



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Jean-François TRÉGOUËT**

le lundi 3 décembre 2012

**Titre :**

Synthèse de correcteurs robustes périodiques à mémoire et application au contrôle d'attitude de satellites par roues à réaction et magnéto-coupleurs

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

EDSYS : Automatique

**Unité de recherche :**

LAAS-CNRS – UPR 8001

**Directeur(s) de Thèse :**

M. Denis Arzelier, Directeur de recherche, LAAS-CNRS

M. Dimitri Peaucelle, Chargé de recherche, LAAS-CNRS

**Jury :**

Mme Hélène Piet-Lahanier, Conseiller scientifique, ONERA - Rapporteur

M. Olivier Sename, Professeur, INP Grenoble / ENSE3 - Rapporteur

Mme Christelle Pittet, Ingénieur, CNES

M. Jamal Daafouz, Professeur, ENSEM

M. Marco Lovera, Professeur, Politecnico di Milano

M. Daniel Alazard, Professeur, ISAE



L'homme de Science le sait bien, lui, que, sans la Science, l'homme ne serait qu'un stupide animal sottement occupé à s'adonner aux vains plaisirs de l'amour dans les folles prairies de l'insouciance, alors que la Science, et la Science seule, a pu, patiemment, au fil des siècles, lui apporter l'horloge pointeuse et le parcmètre automatique sans lesquels il n'est pas de bonheur terrestre possible.

---

Pierre Desproges



# Remerciements

En guise de préambule à ce thèse, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de sa rédaction. Ma reconnaissance va en premier lieu à Denis Arzelier et Dimitri Peaucelle, mes deux co-directeurs de thèse au LAAS. L'un et l'autre ont participé à la création de ce fragile climat qui rend possible le plaisir dans l'effort. L'enthousiasme, qui m'a bien souvent animé pendant ces trois années de thèse, découle pour beaucoup des encouragements et de la liberté dans l'accompagnement dont j'ai pu bénéficier. Je fais part également de ma reconnaissance à mes encadrants Christelle Pittet du CNES et Alexandre Falcoz d'Astrium pour leur investissement dans ce travail et les longs et productifs échanges que nous avons eus sur le contrôle d'attitude.

Je souhaite également exprimer ma gratitude aux rapporteurs Mme Hélène Piet-Lahanier et M. Olivier Sename pour leur lecture approfondie de ce mémoire et les discussions fructueuses qui en ont découlé, ainsi que pour avoir participé au jury, accompagnés de M. Jamal Daafouz, M. Daniel Alazard et M. Marco Lovera. Qu'ils soient remerciés de leur intérêt pour ce travail et d'avoir accepté de participer à l'évaluation de cette thèse.

Je remercie également les membres du groupe MAC pour les discussions scientifiques informelles que j'ai pu avoir pendant ces trois années et qui ont indéniablement complété ma formation. Je pense en particulier à Didier Henrion. Merci également à Luca Zaccarian pour l'intérêt qu'il a porté à ces recherches et l'aide précieuse qu'il m'a apportée sur le thème abordé par le dernier chapitre de cette thèse. Je ne peux manquer aussi de souligner la contribution de chacun des membres du groupe pour la bonne humeur et l'ambiance stimulante qui règnent au sein de l'équipe de recherche.

Enfin, il me faut ici rendre justice à deux acteurs majeurs qui m'ont accompagné pendant cette période plus âpre qu'a été la fin de la rédaction de ce thèse : je pense au distributeur de sandwiches triangles du laboratoire et à la machine à café du groupe MAC. J'exprime ici ma sincère reconnaissance à toutes les personnes ayant assuré l'approvisionnement en matières premières de ces appareils. Finalement, je veux clôturer cette section en remerciant chaleureusement Josep, Marie, Rénald, Marianna, Yvan, Yumi et Léa qui ont, chacun à leur tour, accepté de m'ouvrir les portes de leur logis durant cette période de nomadisme urbain.



# Résumé

Les travaux présentés dans ce mémoire constituent une contribution à la conception de méthodes systématiques pour l'analyse et la commande de systèmes périodiques et incertains. Une partie importante de cette thèse est également consacrée au contrôle d'attitude de satellites dont la dynamique se prête naturellement à une représentation sous forme de modèles périodiques soumis à des incertitudes.

La première partie propose une présentation unifiée des résultats d'analyse et de synthèse de modèles périodiques et incertains à temps-discret via des méthodes basées sur des inégalités linéaires matricielles (LMI) et en s'appuyant sur la théorie de Lyapunov. Par la suite, l'accent est mis sur une nouvelle classe de correcteurs périodiques à mémoire pour lesquels l'entrée de commande est construite en utilisant l'historique des états du système conservés en mémoire. Des exemples numériques démontrent que ces nouveaux degrés de liberté permettent de repousser les limites des performances robustes.

La seconde partie s'intéresse aux aspects de périodicité et de robustesse du contrôle d'attitude de satellite rencontrés notamment lors de l'utilisation des magnéto-coupleurs. Ces actionneurs s'appuient sur le champ géomagnétique variant périodiquement le long de l'orbite du satellite. Différentes stratégies de commande sont mises en oeuvre et comparées entre elles avec le souci constant de tenir compte des principales limitations des actionneurs. Cette démarche conduit à une nouvelle loi de commande périodique régulant le moment cinétique des roues à réactions sans perturber le contrôle d'attitude dont l'effort de commande est réparti sur l'ensemble des actionneurs.

**Mots-clés :** Commande robuste, systèmes périodiques, incertitudes paramétriques, LMI, contrôle d'attitude, magnéto-coupleurs, champ magnétique.

This manuscript reviews contributions to the development of systematic methods for analysis and control of periodic uncertain systems. An important part of this thesis is also dedicated to the design of attitude control systems for satellites whose dynamics is naturally represented as a periodic model subject to uncertainties.

The first part is devoted to the development of a unifying presentation of the analysis and synthesis results of periodic, uncertain and discrete-time models via methods relying on linear matrix inequalities (LMI) and based on Lyapunov theory. Subsequently, the focus is on a new class of periodic control laws with memory for which the control input is constructed using history of the states of the system kept in memory. Numerical experiments show that these new degrees of freedom can outperformed the existing results.

The second part deals with periodic and robustness aspects of attitude control of a satellite using magnetorquers. These actuators use the geomagnetic field that varies periodically along the orbital trajectory. Different control strategies are implemented and compared with one another with the constant concern of taking the main limitations of the actuators into account. This approach leads to a new control law regulating the momentum of the reaction wheels without disturbing attitude control for which the control effort is shared by all actuators.

**Keywords :** Robust control, periodic systems, LMI, parametric uncertainties, attitude control, magnetorquers, geomagnetic field.





# Notations

## Matrices et ensembles

$\mathbf{1}_n, \mathbf{0}_{m \times n}$	Matrice identité et matrice nulle de taille $n \times n$ et $m \times n$ respectivement
$\mathbb{S}^n, \mathbb{S}_+^n$	Ensemble des matrices symétriques de dimension $n \times n$ , et ensemble des matrices symétriques définies positives de dimension $n \times n$
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	Ensemble des réels positifs ou nuls
$\mathbb{Z}_{< 0}$	Ensemble des entiers relatifs strictement négatifs

## Opérateurs

$\text{He}\{\cdot\}$	Opérateur de transposée hermitienne : $\text{He}\{A\} = A + \text{conj}\{A\}^T$
$\text{Sq}\{\cdot\}$	Opérateur de multiplication à droite de la matrice argument par sa transposée $\text{Sq}\{A\} = AA^T$
$\text{diag}\{\cdot\}$	Opérateur construisant à partir de ses arguments une matrice diagonale par bloc
$\text{co}\{\cdot\}$	Opérateur construisant à partir de ses arguments le plus petit ensemble convexe polytopique englobant
$\sigma$	Opérateur d'avance dans le temps, en temps discret : $\sigma x_k = x_{k+1}$
$\text{mod}(\cdot, \cdot)$	Opérateur modulo renvoyant la valeur du premier argument modulo le second
$\otimes$	Produit de Kronecker
$ \cdot $	Opérateur de norme induite : $ M  = \max_{\ v\ =1} \ Mv\ $
$M^{[i]}$	Evaluation de la matrice $M(\theta)$ sur le $i$ -ième sommet du polytope $\Theta$ auquel appartient le vecteur $\theta$ : $M^{[i]} = M(\theta = \theta_i)$ .

## Nomenclature spécifique à la première partie

### Axe des temps

Alors que la valeur du signal  $x$  à l'instant courant est fréquemment notée  $x_k$ , on utilisera ici  $x_{Nq+k+\tau}$  avec  $0 \leq k \leq N-1$  et  $0 \leq \tau \leq N-1$ . La délimitation temporelle de la période  $q$ , commençant à l'instant  $Nq+\tau$  et se terminant à  $Nq+N-1+\tau = N(q+1)-1+\tau$ , est ainsi facilitée. Toute grandeur à temps-variant indexée uniquement par  $k$  (et éventuellement par  $\tau$  mais pas par  $q$ ) est donc implicitement périodique puisqu'elle reprend sa valeur à chaque nouvelle période, correspondant à une nouvelle séquence où  $k$  varie de 0 à  $N-1$ . On précise finalement que l'indice  $\tau$  sera généralement considéré nul, sauf indication contraire. La figure 1 donne une illustration de cette convention.

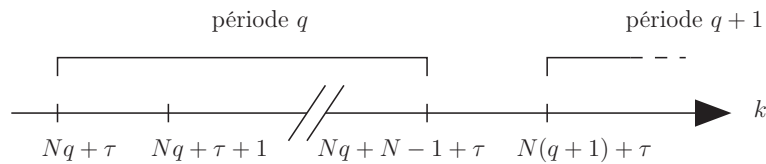


FIGURE 1 – Découpage de l'axe des temps adopté dans le cadre de cette thèse

## Matrices, modèles et incertitudes

$\theta \in \Theta$	Vecteur d'incertitudes appartenant au simplexe standard
$P_k, W_k$	Matrices de Lyapunov des modèles primal et dual
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^d$	Matrices contenant les variables additionnelles utilisées dans les LMIs étendues
$K_k, K_{k,j}$	Matrices des gains du retour d'état sans et avec mémoire (dans le cas d'un indice unique, on suppose que $j = 1 : K_k = (K_{k,j})_{j=1} = K_{k,1}$ )
$\Sigma$	Modèle périodique en boucle ouverte
$\Sigma_{cl}$	Modèle périodique polynomial, correspondant à la boucle fermée de $\Sigma$ et d'une loi de commande de retour d'état à mémoire
$\Sigma_{cl}^d$	Modèle dual de $\Sigma_{cl}$
$\Gamma_m, \Gamma_m^d$	Reformulations invariantes dans le temps liftées monodromiques de $\Sigma_{cl}$ et $\Sigma_{cl}^d$
$\Gamma_e, \Gamma_e^d$	Reformulations invariantes dans le temps liftées descripteurs de $\Sigma_{cl}$ et $\Sigma_{cl}^d$
$\Gamma_p, \Gamma_p^d$	Reformulations invariantes dans le temps liftées polynomiales de $\Sigma_{cl}$ et $\Sigma_{cl}^d$

## Signaux et matrices associés aux différents modèles

Référence	Signaux	Matrices	Définition
$\Sigma$	$\{x_{Nq+k}, u_{Nq+k}, w_{Nq+k}, z_{Nq+k}\}$	$\{A_k^{ol}, B_k, B_{uk}, C_k^{ol}, D_k, D_{uk}\}$	(2.6)
$\Sigma_{cl}$	$\{x_{Nq+k}, w_{Nq+k}, z_{Nq+k}\}$	$\{A_{k,j}, B_k, C_{k,j}, D_k\}$	(2.7)
$\Sigma_{cl}^d$	$\{x_{Nq-k}^d, w_{Nq-k}^d, z_{Nq-k}^d\}$	$\{A_{k,j}, B_k, C_{k,j}, D_k\}$	Théorème 14
(2.11)	$\{\bar{x}_{Nq+k}, w_{Nq+k}, z_{Nq+k}\}$	$\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{D}_k\}$	Proposition 2
(2.53)	$\{\bar{v}_{Nq-k}, w_{Nq-k}^d, z_{Nq-k}^d\}$	$\{\bar{A}_k^d, \bar{B}_k^d, \bar{C}_k^d, \bar{D}_k^d\}$	Proposition 9
$\Gamma_m$	$\{\eta_q, \hat{w}_q, \hat{z}_q\}$	$\{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$	Proposition 3
$\Gamma_m^d$	$\{\rho_q^d, \check{w}_q^d, \check{z}_q^d\}$	$\{\check{\Psi}, \check{\mathfrak{B}}, \check{\mathfrak{C}}, \check{\mathfrak{D}}\}$	Proposition 10
$\Gamma_e$	$\{\hat{x}_q, \hat{w}_q, \hat{z}_q\}$	$\{\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{D}\}$	Proposition 4
$\Gamma_e^d$	$\{\hat{x}_q^d, \hat{w}_q^d, \hat{z}_q^d\}$	$\{\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{A}}, \check{\mathcal{B}}, \check{\mathcal{C}}_1, \check{\mathcal{C}}_2, \check{\mathcal{D}}\}$	Proposition 8
$\Gamma_p$	$\{\hat{x}_q, \hat{w}_q, \hat{z}_q\}$	$\{\mathcal{A}_j, \mathcal{B}, \mathcal{C}_j, \mathcal{D}\}$	Proposition 7

Les modèles liftés considèrent implicitement  $\tau = 0$ . Dans le cas contraire, l'indice  $\tau$  enrichit les notations. Ainsi, on rencontrera  $\eta_q^\tau$  et  $\Psi^\tau$  lorsque le cas le plus général est traité alors que  $\eta_q$  et  $\Psi$  correspondent à  $\eta^0$  et  $\Psi^0$ , respectivement.

## Nomenclature spécifique à la seconde partie

## Règles de notations

En raison de son objet d'étude, cette partie fait appel à de très nombreuses variables. Plutôt que d'en dresser une liste exhaustive, on donne ici la philosophie de la nomenclature utilisée. Cette dernière se base principalement sur [Hugues, 1986], avec quelques légères modifications empruntées à [Courtois, 1998].

$F_A$	Référentiel A
$\vec{\mathcal{F}}_A$	Vectrice associée à $F_A$ et formée du trièdre orthonormé $\vec{x}_A, \vec{y}_A$ et $\vec{z}_A$ d'origine $O_A$ (le concept de vectrice est abordé succinctement dans la section 3.4.1 et discuté plus amplement dans l'annexe F)
$v^{[A]}$	Matrice des composantes du vecteur $\vec{v}$ dans $F_A$
$v$	Amplitude du vecteur $\vec{v}$
$\mathcal{A}$	Corps en mouvement lié à $F_A$
$\vec{h}_{\mathcal{A}/O_B}$	Moment cinétique de $\mathcal{A}$ par rapport à l'origine du référentiel $F_B$
$q_{B/A}, C_{B/A}, \vec{\omega}_{B/A}$	Quaternion, matrice de rotation et vitesse angulaire paramétrant la rotation de $F_B$ par rapport à $F_A$
$\vec{v}_{B/A}$	Vitesse de translation de $F_B$ par rapport à $F_A$ , c'est-à-dire $O_A \dot{O}_B$
$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$	Opérateur de dérivation temporelle absolue
$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)^{[B]}$	Opérateur de dérivation temporelle relative au référentiel $F_B$

### Notations simplifiées

Lorsque les risques d'ambiguïtés disparaissent, certaines notations usuelles sont simplifiées. Le tableau suivant effectue la correspondance entre la version complète (première ligne) et la version simplifiée (seconde ligne) de ces notations.

$q_{S/R}$	$\varepsilon_{S/R}$	$\eta_{S/R}$	$\omega_{S/I}^{[S]}$	$\omega_{S/R}^{[S]}$	$\omega_{R/I}^{[R]}(t)$	$M^{[S]}$	$J_{S/O_S}^{[S]}$	$T_{ext}^{[R]}$	$(h_s)_\#$	$h_{S/O_S}^{[I]}$	$B^{[I]}$	$B^{[S]}$	$C_{S/R}(q)$
$q$	$\varepsilon$	$\eta$	$\omega$	$\omega_{S/R}$	$\omega_{R/I}(t)$	$M$	$J$	$T_{ext}$	$h_\#$	$h_S^{[I]}$	$B_o$	$B$	$C(q)$

Les termes  $b(t)$  et  $b_o(t)$  font référence aux versions normalisées de  $B(t)$  et  $B_o(t)$  :

$$b(t) = \frac{B(t)}{\|B(t)\|}, \quad b_o(t) = \frac{B_o(t)}{\|B_o(t)\|}$$

### Qualificatifs de stabilité

Les adjectifs qualifiant la stabilité sont abrégés selon la convention suivante : uniforme (U), globale (G), locale (L), exponentielle (E) et asymptotique (A). On ajoute le préfixe « 0- » lorsque l'on considère la stabilité du modèle autonome (pour lequel l'entrée est nulle). Par convention, le suffixe (S) fait référence au mot stabilité. Ainsi, le terme 0-UGES désigne la stabilité uniforme, globale et exponentielle du modèle autonome.



# Table des matières

Résumé	v
Notations	vii
Table des matières	xiv
Table des figures	xvi
Liste des tableaux	xvii
Introduction	1
Objectifs et contributions	7
<b>I Analyse et commande robuste et périodique par des méthodes LMI</b>	<b>11</b>
<b>1 Stabilité robuste des modèles linéaires périodiques : analyse et synthèse</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction	13
1.2 Résultats préliminaires d'analyse et de synthèse robuste	14
1.2.1 Définition des problèmes	14
1.2.2 Analyse de stabilité des modèles périodiques linéaires	15
1.2.3 Synthèse par retour d'état périodique	19
1.2.4 Robustesse face aux incertitudes polytopiques	20
1.2.5 Conclusions	28
1.3 Conditions LMI étendues pour le modèle nominal	29
1.3.1 Analyse de stabilité utilisant une condition LMI étendue	29
1.3.2 Condition duale d'analyse de stabilité	30
1.3.3 Réduction du nombre de variables de la condition LMI étendue	32
1.3.4 Synthèse de correcteurs périodiques par retour d'état	33
1.3.5 Conclusions	33
1.4 Interprétation des variables de relaxation	34
1.4.1 Condition nécessaire pour que la LMI étendue soit satisfaite	34
1.4.2 Exploitation de la condition nécessaire de la LMI étendue	36
1.4.3 Résumé et interprétation ensembliste	37
1.5 Extension des conditions étendues au cas robuste	37
1.5.1 Réduction du conservatisme grâce aux variables de relaxation	38
1.5.2 Conditions alternatives d'analyse robuste	39
1.5.3 Hiérarchie de conditions d'analyse par multiplication de la période	41
1.5.4 Synthèse robuste	43
1.5.5 Résultats numériques	45
1.5.6 Conclusions	49
<b>2 Analyse et synthèse pour les lois de commande périodiques à mémoire</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction	51
2.2 Généralisation des lois de commande périodique à mémoire	52
2.2.1 Formulation retenue	52
2.2.2 Discussion sur le statut particulier des lois de commande de type PFMC	53

2.3	Enoncé des problèmes d'analyse et de synthèse . . . . .	53
2.3.1	Modèle en boucle fermée avec les canaux de performances . . . . .	53
2.3.2	Normes du modèle en boucle fermée . . . . .	55
2.4	Reformulations invariante dans le temps des modèles polynomiaux périodiques d'ordre variant . . . . .	56
2.4.1	Représentation liftée monodromique . . . . .	58
2.4.2	Représentation liftée descripteur . . . . .	60
2.4.3	Relations entre les deux modèles . . . . .	61
2.5	Dualité des modèles polynomiaux périodiques d'ordre variant . . . . .	63
2.5.1	Modèle dual du lifting descripteur . . . . .	64
2.5.2	Dual des modèles périodiques polynomiaux . . . . .	70
2.5.3	Modèle dual du lifting monodromique . . . . .	71
2.5.4	Correspondances entre les représentations liftées . . . . .	73
2.6	Analyse robuste des modèles polynomiaux périodiques à ordre variant . . . . .	73
2.6.1	Stratégie conduisant à des conditions LMI . . . . .	74
2.6.2	Analyse par le modèle monodromique . . . . .	75
2.6.3	Analyse par le modèle descripteur . . . . .	76
2.6.4	Conditions d'analyse robuste sous forme LMI . . . . .	79
2.7	Synthèse de lois de commande périodiques à mémoire . . . . .	81
2.7.1	Cas général correspondant aux PFMC structurés . . . . .	81
2.7.2	Cas des PFMC non structurés . . . . .	84
2.8	Résultats numériques . . . . .	85
2.8.1	Diminution du conservatisme grâce au correcteurs à mémoire . . . . .	85
2.8.2	Influence du choix de $\tau$ . . . . .	86
2.9	Conclusions . . . . .	87

## II Contrôle d'attitude périodique et robuste de satellites

89

<b>3</b>	<b>Modélisation du mouvement d'attitude de satellites équipés de roues à réaction et de magnéto-coupleurs</b>	<b>91</b>
3.1	Introduction . . . . .	91
3.2	Le contrôle d'attitude . . . . .	91
3.2.1	Problématique . . . . .	91
3.2.2	Exigences du pointage . . . . .	92
3.2.3	Principes du système de contrôle d'attitude . . . . .	92
3.2.4	Cadre de cette étude . . . . .	92
3.3	Aspects de périodicité dans le contrôle d'attitude . . . . .	93
3.3.1	Actionneurs dépendant de l'environnement : exemple des magnéto-coupleurs . . . . .	93
3.3.2	Perturbations environnementales . . . . .	93
3.4	Modèle non-linéaire . . . . .	94
3.4.1	Préliminaires . . . . .	95
3.4.2	Equations de la dynamique du satellite . . . . .	96
3.4.3	Equations décrivant la cinématique du satellite . . . . .	104
3.4.4	Modélisation du champ magnétique . . . . .	104
3.4.5	Représentation sous forme de modèle d'état . . . . .	108
3.5	Approximation du modèle au voisinage d'une trajectoire prédéfinie . . . . .	109
3.5.1	Trajectoire de l'approximation . . . . .	110
3.5.2	Linéarisation du modèle d'état . . . . .	111
3.5.3	Condition de validité de l'approximation du modèle . . . . .	111
3.5.4	Approximation de $\vec{B}$ dans le référentiel de référence . . . . .	114
3.6	Cas d'études . . . . .	115
3.6.1	Description et justification du choix . . . . .	115
3.6.2	Particularisation des équations du modèle d'état . . . . .	117
3.6.3	Approximation du champ magnétique . . . . .	118
3.7	Conclusion . . . . .	124

<b>4</b>	<b>Contrôle d'attitude robuste et périodique en utilisant des roues à réaction et des magnéto-coupleurs</b>	<b>125</b>
4.1	Introduction . . . . .	125
4.2	Choix des actionneurs pour la commande d'attitude . . . . .	126
4.2.1	Cas d'un couple de commande idéal . . . . .	126
4.2.2	Utilisation des roues à réaction seules . . . . .	128
4.2.3	Problèmes spécifiques associés aux actionneurs magnétiques . . . . .	129
4.2.4	Principe et justification de l'approche . . . . .	132
4.3	Position du problème vis-à-vis de la littérature . . . . .	132
4.3.1	Régulation du moment cinétique des roues . . . . .	133
4.3.2	Allocation du couple total . . . . .	134
4.4	Formalisation de la méthode de dissymétrie des gains . . . . .	134
4.4.1	Asservissement d'un intégrateur simple grâce aux magnéto-coupleurs . . . . .	135
4.4.2	Structure de commande en cascade . . . . .	141
4.4.3	Résultats de simulation . . . . .	143
4.4.4	Critique de l'approche et objectifs des nouvelles structures de contrôle . . . . .	146
4.5	Approche par linéarisation . . . . .	149
4.5.1	Construction du modèle de synthèse . . . . .	149
4.5.2	Synthèse du correcteur périodique à temps-discret . . . . .	150
4.5.3	Résultats de simulations . . . . .	151
4.5.4	Discussion sur la démarche . . . . .	152
4.6	Stratégie d'allocation du couple total . . . . .	153
4.6.1	Nouvelle structure de contrôle et preuve de stabilité . . . . .	154
4.6.2	Utilisation d'un gain périodique . . . . .	156
4.6.3	Participation active des magnéto-coupleurs au contrôle d'attitude . . . . .	156
4.6.4	Résultats de simulations . . . . .	156
4.7	Conclusions . . . . .	161
	<b>Conclusions</b>	<b>163</b>
	<b>Annexes</b>	<b>169</b>
	<b>A Outils algébriques</b>	<b>169</b>
	<b>B Généralisation aux modèles N-périodiques des résultats du chapitre 1</b>	<b>171</b>
	B.1 Analyse et synthèse nominale . . . . .	171
	B.2 Analyse et synthèse robuste grâce aux LMI étendues . . . . .	172
	<b>C Dualité des systèmes invariant dans le temps et à temps discret</b>	<b>175</b>
	<b>D Normes <math>\mathcal{H}_2</math> et <math>\mathcal{H}_\infty</math> des modèles périodiques à temps-discret</b>	<b>177</b>
	D.1 Liens avec la norme du modèle temps-invariant lifté . . . . .	177
	D.2 Interprétations pour les modèles périodiques . . . . .	178
	D.2.1 Norme $\mathcal{H}_2$ . . . . .	178
	D.2.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	179
	D.3 Normes et dualité des systèmes . . . . .	179
	<b>E Développements complémentaires au chapitre 2</b>	<b>181</b>
	E.1 Preuves des conditions duales d'analyse du modèle descripteur . . . . .	181
	E.2 Preuve algébrique de la condition primale $\mathcal{H}_\infty$ descripteur . . . . .	183
	E.2.1 Cas où $l \leq N$ . . . . .	183
	E.2.2 Cas où $l > N$ . . . . .	184

<b>F Algèbre vectorielle et vectrices</b>	<b>185</b>
F.1 Définitions . . . . .	185
F.2 Expression d'une relation vectorielle dans un référentiel particulier . . . . .	186
F.3 Produit scalaire . . . . .	186
F.4 Produit vectoriel . . . . .	186
F.5 Tenseur dyadique . . . . .	187
F.6 Cinématique des vectrices . . . . .	188
F.7 Relations importantes d'algèbre vectorielle . . . . .	188
<b>G Liste des référentiels utilisés et rotations élémentaires</b>	<b>191</b>
G.1 Rotations élémentaires . . . . .	191
G.2 Liste des référentiels utilisés . . . . .	191
<b>H Linéarisation des équations de la dynamique et de la cinématique</b>	<b>193</b>
<b>I Valeurs numériques des constantes des modèles du satellite</b>	<b>195</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>196</b>



# Table des figures

1	Découpage de l'axe des temps adopté dans le cadre de cette thèse . . . . .	vii
2	Structure en cascade permettant l'intégration partielle de la dynamique . . . . .	3
1.1	Trajectoire des états d'un modèle 2-périodique stable . . . . .	18
1.2	Décroissance des fonctions de Lyapunov associées à un modèle 2-périodique stable . . . . .	19
1.3	Positions des valeurs propres de $\Psi(\theta)$ dans $\mathbb{C}$ en fonctions de $\alpha$ . . . . .	48
2.1	Représentation des ensembles de contrôleurs stabilisants . . . . .	51
2.2	Schéma du problème standard . . . . .	56
2.3	Lien entre $\eta_q, \eta_{q+1}$ et $\hat{x}_q$ en fonction de $l$ . . . . .	62
2.4	Norme $\mathcal{H}_2$ de la boucle fermée de $\Sigma(\theta)$ avec le correcteur 1 . . . . .	87
3.1	Schéma du modèle du mouvement d'attitude du satellite . . . . .	94
3.2	Corps central du satellite $\mathcal{B}$ . . . . .	97
3.3	Représentation de l'objet $\mathcal{A}$ appartenant au satellite $\mathcal{S}$ . . . . .	99
3.4	Repère sphérique utilisé par le modèle IGRF . . . . .	106
3.5	Lien entre les repères inertiel et orbital . . . . .	107
3.6	Représentation graphique du modèle non-linéaire décrit par le théorème 32 . . . . .	110
3.7	Modèle dipolaire géomagnétique . . . . .	116
3.8	Représentation des référentiels inertiels, satellite et orbital local . . . . .	116
3.9	Localisation du référentiel magnétique $F_M$ par rapport au référentiel terrestre $F_E$ . . . . .	118
3.10	Représentation du plan orbital par rapport au référentiel magnétique $F_M$ . . . . .	119
3.11	Modèle IGRF : superposition de $B(t)$ sur 60 orbites pour les pointages inertiel et géocentrique . . . . .	122
3.12	Modèle dipolaire : superposition de $B(t)$ sur 60 orbites pour les pointages inertiel et géocentrique : . . . . .	122
3.13	Chronogrammes de $i_m(t)$ et $\eta_m(t)$ sur 60 orbites . . . . .	123
3.14	Modèle identifié (traits continus) : comparaison avec l'enveloppe issue de l'IGRF (traits pointillés) . . . . .	123
4.1	Illustration du phénomène de déroulement . . . . .	127
4.2	Evolution de la norme de la matrice de gain périodique $K_k$ au cours de la période . . . . .	138
4.3	Asservissement de l'intégrateur simple avec $k_m = 0,01$ : robustesse vis-à-vis du champ . . . . .	139
4.4	Asservissement de l'intégrateur simple avec $k_m$ : influence de la valeur de $k_m$ . . . . .	140
4.5	Asservissement de l'intégrateur simple avec $K_k$ : robustesse vis-à-vis du champ . . . . .	140
4.6	Asservissement de l'intégrateur simple avec $K_k$ : robustesse vis-à-vis du champ . . . . .	141
4.7	Asservissement de l'intégrateur simple : comparaison entre $k_m = 0,01$ et $K_k$ . . . . .	142
4.8	Schéma de la stratégie de commande utilisant le moment cinétique total . . . . .	142
4.9	Structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $k_m = 0,01$ : signaux du sous-système supérieur . . . . .	144
4.10	Structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $k_m = 0,01$ : signaux du sous-système inférieur . . . . .	145
4.11	Structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $K_k$ : signaux du sous-système supérieur . . . . .	145
4.12	Structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $K_k$ : signaux du sous-système inférieur . . . . .	146
4.13	Robustesse de la structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $k_m = 0,01$ vis-à-vis de $T_{ext}(t)$ : signaux du sous-système supérieur . . . . .	147
4.14	Robustesse de la structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $k_m = 0,01$ vis-à-vis de $T_{ext}(t)$ : signaux du sous-système inférieur . . . . .	147
4.15	Robustesse de la structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $K_k$ vis-à-vis de $T_{ext}(t)$ : signaux du sous-système supérieur . . . . .	148
4.16	Robustesse de la structure de contrôle utilisant $h_S^{[I]}$ et $K_k$ vis-à-vis de $T_{ext}(t)$ : signaux du sous-système inférieur . . . . .	148

4.17	Eloignement de la trajectoire de linéarisation due à la discrétisation . . . . .	150
4.18	Résultats de l'approche locale avec $B_p^{[N]}(t)$ et $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$ . . . . .	151
4.19	Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$ . . . . .	152
4.20	Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et avec perturbations . . . . .	153
4.21	Schéma de la stratégie de commande par allocation du couple total . . . . .	154
4.22	Influence du champ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système supérieur . . . . .	157
4.23	Influence du champ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système inférieur . . . . .	157
4.24	Influence des perturbations $T_{ext}(t)$ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système supérieur . . . . .	158
4.25	Influence des perturbations $T_{ext}(t)$ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système inférieur . . . . .	159
4.26	Amélioration de la loi d'allocation des couples de commande : représentation de $h_w$ . . . . .	159
4.27	Amélioration de la loi d'allocation des couples de commande : représentation de $M(t)$ . . . . .	160
4.28	Rejet de $T_{ext}$ avec une loi de contrôle d'attitude plus agressive . . . . .	161
G.1	Représentation graphique des rotations élémentaires . . . . .	191

# Liste des tableaux

1.1	Comparaisons des dimensions et du nombre de variables des conditions LMI dans le cas nominal	34
1.2	Influence de la dualité et de $\tau$ sur les conditions d'analyse robuste	46
1.3	Hierarchie de conditions d'analyse robuste basée sur le lemme 16	47
1.4	Résultats d'analyse obtenus grâce au théorème 5 pour différentes relaxations	47
1.5	Comparaison des conditions de synthèse avec et sans mémoire et analyse en boucle-fermée	48
1.6	Influence des matrices $M_j$ et de $\tau$ sur les conditions de synthèse à mémoire du théorème 13	49
2.1	Structure de $T$ en fonction de $l$	61
2.2	Relations entre les matrices des deux représentations liftées	63
2.3	Résultats d'analyse et de synthèse $\mathcal{H}_2$ pour différents choix de la séquence $\alpha_k$	86
2.4	Résultats d'analyse et de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ pour différents choix de la séquence $\alpha_k$	86
2.5	Influence de $\tau$ sur les résultats d'analyse $\mathcal{H}_\infty$ (Th. 22) et $\mathcal{H}_2$ (Th. 23)	87
4.1	Comparaison de la performance des lois d'allocations	160
F.1	Relations importantes d'algèbre vectorielle	189
G.1	Vectrices des référentiels utilisés pour décrire le champ magnétique perçu par le satellite	192
G.2	Vectrices des référentiels utilisés pour établir les équations dynamiques du satellite	192
I.1	Valeurs numériques des constantes des modèles	195
I.2	Valeurs numériques de $T_{ext}^{[l]}(t)$	195



# Introduction

## Discussion sur l'usage de la périodicité en automatique

**Modélisation des phénomènes physiques périodiques** L'alternance du jour et de la nuit, le déplacement de la Terre autour du soleil, le mouvement d'un pendule soumis à l'attraction gravitationnelle, la vibration d'une corde sous tension, tous ces phénomènes naturels partagent une caractéristique commune : la périodicité de leur évolution temporelle.

Un tel comportement peut être décrit mathématiquement par une fonction  $x_1(t)$  solution de l'équation différentielle non-linéaire suivante

$$\dot{x}_1 = f(x_1) \tag{1}$$

dont les coefficients sont invariants dans le temps. L'association d'une équation de ce type avec des conditions initiales  $x_1(0)$  conduit à une grande variété de solutions  $x_1(t)$ , également appelées trajectoires. Parmi elles, il peut exister une solution constante, pour laquelle  $x_1(t) = x_1(0)$  quel que soit  $t$ . Il s'agit en quelque sorte d'une trajectoire dégénérée se réduisant à un point. Il est également possible qu'il existe une valeur positive  $T$  telle que  $x_1(T) = x_1(0)$  : la trajectoire revient à son point de départ après un temps  $T$ . Sous l'hypothèse de l'unicité des solutions de (1), ce cycle se reproduit alors indéfiniment. Les phénomènes périodiques naturels décrits précédemment correspondent à ce type de solutions. Il existe aussi des solutions telles que la norme de  $x_1(t)$  tende vers l'infini. Il s'agit de trajectoires instables, par opposition aux deux cas précédents qualifiés de solutions stables.

En dehors de ces trois types de solutions, les autres trajectoires  $x_1(t)$  sont classées en fonction de leur comportement asymptotique, également nommé régime permanent et que l'on note ici  $x_{\#}(t)$ . Par définition,  $x_{\#}(t)$  correspond à la limite de  $x_1(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si l'on exclut les trajectoires qui tendent vers l'infini, il est souligné dans [Wiggins, 2003] que l'on ne peut prétendre comprendre complètement (sur tout l'axe des temps) que les solutions  $x_1(t)$  pour lesquelles  $x_{\#}(t)$  est un point ou une trajectoire périodique. Les autres solutions correspondent à des phénomènes chaotiques présentant un caractère aléatoire, malgré le déterminisme de l'équation (1) dont elles sont issues [Khalil, 2002]. En d'autres termes, les seules solutions  $x_1(t)$  stables et prévisibles sont (ou convergent vers) des points ou des trajectoires périodiques. C'est la raison pour laquelle la majorité des ouvrages traitant des systèmes dynamiques régis par des équations différentielles non-linéaires dédient une section aux trajectoires périodiques et soulignent par là même leur importance [Haddad and Chellaboina, 2011, Khalil, 2002, Wiggins, 2003].

**Comment et pourquoi imposer un régime permanent périodique ?** Un des objectifs classiques de l'automatique consiste à imposer au système considéré qu'il converge vers un régime permanent particulier pour des conditions initiales données. Pour ce faire, il est nécessaire d'adjoindre au système physique des actionneurs permettant d'agir sur sa dynamique. Mathématiquement, on traduit cette nouvelle influence en ajoutant une variable  $u_1$ , correspondant à la variable de commande, à la fonction  $f$ , devenant  $f_{cl}$ . On suppose que  $u_1$  est fonction de  $x_1$ , ce qui conduit à la relation

$$\dot{x}_1 = f_{cl}(x_1, u_1(x_1)) = f_{cl}(x_1) \tag{2}$$

Le problème consiste alors à trouver l'expression de  $u_1(x_1)$ , appelée loi de commande, de façon à ce que  $x_1(t)$  tende vers le régime permanent  $x_{\#}(t)$  désiré quel que soit l'état initial  $x_1(0)$  appartenant à un ensemble donné.

Parmi les choix possibles, il semble naturel de s'orienter vers un régime permanent  $x_{\#}(t)$  à la fois stable et prévisible. La discussion précédente indique que  $x_{\#}(t)$  doit alors être un point ou une trajectoire périodique. La simplicité du premier cas de figure explique sa popularité. Pourtant, les applications pionnières [Bailey, 1974, Horn and Lin, 1967] dans le domaine de la biologie ont montré que choisir  $x_{\#}(t)$  périodique pouvait conduire à une solution  $x_1(t)$  du système asservi en meilleur adéquation avec les spécifications. Cette conclusion est pourtant

connue depuis les temps anciens : la pratique de la jachère, consistant à s'abstenir cycliquement d'exploiter une terre agricole, en est un exemple probant.

De façon encore plus évidente, le recours à  $x_{\#}(t)$  périodique est motivé par l'existence d'une classe de systèmes n'admettant que des *trajectoires* (et non des points) d'équilibre stable. Cette situation est fréquente lorsque le nombre d'entrées de contrôle est limité par rapport aux nombres de degrés de liberté<sup>1</sup>. A titre d'exemple, on peut citer la régulation de l'énergie de balancement d'un pendule [Chung and Hauser, 1995] ou encore l'asservissement angulaire d'un bras avec une liaison active et une autre passive [Freidovich et al., 2008].

*Imposer un régime permanent périodique peut améliorer la performance de l'asservissement et même stabiliser certains systèmes n'admettant pas de points d'équilibre stables.*

Jusqu'à présent, la périodicité est un qualificatif qui a été attribué *aux solutions* du système dynamique et non au système lui-même. L'origine des *modèles* dont les coefficients varient périodiquement dans le temps est maintenant discutée et leur intérêt est justifié.

**Loi de commande périodique** Le fait que la loi  $u_1$  dépende du temps de façon périodique est la première cause de périodicité du modèle asservi (2) lui-même. Si l'on note  $T$ , la valeur de cette période, alors (2) adopte la formulation suivante :

$$\dot{x}_1 = f_{cl}(x_1, u_1(t, x_1)) = f_{cl}(t, x_1) \quad (3)$$

et devient elle-même périodique puisque  $f_{cl}(t+T, x_1) = f_{cl}(t, x_1)$ , quels que soient  $t$  et  $x_1$ .

Dans quelles situations, un contrôle périodique est-il nécessaire? La réponse à cette question dépend à la fois du système et du régime permanent recherché. La discussion précédente a montré qu'une équation différentielle invariante dans le temps pouvait admettre une trajectoire périodique comme solution. Choisir un régime permanent  $x_{\#}(t)$  périodique n'implique donc pas nécessairement que la loi  $u_1$  soit elle-même périodique. Néanmoins, les travaux précédemment cités [Chung and Hauser, 1995, Freidovich et al., 2008] montrent que dans certaines situations, imposer un régime permanent périodique est largement facilité par l'usage du contrôle périodique.

D'autre part, il existe des systèmes pour lesquels aucun asservissement invariant dans le temps ne peut imposer de points d'équilibre stables alors que cette obstruction disparaît dès lors que la loi de commande peut être considérée comme périodique. Ce cas de figure est rencontré dans [Morin et al., 1995] : l'asservissement de l'orientation d'un satellite autour de son centre de gravité avec uniquement deux axes commandables est impossible via une fonction  $u_1$  invariante dans le temps alors qu'une loi périodique apporte une solution à ce problème. Il a également été démontré que certains systèmes incertains ne peuvent être stabilisés de façon robuste (c'est-à-dire quelles que soient les incertitudes) qu'en ayant recours à la commande périodique [Khargonekar et al., 1985].

*Une loi de commande périodique peut imposer certains régimes permanents stables (y compris des points d'équilibre) à des systèmes particuliers, alors qu'aucune loi de commande (statique ou dynamique) invariante dans le temps n'en est capable.*

**Intégration partielle de la dynamique** Les modèles à coefficients périodiques peuvent également être vus comme un moyen de modéliser les systèmes complexes mettant en jeu des phénomènes périodiques.

