{\xi \in S}$ et $\underline{\beta} = (\beta_\xi)_{\xi \in S}$ les éléments de $I_{\underline{d}}$ définis par

$$\alpha_\xi = \begin{cases} p^{v_\sigma} & \text{si } \xi = \sigma, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \sigma \end{cases} \quad \beta_\xi = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi = \tau, \\ 0 & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Posons $v_1 \stackrel{\text{déf}}{=} (-1)^{p^{v_\sigma}} e_{\underline{d}, \alpha} \in \underline{\rho}_{\underline{d}}$, $v_2 \stackrel{\text{déf}}{=} e_{\underline{d}, \beta} \in \underline{\rho}_{\underline{d}}$ et $v \stackrel{\text{déf}}{=} \delta^{-1}(v_1 + v_2) \in \underline{\rho}_{\underline{d}}$, où $\delta \in \{\iota(\varpi_F), a_p\}$ est l'élément de cet ensemble ayant la valuation la plus petite. Montrons que, pour $f = [\text{Id}, v] \notin \text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_{\underline{d}}}^G$, $T(h) - a_p h \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_{\underline{d}}}^G$. Comme cela a déjà été remarqué dans la preuve du Lemme 4.4.2, on est ramené à vérifier les deux conditions suivantes :

$$(4.4.9) \quad \forall \lambda \in I_1, \quad [g_{1,\lambda}^0, (\rho_{\underline{d}}^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_{\underline{d}}^0(w_\lambda))(v)] \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_{\underline{d}}}^G,$$

$$(4.4.10) \quad [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v)] \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{\rho}_{\underline{d}}}^G.$$

Posons $\varphi_{\lambda,\xi} = w \circ U_{d_\xi} \circ w_\lambda$ pour tout $\lambda \in I_1$ et tout $\xi \in S$. D'après la formule (4.3.4) on a :

$$\varphi_{\lambda,\xi}(e_{d_\xi, \alpha_\xi}) = \begin{cases} (-1)^{p^{v_\sigma}} \sigma(\lambda)^{p^{v_\sigma}} e_{d_\sigma, 0} + \sigma(\varpi_F) \sum_{l=1}^{p^{v_\sigma}} \binom{p^{v_\sigma}}{l} \sigma(\varpi_F)^{l-1} \sigma(-\lambda)^{p^{v_\sigma}-l} e_{d_\sigma, l} & \text{si } \xi = \sigma, \\ e_{d_\xi, 0} & \text{si } \xi \neq \sigma, \end{cases}$$

$$\varphi_{\lambda,\xi}(e_{d_\xi, \beta_\xi}) = \begin{cases} -\tau(\lambda) e_{d_\tau, 0} + \tau(\varpi_F) e_{d_\tau, 1} & \text{si } \xi = \tau, \\ e_{d_\xi, 0} & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Si l'on pose $\varphi_\lambda = \rho_{\underline{d}}^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_{\underline{d}}^0(w_\lambda)$ pour tout $\lambda \in I_1$, la formule (4.3.5) assure que l'on a

$$(4.4.11) \quad \forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v_1) \in \sigma(\lambda)^{p^{v_\sigma}} e_{\underline{d}, 0} + \sigma(\varpi_F) \rho_{\underline{d}}^0,$$

$$(4.4.12) \quad \forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v_2) \in -\tau(\lambda) e_{\underline{d}, 0} + \tau(\varpi_F) \rho_{\underline{d}}^0.$$

Comme $\sigma(\lambda)^{p^{v_\sigma}} = \tau(\lambda)$ pour tout $\lambda \in I_1$, on déduit de (4.4.11) et de (4.4.12) que :

$$\forall \lambda \in I_1, \quad \varphi_\lambda(v) = \delta^{-1} \varphi_\lambda(v_1 + v_2) \in (\delta^{-1} \iota(\varpi_F)) \rho_{\underline{d}}^0,$$

ce qui prouve que la condition (4.4.9) est vérifiée. Un calcul immédiat donne ensuite que :

$$(4.4.13) \quad U_{d_\xi}(e_{d_\xi, \alpha_\xi}) = \begin{cases} \sigma(\varpi_F)^{d_\sigma - p^{v_\sigma}} e_{d_\sigma, p^{v_\sigma}} & \text{si } \xi = \sigma, \\ \xi(\varpi_F)^{d_\xi} e_{d_\xi, 0} & \text{si } \xi \neq \sigma, \end{cases}$$

$$(4.4.14) \quad U_{d_\xi}(e_{d_\xi, \beta_\xi}) = \begin{cases} \tau(\varpi_F)^{d_\tau - 1} e_{d_\tau, 1} & \text{si } \xi = \tau, \\ \xi(\varpi_F)^{d_\xi} e_{d_\xi, 0} & \text{si } \xi \neq \tau. \end{cases}$$

Comme $|S^+| > 1$ (et donc $v_\sigma < f$), on déduit de (4.4.13) que $\psi(\alpha^{-1})(v_1) \in \iota(\varpi_F) \rho_{\underline{d}}^0$. Comme $d_\sigma \geq p^{v_\sigma}$, on déduit de (4.4.14) que $\psi(\alpha^{-1})(v_2) \in \iota(\varpi_F) \rho_{\underline{d}}^0$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\psi(\alpha^{-1})(v) = \delta^{-1} \psi(\alpha^{-1})(v_1 + v_2) \in (\delta^{-1} \iota(\varpi_F)) \rho_{\underline{d}}^0 \subseteq \rho_{\underline{d}}^0,$$

ce qui prouve que la condition (4.4.10) est vérifiée.

Cas (2). Puisque $|S^+| = 1$, on a $v_\sigma = f$, et donc

$$d_\sigma \geq p^{v_\sigma} + 1 = p^f + 1 = q + 1.$$

Notons que dans ce cas, on a $\underline{\rho}_d = (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} E^2)^\sigma$ et $\underline{\rho}_d^0 = (\underline{\text{Sym}}^{d_\sigma} \mathcal{O}_E^2)^\sigma$. Posons alors

$$v = \delta^{-1}(e_{d_\sigma,1} + (-1)^q e_{d_\sigma,q}) \in \underline{\rho}_d,$$

où $\delta \in \{\iota(\varpi_F), a_p\}$ est l'élément de plus petite valuation dans cet ensemble. Un raisonnement analogue à celui donné dans le cas (1) montre alors que, si $h = [\text{Id}, v] \notin \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$, on a bien $T(h) - a_p h \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$.

Cas (3). Par hypothèse, on a

$$|S^+| = 1, \quad d_\sigma = p^{v_\sigma} = p^f = q.$$

Posons alors :

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in I_1, \quad v_{2,\lambda} &= \begin{cases} \delta^{-1} \sigma(\lambda)^{q-2} (-e_{q,1} - e_{q,q}) & \text{si } p = 2, \\ \delta^{-1} \sigma(\lambda)^{q-2} (e_{q,1} - e_{q,q}) & \text{si } p \neq 2, \end{cases} \\ v_0 &= \begin{cases} \delta^{-1} (q-1) (e_{q,0} + e_{q,q-1}) & \text{si } p = 2, \\ \delta^{-1} (q-1) (e_{q,0} - e_{q,q-1}) & \text{si } p \neq 2, \end{cases} \\ h_2 &= \sum_{\lambda \in I_1} [g_{2,\varpi_F \lambda}^0, v_{2,\lambda}], \\ h_0 &= [\text{Id}, v_0], \end{aligned}$$

où $\delta \in \{\sigma(\varpi_F), a_p\}$ est l'élément de plus petite valuation dans cet ensemble. Notons $h = h_0 + h_2 \notin \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$ et supposons $p \neq 2$, le cas $p = 2$ se traitant de manière analogue. D'après le Lemme 4.3.7, la fonction $T(h) - a_p h$ peut s'écrire comme somme de quatre fonctions à supports deux à deux disjoints :

$$T(h) - a_p h = T^-(h_0) + (T^+(h_0) + T^-(h_2)) + T^+(h_2) - a_p h;$$

ainsi, pour montrer que $T(h) - a_p h \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$, il suffit de vérifier que chaque fonction est dans $\text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$. Grâce au Lemme 4.3.7, on a :

$$\begin{aligned} T^-(h_0) &= [\alpha, \psi(\alpha^{-1})(v_0)] \\ &= [\alpha, \delta^{-1} (q-1) \sigma(\varpi_F) (\sigma(\varpi_F)^{q-1} e_{q,0} - e_{q,q-1})] \in (\delta^{-1} \sigma(\varpi_F)) \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0 \subseteq \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0. \end{aligned}$$

Posons maintenant, pour tout $\mu \in I_1$,

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &= \rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\mu), \\ \phi_\mu &= \rho_d^0(w) \circ \rho_d^0(w_{-\mu}) \circ \psi(\alpha^{-1}). \end{aligned}$$

La linéarité de l'opérateur T^+ et le Lemme 4.3.7 assurent alors que

$$\begin{aligned} T^+(h_2) \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0 &\iff \forall \lambda \in I_1, \quad T^+([g_{2,\varpi_F \lambda}^0, v_{2,\lambda}]) \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0 \\ &\iff \forall \lambda \in I_1, \quad \forall \mu \in I_1, \quad \varphi_\mu(v_{2,\lambda}) \in \underline{\rho}_d^0. \end{aligned}$$

D'après la formule (4.3.4), on a, pour tout $\mu \in I_1$ et tout $\lambda \in I_1$:

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(v_{2,\lambda}) &= \varphi_\mu(\delta^{-1}\sigma(\lambda)^{q-2}(e_{q,1} - e_{q,q})) \\ &= \delta^{-1}\sigma(\lambda)^{q-2} \left(\sigma(\varpi_F)e_{q,1} - \sigma(\varpi_F) \sum_{\alpha=1}^q \binom{q}{\alpha} (-1)^{q-\alpha} \sigma(\varpi_F)^{\alpha-1} \sigma(\mu)^{q-\alpha} e_{q,\alpha} \right) \in \underline{\rho}_d^0.\end{aligned}$$