On suppose que  $x_2(t)$  décrit les caractéristiques physiologiques d'une plante : sa taille, sa teneur en eau, etc. Dans un environnement naturel, la dynamique de  $x_2(t)$  dépend des conditions météorologiques journalières moyennes. Ces grandeurs dépendent elles-mêmes du mécanisme des saisons qui est une conséquence de l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre et de sa rotation autour du soleil. Si  $x_1(t)$  caractérise la position de la Terre sur son orbite, la dynamique de la plante est décrite par (1) et l'équation suivante

$$\dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \quad (4)$$

Le modèle alors obtenu est de grandes dimensions, ce qui constitue un frein à son analyse. Or, la trajectoire de la Terre autour du soleil est relativement prévisible. Par conséquent, il est possible d'obtenir la solution  $x_1(t)$  de (1) afin de reformuler la dynamique de  $x_2$  comme suit :

$$\dot{x}_2 = g(x_1(t), x_2) = g(t, x_2)$$

Cette relation ne dépend plus de  $x_1$  mais uniquement de  $t$ . De plus, puisque  $x_1(t)$  est périodique,  $g$  hérite alors de cette qualité.

1. Cette notion est intimement liée au concept de systèmes nonholonomiques. Sur ce sujet, on pourra consulter [Bloch, 2003, Bloch et al., 2005].

Cette discussion peut être généralisée à tous les modèles dont la dynamique peut-être structurée en cascade avec un sous-système supérieur délivrant une réponse périodique. La figure 2 illustre cette configuration. L'intégration d'une sous-dynamique périodique permet donc de décrire certains systèmes complexes grâce à un

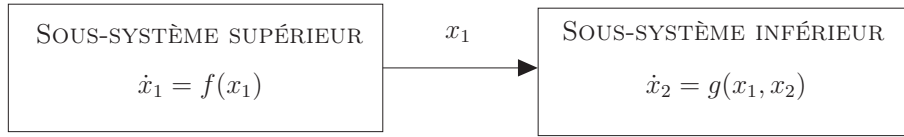


FIGURE 2 – Structure en cascade permettant l'intégration partielle de la dynamique

modèle dépendant périodiquement du temps. On précise finalement que le problème consistant à exprimer la dynamique d'un modèle invariant dans le temps à proximité d'une trajectoire périodique peut se reformuler dans ce cadre.

*Considérer des modèles périodiques permet de réduire, par intégration partielle, la taille des modèles impliquant des phénomènes périodiques.*

Cet usage est connu de longue date puisque, dès le XIX<sup>ème</sup> siècle, les travaux précurseurs de Mathieu et Hill s'intéressent à la modélisation de phénomènes physiques présentant naturellement des oscillations grâce aux équations différentielles à coefficients périodiques [Mathieu, 1868, Hill, 1886]. Faraday et Rayleigh ont fait également usage de cette classe d'équations dans leurs travaux [Faraday, 1831, Rayleigh, 1883]. Plus récemment, la dynamique de pâles d'hélicoptères [Bittanti and Lovera, 1996] ou d'éoliennes [Stol and Balas, 2001] a été modélisée de la sorte. La discussion à venir montre que ce type de modèle constitue un outil pertinent pour rendre compte de l'influence de l'environnement sur la dynamique de rotation d'un satellite autour de son centre de gravité.

## Utilisation de la périodicité pour le contrôle de satellite

La discussion précédente sur le concept de périodicité pour l'automatique est maintenant illustrée sur le problème d'asservissement du mouvement d'un satellite autour de la Terre, dont un des aspects est central pour cette thèse.

**Le mouvement orbital périodique est le seul régime permanent stabilisable** Un satellite est essentiellement une plate-forme capable d'orienter un objet (la charge utile) dans une direction donnée à partir d'une position éloignée de la Terre. Pour relever ce défi technique, la première difficulté consiste à maintenir la distance qui sépare le satellite de la Terre dans une certaine plage. On précise immédiatement que l'utilisation de rétrofusées s'opposant à l'attraction terrestre n'est pas une solution admissible du point de vue pratique en raison de la dépense énergétique très importante qu'elle requiert. Si l'on fait abstraction des forces gravitationnelles générées par les autres astres, le satellite ne peut donc être maintenu à une position fixe dans un référentiel inertiel centré sur la Terre. En d'autres termes, il s'agit d'un problème pour lequel la limitation des actionneurs ne permet pas de créer de points équilibres stables. La solution bien connue à ce problème consiste à créer un mouvement périodique particulier du satellite autour de la Terre. L'unique (et faible) effort de commande requis consiste alors à rejeter les perturbations déviant le satellite d'une trajectoire naturellement stable. Cette discussion fournit un nouvel exemple de problèmes pour lequel le seul régime permanent stable du modèle asservi est une *trajectoire* périodique, correspondant ici à l'orbite du satellite.

**Principe et motivation du contrôle d'attitude** La seconde difficulté technique associée à la commande de satellite consiste à commander la direction dans laquelle la charge utile est orientée. On considère que ce problème se résume à asservir l'orientation (également appelée attitude) du satellite lui-même par rapport à un référentiel externe. Cette thèse se focalise principalement sur la dynamique d'attitude, correspondant au mouvement du satellite autour de son centre de gravité.

Le système de contrôle d'attitude s'appuie sur des capteurs déterminant l'orientation du satellite et modifie son orientation via des actionneurs créateurs de couples. Ce problème d'automatique a été intensivement étudié depuis l'avènement de l'ère spatiale [Hugues, 1986, Sidi, 1997, Wertz, 1978]. Il existe des solutions permettant d'asservir globalement la dynamique d'attitude du satellite [Wen and Kreutz-Delgado, 1991, Fjellstad and Fossen, 1994]. Toutefois, ces deux derniers travaux font abstraction de l'influence qu'exerce l'environnement du satellite sur la dynamique d'attitude. Si des efforts ont été entrepris en ce sens [Lovera, 2001, Wiśniewski and

Stoustrup, 2004], obtenir une loi de commande prenant pleinement en considération cet environnement est une question largement ouverte à laquelle cette thèse cherche à donner des éléments de réponse.

**L'environnement est périodique et incertain** La dynamique du satellite est liée à son environnement par l'intermédiaire des perturbations et via certains actionneurs au mode de fonctionnement particulier. Or cet environnement évolue en fonction de la position du satellite sur son orbite. On retrouve alors le schéma en cascade de la figure 2 si l'on paramètre la position et l'orientation du satellite par  $x_1$  et  $x_2$  respectivement. La trajectoire orbitale étant périodique, il est possible de modéliser la dynamique d'attitude à l'aide d'un modèle périodique, via l'intégration de la dynamique orbitale. Ce type de modélisation permet alors de faire abstraction des équations régissant le déplacement du satellite sur son orbite pour se focaliser sur le mouvement d'attitude et réduire ainsi la taille du modèle.

On peut montrer que le champ magnétique terrestre influe sur l'attitude du satellite [Hugues, 1986]. Dans le cas non-perturbé, il existe des modèles permettant d'accéder à cette variable environnementale avec une bonne précision. Cependant, les particules chargées émises par le soleil perturbent cette grandeur de façon imprévisible [Hugues, 1986]. Cet exemple, parmi d'autres, illustre la difficulté d'obtenir une information fiable sur l'environnement du satellite. Dans ce contexte, l'objectif de l'asservissement est donc de garantir la stabilité et un certain niveau de performance du système asservi, pour un ensemble de conditions de fonctionnement. Il s'agit de la commande robuste.

Cette discussion montre que les modèles périodiques et incertains permettent de rendre compte de l'influence qu'exerce l'environnement sur la dynamique d'attitude du satellite.

## Analyse et commande robustes de modèles périodiques

D'après la discussion précédente, prendre en compte l'environnement pour le problème du contrôle d'attitude oriente naturellement vers des modèles périodiques et incertains. Comment analyser ces systèmes ? Comment leur imposer un régime permanent stable et satisfaisant les performances requises ?

**Cas des modèles périodiques sans incertitudes** A la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, Floquet entreprend une étude systématique des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques [Floquet, 1883]. Lyapunov le suivra dans cette voie quelques années plus tard [Lyapunov, 1896]. Leurs travaux ont permis d'associer à ces équations un modèle dynamique *invariant dans le temps* lié au premier par une transformation linéaire périodique. Un corollaire de ce résultat conduit à une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des trajectoires du système converge vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . L'existence de ce lien met en lumière la nature duale du concept de périodicité, à la frontière entre la variation temporelle et la stationnarité. Ainsi, ce type de modèle est considéré comme un pont entre les modèles variants et invariants dans le temps et font souvent l'objet d'un chapitre dans les ouvrages traitant des systèmes dynamiques ou des équations différentielles.

Depuis ces travaux pionniers, l'analyse des modèles périodiques linéaires (stabilité, normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ ) est relativement bien maîtrisée, en temps continu [Colaneri, 2005] comme en temps discret [Bittanti and Colaneri, 1996]. Sur ce dernier cas, on notera la parution récente de la monographie [Bittanti and Colaneri, 2008] appelée à devenir une référence en la matière. Les propriétés structurelles de ces modèles (commandabilité, observabilité, atteignabilité et restructurabilité), leurs reformulations invariantes dans le temps, les réalisations sous formes de modèles d'états sont autant d'aspects (parmi d'autres) traités en détails par cet ouvrage.

L'intérêt pour le contrôle périodique, c'est-à-dire le problème de recherche d'une loi de commande périodique, est apparu relativement tôt dans l'histoire de l'automatique puisque les premières applications datent des années 60 [Bailey, 1974, Horn and Lin, 1967]. Ces travaux utilisent le contrôle périodique pour imposer un régime permanent lui-même périodique au système asservi. Le développement de ces techniques dans le monde industriel a toutefois pâti d'une réputation de complexité superflue [Bittanti and Colaneri, 2008]. De nos jours, les nouvelles technologies numériques ainsi que les dernières avancées théoriques (placement de pôles [Brunovsky, 1970], synthèse par retour d'état  $\mathcal{H}_2$  [Wiśniewski and Stoustrup, 2001] et  $\mathcal{H}_\infty$  [Bittanti and Colaneri, 2008], LQG [Bittanti and P.Colaneri, 1999, Bittanti and Colaneri, 2008], logique floue [Kerkeni et al., 2009]) ouvrent la voie à une utilisation beaucoup plus large de ces méthodes. Ainsi, la commande périodique a pu être appliquée aux domaines de la commande des pâles d'hélicoptères [Bittanti and Lovera, 1996] ou d'éoliennes [Stol and Balas, 2001] ou au problème du contrôle d'attitude utilisant des magnéto-coupleurs [Lovera, 2001, Wiśniewski and Stoustrup, 2004].

**Contrôle périodique robuste** Si les bases de l'analyse et de la commande de systèmes périodiques sont maintenant bien établies, certains aspects de cette théorie sont encore relativement peu explorés. La traitement



de la robustesse des modèles périodiques en est un exemple flagrant.

Le théorie de la commande robuste est l'un des courants de l'automatique les plus actifs depuis la fin des années 70 [Dullerud and Paganini, 2000]. Ce développement trouve son origine dans l'observation suivante : pour donner une représentation fidèle de la réalité, les modèles de systèmes complexes doivent être de grande taille et fortement non-linéaire. Or ces particularités les rendent difficiles à simuler et à caractériser. Par conséquent, tout modèle est le résultat d'un compromis entre complexité et précision. Partant de ce constat, la commande robuste se donne pour objectif de concevoir un système de commande tolérant les incertitudes de modélisation et les perturbations environnementales non prises en compte par le modèle [Dullerud and Paganini, 2000]. On précise immédiatement que la robustesse est un concept relatif : elle ne peut être envisagée que pour un certain type d'incertitudes et pour une certaine classe de perturbations, et non dans l'absolu. La définition du périmètre pour lequel les spécifications de l'asservissement devront être vérifiées fait partie de la tâche de traduction des spécifications.

Les méthodes basées sur des inégalités matricielles linéaires (Linear Matrix Inequalities en anglais) ont fait preuve d'une remarquable adéquation avec ce type de problème [Boyd et al., 1997]. Elles s'appuient sur la programmation semi-définie (SemiDefinite Programming selon la terminologie anglo-saxonne) s'intéressant à des problèmes d'optimisation d'un critère linéaire sous contraintes LMI. L'usage de ces méthodes en automatique a connu un essor très important à partir des années 90 pour les raisons suivantes :

- **efficacité de la résolution numérique** : la méthode des points intérieurs, développée à cette période [Nesterov et al., 1994], permet de trouver l'optimum global d'un problème SDP en temps polynomial ;
- **adéquation avec les problèmes de robustesse** : il existe des approches systématiques permettant de reformuler les problèmes de robustesse sous une forme SDP [El Ghaoui and Niculescu, 2000] ;
- **prise en compte de problèmes multi-critères** : il est possible de combiner plusieurs critères évaluant la qualité d'une solution sous la forme d'un unique problème SDP.

Parmi les nombreuses stratégies existantes pour utiliser ces outils, l'approche des variables de relaxation [de Oliveira et al., 1999, Peaucelle et al., 2000] (slack variables, selon le terme anglo-saxon consacré dans la littérature) a fait la preuve de sa pertinence dans de nombreux contextes [Ebihara et al., 2009b, Ebihara and Peaucelle, 2005, Ebihara et al., 2011].

**Contrôle périodique robuste à mémoire** Poursuivant dans cette voie, cette thèse s'intéresse aux techniques LMI conduisant à des correcteurs périodiques assurant la stabilité et la performance robuste du modèle asservi. Il existe relativement peu de travaux sur le sujet. Pour les problèmes de stabilisation robuste, on peut citer [Bittanti and Colaneri, 1999, de Souza and Trofino, 2000]. La synthèse  $\mathcal{H}_2$  pour des modèles périodiques soumis à des incertitudes polytopiques a été traitée dans [Farges et al., 2007].

Récemment, le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  périodique a été abordé de façon atypique et prometteuse [Ebihara et al., 2011] : les lois de commande obtenues construisent l'entrée de commande à partir non seulement de l'état instantané du système mais également de l'historique des états conservés en mémoire. Ces correcteurs « à mémoire » ont permis de repousser les limites des performances robustes des modèles asservis, obtenues jusqu'alors.

En poursuivant dans cette direction, cette thèse vise à contribuer à l'enrichissement de la théorie à destination des modèles périodiques à temps discret.



# Objectifs et contributions

## But de la thèse

La prise en compte plus affirmée des problématiques liées à l’environnement des satellites est un axe de développement majeur pour le contrôle d’attitude. Elle permettra notamment une meilleure utilisation des magnéto-coupleurs, ces actionneurs s’appuyant sur le champ géomagnétique pour créer un couple de commande. Les discussions précédentes ont mis en évidence les aspects périodiques et incertains de cet environnement. Cette observation oriente vers les modèles à coefficients périodiques, capables de rendre compte de ce type de phénomènes tout en conservant une taille réduite.

En présence d’un tel modèle, il semble naturel d’utiliser une loi de commande robuste et périodique. En la matière, l’introduction récente des correcteurs à mémoire a mis en place un cadre stimulant et prometteur dans lequel les méthodes LMI jouent un rôle de premier plan. Toutefois, ce domaine de recherche manque encore d’outils d’analyse et de commande suffisamment flexibles.

Cette thèse poursuit donc deux objectifs :

1. développer de nouveaux outils LMI pour les correcteurs périodiques robustes à mémoire ;
2. prendre en compte les aspects périodiques et incertains du contrôle d’attitude de satellite.

## Plan et contributions

Le plan de la thèse découle de ses objectifs et s’articule en deux parties :

### **PARTIE 1 : ANALYSE ET COMMANDE DE SYSTÈMES PÉRIODIQUES PAR DES MÉTHODES LMI**

#### **CHAPITRE 1 : Stabilité robuste des modèles linéaires périodiques : analyse et synthèse**

*Résumé :* Cette thèse se focalise sur les modèles polytopiques périodiques à temps-discret équipés de canaux de performances. Le premier chapitre propose d’évaluer et de mettre en relation les différentes techniques LMI utilisables dans ce cadre à travers une approche didactique. Conformément aux dernières avancées en la matière, l’accent est mis sur la technique des variables de relaxation conduisant à des conditions LMI dites « étendues ».

#### *Contributions principales :*

Approche unifiante et didactique pour l’analyse et la synthèse de modèles périodiques à temps-discret via des méthodes LMI.

#### *Contributions complémentaires :*

- première utilisation des méthodes de relaxation à convergence asymptotique (Pólya et Putinar) pour l’analyse robuste de stabilité de modèles périodiques polytopiques (section 1.2.4) ;
- première interprétation des variables additionnelles des LMI étendues dans ce contexte (section 1.4) ;
- paramétrisation inédite des théorèmes de synthèse de correcteurs périodiques (section 1.5.4) ;
- pour le théorème de synthèse conduisant à un correcteur 2-périodique avec mémoire, démonstration de l’existence d’une paramétrisation n’induisant aucun conservatisme additionnel par rapport à la condition d’analyse associée (section 1.5.4).

#### **CHAPITRE 2 : Analyse et synthèse pour les lois de commande périodiques à mémoire**

*Résumé :* Dans ce second chapitre, les travaux de [Ebihara et al., 2011] sur les correcteurs à mémoire sont étendus pour pouvoir prendre en considération une forme plus générique de ces lois de commande. Cette généralisation intègre les contributions des travaux [Ebihara, 2012, Ebihara et al., 2009a, 2011, 2008a]. Elle requiert une méthodologie inédite, totalement différente de la démarche employée dans [Ebihara et al., 2011]. Les problèmes de stabilité et de performances  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  sont traités.

**Contributions principales :**

Nouveaux outils de synthèse et d'analyse pour les lois de commande à mémoire périodiques à temps-discret considérant la stabilisation et la performance  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  [Tréguët et al., 2011a, 2012a,b,c]

**Contributions complémentaires :**

- nouveaux outils d'analyse robuste pour les modèles périodiques, polynomiaux et polytopiques (section 2.6) ;
- nouveau regard sur la dualité des systèmes périodiques polynomiaux (section 2.5).

**PARTIE 2 : CONTRÔLE D'ATTITUDE PÉRIODIQUE ET ROBUSTE DE SATELLITES**

**CHAPITRE 3 :** Modélisation du mouvement d'attitude de satellites équipés de roues à réaction et de magnéto-coupleurs

**Résumé :** Les modèles utilisés dans la littérature pour traiter les aspects périodiques du contrôle d'attitude forment un ensemble très hétérogène. Différents types de pointage, d'actionneurs, de modèle de champs magnétique et de perturbations sont considérés. Face à ce constat, le chapitre 3 s'efforce de contribuer à l'effort de modélisation en proposant un cadre unifié pour ce type de problème. L'accent est mis en particulier sur la modélisation du champ magnétique terrestre sur lequel s'appuient les magnéto-coupleurs pour créer un couple de commande. Ce chapitre met également à jour les difficultés liées à la définition d'une trajectoire de linéarisation dans ce contexte.

**Contributions principales :**

Modélisation générique du problème de contrôle d'attitude avec magnéto-coupleurs et roues à réaction pour différents cas de pointage.

**Contributions complémentaires :**

- redéfinition des conditions de validité des modèles linéarisés (section 3.5.3).

**CHAPITRE 4 :** Contrôle d'attitude robuste et périodique en utilisant des roues à réactions et des magnéto-coupleurs

**Résumé :** Les résultats précédents sont utilisés pour mettre en œuvre plusieurs stratégies de contrôle visant à asservir l'attitude du satellite dans son environnement périodique, tout en tenant compte de certaines limitations des actionneurs. La gestion du moment cinétique des roues bénéficie notamment d'un traitement particulier. L'approche classique de la littérature est d'abord revisitée pour lui donner un cadre rigoureux. Les fondements de cette démarche, consistant à attribuer à chacun des actionneurs une tâche prédéfinie, sont ensuite questionnés. Afin de traiter l'effort de commande de façon globale, une loi de commande linéaire et périodique est obtenue par des méthodes LMI. Pour accroître la robustesse vis-à-vis des conditions initiales et s'affranchir des difficultés liées à la linéarisation, le problème est redéfini dans un nouveau cadre utilisant une structure de commande non-linéaire. Les théorèmes de synthèse LMI conduisant à des correcteurs périodiques sont ré-employés dans ce nouveau contexte.

**Contributions principales :**

Conception d'une loi de commande périodique et robuste garantissant l'asservissement conjoint de l'attitude et de la vitesse des roues dans un environnement périodique.

**Contributions complémentaires :**

- nouveau cadre rigoureux pour le problème de régulation du moment cinétique des roues par les magnéto-coupleurs (section 4.4) ;
- première mise en œuvre d'une approche linéaire périodique utilisant conjointement les roues à réaction et les magnéto-coupleurs (section 4.5) [Tréguët et al., 2011b,c] ;
- nouvelle structure de commande non-linéaire considérant l'effort de commande global (section 4.6).

**Publications de l'auteur****Revue internationale à comité de lecture**

J.-F. Tréguët, D. Peaucelle, D. Arzelier, and Y. Ebihara. Periodic memory state-feedback controller: New formulation, analysis and design results. *submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*, December 2012c

**Conférences internationales à comité de lecture avec actes**

J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  performance of

periodic systems with memory: New formulations, analysis and design results. In *Proceedings of the 51th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December 2012a

J.-F. Tréguët, Y. Ebihara, D. Arzelier, D. Peaucelle, C. Pittet, and A. Falcoz. Robust stability of periodic systems with memory: New formulations, analysis and design results. In *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, June 2012b

J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Periodic  $H_2$  synthesis for spacecraft attitude control with magnetorquers and reaction wheels. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6876–6881, Orlando, FL, USA, December 2011b

J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Periodic FIR controller synthesis for discrete-time uncertain linear systems. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1367–1372, Orlando, FL, USA, December 2011a

### **Conférences nationales à comité de lecture avec actes**

J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Contrôle d'attitude périodique avec magnéto-coupleurs et roues à réactions. Marseille, France, June 2011. Journées Nationales MACS.



## Première partie

# Analyse et commande robuste et périodique par des méthodes LMI





# Chapitre 1

## Stabilité robuste des modèles linéaires périodiques : analyse et synthèse

### 1.1 Introduction

Les deux premiers chapitres de cette thèse s'intéressent aux modèles linéaires (en l'état et les entrées/sorties) dont les coefficients varient dans le temps de façon périodique. Cette étude se concentre sur les modèles à temps discret et incertains. Cette dernière caractéristique peut être traduite en faisant dépendre le modèle d'un signal d'incertitude noté  $\theta$ , composé de termes réels ou complexes. Le premier cas correspond aux incertitudes paramétriques, liées principalement à la méconnaissance de la valeur exacte des paramètres du modèle, tandis que le second correspond à une perturbation issue d'un modèle invariant dans le temps, générateur d'un signal dont la plage de fréquence est connue (ou peut-être approchée).

Dans le cas des incertitudes paramétriques, il existe des techniques permettant de traiter les problèmes d'analyse et de synthèse robuste directement à partir de modèle affines en  $\theta$  [Barmish, 1994, Bernussou et al., 1989, de Oliveira et al., 1999, Peaucelle et al., 2000]. En l'absence de cette caractéristique, il est possible d'utiliser la transformé linéaire fractionnaire (ou LFT pour Linear Fractional Transformation selon le terme anglo-saxon) pour obtenir une formulation accessible à l'analyse et la synthèse. Les incertitudes  $\theta$  sont alors extraites du modèle grâce à une boucle externe [Doyle et al., 1991, Duc and Font, 1999, Zhou and Doyle, 1998]. Dans les deux cas, le domaine auquel appartient les incertitudes est, en général, parallélotopique ou polytopique ou borné réel ou H-dissipatif ou une combinaison de ces quatre types d'ensembles [Peaucelle, 2000].

Au regard de cette typologie, les deux premiers chapitres de cette thèse se focalisent sur le cas suivant :

- les incertitudes sont paramétriques ( $\theta$  est réelle) et invariantes dans le temps ;
- le modèle est affine en les paramètres incertains ;
- les incertitudes appartiennent à un ensemble polytopique.

La pertinence de l'utilisation des LMI pour l'analyse et la synthèse de modèles soumis à ce type d'incertitude a été démontrée à de multiples reprises [Bernussou et al., 1989, de Oliveira et al., 1999, Peaucelle et al., 2000, Chesi et al., 2004]. Cette thèse poursuit dans cette direction en faisant usage de ces techniques.

En résumé, les coefficients des modèles linéaires considérés sont variants dans le temps de façon périodique mais soumis, de façon linéaire, à des incertitudes réelles *invariantes dans le temps* et appartenant à un domaine polytopique.

Ce premier chapitre vise à donner une vision d'ensemble des techniques LMI disponibles pour l'analyse et la synthèse de correcteurs pour ce type de modèle. Pour rendre l'exposé à la fois accessible et précis, on se restreint à l'étude du problème de stabilité dans le cas des modèles périodiques de période 2, appelés « modèles 2-périodiques ». Ce cadre permet en effet de rendre compte de toute la difficulté du problème sans alourdir les développements inutilement. La forme générale de ces résultats est donnée dans l'annexe B pour les modèles  $N$ -périodiques.

La première section de ce chapitre discute de résultats préliminaires, tant pour l'analyse que la commande robuste. L'objectif est de construire le socle sur lequel s'appuie les sections suivantes. Ces dernières font un usage intensif de l'approche des variables de relaxation [de Oliveira et al., 1999, Peaucelle et al., 2000] (slack variables dans la terminologie anglo-saxonne) conduisant à des LMIs qualifiées d'étendues. Cette technique est d'abord abordée dans le cadre du modèle nominal (sans incertitudes) par la section 3. L'interprétation des variables additionnelles est l'objet de la section 4. Les conclusions obtenues permettent alors de proposer plusieurs conditions d'analyse et de synthèse robuste étendues dans la section 5, dont la qualité est ensuite évaluée grâce à des exemples numériques.

## 1.2 Résultats préliminaires d'analyse et de synthèse robuste

### 1.2.1 Définition des problèmes

On considère le système dynamique  $\Sigma$  donné par la représentation d'état linéaire, à temps-discret et 2-périodique suivante :

$$\Sigma : x_{2q+k+1} = A_k^{ol} x_{2q+k} + B_{uk} u_{2q+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.1)$$

où  $x_{2q+k} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u_{2q+k} \in \mathbb{R}^{m_u}$  est l'entrée de commande.

Lorsque le modèle  $\Sigma$  est issu de la modélisation du processus à commander, il est fréquent que ses matrices se réfèrent à des paramètres physiques dont les valeurs numériques appartiennent à une certaine plage d'incertitude. Classiquement, une telle situation est modélisée en considérant que les matrices  $A_k$  et  $B_{uk}$  appartiennent à un ensemble paramétré par un vecteur d'incertitude invariant dans le temps noté  $\theta \in \Theta$ . On fait ici deux hypothèses : premièrement, l'ensemble  $\Theta$  correspond au  $L$ -simplex standard défini par

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^L : \theta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^L \theta_i = 1 \right\}$$

où  $\theta_i$  désigne le  $i$ -ième élément de  $\theta$ , et, deuxièmement, les matrices  $A_k$  et  $B_{uk}$  sont linéaires par rapport à  $\theta$ . L'égalité suivante est donc satisfaite :

$$\begin{bmatrix} A_0^{ol}(\theta) & B_{u0}(\theta) \\ A_1^{ol}(\theta) & B_{u1}(\theta) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^L \theta_i \begin{bmatrix} A_0^{ol[i]} & B_{u0}^{[i]} \\ A_1^{ol[i]} & B_{u1}^{[i]} \end{bmatrix}, \quad \forall \theta \in \Theta$$

où les matrices  $A_k^{ol[i]}$  et  $B_{uk}^{[i]}$ , avec  $k = \{0, 1\}$ , caractérisent les sommets du polytope définissant  $\Sigma(\theta)$ . L'ensemble auquel appartient les matrices de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  hérite donc des propriétés de  $\Theta$  et est polytopique et convexe.

$$\Sigma(\theta) : x_{2q+k+1} = A_k^{ol}(\theta) x_{2q+k} + B_{uk}(\theta) u_{2q+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.2a)$$

avec

$$\begin{bmatrix} A_0^{ol}(\theta) & B_{u0}(\theta) \\ A_1^{ol}(\theta) & B_{u1}(\theta) \end{bmatrix} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_0^{ol[1]} & B_{u0}^{[1]} \\ A_1^{ol[1]} & B_{u1}^{[1]} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_0^{ol[L]} & B_{u0}^{[L]} \\ A_1^{ol[L]} & B_{u1}^{[L]} \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1.2b)$$

Ces incertitudes peuvent avoir une influence sur la stabilité du modèle. C'est la raison pour laquelle, on définit à présent la notion de stabilité robuste et asymptotique.

**Définition 1.** [Stabilité robuste] Le modèle  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.2), est stable robustement si et seulement si il est asymptotiquement stable quel que soit  $\theta \in \Theta$ .  $\circ$

En premier lieu, on s'intéresse au problème de synthèse de correcteur stabilisant  $\Sigma(\theta)$  en boucle fermée, quel que soit  $\theta \in \Theta$ . On suppose que la mesure de l'état est disponible de sorte qu'il est possible de définir la loi de commande par retour d'état périodique suivante :

$$u_{2q+k} = K_k x_{2q+k} \quad (1.3)$$

**Problème 1.** [Synthèse robuste] A partir du modèle en boucle ouverte  $\Sigma(\theta)$ , calculer les gains d'une loi de commande (1.3) assurant la stabilité robuste et asymptotique de la boucle fermée constituée de (1.2) et (1.3).  $\circ$

La dynamique de la boucle fermée  $\Sigma_{cl}$  ainsi obtenue est décrite par l'équation suivante :

$$\Sigma_{cl}(\theta) : x_{2q+k+1} = A_k(\theta) x_{2q+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.4a)$$

avec

$$\begin{bmatrix} A_0(\theta) \\ A_1(\theta) \end{bmatrix} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_0^{[1]} \\ A_1^{[1]} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_0^{[L]} \\ A_1^{[L]} \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1.4b)$$

où

$$A_k(\theta) = A_k^{ol}(\theta) + B_{uk}(\theta) K_k, \quad \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.5)$$

L'analyse de la stabilité de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  constitue le second problème retenant notre attention.

---

1. Bien que la dimension de ces signaux est supposée constante, tous les résultats présentés dans cette thèse peuvent être facilement étendus au cas où  $n$  et  $m_u$  varient au cours de la période.

**Problème 2.** [Analyse robuste] Montrer que le modèle autonome  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est stable asymptotiquement et robustement.  $\circ$

**Remarque.** D'après [Hinrichsen and Pritchard, 2005], pour les modèles linéaires périodiques et à temps discret, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité exponentielle, uniforme et globale. C'est la raison pour laquelle ces qualificatifs sont éludés pour ne parler que de stabilité asymptotique.  $\circ$

Tel qu'il est présenté ici, le problème d'analyse permet d'étudier le comportement dynamique de la boucle fermée, une fois le correcteur obtenu. Toutefois, dans une démarche visant à établir des conditions de synthèse, on aborde d'abord le problème d'analyse afin de déterminer les conditions que doit remplir le correcteur pour assurer la stabilité en boucle fermée. Cette thèse s'appuie sur cette seconde approche.

## 1.2.2 Analyse de stabilité des modèles périodiques linéaires

On considère le modèle périodique autonome linéaire suivant :

$$\Sigma_{cl} : x_{2q+k+1} = A_k x_{2q+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.6)$$

Cette formulation est adoptée par tout système issu de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  pour une valeur particulière du vecteur d'incertitude  $\theta$ .

L'opérateur de transition d'état, noté  $\Phi$ , établit le lien entre les états de ce système considérés à deux instants différents. En notant  $t_0 = 2q_0 + k_0$  et  $t = 2q + k$  ces deux instants, on a donc

$$x_t = \Phi(t, t_0)x_{t_0}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.7)$$

Dans le cas du modèle (1.6), on en déduit l'expression de  $\Phi$  :

$$\forall t \geq t_0, \quad \Phi(t, t_0) = \begin{cases} \mathbf{1}_n, & (t = t_0) \\ A_{t-1}A_{t-2} \cdots A_{t_0}, & (t > t_0) \end{cases} \quad (1.8)$$

**Stabilité et matrice de monodromie** Comme tout modèle linéaire variant dans le temps, l'analyse de la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  au sens de Lyapunov correspond à l'étude de sa réponse libre. Celle-ci dépend des conditions initiales. Le système est dit stable (asymptotiquement stable) si tout état initial donne lieu à une réponse libre bornée (convergeant vers zéro). En s'appuyant sur l'opérateur  $\Phi$  défini par (1.7), ces définitions peuvent être traduites de la façon suivante :

**Définition 2.** [[Hinrichsen and Pritchard, 2005]] On considère les deux instants  $t_0 = 2q_0 + k_0$  et  $t = 2q + k$ . Pour le modèle  $\Sigma_{cl}$ , les notions de stabilité et de stabilité asymptotique sont définies comme suit :

$$\text{Stabilité : } \forall \|x(t_0)\| \in \mathbb{R}, \exists M : \|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.9a)$$

$$\text{Stabilité asymptotique : } \forall \|x(t_0)\| \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi(t, t_0)\| = 0 \quad (1.9b)$$

$\circ$

Cette définition suggère que pour statuer sur la stabilité du  $\Sigma_{cl}$  il est nécessaire d'analyser la matrice  $\Phi$  sous sa forme générale. Or, de façon tout à fait remarquable, dans le cas particulier des modèles périodiques, il est possible de conclure en n'examinant qu'un cas particulier de  $\Phi$ , nommé matrice de monodromie. Cette matrice particulière est préalablement définie et ses propriétés les plus remarquables sont rappelées.

**Définition 3.** La matrice de monodromie, notée  $\Psi_\tau$ , correspond à la matrice de transition d'état sur une période à partir d'un instant  $\tau \in \{0, 1\}$  :

$$\Psi_\tau = \Phi(\tau + 2, \tau) \quad (1.10)$$

$\circ$

On vérifiera aisément que la périodicité de  $A_k$  implique la bipériodicité de  $\Phi(k, \tau)$ , c'est-à-dire  $\Phi(k+2, \tau+2) = \Phi(k, \tau)$ . De cette propriété, on déduit que  $\Psi_\tau$  est périodique :  $\Psi_{\tau+2} = \Psi_\tau$ . Ceci explique pourquoi  $\tau \in \{0, 1\}$  dans la définition précédente. L'indépendance des valeurs propres non nulles de  $\Psi_\tau$  par rapport à  $\tau$  est une autre propriété remarquable de  $\Psi_\tau$ .

On énonce maintenant le théorème central de l'étude de la stabilité des modèles linéaires et périodiques.

**Théorème 1** ([Hinrichsen and Pritchard, 2005]).  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de  $\Psi_\tau$  sont situées dans le cercle unité ouvert.

Ce théorème met en lumière le lien très fort qu'entretiennent les modèles périodiques avec le cas, plus simple, des systèmes à temps-invariant. Ainsi, le corollaire suivant peut être établi par application directe des propriétés bien connues des modèles LTI.

**Corollaire 1.** *On considère le modèle temps-invariant  $\Gamma_m^\tau$ , associé à un instant arbitraire  $\tau \in \{0, 1\}$ .*

$$\Gamma_m^\tau : \quad \eta_{q+1}^\tau = \Psi_\tau \eta_q^\tau \quad (1.11)$$

Les trois propositions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) le modèle  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable,
- (ii)  $\Gamma_m^\tau$  est asymptotiquement stable, quel que soit  $\tau \in \{0, 1\}$ ,
- (iii) il existe  $\tau \in \{0, 1\}$ , tel que  $\Gamma_m^\tau$  est asymptotiquement stable.

D'après (1.7) et (1.10), le vecteur  $\eta_q^\tau$  peut être identifié à  $x_{2q+\tau}$ . Par conséquent,  $\Sigma_{cl}$  est stable si et seulement si la réponse libre du système à une condition initiale quelconque est telle que

$$\exists \tau \in \{0, 1\} : \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \|x_{2q+\tau}\| = 0$$

En d'autres termes, il est possible de conclure sur la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  en n'examinant l'évolution de la norme de  $x_{2q+k}$  qu'une fois toutes les périodes. Cette remarque est au cœur de l'étude de la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  via la méthode directe de Lyapunov.

**Remarque.** *Il est notable que la condition de stabilité énoncée pour le théorème 1 est également valable pour les modèles périodiques à temps continu, bien que la définition de la matrice de monodromie soit différente [Colaneri, 2005].* ◻

**Méthode directe de Lyapunov** Dans le cas où le modèle est soumis à des incertitudes, la matrice de monodromie dépend de  $\theta$ . L'utilisation du théorème 1 est alors compromise puisqu'il requiert l'expression des valeurs propres de cette matrice. Dans le cas général, il est très difficile (voir impossible) d'obtenir ces expressions en fonctions des incertitudes.

La seconde méthode de Lyapunov, également appelée méthode directe, offre un moyen de garantir la stabilité du modèle sans avoir recours à cette expression. Cette méthode repose sur la construction d'une fonction scalaire  $V(k, x_k)$ , renvoyant une valeur pouvant être assimilée à l'énergie du système. Si cette fonction est définie positive et strictement décroissante sur les trajectoires du système alors ce dernier est stable. Dans ce cas, une telle fonction constitue ce que l'on nomme communément un certificat de stabilité. On notera toutefois que cette condition d'existence d'une fonction de Lyapunov n'est que suffisante dans le cas général [Khalil, 2002].

La difficulté est évidemment de construire une fonction  $V(k, x_k)$  répondant à ces exigences. Dans le cas linéaire et temps-invariant, on peut cependant garantir que le système est stable si et seulement s'il existe une fonction  $V(x_k)$  temps-invariant, linéaire et quadratique certifiant sa stabilité. Ce résultat se prête particulièrement bien à la traduction du théorème 1 sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI). Comme expliqué en introduction, l'existence de programmes de résolution numérique très efficaces conduisant à une solution de ces inégalités plaide en faveur de ce type de formulation.

**Corollaire 2.** *La condition suivante est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité asymptotique de  $\Sigma_{cl}$  :*

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \quad \Psi_0^T P_0 \Psi_0 - P_0 \prec 0 \quad (1.12)$$

avec  $\Psi_0 = A_1 A_0$ , selon la définition (1.10).

*Démonstration.* Selon le corollaire 1, la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  et de  $\Gamma_m^0$  sont équivalentes. Or ce dernier est stable si et seulement s'il existe une fonction  $\tilde{V}(\eta_q^0) = (\eta_q^0)^T P_0 \eta_q^0$  définie positive et strictement décroissante sur les trajectoires du système caractérisées par  $\eta_{q+1}^0 = \Psi_0 \eta_q^0$ . La première exigence se traduit par  $P_0 \succ 0$  tandis que la seconde s'écrit

$$\exists \tilde{V}(\eta_q^0) = (\eta_q^0)^T P_0 \eta_q^0 : \quad \tilde{V}(\eta_{q+1}^0) < \tilde{V}(\eta_q^0), \quad \forall \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [\Psi_0 \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

En utilisant la définition de  $\tilde{V}(\eta_q^0)$ , on obtient la condition nécessaire et suffisante de stabilité suivante :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \quad \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \forall \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad [\Psi_0 \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \eta_q^0 \\ \eta_{q+1}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

En remarquant que

$$[\Psi_0 \quad -\mathbf{1}]^{T\perp T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \Psi_0 \end{bmatrix}$$

le lemme d'élimination, donné dans [Skelton et al., 1997] et rappelé dans l'annexe A, permet d'affirmer que cette condition est équivalente à (1.12).  $\square$

**Remarque.** La même procédure utilisant  $\Gamma_m^1$  au lieu de  $\Gamma_m^0$  donne naissance à la condition suivante, qui est équivalente à (1.12) :

$$\exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \Psi_1^T P_1 \Psi_1 - P_1 \prec 0 \quad \text{avec} \quad \Psi_1 = A_0 A_1 \quad (1.14)$$

$\circ$

En plus de (1.12) ou (1.14), la littérature fait fréquemment référence aux conditions LMI énoncées par le corollaire suivant.

**Corollaire 3** ([Bittanti and Colaneri, 2008]). *Le modèle  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement si la condition suivante est satisfaite*

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{cases} A_0^T P_1 A_0 - P_0 \prec 0 \\ A_1^T P_0 A_1 - P_1 \prec 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

*Démonstration. Suffisance* ((1.15)  $\Rightarrow$  stabilité). La pré/postmultiplication des inégalités de (1.15) par  $x_{2q}$  et  $x_{2q+1}$  respectivement, conduit à

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{cases} x_{2q}^T A_0^T P_1 A_0 x_{2q} - x_{2q}^T P_0 x_{2q} < 0, & \forall x_{2q} \in \mathbb{R}^{2n} \\ x_{2q+1}^T A_1^T P_0 A_1 x_{2q+1} - x_{2q+1}^T P_1 x_{2q+1} < 0, & \forall x_{2q+1} \in \mathbb{R}^{2n} \end{cases}$$

On définit la fonction scalaire  $V(k, x_{2q+k}) = x_{2q+k}^T P_k x_{2q+k}$  pour  $k = \{0, 1\}$  et quel que soit  $q \in \mathbb{N}$ . Cette dernière est définie positive et périodique puisque  $V(k, x_{2q+k})$  ne dépend que de  $k$  (et pas de  $q$ ). En utilisant cette fonction et en considérant que les signaux  $x_{2q+k}$  sont des solutions de (1.6), les conditions précédentes peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\forall q \in \mathbb{N}, \begin{cases} V(1, x_{2q+1}) - V(0, x_{2q}) < 0 \\ V(0, x_{2q+2}) - V(1, x_{2q+1}) < 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

On peut alors en déduire que  $V(0, x_{2q+2}) < V(0, x_{2q})$ . En ré-introduisant l'expression de  $V(k, x_{2q+k})$  dans cette dernière inégalité, on obtient (1.12). Par conséquent, d'après le corollaire 2, si (1.15) est vérifiée alors  $\Sigma_{cl}$  est stable.

*Nécessité* ((1.15)  $\Leftarrow$  stabilité). La preuve de l'implication inverse est donnée dans [Bittanti and Colaneri, 2008].  $\square$

**Comparaison des conditions d'analyse LMI** Chacun des corollaires 2 et 3 expriment des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité. Ces dernières sont donc équivalentes bien qu'elles n'adoptent pas la même formulation. La suite de cette sous-section compare ces conditions.

Au sujet de la forme même de ces inégalités, deux remarques peuvent être faites. En premier lieu, on note que la condition (1.15) est un problème LMI comportant deux fois plus de lignes et de variables que (1.12). L'effort de calcul requis pour la recherche de solutions est donc plus important. En second lieu, on remarque que les matrices  $A_k$  apparaissent linéairement dans l'inégalité (1.15), alors qu'elles sont multipliées l'une à l'autre dans (1.12).

Ces deux conditions peuvent également être comparées en faisant référence à la fonction quadratique et périodique introduite dans la preuve du corollaire 3. On rappelle l'expression de cette dernière en allégeant la notation de sorte que  $V(k, x_{2q+k})$  est notée désormais  $V_{2q+k}$ .

$$V_{2q+k} = x_{2q+k}^T P_k x_{2q+k} \quad \text{avec} \quad P_k \in \mathbb{S}_+^n \quad (1.17)$$

Le corollaire 3 démontre que  $\Sigma_{cl}$  est stable si et seulement s'il existe  $V_{2q+k}$  donnée par (1.17) telle que

$$(1.15) : \quad V_{2q+2} < V_{2q+1} < V_{2q}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

De plus, la correspondance entre  $\eta_q^\tau$  et  $x_{2q+\tau}$  établie précédemment montre que la fonction de Lyapunov  $\tilde{V}(\eta_q^0)$  utilisée dans la démonstration du corollaire 2 correspond à  $V_{2q}$ .  $\Sigma_{cl}$  est donc stable si et seulement s'il existe  $V_{2q+k}$  donnée par (1.17) telle que

$$(1.12) : \quad V_{2q+2} < V_{2q}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

Par conséquent, (1.12) s'intéresse à la décroissance de la fonction de Lyapunov d'une période à l'autre, contrairement à (1.15) qui examine continûment l'évolution de  $V_{2q+k}$ . De façon évidente, (1.15) implique (1.12). Puisque ces conditions sont équivalentes, la réciproque est également vraie. Pour comprendre ce résultat pouvant paraître contre-intuitif au premier abord, on réécrit (1.12) et (1.15) comme suit :

$$(1.12) \Leftrightarrow \exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : x_{2q+2}^T P_0 x_{2q+2} < x_{2q}^T P_0 x_{2q}$$

$$(1.15) \Leftrightarrow \exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : x_{2q+2}^T P_0 x_{2q+2} < x_{2q+1}^T P_1 x_{2q+1} < x_{2q}^T P_0 x_{2q}$$

Il est ici très important de noter que dans le cas général  $P_0 \neq P_1$ . Par conséquent, si (1.15) s'intéresse à la décroissance continue de  $V_{2q+k}$ , cette condition n'exige pas que la norme de  $x_{2q+k}$  diminue à tout instant. Autrement dit, (1.15) n'est pas équivalente à :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : x_{2q+2}^T P_0 x_{2q+2} < x_{2q+1}^T P_0 x_{2q+1} < x_{2q}^T P_0 x_{2q} \Rightarrow \|x_{2q+2}\| < \|x_{2q+1}\| < \|x_{2q}\| \quad (1.18)$$

Cette remarque est représentée graphiquement par les figures 1.1 et 1.2, librement inspirées de [Böhm, 2011].

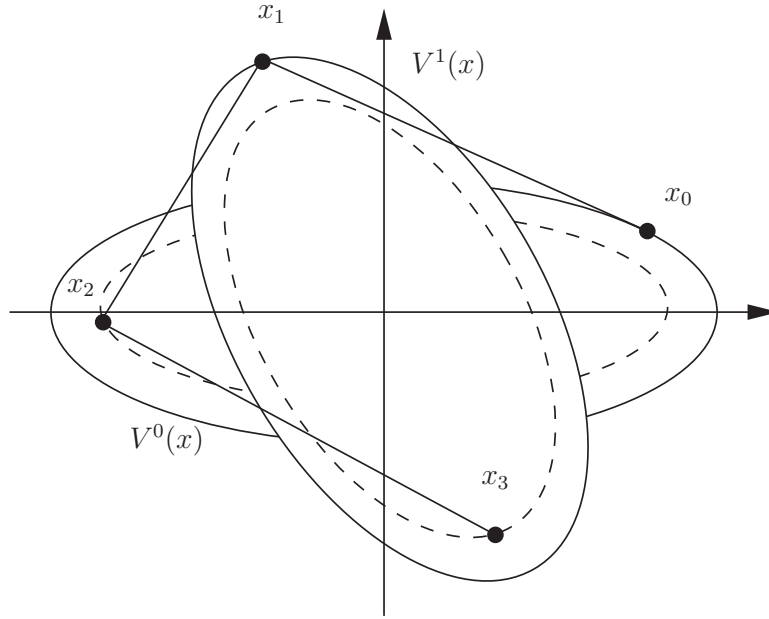


FIGURE 1.1 – Trajectoire des états d'un modèle 2-périodique stable

La figure 1.1 superpose les équipotentielles des fonctions  $V^0(x) = x^T P_0 x$  et  $V^1(x) = x^T P_1 x$  et la trajectoire des états d'un modèle  $\Sigma_{cl}$  stable. La figure 1.2 montre l'évolution temporelle des fonctions  $V^0(x_{2q+k})$ ,  $V^1(x_{2q+k})$  et  $V_{2q+k}$  sur les trajectoires de ce même système. Ces représentations montrent que  $\|x_{2q+k}\|$  peut augmenter d'un instant à l'autre sans remettre en cause la stabilité du système caractérisée par la décroissance continue de  $V_{2q+k}$  ou par la diminution de  $V_q^0(x_{2q+k})$  et  $V_q^1(x_{2q+k})$  d'une période à l'autre.

Cette discussion est résumée de la façon suivante : si ces deux conditions sont équivalentes, l'essence de la notion de stabilité pour les modèles périodiques est plus facilement saisie par le corollaire 2. Le corollaire 3 quant à lui, peut être vu comme une reformulation de ce résultat destiné à :

- conditionner la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  à l'existence d'une fonction scalaire continûment décroissante (non pas d'une période à l'autre), comme dans le cas LTI;
- découpler les matrices  $A_k$  au prix d'une augmentation des dimensions du problème LMI, à la fois en termes du nombre de lignes et du nombre de variables.

Si le premier point peut paraître cosmétique, la suite de ce chapitre montre que le second constitue un atout fondamental vers l'obtention de résultats de synthèse nominale et d'analyse et de synthèse quadratiques. Les sous-sections suivantes en font l'illustration.

**Remarque.** *Similairement, les conditions (1.14) et (1.15) peuvent être traduites de la façon suivante :*

$$(1.14) \Leftrightarrow \exists V_{2q+k} = (1.17) : \quad V_{2q+1} < V_{2q-1}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

$$(1.15) \Leftrightarrow \exists V_{2q+k} = (1.17) : \quad V_{2q+1} < V_{2q} < V_{2q-1}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

Cette reformulation renvoie aux mêmes interprétations que précédemment dans le cas où le point de départ des périodes considérées correspond à  $2q + 1$  au lieu de  $2q$ . ◦

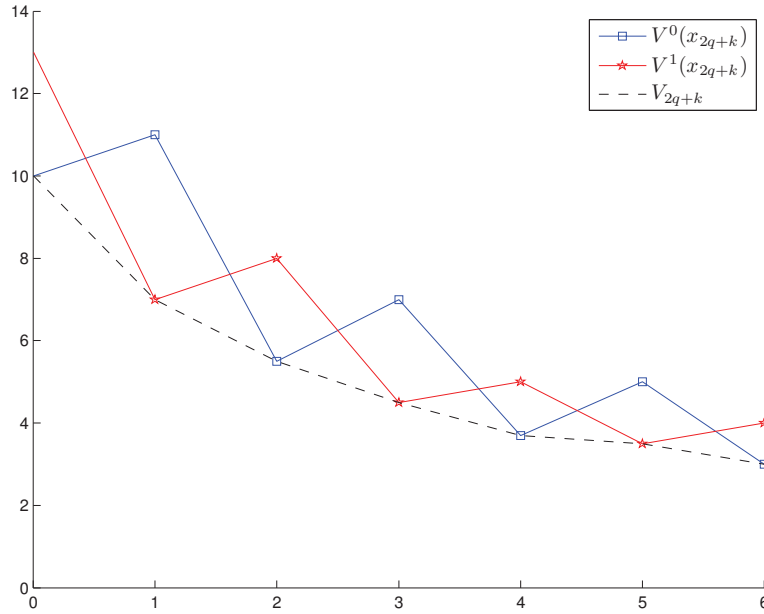


FIGURE 1.2 – Décroissance des fonctions de Lyapunov associées à un modèle 2-périodique stable

### 1.2.3 Synthèse par retour d'état périodique

Les expressions du modèle périodique en boucle ouverte  $\Sigma$  et du correcteur recherché sont données par (1.1) et (1.3) respectivement. Elles sont rappelées ici :

$$\begin{cases} x_{2q+k+1} &= A_k^{ol} x_{2q+k} + B_{uk} u_{2q+k} \\ u_{2q+k} &= K_k x_{2q+k} \end{cases}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, 1\}$$

En boucle fermée, on obtient le modèle autonome (1.6) avec la relation suivante, correspondant à (1.5) en l'absence d'incertitude :

$$A_k = A_k^{ol} + B_{uk} K_k, \quad \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.19)$$

Dans ce contexte, il est possible de dériver des conditions de synthèse stabilisante à partir des résultats d'analyse de la sous-section précédente.

**Théorème 2** (Synthèse nominale). *[[de Souza and Trofino, 2000] et [Bittanti and Colaneri, 1999]] Le modèle  $\Sigma$  donné par (1.1) est stabilisable asymptotiquement par la loi de commande (1.3) si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\begin{matrix} \exists W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1 \in \mathbb{S}_+^n, \\ \exists Y_0 \in \mathbb{R}^{m_u \times n}, \exists Y_1 \in \mathbb{R}^{m_u \times n} \end{matrix} : \begin{cases} \begin{bmatrix} -W_1 & A_0^{ol} W_0 + B_{u0} Y_0 \\ \star & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -W_0 & A_1^{ol} W_1 + B_{u1} Y_1 \\ \star & -W_1 \end{bmatrix} \prec 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation suivante :

$$K_k = Y_k W_k^{-1} \quad (1.21)$$

*Démonstration.* La démonstration de ce résultat s'appuie sur une démarche semblable à celle existant pour le cas à temps-invariant [Bernussou et al., 1989]. Grâce au complément de Schur, on obtient l'inégalité duale de (1.15) :

$$\exists W_0 = P_0^{-1} \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1 = P_1^{-1} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{cases} A_0 W_0 A_0^T - W_1 \prec 0 \\ A_1 W_1 A_1^T - W_0 \prec 0 \end{cases}$$

Après un nouveau complément de Schur, la ré-introduction des matrices de la boucle ouverte d'après la relation



(1.19) conduit aux inéquations suivantes :

$$\exists W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{cases} \begin{bmatrix} -W_1 & (A_0^{ol} + B_{u0}K_0)W_0 \\ \star & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -W_0 & (A_1^{ol} + B_{u1}K_1)W_1 \\ \star & -W_1 \end{bmatrix} \prec 0 \end{cases}$$

Ces manipulations préservent l'équivalence ce qui permet d'affirmer que cette condition est toujours nécessaire et suffisante pour montrer la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ . La preuve se conclut par le changement de variables  $Y_k = K_k W_k$ . Il est important de préciser que la reconstruction de  $K_k$  à partir de  $W_k$  et  $Y_k$  est garantie par le fait que les  $W_k$  sont inversibles si (1.20) est vérifiée.  $\square$

**Remarque.** *L'énoncé exact des inégalités de synthèse établies dans [de Souza and Trofino, 2000] est le suivant*

$$\begin{bmatrix} -W_0 & \star \\ A_0^{ol}W_0 + B_{u0}Y_0 & -W_1 \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{bmatrix} -W_1 & \star \\ A_1^{ol}W_1 + B_{u1}Y_1 & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0$$

La pré/post-multiplication de ces inéquations par  $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$  montre cependant qu'elles sont équivalentes à (1.20).  $\circ$

L'obtention de ce résultat de synthèse s'appuie sur la condition d'analyse établie par le corollaire 3. On montre que la même méthodologie mise en œuvre à partir de la condition (1.12) du corollaire 2 ne permet pas d'aboutir :

- obtention de la condition d'analyse duale puis utilisation du complément de Schur

$$\exists W_0 = P_0^{-1} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W_0 & \Psi W_0 \\ \star & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0$$

- ré-introduction de l'expression des matrices du modèle en boucle ouverte  $\Sigma$

$$\begin{bmatrix} -W_0 & ((A_1^{ol} + B_1K_1)(A_0^{ol} + B_0K_0))W_0 \\ \star & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0$$

Cette dernière inégalité n'est pas linéaire en les variables  $K_0$ ,  $K_1$  et  $W_0$  et le changement de variables linéarisant utilisé précédemment ne permet pas de surmonter ce problème. La comparaison de (1.12) et (1.15) révèle que la linéarité de la condition d'analyse à l'égard des matrices  $A_k$  est une exigence centrale pour dériver des conditions de synthèse selon la démarche employée ici. Cette remarque justifie l'effort qui a été consacré à l'établissement du corollaire 3.

## 1.2.4 Robustesse face aux incertitudes polytopiques

### Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité robuste

On traite maintenant le cas où le modèle périodique est polytopique selon la définition (1.2). A nouveau, le problème d'analyse est abordé préalablement à l'étude de la synthèse par retour d'état.

**Stabilité robuste de la matrice de monodromie** Dans le cas d'incertitudes invariantes dans le temps, prouver la stabilité robuste est équivalent à démontrer que chacun des modèles issus d'un choix particulier de  $\theta \in \Theta$  est stable [Henrion et al., 2004]. L'adaptation du théorème 1 à ce contexte est la suivante :

**Théorème 3** (Stabilité robuste). *Le modèle  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est stable robustement si et seulement si les valeurs propres de  $\Psi(\theta)$  sont dans le cercle unité ouvert, quel que soit  $\theta \in \Theta$ .*

Il existe dans la littérature des travaux proposant des conditions de stabilité robuste s'appuyant directement sur ce théorème. Grâce à l'utilisation de la matrice de Hermite, il est possible de garantir que les valeurs propres de  $\Psi(\theta)$  sont toujours dans le cercle unité en assurant la positivité d'un polynôme scalaire en  $\theta$  sur l'ensemble  $\Theta$  [Henrion et al., 2004]. On notera toutefois que ce dernier est d'ordre élevé, ce qui rend en général cette méthode prohibitive quand la taille du modèle croît.



**Conditions LMI de stabilité robuste** En s'appuyant sur les résultats précédents, il est possible de caractériser cette propriété de la matrice  $\Psi(\theta)$  via des conditions LMI. En effet, la stabilité robuste est équivalente à l'existence d'une solution aux conditions LMI (1.12) et (1.15) pour toute valeur figée de  $\theta \in \Theta$ . L'ensemble de ces solutions peut alors être paramétré par  $\theta$  [Bliman, 2004b]. Ceci conduit aux conditions LMI robustes suivantes.

**Corollaire 4.** *Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  :*

$$\exists P_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \Psi_0^T(\theta)P_0(\theta)\Psi_0(\theta) - P_0(\theta) \prec 0, \forall \theta \in \Theta \quad (1.22)$$

$$\exists P_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \begin{cases} A_0^T(\theta)P_1(\theta)A_0(\theta) - P_0(\theta) \prec 0 \\ A_1^T(\theta)P_0(\theta)A_1(\theta) - P_1(\theta) \prec 0 \end{cases}, \forall \theta \in \Theta \quad (1.23)$$

Selon la définition de  $\Sigma_{cl}$  donnée par (1.4), les matrices  $A_k(\theta)$  dépendent *linéairement* de  $\theta$  alors que  $\Psi_0(\theta) = A_1(\theta)A_0(\theta)$  est polynomiale de degré 2 en les variables d'incertitudes. Dans le cas N-périodique, la matrice de monodromie est de degré  $N$ .

On notera que ces conditions ne précisent pas la nature de la dépendance des matrices  $P$  à l'égard de  $\theta$ . Par conséquent, s'il existe une solution (quelle que soit sa forme) à ces conditions, alors le modèle est robustement stable. En d'autres termes, la suffisance est toujours assurée. En revanche, conclure sur l'absence de stabilité robuste via ce corollaire est beaucoup plus difficile puisqu'il faut pouvoir assurer que (1.22) et (1.23) n'admettent aucune solution. En l'état, la nécessité de ces conditions est donc inexploitable.

**Première hiérarchie de relaxations** Les résultats publiés dans [Bliman, 2004b] permettent d'orienter la recherche de certificats de stabilité. En effet, ils assurent que (1.22) est vérifiée si et seulement si  $P_0(\theta)$  est polynomiale en  $\theta$ . Autrement dit, la restriction de  $P_0(\theta)$  à la classe des matrices dont les éléments sont des polynômes en  $\theta$  n'entraîne pas de conservatisme. Il s'agit d'un résultat très général applicable à toute LMI dépendant continuellement de paramètres appartenant à un ensemble compact. Il permet donc également d'affirmer que  $P_0(\theta)$  et  $P_1(\theta)$  de la condition (1.23) peuvent être considérées comme des fonctions polynomiales en  $\theta$ .

En s'appuyant indifféremment sur (1.22) ou (1.23), cette remarque permet de bâtir une hiérarchie de conditions suffisantes pour lesquelles chaque étape considère les LMI précédentes avec des matrices  $P(\theta)$  polynomiales de degré fixé. S'il existe une solution, on peut alors affirmer que le modèle est robustement stable. Dans le cas contraire, on poursuit la recherche pour un degré plus élevé. Le résultat précédent assure qu'il existe une étape à partir de laquelle l'absence de réalisabilité des LMI provient du défaut de stabilité robuste du modèle. Cette hiérarchie converge et le nombre d'étape qu'elle contient est fini. Toutefois, en l'absence de borne connue *a priori* de ce degré, il est impossible de savoir si la nonfaisabilité des conditions est due à l'instabilité ou à un avancement trop faible dans la hiérarchie. Cette approche ne permet toujours pas d'exploiter la nécessité des conditions.

Les résultats obtenus dans le cadre de l'analyse des modèles LTI peuvent toutefois être exploités pour obtenir une borne sur le degré de  $P_0(\theta)$  pour la condition de stabilité (1.22) des modèles N-périodiques. En effet, l'extension directe des résultats de [Chesi et al., 2009, p.125] d'une part, et de [Henrion et al., 2004] d'autre part<sup>2</sup>, démontre que les éléments de  $P_0(\theta)$  peuvent être choisis parmi une des catégories suivantes sans perte de généralité :

- les polynômes homogènes<sup>3</sup> de degré inférieur ou égal à  $d = n(n+1)N - 1$  ;
- les polynômes de degré inférieur ou égal à  $d = 2nN$ .

Par conséquent, la démonstration qu'il n'existe pas de solutions à (1.22) dans une de ces classes de matrices prouve que le modèle n'est pas stable robustement. A notre connaissance, il n'existe pas de résultats semblables pour la condition (1.23). C'est la raison pour laquelle, la suite de la discussion sur les relaxations hiérarchiques se focalise sur (1.22).

**LMI paramétrée** A chaque étape de la hiérarchie, il s'agit de montrer qu'il existe ou non une solution à (1.22) pour un degré de  $P_0(\theta)$  fixé. On remarque que l'inégalité de la condition (1.22) est linéaire en  $P_0(\theta)$ . En rassemblant les coefficients des polynômes formant cette matrice dans le vecteur  $x \in \mathbb{R}^a$ , la forme générale de cette inégalité est alors la suivante :

$$F(x, \theta) = F_0(\theta) + x_1 F_1(\theta) + \dots + x_a F_a(\theta) \succ 0, \forall \theta \in \Theta \quad (1.24)$$

2. Il est affirmé dans cet article que la borne supérieure du degré des polynômes formant la matrice de Hermite est égale à  $2nL$ , où  $L$  est la dimension de  $\theta$ . Cette borne est en réalité égale à  $2n$  et ne dépend pas de  $L$ .

3. Un polynôme est dit homogène si et seulement si les monômes de coefficients non-nuls qui le composent sont de même degré.

où les variables de décision sont les éléments de  $x$ . Le problème peut être formulé comme suit.

**Problème 3.** On considère la LMI (1.24), paramétrée par  $\theta$ , pour laquelle les variables de décision sont les éléments du vecteur  $x$ . On suppose que la dépendance des matrices  $F_i(\theta)$  à l'égard de  $\theta$  est polynomiale de degré connu et que  $\theta$  correspond au  $L$ -simplex standard décrit précédemment.

Le problème consiste alors à montrer que l'ensemble  $\mathbb{X}$  des solutions de (1.24) est non-vide.  $\circ$

Sous sa forme la plus générale, ce sous-problème est lui-même délicat puisqu'il rassemble les deux difficultés suivantes :

- montrer la positivité d'une matrice polynomiale multivariée de degré fixé ;
- restreindre à  $\Theta$  l'ensemble dans lequel cette positivité est requise.

Pour un panorama des techniques utilisables pour aborder ces questions, on peut citer [Scherer, 2006] et [Lasserre, 2010]. La section suivante en propose un résumé.

**Remarque.** La condition (1.22) s'intéresse à l'existence de  $P_0(\theta) \in \mathbb{S}^n$  telle que pour tout  $\theta \in \Theta$

$$\Psi_0^T(\theta)P_0(\theta)\Psi_0(\theta) - P_0(\theta) \prec 0 \quad (1.25a)$$

$$P_0(\theta) \succ 0 \quad (1.25b)$$

Pour évaluer cette condition, il est donc théoriquement nécessaire de vérifier la validité de (1.25a) et (1.25b). En s'inspirant de la remarque proposée dans [Dettori and Scherer, 2000], on montre cependant que s'il existe une valeur  $\theta_0$  particulière pour laquelle le modèle est stable, alors (1.25a) implique (1.25b). Typiquement, l'analyse robuste se situe dans ce cadre puisqu'elle s'intéresse à des modèles nominalement stables.

Pour prouver cette affirmation, on suppose que (1.25a) est vérifiée quel que soit  $\theta \in \Theta$  et que  $P_0(\theta_0) \succ 0$ . On considère également un sous-ensemble  $\underline{\Theta} \subseteq \Theta$  tel que  $\theta_0 \in \underline{\Theta}$ . Par hypothèse, si  $\underline{\Theta} = \{\theta_0\}$  alors (1.25b) est satisfaite quel que soit  $\theta \in \underline{\Theta}$ . On utilise un raisonnement par l'absurde en supposant d'abord que (1.25b) n'est pas satisfaite. Dans ce cas, en augmentant progressivement  $\underline{\Theta}$  à partir de  $\{\theta_0\}$ , il existe alors un ensemble  $\underline{\Theta}^*$  particulier pour lequel l'inégalité (1.25b) n'est plus vérifiée strictement<sup>4</sup>. On a alors uniquement  $P_0(\theta) \succeq 0$ . Il existe donc  $v$  et  $\theta \in \underline{\Theta}^* \subseteq \Theta$  tel que  $P_0(\theta)v = 0$ . En pré/postmultipliant (1.25a) par  $v$ , on a

$$w^T P_0(\theta)w \prec 0 \quad \text{avec} \quad w = \Psi_0(\theta)v$$

ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $P_0(\theta) \succeq 0$ . L'inéquation (1.25b) est donc vérifiée quel que soit  $\theta \in \underline{\Theta}^* \subseteq \Theta$  et donc en particulier pour  $\theta \in \underline{\Theta}^* = \Theta$ .

En conclusion, dans ce contexte l'inégalité (1.25b) est redondante et la condition (1.22) se résume à vérifier que (1.25a) est satisfaite quel que soit  $\theta \in \Theta$ .  $\circ$

## Outils numériques pour la résolution de LMI paramétrées

**Cas particulier de la dépendance linéaire en  $\theta$**  On considère dans un premier temps le cas simple où  $F(x, \theta)$  est linéaire en  $\theta$ . Chacune des matrices  $F_i(\theta)$  vérifie alors

$$F_i(\theta) = F_{i,0} + \sum_{j=1}^L \theta_j F_{i,j} = \sum_{j=1}^L \theta_j F_i^{[j]} \quad \text{avec} \quad F_i^{[j]} = F_{i,0} + F_{i,j} \quad (1.26)$$

Cette formulation peut être obtenue sur le simplex où la somme des  $\theta_i$  est égale à 1. Le lemme suivant reformule alors (1.24) sous forme SDP.

**Lemme 1.** Si  $F(x, \theta)$  est linéaire en  $\theta$ , l'inégalité (1.24) est équivalente au problème SDP suivant :

$$F_0^{[i]} + x_1 F_1^{[i]} + \cdots + x_a F_a^{[i]} \succ 0, \quad \forall i = \{1, \dots, L\} \quad (1.27)$$

*Démonstration.* (1.27)  $\Rightarrow$  (1.24). Si les inéquations (1.27) sont vérifiées pour tout  $i$  alors la somme de ces  $L$  inégalités, préalablement multipliées par  $\theta_i \geq 0$ , est également positive :

$$\sum_{i=1}^L \theta_i \left( F_0^{[i]} + x_1 F_1^{[i]} + \cdots + x_a F_a^{[i]} \right) \succ 0$$

En utilisant la relation (1.26), on montre aisément que cette inégalité n'est autre que (1.24).

(1.27)  $\Leftarrow$  (1.24). Si  $F(x, \theta)$  est définie positive quel que soit  $\theta \in \Theta$ , elle possède cette propriété en particulier sur les sommets du polytope où tous les éléments de  $\theta$  sont nuls sauf un. On a alors  $F_i(\theta) = F_i^{[j]}$ . Ceci conduit naturellement aux équations (1.27).  $\square$

4. On utilise ici l'argument la continuité des valeurs propres de  $P_0(\theta)$  par rapport à  $\theta$ .

L'idée principale de cette démonstration peut être résumée ainsi : si  $F(x, \theta)$  est linéaire en  $\theta \in \Theta$ , cette matrice hérite des propriétés de l'ensemble  $\Theta$ . La géométrie de  $F(x, \theta)$  est donc polytopique et convexe. Dans ce cas, la positivité de  $F(x, \theta)$  sur la frontière de son ensemble est une condition suffisante (et bien sûr nécessaire) pour montrer sa validité dans tout l'ensemble auquel elle appartient. Cette condition peut alors être traduite en un nombre fini de LMI puisque cette frontière est décrite par un polytope. Selon la terminologie anglo-saxonne utilisée dans [Barmish, 1994], l'usage de cette propriété est appelée « vertexisation ». Dans cette thèse, on utilisera la dénomination « argument de convexité » ou encore « combinaison convexe ».

Le lemme 1 montre que l'ensemble  $\mathbb{X}$  des solutions de (1.24) peut être caractérisé par une LMI dans le cas où  $F(x, \theta)$  est linéaire en  $\theta$ . Dans le cas général où cette matrice est polynomiale en cette même variable, ce type de problème reste soluble mais est plus difficile. Sa complexité numérique est NP [Bliman, 2004a]. Il est possible d'aborder ce problème par le biais de relaxations conduisant à des conditions plus simples du point de vue de la résolution numérique, mais uniquement suffisantes : si la condition relaxée est vérifiée alors sa solution appartient à  $\mathbb{X}$ . Il peut néanmoins exister des éléments de  $\mathbb{X}$  ne satisfaisant pas cette condition relaxée. En ce sens, il s'agit de construire l'ensemble  $\mathbb{X}$  par l'intérieur. Le paragraphe suivant présente une approche de ce type.

**Approximation polytopique de la géométrie de  $F(x, \theta)$**  Si  $F(x, \theta)$  est polynomiale en  $\theta$ , une première approche consiste à inclure le problème dans le cadre précédent en définissant un ensemble  $\Delta$  convexe et polytopique avec  $\beta$  sommets englobant l'ensemble formé par la concaténation des matrices  $F_i(\theta)$  lorsque  $\theta$  décrit  $\Theta$  :

$$\{[F_0(\theta) \ \cdots \ F_L(\theta)] : \theta \in \Theta\} \subseteq \Delta = \text{co}\{\mathfrak{F}^{[1]} \cdots \mathfrak{F}^{[\beta]}\} \quad (1.28)$$

S'il existe un vecteur  $x$  solution de (1.24) sur chacun des sommets de  $\Delta$  alors  $x$  est également solution de (1.24) quel que soit  $\theta \in \Theta$ . En se basant sur le même raisonnement que précédemment, cette première condition peut être traduite sous forme SDP :

$$\mathfrak{F}^{[i]} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_a \end{bmatrix} \otimes \mathbf{1}_n \right) \succ 0, \quad \forall i = \{1, \dots, L\} \Rightarrow (1.24) \quad (1.29)$$

Toutefois, cette approche doit être considérée comme très conservative puisqu'elle impose la recherche d'une solution assurant la positivité de  $F(x, \theta)$  sur un ensemble  $\Delta$  plus grand que celui décrit par les matrices  $F_i(\theta)$ . Selon la dépendance des matrices  $F_i(\theta)$ , ce conservatisme peut être prohibitif. C'est la raison pour laquelle, on s'oriente vers les approches présentées dans les paragraphes suivants.

**Remarque.** *La théorie des polynômes positifs et celle des moments sont duales l'une de l'autre [Lasserre, 2010]. Le problème considéré dans cette sous-section peut donc être abordé par le biais de sa formulation duale mettant en jeu des moments. On se restreint dans cette présentation à traiter le problème 3 sous sa formulation primale originelle.* ◦

**Approche par variables de relaxation** La démarche présentée maintenant est issue des travaux de [de Oliveira et al., 1999] et [Peaucelle et al., 2000] et appliquée dans le cadre général utilisé ici dans [Peaucelle and Sato, 2009]. Elle s'appuie essentiellement sur la décomposition (non unique) suivante (1.24) :

$$F(x, \theta) = R^{T\perp}(\theta)Q(x, \theta)R^{T\perp T}(\theta) \quad (1.30)$$

où  $Q(x, \theta)$  est linéaire en  $x$  et  $R(\theta)$  est linéaire en  $\theta$ . Toute matrice  $F(x, \theta)$  satisfaisant (1.24) admet cette reformulation [Coutinho et al., 2002]. L'application du lemme d'élimination à l'inégalité (1.30) conduit alors directement au théorème suivant.

**Lemme 2.** *L'inégalité (1.24) est équivalente à la condition suivante :*

$$\exists y : Q(x, \theta) + \text{He}\{\mathcal{F}(y, \theta)R(\theta)\} \succ 0, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (1.31)$$

où  $\mathcal{F}(y, \theta)$  dépend linéairement de  $y$  et  $\theta$ .

*Démonstration.* Le lemme de Finsler (voir annexe A) permet de réécrire (1.30) sous la forme suivante

$$\exists y < 0 : Q(x, \theta) + yR^T(\theta)R(\theta) \succ 0, \quad \forall \theta \in \Theta$$

On remarque que cette condition peut prendre la forme (1.31) avec  $\mathcal{F}(y, \theta) = y/2R(\theta)$ . Ceci prouve que  $\mathcal{F}(\theta)$  peut-être choisie parmi les matrices linéaires en  $\theta$  sans conservatisme additionnel. ◻

Ce théorème fait usage du lemme d'élimination dans un sens non traditionnel puisqu'il crée les variables du vecteur  $y$ . On notera néanmoins que cette manipulation permet de décroître le degré de dépendance de la LMI vis-à-vis de  $\theta$  : (1.31) est uniquement quadratique en  $\theta$ .

D'autre part, *quel que soit*  $\mathcal{F}(y, \theta)$  si (1.31) est satisfaite alors (1.24) admet une solution. Cette remarque est essentielle puisqu'elle permet de considérer le cas particulier où il existe une matrice  $\mathcal{F}(y)$  indépendante de  $\theta$  et solution de (1.31). Dans ce cas, (1.31) devient alors linéaire en  $\theta$ , ce qui permet de faire appel au résultat du théorème 1 en réécrivant (1.31) sous forme SDP de façon équivalente.

**Théorème 4.** *Soit le problème SDP suivant*

$$\exists x, \exists y : Q^{[i]}(x) + \text{He} \left\{ \mathcal{F}(y) R^{[i]} \right\} \succ 0, \forall i = \{1, \dots, L\} \quad (1.32)$$

où les matrices  $Q^{[i]}(x)$  et  $R^{[i]}$  sont construites à partir de  $Q(x, \theta)$  et  $R(\theta)$  selon la convention proposée par (1.26). Si (1.32) est réalisable alors  $x$  est solution de (1.24).

*Démonstration.* Par combinaison convexe, (1.32) implique (1.31) et par conséquent (1.24) est vérifiée.  $\square$

**Remarque.** *Comme expliqué précédemment, le coeur de cet outil méthodologique réside dans la reformulation (1.30). On remarquera que cette dernière dimensionne le nombre de variables et de lignes du problème SDP (1.32) par le biais de la taille de la matrice  $Q$ . Une telle reformulation peut toujours être obtenue en décomposant de façon générique les polynômes de  $F(x, \theta)$  selon leurs monômes [Peaucelle and Sato, 2009]. Cette approche conduit cependant à une matrice  $Q$  de grandes dimensions. La décomposition (1.30) n'étant pas unique, tout l'enjeu consiste à obtenir la matrice  $Q$  la plus petite possible pour réduire l'effort de calcul. Cette remarque justifie naturellement l'intérêt porté aux décompositions tirant profit de la connaissance de la nature de la dépendance de  $F(x, \theta)$  vis-à-vis de  $\theta$ .*  $\circ$

Bien que souvent moins conservatrice que l'approche précédente, la proposition établie par le théorème 4 n'est toujours que suffisante en raison de la restriction de  $\mathcal{F}$  aux matrices indépendantes de  $\theta$ . En d'autres termes, (1.32) ne paramètre qu'une partie de l'ensemble  $\mathbb{X}$  des solutions de (1.24).

**Remarque.** *La dénomination de cette méthode, « approche par variable de relaxation », est inappropriée. En effet, la plupart des techniques applicable à (1.24) relaxe le problème en ajoutant des variables de décision pour obtenir une forme SDP standard. Dans cette thèse, on se conformera toutefois à cette terminologie pour être en accord avec la littérature utilisant la dénomination anglo-saxonne « slack-variables ».*  $\circ$

Dans la suite de cette sous-section, on s'intéresse aux méthodes construisant  $\mathbb{X}$  de façon itérative et asymptotiquement exacte. Ces techniques peuvent être classées en deux catégories : la première traite spécifiquement du cas où  $\Theta$  correspond au simplexe standard tandis que la seconde considère le cas plus général des ensembles semi-algébriques simples. Cette sous-section présente la méthode de Pólya puis de Putinar, appartenant respectivement à la première et à la seconde catégorie.

**Relaxations de Pólya** En exploitant les propriétés du simplexe  $\Theta$ , il est possible d'apporter une réponse au problème 3 dans le cas où les éléments des matrices  $F_i(x, \theta)$  sont des polynômes homogènes en  $\theta$ . On notera que la restriction à cette classe de matrice n'entraîne pas de perte de généralité dans le mesure où il est toujours possible de construire une matrice polynomiale homogène  $G(x, \theta)$  égale à  $F(x, \theta)$  sur  $\Theta$  (voir [Chesi et al., 2004]).

Le résultat obtenu par Pólya dans le cas des polynômes scalaires [Pólya, 1974] et généralisé par [Scherer, 2005] pour les matrices polynomiales permet d'apporter une solution au problème 3.

**Théorème 5** ([Scherer, 2005]). *L'inégalité (1.24) admet une solution  $x$  si seulement s'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que les matrices coefficients non nulles du polynôme suivant en  $\theta$  sont définies positives.*

$$G(x, \theta) \left( \sum_{i=1}^L \theta_i \right)^k \quad (1.33)$$

où  $G(x, \theta)$  est une matrice polynomiale homogène telle que

$$G(x, \theta) = F(x, \theta), \forall \theta \in \Theta, \forall x \in \mathbb{R}^a \quad (1.34)$$

Ces matrices coefficients dépendent linéairement de  $x$ . Prouver leur positivité est donc un problème SDP. On remarquera que la suffisance de cette condition est directe : si les matrices coefficients de (1.33) sont définies positives, alors (1.33) est elle-même positive sur l'orthant positif (auquel appartient le simplexe). En remarquant

que  $\left(\sum_{i=1}^L \theta_i\right)^k = 1$  quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ , on a alors (1.33)  $= G(x, \theta) = F(x, \theta) \succ 0$ . Ce raisonnement est valable quel que soit  $k \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, en augmentant progressivement  $k$ , on obtient une suite convergente de relaxations. On notera toutefois, que, à notre connaissance, il n'existe pas de borne exploitable sur la valeur de  $k$ .

Les deux remarques suivantes tempèrent l'intérêt de cette méthode : premièrement, le degré des matrices  $H_i(x, \bar{\theta})$  est typiquement plus élevé que celui de  $F(x, \theta)$  et deuxièmement, il n'existe pas de borne facilement exploitable sur ce degré.

Cette méthode a été utilisée dans [Oliveira and Peres, 2007] pour l'analyse robuste de modèle LTI affecté linéairement par des incertitudes polytopiques.

**Relaxations de Putinar** La méthode présentée maintenant diffère de la hiérarchie de relaxations de Pólya par deux aspects. Premièrement, l'ensemble sur lequel la positivité de  $F$  doit être prouvée peut être un compact semi-algébrique simple quelconque et deuxièmement, la condition de positivité de  $F$  ne porte plus sur la positivité des coefficients de polynômes mais sur des décompositions de ce même type de fonctions en sommes de carrés, ou sum-of-squares (sos) en anglais. Sous sa forme matricielle, cette dernière technique cherche une solution  $x$  à l'inégalité  $F(x, \theta) \succeq 0$  quel que soit  $\theta \in \mathbb{R}^L$ . Contrairement au problème 3, l'inégalité est large et  $x$  n'est pas contrainte dans un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^L$ . La démarche se base sur l'idée suivante : s'il existe une valeur de  $x_0$  telle que  $F(x_0, \theta)$  peut être écrite sous la forme  $T(\theta)^T T(\theta)$ , alors  $x_0$  est une solution au problème puisque  $F(x_0, \theta)$  est évidemment semi-définie positive quel que soit  $\theta$  [Scherer, 2006]. La matrice  $T(\theta)$  est une matrice polynomiale comportant typiquement plus de lignes que de colonnes.

La recherche d'un tel vecteur  $x_0$  peut être reformulée comme un problème de faisabilité SDP. Il s'agit de l'intérêt majeur de cette méthode. On notera toutefois que toutes les matrices  $F(x, \theta) \succeq 0$  n'admettent pas forcément de décomposition sous la forme  $T(\theta)^T T(\theta)$ . Dans le cas scalaire ( $n = 1$ ), le polynôme de Motzkin est un exemple classique [Lasserre, 2010]. Dans le cas matriciel, [Choi, 1975] donne une matrice semi-définie positive et quadratique  $\theta$  ne pouvant être décomposée sous la forme précédente.

**Remarque.** *L'utilisation directe de cette technique dans le cadre du problème 3 donne lieu à une condition suffisante. S'il existe un vecteur  $x_0$  et un scalaire positif  $\epsilon$  tel que  $F(x_0, \theta) - \epsilon \mathbf{1}$  s'écrit comme une somme de carré alors  $F(x_0, \theta)$  est évidemment positive quel que soit  $\theta \in \mathbb{R}^L$  et donc en particulier sur le simplexe  $\Theta$ . Néanmoins, cette approche doit être vue comme très conservative puisque  $F(x, \theta)$  peut être positive sur  $\Theta$  tout en étant négative ou indéfinie ailleurs. Dans une telle situation, elle ne peut admettre de décomposition en somme de carrés. et sa positivité ne peut être prouvée par cette approche.*  $\circ$

Après ce préambule, on montre maintenant que le problème 3 peut également être abordé dans le cadre plus générale des techniques visant à prouver la positivité d'une matrice polynomiale sur un ensemble compact semi-algébrique simple  $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^\beta$  décrit de la façon suivante :

$$\mathbb{K} = \{\bar{\theta} \in \mathbb{R}^\beta : g_i(\bar{\theta}) \geq 0, i = \{1, \dots, m\}\} \quad (1.35)$$

où les fonctions  $\{g_i(\bar{\theta})\}_{i=1}^m$  sont des polynômes scalaires dépendant des éléments de  $\bar{\theta}$ . Il est possible de décrire le  $L$ -simplexe  $\Theta$  selon cette formulation grâce au changement de variables

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \\ -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \bar{\theta} \quad \text{avec } \bar{\theta} \in \mathbb{R}^{L-1} \quad (1.36)$$

conduisant à la définition suivante des fonctions  $g_i(\bar{\theta})$ .

$$g_i(\bar{\theta}) = \begin{cases} \bar{\theta}_i, & (i = \{1, \dots, L-1\}) \\ 1 - \sum_{i=1}^{L-1} \bar{\theta}_i, & (i = L) \end{cases} \quad (1.37)$$

Ces manipulations peuvent être interprétées comme une caractérisation dans  $\mathbb{R}^{L-1}$  de  $\Theta \subset \mathbb{R}^L$  correspondant à la partie de l'hyperplan d'équation  $\sum_{i=1}^L \theta_i = 1$  située dans l'orthant positif. L'inégalité (1.24) est donc équivalente à  $F(x, \bar{\theta}) \succ 0$  quel que soit  $\bar{\theta} \in \mathbb{K}$ . Dans ce contexte, il est possible d'utiliser l'extention matricielle, introduite par [Scherer and Hol, 2006], d'un résultat proposé par Putinar dans [Putinar, 1993].