Il nous reste donc à montrer que $T^+(h_0) + T^-(h_2) \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0$. Remarquons que, d'après le Lemme 4.3.7, on a :

$$\begin{aligned}T^-(h_2) &= \sum_{\lambda \in I_1} T^-([g_{2,\varpi_F\lambda}^0, v_{2,\lambda}]) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,0}^0, \phi_\lambda(v_{2,\lambda})], \\ T^+(h_0) &= T^+([\text{Id}, v_0]) = \sum_{\lambda \in I_1} [g_{1,\lambda}^0, \varphi_\lambda(v_0)].\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la formule (4.3.4) on a :

$$\forall \lambda \in I_1 \setminus \{0\}, \quad \varphi_\lambda(v_0) = \delta^{-1}(q-1)\sigma(\varpi_F) \left(\sum_{\alpha=1}^{q-1} \binom{q-1}{\alpha} \sigma(\varpi_F)^{\alpha-1} \sigma(-\lambda)^{q-1-\alpha} e_{q,\alpha} \right) \in \underline{\rho}_d^0,$$

ce qui implique que pour tout $\lambda \in I_1 \setminus \{0\}$,

$$[g_{1,\lambda}^0, \varphi_\lambda(v_0)] \in \text{c-Ind}_{KZ}^G \underline{\rho}_d^0.$$

Il nous reste alors à calculer

$$\varphi_0(v_0) + \sum_{\lambda \in I_1} \phi_\lambda(v_{2,\lambda}).$$

En utilisant la formule (4.3.4) on obtient que

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(v_{2,\lambda}) &\in \delta^{-1}(-\sigma(\lambda)^{2q-2}e_{q,0} - \sigma(\lambda)^{q-2}e_{q,q}) + (\delta^{-1}\sigma(\varpi_F))\underline{\rho}_d^0, \\ \varphi_0(v_0) &\in \delta^{-1}((q-1)e_{q,0}) + (\delta^{-1}\sigma(\varpi_F))\underline{\rho}_d^0.\end{aligned}$$

D'après les relations

$$\sum_{\lambda \in I_1} \sigma(\lambda)^{2q-2} = q-1 \quad \text{et} \quad p \mid \sum_{\lambda \in I_1} \sigma(\lambda)^{q-2},$$

on en déduit :

$$\varphi_0(v_0) + \sum_{\lambda \in I_1} \phi_\lambda(v_{2,\lambda}) \in \underline{\rho}_d^0,$$

ce qui permet de conclure. □

Le théorème suivant fournit une condition nécessaire et suffisante sur le vecteur $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$ pour que l'application θ soit injective.

Théorème 4.4.4. — *On garde les notations précédentes. L'application θ est injective (et est donc un isomorphisme) si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) Pour tout $l \in \{0, \dots, f-1\}$, on a $|J_l| \leq 1$;
- (ii) Si $\sigma \in J_l$, on a $d_\sigma + 1 \leq p^{v_\sigma}$.

Preuve. — Comme cela a été remarqué dans la preuve du Lemme 4.4.2, l'application θ est injective si et seulement si l'on a l'inclusion suivante :

$$(4.4.15) \quad (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G) \cap \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G \subseteq (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G).$$

La preuve se décompose en deux étapes.

(1) On suppose que les conditions (i) et (ii) sont satisfaites, et l'on montre que l'inclusion (4.4.15) est vérifiée, ce qui revient à prouver que si h est un élément de $\text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$ tel que

$$(T - a_p)(h) = T(h) - a_ph \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G,$$

alors h est dans $\text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$.

(2) On suppose que (i) ou (ii) n'est pas satisfaite. On construit alors un élément h de $\text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$ tel que

$$(T - a_p)(h) = T(h) - a_ph \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G \quad \text{et} \quad h \notin \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G.$$

(1). Supposons que les conditions (i) et (ii) soient satisfaites, et considérons $h \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$ tel que

$$(4.4.16) \quad (T - a_p)(h) = T(h) - a_ph \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G.$$

Notons n le plus petit entier tel que $h \in B_n$ et écrivons $h = \sum_{m=0}^n h_m$ où $h_m \in S_m$. On a alors, grâce aux Lemmes 4.3.7 et 4.3.8,

$$\begin{aligned} T(h) - a_ph &= T^+(h) + T^-(h) - a_ph \\ &= T^+(h_n) + T^+(h - h_n) + T^-(h) - a_ph, \end{aligned}$$

avec $T^+(h_n) \in S_{n+1}$ et $T^+(h - h_n) + T^-(h) - a_ph \in B_n$. L'hypothèse (4.4.16) impliquant que $T^+(h_n) \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$, nous allons montrer que cela assure que $h_n \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G$. Pour ce faire, il suffit de le vérifier pour h_n de la forme $[g_{n,\mu}^0, v]$: en appliquant β , on aura le résultat pour h_n de la forme $[g_{n,\mu}^1, w]$, puis, par linéarité et grâce au Corollaire 4.3.9, pour n'importe quel h_n . D'après le Lemme 4.3.7, on a :

$$(4.4.17) \quad T^+([g_{n,\mu}^0, v]) \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G \iff \forall \lambda \in I_1, (\rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda))(v) \in V_{\rho_d^0}.$$

Notons $v = \sum_{0 \leq i \leq d} c_i e_{d,i}$ avec $c_i \in E$. D'après le Lemme 4.3.10, on a, pour tout $\lambda \in I_1$,

$$(\rho_d^0(w) \circ \psi(\alpha^{-1}) \circ \rho_d^0(w_\lambda))(v) \in V_{\rho_d^0} \iff \forall \underline{j}, 0 \leq \underline{j} \leq \underline{d}, \varpi_F^j \sum_{\underline{j} \leq i \leq \underline{d}} c_i \binom{\underline{i}}{\underline{j}} (-\lambda)^{i-\underline{j}} \in \mathcal{O}_E.$$