**Théorème 6** ([Scherer and Hol, 2006]). *Le vecteur  $x \in \mathbb{R}^a$  est solution de (1.24) si et seulement s'il existe  $L + 1$  matrices polynomiales  $\{H_i(\bar{\theta}) \in \mathbb{S}_n\}_{i=0}^L$  s'écrivant comme des sommes de carrés et un scalaire  $\epsilon > 0$  tels que*

$$F(x, \bar{\theta}) = H_0(\bar{\theta}) + \sum_{i=1}^L H_i(\bar{\theta})g_i(\bar{\theta}) + \epsilon \mathbf{1} \quad (1.38)$$

**Remarque.** *La validité de ce théorème repose sur une hypothèse portant sur les fonctions  $g_i$  [Lasserre, 2010, Hyp. 2.1 p.29]. Toutefois, [Scherer, 2006] démontre que cette dernière est satisfaite si l'ensemble auquel appartient  $\theta$  est compact et que ses frontières  $g_i$  sont affines en  $\theta$ . Par définition, le polytope  $\Theta$  satisfait à ces exigences.*  $\circ$

A nouveau, la suffisance de cette condition est directe : si les matrices  $H_i(\bar{\theta})$  sont des sommes de carrés elles sont évidemment semi-définies positives et donc, d'après (1.38),  $F(x, \bar{\theta}) \succ 0$  lorsque les fonctions  $g_i(\bar{\theta})$  sont supérieures ou égales à zéro. La validité de cette implication ne dépend pas du degré des matrices  $H_i(\bar{\theta})$ . Par conséquent, il est possible de bâtir une série de relaxations suffisantes en fixant le degré des matrices  $H_i(\bar{\theta})$  dans le théorème 6. De plus, il est démontré dans [Scherer and Hol, 2006] que le conservatisme ne peut augmenter si le degré de ces matrices augmente. Ceci démontre que cette série est en réalité une hiérarchie convergente et finie de relaxations.

Les deux remarques suivantes tempèrent l'attrait pour cette méthode : premièrement, le degré des matrices  $H_i(x, \bar{\theta})$  est typiquement plus élevé que celui de  $F(x, \theta)$  et, deuxièmement, il n'existe pas de bornes facilement exploitable sur ce degré.

### Stabilité quadratique

Après ce tour d'horizon des méthodes applicables aux LMI paramétrées, on revient au problème initial posé par le corollaire 4.

Comme expliqué précédemment, toute matrice périodique  $P_k(\theta)$  solution de (1.23) est un certificat de stabilité robuste. Parmi elles, il est possible qu'il existe une matrice  $P_k$  indépendante de  $\theta$ . Cette propriété caractérise la stabilité quadratique [Bittanti and Colaneri, 2008].

**Définition 4.** [Stabilité quadratique - [Bittanti and Colaneri, 2008]] Le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est stable quadratiquement si et seulement s'il existe une fonction scalaire  $V_{2q+k}$  donnée par (1.17) certifiant la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$ . Cette fonction est quadratique et indépendante de  $\theta$ .  $\circ$

Clairement, la stabilité quadratique implique la stabilité robuste. Dans le cas général<sup>5</sup>, la réciproque est fautive : le modèle peut être stable robustement sans admettre de certificat de stabilité unique (indépendant de  $\theta$ ). En d'autres termes, la recherche de certificat de stabilité quadratique s'effectue dans un sous-ensemble des fonctions de Lyapunov candidates pour prouver la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$ .

Bien que conservative, la notion de stabilité quadratique a l'avantage d'admettre une caractérisation sous forme SDP. En effet, grâce au complément de Schur, (1.23) peut être réécrite comme suit :

$$\exists P_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} -P_0(\theta) & \star \\ P_1(\theta)A_0(\theta) & -P_1(\theta) \end{array} \right] \prec 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -P_1(\theta) & \star \\ P_0(\theta)A_1(\theta) & -P_0(\theta) \end{array} \right] \prec 0 \end{array} \right. , \forall \theta \in \Theta \quad (1.39)$$

Si les matrices  $P_0(\theta)$  et  $P_1(\theta)$  sont indépendantes de  $\theta$  alors ces inégalités sont linéaires en la variable d'incertitude. D'après la discussion précédente, cette propriété permet de réécrire ces conditions en un nombre fini de LMI de façon équivalente.

**Théorème 7** (Stabilité quadratique - [Bittanti and Colaneri, 2008]). *La condition suivante est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité quadratique de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  défini par (1.4) :*

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \left\{ \begin{array}{l} (A_0^{[i]})^T P_1 A_0^{[i]} - P_0 \prec 0 \\ (A_1^{[i]})^T P_0 A_1^{[i]} - P_1 \prec 0 \end{array} \right. , \forall i \in \{1 \dots L\} \quad (1.40)$$

5. Pour les modèles à temps continu, on notera que dans le cas particulier où les incertitudes varient dans le temps et que leur dérivée temporelle est non bornée, les stabilités quadratique et robuste sont équivalentes [Packard and Doyle, 1990]. Il est démontré dans [Daafouz and Bernussou, 2001] que cette propriété n'est plus vraie pour les modèles à temps discret, même pour ce type d'incertitude. En effet, l'échantillonnage des perturbations interdit à ces dernières de varier infiniment rapidement.

*Démonstration.* L'argument de convexité permet d'affirmer que (1.39) est équivalente à la condition suivante :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -P_0 & \star \\ P_1 A_0^{[i]} & -P_1 \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -P_1 & \star \\ P_0 A_1^{[i]} & -P_0 \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \right., \forall i \in \{1 \dots L\}$$

que le complément de Schur permet de réécrire sous la forme (1.40).  $\square$

La mise en œuvre de la même démarche à partir de la condition (1.22), au lieu de (1.23), ne permet pas d'aboutir. En effet, s'il existe une matrice  $P_0$  constante satisfaisant (1.22), alors un complément de Schur montre que cette condition est équivalente à

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P_0 & \star \\ P_0 \Psi_0(\theta) & -P_0 \end{bmatrix} \prec 0, \forall \theta \in \Theta$$

qui n'est pas convexe par rapport à  $\theta$  puisque  $\Psi_0(\theta)$  dépend polynomialement de cette variable. En d'autres termes, la multiplication des  $A_k(\theta)$  apparaissant dans la définition de  $\Psi_0(\theta)$  détruit la géométrie polytopique du problème. Ceci n'est pas sans rappeler la discussion menée après la démonstration du théorème 2. Cette fois encore, l'origine de la difficulté provient de la non-linéarité de la condition d'analyse (1.12) à l'égard des matrices  $A_k$ .

**Remarque.** Selon [Bittanti and Colaneri, 2008], la traduction sous forme de conditions LMI de la stabilité quadratique est donnée par la condition (1.23) dans le cas où  $P_k(\theta)$  est indépendante de  $\theta$ . Cette notion aurait également pu être traduite par la condition (1.22) avec  $P_0(\theta)$  constante. A notre connaissance, il n'existe pas de preuve que ces deux conditions sont équivalentes. On formule même la conjecture que (1.22) avec  $P_0(\theta)$  constante est plus conservatrice que (1.40).  $\circ$

### Synthèse robuste par retour d'état

En suivant la voie tracée dans le cas sans incertitude, on aborde la problématique de la synthèse robuste en ré-introduisant les matrices de la boucle ouverte dans la condition d'analyse duale de (1.23), préalablement reformulée grâce au complément de Schur :

$$\exists W_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -W_1(\theta) & (A_0^{ol}(\theta) + B_{u0}(\theta)K_0)W_0(\theta) \\ \star & -W_0(\theta) \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -W_0(\theta) & (A_1^{ol}(\theta) + B_{u1}(\theta)K_1)W_1(\theta) \\ \star & -W_1(\theta) \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \right.$$

Dans ce contexte, l'usage du changement de variable linéarisant  $Y_k(\theta) = K_k W_k(\theta)$  est compromis puisqu'il conduit à un gain  $K_k = Y_k(\theta) W_k^{-1}(\theta)$  dépendant des incertitudes. Sans cet outil technique, le problème doit donc être traité sous son expression originelle dont la forme générale est la suivante :

$$F_0(\theta) + \sum_{i=1}^L x_i F_i(\theta) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L x_i x_j F_{i,j}(\theta) \succ 0, \forall \theta \in \Theta \quad (1.41)$$

Les variables de décisions  $x_i$  correspondent ici aux éléments de  $K_k$  et aux paramètres de  $W_1(\theta)$  et de  $W_0(\theta)$ . Il s'agit d'une inéquation matricielle bilinéaire et paramétrée. Sa non-convexité vis-à-vis des paramètres  $\theta$  et des variables de décision rend sa résolution très difficile dans le cas général. Théoriquement, cette classe de problèmes peut néanmoins être traitée numériquement, notamment grâce à la théorie des moments via une hiérarchie de relaxations convergeant asymptotiquement vers la solution [Lasserre, 2010]. En pratique, ces approches ne sont cependant appropriées que pour des problèmes de faibles dimensions.

Des conditions suffisantes sous forme SDP peuvent cependant être obtenues. L'approche de la stabilité quadratique en donne un exemple. En combinant la démarche des théorèmes 2 et 7, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 8** (Synthèse quadratique - [de Souza and Trofino, 2000]). *Le modèle incertain  $\Sigma(\theta)$  défini par (1.2) est stabilisable quadratiquement par la loi de commande (1.3) si et seulement si la condition suivante est vérifiée*

$$\begin{array}{l} \exists W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1 \in \mathbb{S}_+^n, \\ \exists Y_0 \in \mathbb{R}^{m_u \times n}, \exists Y_1 \in \mathbb{R}^{m_u \times n} \end{array} : \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} -W_1 & A_0^{ol[i]} W_0 + B_{u0}^{[i]} Y_0 \\ \star & -W_0 \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -W_0 & A_1^{ol[i]} W_1 + B_{u1}^{[i]} Y_1 \\ \star & -W_1 \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \right., \forall i \in \{1 \dots L\} \quad (1.42)$$

Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation (1.21), rappelée ici :

$$K_k = Y_k W_k^{-1}$$

### 1.2.5 Conclusions

**Analyse et synthèse des modèles périodiques linéaires** On rappelle maintenant les principales conclusions de cette section. Il a été démontré tout d'abord que le modèle périodique  $\Sigma_{cl}$  est stable (globalement, asymptotiquement et uniformément) si et seulement si les valeurs propres de ses matrices de monodromie sont situées dans le cercle unité ouvert. Ce théorème est renforcé par le fait que toutes les matrices de monodromie d'un même modèle possèdent les mêmes valeurs propres non nulles, ce qui permet de n'examiner qu'une matrice particulière.

Le corollaire 2 traduit directement cette proposition sous forme LMI. La formulation obtenue met en lumière le lien très fort qu'entretiennent les modèles périodiques avec le cas, plus simple, des systèmes à temps-invariant. Cette observation pourrait même laisser penser que le corpus théorique développé pour les modèles à temps-invariant s'applique trivialement dans le cas des modèles périodiques, au prix d'éventuelles reformulations. Pourtant, ce chapitre démontre à deux reprises que la stricte mise en œuvre d'une telle démarche est vouée à l'échec : d'abord dans le cas de la synthèse nominale puis lors de la discussion autour de la stabilité quadratique. Dans ces deux cas, l'origine de la difficulté provient de la non-linéarité des conditions d'analyse vis-à-vis des matrices  $A_k$ .

Cet obstacle peut être contourné en faisant appel au corollaire 3 qui reformule le résultat précédent afin de découpler les matrices  $A_k$ . Si cette manipulation préserve l'équivalence, elle augmente les dimensions du problème SDP. On montre que la nouvelle condition d'analyse peut-être interprétée comme la preuve de l'existence d'une fonction de Lyapunov continûment décroissante. Cette dernière caractérisation de la stabilité permet d'obtenir, d'une part, des conditions de synthèse nominale et, d'autre part, une formulation LMI accessible aux outils numériques pour l'analyse et la synthèse quadratiques.

En l'absence d'incertitudes, les problèmes d'analyse de stabilité et la synthèse stabilisante sont donc résolus, puisque des conditions LMI nécessaires et suffisantes ont été établies par le corollaire 2 et le théorème 2. C'est la raison pour laquelle, tous les développements à venir autour des conditions nominales doivent être perçus comme une étude préliminaire servant à éclairer les discussions ultérieures prenant en compte les incertitudes du modèle.

**Robustesse face aux incertitudes polytopiques** Lorsque le modèle périodique  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est soumis à des incertitudes polytopiques invariantes dans le temps, la stabilité robuste peut être interprétée comme la garantie de stabilité de chacun des modèles issus d'un choix particulier de  $\theta \in \Theta$ . Le corollaire 4 exploite ce résultat et affirme que  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est stable robustement si et seulement s'il existe une solution aux LMI obtenues dans le cas nominal pour toute valeur de  $\theta \in \Theta$ . Ces solutions peuvent être paramétrées par  $\theta$ , conduisant alors à aux LMI « fonctionnelles » (1.22) et (1.23) dont les solutions sont des fonctions matricielles en  $\theta$ . On montre que ces fonctions peuvent toujours être choisies polynomiales. En imposant le degré de ces polynômes, on obtient alors une hiérarchie convergente de conditions suffisantes de stabilité. On identifie par les lettres A et B, les hiérarchies dérivant de (1.22) et (1.23), respectivement. Contrairement à la hiérarchie B, on montre qu'il existe une borne connue sur ce degré dans le cas de A.

Hiérarchie A				Hiérarchie B		
(1.22)			LMI fonctionnelle	(1.23)		
↓	...	↓	$P(\theta)$ polynomial de degré fixé	↓	...	↓
$P(\theta)$ de degré 0		$P(\theta)$ de degré fini et connu	SDP (1.24) paramétré polynomialement en $\theta$	$P(\theta)$ de degré 0		$P(\theta)$ de degré fini mais inconnu
				↓		
				condition quadratique		

Chaque étape de la hiérarchie consiste à résoudre un problème SDP paramétré (1.24). Le cas de la stabilité quadratique, traité par le théorème 7, correspond à la première étape de la hiérarchie B puisque  $P_k(\theta)$  est indépendante de  $\theta$ .

L'analyse de stabilité quadratique conduit à un problème SDP linéaire en  $\theta$ . Par convexité, cette propriété autorise une traduction équivalente sous forme SDP standard. Dans le cas général, résoudre de façon exacte un problème SDP paramétré polynomialement nécessite le recours à une hiérarchie de relaxations. Sur le simplexe, on utilisera indifféremment les théorèmes de Pólya ou de Putinar convergeant asymptotiquement mais *n'admettant pas de bornes* facilement exploitables. Il existe donc deux niveaux de relaxations : le premier fixe le degré



de la matrice de Lyapunov et le second impose  $k$  (Pólya) ou fixe le degré des matrices  $H_i(\bar{\theta})$  (Putinar). Cette stratégie conduit donc rapidement à des problèmes SDP de grandes dimensions.

Pour le problème de synthèse, le changement de variable linéarisant employé dans le cas nominal ne peut être utilisé puisqu'il conduit à une matrice de gains dépendant des incertitudes. La synthèse quadratique est une exception à cette règle puisque, dans ce cas, la matrice de Lyapunov périodique est indépendante de  $\theta$ . Dans le cas général, les inégalités doivent alors être traitées sous leur forme bilinéaire. Cette classe de problèmes est exclue de cette étude en raison de la difficulté numérique inhérente à leur résolution.

**Choix de la méthode des variables de relaxation** Ces deux derniers paragraphes justifient l'intérêt portée à la méthode des variables de relaxation. En effet, depuis son introduction dans [de Oliveira et al., 1999] et [Peaucelle et al., 2000], cette approche a démontré, dans des contextes variés, sa capacité à réduire le conservatisme des conditions quadratiques, via la résolution de problèmes SDP de dimensions raisonnables. La suite de ce chapitre montre que son usage dans le contexte des modèles périodiques ne fait pas exception à cette règle.

Comme expliqué auparavant, le coeur de cette méthode consiste à réécrire les LMIs fonctionnelles (1.22) et (1.23) polynomiales en  $\theta$  sous la forme (1.31) caractérisée par une dépendance *quadratique* en  $\theta$ . L'ajout de nouvelles variables accompagne cette manipulation. En contraignant ces dernières à ne pas dépendre de  $\theta$ , on obtient alors une condition (suffisante) sous forme SDP. Contrairement aux approches hiérarchiques précédentes, cette technique tire profit de la structure de la matrice  $F(x, \theta)$ . L'objectif est d'obtenir un problème SDP nécessitant pour sa résolution un effort de calcul plus faible pour un conservatisme équivalent.

### 1.3 Conditions LMI étendues pour le modèle nominal

La réduction du conservatisme lié à la stabilité quadratique a été l'objet d'intenses recherches ces dernières années, [Peaucelle et al., 2000, Scherer, 2006, Scherer and Hol, 2006, Scherer, 2005]. Dans le domaine des systèmes périodiques à temps-discret, il est notable qu'une grande partie des efforts entrepris dans cette direction s'articulent autour de l'inégalité matricielle suivante, linéaire en les variables  $P_0$  et  $\mathcal{F}$  :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n} : \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} F_{0,0} & F_{0,1} \\ F_{1,0} & F_{1,1} \\ F_{2,0} & F_{2,1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.43)$$

Comme le montre la suite de ce chapitre, deux ingrédients essentiels ont permis la construction de cette inéquation qui fût présentée pour la première fois dans [Ebihara et al., 2008b] : premièrement, la formulation utilisant un vecteur étendu de la dynamique de  $\Sigma_{cl}$  et, deuxièmement, l'utilisation des variables de relaxation [Peaucelle et al., 2000, de Oliveira et al., 1999].

Avant d'aborder le problème de robustesse, cette section offre une discussion aussi exhaustive que possible autour de cette inégalité dans le cas nominal, c'est-à-dire pour le modèle (1.6). De nouvelles conditions d'analyse et de synthèse sont établies et les liens qu'elles entretiennent avec celles précédemment énoncées sont présentés.

#### 1.3.1 Analyse de stabilité utilisant une condition LMI étendue

On montre maintenant que la condition (1.43) est équivalente à la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ .

**Théorème 9.** *Le modèle sans incertitudes  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement si (1.43) est satisfaite.*

*Démonstration.* On rappelle la condition (1.13), équivalente à la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ , après avoir substitué  $\eta_q^0$  par  $x_{2q}$  :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \forall \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.44)$$

La contrainte algébrique de (1.44) caractérise la trajectoire des signaux  $x_{2q}$  et  $x_{2q+2}$ , tout comme l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \hat{x}_q = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \hat{x}_q^T = [x_{2q}^T \quad x_{2q+1}^T \quad x_{2q+2}^T]$$

En s'appuyant sur cette nouvelle égalité, (1.44) peut être reformulée de façon équivalente comme suit :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \hat{x}_q^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \hat{x}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \forall \hat{x}_q \in \mathbb{R}^{3n}, \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \hat{x}_q = \mathbf{0} \quad (1.45)$$

D'après le lemme d'élimination, cette condition est équivalente à (1.43).  $\square$

D'après la section précédente, prouver la stabilité d'un modèle périodique revient à montrer la décroissance de la suite  $\{\|x_{2q}\|\}_{q=q_0}^{+\infty}$ . Par définition, le lien entre ces signaux fait intervenir la matrice de monodromie  $\Psi_0 = A_1 A_0$ . Or, il a été montré que la multiplication directe des matrices  $A_k$  intervenant dans sa définition était problématique. Comme le corollaire 3, le théorème 9 offre un moyen de briser ce couplage :

- **Corollaire 3** : construire une fonction de Lyapunov décroissante tout au long de la période,
- **Théorème 9** : caractériser les trajectoires du système  $\Sigma_{cl}$  grâce à (1.3.1) en utilisant un vecteur d'état étendu.

On remarquera que chacune de ces solutions ré-introduit  $x_{2k+1}$ , l'état intermédiaire à la période, bien que la valeur de ce vecteur ne soit pas nécessaire pour statuer sur la stabilité.

**Remarque.** *La preuve du théorème 9 peut être menée de façon purement algébrique. En reformulant (1.12) comme suit*

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_1 A_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_1 A_0 \end{bmatrix} < 0 \Leftrightarrow \exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_0 \\ A_1 A_0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_0 \\ A_1 A_0 \end{bmatrix} < 0$$

En remarquant que

$$\begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}^{T \perp T} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_0 \\ A_1 A_0 \end{bmatrix}$$

le lemme d'élimination prouve que la condition de stabilité (1.12) est équivalente à (1.43).  $\circ$

### 1.3.2 Condition duale d'analyse de stabilité

De façon similaire au cas LTI, il est possible de construire une condition duale de (1.43) pouvant indifféremment être invoquée pour prouver la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ .

**Lemme 3.** *La condition suivante, duale de (1.43), est nécessaire et suffisante pour montrer la stabilité asymptotique du modèle sans incertitudes  $\Sigma_{cl}$ .*

$$\exists W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n} : \begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d \right\} < 0 \quad (1.46)$$

*Démonstration.* Il a été démontré que l'inégalité (1.43) est équivalente à (1.12). En utilisant le complément de Schur à deux reprises, cette dernière inéquation est d'abord reformulée comme suit

$$\begin{bmatrix} -P_0 & \Psi_0^T \\ \star & -P_0^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

puis selon l'inégalité suivante

$$-P_0^{-1} + \Psi_0 P_0^{-1} \Psi_0^T < 0$$

En utilisant la définition de  $\Psi_0$  et avec  $W_0 = P_0^{-1} \succ 0$ , cette dernière inégalité peut s'écrire également sous la forme suivante,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_1^T \\ A_0^T A_1^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_1^T \\ A_0^T A_1^T \end{bmatrix} < 0$$

Finalement, en remarquant que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ A_1^T \\ A_0^T A_1^T \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} A_1^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0^T & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

on obtient (1.46) grâce au lemme d'élimination.  $\square$

Comme dans le cas temps-invariant, cette démonstration peut également être menée en faisant appel aux signaux du système dual de  $\Sigma_{cl}$ , noté  $\Sigma_{cl}^d$ , évoluant en temps inversé et dont l'expression est donnée par le lemme suivant. L'annexe C discute plus amplement du concept de dualité des systèmes dynamiques en s'appuyant principalement sur [Nieuwenhuis and Willems, 1988].

**Lemme 4.** *Le modèle dual de  $\Sigma_{cl}$  donné par (1.6) est le suivant :*

$$\Sigma_{cl}^d : x_{2q-k-1}^d = A_k^T x_{2q-k}^d, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^-, \forall k \in \{0, 1\} \quad (1.47)$$

*Démonstration.* La dualité des systèmes étant mieux maîtrisée pour les modèles invariant dans le temps,  $\Sigma_{cl}$  est préalablement reformulé sous la représentation étendue suivante :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & x_{2q} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} & x_{2q+1} \\ \hline \sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & x_{2q+2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

où  $\sigma$  désigne l'opérateur unitaire d'avance dans le temps, c'est-à-dire  $\sigma y_q = y_{q+1}$ . En incorporant l'état  $x_{2q-1}$  dans cette définition, il est possible d'obtenir la forme suivante de façon équivalente

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{0} & A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \\ \hline \sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-1} \\ x_{2q} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \sigma \right) \tilde{x}_q = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \tilde{x}_q = \begin{bmatrix} x_{2q-1} \\ x_{2q} \end{bmatrix}$$

Sous cette présentation, la théorie de la dualité établie dans [Nieuwenhuis and Willems, 1988] pour les modèles à temps-invariant polynomiaux en  $\sigma$  s'applique directement et conduit au modèle à temps inversé suivant

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_0^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_1^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \sigma^{-1} \right) \tilde{x}_q^d = \mathbf{0}$$

En posant  $\tilde{x}_q^d = \begin{bmatrix} x_{2q}^d \\ x_{2q+1}^d \end{bmatrix}$ , il est possible de considérer ce modèle comme la reformulation invariante dans le temps d'un modèle dépendant du temps. On obtient alors

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -\mathbf{1} & A_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_0^T & \mathbf{0} \\ \hline \sigma^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-2}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q+1}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ce qui conduit à (1.47). □

En procédant comme pour la preuve du théorème 9, (1.46) peut être interprétée comme une condition équivalente de stabilité de  $\Sigma_{cl}^d$ . En effet, le lemme d'élimination permet de réécrire (1.46) comme suit :

$$(\check{x}_q^d)^T \begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} \check{x}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad \forall \check{x}_q^d \in \mathbb{R}^{3n}, \quad \begin{bmatrix} A_1^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0^T & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \check{x}_q^d = \mathbf{0} \quad (1.48)$$

En définissant la correspondance suivante entre  $\check{x}_q^d$  et les états de  $\Sigma_{cl}^d$

$$\check{x}_q^d = \begin{bmatrix} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

il apparaît clairement que la contrainte algébrique de (1.48) sur  $\check{x}_q^d$  caractérise le modèle  $\Sigma_{cl}^d$  et que l'inégalité de (1.48) est équivalente à  $V_{2q-1}^d < V_{2q+1}^d$  avec  $V_{2q-1}^d = (x_{2q-1}^d)^T W_0 x_{2q-1}^d$ . Ceci prouve la *croissance* de  $V_{2q-1}^d$  le long des trajectoires du système, équivalente à une *décroissance* à temps inversé. En adaptant le corollaire 3 à ce contexte, on montre que (1.46) est équivalente à la stabilité de  $\Sigma_{cl}^d$ .

**Remarque.** *La comparaison entre  $\hat{x}_q$  et  $\check{x}_q^d$ , définis par (1.3.1) et (1.49), met en lumière la dissymétrie existant dans la définition de ces signaux. Une correspondance directe aurait en effet conduit à*

$$\check{x}_q^d = \begin{bmatrix} x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \end{bmatrix}$$

La même démarche avec un tel choix conduit à une autre condition de stabilité. On peut montrer cependant que dans le cas nominal, la condition obtenue est équivalente à (1.46) bien que sa formulation ne soit pas identique. Il s'agit en réalité d'exploiter le degré de liberté offert par le choix de  $\tau$ , caractérisant le point de départ de la période. Ce sujet sera abordé plus en détails dans la suite de ce chapitre.  $\circ$

### 1.3.3 Réduction du nombre de variables de la condition LMI étendue

Afin de clarifier la discussion sur les relations d'implications existant entre les différentes conditions proposées et sur la structuration des variables additionnelles, on s'appuie par la suite à des interprétations ensemblistes. A cette fin, on introduit l'ensemble  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  défini comme suit :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}} = \{(P_0, \mathcal{F}) : P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}\}$$

Les résultats du théorème 9 peuvent alors être reformulés ainsi : toute solution à l'inégalité (1.43) appartenant à  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  prouve la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ . Inversement, si le modèle  $\Sigma_{cl}$  est stable alors il existe une solution à (1.43) dans l'ensemble  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ .

Sans autre indications,  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  doit être considéré dans sa totalité, mettant ainsi en jeu un grand nombre de variables. En effet, dans le cas général, toute recherche de solutions à (1.43) restreinte à un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  ne donne lieu qu'à une condition suffisante : l'absence de solutions dans ce sous-ensemble ne permet pas de conclure sur la stabilité ou non du modèle. Il est toutefois possible de montrer l'existence d'un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  contenant nécessairement une solution à (1.43) si  $\Sigma_{cl}$  est stable. Le lemme suivant établit ce résultat.

**Lemme 5.** *Le modèle sans incertitudes  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe  $P_0 \in \mathbb{S}_+^n$  et  $P_1 \in \mathbb{S}_+^n$  telles que l'inégalité (1.43) est satisfaite avec  $\mathcal{F}$  définie comme suit*

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

*Démonstration.* Le corollaire 3 propose deux inégalités dont la satisfaction est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ . On vérifiera aisément par le complément de Schur que ces inéquations peuvent être reformulées comme suit

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_1 \end{bmatrix} [A_0 \quad -\mathbf{1}] \right\} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ P_0 \end{bmatrix} [A_1 \quad -\mathbf{1}] \right\} \prec 0 \end{cases} \quad (1.51)$$

En vertu du corollaire 7 donné dans l'annexe A, on peut alors affirmer que ce jeu d'inéquations est équivalent à (1.43) avec  $\mathcal{F}$  donnée par (1.50).  $\square$

En s'appuyant sur un raisonnement analogue, on peut facilement prouver que la condition duale (1.46) possède une propriété similaire.

**Lemme 6.** *Le modèle sans incertitudes  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe  $W_0 \in \mathbb{S}_+^n$  et  $W_1 \in \mathbb{S}_+^n$  telles que l'inégalité (1.46) est satisfaite avec  $\mathcal{F}^d$  définie comme suit*

$$\mathcal{F}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & W_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

L'utilisation du lemme 5 au lieu du théorème 9 diminue sensiblement le nombre de variables. Le tableau 1.1, présenté dans la suite de cette section, quantifie cette affirmation dans le cas primal. Au-delà de la réduction évidente de l'effort de calcul lié à la résolution des LMI, cette démarche est justifiée par la nécessaire structuration de  $\mathcal{F}$  lors de la dérivation de conditions de synthèse à partir de celles d'analyse. La sous-section suivante illustre cette remarque.

**Remarque.** *La condition (1.51) s'inscrit dans la forme plus générale suivante :*

$$\begin{matrix} \exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n, \\ \exists F_{0,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \exists F_{1,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \exists F_{1,1} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \exists F_{2,1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{matrix} : \begin{cases} \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{0,0} \\ F_{1,0} \end{bmatrix} [A_0 \quad -\mathbf{1}] \right\} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \end{bmatrix} [A_1 \quad -\mathbf{1}] \right\} \prec 0 \end{cases} \quad (1.53)$$

Les travaux présentés dans [Farges, 2006] s'articulent autour de cette condition. Il a notamment été prouvé que cette dernière est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ . En effet, sa reformulation grâce au lemme d'élimination s'écrit ainsi :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n, \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+1} \end{bmatrix} < 0 \text{ telle que } [A_0 \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q+1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} x_{2q+1} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q+1} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} < 0 \text{ telle que } [A_1 \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} x_{2q+1} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

ce qui n'est autre que (1.16), la traduction directe du corollaire 3.

De plus, l'application directe du corollaire 6, donné par l'annexe A, montre que si (1.53) est vérifiée alors (1.43) est satisfaite avec  $F_{0,1} = F_{2,0} = \mathbf{0}$ . En d'autres termes, le conservatisme de (1.53) ne peut pas être plus faible que celui de (1.43). Les travaux de [Farges, 2006] doivent donc être considérés comme une étape intermédiaire vers l'obtention de (1.43) puisqu'ils introduisent pour la première fois les variables de relaxation pour l'analyse des modèles périodiques.  $\circ$

### 1.3.4 Synthèse de correcteurs périodiques par retour d'état

Comme dans la première section de ce chapitre, il est possible de dériver des conditions de synthèse à partir du théorème d'analyse duale. Comme pour le théorème 2, la ré-introduction des matrices en boucle ouverte dans la condition d'analyse duale (1.46) donne naissance à l'inéquation suivante qui est bilinéaire en les variables  $W_1$ ,  $K_1$ ,  $K_0$  et  $\mathcal{F}^d$ .

$$\begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_1^{ol} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0^{ol} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d + \begin{bmatrix} B_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{K} \mathcal{F}^d \right\} < 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Cette fois encore, la linéarité des conditions peut être rétablie en considérant le terme bilinéaire lui-même comme une matrice de variables de décision, via un changement de variables du type  $\mathcal{K} \mathcal{F}^d = \mathcal{T}$ . Toutefois, ce type de démarche nécessite des précautions supplémentaires lors de sa mise en œuvre sur des conditions étendues. Dans le cas contraire, la reconstruction de la matrice structurée  $\mathcal{K}$  à partir de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{F}^d$  n'est pas garantie. Deux raisons interdisent d'utiliser la solution apparemment simple consistant à faire correspondre  $\mathcal{K}$  à  $\mathcal{T}$  multipliée par l'inverse de  $\mathcal{F}^d$  : premièrement  $\mathcal{F}^d$  n'est pas inversible car rectangulaire et, deuxièmement, même pour des dimensions satisfaisantes, dans le cas général, la structure de  $\mathcal{T}(\mathcal{F}^d)^{-1}$  ne coïncide pas avec celle de  $\mathcal{K}$ . Comme le montre le lemme suivant, la structuration de  $\mathcal{F}^d$  proposée par le lemme 6 offre une réponse à ce problème.

**Lemme 7.** *Le modèle  $\Sigma$  donné par (1.6) est stabilisable asymptotiquement par la loi de commande (1.3) si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists W_1 \in \mathbb{S}_+^n, \exists Y_0 \in \mathbb{R}^{m_u \times n}, \exists Y_1 \in \mathbb{R}^{m_u \times n} : \begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} A_1^{ol} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0^{ol} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} B_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{Y} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (1.55)$$

avec

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} W_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_0 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation (1.21), rappelée ici :

$$K_k = Y_k W_k^{-1}$$

*Démonstration.* En ré-introduisant  $\mathcal{K} \mathcal{G}$  à la place de  $\mathcal{Y}$ , (1.55) devient équivalente à (1.54) avec  $\mathcal{F}^d$  donnée par (1.52), ce qui prouve la stabilité de  $\Sigma_{cl}$  en vertu du lemme 6.  $\square$

### 1.3.5 Conclusions

Les résultats principaux de la discussion menée dans cette section autour de la condition (1.43) sont maintenant résumés.

- **Théorème 9** : le modèle  $\Sigma_{cl}$  est stable si et seulement si (1.43) est vérifiée.
- **Lemme 3 et lemme 4** : la condition (1.46) est duale de (1.43). De plus, (1.46) peut être interprétée comme la condition de stabilité d'un modèle périodique à temps inversé noté  $\Sigma_{cl}^d$ .

TABLE 1.1 – Comparaisons des dimensions et du nombre de variables des conditions LMI dans le cas nominal

	Analyse			Synthèse	
	Cor. 2	Th. 9	Lem. 5	Th. 2	Lem. 7
Nb. variables	$P_0 :$ $n(n+1)/2$	$P_0, \mathcal{F} :$ $n(n+1)/2 + 6n^2$	$P_0, P_1 :$ $n(n+1)$	$W_0, W_1, Y_0, Y_1 :$ $n(n+1) + 2m_u n$	$W_0, W_1, Y_0, Y_1 :$ $n(n+1) + 2m_u n$
Nb. lignes	$n$	$3n$	$3n$	$2 \times 2n$	$3n$

- **Lemme 5 et lemme 6** : la condition de stabilité reste nécessaire et suffisante si  $\mathcal{F}$  est considérée sous la forme plus creuse donnée par (1.50). Un résultat analogue existe pour la condition duale (1.46).
- **Lemme 7** : à partir de la condition duale, il est possible d’obtenir des conditions de synthèse convexes nécessaires et suffisantes pour la loi de commande (1.3).

A l’instar des inéquations (1.12) et (1.15) considérées dans la première section, l’inégalité matricielle étendue (1.43) conduit donc à des conditions résolvant les problèmes d’analyse et de synthèse de stabilité nominale. Néanmoins, si ces nouvelles conditions, données par le théorème 9, le lemme 5 et le lemme 7, sont équivalentes aux anciennes, énoncées par le corollaire 2 et le théorème 2, elles diffèrent par le nombre de lignes et de variables des LMI correspondantes. Le tableau 1.1 effectue cette comparaison. Il montre que les nouvelles conditions d’analyse mettent en jeu des LMI plus grandes avec plus de variables, même pour le lemme 5 où  $\mathcal{F}$  est structurée. En revanche les conditions de synthèse nécessitent le même nombre de variables. Leur taille est plus délicate à comparer puisque le théorème 2 requiert deux inégalités de plus petite dimension que l’unique inéquation du théorème 7. Si les deux LMI du théorème 2 sont rassemblées en une seule, diagonale par bloc, cette dernière devient alors plus grande que l’inégalité du théorème 7. Néanmoins, du point de vue de la résolution numérique, à nombre de variables égal, il s’avère parfois moins coûteux de définir deux LMI de dimensions réduites, qu’une seule de grande taille, ce qui redonnerait l’avantage au théorème 2.

Toutefois, lorsque le modèle est soumis à des incertitudes, le résultat de cette comparaison est tout autre. La section 1.5 montre que les variables additionnelles des LMI étendues permettent de réduire significativement le conservatisme des conditions d’analyse et de synthèse robuste. Pour exploiter au mieux ces degrés de liberté, la discussion autour de l’inégalité (1.43) se poursuit dans la section suivante en proposant une interprétation des variables de relaxation.

## 1.4 Interprétation des variables de relaxation

Au-delà de l’outil mathématique qu’elles constituent, les variables de relaxation peuvent être l’objet d’interprétations variées selon le contexte dans lequel elles sont employées. Dans le cas de l’analyse robuste, il s’agit là d’une différence majeure par rapport aux outils purement mathématiques présentés dans la section 1.2.4.

Le problème dont traite ce chapitre n’échappe pas à cette règle puisque cette section montre que toute matrice  $\mathcal{F}^d$  satisfaisant la condition duale de stabilité (1.46) caractérise un modèle périodique dont la stabilité est prouvée par  $W_0$ . Si cette interprétation peut paraître anecdotique au premier abord, son corollaire est d’un grand intérêt : toute matrice  $\mathcal{F}^d$  conduisant à un modèle n’admettant pas  $W_0$  comme matrice de Lyapunov ne peut être solution de (1.46).

Parallèlement à  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ , on définit  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  comme suit :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = \{(W_0, \mathcal{F}^d) : W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n}\}$$

Munie de cette notation, la constatation précédente permet de garantir l’absence de solution à (1.46) dans un sous-ensemble  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ . La démarche doit être comprise comme un effort visant à caractériser le plus petit sous-ensemble de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  englobant toutes les solutions de (1.46). Ces résultats s’avéreront très utiles lors de l’établissement de conditions de synthèse robuste<sup>6</sup>.

### 1.4.1 Condition nécessaire pour que la LMI étendue soit satisfaite

Comme énoncé précédemment, toute matrice  $\mathcal{F}^d$  satisfaisant (1.46) peut être interprétée comme la caractérisation d’un modèle périodique stable. Afin de démontrer cette affirmation, le lemme suivant est introduit comme résultat intermédiaire.

6. C’est la raison pour laquelle, l’interprétation des variables de relaxation se concentre sur la condition duale, bien que le même raisonnement puisse être mené dans le cas primal.

**Lemme 8.** Si (1.46) est satisfaite alors  $\mathcal{F}^d$  admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{F}^d = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

où  $G_i$  et  $M_i$ , pour  $i = \{1, 2, 3\}$ , sont des matrices réelles de dimensions  $n \times n$  et  $G_1$  et  $G_3$  sont inversibles.

*Démonstration.* Soit la décomposition suivante de la matrice  $\mathcal{F}^d$ .

$$\mathcal{F}^d = \left[ \begin{array}{c|cc} F_{0,0}^d & F_{1,0}^d & F_{2,0}^d \\ \hline F_{1,0}^d & F_{1,1}^d & F_{1,2}^d \end{array} \right] = [ \mathcal{F}_0^d \mid \mathcal{F}_1^d ] \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_0^d \in \mathbb{R}^{2n \times n}, \mathcal{F}_1^d \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (1.58)$$

Dans un premier temps, on démontre que (1.46) implique les deux résultats intermédiaires suivants :

$$\det(F_{1,2}^d) \neq 0 \quad (1.59a)$$

$$\det(F_{1,0}^d - F_{2,0}^d(F_{1,2}^d)^{-1}F_{1,1}^d) \neq 0 \quad (1.59b)$$

Si (1.46) est vérifiée alors le bloc diagonal de dimension  $2n \times 2n$  en bas à droite de cette inégalité est défini négatif :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_1^d \right\} \prec 0$$

Etant donné que  $W_0 \succ 0$ , cette inégalité montre que

$$\text{He} \left\{ \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}_1^d \right\} \prec 0 \quad (1.60)$$

De cette inéquation, on déduit que :

- le noyau de  $\mathcal{F}_1^d$  est vide et donc que  $\det(\mathcal{F}_1^d) \neq 0$ ;
- $\text{He}\{-F_{1,2}^d\} \prec 0$ , ce qui implique (1.59a).