Pour $\underline{j} = 0$, on déduit en particulier de l'équivalence utilisant (4.4.17) que :

$$(4.4.18) \quad T^+([g_{n,\mu}^0, v]) \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d}^G \implies \forall \lambda \in I_1, \sum_{0 \leq i \leq d} c_i (-\lambda)^i \in \mathcal{O}_E.$$

Pour $\lambda = 0$, ceci montre que $c_0 \in \mathcal{O}_E$. Ainsi l'implication (4.4.18) est équivalente à l'implication suivante :

$$T^+([g_{n,\mu}^0, v]) \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G \implies \forall \lambda \in k_F^\times, \sum_{\substack{0 \leq i \leq d \\ i \neq 0}} c_i(-[\lambda])^i \in \mathcal{O}_E.$$

Soit maintenant ζ un générateur du groupe cyclique k_F^\times et posons, pour tout $\sigma \in S$, $u_\sigma = d_\sigma + 1$. On a alors :

$$\forall \lambda \in k_F^\times, \sum_{\substack{0 \leq i \leq d \\ i \neq 0}} c_i(-[\lambda])^i \in \mathcal{O}_E \implies \forall j, 0 \leq j \leq \left(\prod_{\sigma \in S} u_\sigma \right) - 1, \sum_{\substack{0 \leq i \leq d \\ i \neq 0}} c_i([\zeta^j])^i \in \mathcal{O}_E.$$

On obtient donc un système de $\prod_{\sigma \in S} u_\sigma$ équations linéaires à $\prod_{\sigma \in S} u_\sigma$ inconnues dont la matrice du système homogène associée est égale à :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ [\zeta]^i \\ [\zeta^2]^i \\ \vdots \\ [\zeta^{\prod_{\sigma \in S} u_\sigma - 1}]^i \end{bmatrix}_{\substack{0 \leq i \leq d \\ i \neq 0}}$$

C'est une matrice de Vandermonde, de déterminant égal à :

$$(4.4.19) \quad \prod_{i < j, i \neq j} ([\zeta]^j - [\zeta]^i).$$

Comme, pour tout $\sigma \in S^+$, on a $\sigma([\zeta]) = \iota([\zeta])^{p^{\gamma_\sigma}}$ avec $0 \leq \gamma_\sigma \leq f - 1$, on obtient que pour tout $j \in I_d$, on a :

$$[\zeta]^j = \prod_{\sigma \in S^+} \sigma([\zeta])^{j_\sigma} = \iota([\zeta])^{\sum_{\sigma \in S^+} j_\sigma p^{\gamma_\sigma}}.$$

D'après les hypothèses (i) et (ii), on obtient donc de manière naturelle une application injective

$$\{[\zeta]^j, 0 \leq j \leq d \text{ et } j \neq 0\} \hookrightarrow \{\iota([\zeta])^\alpha, 0 \leq \alpha \leq p^f - 2\}$$

qui est bijective lorsque $d_\sigma + 1 = p^{v_\sigma}$ pour tout $\sigma \in S^+$. Or, si $0 \leq \alpha < \beta \leq q - 2$, alors $\iota([\zeta])^\alpha - \iota([\zeta])^\beta \in \mathcal{O}_E^\times$ et donc, d'après (4.4.19), on a $\det(A) \in \mathcal{O}_E^\times$. Puisque $c_i \in \mathcal{O}_E$ pour tout $i \in I_d$, ce qui revient à dire que $v \in \rho_d^0$, on en déduit que $h_n \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G$. En remplaçant h par $h - h_n$, le même raisonnement montre que $h_{n-1} \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G$. Une récurrence immédiate assure alors que $h_i \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, et donc $h \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G$.

(2). C'est une conséquence immédiate des Lemmes 4.4.2 et 4.4.3. □

Soit $a_p \in \mathcal{O}_E$ et supposons que \underline{d} vérifie les conditions (i) et (ii) du Théorème 4.4.4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons :

$$B_n(E) \stackrel{\text{déf}}{=} \{h \in \text{c-Ind}_{KZ\rho_d^0}^G, h \in B_n\}.$$

Une conséquence simple mais intéressante du Théorème 4.4.4 est la proposition suivante, démontrée initialement par Breuil pour $F = \mathbb{Q}_p$ et $d \leq 2p$ [11, Théorème 4.1 et Corollaire 4.2].

Proposition 4.4.5. — *Le \mathcal{O}_E -réseau $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ est séparé.*

Preuve. — C'est une généralisation de l'argument de [11, Corollaire 4.2]. Il suffit de montrer que $\Theta_{\underline{d}, a_p}$ ne contient pas de E -droite, ce qui revient à montrer que si $h \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$ est tel qu'il existe des $h_n \in \text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0$ vérifiant :

$$(4.4.20) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h - (T - a_p)(h_n) \in p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0),$$

alors $h \in (T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)$. Notons N (resp. N') le plus petit entier positif ou nul tel que

$h \in B_N(E)$ (resp. $h_n \in B_{N'}(E)$) et écrivons $h_n = \sum_{m=0}^{N'} h_{n,m}$ avec $h_{n,m} \in S_m$. Si $N' \geq N$, la relation (4.4.20) implique que $T^+(h_{n,N'}) \in p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)$ et, la preuve du Théorème 4.4.4 (i) assure alors que $h_{n,N'} \in p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)$. Par récurrence descendante immédiate, on obtient que $h_{n,m} \in p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0)$ pour tout $N \leq m \leq N'$. Ainsi, on a montré que

$$h_n \in B_{N-1}(E) + p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0),$$

donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h \in (T - a_p)(B_{N-1}(E)) + p^n(\text{c-Ind}_{KZ\underline{d}}^G \rho_{\underline{d}}^0).$$

Comme $(T - a_p)(B_{N-1}(E))$ est un E -espace vectoriel complet pour la topologie p -adique (car de dimension finie), on en déduit que $h \in (T - a_p)(B_{N-1}(E))$. □

4.4.2. Conséquences. — Conservons les notations de la Section 4.4.1 et fixons

- une paire $(\lambda_1, \lambda_2) \in E^\times \times E^\times$ avec $(\alpha\beta^{-1})^f \notin \{q, q^{-1}\}$;
- un $|S|$ -uplet d'entiers positifs \underline{d} .

Rappelons que $\rho_{\underline{d}}$ désigne la représentation algébrique irréductible de $\text{GL}_2(F)$ introduite dans le Paragraphe 4.3.1.

Nous allons maintenant rappeler, dans un cadre particulier, une conjecture formulée par Breuil et Schneider [20], puis montrer comment utiliser Théorème 4.4.4 pour établir quelques cas de cette conjecture.

Notons (r, V) la représentation du groupe de Weil-Deligne de F de dimension 2 sur E , reductible, non ramifiée et qui envoie le Frobenius arithmétique sur la matrice $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Notons π^{unit} la représentation lisse irréductible de G sur E qui correspond à (r, V) via la correspondance de Langlands locale, normalisée de sorte à ce que son caractère central soit $\det(r, V) \circ \text{rec}^{-1}$. Dans [20, §4] est décrite une construction permettant d'associer à π^{unit} une représentation lisse de G sur E que l'on note π . Pour G on trouve que

$$\pi = \text{Ind}_P^G(\text{nr}(\lambda_1^{-1}) \otimes \text{nr}(p\lambda_2^{-1})).$$

Remarque 4.4.6. — Par définition, les caractères non ramifiés $\text{nr}(\lambda_1^{-1})$ et $\text{nr}(p\lambda_2^{-1})$ ne dépendent que de λ_1^f et de λ_2^f .

Notons que π est une induite parabolique lisse et non ramifiée qui est irréductible si $(\lambda_1\lambda_2^{-1})^f \neq q$ et $(\lambda_1\lambda_2^{-1})^f \neq q^{-1}$. Si $(\lambda_1\lambda_2^{-1})^f = q$ (resp. $(\lambda_1\lambda_2^{-1})^f \neq q^{-1}$) alors π est la

torsion par $\text{nr}(\lambda_2^{-1}) \circ \det$ (resp. $\text{nr}(\lambda_1^{-1}) \circ \det$) de l'unique extension non scindée de la représentation triviale par la représentation de Steinberg (resp. de la représentation de Steinberg par la représentation triviale).

Appelons φ -module la donnée d'un $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module D libre de rang fini muni d'un automorphisme F_0 -semi-linéaire (par rapport au Frobenius sur F_0) et E -linéaire φ . Notons que φ^f est une application $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire et que l'isomorphisme $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \prod_{\sigma_0: F_0 \hookrightarrow E} E$ envoyant $h \otimes e$ sur $(\sigma_0(h)e)_\sigma$ induit un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$D \simeq \prod_{\sigma_0: F_0 \hookrightarrow E} D_{\sigma_0}$$

où l'on pose $D_{\sigma_0} = (0, 0, \dots, 0, 1_{\sigma_0}, 0, \dots, 0) \cdot D$. On définit

$$t_N(D) = \frac{1}{[F: \mathbb{Q}_p]} \text{val}_F(\det_{F_0}(\varphi^f|_D)).$$

Si D est un φ -module, on peut lui associer explicitement une représentation de Weil-Deligne par la méthode décrite dans [37]. Plus précisément, choisissons un plongement $\sigma_0: F_0 \hookrightarrow E$ et posons $U = D_{\sigma_0}$. Si $w \in W(\overline{\mathbb{Q}_p}/F)$, on définit $s(w) = \varphi^{-\alpha(w)}$ où $\alpha(w) \in f\mathbb{Z}$ désigne l'unique entier tel que l'action induite de w sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ soit la puissance $\alpha(w)$ -ième du Frobenius arithmétique $x \mapsto x^p$. On vérifie que $s(w): D \rightarrow D$ est $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -linéaire, et donc qu'elle induit un morphisme E -linéaire $s(w): U \rightarrow U$. Le couple (s, U) est une E -représentation non ramifiée du groupe de Weil-Deligne de F qui ne dépend pas du choix de σ_0 à isomorphisme non canonique près [19, Lemme 2.2.1.2]. On le note $\text{WD}(\varphi, D)$ et l'on note $\text{WD}(\varphi, D)^{ss}$ sa F -semisimplification [30, §8.5].