Par conséquent, d'après ([Hogben, 2007] - p.4.4 Facts 11), on peut alors affirmer que :

$$\det(\mathcal{F}_1^d) = \det(F_{1,2}^d) \det(F_{1,0}^d - F_{2,0}^d(F_{1,2}^d)^{-1}F_{1,1}^d) \neq 0$$

De cette inéquation et de (1.59a), on en déduit (1.59b).

Grâce à (1.59a) et (1.59b), il est possible de réécrire  $\mathcal{F}_1^d$  comme suit :

$$\mathcal{F}_1^d = \begin{bmatrix} F_{1,0}^d & F_{2,0}^d \\ F_{1,1}^d & F_{1,2}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_{1,0}^d + F_{2,0}^d(F_{1,2}^d)^{-1}F_{1,1}^d & -F_{2,0}^d \\ \mathbf{0} & -F_{1,2}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -(F_{1,2}^d)^{-1}F_{1,1}^d & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

tout en assurant que la matrice triangulaire supérieure par blocs issue de cette décomposition est inversible. Si (1.46) est vérifiée, la matrice  $\mathcal{F}_1^d$  admet alors toujours la formulation suivante

$$\mathcal{F}_1^d = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

avec  $G_1$  et  $G_3$  inversibles. En définissant  $M_2$  et  $M_3$  comme suit

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix}^{-1} \mathcal{F}_0^d$$

on obtient alors (1.57). □

L'inégalité (1.46) peut alors être réécrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.63)$$

S'il a été démontré par le lemme 3, que (1.46) permet de prouver la stabilité de  $\Sigma_{cl}$ , cette nouvelle formulation autorise une autre interprétation de cette inéquation. En effet, si  $\mathcal{F}$  est définie comme suit

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix}$$

alors (1.63) adopte une formulation très proche de (1.43), l'inégalité d'analyse primale. En s'appuyant sur un raisonnement très similaire à celui employé dans la preuve du théorème 9, le lemme suivant démontre que (1.63) prouve la stabilité d'un modèle 2-périodique construit à partir des matrices  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .



**Lemme 9.** *S'il existe  $W_0 \in \mathbb{S}_+^n$  et  $\mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n}$  telles que (1.46) est satisfaite alors  $W_0 \in \mathbb{S}_+^n$  est une matrice de Lyapunov prouvant la stabilité asymptotique du modèle suivant :*

$$\begin{cases} \xi_{2q+1} = & M_3 \xi_{2q} \\ \xi_{2q+2} = M_1 \xi_{2q+1} + M_2 \xi_{2q} \end{cases} \quad (1.64)$$

Les matrices  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont calculées à partir de  $\mathcal{F}^d$  selon (1.57).

*Démonstration.* Le lemme d'élimination montre que (1.63), équivalent à (1.46), implique

$$(\hat{\xi}_q)^T \begin{bmatrix} -W_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} \hat{\xi}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \forall \hat{\xi}_q \in \mathbb{R}^{3n}, \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \hat{\xi}_q = \mathbf{0} \quad (1.65)$$

En associant à  $\hat{\xi}_q$  la définition suivante

$$\hat{\xi}_q = \begin{bmatrix} \xi_{2q} \\ \xi_{2q+1} \\ \xi_{2q+2} \end{bmatrix}$$

il apparaît que la contrainte algébrique de (1.65) sur ce vecteur caractérise le modèle (1.64) alors que l'inégalité de (1.65) traduit la stricte décroissance de la fonction définie positive  $V'_q = \xi_{2q}^T W_0 \xi_{2q}$ . Ceci implique la convergence vers zéro des variables  $\xi_{2q}$  mais également des variables  $\xi_{2q+1} = M_3 \xi_{2q}$ . Le modèle (1.64) est donc asymptotiquement stable.  $\square$

**Remarque.** *Comme dans le cas du théorème 9, cette démonstration peut être menée de façon purement algébrique en remarquant que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ M_3 \\ M_1 M_3 + M_2 \end{bmatrix}^\perp = \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Ainsi, l'utilisation du lemme d'élimination montre que (1.46) implique

$$(M_1 M_3 + M_2)^T W_0 (M_1 M_3 + M_2) - W_0 \prec 0 \quad (1.66)$$

Cela prouve la stabilité asymptotique de (1.64), dont  $M_1 M_3 + M_2$  est la matrice de monodromie.  $\circ$

Pour que l'inégalité (1.46) soit satisfaite, il est donc nécessaire que  $W_0$  soit une matrice de Lyapunov prouvant la stabilité asymptotique du modèle (1.64), dont les matrices sont obtenues à partir de  $\mathcal{F}^d$  selon (1.57). Ce résultat a d'importantes conséquences lors de la construction des conditions de synthèse.

Il est notable que la dynamique de (1.64) ne présente pas les caractéristiques traditionnelles des modèles autonomes 2-périodiques, tels que  $\Sigma_{cl}$ . En effet,  $\xi_{2q+2}$  dépend de  $\xi_{2q}$ . De façon plus générale, ce modèle s'inscrit dans la classe des modèles périodiques, polynomiaux et à ordre variant qui feront l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre suivant.

## 1.4.2 Exploitation de la condition nécessaire de la LMI étendue

Le lemme 9 permet de discriminer les sous-ensembles de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  admissibles à la recherche de solutions de (1.46). Toutefois, la caractéristique requise pour ces sous-ensembles porte sur le couple  $\{W_0, \mathcal{F}^d\}$ . Comme le montrera la suite de ce chapitre, il serait préférable d'avoir des conditions ne s'intéressant qu'à  $\mathcal{F}^d$ . C'est la raison pour laquelle le lemme suivant introduit un sous-ensemble de celui décrit par le lemme 9 dans lequel toutes les matrices  $W_0 \succ 0$  sont admissibles au sens du lemme 9.

**Lemme 10.** *Pour toute matrice  $W_0 \in \mathbb{S}_n^+$ , il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que quels que soient les réels  $\varepsilon_{1,0}$ ,  $\varepsilon_{1,1}$  et  $\varepsilon_{0,0}$  satisfaisant  $0 \leq (\varepsilon_{1,0} \varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1})^2 < \varepsilon^*$ ,  $W_0$  est une matrice de Lyapunov prouvant la stabilité asymptotique du modèle suivant, cas particulier de (1.64) :*

$$\begin{cases} \xi_{2q+1} = & \varepsilon_{0,0} \mathbf{1} \xi_{2q} \\ \xi_{2q+2} = \varepsilon_{1,0} \mathbf{1} \xi_{2q+1} + \varepsilon_{1,1} \mathbf{1} \xi_{2q} \end{cases} \quad (1.67)$$

*Démonstration.* La matrice  $W_0$  est définie positive si et seulement s'il existe  $\varepsilon^*$  tel que quel que soit  $\varepsilon$  vérifiant  $0 \leq \varepsilon^2 < \varepsilon^*$ , l'inégalité suivante est satisfaite

$$-W_0 + \varepsilon^2 W_0 \prec 0$$



En réécrivant cette inéquation sous la forme suivante

$$-W_0 + (\varepsilon \mathbf{1})^T W_0 (\varepsilon \mathbf{1}) \prec 0 \quad (1.68)$$

elle peut être interprétée comme la condition de stabilité du modèle LTI dont la matrice d'état est  $\varepsilon \mathbf{1}$ , ou du modèle périodique pour lequel  $\varepsilon \mathbf{1}$  est la matrice de monodromie. En décomposant  $\varepsilon$  sous la forme  $\varepsilon_{1,0}\varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1}$ , l'identification de (1.68) avec (1.66) montre que (1.68) est une condition équivalente de stabilité de (1.64) avec  $M_1 = \varepsilon_{1,0}\mathbf{1}$ ,  $M_2 = \varepsilon_{1,1}\mathbf{1}$  et  $M_3 = \varepsilon_{0,0}\mathbf{1}$ . Un tel modèle est décrit par (1.67).  $\square$

On peut vérifier que ce résultat est conforme aux conclusions du lemme 6 assurant l'existence d'une solution à (1.46) dans un sous-ensemble de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ , si  $\Sigma_{cl}$  est stable. Ce sous-ensemble est caractérisé par une forme de  $\mathcal{F}^d$ , donnée par (1.52) et reformulée comme suit

$$\mathcal{F}^d = \begin{bmatrix} W_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

L'identification de cette formulation avec (1.57) montre qu'un tel choix de  $\mathcal{F}^d$  conduit au cas particulier du modèle (1.67), pour lequel  $\varepsilon_{1,0} = \varepsilon_{1,1} = \varepsilon_{0,0} = 0$ . D'après le lemme 10, quelle que soit  $W_0$ , cette matrice  $\mathcal{F}^d$  conduit donc à un sous-ensemble de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  admissibles au sens du lemme 9.

### 1.4.3 Résumé et interprétation ensembliste

Les conclusions principales de cette section sont maintenant résumées en adoptant une perspective ensembliste. Pour cette raison, on définit les quatre ensembles suivants associés aux lemmes et corollaires autour desquels s'articulent cette section :

- **Lemme 3** :  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}} = \{(W_0, \mathcal{F}^d) : W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n}\}$
- **Lemme 9** :  $\mathcal{W}_1 = \{(W_0, \mathcal{F}^d) : W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}^d = (1.57), (M_1 M_3 + M_2)^T W_0 (M_1 M_3 + M_2) - W_0 \prec 0\}$
- **Lemme 10** :  $\mathcal{W}_2(\varepsilon^*) = \{(W_0, \mathcal{F}^d) : W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}^d = (1.57), M_1 = \varepsilon_{1,0}\mathbf{1}, M_2 = \varepsilon_{1,1}\mathbf{1}, M_3 = \varepsilon_{0,0}\mathbf{1}, 0 \leq (\varepsilon_{1,0}\varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1})^2 < \varepsilon^*\}$
- **Lemme 6** :  $\mathcal{W}_3 = \{(W_0, \mathcal{F}^d) : W_0 \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}^d = (1.57), M_1 = M_2 = M_3 = \mathbf{0}, G_1 = W_1, G_2 = \mathbf{0}, G_3 = W_0\}$

Clairement, il existe  $\varepsilon^* > 0$  tel que la hiérarchie suivante est vérifiée :

$$\mathcal{W}_3 \subset \mathcal{W}_2(\varepsilon^*) \subset \mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_{\mathcal{F}}$$

En s'appuyant sur cette nomenclature, le résultat du lemme 9 peut s'énoncer ainsi : toutes les solutions à la condition duale de stabilité (1.46) sont incluses dans  $\mathcal{W}_1$ . Cet ensemble est cependant difficile à décrire en raison de l'interdépendance existant dans sa définition entre  $W_0$  et  $\mathcal{F}^d$ . C'est la raison pour laquelle  $\mathcal{W}_2(\varepsilon^*)$  a été proposé par le lemme 10. Il faut cependant garder à l'esprit qu'il existe d'autres ensembles de  $\mathcal{W}_1$ , potentiellement disjoints de  $\mathcal{W}_2(\varepsilon^*)$ , contenant des solutions de (1.46).

L'objectif ultime de cette démarche est de caractériser le plus petit sous-ensemble de  $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$  englobant toutes les solutions de (1.46). Si le lemme 9 contribue à cet effort en proposant  $\mathcal{W}_1$ , le but final est encore hors de portée.

## 1.5 Extension des conditions étendues au cas robuste

Pour le modèle nominal, la recherche d'une solution à (1.43) dans l'ensemble  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$  est un problème accessible aux outils d'optimisation convexe. Ce n'est malheureusement plus le cas lorsque le modèle est incertain puisque les matrices  $P$  et  $\mathcal{F}$  sont alors paramétrées par  $\theta$ . Classiquement, dans une telle situation le problème est relaxé en examinant des sous-ensembles de  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\theta)$  pour lesquels il est possible de donner une formulation LMI au problème. La première section a donné une illustration de ce procédé via le théorème 8 d'analyse quadratique : la recherche des certificats de stabilité robuste a été restreinte aux matrices de Lyapunov constantes alors que dans le cas général  $P$  peut dépendre de  $\theta$ .

Cette section montre que la version robuste de (1.43) peut également être relaxée afin d'obtenir une formulation LMI. De plus, il est démontré que le conservatisme induit par cette relaxation ne peut être plus important (et est souvent moindre) que dans le cas de l'analyse quadratique. Les variables additionnelles des LMI étendues sont à la source de ce résultat.

### 1.5.1 Réduction du conservatisme grâce aux variables de relaxation

Comme expliqué dans la première section, les conditions d'analyse établies pour le modèle nominal restent nécessaires et suffisantes si les variables de décision sont autorisées à dépendre des incertitudes. Ainsi, l'équivalent robuste de la condition de stabilité (1.43) est donné par le théorème suivant

**Théorème 10.** *Le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est stable robustement si et seulement si la condition suivante est satisfaite*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{3n \times 2n} : \begin{bmatrix} -P_0(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}(\theta) \begin{bmatrix} A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0, \forall \theta \quad (1.69)$$

Contrairement à la version robuste des deux conditions de stabilité (1.22) et (1.23), on remarque que (1.69) découple les matrices  $A_k(\theta)$  et  $P_0(\theta)$ . Cette constatation permet de relaxer le problème de la dépendance continue de (1.69) à l'égard de  $\theta$  de la façon suivante : on considère que  $\mathcal{F}$  est une matrice constante, c'est-à-dire indépendante de  $\theta$ , et que  $P_0(\theta)$  présente une dépendance polytopique en  $\theta$  :

$$P(\theta) = \sum_{i=1}^L \theta_i P^{[i]} \quad (1.70)$$

Ces deux relaxations transforment (1.69) en une inégalité linéaire en la variable  $\theta$  qui évolue dans un ensemble polytopique convexe. Comme pour le théorème 7, ceci autorise à évaluer (1.69) uniquement sur les sommets du polytope. Le théorème suivant met en œuvre ce raisonnement.

**Théorème 11.** *S'il existe  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$  telle que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists P_0^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P_0^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F} \begin{bmatrix} A_0^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^{[i]} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.71)$$

*alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est stable robustement.*

*Démonstration.* Similairement à la preuve du théorème 7, l'argument de convexité montre que si (1.71) est vérifiée pour tout  $i$  alors (1.69) est vérifiée avec  $\mathcal{F}(\theta)$  constant et  $P(\theta)$  donnée par (1.70). Ceci permet donc d'affirmer que  $\Sigma(\theta)$  est stable robustement.  $\square$

**Comparaison avec la condition de stabilité quadratique** En suivant la même démarche que dans la preuve du lemme 5, la condition de stabilité quadratique du théorème 7 peut être reformulée de façon équivalente sous la forme suivante :

$$\exists P_0 \in \mathbb{S}_+^n, \exists P_1 \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^{[i]} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0, \forall i \in \{1 \dots L\} \quad (1.72)$$

Clairement, il s'agit d'un cas particulier de (1.71).

Pour faciliter la discussion à venir, on introduit les ensembles suivants, en lien avec les théorèmes qui leur sont associés.

- **Théorème 10** :  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\theta) = \{(P_0(\theta), \mathcal{F}(\theta)) : P_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}\}$
- **Théorème 11** :  $\mathcal{P}_1(\theta) = \{(P_0(\theta), \mathcal{F}(\theta)) : P_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F} \text{ constante} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}\}$
- **Théorème 7** :  $\mathcal{P}_2(\theta) = \{(P_0(\theta), \mathcal{F}(\theta)) : P_0 \text{ constant} \in \mathbb{S}_+^n, \mathcal{F} = (1.50) \text{ avec } P_1 \in \mathbb{S}_+^n\}$

Le hiérarchie suivante peut être établie.

$$\mathcal{P}_2(\theta) \subset \mathcal{P}_1(\theta) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\theta)$$

La stabilité quadratique peut donc être interprétée comme la recherche d'une solution à (1.69) dans l'ensemble  $\mathcal{P}_2(\theta)$ . Le théorème 11 élargit ce domaine de recherche puisqu'il considère  $\mathcal{P}_1(\theta)$ . La condition obtenue n'est toujours que suffisante puisque l'existence d'une solution ne peut être garantie que dans  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\theta)$ . On notera que de  $\mathcal{P}_2(\theta)$  à  $\mathcal{P}_1(\theta)$ , l'élargissement de l'ensemble s'effectue dans deux directions : d'une part la matrice  $\mathcal{F}$  est enrichie et considérée indépendante de  $P_0$ , ce qui permet, d'autre part, de considérer  $P_0$  comme une fonction polytopique de  $\theta$ .

**Discussion sur l'usage des variables de relaxation** Dans le cas nominal, la condition d'analyse est nécessaire et suffisante. Dans une telle situation, l'enjeu consiste à réduire autant que possible l'ensemble de recherche, tout en garantissant qu'il contient toujours un certificat de stabilité si le modèle est stable. De cette façon, on réduit le nombre de variables de décision ce qui diminue l'effort de calcul.

Dans le cas robuste où la condition n'est que suffisante, la démarche est opposée puisqu'on élargit le domaine de recherche en augmentant le nombre de variables. On notera que cet accroissement n'est justifié que par l'existence de modèles n'admettant un certificat de stabilité que dans l'ensemble élargi. La suite de ce chapitre prouve que ces modèles existent. En ce sens, cette technique s'inscrit dans la lignée des différentes méthodes de relaxation pour les problèmes de robustesses (voir la section 1.2.4) proposant des solutions pour réduire le conservatisme, au prix d'un accroissement de l'effort de calcul.

**Le choix de la dépendance polytopique de  $P(\theta)$**  Le théorème 11 considère une matrice  $P(\theta)$  polytopique alors que la condition nécessaire et suffisante ne précise pas la dépendance de  $P(\theta)$  par rapport à  $\theta$ . A première vue, ce choix peut sembler conservatif dans la mesure où il pourrait exister une matrice  $P$  dont la dépendance vis-à-vis de  $\theta$  est plus complexe sans que l'algorithme ne soit capable de la trouver. Le lemme suivant montre cependant qu'il n'en est rien.

**Lemme 11.** *La condition (1.71), où  $P(\theta)$  est polytopique, est équivalente à (1.73), où la dépendance de  $P$  par rapport à  $\theta$  est quelconque.*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n} : \begin{bmatrix} -P(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F} \begin{bmatrix} A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0, \forall \theta \quad (1.73)$$

*Démonstration.* Si (1.73) est vérifiée quel que soit  $\theta$ , alors elle l'est également sur les sommets du polytope et donc (1.71) est satisfaite. A l'inverse, la preuve du théorème 11 établit que si le jeu de LMI (1.71) est vérifié alors (1.73) est satisfaite avec  $P(\theta)$  polytopique.  $\square$

Ce résultat démontre que parmi l'ensemble des matrices  $P(\theta)$  non-linéaires en  $\theta$  et satisfaisant (1.73), il existe toujours une matrice polytopique. La restriction de  $\mathcal{F}$  à une matrice constante est donc la seule source de conservatisme du théorème 11.

Il est également nécessaire de préciser que le théorème 11 ne cherche un certificat de stabilité que dans un sous-ensemble des matrices polytopiques  $P(\theta)$ . En effet, dans le cas général, il existe une matrice  $P(\theta)$  polytopique prouvant la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  si et seulement si (1.69) est vérifiée avec  $P(\theta)$  donnée par (1.70). Or, ceci n'implique pas (1.73) où  $\mathcal{F}$  est constante. Implicitement, relaxer le problème en imposant à  $\mathcal{F}$  de ne pas dépendre de  $\theta$ , exclut de la recherche de certificats de stabilité tout un ensemble de matrices  $P(\theta)$  polytopiques.

### 1.5.2 Conditions alternatives d'analyse robuste

Cette sous-section cherche à établir des méthodes alternatives conduisant à d'autres certificats de stabilité. L'absence de nécessité de la condition d'analyse (1.71) justifie cette effort.

#### Condition duale

L'équivalent robuste de la condition de stabilité duale (1.46) s'énonce comme suit :

$$\exists W_0(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n} : \begin{bmatrix} -W_0(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_1(\theta) & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0(\theta) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d(\theta) \right\} \prec 0, \forall \theta \in \Theta \quad (1.74)$$

Comme pour le théorème 11, il est possible de relaxer le problème pour obtenir la condition suivante, formulée comme un problème SDP.

**Lemme 12.** *S'il existe  $\mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n}$  tel que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists W_0^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W_0^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_1^{[i]} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0^{[i]} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d \right\} \prec 0 \quad (1.75)$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est robustement stable.

Dans le cas général, les conditions (1.71) et (1.75) ne sont pas équivalentes. L'existence d'un contre-exemple suffit à démontrer cette affirmation. Pour en donner une compréhension intuitive, on fait le raisonnement suivant. La combinaison convexe de (1.75) conduit à (1.74) avec  $\mathcal{F}^d$  constante. Grâce au lemme d'élimination, on montre que cette inégalité implique la suivante :

$$\Psi_0(\theta)W_0(\theta)\Psi_0^T(\theta) - W_0(\theta) \prec 0 \quad (1.76)$$

En s'appuyant sur un raisonnement similaire à celui de la preuve du lemme 3, on montre que cette inéquation est équivalente à :

$$\Psi_0^T(\theta)W_0^{-1}(\theta)\Psi_0(\theta) - W_0^{-1}(\theta) \prec 0$$

qui n'est autre que la version robuste de la condition primale de stabilité (1.22) avec  $P_0(\theta) = W_0^{-1}(\theta)$ . Il s'agit d'un résultat bien connu pour les modèles LTI. De fait, la recherche d'une matrice  $W_0(\theta)$  polytopique pour la condition duale (1.76) correspond à la recherche de  $P_0(\theta) = (\sum_i \theta_i W_0^{[i]})^{-1}$  qui est non linéaire en  $\theta$  pour la condition primale (1.22). Par conséquent, l'ensemble de recherche de la condition duale est donc inaccessible à la condition primale dès lors que  $P_0(\theta)$  est considérée polytopique, ce qui montre que (1.71) et (1.75) ne peuvent donc être équivalentes.

**Interprétation des variables de relaxation** Dans le contexte de l'analyse robuste, l'interprétation des variables de relaxation proposée par la section 1.4 est maintenant actualisée. Comme pour les développements précédents, l'étude se concentre ici sur la condition duale, bien que des conclusions similaires puissent être établies à partir de la condition primale.

Comme énoncé précédemment, (1.75) est équivalente à (1.74) avec  $\mathcal{F}^d$  constante. En ré-introduisant l'expression de  $\mathcal{F}^d$ , donnée par (1.57), dans cette condition puis en utilisant le lemme d'élimination, on montre que (1.75) implique l'inégalité suivante, version robuste de (1.66) :

$$(M_1M_3 + M_2)^T W_0(\theta)(M_1M_3 + M_2) - W_0(\theta) \prec 0 \quad (1.77)$$

Selon cette dernière,  $W_0(\theta)$  prouve la stabilité du modèle périodique sans incertitude (1.64) quel que soit  $\theta \in \Theta$ . Il s'agit d'une condition nécessaire pour que  $\mathcal{F}^d$  soit solution de (1.75). Dans ce contexte, le lemme 10 permet à nouveau de construire, sans la connaissance de  $W_0(\theta)$ , une sous-famille de modèles (1.64) satisfaisant cette exigence.

### Changement du point de départ de la période

La condition de stabilité du corollaire 3 est équivalente à l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique décroissante sur une période :  $V_{\tau+2} < V_\tau$ . D'après le corollaire 2, le choix de  $\tau$ , instant de référence de cette comparaison pouvant être interprété comme le point de départ de la période, donne lieu à des conditions LMI différentes mais équivalentes dans le cas nominal. C'est la raison pour laquelle, le théorème 9 s'est focalisé sur le cas où  $\tau = 0$ . En suivant le même raisonnement pour  $\tau = 1$ , on obtient une condition alternative dont la version robuste peut être relaxée afin d'obtenir le lemme suivant.

**Lemme 13.** *S'il existe  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{3n \times 2n}$  telle que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists P_1^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P_1^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_1^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}_1 \begin{bmatrix} A_1^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0^{[i]} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.78)$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , défini par (1.4), est robustement stable.

Cette fois encore, un exemple numérique suffit à montrer que (1.71) et (1.78) ne sont pas équivalentes dans le cas général. La discussion suivante se donne pour objectif d'offrir une compréhension intuitive de ce phénomène dont l'existence a déjà été relevé lors de l'utilisation de technique d'analyse alternative [Hosoe and Hagiwara, 2011]. On montre aisément que (1.71) et (1.78) impliquent respectivement (1.22) et la version robuste de (1.14) suivante :

$$(A_0(\theta)A_1(\theta))^T P_1(\theta) (A_0(\theta)A_1(\theta)) - P_1(\theta) \prec 0 \quad (1.79)$$

Dans le cas où  $A_0(\theta)$  est de rang plein en colonne,  $A_0^T(\theta) \cdot (1.79) \cdot A_0(\theta)$  est équivalente à (1.22) avec  $P_0(\theta) = A_0^T(\theta)P_1(\theta)A_0(\theta) \succ 0$  qui est une fonction polynomiale d'ordre 2 en  $\theta$ . Par conséquent, dans le cas général, (1.78) recherche des certificats de stabilité dans un ensemble inaccessible à (1.71) qui ne s'intéresse qu'aux matrices  $P_0(\theta)$  polytopiques.

De façon tout à fait remarquable, par application directe du corollaire 7 donné dans l'annexe A à la page 169, il est possible de rétablir l'équivalence entre (1.71) et (1.78) en imposant la structure suivante à  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_1$  :

**Lemme 14.** Si (1.71) est vérifiée avec la matrice  $\mathcal{F}$  suivante alors (1.78) est satisfaite pour la matrice  $\mathcal{F}_1$  définie comme suit

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_{2,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{1,0} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad F_{1,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F_{2,1} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (1.80)$$

La proposition inverse est également vraie.

Le sous-ensemble des matrices  $P_1(\theta)$  polytopiques exploré par le lemme 12 lorsque  $\mathcal{F}^d$  est donnée par (1.80) contient un certificat de stabilité si et seulement si un autre certificat de stabilité existe dans le sous-ensemble des matrices  $P_0(\theta)$  polytopiques analysé par le théorème 11 lorsque  $\mathcal{F}$  est donnée par (1.80). De plus, à la lumière de la remarque précédente, si  $A_0(\theta)$  (respectivement  $A_1(\theta)$ ) est de rang plein en colonne alors il est possible d'affirmer que  $A_0^T(\theta)P_1(\theta)A_0(\theta)$  (respectivement  $A_1^T(\theta)P_0(\theta)A_1(\theta)$ ) garantit également la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}$ .

Avant de refermer cette sous-section, on présente la condition d'analyse duale pour  $\tau = 1$ . La preuve de cette nouvelle variation de (1.71) est semblable aux précédentes.

**Lemme 15.** S'il existe  $\mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{2n \times 3n}$  tel que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :

$$\exists W_1^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W_1^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_1^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_0^{[i]} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_1^{[i]} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d \right\} \prec 0 \quad (1.81)$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , définit par (1.4), est robustement stable.

### 1.5.3 Hiérarchie de conditions d'analyse par multiplication de la période

Le corollaire 2 s'intéresse à la décroissance de la fonction Lyapunov (1.17) d'une période à l'autre. Il est possible de relaxer cette contrainte en n'exigeant la décroissance de cette fonction que toutes les deux périodes, c'est à dire  $V_{2(q+2)} = V_{4(q+1)} < V_{2q}$  pour  $\tau = 0$ . Une telle démarche conduit au théorème suivant dans le cas robuste :

**Lemme 16.** S'il existe  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{5n \times 4n}$  telle que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :

$$\exists P_{0,2}^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P_{0,2}^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{0,2}^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}_2 \begin{bmatrix} A_0^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0^{[i]} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^{[i]} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.82)$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , définit par (1.4), est asymptotiquement et robustement stable.

*Démonstration.* A l'issue de la combinaison convexe de (1.82), on procède comme dans la preuve du théorème 9 où le lemme d'élimination permet de transformer l'inégalité en une contrainte algébrique sur un vecteur de signaux, lui-même soumis à une inégalité quadratique. En nommant ce vecteur comme suit :

$$[x_{4q}^T \quad x_{4q+1}^T \quad x_{4q+2}^T \quad x_{4q+3}^T \quad x_{4q+4}^T]^T \quad (1.83)$$

l'égalité caractérise la dynamique de  $\Sigma_{cl}$  sur deux périodes tandis que l'inéquation correspond à  $-x_{4q}^T P_{0,2}(\theta)x_{4q} + x_{4q+4}^T P_{0,2}(\theta)x_{4q+4} < 0$ , ce qui traduit la décroissance de la fonction de Lyapunov quadratique  $x_{4q}^T P_{0,2}(\theta)x_{4q}$ . Finalement, on montre aisément que la convergence vers zéro des  $x_{4q}$  implique celle de tous les autres états intermédiaires, à savoir  $x_{4q+k}$  pour  $k = \{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Si cette nouvelle approche n'apporte rien dans le cas nominal, elle permet d'ajouter des degrés de liberté dans la recherche du certificat de stabilité robuste. On peut en effet montrer que la condition (1.82) ne peut qu'être moins conservatrice que (1.71) en prouvant que, pour chaque valeur de  $i$ , si (1.71) est satisfaite alors (1.82) est vérifiée. Ce résultat est obtenu en répétant deux fois (1.71) pour obtenir une LMI diagonale par blocs. Multipliée par  $R_2^T$  à gauche et  $R_2$  à droite, cette dernière implique (1.82) avec  $\mathcal{F}_2 = R_2^T \text{diag}\{\mathcal{F}, \mathcal{F}\}$ .

$$R_2^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

En utilisant les techniques présentées dans la sous-section précédente, cette approche peut être déclinée dans le cas dual et pour différents points de départ, conduisant ainsi à autant de nouvelles conditions suffisantes qui ne sont pas équivalentes entre elles dans le cas général.

L'augmentation du nombre de variables, due à la différence de taille entre  $\mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}$ , est évidemment la contrepartie d'une telle approche. Le lemme suivant propose une explication intuitive de la raison pour laquelle cette augmentation peut contribuer à réduire le conservatisme de la condition d'analyse robuste.

**Lemme 17.** *Si (1.82) est satisfaite alors il existe une matrice  $\mathcal{F}_4 \in \mathbb{R}^{5n \times n}$  telle que (1.69) est vérifiée pour les matrices  $P_0(\theta)$  et  $\mathcal{F}(\theta)$  suivantes polynomiales en  $\theta$  :*

$$P_0(\theta) = P_{0,2}(\theta) + (A_1(\theta)A_0(\theta))^T P_{0,2}(\theta) (A_1(\theta)A_0(\theta)) \quad (1.84)$$

$$\mathcal{F}(\theta) = Q^T(\theta) [\mathcal{F}_3 \ \mathcal{F}_4] \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -A_1(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_1(\theta) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ où } \mathcal{F}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3n} & \mathbf{0}_{3n \times 2n} \\ \mathbf{0}_{n \times 5n} \\ \mathbf{0}_{2n \times 3n} & \mathbf{1}_{2n} \end{bmatrix} \mathcal{F}_2, \quad Q(\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ A_1(\theta)A_0(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0(\theta) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1(\theta)A_0(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

*Démonstration.* La matrice  $\mathcal{F}_2$  de (1.82) peut toujours être réécrite sous la forme  $R_2^T \mathcal{F}_3$ . Un exemple simple est proposé par (1.85). Le résultat de la combinaison convexe de (1.82) peut alors être factorisé sous la forme suivante :

$$R_2^T \left( \begin{bmatrix} -P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{0,2}(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}_3 \begin{bmatrix} A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \right) R_2 \prec 0$$

En remarquant que

$$R_2 = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ -\mathbf{1} \ \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}]^{T \perp T}$$

on peut affirmer qu'il existe une matrice  $\mathcal{F}_4$  telle que

$$\begin{bmatrix} -P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{0,2}(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{0,2}(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ [\mathcal{F}_3 \ \mathcal{F}_4] \begin{bmatrix} A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0(\theta) & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1(\theta) & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \prec 0$$

La pré/post-multiplication de cette inéquation par  $Q(\theta)$ , de rang plein en colonne et définie par (1.85), implique (1.69) pour les matrices  $P_0(\theta)$  et  $\mathcal{F}(\theta)$  telles que celles définies par (1.84) et (1.85).  $\square$

Soit  $\mathcal{P}_3(\theta)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(\theta)$  pour lequel les matrices  $P_0(\theta)$  et  $\mathcal{F}(\theta)$  sont polynomiales en  $\theta$  de degré 5 et 3 respectivement. La matrice  $P_{0,2}(\theta)$  étant polytopique en  $\theta$ , on peut affirmer grâce au lemme 17 que le lemme 16 recherche une solution à la condition de stabilité robuste (1.69) dans l'ensemble  $\mathcal{P}_3(\theta)$ , inaccessible au théorème 11. Il est cependant important de préciser que cet ensemble n'est pas exploré dans son intégralité puisque les équations (1.84) et (1.85) montrent clairement que les expressions de  $P_0(\theta)$  et  $\mathcal{F}(\theta)$  ne sont pas quelconques. En revanche, on peut garantir que si le théorème 11 obtient un certificat de stabilité dans  $\mathcal{P}_1(\theta)$  alors un autre certificat existe dans  $\mathcal{P}_3(\theta)$  et la résolution des conditions LMI du lemme 16 le trouvera. L'inverse n'est pas vrai.

En généralisant cette idée, il est possible de considérer la décroissance de la fonction de Lyapunov sur un nombre plus grand de périodes. Une telle approche permet de construire une hiérarchie de conditions suffisantes de stabilité au conservatisme décroissant. On notera toutefois, qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de preuves formelles que cette suite converge vers une condition nécessaire (et toujours suffisante).



### 1.5.4 Synthèse robuste

Comme dans le cas nominal, cette sous-section aborde le problème de synthèse à partir des conditions suffisantes d'analyse. Par nature, cette démarche ne peut donc donner lieu qu'à des conditions non-nécessaire. Les techniques de multiplication de la période et de changement du point de départ, employées pour obtenir des conditions d'analyse alternatives, peuvent être utilisées ici de la même façon<sup>7</sup>. Toutefois, pour éviter la redondance, la discussion de cette sous-section est circonscrite au cas où  $\tau = 0$  et au modèle 2-périodique originel.

#### Correcteurs classiques

Comme expliqué précédemment, il est possible d'obtenir des conditions de synthèse en structurant la matrice  $\mathcal{F}^d$  dans la condition d'analyse duale. Dans le cas nominal, cette manipulation peut être effectuée sans perdre la nécessité, ce qui donne lieu à une condition de synthèse nécessaire et suffisante. En revanche, toute structuration de  $\mathcal{F}^d$  dans les conditions d'analyse robuste induit un conservatisme additionnel, que cette section s'efforcera de réduire.

L'expression des matrices du modèle en boucle ouverte est ré-introduite dans la condition d'analyse duale (1.75) et  $\mathcal{F}^d$  est remplacée par son expression donnée par (1.57) :

$$\begin{bmatrix} -W_0^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} A_1^{ol[i]} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0^{ol[i]} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{u1}^{[i]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0}^{[i]} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \mathcal{K} \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}} \right\} \prec 0$$

En l'état, les variables de décision sont  $W_0^{[i]}$ , la matrice structurée  $\mathcal{K}$  donnée par (1.54) et  $\mathcal{F}^d = \mathcal{G}\mathcal{M}$  ce qui rend cette condition non convexe. On propose de soustraire  $\mathcal{M}$  à la liste des variables de décision (en imposant arbitrairement leur valeur) et d'effectuer le changement de variable  $\mathcal{Y} = \mathcal{K}\mathcal{G}$ , comme dans le lemme 7, afin de rétablir la convexité. Il reste à assurer que les gains du contrôleur puissent être reconstruits à partir de  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{G}$ . Ceci est garanti en choisissant  $\mathcal{G}$  diagonale par bloc ( $G_2 = \mathbf{0}$ ) et en se souvenant que  $\mathcal{G}$  est une matrice inversible, si bien que  $\mathcal{K}$  peut toujours être obtenu via, le calcul  $\mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1}$  si  $\mathcal{Y}$  est également diagonale par blocs.

**Théorème 12.** Soit un jeu de matrices  $M_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pour  $j = \{1, 2, 3\}$ . S'il existe  $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_j \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$  pour  $j = \{0, 1\}$  telles que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :

$$\exists W_0^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W_0^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} A_1^{ol[i]} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & A_0^{ol[i]} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} B_{u1}^{[i]} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0}^{[i]} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{Y} \right) \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (1.86)$$

avec

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_0 \end{bmatrix} \quad (1.87)$$

alors le modèle incertain  $\Sigma(\theta)$ , défini par (1.2), est stabilisable robustement par la loi de commande (1.3). Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation (1.21), rappelée ici :

$$K_k = Y_k W_k^{-1}$$

*Démonstration.* En réécrivant  $\mathcal{Y} = \mathcal{K}\mathcal{G}$ , (1.86) devient équivalente à (1.75) avec  $\mathcal{F}^d = \mathcal{G}\mathcal{M}$ , ce qui prouve la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  selon le lemme 12.  $\square$

Ce théorème présente la particularité d'offrir des degrés de liberté dans le choix des matrices  $M_j$ . L'interprétation des variables de relaxation prend ici tout son sens : d'après le lemme 9, il est nécessaire que le modèle (1.64), construit à partir des  $M_j$ , admette  $W_0(\theta)$  comme matrice de Lyapunov quel que soit  $\theta \in \Theta$ . Or, l'expression de cette matrice polytopique est le résultat de la résolution LMI et n'est donc pas connu à l'avance. C'est la raison pour laquelle, le lemme 10 propose une famille de choix  $M_j$  admissibles quelle que soit  $W_0(\theta)$ , en s'appuyant sur le cas particulier des modèles dont les valeurs propres de la matrices de monodromie sont toutes nulles.

<sup>7</sup> L'usage de la dualité n'est cependant pas approprié puisque l'analyse primale ne permet pas d'obtenir de conditions de synthèse.

Comme lors de la comparaison des conditions d'analyse robuste, il est possible de montrer que la condition de synthèse quadratique, proposée par le lemme 7, correspond au cas particulier de (1.86) pour lequel  $M_1 = M_2 = M_3 = \mathbf{0}$ ,  $G_1 = W_1 \succ 0$  et  $W_0^{[i]} = W_0$ . Par conséquent, le théorème 12 ne peut que réduire le conservatisme du lemme 7.

### Correcteurs à mémoire

Même pour le choix le plus approprié de matrices  $M_j$ , imposer  $G_2 = \mathbf{0}$  est source de conservatisme. Si la contrainte sur  $G_2$  est relaxée, la difficulté est d'assurer la concordance entre les structures de  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1}$  alors que  $\mathcal{G}^{-1}$  est triangulaire supérieure.

C'est ce constat qui a motivé l'introduction de l'idée des correcteurs à mémoire et à ordre variant, proposée pour la première fois dans [Ebihara et al., 2009a] puis développée dans [Ebihara et al., 2011]. L'idée principale peut s'énoncer ainsi : si  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{G}$  sont choisies triangulaires supérieures, alors  $\mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1}$  hérite de cette structure que  $\mathcal{K}$  peut adopter si sa formulation est enrichie. En reconstruisant a posteriori la loi de commande conduisant à une telle forme de  $\mathcal{K}$ , on obtient la loi périodique à mémoire définie par (1.89). Le théorème suivant adapte le théorème 12 selon cette discussion.

**Théorème 13.** *Si la condition (1.86) du théorème 12 est faisable avec  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{Y}$  définis de la façon suivante*

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G_{1,0} & G_{1,1} \\ \mathbf{0} & G_{0,0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} Y_{1,0} & Y_{1,1} \\ \mathbf{0} & Y_{0,0} \end{bmatrix} \quad (1.88)$$

où  $G_{k,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_{k,j} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$  pour  $(k = \{0, 1\}, j = \{0, k\})$  alors le modèle incertain  $\Sigma(\theta)$ , définie par (1.2), est stabilisable robustement par la loi de commande à mémoire suivante :

$$\begin{cases} u_{2q} & = & K_{0,0}x_{2q} \\ u_{2q+1} & = & K_{1,0}x_{2q+1} + K_{1,1}x_{2q} \end{cases} \quad (1.89)$$

Les gains  $K_{k,j}$  du correcteur sont obtenus via le calcul suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{1,0} & K_{1,1} \\ \mathbf{0} & K_{0,0} \end{bmatrix} = \mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1} \quad (1.90)$$

*Démonstration.* En ré-introduisant  $\mathcal{K}\mathcal{G}$  à la place de  $\mathcal{Y}$ , la somme convexe de (1.86) conduit à l'inégalité suivante avec  $\mathcal{F}^d = \mathcal{G}\mathcal{M}$  :

$$\begin{bmatrix} -W_0(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W_0(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_{1,0}(\theta) & A_{1,1}(\theta) \\ -\mathbf{1} & A_{0,0}(\theta) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \mathcal{F}^d \right\} \prec 0$$

où  $A_{1,0}(\theta) = A_1(\theta) + B_{u1}(\theta)K_{1,0}$ ,  $A_{1,1}(\theta) = B_{u1}(\theta)K_{1,1}$  et  $A_{0,0}(\theta) = A_0(\theta) + B_{u0}(\theta)K_{0,0}$ . En remarquant que

$$\begin{bmatrix} A_{1,0}(\theta) & A_{1,1}(\theta) \\ -\mathbf{1} & A_{0,0}(\theta) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}^\perp = [\mathbf{1} \quad A_{1,0}(\theta) \quad A_{1,0}(\theta)A_{0,0}(\theta) + A_{1,1}(\theta)]$$

l'utilisation du lemme d'élimination conduit à l'inégalité suivante

$$(A_{1,0}(\theta)A_{0,0}(\theta) + A_{1,1}(\theta))W_0(\theta)(A_{1,0}(\theta)A_{0,0}(\theta) + A_{1,1}(\theta))^T - W_0(\theta) \prec 0$$

qui prouve la stabilité robuste au sens de Schur de la matrice  $A_{1,0}(\theta)A_{0,0}(\theta) + A_{1,1}(\theta)$ . Il s'agit précisément de la matrice de monodromie de la boucle fermée  $\Sigma(\theta)$  avec (1.89), ce qui prouve la stabilité robuste de ce système. En effet, les équations du modèle en boucle fermée s'expriment comme (1.64) avec  $M_1 = A_{1,0}(\theta)$ ,  $M_2 = A_{1,1}(\theta)$  et  $M_3 = A_{0,0}(\theta)$  et il été démontré auparavant que la matrice de monodromie de ce modèle correspond à  $M_1M_3 + M_2$ .  $\square$

On notera que la preuve de ce théorème indique que le modèle périodique, polynomial et à ordre variant (1.64) rencontré auparavant peut être interprété comme la boucle fermée d'un modèle périodique classique commandé par une loi de commande à mémoire de type (1.89).