Soit D un φ -module. Si l'on pose $D_F = D \otimes_{F_0} F$, alors l'isomorphisme $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \simeq \prod_{\sigma: F \hookrightarrow E} E$ envoyant $h \otimes e$ sur $(\sigma(h)e)_{\sigma_0}$ induit un isomorphisme de E -espaces vectoriels

$$D_F \simeq \prod_{\sigma: F \hookrightarrow E} D_{F, \sigma},$$

où l'on a noté $D_{F, \sigma} = (0, 0, \dots, 0, 1_\sigma, 0, \dots, 0) \cdot D_F$. Ainsi, la donnée d'une filtration décroissante exhaustive séparée de D_F par des sous- $F \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -modules $(\text{Fil}^i D_F)_{i \in \mathbb{Z}}$ (pas forcément libres) équivaut à la donnée, pour tout $\sigma: F \hookrightarrow E$, d'une filtration décroissante exhaustive séparée de $D_{F, \sigma}$ par des sous- $F \otimes_{F, \sigma} E$ -espace vectoriels $(\text{Fil}^i D_{F, \sigma})_{i \in \mathbb{Z}}$.

Soit $(\text{Fil}^i D_F)_{i \in \mathbb{Z}}$ une telle filtration. On définit alors

$$t_H(D_F) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\sigma: F \hookrightarrow E} i \dim_F(\text{Fil}^i D_{F, \sigma} / \text{Fil}^{i+1} D_{F, \sigma}),$$

et l'on dit que la filtration $(\text{Fil}^i D_F)_{i \in \mathbb{Z}}$ est *admissible* si

- (i) $t_H(D_F) = t_N(D)$;
- (ii) $t_H(D'_F) \leq t_N(D')$ pour tout $F_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -sous-module D' stable par φ et muni de la filtration induite.

La conjecture de Breuil et Schneider peut dans ce cas être reformulée comme suit.

Conjecture 4.4.7. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante, i.e. une norme p -adique telle que $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et $v \in \rho_{\underline{d}} \otimes \pi$.*

(ii) Il existe un φ -module D de rang 2 tel que

$$\mathrm{WD}(\varphi, D)^{ss} = (r, V)$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma})_{\substack{i \in \mathbb{Z}, \\ \sigma \in S}}$, sur D_F telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma} / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{F,\sigma} \neq 0 \iff i \in \{-d_\sigma - 1, 0\}.$$

L'implication (i) \Rightarrow (ii) de la Conjecture 4.4.7 a été démontrée dans [20, Corollary 3.3]. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 4.4.8. — *Considérons les quatre conditions suivantes :*

(i) La représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante, i.e. une norme p -adique telle que $\|gv\| = \|v\|$ pour tout $g \in G$ et $v \in \rho_{\underline{d}} \otimes \pi$.

(ii) Il existe un φ -module D de rang 2 tel que

$$\mathrm{WD}(\varphi, D)^{ss} = (r, V)$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma})_{\substack{i \in \mathbb{Z}, \\ \sigma \in S}}$, sur D_F telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma} / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{F,\sigma} \neq 0 \iff i \in \{-d_\sigma - 1, 0\}.$$

(iii) Il existe un φ -module D de rang 2 tel que

$$(\varphi^f)^{ss} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

et une filtration admissible $(\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma})_{\substack{i \in \mathbb{Z}, \\ \sigma \in S}}$, sur D_F telle que

$$\mathrm{Fil}^i D_{F,\sigma} / \mathrm{Fil}^{i+1} D_{F,\sigma} \neq 0 \iff i \in \{-d_\sigma - 1, 0\}.$$

(iv) les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$(4.4.21) \quad \mathrm{val}_F(\lambda_1^{-1}) + \mathrm{val}_F(p\lambda_2^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma = 0;$$

$$(4.4.22) \quad \mathrm{val}_F(p\lambda_2^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma \geq 0;$$

$$(4.4.23) \quad \mathrm{val}_F(p\lambda_1^{-1}) + \sum_{\sigma \in S} d_\sigma \geq 0.$$

On a alors les implications et équivalences suivantes :

$$(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

Preuve. — L'implication (i) \Rightarrow (iv) découle de [49, Lemma 7.9]

L'équivalence (ii) \Leftrightarrow (iii) est immédiate.

L'équivalence (iii) \Leftrightarrow (iv) est une conséquence de [20, Proposition 3.2]. \square

Remarque 4.4.9. — Si $F = \mathbb{Q}_p$ et si r n'est pas scalaire, la Conjecture 4.4.7 est vraie [8].

D'après la Proposition 4.4.8, il est clair que pour avoir une réponse positive à la conjecture de Breuil et Schneider pour G il suffit de montrer l'implication (iv) \Rightarrow (i). Le cas $\lambda_1 \in \mathcal{O}_E^\times$ ou $\lambda_2 \in \mathcal{O}_E^\times$ est traité par la proposition suivante.

Proposition 4.4.10. — *Supposons que (4.4.21), (4.4.22) et (4.4.23) soient satisfaites, et supposons $\lambda_1 \in \mathcal{O}_E^\times$ ou $\lambda_2 \in \mathcal{O}_E^\times$. Alors la représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante.*

Preuve. — • Supposons $\lambda_1 \in \mathcal{O}_E^\times$ et posons

$$\chi = \text{nr}(\lambda_1^{-1}) \otimes \text{nr}(p\lambda_2^{-1}) \prod_{\sigma \in S} \sigma^{d_\sigma}.$$

Définissons alors $I^{\text{cont}}(\chi)$ comme l'induite continue du caractère χ , i.e. l'espace des $\phi: G \rightarrow E$ continues telles que

$$\forall b \in P, \forall g \in G, \quad \phi(bg) = \chi(b)\phi(g),$$

sur lequel G agit par la translation à droite. D'après (4.4.21) et (4.4.22), le caractère χ est à valeurs entières, ce qui implique que l'application définie par

$$\forall \phi \in I^{\text{cont}}(\chi), \quad \|\phi\| = \sup_{g \in P \backslash G} \phi(g)$$

est une norme G -invariante sur $I^{\text{cont}}(\chi)$. Comme on a une injection G -équivariante évidente

$$\rho_{\underline{d}} \otimes \pi \hookrightarrow I^{\text{cont}}(\chi),$$

on obtient le résultat voulu.

• En utilisant l'entrelacement

$$\text{Ind}_P^G(\text{nr}(\lambda_1^{-1}) \otimes \text{nr}(p\lambda_2^{-1})) = \text{Ind}_P^G(\text{nr}(\lambda_2^{-1}) \otimes \text{nr}(p\lambda_1^{-1})),$$

un argument analogue au précédent permet de conclure lorsque $\lambda_2 \in \mathcal{O}_E^\times$. □

Supposons maintenant que $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathcal{O}_E^\times$. Sous certaines conditions, le Théorème 4.4.4 permet de donner une réponse positive à la Conjecture 4.4.7.

Corollaire 4.4.11. — *Supposons que (4.4.21), (4.4.22) et (4.4.23) soient satisfaites, et supposons que $\underline{d} = (d_\sigma)_{\sigma \in S}$ satisfait aux conditions (i) et (ii) du Théorème 4.4.4. Alors la représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ admet une norme G -invariante.*

Preuve. — Il suffit de montrer que $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ possède un \mathcal{O}_E -réseau séparé et stable sous l'action de G . D'après la Proposition 4.4.1, on dispose d'un isomorphisme G -équivariant

$$\rho_{\underline{d}} \otimes \pi \simeq \frac{\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}}}{(T - a_p)(\text{c-Ind}_{KZ}^G \rho_{\underline{d}})}$$

où $a_p = \lambda_1^f + \lambda_2^f$. Ainsi, si le vecteur \underline{d} vérifie les conditions (i) et (ii) du Théorème 4.4.4, on peut appliquer la Proposition 4.4.5 et en déduire que la représentation $\rho_{\underline{d}} \otimes \pi$ possède un réseau séparé et stable sous l'action de G , ce qui prouve le résultat voulu. □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Amice, *Duals*, Proc. of a conf. on p -adic analysis (Nijmegen 1978), Nijmegen, Math. Institut Katholische Univ., 1978, 1–15.
- [2] Y. Amice et J. Vlu, *Distributions p -adiques associées aux séries de Hecke*, Astérisque 24–25, 1975, 119–131.
- [3] D. Barsky, *Fonctions k -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières*, Bull. S.M.F, 1973, 397–411.
- [4] L. Barthel et R. Livn, *Irreducible modular representations of GL_2 of a local field*, Duke Math. J. 75, 1994, 261–292.
- [5] L. Barthel et R. Livn, *Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case*, J. Number Theory 55, 1995, 1–27.
- [6] L. Berger, *Représentations modulaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2*, Astérisque 330, 2010, 263–279.
- [7] L. Berger, *La correspondance de Langlands p -adique pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Séminaire Bourbaki (2009/2010), 2010, Exp. n 1017.
- [8] L. Berger et C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Astérisque 330, 2010, 155–211.
- [9] N. Bourbaki, *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*, Paris : Hermann 1967.
- [10] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ I*, Compositio Math. 138, 2003, 165–188.
- [11] C. Breuil, *Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ II*, J. Inst. Math. Jussieu 2, 2003, 1–36.
- [12] C. Breuil, *Invariant L et série spéciale p -adique*, Ann. Scient. de l’E.N.S 37, 2004, 559–610.

- [13] C. Breuil, *Representations of Galois and of GL_2 in characteristic p* , Note from a course at Columbia University, 2007, disponible sur <http://www.math.u-psud.fr/~breuil/publications.html>.
- [14] C. Breuil, *Série spéciale p -adique et cohomologie étale complétée*, Astérisque 331, 2010, 65–115.
- [15] C. Breuil, *Correspondance de Langlands p -adique, compatibilité local-global et applications*, Séminaire Bourbaki (2010/2011), 2011, Exp. n° 1031.
- [16] C. Breuil, The emerging p -adic Langlands programme, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II, 2010, 203–230.
- [17] C. Breuil, *Remarks on some locally \mathbb{Q}_p -analytic representations of $GL_2(F)$ in the crystalline case*, Non-abelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory, Cambridge University Press, 2012.
- [18] C. Breuil et M. Emerton, *Représentations p -adiques ordinaires de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et compatibilité local-global*, Astérisque 331, 2010, 255–315.
- [19] C. Breuil et A. Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ en $l = p$* , Duke Math. J. 115, 2002, 205–310.
- [20] C. Breuil et P. Schneider, *First steps towards p -adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610, 2007, 149–180.
- [21] C. Breuil et V. Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2* , Memoirs of A.M.S 216, 2012.
- [22] P. Colmez, *Série principale unitaire pour $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2*, prépublication 2004.
- [23] P. Colmez, *Fonctions d’une variable p -adique*, Astérisque 330, 2010, 13–59.
- [24] P. Colmez, *La série principale unitaire de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Astérisque 330, 2010, 213–262.
- [25] P. Colmez, *Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, 2010, 281–509.
- [26] P. Colmez et J.-M. Fontaine, *Construction des représentations p -adiques semi-stables*, Invent. Math. 140, 2000, 1–43.
- [27] M. De Ieso, *Espaces de fonctions de classe C^r sur \mathcal{O}_F* , à paraître à Indag. Math., 2013.
- [28] M. De Ieso, *Sur certains complétés unitaires universels explicites pour $GL_2(F)$* , à paraître à Bull. Soc. Math. de France, 2013.
- [29] M. De Ieso, *Existence de normes invariantes pour GL_2* , prépublication 2012, Orsay.