Cette stratégie d'enrichissement de  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{G}$  ne peut toutefois pas être poursuivie. En effet, l'étape suivante consisterait à considérer ces matrices pleines conduisant alors à une matrice  $\mathcal{K}$  du même type. Dans ce cas, cette structure correspond alors à une loi de commande non causale :

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} K_{1,0} & K_{1,1} \\ K_{0,-1} & K_{0,0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_{2q} &= K_{0,-1}x_{2q+1} + K_{0,0}x_{2q} \\ u_{2q+1} &= K_{1,0}x_{2q+1} + K_{1,1}x_{2q} \end{cases}$$

### Éléments de comparaison entre les deux structures de commande

Afin de clarifier la discussion, on introduit les notations suivantes :

- $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{S}_m$ ) : condition de synthèse du théorème 12 (théorème 13) conduisant à un correcteur sans mémoire (avec mémoire),
- $\mathfrak{A}^d$  ( $\mathfrak{A}_m^d$ ) : condition d'analyse duale du lemme 12, appliquée à la boucle fermée utilisant le correcteur issu de  $\mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{S}_m$ ).

Pour un modèle incertain  $\Sigma(\theta)$  et pour un même choix de  $M_j$ , il apparaît de façon évidente que  $\mathfrak{S}$  n'est jamais plus conservatrice que  $\mathfrak{S}_m$  puisque les matrices  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{Y}$  sont triangulaires supérieures dans le premier cas et diagonales par blocs dans le second. Toutefois, il est important que préciser que cette hiérarchie peut ne pas être préservée lors de l'analyse de stabilité des boucles fermées résultantes. Dans le cas général, il est impossible de définir *a priori* de relations d'implication entre  $\mathfrak{A}^d$  et  $\mathfrak{A}_m^d$ . Les exemples numériques présentés dans [Tréguët et al., 2012b] atteste de l'existence de ce phénomène.

Le lemme suivant compare maintenant le conservatisme des conditions de synthèse avec celui des conditions d'analyse de la boucle fermée résultante.

**Lemme 18.** *Pour un modèle  $\Sigma(\theta)$  décrit par (1.2), et en faisant référence aux notations précédemment définies :*

1. **Correcteur à mémoire :** *il existe toujours un triplet  $M_j$  tel que  $\mathfrak{S}_m$  est équivalente à  $\mathfrak{A}_m^d$ ,*
2. **Correcteur sans mémoire :** *il existe des systèmes  $\Sigma(\theta)$  pour lesquels, quel que soit le triplet  $M_j$ ,  $\mathfrak{S}$  est toujours plus conservatrice que  $\mathfrak{A}^d$ .*

*Démonstration.* Selon le lemme 8, si la matrice  $\mathcal{F}^d$  vérifie (1.75) alors elle peut toujours être reformulée selon (1.57). Dans ce cas,  $\mathfrak{S}_m$  et  $\mathfrak{A}_m^d$  sont équivalentes, ce qui prouve la première affirmation.

La condition  $\mathfrak{S}$  correspond à  $\mathfrak{A}$  où  $\mathcal{F}^d$  s'écrit sous la forme (1.57) avec  $G_2 = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^d = \begin{bmatrix} F_{0,0}^d & F_{1,0}^d & F_{2,0}^d \\ F_{1,0}^d & F_{1,1}^d & F_{1,2}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ M_2 & M_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Cette relation implique  $F_{0,2}^d = \mathbf{0}$ . Par conséquent, pour démontrer la seconde proposition, il suffit de construire un modèle numérique  $\Sigma(\theta)$  pour lequel les matrices  $A_k$  sont telles que  $\mathfrak{A}^d$

1. possède au moins une solution pour laquelle  $F_{2,0}^d \neq \mathbf{0}$ ;
2. n'en admet aucune lorsque  $F_{2,0}^d = \mathbf{0}$ .

L'existence d'un tel cas de figure est démontré dans la section suivante. Ceci prouve la seconde affirmation.  $\square$

En d'autres termes, pour les correcteurs à mémoire, il existe toujours un jeu de matrices  $M_j$  tel que les conditions de synthèse et d'analyse duales présentent le *même* conservatisme. En revanche, lorsque le contrôleur est sans mémoire, il existe des exemples pour lesquels le conservatisme de la condition de synthèse est toujours plus important que celui de la condition d'analyse duale.

### 1.5.5 Résultats numériques

Les discussions de ce chapitre sont maintenant illustrées grâce à un exemple numérique. Il s'agit de mettre en lumière les relations d'implication existant entre les différentes conditions d'analyse et de synthèse robustes.

TABLE 1.2 – Influence de la dualité et de  $\tau$  sur les conditions d'analyse robuste

	Stab. quad.	Conditions primales		Conditions duales	
	Th. 7	Th. 11 ( $\tau = 0$ )	Lem. 13 ( $\tau = 1$ )	Lem. 12 ( $\tau = 0$ )	Lem. 15 ( $\tau = 1$ )
Marge de stab. ( $\bar{\alpha}$ )	1.56	3.39	3.17	2.99	3.40
Nb. variables	12	72	72	72	72
Nb. lignes	18	27	27	27	27

On considère le modèle 2-périodique polytopique décrit par (1.2) avec

$$\begin{aligned}
A_0^{[1]} &= \alpha \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & -0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} & A_0^{[2]} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} & A_0^{[3]} &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ -0.4 & -0.3 & 0.3 \\ -0.4 & -0.5 & -0.1 \end{bmatrix} \\
A_1^{[1]} &= \begin{bmatrix} -0.4 & -0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ -0.5 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} & A_1^{[2]} &= \alpha \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix} & A_1^{[3]} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & -0.5 & 0.3 \\ -0.2 & 0.2 & -0.5 \end{bmatrix} \\
B_0^{[1]} &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} & B_0^{[2]} &= \begin{bmatrix} -0.6 & -0.4 \\ 0.9 & 0.7 \\ -0.4 & 0.4 \end{bmatrix} & B_0^{[3]} &= \begin{bmatrix} -0.7 & -0.6 \\ -0.9 & -0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix} \\
B_1^{[1]} &= \begin{bmatrix} -0.4 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \\ -0.8 & -0.1 \end{bmatrix} & B_1^{[2]} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.5 \end{bmatrix} & B_1^{[3]} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.91}$$

On paramètre le domaine d'incertitude par la variable scalaire  $\alpha \geq 0$  dont dépendent les matrices  $A_0^{[1]}$  et  $A_1^{[2]}$ .

**Analyse en boucle ouverte** On s'intéresse dans un premier temps à l'analyse de stabilité en boucle ouverte. L'objectif est d'évaluer la marge de stabilité du système, c'est-à-dire la valeur maximale de  $\alpha$ , notée  $\bar{\alpha}$ , en dessous de laquelle la stabilité robuste est garantie. On notera que  $\alpha$  multiplie les variables de décisions des inégalités d'analyse et, par conséquent, détruit la convexité du problème. Dans ce cas très particulier, il est toutefois possible de contourner cette difficulté grâce à un algorithme de dichotomie évaluant à chaque itération la réalisabilité des conditions d'analyse pour une valeur figée de  $\alpha$ . Dans ce contexte, l'usage de conditions suffisantes (et non nécessaires) conduit à une borne inférieure de  $\bar{\alpha}$ . Cette borne donne la mesure du conservatisme des conditions d'analyse puisqu'elle renseigne sur leur capacité à obtenir des certificats de stabilité. Plus cette borne est élevée moins la condition est conservative.

Dans un premier temps, la stabilité est évaluée grâce à la condition d'analyse centrale de ce chapitre, donnée par le théorème 11. On utilise également ses variantes, obtenues par changement de la valeur de  $\tau$  et exploitation de la dualité des systèmes. Le calcul de  $\bar{\alpha}$  grâce à la condition d'analyse quadratique sert de référence. Les résultats de ces comparaisons sont donnés par le tableau 1.2 où l'effort de calcul requis pour une évaluation des conditions d'analyse est donné en termes de nombres de lignes et de variables des LMI correspondantes. On peut faire les observations suivantes :

- la borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  donnée par le théorème 11 est plus élevée que celle obtenue grâce à la condition d'analyse quadratique du théorème 7. On notera toutefois que cette amélioration se fait au prix d'une augmentation de l'effort de calcul. Cette observation confirme que les variables additionnelles introduites par le théorème 11 peuvent contribuer à réduire le conservatisme des conditions d'analyse.
- on observe également que les lemmes 12, 13 et 15 conduisent à des bornes différentes de  $\bar{\alpha}$ . Ceci démontre que l'exploitation de la dualité des systèmes et de la valeur de  $\tau$  donne lieu à des conditions aux conservatismes différents (et donc non-équivalentes) sans pour autant augmenter l'effort de résolution numérique des LMIs. Ces conditions alternatives permettent donc de raffiner le calcul de  $\bar{\alpha}$  en ne retenant que la valeur maximale de ces bornes.

Dans un second temps, on met en œuvre la hiérarchie proposée par le lemme 16 et reposant sur la multiplication de la période du modèle. Les résultats sont donnés par le tableau 1.3. En considérant le modèle 2-périodique originel comme un modèle de période  $N = 4$ , on obtient une borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  plus élevée que les tests du tableau 1.2, au prix d'une augmentation du coût de calcul. Ceci prouve que cette approche peut contribuer à diminuer le conservatisme. Si  $N = 6$ , aucune amélioration n'est observée. Ceci suggère que la vraie valeur de  $\bar{\alpha}$

TABLE 1.3 – Hiérarchie de conditions d'analyse robuste basée sur le lemme 16

	Lem. 16 ( $N = 4$ )	( $N = 6$ )
Marge de stab. ( $\bar{\alpha}$ )	3.55	3.55
Nb. variables	198	396
Nb. lignes	45	63

TABLE 1.4 – Résultats d'analyse obtenus grâce au théorème 5 pour différentes relaxations

Degré de $P_0(\theta)$	1				2				5			
$k$	1	2	5	10	1	2	5	10	1	2	5	10
Marge de stab. ( $\bar{\alpha}$ )	2.92	3.04	3.14	3.28	3.13	3.22	3.36	3.48	3.52	3.54	3.55	3.55
Nb. variables	19	19	19	19	37	37	37	37	127	127	127	127
Nb. lignes	84	108	198	408	108	135	234	459	198	234	360	567

est très proche de 3.55. Cette hypothèse est confirmée par des tests numériques montrant qu'il existe des cas d'instabilité pour  $\alpha = 3.57$ .

Ces résultats sont comparés à ceux obtenus grâce au théorème 5. La tableau 1.4 fournit les résultats d'analyse pour différentes relaxations, consistant dans ce contexte à fixer le degré de  $P_0(\theta)$  ainsi que la valeur de  $k$ . On vérifie que la progression dans la hiérarchie augmente la borne  $\bar{\alpha}$  mais accroît également l'effort de calcul. Cette fois encore, ces résultats semblent indiquer que la valeur exacte de la marge de stabilité est égale à 3.55.

**Remarque.** On rappelle que le théorème 5 s'intéresse à la positivité de  $G(x, \theta)$ , homogène en  $\theta$ . Pour satisfaire à cette exigence, cette matrice est définie de la façon suivante :

$$G(x, \theta) = \left( \sum_{i=1}^3 \theta_i \right)^4 P_0(\theta) - \Psi^T(\theta) P_0(\theta) \Psi(\theta) \quad (1.92)$$

On vérifiera que  $G(x, \theta)$  est homogène et que, sur le simplexe,  $G(x, \theta) = P_0(\theta) - \Psi^T(\theta) P_0(\theta) \Psi(\theta)$ . D'après la condition (1.22), la positivité de  $G(x, \theta)$  prouve la stabilité robuste.

On précise qu'il est possible d'obtenir une matrice  $G(x, \theta)$  homogène même si  $P_0(\theta)$  ne l'est pas [Chesi et al., 2009]. La démarche est analogue à celle conduisant à (1.92) mais nécessite une expression de (1.92) plus compliquée.  $\circ$

La figure 1.3 vient corroborer ses résultats en affichant les valeurs de 1000 matrices de monodromies choisies aléatoirement dans le polytope du système pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Ces graphiques montrent que certaines valeurs propres sortent du cercle unité pour  $\alpha = 3.7$  alors qu'elles semblent y être toutes contenues lorsque  $\alpha \leq 3.5$ .

La lecture conjointe des tableaux 1.3 et 1.4 permet de comparer l'effort de calcul requis par les deux méthodes. Ainsi, la marge de stabilité  $\bar{\alpha} = 3.55$  est obtenue par le lemme 16 pour  $N = 4$  et par le théorème 5 pour  $k = 5$  et un degré de  $P_0(\theta)$  égal à 5. On constate que, pour cet exemple numérique, les efforts de calcul dans les deux cas sont comparables.

On termine cette sous-section en fournissant l'exemple numérique validant le lemme 18. On rappelle que l'usage de la condition d'analyse duale du lemme 12 conduit à une borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  égale à 2.99. Or, lorsque la matrice  $\mathcal{F}^d$  est structurée de sorte que le bloc  $F_{0,2}^d$  est nul, cette même borne prend la valeur 2.69. Par conséquent, pour tous les modèles où  $2.69 < \alpha \leq 2.99$ , la condition d'analyse duale produit un certificat de stabilité robuste uniquement lorsque  $F_{0,2}^d \neq \mathbf{0}$ .

**Synthèse de correcteurs stabilisants** On cherche maintenant à évaluer le conservatisme des conditions de synthèse. Il s'agit de maximiser la marge de stabilité garantie lors de l'étape de conception de la loi de commande. Pour ce faire, on utilise à nouveau un algorithme de dichotomie conduisant à une borne inférieure de  $\bar{\alpha}$ .

Cette fois encore, on utilise la borne obtenue grâce à la condition de synthèse quadratique comme valeur de référence. Cette dernière est comparée aux résultats obtenus à l'aide des théorèmes 12 et 13, conduisant à des correcteurs respectivement sans et avec mémoire. On utilise également une version modifiée du théorème 13 pour laquelle la matrice  $\mathcal{G}$  est diagonale comme dans (1.87). Pour chacune de ces conditions, on choisit dans un premier temps  $M_1 = M_2 = M_3 = \mathbf{0}$ . La marge de stabilité de la boucle fermée résultante est approximée grâce aux conditions d'analyse primale et duale du théorème 11 et du lemme 12. Ces résultats sont rassemblés dans

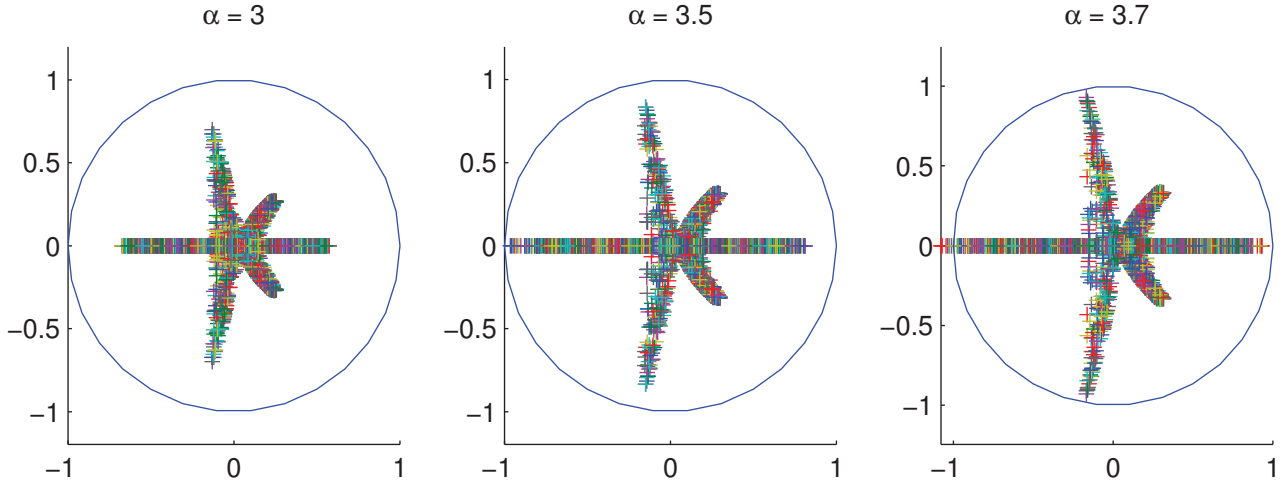
FIGURE 1.3 – Positions des valeurs propres de  $\Psi(\theta)$  dans  $\mathbb{C}$  en fonctions de  $\alpha$ 

TABLE 1.5 – Comparaison des conditions de synthèse avec et sans mémoire et analyse en boucle-fermée

	Stab. quad.	Sans mém.	Avec mémoire	
	Th. 8	Th. 12 ( $\mathcal{G}$ diag.)	Th. 13 ( $\mathcal{G}$ diag.)	Th. 13 ( $\mathcal{G}$ tri.)
Marge en synthèse ( $\bar{\alpha}$ )	2.57	3.75	3.90	4.01
Nb. variables	24	48	54	63
Nb. lignes	36	27	27	27
Marge en analyse : Th. 11 ( $\bar{\alpha}$ )	2.60	3.85	3.96	4.07
Marge en analyse : Lem. 12 ( $\bar{\alpha}$ )	2.60	3.85	3.96	4.08

le tableau 1.5 et sont accompagnés d'indications sur l'effort de calcul requis pour une évaluation des conditions de synthèse. La lecture de ces résultats conduit aux commentaires suivants :

- le théorème 8 conduit à une borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  plus faible que celle calculée par le théorème 12. Ceci confirme la pertinence de l'ajout de variables accompagnant la condition de synthèse étendue par rapport à la condition quadratique. On remarque également que, du théorème 8 au théorème 12, si le nombre de variables augmente, le nombre de lignes du problème LMI diminue ;
- si les théorèmes 12 et 13 mettent en jeu un effort de calcul sensiblement identique, les résultats auxquels ils conduisent sont différents. En particulier, cet exemple montre que l'usage de la mémoire peut contribuer à faire décroître le conservatisme des conditions de synthèse puisque la borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  obtenue avec le théorème 12 est plus faible que celle calculée grâce au théorème 13 ;
- dans le cadre des correcteurs à mémoire, utiliser une matrice  $\mathcal{G}$  triangulaire contribue à faire décroître le conservatisme des conditions pour cet exemple. D'autres exemples numériques montrent de façon plus significative que la structure de  $\mathcal{G}$  peut avoir une grande importance ;
- si les conditions d'analyse primales et duales conduisent parfois aux mêmes résultats, la discussion précédente a montré que cette remarque ne se vérifie pas dans le cas général.

Les théorèmes 12 et 13 peuvent être aisément étendus au cas où  $\tau = 1$ . Le point de départ de la période est un paramètre des conditions de synthèse, au même titre que les matrices  $M_j$ . On cherche maintenant à estimer l'influence de ces deux types de paramètres sur le conservatisme des conditions de synthèse. A cette fin, le tableau 1.6 rassemble les bornes de  $\bar{\alpha}$  calculées pour différents jeux de matrices  $M_j$  et différentes valeurs de  $\tau$  à l'aide du théorème 13 avec  $\mathcal{G}$  triangulaire. Le lemme 10 oriente le choix des matrices  $M_j$  en proposant une approche satisfaisant la condition nécessaire énoncée par le lemme 9 : on impose donc  $M_1 = \varepsilon_{1,0}\mathbf{1}$ ,  $M_2 = \varepsilon_{1,1}\mathbf{1}$  et  $M_3 = \varepsilon_{0,0}\mathbf{1}$  de telle sorte que  $(\varepsilon_{1,0}\varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1})^2$  soit suffisamment petit. Comme précédemment, les résultats de l'analyse de la boucle fermée résultant de chacun des correcteurs sont donnés. A l'examen du tableau 1.6, on fait les remarques suivantes :

- les matrices  $M_j$  ont une influence sur le conservatisme des conditions de synthèse. Parmi les choix proposés, le cas où ces matrices sont nulles (proposé par le tableau 1.5) conduit à la condition la moins conservatrice. Toutefois, rien n'indique que ce choix soit le meilleur, y compris pour cet exemple ;
- la borne inférieure de  $\bar{\alpha}$  dépend de la valeur de  $\tau$ . Le conservatisme des conditions de synthèse est donc dépendant du point de départ de la période ;

TABLE 1.6 – Influence des matrices  $M_j$  et de  $\tau$  sur les conditions de synthèse à mémoire du théorème 13

$\{\varepsilon_{0,0}, \varepsilon_{1,0}, \varepsilon_{1,1}\}$	$\{1, 0.1, 0.1\}$		$\{1, 0.3, 0.1\}$		$\{1, 0.3, -0.2\}$	
$(\varepsilon_{1,0}\varepsilon_{0,0} + \varepsilon_{1,1})^2$	0.04		0.16		0.01	
$\tau$	0	1	0	1	0	1
Marge en synthèse	3.67	3.52	3.45	3.35	3.55	3.58
Marge en analyse : Th. 11 (primale)	4.13	-	4.09	-	4.02	-
Marge en analyse : Lem. 12 (duale)	4.13	-	4.09	-	4.00	-
Marge en analyse : Lem. 13 (primale)	-	3.59	-	3.55	-	3.65
Marge en analyse : Lem. 15 (duale)	-	3.59	-	3.55	-	3.65

- la hiérarchie entre les lois de commande établie sur la base des résultats de synthèse peut être remise en cause à l'étape d'analyse : les contrôleurs 2 et 3 donnent une illustration de ce cas de figure.

### 1.5.6 Conclusions

Cette section a démontré que prouver la stabilité robuste d'un modèle périodique à temps discret soumis à des incertitudes polytopiques constantes est équivalent à montrer que les valeurs propres de sa matrice de monodromie sont situées dans le cercle unité. La théorie de Lyapunov permet de traduire cette condition sous forme LMI. Après un tour d'horizon des méthodes applicables pour la résolution de ces inégalités matricielles, le choix s'est porté sur les techniques dites de « variables de relaxation », conduisant à des conditions étendues. La possibilité d'obtenir des conditions de synthèse robuste convexes ainsi que le compromis existant entre conservatisme et complexité numérique constituent les arguments essentiels en faveur de ce choix.

Le conservatisme des conditions LMI étendues ne peut être plus important (et s'avère le plus souvent moindre) que celui des conditions de stabilité et de synthèse quadratiques. Malgré tout, ces conditions étendues ne sont que suffisantes. Dans le cas de la condition d'analyse, on peut montrer que la seule (mais non négligeable) source de conservatisme vient de la contrainte imposant à  $\mathcal{F}$  d'être constante. C'est la raison pour laquelle d'autres conditions suffisantes ont été proposées, en s'appuyant sur la dualité et le choix de  $\tau$ . Dans le cas général, ces conditions ne sont pas équivalentes.

Considérer le modèle 2-périodique comme un système dont la période est multiple de 2 permet également de dériver d'autres conditions suffisantes. Contrairement aux précédentes, cette approche a l'avantage de mettre en évidence une hiérarchie claire entre les différentes conditions.

Finalement, des conditions de synthèse conduisant à des correcteurs périodiques classiques ont été obtenues. Si elles ne peuvent qu'être meilleures que les conditions fondées sur la stabilité quadratique, il a été démontré que dans certains cas l'augmentation du conservatisme entre la synthèse et l'analyse est inévitable. C'est la raison principale qui a motivé l'introduction d'un nouveau type de lois de commande périodiques utilisant la mémoire des états du système. Il a ainsi été démontré qu'il existe une paramétrisation du théorème de synthèse annulant le conservatisme additionnel par rapport à la condition d'analyse duale. Bien que le jeu de paramètres le plus approprié soit difficile à trouver, l'interprétation des variables de relaxation de la section 1.4 permet d'orienter ce choix. Finalement, il faut noter que pour une paramétrisation donnée, il a été démontré que la condition de synthèse conduisant à un correcteur à mémoire ne peut qu'être moins conservatrice que son équivalent conduisant à un contrôleur classique.

#### **Contributions principales :**

Approche unifiante et didactique pour l'analyse et la synthèse de modèles périodiques à temps-discret via des méthodes LMI.

#### **Contributions complémentaires :**

- première utilisation des méthodes de relaxation à convergence asymptotique (Pólya et Putinar) pour l'analyse robuste de stabilité de modèles périodiques polytopiques (section 1.2.4) ;
- première interprétation des variables additionnelles des LMI étendues dans ce contexte (section 1.4) ;
- paramétrisation inédite des théorèmes de synthèse de correcteurs périodiques (section 1.5.4) ;
- pour le théorème de synthèse conduisant à un correcteur 2-périodique avec mémoire, démonstration de l'existence d'une paramétrisation n'induisant aucun conservatisme additionnel par rapport à la condition d'analyse associée (section 1.5.4).



## Chapitre 2

# Analyse et synthèse pour les lois de commande périodiques à mémoire

### 2.1 Introduction

En l'absence d'incertitudes, le premier chapitre a donné une paramétrisation sous forme LMI de l'ensemble des lois de commande stabilisantes par retour d'état, statiques et périodiques, décrites par  $u_{Nq+k} = K_k x_{Nq+k}$ . Il a également été démontré qu'un tel résultat n'existe que dans le cas nominal. Cette constatation a motivé l'introduction d'une nouvelle classe de correcteurs périodiques utilisant l'historique des états du système. Il s'agit donc de lois de commande à mémoire.

Afin de résumer les résultats portant sur le cas robuste, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{C}_s$  ( $\mathcal{C}_m$ ) : ensemble des lois de commande robuste stabilisante sans mémoire (avec mémoire),
- $\mathcal{C}_s^l$  ( $\mathcal{C}_m^l$ ) : sous-ensemble de  $\mathcal{C}_s$  ( $\mathcal{C}_m$ ) paramétré par le théorème 12 (théorème 13).

Lorsque le système est soumis à des incertitudes polytopiques, les conditions de synthèse ne sont que suffisantes et conduisent donc uniquement à la paramétrisation de  $\mathcal{C}_s^l$ , sous-ensemble de  $\mathcal{C}_s$ . C'est la raison pour laquelle les conditions de synthèse ont été étendues aux lois de commande à mémoire dont les lois statiques sont un cas particulier. L'ensemble  $\mathcal{C}_m^l$ , exploré par les nouvelles conditions, englobe  $\mathcal{C}_s^l$ . Cet effort est justifié par l'existence d'exemples numériques n'admettant pas de correcteurs stabilisant dans  $\mathcal{C}_s^l$  alors que la recherche dans  $\mathcal{C}_m^l$  conduit à une solution. Autrement dit, les conditions de synthèse peuvent n'être faisables que si le contrôleur est à mémoire. Toutefois, si le conservatisme des conditions de synthèse a été réduit, ces dernières restent toujours suffisantes : il peut exister des lois de commande stabilisantes appartenant à  $\mathcal{C}_m$  (et même à  $\mathcal{C}_s$ ) mais hors de  $\mathcal{C}_m^l$ , l'espace accessible à la recherche. La Fig 2.1 donne une représentation graphique à cette discussion.

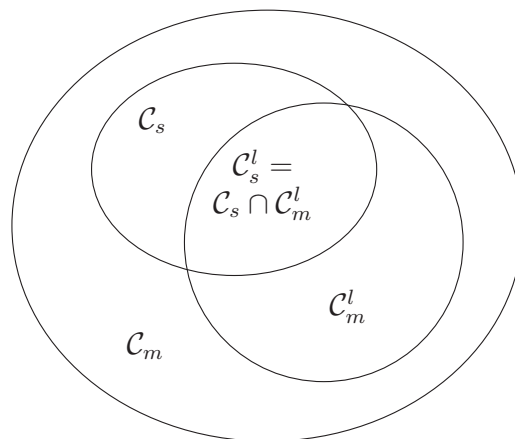


FIGURE 2.1 – Représentation des ensembles de contrôleurs stabilisants

Depuis la première utilisation des contrôleurs à mémoire périodiques dans [Ebihara et al., 2009a], plusieurs structures de contrôle ont été proposées [Ebihara et al., 2008a, Tréguët et al., 2011a]. Elles se caractérisent par une gestion de la mémoire spécifiquement conçue pour faciliter l'obtention de conditions de synthèse convexe.



Dans la lignée de ces travaux, ce chapitre se donne pour objectif d'établir des conditions d'analyse et de synthèse robustes pour la formulation la plus générale des contrôleurs à mémoire. Cette généralisation requiert une méthodologie inédite, ce qui explique qu'une version unifiée de ce cadre de travail n'ait été envisagée que tardivement.

Contrairement au chapitre 1, les problèmes des performances  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  sont traités conjointement au cas, plus simple, de la stabilité. Puisqu'il s'agit de développements nouveaux obtenus dans le cadre de cette thèse, les résultats de ce chapitre sont établis pour les modèles N-périodiques. Toutefois, pour que la généralité de ce propos n'entraîne pas sa clarté, la démarche est illustrée par deux exemples didactiques simples.

Ce chapitre s'ouvre sur une discussion portant sur le choix de la formulation générique des correcteurs à mémoire considérée. La section suivante énonce alors formellement les problèmes auxquelles ce chapitre s'efforce de donner des réponses. Constatant que le modèle en boucle fermée présente la forme d'un modèle polynomiale en  $\sigma$  à ordre variant, les sections 4 et 5 étudient les reformulations invariantes dans le temps et la dualité des systèmes pour ce type de modèle. Ces efforts se justifient par la stratégie retenue dans ce chapitre et consistant à privilégier la manipulation des modèles plutôt que des LMI pour obtenir des conditions d'analyse et de synthèse convexes. A partir de ces résultats, la section 6 et 7 proposent des conditions d'analyse et de synthèse robuste sous forme SDP. Les exemples numériques donnés par la section 8 clôture ce chapitre.

## 2.2 Généralisation des lois de commande périodique à mémoire

### 2.2.1 Formulation retenue

Ce chapitre s'intéresse aux lois de commande décrites par l'équation suivante :

$$u_{Nq+k} = K_{k,0}x_{Nq+k} + K_{k,1}x_{Nq+k-1} + \cdots + K_{k,\alpha_k}x_{Nq+k-\alpha_k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{0 \cdots N-1\} \quad (2.1)$$

La séquence  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{N-1}$  représente le nombre d'états passés nécessaire à l'évaluation de l'entrée  $u_{Nq+k}$  pour chacun des instants de la période, c'est à dire pour  $0 \leq k \leq N-1$ . Elle caractérise la structure de commande. A titre d'exemple, on considère deux lois de commande 2-périodique. La première est définie par  $\{\alpha_0, \alpha_1\} = \{0, 1\}$  :

$$\text{Ex.1 : } \begin{cases} u_{2q} &= & K_{0,0}x_{2q} \\ u_{2q+1} &= & K_{1,0}x_{2q+1} + K_{1,1}x_{2q} \end{cases} \quad (2.2a)$$

tandis que la seconde correspond à  $\{\alpha_0, \alpha_1\} = \{2, 3\}$  :

$$\text{Ex.2 : } \begin{cases} u_{2q} &= & K_{0,0}x_{2q} + K_{0,1}x_{2q-1} + K_{0,2}x_{2q-2} \\ u_{2q+1} &= & K_{1,0}x_{2q+1} + K_{1,1}x_{2q} + K_{1,2}x_{2q-1} + K_{1,3}x_{2q-2} \end{cases} \quad (2.2b)$$

La majorité des développements à venir seront illustrés à l'aide de ces correcteurs.

Parmi tous les choix possibles dans le cadre de cette formulation, on retiendra trois cas, décrits au moyen de  $\kappa \in \mathbb{N}$  et baptisés comme suit :

- $\alpha_k = 0$  : PSFC (Periodic State-Feedback Controller),
- $\alpha_k = k + \kappa$  : PFMC d'ordre  $\kappa$  (Periodic Full Memory Controller),
- $\alpha_k = \kappa$  : PFIRC d'ordre  $\kappa$  (Periodic FIR Controller).

Selon cette terminologie, chacun des exemples précédents correspond à un PFMC 2-périodique. Le premier est d'ordre 0 et le second d'ordre 2. De plus, [de Souza and Trofino, 2000], [Ebihara et al., 2008a] et [Tréguët et al., 2011a] traitent des cas suivant : PSFC (ou PFIRC d'ordre 0), PFMC d'ordre 0 et PFIRC d'ordre  $N-1$ , respectivement. Par conséquent, le correcteur (2.1) englobe les différentes approches proposées dans la littérature et conduisant à des lois de commande périodiques à mémoire et à retour d'état.

**Remarque.** *Comme expliqué dans le premier chapitre, l'usage de la notation  $Nq+k$  pour définir l'instant courant situe implicitement la discussion dans le cas particulier où  $\tau = 0$ . Pour plus de généralité, la formulation suivante devrait donc être préférée à (2.1) :*

$$u_{Nq+k+\tau} = K_{k,0}x_{Nq+k+\tau} + \cdots + K_{k,\alpha_k}x_{Nq+k+\tau-\alpha_k}$$

*La caractérisation complète du contrôleur requiert alors non seulement la séquence  $\{\alpha_k\}$  mais aussi la valeur de  $\tau$  correspondante. Il s'avère cependant que toute séquence conçue pour  $\tau \neq 0$  correspond à un choix particulier de  $\{\alpha_k\}$  pour  $\tau = 0$ . A titre d'exemple, on vérifiera aisément que la loi 3-périodique correspondant à  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{1, 2, 3\}$  pour  $\tau = 1$  possède une structure identique au contrôleur pour lequel  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{3, 1, 2\}$  avec  $\tau = 0$ . Cette remarque indique donc que le choix  $\tau = 0$  accompagnant l'énoncé de (2.1) n'entraîne pas de perte de généralité dans la caractérisation de la structure la loi de commande à mémoire. On notera que ceci ne contredit pas les résultats de la section précédente au sujet de l'influence de  $\tau$  sur le conservatisme des conditions d'analyse et de synthèse.* ◦



## 2.2.2 Discussion sur le statut particulier des lois de commande de type PFMC

Le nombre d'états nécessaire à l'évaluation de  $u_{Nq+k}$ , c'est-à-dire  $\alpha_k$ , est constant pour les lois de type PSFC et PFIRC. Si cette simplicité justifie le recours à de telles structures, la pertinence de l'utilisation des contrôleurs PFMC peut sembler plus discutable. Afin d'illustrer au mieux ce propos, on considère temporairement un troisième exemple correspondant à un PFMC 3-périodique d'ordre  $\kappa = 1$  caractérisé par la séquence  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{1, 2, 3\}$ . Les entrées de commande pour la période  $q$  sont formulées de la façon suivante, conformément à (2.1) :

$$\begin{cases} u_{3q} = & \begin{bmatrix} K_{0,0} & K_{0,1} \end{bmatrix} \eta_q \\ u_{3q+1} = & \begin{bmatrix} K_{1,0} \end{bmatrix} \beta_{3q+1} + \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \end{bmatrix} \eta_q \\ u_{3q+2} = & \begin{bmatrix} K_{2,0} & K_{2,1} \end{bmatrix} \beta_{3q+2} + \begin{bmatrix} K_{2,2} & K_{2,3} \end{bmatrix} \eta_q \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

$$\beta_{3q+1} = [x_{3q+1}], \quad \beta_{3q+2} = \begin{bmatrix} x_{3q+2} \\ x_{3q+1} \end{bmatrix}, \quad \eta_q = \begin{bmatrix} x_{3q} \\ x_{3q-1} \end{bmatrix}$$

Ainsi, à chaque instant,  $u_{3q+k}$  est calculé à partir du vecteur  $\eta_q$ , de taille constante et composé de  $\kappa + 1$  états, et du vecteur  $\beta_{3q+k}$  dont la dimension varie au cours de la période. Plus précisément,  $\beta_{3q+k}$  grandit à mesure que l'on progresse dans la période, en incorporant  $x_{3q+k}$ , l'état courant du modèle. Au contraire,  $\eta_q$  représente les états précédant l'instant  $3q + 1$  nécessaires à l'évaluation de la loi de commande.

On peut remarquer que d'autres séquences  $\alpha_k$  conduisent à la même définition de  $\beta_{3q+k}$  et  $\eta_q$ . A titre d'exemple, les entrées de commande du contrôleur 3-périodique caractérisée par la séquence  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\} = \{0, 2, 0\}$  s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_{3q} = & \begin{bmatrix} K_{0,0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \eta_q \\ u_{3q+1} = & \begin{bmatrix} K_{1,0} \end{bmatrix} \beta_{3q+1} + \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \end{bmatrix} \eta_q \\ u_{3q+2} = & \begin{bmatrix} K_{2,0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \beta_{3q+2} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \eta_q \end{cases}$$

Cette nouvelle formulation correspond à (2.3) avec  $K_{0,1} = K_{2,1} = K_{2,2} = K_{2,3} = \mathbf{0}$ . La généralisation de cette constatation montre que la structure de type PFMC offre le plus grand nombre de degrés de liberté pour une connaissance donnée des états passés du système. Cette remarque est à l'origine de la dénomination PFMC.

Par conséquent, toute structure de commande (2.1) (même les PSFC et PFIRC) peut être vue comme un PFMC structuré d'ordre  $\kappa = l - 1$  où  $l$  est défini comme suit :

$$l = \max_{k \in [0, \dots, N-1]} \alpha_k - k + 1 \geq 1 \quad (2.4)$$

C'est la raison pour laquelle, plutôt que de retenir (2.1), ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux PFMCs d'ordre  $\kappa$  (éventuellement structuré) formulé de façon compacte comme suit :

$$u_{Nq+k} = \sum_{j=0}^{\kappa+k} K_{k,j} x_{Nq+k-j} = \sum_{j=0}^{l-1+k} K_{k,j} x_{Nq+k-j} \quad (2.5)$$

Le dernier élément de sommes précédentes fait intervenir le signal  $x_{Nq-l+1}$  quel que soit  $k$ . La variable  $l$  paramètre donc l'instant de l'état du système le plus ancien utilisé par la loi (2.5). Il s'agit de la « profondeur » maximale de la mémoire de (2.5).

## 2.3 Enoncé des problèmes d'analyse et de synthèse

### 2.3.1 Modèle en boucle fermée avec les canaux de performances

La stabilité asymptotique est l'exigence élémentaire d'un système asservi puisqu'elle assure que ce dernier converge asymptotiquement vers un état d'équilibre. Toutefois, cette spécification minimale ne suffit pas pour rendre compte de la performance du système puisqu'elle ne donne aucune indication sur la manière dont le système rejoint son état d'équilibre : à quelle vitesse ? selon quel effort de commande ?