- [30] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Lect. Notes Math. 349, Springer-Verlag, 1981, 501–597.
- [31] E. de Shalit, *Mahler bases, Lubin-Tate groups and elementary p -adic analysis*, preprint 2009.
- [32] S. De Smedt, *Local invertibility of non-archimedean vector-valued functions*, Ann. Math. Blaise Pascal 5, 1998, 13–23.
- [33] M. Emerton, *p -adic L -functions and unitary completions of representations of p -adic reductive groups*, Duke Math. J. 130, 2005, 353–392.
- [34] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for GL_2/\mathbb{Q}* , preprint 2011.
- [35] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques de corps locaux I*, The Grothendieck Festschrift, Vol II, Progr. Math., Birkhauser, vol 87, 1990, 249–309.
- [36] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 113–184.
- [37] J.-M. Fontaine, *Représentations l -adiques potentiellement semi-stables*, Astérisque 223, 1994, 321–347.
- [38] H. Frommer, *The locally analytic principal series of split reductive groups*, preprint 2003.
- [39] E. Grosse-Klönne, *Integral structures in automorphic line bundles on the p -adic upper half plane*, Math. Annalen 329, 2004, 463–493.
- [40] Y. Hu, *Normes invariantes et existence de filtrations admissibles*, J. reine angew. Math. 634, 2009, 107–141.
- [41] Y. Hu, *Sur quelques représentations supersingulières de $GL_2(\mathbb{Q}_p^f)$* , J. of Algebra 324, 2010, 1577–1615.
- [42] D. Kazhdan et E. de Shalit, *Kirillov models and integrals structures in p -adic smooth representations of $GL_2(F)$* , J. of Algebra 353, 2012, 212–223.
- [43] J. Kohlhaase, *The cohomology of locally analytic representations*, J. Reine Angew. Math. (Crelle) 651, 2011, 187–240.
- [44] R. Liu, *Locally Analytic Vectors of some crystabeline representation of $GL_2(\mathbb{Q}_p)$* , Compos. Math., to appear.
- [45] E. Nagel, *Fractional non-archimedean calculus in one variable*, to appear P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2012.
- [46] E. Nagel, *Fractional non-archimedean calculus in many variables*, to appear in P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2012.

- [47] E. Nagel, *The intertwined open cells in the universal unitary lattice of an unramified algebraic principal series*, prépublication disponible sur <http://www.math.jussieu.fr/nagel/publications/InterOpenCells.pdf>
- [48] V. Paškūnas, *Coefficient systems and supersingular representations of $GL_2(F)$* , Mémoires de la Soc. Math. de France 99, 2004.
- [49] V. Paškūnas, *Admissible unitary completions of locally \mathbb{Q}_p -rational representations of $GL_2(F)$* , Representation theory 14, 2010, 324-354.
- [50] V. Paškūnas, *The image of Colmez's Montreal Functor*, preprint 2011.
- [51] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2* , J. Amer. Math. Soc. 22, 2009, 641–690.
- [52] W. Schikhof, *Non-archimedean calculus*, preprint 1978, Université de Nijmegen.
- [53] W. Schikhof, *An introduction to p -adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Math. 4, Cambridge University Press, 1984.
- [54] P. Schneider, *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2002.
- [55] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Locally analytic distributions and p -adic representation theory, with an application to GL_2* , J. Amer. Math. Soc. 15, 2002, 51–125.
- [56] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Banach space representations and Iwasawa theory*, Israel J. Math. 127, 2002, 359–380.
- [57] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Algebras of p -adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. 153, 2003, 145–196.
- [58] P. Schneider et J. Teitelbaum, *Banach-Hecke algebras and p -adic galois representations*, Doc. Math., Special Volume in honour of John Coates' 60th Birthday, 2006, 631–684.
- [59] B. Schraen, *Représentations p -adiques de $GL_2(F)$ et catégories dérivées*, Israel Journal of Math. 176, 307–362.
- [60] B. Schraen, *Sur la présentation des représentations supersingulières de $GL_2(F)$* , Prépublication 2012.
- [61] J-P. Serre, *Arbres et amalgames, SL_2* , Astérisque 46, 1977.
- [62] C. Sorensen, *A proof of the Breuil-Schneider Conjecture in the indecomposable case*, preprint 2011.
- [63] M. Van der Put, *Algèbres de fonctions continues p -adiques*, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. A 71, 1968, 556–661.

- [64] M.-F. Vignéras, *A criterion for integral structures and coefficients systems on the three of $PGL(2, F)$* , Pure and Applied Mathematics Quaterly 4, 2008, 1291–1316.
- [65] M. Vishik, *Non-archimedian measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR Sbornik 28, 1976, 216–228.