Classiquement, la performance d'un système est mesurée par sa capacité à minimiser l'influence du signal de perturbation  $w_{Nq+k} \in \mathbb{R}^m$  sur la sortie contrôlée  $z_{Nq+k} \in \mathbb{R}^p$ . Le modèle périodique  $\Sigma(\theta)$ , considéré au chapitre 1, est donc enrichi par ces vecteurs d'entrée/sortie dits « de performance » :

$$\Sigma(\theta) : \begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_k^{ol}(\theta) & B_k(\theta) & B_{uk}(\theta) \\ C_k^{ol}(\theta) & D_k(\theta) & D_{uk}(\theta) \end{bmatrix}}_{M_k^{ol}(\theta)} \begin{bmatrix} x_{Nq+k} \\ w_{Nq+k} \\ u_{Nq+k} \end{bmatrix} \quad (2.6a)$$

Les matrices du modèle dépendent du vecteur d'incertitude invariant dans le temps  $\theta \in \Theta$  de sorte que la concaténation des matrices  $M_k^{ol}$  sur une période appartient au polytope convexe suivant :

$$\begin{bmatrix} M_0^{ol}(\theta) \\ \vdots \\ M_{N-1}^{ol}(\theta) \end{bmatrix} \in \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} M_0^{ol[1]} \\ \vdots \\ M_{N-1}^{ol[1]} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} M_0^{ol[L]} \\ \vdots \\ M_{N-1}^{ol[L]} \end{bmatrix} \right\}, \forall \theta \in \Theta \quad (2.6b)$$

Le modèle autonome  $\Sigma_{cl}(\theta)$  provenant de (2.6) commandé par (2.5) est décrit par l'équation suivante :

$$\Sigma_{cl}(\theta) : \begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{l+k-1} \begin{bmatrix} A_{k,j}(\theta) \\ C_{k,j}(\theta) \end{bmatrix} x_{Nq+k-j} + \begin{bmatrix} B_k(\theta) \\ D_k(\theta) \end{bmatrix} w_{Nq+k} \quad (2.7a)$$

avec

$$\begin{bmatrix} M_0(\theta) \\ \vdots \\ M_{N-1}(\theta) \end{bmatrix} \in \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} M_0^{[1]} \\ \vdots \\ M_{N-1}^{[1]} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} M_0^{[L]} \\ \vdots \\ M_{N-1}^{[L]} \end{bmatrix} \right\}, \forall \theta \in \Theta \quad (2.7b)$$

où  $M_k(\theta)$  est définie comme suit :

$$M_k(\theta) = \begin{bmatrix} A_{k,0}(\theta) & \cdots & A_{k,l+k-1}(\theta) & B_k(\theta) \\ C_{k,0}(\theta) & \cdots & C_{k,l+k-1}(\theta) & D_k(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.7c)$$

Les matrices  $A_{k,j}$  et  $C_{k,j}$  sont données par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{k,j}(\theta) \\ C_{k,j}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} A_k^{ol}(\theta) + B_{uk}(\theta)K_{k,0} \\ C_k^{ol}(\theta) + D_{uk}(\theta)K_{k,0} \end{bmatrix}, & (j=0) \\ \begin{bmatrix} B_{uk}(\theta)K_{k,j} \\ D_{uk}(\theta)K_{k,j} \end{bmatrix}, & (1 \leq j \leq l+k-1) \end{cases} \quad (2.8)$$

On nomme  $\Sigma_{cl}\{1\}$  et  $\Sigma_{cl}\{2\}$ , les boucles fermées obtenues dans le cas des deux correcteurs illustratifs donnés par (2.2). Pour ces derniers, la valeur de  $l$  vaut 1 et 3 respectivement. En omettant la dépendance des matrices à l'égard de  $\theta$ , la forme développée de l'équation précédente se décline donc de la façon suivante, :

$$\Sigma_{cl}\{1\} : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{2q+1} \\ z_{2q} \\ x_{2q+2} \\ z_{2q+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{0,0} \\ C_{0,0} \\ A_{1,0} \\ C_{1,0} \end{bmatrix} x_{2q} + \begin{bmatrix} B_0 \\ D_0 \end{bmatrix} w_{2q} \\ \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ C_{1,1} \end{bmatrix} x_{2q} + \begin{bmatrix} B_1 \\ D_1 \end{bmatrix} w_{2q+1} \end{cases}$$

$$\Sigma_{cl}\{2\} : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{2q+1} \\ z_{2q} \\ x_{2q+2} \\ z_{2q+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{0,0} \\ C_{0,0} \\ A_{1,0} \\ C_{1,0} \end{bmatrix} x_{2q} + \begin{bmatrix} A_{0,1} \\ C_{0,1} \end{bmatrix} x_{2q-1} + \begin{bmatrix} A_{0,2} \\ C_{0,2} \end{bmatrix} x_{2q-2} + \begin{bmatrix} B_0 \\ D_0 \end{bmatrix} w_{2q} \\ \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ C_{1,1} \end{bmatrix} x_{2q} + \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ C_{1,2} \end{bmatrix} x_{2q-1} + \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ C_{1,3} \end{bmatrix} x_{2q-2} + \begin{bmatrix} B_1 \\ D_1 \end{bmatrix} w_{2q+1} \end{cases}$$

Dans le cas général, cette formulation développée est la suivante :

$$\begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} A_{k,0} \\ C_{k,0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{k,1} \\ C_{k,1} \end{bmatrix} \sigma^{-1} + \dots + \begin{bmatrix} A_{k,l+k-1} \\ C_{k,l+k-1} \end{bmatrix} \sigma^{-(l+k-1)} \right) x_{Nq+k} + \begin{bmatrix} B_k \\ D_k \end{bmatrix} w_{Nq+k}$$

Le modèle  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est donc caractérisé par des matrices d'états polynomiales en  $\sigma^{-1}$  dont les coefficients et l'ordre varient périodiquement. Pour cette raison, les résultats d'analyse de ce chapitre sont établis pour cette classe particulière de modèles périodiques. Ce type de systèmes, et plus précisément ses propriétés structurelles, ont été étudiées dans [Mrabet and Bourlès, 1998].

**Remarque.** Comme pour les trois équations précédentes, dans le reste de ce chapitre, on allégera fréquemment les notations en omettant la dépendance des matrices à l'égard de  $\theta$ .  $\circ$

### 2.3.2 Normes du modèle en boucle fermée

**Normes des systèmes périodiques** On considère dans un premier temps, le modèle  $\Sigma_{cl}$  correspondant à une réalisation de (2.7) pour une valeur particulière du vecteur d'incertitude  $\theta$ . On suppose que  $\Sigma_{cl}$  est stable.

La capacité de  $\Sigma_{cl}$  à rejeter les perturbations  $w_{Nq+k}$  est évaluée grâce à la norme de  $G(\sigma, k)$ , la fonction de transfert matricielle périodique de  $w_{Nq+k}$  vers la sortie contrôlée  $z_{Nq+k}$  :

$$z_k = G(\sigma, k)w_k$$

Les expressions de  $B_k$ ,  $C_k^{ol}$ ,  $D_k$  et  $D_{uk}$ , dont dépend  $G(\sigma, k)$ , sont choisies de façon à traduire le critère de performance retenu par la minimisation de  $\|G(\sigma, k)\|$ . On notera que, par abus de langage, cette norme est assimilée à celles du modèle  $\Sigma_{cl}$  lui-même, c'est-à-dire  $\|G(\sigma, k)\| = \|\Sigma_{cl}\|$ .

Dans le cadre de cette thèse, on a recours aux normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  puisqu'elles permettent de prendre en compte une très grande variété de cas pratiques [Arzelier, 2004]. L'annexe D donne les éléments nécessaires à la compréhension de ces mesures dans le contexte des systèmes périodiques. On en rappelle ici les aspects essentiels.

Les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\Sigma_{cl}$ , notées  $\|\Sigma_{cl}\|_2$  et  $\|\Sigma_{cl}\|_\infty$ , sont définies comme les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  de la représentation temps-invariant liftée de  $\Sigma_{cl}$ , présentée dans la section suivante. A partir de ces définitions, il est possible de ré-interpréter ces normes en faisant référence aux signaux du modèle périodique originel. Pour chacune des deux mesures, on rappelle ici une des nombreuses interprétations existantes.

- $\|\Sigma_{cl}\|_2^2$  représente la somme du carré des normes  $\mathcal{L}_2$  des réponses impulsionnelles pour chacune des entrées et pour  $N$  instants consécutifs :

$$\|\Sigma_{cl}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{N-1} \|h_k^{i,j}\|_2^2}$$

où  $h_{Nq+k}^{i,j}$  est la réponse de  $\Sigma_{cl}$  à une impulsion appliquée sur l'entrée  $j$  à l'instant  $\tau + i$ , pour un instant  $\tau$  arbitraire (avec la condition initiale  $x_{Nq+k} = 0$ ,  $\forall Nq + k \leq \tau$ );

- $\|\Sigma_{cl}\|_\infty$  correspond au gain maximal de  $G(\sigma, k)$  selon toutes les directions de  $w_k$ .

$$\|\Sigma\|_\infty = \sup_{w_k \in \ell_2 - \{0\}} \frac{\|z_k\|_2}{\|w_k\|_2}$$

On remarquera que l'interprétation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  est similaire à celle rencontrée pour les modèles à temps-invariant alors que le cas de la norme  $\mathcal{H}_2$  met en évidence le fait que la réponse impulsionnelle de  $\Sigma_{cl}$  dépend de l'instant d'application de l'impulsion.

**Définition des problèmes de performances robustes** En présence d'incertitudes, il est clair que la norme de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  dépend de la réalisation du paramètre  $\theta$ . De la même façon que le chapitre 1 cherchait à prouver la stabilité du modèle pour tout  $\theta \in \Theta$ , il s'agit ici de calculer la norme maximale de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  sur tout le domaine de variation de  $\theta$ . Cette analyse correspond à la recherche du « pire-cas ».

**Définition 5.** Les carrés des plus grandes normes  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_2$  de  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , pour  $\theta \in \Theta$ , sont notés  $\nu_{wc}$  et  $\gamma_{wc}$  :

$$\nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(\theta)\|_\infty^2, \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(\theta)\|_2^2$$

○

Le problème d'analyse consiste à prouver la stabilité robuste de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  et à déterminer la valeur de  $\nu_{wc}$  et  $\gamma_{wc}$ , fréquemment appelés « coût garanti ».

**Problème 4.** [Analyse robuste] Obtenir un certificat de stabilité robuste pour  $\Sigma_{cl}(\theta)$  et, s'il existe, trouver  $\nu_{wc}$  et  $\gamma_{wc}$  tel que

$$\nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(\theta)\|_\infty^2, \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \|\Sigma_{cl}(\theta)\|_2^2$$

○

Comme dans le cas du premier chapitre, lorsque  $\Sigma_{cl}$  est soumis à des incertitudes, ce problème est connu pour être difficilement soluble de façon exacte [Farges et al., 2007]. C'est la raison pour laquelle, on se réfère à des sous-problèmes issus de relaxations et plus facilement accessibles aux outils numériques. Ils conduisent à

des conditions uniquement suffisantes. Dans ce contexte, ceci correspond à la recherche de bornes supérieures aux coûts garantis  $\nu_{wc}$  et  $\gamma_{wc}$ .

Le problème de synthèse associé à cette analyse est défini comme suit.

**Problème 5.** [Synthèse robuste] Trouver une loi de commande (2.1) (ou (2.5) structurée), caractérisée par une séquence  $\{\alpha_k\}_{k=0}^{N-1}$  donnée, qui stabilise de façon robuste  $\Sigma(\theta)$  tout en minimisant  $\nu_{wc}$  ou  $\gamma_{wc}$ , selon la norme considérée. ◦

Ce problème correspond à une adaptation du problème standard (voir [Zhou and Doyle, 1998]) au cas des modèles périodiques incertains et des correcteurs par retour d'état périodique à mémoire. La figure 2.2 illustre ce problème.

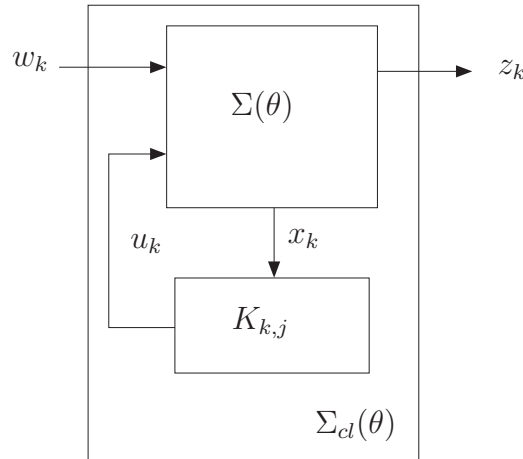


FIGURE 2.2 – Schéma du problème standard

**Panorama des réponses proposées au problème de synthèse** Dans le cas nominal, des conditions LMI résolvant le problème de synthèse  $\mathcal{H}_2$  ont été établies dans [Wiśniewski and Stoustrup, 2001] tandis que le cas de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  a été traité dans [Dullerud and Lall, 1999].

Dans le cas où le modèle  $\Sigma(\theta)$  est soumis à des incertitudes, il existe assez peu de travaux traitant du problème de synthèse de correcteurs périodiques robustes et performants. Sur ce sujet, on peut citer [Kapila and Haddad, 1998] proposant des conditions suffisantes basées sur la solution de l'équation de Riccati périodique et conduisant à une loi de commande assurant un coût garanti pour un modèle périodique à temps discret soumis à des incertitudes bornées en normes. On remarquera également les travaux présentés dans [Dullerud and Glover, 1996] et [Kao et al., 2001] qui généralisent des résultats issus du cadre LTI pour les modèles incertains périodiques. Ils traitent d'approches basées sur la valeur singulière structurée et sur les contraintes intégrales quadratiques (IQC).

Pour le problème spécifique dont traite ce chapitre, à savoir la synthèse  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  pour des modèles périodiques soumis à des incertitudes polytopiques, on peut citer [Farges et al., 2007] proposant une solution au problème  $\mathcal{H}_2$  en s'inspirant de [Daafouz and Bernussou, 2001]. Ces travaux peuvent être vus comme l'extension à la performance  $\mathcal{H}_2$  de la condition de stabilité (1.53) présentée dans le premier chapitre (p. 32). Enfin, le problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  conduisant à un cas particulier de correcteurs à mémoire est l'objet d'étude de [Ebihara et al., 2011]. La suite de ce chapitre généralise les résultats de [Farges et al., 2007] et [Ebihara et al., 2011].

## 2.4 Reformulations invariante dans le temps des modèles polynomiaux périodiques d'ordre variant

La reformulation temps-invariant des modèles périodiques permet d'exploiter les correspondances naturelles existant entre ces deux classes de modèles. Un état de l'art de ces techniques de reformulations est proposé dans [Bittanti and Colaneri, 2000]. Parmi celles-ci, le lifting temporel est probablement la plus classique, principalement en raison de sa simplicité. Le cœur de cette procédure consiste à rassembler les entrées et les sorties sur

une période en deux vecteurs uniques, notés  $\hat{w}_q$  et  $\hat{z}_q$  respectivement, et tels que<sup>1</sup> :

$$\hat{w}_q = \begin{bmatrix} w_{qN+N-1}^T & \cdots & w_{qN}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{mN} \quad (2.9)$$

$$\hat{z}_q = \begin{bmatrix} z_{qN+N-1}^T & \cdots & z_{qN}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{pN} \quad (2.10)$$

Il s'agit ensuite de définir une réalisation du modèle LTI dont l'entrée et la sortie correspondent à ces vecteurs étendus. Dans le cadre de la représentation d'état, la procédure classique est rappelée par la proposition suivante. On notera que cette technique est applicable même si la dimension de l'état varie périodiquement.

**Proposition 1** ([Bittanti and Colaneri, 2000]). *La représentation d'état périodique*

$$\begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{Nq+k} \\ w_{Nq+k} \end{bmatrix}$$

peut être réécrite sous la forme temps-invariant suivante :

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}$$

avec

$$\Psi = \Phi_{N,0} \quad , \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} B_{N-1} & \Phi_{N,N-1}B_{N-2} & \cdots & \Phi_{N,1}B_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} C_{N-1}\Phi_{N-1,0} \\ \vdots \\ C_1\Phi_{1,0} \\ C_0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathfrak{D} = \begin{bmatrix} D_{N-1} & C_{N-1}B_{N-2} & \cdots & C_{N-1}\Phi_{N-1,2}B_1 & C_{N-1}\Phi_{N-1,1}B_0 \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_2B_1 & C_2\Phi_{2,1}B_0 \\ \vdots & & \ddots & D_1 & C_1B_0 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & D_0 \end{bmatrix}$$

où la matrice de transition d'état  $\Phi_{k,\tau}$  de  $A$  est telle que

$$\Phi_{k,\tau} = \begin{cases} \mathbf{1}, & (k = \tau) \\ A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_\tau, & (k > \tau) \end{cases}$$

**Remarque.** *Ce chapitre fait le choix de se restreindre au cas où  $\tau = 0$ , comme le suggère la définition (2.9) et (2.10). Une ré-indexation cyclique permet de traiter les autres cas. L'influence de ce paramètre est plus amplement discutée lors de la présentation des résultats numériques, dans la section 2.8.* ◻

Muni d'un tel outil, on pourrait être tenter de croire que l'utilisation de la théorie des modèles à temps-invariant suffit à répondre aux problèmes concernant les modèles périodiques [Bittanti and Colaneri, 2008]. Comme l'a souligné le premier chapitre, dans la majorité des cas, une telle démarche est vouée à l'échec puisque cette reformulation conduit à une classe *particulière* de modèles LTI<sup>2</sup>. Les caractéristiques de ce type de système (leur structure, leur dimension, etc) ne peuvent être négligées sous peine de devoir faire face à des problèmes de non-causalité et de non-faisabilité. A titre d'exemple, supposons qu'un contrôleur LTI ait été construit de manière générique à partir de la reformulation à temps-invariant du modèle périodique ; reconstruire une loi de commande périodique à partir de ce résultat, s'avère impossible dans le cas général. En d'autres termes, cette correspondance entre les classes de modèles linéaires périodiques et LTI n'est bijective que lorsqu'elle met en jeux *un sous-ensemble* des modèles à temps-invariant. Le cas de l'analyse robuste fait écho à cette discussion. En effet, lorsque les matrices du modèle périodique présentent une dépendance polytopique à l'égard du vecteur d'incertitude  $\theta$ , il apparaît clairement que la reformulation de la proposition 1 détruit cette géométrie polytopique.

Pour toute ces raisons, la suite de ce chapitre introduit la technique de « lifting descripteur », conceptualisé dans le cadre de cette thèse. Pour éviter les confusions, on fera donc référence à la reformulation de la proposition 1 en utilisant la dénomination « lifting monodromique » puisqu'elle fait apparaître explicitement  $\Psi$ , la matrice du même nom.

En premier lieu, cette section met en œuvre la procédure de lifting monodromique dans le contexte des modèles polynomiaux périodiques. Puis, elle définit le lifting descripteur pour cette même classe de modèle. Les correspondances existant entre les représentations obtenues sont finalement mises en évidence.

1. La convention retenue est telle que  $\hat{w}_q$  est formé des  $w_{2q+k}$ s du bas vers le haut lorsque  $k$  augmente, bien que le sens opposé soit parfois utilisé dans la littérature.

2. La reformulation cyclique, alternative classique au lifting monodromique et décrite dans [Bittanti and Colaneri, 2008], fait l'objet des mêmes limitations .

**Remarque.** Comme le suggèrent les notations employées, en l'absence des vecteurs d'entrée/sortie, cette reformulation correspond au modèle à temps-invariant introduit dans le corollaire 1 du chapitre 1. De même, le lifting descripteur à venir doit être relié au modèle décrit par la contrainte algébrique de (1.45). Ces reformulations ont sous-tendu de nombreux développements présentés dans le premier chapitre.  $\circ$

Pour guider les discussions à venir, le schéma suivant propose dès maintenant une vue d'ensemble des modèles obtenus dans ce chapitre, tant dans le contexte primal que dual. Les modèles constituant une étape importante vers l'obtention des conditions d'analyses sont encadrés, afin de les distinguer des modèles instrumentaux servant d'intermédiaires entre deux reformulations. Les flèches renseignent sur l'ordre dans lequel ces modèles sont construits.

$$\begin{array}{l} \text{Primal} \parallel \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\Gamma_m} \leftarrow (2.11) \leftarrow \boxed{\Sigma_{cl}} \rightarrow \boxed{\Gamma_e} \rightarrow \Gamma_p \\ \Gamma_p \downarrow \\ \Gamma_p^d \end{array} \right. \\ \text{Dual} \parallel \left\{ \begin{array}{l} \boxed{\Gamma_m^d} \leftarrow (2.53) \leftarrow \boxed{\Sigma_{cl}^d} \leftarrow \boxed{\Gamma_e^d} \leftarrow \Gamma_p^d \end{array} \right. \end{array}$$

Pour les modèles primaux, la nomenclature retenue est la suivante :

- $\Sigma_{cl}$  : modèle périodique polynomial, correspondant à la boucle fermée d'un modèle périodique standard et d'une loi de commande de retour d'état à mémoire;
- (2.11) : reformulation de  $\Sigma_{cl}$  sous l'aspect d'un modèle d'état périodique;
- $\Gamma_m$  : reformulation invariante dans le temps liftée monodromique de  $\Sigma_{cl}$ ;
- $\Gamma_e$  : reformulation invariante dans le temps liftée descripteur de  $\Sigma_{cl}$ ;
- $\Gamma_p$  : reformulation invariante dans le temps liftée polynomiale de  $\Sigma_{cl}$ .

Dans le cas dual, l'exposant  $d$  est ajouté, le modèle (2.53) étant l'homologue de (2.11) dans ce contexte.

### 2.4.1 Représentation liftée monodromique

Dans le contexte des modèles polynomiaux périodiques d'ordre variant, la procédure classique du lifting monodromique peut être appliquée à condition de reformuler le modèle (2.7) comme un système périodique classique. Autoriser les dimensions de ce dernier à varier au cours de la période permet d'atteindre cet objectif, comme le montre la reformulation suivante des modèles  $\Sigma_{cl}\{1\}$  et  $\Sigma_{cl}\{2\}$ .

$$\Sigma_{cl}\{1\} : \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ z_{2q} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{0,0} & B_0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ C_{0,0} & D_0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q} \\ w_{2q} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2q+2} \\ z_{2q+1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c} A_{1,0} & A_{1,1} & B_1 \\ C_{1,0} & C_{1,1} & D_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ w_{2q+1} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$\Sigma_{cl}\{2\} : \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ z_{2q} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & B_0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & D_0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ w_{2q} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ z_{2q+1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & B_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & D_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ w_{2q} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Ainsi, l'état de ces modèles incorpore les signaux  $x_{2q+k}$  nécessaires à l'instant suivant. La proposition suivante traduit cette idée dans le cas général.

**Proposition 2** (Représentation sans mémoire). *Le modèle suivant est équivalent à  $\Sigma_{cl}(\theta)$  :*

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{qN+k+1} \\ z_{qN+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_k(\theta) & \bar{B}_k(\theta) \\ \bar{C}_k(\theta) & \bar{D}_k(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{qN+k} \\ w_{qN+k} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

avec

$$\bar{A}_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{A}_k \\ \mathbf{1}_{n(l+k)} \end{bmatrix}, & (0 \leq k \leq N-2) \\ \begin{bmatrix} \dot{A}_{N-1} \\ \mathbf{1}_{n(l-1)} \quad \mathbf{0} \end{bmatrix}, & (k = N-1) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \dot{A}_k = [A_{k,0} \quad \cdots \quad A_{k,l+k-1}] \quad (2.12)$$

$$\bar{B}_k = \begin{bmatrix} B_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_k = [C_{k,0} \quad \cdots \quad C_{k,l+k-1}], \quad \bar{D}_k = D_k \quad (2.13)$$

*Démonstration.* L'expression du modèle périodique (2.7) peut être réécrite sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_k \\ \bar{C}_k \end{bmatrix} \bar{x}_{Nq+k} + \begin{bmatrix} B_k \\ D_k \end{bmatrix} w_{Nq+k} \quad \text{avec} \quad \bar{x}_{Nq+k} = \begin{bmatrix} x_{Nq+k} \\ \vdots \\ x_{Nq-l+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n(k+l)} \quad (2.14)$$

où  $\bar{A}_k$  et  $\bar{C}_k$  sont définies par (2.12) et (2.13). Le vecteur  $\bar{x}_{Nq+k}$  concatène l'historique des états nécessaires à l'évaluation de  $x_{Nq+k+1}$  et  $z_{Nq+k}$ . Au cours de la période, l'état courant est ajouté à  $\bar{x}_{Nq+k}$  si bien que sa dimension croît à chaque instant :

$$\bar{x}_{Nq+k+1} = \begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ \bar{x}_{Nq+k} \end{bmatrix}, \quad (0 \leq k \leq N-2) \quad (2.15)$$

La variation de la taille de  $\bar{x}_{Nq+k}$  subit néanmoins une discontinuité au changement de période. En effet,  $\bar{x}_{Nq+N-1}$ , nécessaire au calcul de  $x_{N(q+1)}$ , mémorise les  $N+l-1$  derniers états alors que  $\bar{x}_{N(q+1)}$  permettant l'évaluation de  $x_{N(q+1)+1}$  est composé uniquement de  $l$  états. L'équation suivante traduit cette remarque :

$$\bar{x}_{N(q+1)} = \begin{bmatrix} x_{N(q+1)} \\ [\mathbf{1}_{n(l-1)} \quad \mathbf{0}] \bar{x}_{N(q+1)-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

De (2.14), (2.15) et (2.16), le modèle sans mémoire (2.11) peut être obtenu en autorisant la variation de ses dimensions au cours de la période.  $\square$

Cette reformulation autorise l'emploi des conditions d'analyse classiques à destination des modèles périodiques. Les conclusions obtenues à partir de (2.11) peuvent alors être extrapolées au modèle  $\Sigma_{cl}(\theta)$ . Toutefois, la très grande dimension de (2.11), dû à la répétition des signaux  $x_{Nq+k}$ , rend inadéquate cette démarche. Pour cette raison, on applique la procédure classique du lifting monodromique donnée par la proposition 1, transformant ainsi  $\Sigma_{cl}(\theta)$  en un modèle temps-invariant noté  $\Gamma_m(\theta)$ . Appliquée aux deux exemples  $\Sigma_{cl}\{1\}$  et  $\Sigma_{cl}\{2\}$ , elle conduit aux formulations génériques suivantes :

$$\Gamma_m\{1\} : \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ z_{2q+1} \\ z_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \bar{A}_0 & \bar{B}_1 & \bar{A}_1 \bar{B}_0 \\ C_1 \bar{A}_0 & D_1 & C_1 \bar{B}_0 \\ \bar{C}_0 & 0 & \bar{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ w_{2q+1} \\ w_{2q} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_m\{2\} : \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ z_{2q+1} \\ z_{2q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \bar{A}_0 & \bar{B}_1 & \bar{A}_1 \bar{B}_0 \\ C_1 \bar{A}_0 & D_1 & C_1 \bar{B}_0 \\ \bar{C}_0 & 0 & \bar{D}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ w_{2q+1} \\ w_{2q} \end{bmatrix}$$

pour lesquelles l'expression des matrices  $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{D}_k\}$  est choisie conformément à l'exemple considéré. Pour ces exemples, il est aisé de vérifier que cette procédure se résume à substituer  $\bar{x}_{2q+1}$  par son expression dépendant de  $\bar{x}_{2q}$  et  $\hat{w}_q$  dans l'équation donnant  $\bar{x}_{2q+2}$ . On vérifiera que les modèles  $\Gamma_m\{1, 2\}$  sont de dimensions plus faibles que les reformulations invariantes dans le temps de  $\Sigma_{cl}\{1, 2\}$  précédentes.

La proposition suivante suit la même démarche dans le cas général.

**Proposition 3** (Lifting monodromique). *Le modèle périodique  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , donné par (2.7), peut être réécrit sous la forme temps-invariant suivante, notée  $\Gamma_m(\theta)$  :*

$$\Gamma_m(\theta) : \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi(\theta) & \mathfrak{B}(\theta) \\ \mathfrak{C}(\theta) & \mathfrak{D}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \eta_q \in \mathbb{R}^{nl} \quad (2.17)$$

où les matrices  $\{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}\}$  sont fonctions des matrices  $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{D}_k\}$ , données par la proposition 2 à partir du modèle  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , selon les relations données par la proposition 1.



### 2.4.2 Représentation liftée descripteur

Comme expliqué auparavant, le lifting monodromique ne préserve pas la géométrie polytopique de  $\Sigma_{cl}(\theta)$ . C'est la raison pour laquelle, un lifting alternatif est proposé sous une forme descripteur. Appliquée à  $\Sigma_{cl}\{1\}$  et  $\Sigma_{cl}\{2\}$ , une telle procédure donne les reformulations suivantes, notées  $\Gamma_e\{1\}$  et  $\Gamma_e\{2\}$  :

$$\Gamma_e\{1\} : \left[ \begin{array}{ccc|cc|cc} -1 & A_{1,0} & A_{1,1} & B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & A_{0,0} & \mathbf{0} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C_{1,0} & C_{1,1} & D_1 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{0,0} & \mathbf{0} & D_0 & \mathbf{0} & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ \hline w_{2q+1} \\ w_{2q} \\ \hline z_{2q+1} \\ z_{2q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_e\{2\} : \left[ \begin{array}{cccc|cc|cc} -1 & A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & \mathbf{0} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & D_1 & \mathbf{0} & -1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & \mathbf{0} & D_0 & \mathbf{0} & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ \hline w_{2q+1} \\ w_{2q} \\ \hline z_{2q+1} \\ z_{2q} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Dans le cas général, une telle démarche est mise en œuvre en constatant que (2.14) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & \dot{A}_k & B_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{C}_k & D_k & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{Nq+k+1} \\ \bar{x}_{Nq+k} \\ \hline w_{Nq+k} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Répéter cette équation et définir  $\hat{x}_q$  comme la concaténation de  $x_{N(q+1)}$  et  $\bar{x}_{Nq+N-1}$

$$\hat{x}_q = \begin{bmatrix} x_{N(q+1)} \\ \bar{x}_{N(q+1)-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Nq+N} \\ \vdots \\ x_{Nq-l+1} \end{bmatrix}$$

conduit au modèle temps-invariant (2.20).

**Proposition 4** (Lifting descripteur). *Le modèle périodique  $\Sigma_{cl}(\theta)$ , donné par (2.7), peut être réécrit sous la forme temps-invariant suivante, notée  $\Gamma_e(\theta)$  :*

$$\Gamma_e(\theta) : \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathcal{E}(\theta) & \mathcal{A}(\theta) & \mathcal{B}(\theta) & \mathbf{0} \\ [1_{nl} \ \mathbf{0}] - \sigma [\mathbf{0} \ 1_{nl}] & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathcal{C}_1(\theta) & \mathcal{C}_2(\theta) & \mathcal{D}(\theta) & -1_{pN} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

où  $\mathcal{E} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{nN \times nl}$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{nN \times mN}$ ,  $\mathcal{C}_1 \in \mathbb{R}^{pN \times nN}$ ,  $\mathcal{C}_2 \in \mathbb{R}^{pN \times nl}$  et  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{pN \times mN}$  sont données par

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_n & A_{N-1,0} & A_{N-1,1} & \cdots & A_{N-1,N-2} \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n & A_{N-2,0} & \cdots & A_{N-2,N-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\mathbf{1}_n & A_{1,0} \\ \mathbf{0}_n & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{N-1,N-1} & A_{N-1,N} & \cdots & A_{N-1,l+N-2} \\ A_{N-2,N-2} & A_{N-2,N-1} & \cdots & A_{N-2,l+N-3} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,l} \\ A_{0,0} & A_{0,1} & \cdots & A_{0,l-1} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p \times n} & C_{N-1,0} & \cdots & \cdots & C_{N-1,N-2} \\ \vdots & \ddots & C_{N-2,0} & \cdots & C_{N-2,N-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & C_{1,0} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_2 = \begin{bmatrix} C_{N-1,N-1} & C_{N-1,N} & \cdots & C_{N-1,l+N-2} \\ C_{N-2,N-2} & C_{N-2,N-1} & \cdots & C_{N-2,l+N-3} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots & C_{1,l} \\ C_{0,0} & C_{0,1} & \cdots & C_{0,l-1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathcal{B} = \text{diag}\{B_{N-1}, \dots, B_0\}, \quad \mathcal{D} = \text{diag}\{D_{N-1}, \dots, D_0\} \quad (2.23)$$



**Remarque.** La structure triangulaire de la matrice  $\mathcal{E}$  est caractéristique de la causalité du système périodique. En effet, par construction le vecteur  $\hat{x}_q$  rassemble les états de  $x_{Nq+N}$  à  $x_{Nq-l+1}$ , classés dans cet ordre du haut vers le bas. Tout élément  $x_{Nq+k}$  de  $\hat{x}_q$  dépend alors uniquement des lignes inférieures de  $\hat{x}_q$  (le passé).  $\circ$

### 2.4.3 Relations entre les deux modèles

**Correspondance entre les vecteurs d'états** La reformulation monodromique élimine par des manipulations algébriques les états intermédiaires de la période pour n'en conserver que la première occurrence. Le vecteur  $\eta_q$  correspond donc à  $\bar{x}_{Nq}$ . Par conséquent,  $\eta_q$  et  $\hat{x}_q$  sont formés à partir de  $x_{2q+k}$ , la variable interne du modèle périodique  $\Sigma_{cl}$ . Cette remarque met en évidence le lien existant entre ces deux vecteurs d'états. Les équations suivantes illustrent ces correspondances pour les deux exemples.

$$\begin{aligned} \text{Ex.1 : } \begin{bmatrix} \frac{\eta_{q+1}}{\eta_q} \\ x_{2q+2} \\ x_{2q} \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{bmatrix} \\ \text{Ex.2 : } \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans le cas général, on a ainsi

$$\eta_q^T = [x_{Nq}^T \ \cdots \ x_{Nq-l+1}^T], \quad \hat{x}_q^T = [x_{Nq+N}^T \ \cdots \ x_{Nq-l+1}^T] \quad (2.24)$$

ce qui donne lieu à la proposition suivante.

**Proposition 5.** Le vecteur d'état de  $\Gamma_m$  est lié à celui de  $\Gamma_e$  par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \end{bmatrix} = T \hat{x}_q \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0}_{nl \times nN} \\ \mathbf{0}_{nl \times nN} & \mathbf{1}_{nl} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2nl \times n(N+l)} \quad (2.25)$$

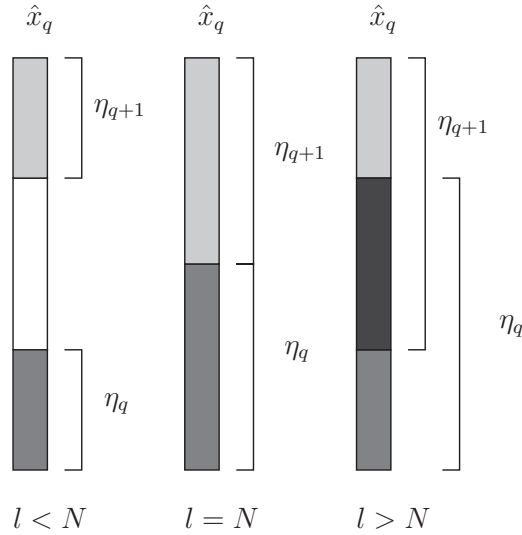
La définition de  $T$ , liant  $\eta_q$  et  $\eta_{q+1}$  à  $\hat{x}_q$ , diffère selon la valeur de  $l$ . Le tableau 2.1 rend compte de cette dépendance. Dans le cas où  $l$ , la profondeur maximale de la mémoire, est supérieure à  $N$ , la dimension de la période, les vecteurs  $\eta_q$  et  $\eta_{q+1}$  correspondent aux extrémités du vecteur  $\hat{x}_q$ . Lorsque  $l = N$ , ils partitionnent exactement  $\hat{x}_q$  puisque  $T = \mathbf{1}$  alors que si  $l > N$ , ces deux vecteurs partagent certains éléments. La Fig. 2.3 illustre ce phénomène. Cette constatation permet d'affirmer que  $\Gamma_m$  dérive de  $\Gamma_e$  par contraction lorsque  $l < N$  et par expansion lorsque  $l > N$ .

		TABLE 2.1 – Structure de $T$ en fonction de $l$		
		$l < N$	$l = N$	$l > N$
$T$	$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0}_{nl \times n(N-l)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{nl \times n(N-l)} & \mathbf{1}_{nl} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix}$	

**Bijection entre les signaux** Conséquence directe de la Prop. 5, la relation suivante permet d'obtenir les signaux de  $\Gamma_m$  à partir de ceux de  $\Gamma_e$ .

$$\Gamma_m \leftarrow \Gamma_e : \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{mN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}, \forall l \quad (2.26)$$

Comme le montrera la suite de ce chapitre, cette égalité est à la base de la technique mise en œuvre pour obtenir de nouvelles conditions d'analyse robuste.

FIGURE 2.3 – Lien entre  $\eta_q$ ,  $\eta_{q+1}$  et  $\hat{x}_q$  en fonction de  $l$ 

L'obtention de la relation opposée est moins directe puisque lorsque  $l < N$ , la Fig. 2.3 montre qu'une partie de  $\hat{x}_q$ , notée  $\zeta_q$ , ne se retrouve ni dans  $\eta_q$  ni dans  $\eta_{q+1}$ . Il est néanmoins possible de reconstruire ce vecteur à partir des matrices de  $\Gamma_e$  en s'appuyant sur la relation suivante, extraite de (2.20) pour  $l < N$  :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{1,0} & \mathcal{E}_{1,1} & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathcal{E}_{0,0} & \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_{1,0} & \mathcal{C}_{1,1} & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \zeta_q \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

où  $\mathcal{E}_{1,0} \in \mathbb{R}^{nl \times nl}$  et  $\mathcal{E}_{0,0} \in \mathbb{R}^{n(N-l) \times n(N-l)}$  sont deux matrices inversibles. On en déduit que  $\zeta_q = -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 \eta_q - \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 \hat{w}_q$ . La réciproque de (2.26) s'énonce donc comme suit :

$$\Gamma_e \leftarrow \Gamma_m : \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{cases} \left[ \begin{array}{cc|cc} \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 & -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{mN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}, & (l < N) \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} [\mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times nl}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{mN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}, & (l \geq N) \end{cases}$$

Ainsi, il existe une bijection linéaire entre les signaux des deux représentations liftées. On peut également affirmer que les matrices de passage dans ces relations sont toujours indépendantes des incertitudes, sauf dans le cas où  $l < N$  et dans le sens  $\Gamma_m \rightarrow \Gamma_e$  puisque la matrice de passage met alors en jeu  $\mathcal{E}_{0,0}$ ,  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{B}_0$  qui dépendent de  $\theta$ .

**Correspondances entre les matrices** Un lien entre leurs matrices de  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_e$  peut également être mis en lumière. La démonstration d'une telle proposition repose essentiellement sur l'absence structurelle de singularité de la matrice  $\mathcal{E}$  dans le lifting monodromique (2.17).

**Proposition 6.** *Les matrices de  $\Gamma_m$  peuvent être obtenues à partir de celles de  $\Gamma_e$  via les relations données par le tableau 2.2 où, lorsque  $l \leq N$ , les matrices de  $\Gamma_e$  sont décomposées selon (2.27).*

*Démonstration.* Selon la valeur de  $l$ , deux cas doivent être distingués :

- $l < N$  : Comme expliqué précédemment, les signaux de  $\Gamma_e$  vérifient alors (2.27) dont on déduit que  $\zeta_q = -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 \eta_q - \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 \hat{w}_q$ . Par conséquent, la norme du vecteur  $\zeta_q$  tend vers zéro si la suite des  $\eta_q$

TABLE 2.2 – Relations entre les matrices des deux représentations liftées

	$l < N$	$l \geq N$
$\Psi$	$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{E}_{1,0}^{-1} (\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1)$	$\begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} \\ 1_{n(l-N)} \quad 0_{n(l-N) \times nN} \end{bmatrix}$
$\mathfrak{B}$	$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{E}_{1,0}^{-1} (\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_1)$	$\begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\mathfrak{C}$	$C_{1,0} \tilde{\mathcal{A}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + C_2$	$-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} + C_2$
$\mathfrak{D}$	$C_{1,0} \tilde{\mathcal{B}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}$	$-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}$

converge vers le vecteur nul. Le modèle peut donc être réduit en abandonnant  $\zeta_q$ , ce qui conduit à :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{1,0} & -\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 & -\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 & \mathbf{0} \\ C_{1,0} & -C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + C_2 & -C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

L'expression donnée par le tableau 2.2 est ensuite facilement obtenue en inversant  $\mathcal{E}_{1,0}$  et en réécrivant  $\hat{z}_q$  comme une fonction de  $\eta_q$  et  $\hat{w}_q$  uniquement.

- $l \geq N$  : Dans cette situation, la proposition 5 permet d'affirmer que les  $n(l - N)$  derniers termes de  $\eta_{q+1}$  coïncident avec les  $n(l - N)$  premiers éléments de  $\eta_q$ . En tenant en compte de cette remarque, le modèle  $\Gamma_e$ , donné par (2.20), est reformulé de la façon suivante :

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \mathcal{E} & \mathbf{0} & \mathcal{A} & \mathbf{0} & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_{n(l-N)} & [\mathbf{1}_{n(l-N)} \quad \mathbf{0}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline C_1 & \mathbf{0} & C_2 & \mathbf{0} & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

dont il est aisé de dériver les résultats du tableau 2.2. □

On notera que la proposition 6 offre un moyen d'obtenir les matrices de (2.17) moins fastidieux que la procédure donnée par la Prop. 3.

## 2.5 Dualité des modèles polynomiaux périodiques d'ordre variant

Le chapitre 1 a montré l'importance des conditions d'analyse duales. Ces dernières ont permis en effet d'établir des théorèmes d'analyse robuste alternatifs et ont autorisé la dérivation de conditions de synthèse. Il a également été démontré qu'un tel résultat pouvait être obtenu par des méthodes purement algébriques ou par l'analyse du système dual. La complexité du modèle polynomial considéré dans ce chapitre oriente naturellement vers la seconde approche.

La dualité des systèmes est un concept bien maîtrisé pour les modèles invariants dans le temps. L'annexe C donne quelques résultats importants sur ce sujet. Il est notamment rappelé que ce concept permet de mettre en relation deux modèles LTI pour lesquelles les matrices d'état de l'un correspondent aux transposés de l'autre. Dans le cadre de cette thèse, ce concept présente un attrait tout particulier du fait de la correspondance existant entre les résultats d'analyse de ces modèles : la dualité préserve la stabilité ainsi que les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Pour ces deux raisons, la théorie de la dualité des systèmes est fréquemment réduite à un outil technique permettant de transposer les matrices du système considéré, bien que ce concept soit en réalité beaucoup plus riche [van der Schaft, 1991].

Pour bénéficier des résultats existants pour les modèles invariants dans le temps, cette section s'attache en premier lieu à obtenir le modèle dual de la représentation liftée descripteur LTI  $\Gamma_e$ , comme une étape intermédiaire à l'étude de la dualité des modèles polynomiaux périodiques à ordre variant tels que  $\Sigma_{cl}$ . Ainsi, contrairement aux développements de la section précédente, dans laquelle les deux liftings  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_e$  ont été obtenus à partir de  $\Sigma_{cl}$ , les modèles duaux  $\Gamma_m^d$  et  $\Sigma_{cl}^d$  dériveront l'un et l'autre de  $\Gamma_e^d$ . Cette démarche a été illustrée par le schéma introduisant la section 2.4.

Les conditions duales ne sont intéressantes que dans la mesure où elles sont affines en les matrices du modèle périodique. Il s'agit d'un résultat important du chapitre 1. Comme le montrera la section suivante, une telle dépendance des conditions d'analyse peut être obtenue en exploitant les correspondances entre les

différentes reformulations temps-invariant. Cette remarque est à l'origine de la démarche adoptée puisqu'elle justifie l'attention particulière accordée à la préservation de ces liens.

On précise enfin que ce chapitre peut être vu comme une généralisation au cas N-périodique avec mémoire et entrées/sorties de performance de l'approche mise en œuvre dans la preuve du lemme 4 du chapitre 1.

### 2.5.1 Modèle dual du lifting descripteur

Pour obtenir le modèle dual de  $\Gamma_e$ , une première idée consiste à appliquer directement la théorie de la dualité des systèmes pour les systèmes à temps-invariant et à temps-discret, proposée dans [Nieuwenhuis and Willems, 1988] et rappelée dans l'annexe C. Une telle démarche conduit au modèle suivant :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{E}^T \\ \mathcal{A}^T \\ -\mathcal{B}^T \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{1}_{nl} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] - \sigma^{-1} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_{nl} \end{array} \right] \\ \hline & \mathbf{0} \end{array} \right] \left| \left[ \begin{array}{c} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_2^T \\ -\mathcal{D}^T \end{array} \right] \right| \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \tilde{x}_q^d \\ \hat{w}_q^d \\ \hat{z}_q^d \end{array} \right] \quad (2.28)$$

Or, la formulation de ce modèle est inadaptée à l'étude de sa dynamique puisqu'il semble délicat de mettre en évidence une relation similaire à

$$([\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}] - \sigma [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{nl}])\hat{x}_q = \mathbf{0} \quad (2.29)$$

extraite de la définition (2.20) de  $\Gamma_e$ . Or, cette relation est au cœur de la mise en évidence des correspondances existant entre  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_m$ .

Pour contourner cette difficulté, on s'appuie sur une reformulation polynomiale invariante dans le temps de  $\Gamma_e$ , noté  $\Gamma_p$ . Après avoir obtenu le dual  $\Gamma_p^d$  de ce modèle, cette sous-section montre qu'il est possible de reconstruire un modèle semblable à  $\Gamma_e$  présentant une relation similaire à (2.29). Ce dernier peut être considéré comme  $\Gamma_e^d$ , son dual. On rappelle que cette procédure a été schématisée dans l'introduction de la section 2.4. On notera que ces développements correspondent à la généralisation de la preuve du lemme 4 du chapitre 1.

**Formulation polynomiale invariante dans le temps** ( $\Gamma_e \rightarrow \Gamma_p$ ) Le vecteur d'état  $\hat{x}_q$  de  $\Gamma_e$  est segmenté pour donner à ce système l'apparence plus classique d'un modèle polynomial en la variable  $\sigma$ . Pour ce faire, la correspondance entre  $\hat{x}_q$  et  $x_{Nq+k}$ , vecteur d'état de  $\Sigma_{cl}$ , est utilisée afin de regrouper les occurrences de  $x_{Nq+k}$  (implicitement contenues dans  $\hat{x}_q$ ) sur une période. La taille de  $\hat{x}_q \in \mathbb{R}^{n(l+N)}$  n'étant pas un multiple de  $N$  dans le cas général, on adjoint  $N - r$  vecteurs  $x_{Nq+k}$  à  $\hat{x}_q$ , où  $r$  provient de la division euclidienne de  $l$  par  $N$  :

$$l = bN + r \geq 1 \quad \text{avec} \quad 1 \leq r \leq N \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{N} \quad (2.30)$$

Pour chacun des deux exemples illustratifs,  $r$  est égal à 1 et on choisit de prendre en compte  $x_{2q+3}$ , ce qui conduit aux équations suivantes provenant de (2.18) et (2.19) :

$$\text{Ex.1 :} \quad \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cccc|cc} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{1,0} & A_{1,1} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0} & \mathbf{0} & B_0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{cccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{1,0} & C_{1,1} & D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{0,0} & \mathbf{0} & D_0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \end{array} \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+3} \\ x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{array} \right] = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\text{Ex.2 :} \quad \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{cccccc|cc} \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & \mathbf{0} & B_0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{cccccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & \mathbf{0} & D_0 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+3} \\ x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ x_{2q-2} \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{array} \right] = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

La forme polynomiale suivante découle de ces expressions en posant  $\tilde{x}_q = \begin{bmatrix} x_{2q+3} \\ x_{2q+2} \end{bmatrix}$ ,

$$\text{Ex.1 :} \quad \left[ \begin{array}{c|c} \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} A_{1,0} & A_{1,1} \\ -\mathbf{1} & A_{0,0} \end{array} \right] \sigma^{-1} \\ \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{cc} C_{1,0} & C_{1,1} \\ \mathbf{0} & C_{0,0} \end{array} \right] \sigma^{-1} \end{array} \right] \sigma^{-1} \left| \left[ \begin{array}{c} B_1 \ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \ B_0 \end{array} \right] \right| \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \\ \hline \left[ \begin{array}{c} D_1 \ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \ D_0 \end{array} \right] \left| -\mathbf{1} \right. \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \tilde{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{array} \right] = \mathbf{0}$$



A partir de ces expressions, il s'agit maintenant de reconstruire un modèle semblable à  $\Gamma_e$  dans le domaine dual, c'est-à-dire inverser la procédure ayant conduit de  $\Gamma_e$  vers  $\Gamma_p$  afin d'obtenir, à partir de  $\Gamma_p^d$ , un modèle pouvant être considéré comme  $\Gamma_e^d$ . On applique donc la procédure inverse à celle ayant donné naissance à l'expression polynomiale (2.33) à partir de  $\Gamma_e$ . Pour illustrer au mieux le propos, on anticipe sur l'étape suivante en introduisant dès maintenant une correspondance entre les signaux de  $\Gamma_e^d$  et ceux d'un modèle périodique qui sera considéré comme le dual de  $\Sigma_{cl}^d$ . On pose donc

$$\tilde{x}_q^d = \begin{bmatrix} x_{2q-3}^d \\ x_{2q-4}^d \end{bmatrix}, \quad \hat{w}_q^d = \begin{bmatrix} w_{2q-3}^d \\ w_{2q-4}^d \end{bmatrix}, \quad \hat{z}_q^d = \begin{bmatrix} z_{2q-3}^d \\ z_{2q-4}^d \end{bmatrix}$$

Munis de ces correspondances, les expressions développées de  $\Gamma_e^d\{1\}$  et  $\Gamma_e^d\{2\}$  sont obtenues :

$$\text{Ex.1 : } \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cc} A_{1,0}^T & -1 & 0 & 0 & C_{1,0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & -1 & 0 & C_{1,1}^T & C_{0,0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_1^T & 0 & 0 & 0 & D_1^T & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0^T & 0 & 0 & 0 & D_0^T & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ x_{2q-4}^d \\ \hline w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ w_{2q-3}^d \\ w_{2q-4}^d \\ \hline z_{2q-3}^d \\ z_{2q-4}^d \end{bmatrix} = 0 \quad (2.38)$$

$$\text{Ex.2 : } \left[ \begin{array}{cccc|cccc|cc} A_{1,2}^T & A_{0,1}^T & A_{1,0}^T & -1 & 0 & 0 & C_{1,2}^T & C_{0,1}^T & C_{1,0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{1,3}^T & A_{0,2}^T & A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & -1 & 0 & C_{1,3}^T & C_{0,2}^T & C_{1,1}^T & C_{0,0}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\sigma 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & B_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1^T & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_0^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_0^T & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ x_{2q-4}^d \\ \hline w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ w_{2q-3}^d \\ w_{2q-4}^d \\ \hline z_{2q-3}^d \\ z_{2q-4}^d \end{bmatrix} = 0$$

Pour permettre un partitionnement uniforme du vecteur d'état  $\hat{x}_q$ , la taille de  $\Gamma_e$  a été artificiellement augmentée en incorporant  $\xi_q$ , correspondant à  $x_{2q+3}$  pour les deux modèles périodiques considérés. De façon réciproque, on s'attend donc à pouvoir réduire le modèle dual de (2.33) pour obtenir  $\Gamma_e^d$ . Cette remarque est à l'origine de la constatation suivante : pour chacun des deux modèles, l'état  $x_{2q-4}^d$  d'une part et les entrées  $w_{2q-3}^d$  et  $w_{2q-4}^d$  d'autre part n'interviennent pas dans les équations dynamiques. En s'appuyant sur les deux arguments suivants, les modèles sont donc réduits. Premièrement,  $x_{2q-4}^d$  représente le futur de  $x_{2q-3}^d$  en temps inversé. Ce vecteur ne peut donc diverger si le modèle réduit converge. Deuxièmement, en considérant les sorties aux instants  $2q-1$  et  $2q-2$ , l'équation de sortie peut être réécrite de la façon suivante afin de ne plus faire intervenir les signaux à éliminer.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc|cc} B_1^T & 0 & D_1^T & 0 & 1 & 0 \\ 0 & B_0^T & 0 & D_0^T & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ \hline w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ \hline z_{2q-1}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = 0$$

Ceci conduit à la reformulation suivante :

$$\Gamma_e^d\{1\} : \left[ \begin{array}{ccc|ccc} A_{1,0}^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & C_{1,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & -\mathbf{1} & C_{1,1}^T & C_{0,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ \hline w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ \hline z_{2q-1}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

$$\Gamma_e^d\{2\} : \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} A_{1,2}^T & A_{0,1}^T & A_{1,0}^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & C_{1,2}^T & C_{0,1}^T & C_{1,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{1,3}^T & A_{0,2}^T & A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & -\mathbf{1} & C_{1,3}^T & C_{0,2}^T & C_{1,1}^T & C_{0,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ \hline w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ \hline z_{2q-1}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.40)$$

**Choix du point de départ de la période** Si le choix du partitionnement de  $\hat{x}_q$  établi par (2.35) a pu paraître arbitraire, les derniers développements permettent maintenant de le justifier plus aisément. On rappelle que l'objectif est de regrouper par période les occurrences de  $x_{Nq+k}$ , composant  $\hat{x}_q$ , afin de former les vecteurs  $\tilde{x}_q$ . L'instant de départ de ces périodes, paramétré par la variable  $\tilde{\tau}$ , constitue le degré de liberté de cette procédure. Ainsi, dans le cas général,  $\tilde{x}_q$  est donné par la relation suivante :

$$\tilde{x}_q = \begin{bmatrix} x_{Nq+N+\tilde{\tau}} \\ \vdots \\ x_{Nq+\tilde{\tau}} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

En utilisant (2.35) et (2.24), on peut écrire

$$\hat{x}_q = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}_{nr}] \tilde{x}_q \\ \tilde{x}_{q-1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{q-b-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Nq+N} \\ \vdots \\ x_{Nq-l+1} \end{bmatrix}$$

En rappelant que  $l = bN + r$ , ceci montre que (2.35) correspond au cas particulier où  $\tilde{\tau} = N - r + 1$ .

Dans le cas du premier exemple, on a donc considéré jusqu'à présent la relation suivante  $\tilde{x}_q^T = [x_{2q+3}^T \quad x_{2q+2}^T]$  renvoyant à l'égalité  $\tilde{\tau} = 2$ , équivalente à  $\tilde{\tau} = 0$  puisque la période du modèle est 2. On montre maintenant sur cet exemple que la valeur de  $\tilde{\tau}$  peut avoir une influence sur la dimension du modèle dual. Ainsi, le choix alternatif  $\tilde{\tau} = 1$  conduit à  $\tilde{x}_q^T = [x_{2q+2}^T \quad x_{2q+1}^T]$ . Au lieu de (2.31), on a alors

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} -\mathbf{1} & A_{1,0} & A_{1,1} & \mathbf{0} & B_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C_{1,0} & C_{1,1} & \mathbf{0} & D_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{0,0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_0 & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ \hline x_{2q} \\ x_{2q-1} \\ \hline \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

ce qui conduit au modèle dual suivant

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & C_{1,1}^T & C_{0,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{1,0}^T & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{1,0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -\sigma\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ x_{2q-4}^d \\ \hline w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ w_{2q-3}^d \\ w_{2q-4}^d \\ \hline z_{2q-3}^d \\ z_{2q-4}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Cette formulation ne peut être réduite de la même façon que (2.38) a pu l'être pour donner (2.39). La difficulté tient au fait que, parmi l'historique des entrées et des états, seul  $w_{2q-4}^d$  n'est pas impliqué dans l'équation dynamique alors que les trois vecteurs  $w_{2q-3}^d$ ,  $w_{2q-4}^d$  et  $x_{2q-4}^d$  étaient dans cette situation dans (2.38). Le choix  $\tilde{\tau} = 1$  conduit donc à un modèle dual de plus grande taille que dans le cas où cette variable est nulle.

La proposition 8, présentée par la suite, démontre dans le cas général que le choix  $\tilde{\tau} = N - r + 1$  conduit à un modèle  $\Gamma_e^d$  de même dimension que son correspond primal  $\Gamma_e$ . Cette valeur du paramètre  $\tilde{\tau}$  est donc optimale puisqu'elle n'accroît pas la dimension du modèle dual.

**Dépendance de la dynamique à l'égard de l'historique des entrées** ( $\Gamma_p^d \rightarrow \Gamma_e^d$ ) Contrairement à  $\Gamma_e^d\{1\}$ , la dynamique de  $\Gamma_e^d\{2\}$  met en jeu un historique des entrées sur un intervalle de temps supérieur à une période. Ceci complique l'évaluation de la norme de  $\Gamma_e^d\{2\}$ . Cette difficulté peut néanmoins être surmontée en incorporant dans le vecteur d'état de  $\Gamma_e^d\{2\}$ , noté  $\hat{x}_q^d$ , les entrées surnuméraires ne correspondant pas aux instants du vecteur de sortie  $\check{z}_q^d$ . Il s'agit donc, pour  $\Gamma_e^d\{2\}$ , de mémoriser  $w_{2q+2}^d$  et  $w_{2q+1}^d$  correspondant à des entrées antérieures à celles formant l'entrée courante,  $\check{w}_q^d$ . Ainsi, les signaux de l'expression finale de  $\Gamma_e^d$  sont donnés par l'équation suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Ex.1 :} \\ \text{Ex.2 :} \end{array} \begin{array}{c} \hat{x}_q^d \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \end{array} \right] \\ \check{w}_q^d \\ \left[ \begin{array}{c} w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \end{array} \right] \\ \check{z}_q^d \\ \left[ \begin{array}{c} z_{2q-1}^d \\ z_{2q-2}^d \end{array} \right] \end{array} \quad (2.42)$$

Cette dépendance qu'entretient la dynamique de  $\Gamma_e^d\{2\}$  à l'égard de l'historique des entrées peut paraître surprenante dans la mesure où elle n'apparaissait pas dans l'expression du modèle primal  $\Gamma_e\{2\}$ . Il s'agit de la conséquence directe de la stratégie de contournement de la difficulté soulevée par (2.28) au début de la section. Cette démarche a essentiellement consisté à donner à  $\Gamma_e$  la reformulation polynomiale factorisée (2.33) dont le dual a ensuite été redéveloppé. Ce faisant, la structure de  $\Gamma_e\{2\}$  a pu être préservée puisqu'il est possible d'obtenir de la définition de  $\Gamma_e^d\{2\}$  une équation similaire à (2.29). Néanmoins, cette manipulation a réparti la dynamique sur l'état et l'entrée de  $\Gamma_e^d\{2\}$  alors qu'elle était auparavant circonscrite sur l'état de  $\Gamma_e\{2\}$ .

**Proposition 8** (Dual du lifting descripteur). *Une version duale du modèle lifté descripteur (2.20) est donnée par :*

$$\Gamma_e^d : \left[ \begin{array}{cc|c} [\check{A}^T(\theta) \check{E}^T(\theta)] & [\check{C}_2^T(\theta) \check{C}_1^T(\theta)] & \mathbf{0} \\ \sigma^{-1} [\mathbf{1}_{nl} \mathbf{0}] - [\mathbf{0} \mathbf{1}_{nl}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^{-1} [\mathbf{1}_{p(l-1)} \mathbf{0}] - [\mathbf{0} \mathbf{1}_{p(l-1)}] & \mathbf{0} \\ \hline [\mathbf{0} \check{B}^T(\theta)] & [\mathbf{0} \check{D}^T(\theta)] & \mathbf{1}_{mN} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.43)$$

avec  $\hat{x}_q^d \in \mathbb{R}^{n(N+l)+p(l-1)}$ . Les matrices  $\check{A} \in \mathbb{R}^{nl \times nN}$ ,  $\check{E} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\check{C}_2 \in \mathbb{R}^{p(l-1) \times nN}$  et  $\check{C}_1 \in \mathbb{R}^{pN \times nN}$  sont tels



que

$$[\check{\mathcal{A}}^T \quad \check{\mathcal{E}}^T] = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{b+1}^T & \cdots & \mathcal{A}_1^T & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{A}_{0,0}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$[\check{\mathcal{C}}_2^T \quad \check{\mathcal{C}}_1^T] = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{b+1}^T & \cdots & \mathcal{C}_1^T & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_{0,0}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

avec  $\mathcal{A}_{0,0}$  et  $\mathcal{C}_{0,0}$  telles que

$$\mathcal{A}_{0,0} = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_n & A_{N-1,0} & \cdots & A_{N-1,r-2} \\ \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{N-r+1,0} \\ \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nr \times nr}, \mathcal{C}_{0,0} = \begin{bmatrix} C_{N-1,0} & \cdots & \cdots & C_{N-1,r-2} \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} & C_{N-r+1,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p(r-1) \times n(r-1)} \quad (2.46)$$

les matrices  $\mathcal{A}_1 \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  et  $\mathcal{C}_1 \in \mathbb{R}^{pN \times nN}$  décrites par

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{N-1,r-1} & \cdots & A_{N-1,N-2} & A_{N-1,N-1} & \cdots & A_{N-1,N+r-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N-r,0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{1}_n & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_{1,0} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & & -\mathbf{1}_n & A_{0,0} & \cdots & A_{0,r-1} \end{bmatrix}, \mathcal{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{N-1,r-1} & \cdots & C_{N-1,N-2} & C_{N-1,N-1} & \cdots & C_{N-1,N+r-2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N-r,0} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & C_{1,0} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}_{p \times n} & \cdots & \mathbf{0}_{p \times n} & C_{0,0} & \cdots & C_{0,r-1} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

et, pour  $j = \{2, \dots, b+1\}$ ,  $\mathcal{A}_j \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  et  $\mathcal{C}_j \in \mathbb{R}^{pN \times nN}$ , données par

$$\mathcal{A}_j = \begin{bmatrix} A_{N-1,(j-1)N+r-1} & \cdots & A_{N-1,jN+r-2} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{0,(j-2)N+r} & \cdots & A_{0,(j-1)N+r-1} \end{bmatrix}, \mathcal{C}_j = \begin{bmatrix} C_{N-1,(j-1)N+r-1} & \cdots & C_{N-1,jN+r-2} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{0,(j-2)N+r} & \cdots & C_{0,(j-1)N+r-1} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Les matrices  $\check{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n(N+1) \times mN}$  et  $\check{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{pN \times mN}$  sont définies par

$$\check{\mathcal{B}}^T = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & \mathbf{0}_{mN \times n} \end{bmatrix} & (r = 1) \\ \begin{bmatrix} \text{diag}\{B_{N-r}^T, \dots, B_0^T, B_{N-1}^T, \dots, B_{N-r+1}^T\} & \mathbf{0}_{mN \times n} \end{bmatrix} & (r > 1) \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\check{\mathcal{D}}^T = \begin{cases} \mathcal{D}^T & (r = 1) \\ \text{diag}\{D_{N-r}^T, \dots, D_0^T, D_{N-1}^T, \dots, D_{N-r+1}^T\} & (r > 1) \end{cases} \quad (2.50)$$

*Démonstration.* D'après l'annexe C, le modèle suivant représente une version duale de (2.33), réécriture de  $\Gamma_e$  :

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{A}_j^T \sigma^j & \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{C}_j^T \sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_q^d \\ \tilde{w}_q^d \\ \tilde{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Sous une forme plus développée, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{b+1}^T & \cdots & \cdots & \mathcal{A}_0^T & \mathcal{C}_{b+1}^T & \cdots & \cdots & \mathcal{C}_0^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_{nN} & -\sigma \mathbf{1}_{nN} & & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & \mathbf{1}_{nN} & -\sigma \mathbf{1}_{nN} & & & & \vdots \\ & & & & & \mathbf{1}_{pN} & -\sigma \mathbf{1}_{pN} & & \vdots \\ & & & & & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{B}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_{pN} & -\sigma \mathbf{1}_{pN} & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \mathcal{D}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{q+b+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_q \\ \tilde{w}_{q+b+1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_q \\ \tilde{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

L'exploitation de la structure très creuse des matrices  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{C}_0$  permet de réduire le modèle ainsi obtenu. Pour ce faire, on considère le changement de variables suivant :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_{q+b+1}^d \\ \vdots \\ \tilde{x}_q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{nr}] \tilde{x}_{q+b+1}^d \\ \tilde{x}_{q+b}^d \\ \vdots \\ \tilde{x}_q^d \\ [\mathbf{1}_{n(N-r)} \ \mathbf{0}] \tilde{x}_{q-1}^d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \hat{w}_{q+b+1}^d \\ \vdots \\ \hat{w}_q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(r-1)}] \check{w}_{q+b+1}^d \\ \check{w}_{q+b}^d \\ \vdots \\ \check{w}_q^d \\ [\mathbf{1}_{p(N-r+1)} \ \mathbf{0}] \check{w}_{q-1}^d \end{bmatrix}$$

où  $\check{x}_q^d \in \mathbb{R}^{nN}$  et  $\check{w}_q^d \in \mathbb{R}^{pN}$  partagent respectivement la même taille que  $\tilde{x}_q^d$  et  $\hat{w}_q^d$ . De ces définitions, il apparaît clairement que  $\check{x}_{q-1}^d$  et  $\check{w}_{q-1}^d$  n'interviennent pas dans les équations de (2.51). Ces éléments peuvent donc être éliminés puisque la convergence de  $\check{x}_{q-1}^d$  est liée à celle de  $\check{x}_q^d$ .

En suivant la même règle, on définit  $\check{z}_q^d$ . Ceci permet de réécrire l'équation de sortie évaluée aux périodes  $q$  et  $q+1$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & \\ & \mathcal{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{q+1}^d \\ \tilde{x}_q^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{D}^T & \\ & \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_{q+1}^d \\ \hat{w}_q^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \check{z}_{q+1}^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}^T & \\ & \mathcal{B}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{nr}] \tilde{x}_{q+1}^d \\ \tilde{x}_q^d \\ [\mathbf{1}_{n(N-r)} \ \mathbf{0}] \tilde{x}_{q-1}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{D}^T & \\ & \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(r-1)}] \check{w}_{q+1}^d \\ \check{w}_q^d \\ [\mathbf{1}_{p(N-r+1)} \ \mathbf{0}] \check{w}_{q-1}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(r-1)}] \check{z}_{q+1}^d \\ \check{z}_q^d \\ [\mathbf{1}_{p(N-r+1)} \ \mathbf{0}] \check{z}_{q-1}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

qui est ensuite réduite à

$$\check{\mathcal{B}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_n \\ & \check{x}_q^d \end{bmatrix} \check{x}_{q+1}^d + \check{\mathcal{D}}^T \check{w}_q^d + \check{z}_q^d = \mathbf{0}$$

où  $\check{\mathcal{B}}$  et  $\check{\mathcal{D}}$  sont définies par (2.49) et (2.50).

Finalement, l'expression recherchée (2.43) est obtenue en incorporant dans le vecteur d'état  $\hat{x}_q^d \in \mathbb{R}^{n(N+l)+p(l-1)}$  les états et les entrées passées selon l'équation suivante :

$$\hat{x}_q^d = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{nr}] \tilde{x}_{q+b+1}^d \\ \tilde{x}_{q+b}^d \\ \vdots \\ \tilde{x}_q^d \\ [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(r-1)}] \check{w}_{q+b+1}^d \\ \check{w}_{q+b}^d \\ \vdots \\ \check{w}_{q+1}^d \end{bmatrix}$$

□

## 2.5.2 Dual des modèles périodiques polynomiaux

En attribuant aux signaux de  $\Gamma_e^d$  une décomposition judicieuse, ce modèle peut être vu comme la représentation liftée d'un modèle périodique polynomial à ordre variant qui sera considéré comme le dual de  $\Sigma_{cl}$  et donc noté par la suite  $\Sigma_{cl}^d$ . Pour les exemples illustratifs, cette correspondance a été établie par (2.42), issue de (2.39) et (2.40). La lecture directe de ces deux dernières équations conduit aux modèles périodiques suivants, considérés respectivement duaux de  $\Sigma_{cl}\{1\}$  et  $\Sigma_{cl}\{2\}$ .

$$\Sigma_{cl}^d\{1\} : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{2q-2}^d \\ z_{2q-1}^d \\ x_{2q-3}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,0}^T \\ -B_1^T \\ A_{0,0}^T \\ -B_0^T \end{bmatrix} x_{2q-1}^d + \begin{bmatrix} C_{1,0}^T \\ -D_1^T \\ A_{1,1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q-1}^d \\ \begin{bmatrix} x_{2q-2}^d \\ z_{2q-1}^d \\ x_{2q-3}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,0}^T \\ -B_1^T \\ A_{0,0}^T \\ -B_0^T \end{bmatrix} x_{2q-2}^d + \begin{bmatrix} A_{1,1}^T \\ \mathbf{0} \\ A_{0,2}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x_{2q-1}^d + \begin{bmatrix} C_{0,0}^T \\ -D_0^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q-2}^d + \begin{bmatrix} C_{1,1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q-1}^d \end{cases}$$

$$\Sigma_{cl}^d\{2\} : \begin{cases} \begin{bmatrix} x_{2q-2}^d \\ z_{2q-1}^d \\ x_{2q-3}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,0}^T \\ -B_1^T \\ A_{0,0}^T \\ -B_0^T \end{bmatrix} x_{2q-1}^d + \begin{bmatrix} A_{0,1}^T \\ \mathbf{0} \\ A_{1,1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x_{2q}^d + \begin{bmatrix} A_{1,2}^T \\ \mathbf{0} \\ A_{0,2}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x_{2q+1}^d + \begin{bmatrix} C_{1,0}^T \\ -D_1^T \\ A_{1,3}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q-1}^d + \begin{bmatrix} C_{0,1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q}^d + \begin{bmatrix} C_{1,2}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q+1}^d \\ \begin{bmatrix} x_{2q-2}^d \\ z_{2q-1}^d \\ x_{2q-3}^d \\ z_{2q-2}^d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{0,0}^T \\ -D_0^T \end{bmatrix} w_{2q-2}^d + \begin{bmatrix} C_{1,1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q-1}^d + \begin{bmatrix} C_{0,2}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q}^d + \begin{bmatrix} C_{1,3}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w_{2q+1}^d \end{cases}$$

Dans le cas général, la structure de  $\check{\mathcal{E}}$  et  $\check{\mathcal{C}}_1$  rend possible une telle dérivation puisque ces deux matrices sont triangulaires supérieures. De plus, la diagonale de  $\check{\mathcal{E}}$  est formée de  $N$  blocs  $-\mathbf{1}_n$ . Ceci n'est pas sans rappeler les structures de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{C}_1$  dans le modèle primal. Ainsi, en définissant la correspondance suivante, pouvant être considérée comme la généralisation de (2.42) :

$$\text{Cas général : } \begin{array}{ccc} \hat{x}_q & \check{w}_q^d & \check{z}_q^d \\ \left[ \begin{array}{c} x_{Nq+l-r-1}^d \\ \vdots \\ x_{N(q-1)-r}^d \\ w_{Nq+l-r-1}^d \\ \vdots \\ w_{Nq-r+1}^d \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} w_{Nq-r}^d \\ \vdots \\ w_{N(q-1)-r+1}^d \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} z_{Nq-r}^d \\ \vdots \\ z_{N(q-1)-r+1}^d \end{array} \right] \end{array}$$

la proposition suivante donne la définition de  $\Sigma_{cl}^d$ .

**Théorème 14** ([Tréguouët et al., 2012a,c]). *Une version duale du modèle périodique  $\Sigma_{cl}$ , décrit par (2.7), est donnée par :*

$$\Sigma_{cl}^d : \begin{cases} x_{Nq-k-r-1}^d = \sum_{j=0}^{l+k-1} \left( A_{\vartheta(j,k+r),j}^T(\theta) x_{Nq-k-r+j}^d + C_{\vartheta(j,k+r),j}^T(\theta) w_{Nq-k-r+j}^d \right) \\ z_{Nq-k-r}^d = -B_{\vartheta(0,k+r)}^T(\theta) x_{Nq-k-r}^d - D_{\vartheta(0,k+r)}^T(\theta) w_{Nq-k-r}^d \end{cases} \quad (2.52)$$

pour  $0 \leq k \leq N-1$  et avec  $\vartheta(j,k) = j - k \pmod{N}$ .

On vérifiera aisément que l'ordre maximal du modèle périodique polynomial  $\Sigma_{cl}^d$  est identique à celui du  $\Sigma_{cl}$ . Ce résultat trouve son origine dans le choix de la valeur de  $\tilde{\tau}$  discuté précédemment.

### 2.5.3 Modèle dual du lifting monodromique

Contrairement au lifting  $\Gamma_e$ , le lifting monodromique  $\Gamma_m$  s'exprime sous la forme classique d'un modèle d'état à temps-invariant. Dans un tel contexte, la théorie existante de la dualité peut donc être appliquée directement. Néanmoins, cette démarche complique la mise en évidence d'une relation linéaire entre les signaux des modèles duaux, comme cela a été fait pour les modèles primaux. Une démarche similaire à celle mise en œuvre pour les modèles primaux sera donc préférée. A nouveau, il s'agit de reformuler  $\Sigma_{cl}^d$  en un modèle d'état périodique sans mémoire afin de pouvoir appliquer le lifting monodromique.

La procédure est illustrée sur les exemples 2-périodiques, dont les modèles duaux respectifs sont reformulés de la façon suivante :

$$\text{Ex.1 : } \begin{cases} \left[ \begin{array}{c} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ w_{2q-1}^d \\ z_{2q-1}^d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ A_{1,0}^T \\ \mathbf{0} \\ -B_1^T \end{array} \right] \left[ x_{2q-1}^d \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ C_{1,0}^T \\ \mathbf{1} \\ -D_1^T \end{array} \right] w_{2q-1}^d \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2q-3}^d \\ z_{2q-2}^d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & C_{1,1}^T \\ \mathbf{0} & -B_0^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ w_{2q-1}^d \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} C_{0,0}^T \\ -D_0^T \end{array} \right] w_{2q-2}^d \end{cases}$$

$$\text{Ex.2 : } \begin{cases} \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ w_{2q-1}^d \\ z_{2q-1}^d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{1,2}^T & A_{0,1}^T & A_{1,0}^T & C_{1,2}^T & C_{0,1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ C_{1,0}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ -D_1^T \end{array} \right] w_{2q-1}^d \\ \left[ \begin{array}{c} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ z_{2q-2}^d \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{1,3}^T & A_{0,2}^T & A_{1,1}^T & A_{0,0}^T & C_{1,3}^T & C_{0,2}^T & C_{1,1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -B_0^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ w_{2q-1}^d \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ C_{0,0}^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ -D_0^T \end{array} \right] w_{2q-2}^d \end{cases}$$

La proposition suivante applique cette procédure dans le cas général.

**Proposition 9** (Représentation dual sans mémoire). *Le modèle suivant est équivalent à  $\Sigma_{cl}^d$  :*

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{qN-k-r-1}^d \\ z_{qN-k-r}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_k^d(\theta) & \bar{C}_k^d(\theta) \\ \bar{B}_k^d(\theta) & \bar{D}_k^d(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_{qN-k-r}^d \\ w_{qN-k-r}^d \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

avec

$$\bar{A}_k^d = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(l+k)} & \mathbf{0} \\ \hat{A}_k^d & \hat{C}_k^d \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{p(l+k-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & (0 \leq k \leq N-2) \\ \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{n(l-1)}] & \mathbf{0} \\ \hat{A}_{N-1}^d & \hat{C}_{N-1}^d \\ \mathbf{0} & [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(l-2)}] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, & (k = N-1) \end{cases}, \quad \bar{C}_k^d = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l+k) \times p} \\ C_{\vartheta(0,k),0}^T \\ \mathbf{0}_{p(l+k-1) \times p} \\ \mathbf{1}_p \end{bmatrix}, & (0 \leq k \leq N-2) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times p} \\ C_{\vartheta(0,k),0}^T \\ \mathbf{0}_{p(l-2) \times p} \\ \mathbf{1}_p \end{bmatrix}, & (k = N-1) \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\hat{A}_k^d = \left[ A_{\vartheta(l+k-1,k+r),l+k-1}^T \cdots A_{\vartheta(1,k+r),1}^T A_{\vartheta(0,k+r),0}^T \right], \quad \hat{C}_k^d = \left[ C_{\vartheta(l+k-1,k+r),l+k-1}^T \cdots C_{\vartheta(1,k+r),1}^T \right] \quad (2.55)$$

$$\bar{B}_k^d = \left[ \left[ \mathbf{0}_{m \times n(l+k-1)} \quad -B_{\vartheta(0,k)}^T \right] \quad \mathbf{0}_{m \times p(l+k-1)} \right], \quad \bar{D}_k^d = -D_{\vartheta(0,k+r)}^T \quad (2.56)$$

*Démonstration.* Le modèle périodique  $\Sigma_{cl}^d$  peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} x_{Nq-k-r-1}^d \\ z_{Nq-k-r}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k^d \\ \mathbf{0} \quad -B_{\vartheta(0,k+r)}^T \end{bmatrix} \bar{x}_{Nq-k-r}^d + \begin{bmatrix} \hat{C}_k^d & C_{\vartheta(0,k+r),0}^T \\ \mathbf{0} & -D_{\vartheta(0,k+r)}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_{Nq-k-r+1}^d \\ w_{Nq-k-r}^d \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

où  $\hat{A}_k^d$  et  $\hat{C}_k^d$  sont définies par (2.55). Les vecteurs de dimensions variables  $\bar{x}_{Nq-k-r}^d \in \mathbb{R}^{n(l+k)}$  et  $\bar{w}_{Nq-k-r+1}^d \in \mathbb{R}^{p(l+k-1)}$  rassemblent respectivement l'historique des états et des entrées nécessaires à l'évaluation de  $x_{Nq-k-r-1}^d$  :

$$\bar{x}_{Nq-k-r}^d = \begin{bmatrix} x_{Nq+l-r-1}^d \\ \vdots \\ x_{Nq-k-r}^d \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_{Nq-k-r+1}^d = \begin{bmatrix} w_{Nq+l-r-1}^d \\ \vdots \\ w_{Nq-k-r+1}^d \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Au cours de la période, les dimensions de  $\bar{x}_{Nq-k-r}^d$  et  $\bar{w}_{Nq-k-r+1}^d$  croissent à chaque instant pour mémoriser les nouvelles occurrences de l'état et de l'entrée de sorte que

$$\bar{x}_{Nq-k-r-1}^d = \begin{bmatrix} \bar{x}_{Nq-k-r}^d \\ x_{Nq-k-r-1}^d \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_{Nq-k-r}^d = \begin{bmatrix} \bar{w}_{Nq-k-r+1}^d \\ w_{Nq-k-r}^d \end{bmatrix}, \quad (0 \leq k \leq N-2) \quad (2.59)$$

En revanche, le calcul de  $x_{N(q-1)-r-1}^d$ , le premier état de la nouvelle période, requiert un historique des états et des entrées plus court, si bien que  $\bar{x}_{N(q-1)-r}^d$  et  $\bar{w}_{N(q-1)-r+1}^d$  sont donnés par l'équation suivante :

$$\bar{x}_{N(q-1)-r}^d = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{n(l-1)}] \bar{x}_{N(q-1)-r+1}^d \\ x_{N(q-1)-r}^d \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_{N(q-1)-r+1}^d = \begin{bmatrix} [\mathbf{0} \ \mathbf{1}_{p(l-2)}] \bar{w}_{N(q-1)-r+2}^d \\ w_{N(q-1)-r+1}^d \end{bmatrix}, \quad (k = N-1) \quad (2.60)$$

En s'appuyant sur (2.57), (2.59) et (2.60), on obtient le modèle d'état périodique (2.53) dont le vecteur d'état rassemble l'historique des états et des entrées :

$$\bar{v}_{Nq-k-r}^d = \begin{bmatrix} \bar{x}_{Nq-k-r}^d \\ \bar{w}_{Nq-k-r+1}^d \end{bmatrix}$$

□

Cette reformulation permet d'établir l'expression de  $\Gamma_m^d$  grâce à la procédure de lifting monodromique qui s'applique ici à temps inversé.

**Proposition 10** (Lifting monodromique dual). *Le modèle temps-invariant suivant, noté  $\Gamma_m^d$ , est une reformulation équivalente de (2.52) :*

$$\Gamma_m^d : \begin{bmatrix} \rho_{q-1}^d \\ z_q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T(\theta) & \check{\mathcal{C}}^T(\theta) \\ \check{\mathfrak{B}}^T(\theta) & \check{\mathfrak{D}}^T(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \rho_q^d \in \mathbb{R}^{n+l-p(l-1)} \quad (2.61)$$

L'expression des matrices  $\Gamma_m^d$  n'est pas donnée explicitement. On retiendra simplement qu'il s'agit de fonctions polynomiales des matrices du modèle périodique sans mémoire (2.53).

### 2.5.4 Correspondances entre les représentations liftées

Cette fois encore, les deux représentations liftées  $\Gamma_e^d$  et  $\Gamma_m^d$  partagent les mêmes entrées/sorties mais diffèrent par la représentation interne qu'elles adoptent. Cette remarque met en évidence la relation linéaire existant entre les signaux de ces modèles. On notera cependant que la construction du vecteur d'état de  $\Gamma_m^d$  requiert non seulement l'état de  $\Gamma_e^d$  mais aussi le vecteur d'entrée étendue  $\tilde{w}_q^d$ . Ceci fait écho à la discussion autour de la dépendance de la dynamique de  $\Gamma_e^d$  à l'égard de l'historique des entrées.

Pour établir cette relation, les signaux du modèle périodique servent à nouveau d'intermédiaire. Par construction, le vecteur d'état  $\rho_q^d$  correspond à  $\bar{v}_{Nq-r}^d$ , lui-même composé des signaux de  $\Sigma_{cl}^d$  :

$$\rho_q^d = \bar{v}_{Nq-r}^d = \begin{bmatrix} \bar{x}_{Nq-r}^d \\ \bar{w}_{Nq-r+1}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \phi_q^d \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

où la décomposition de  $\rho_q^d$  par  $\eta_q^d$  et  $\phi_q^d$  est introduite en prévision d'une utilisation future. En s'appuyant sur ce résultat, les équations suivantes illustrent le lien entre  $\Gamma_e^d$  et  $\Gamma_m^d$  pour les deux exemples.

$$\begin{array}{l} \text{Ex.1 :} \\ \text{Ex.2 :} \end{array} \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \tilde{w}_q^d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \end{bmatrix} \end{array} = T^d \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \tilde{w}_q^d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{2q+1}^d \\ x_{2q}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-1}^d \\ x_{2q-2}^d \\ x_{2q-3}^d \\ w_{2q+1}^d \\ w_{2q}^d \\ w_{2q-1}^d \\ w_{2q-2}^d \end{bmatrix} \end{array}$$

La proposition suivante généralise ce résultat en s'appuyant sur (2.5.2), (2.58) et (2.62).

**Proposition 11.** *Les signaux de  $\Gamma_m^d$  sont liés à ceux de  $\Gamma_e^d$  par la relation suivante :*

$$\begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \tilde{w}_q^d \end{bmatrix} = T^d \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \tilde{w}_q^d \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T^d = \begin{bmatrix} [\mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0}_{nl \times nN}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{1}_{p(l-1)} & \mathbf{0}_{p(l-1) \times pN}] \\ [\mathbf{0}_{nl \times nN} & \mathbf{1}_{nl}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{0}_{p(l-1) \times pN} & \mathbf{1}_{p(l-1)}] \\ \mathbf{0} & [\mathbf{0}_{pN \times p(l-1)} & \mathbf{1}_{pN}] \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

La matrice  $T^d$  est telle que  $T^d \in \mathbb{R}^{2((n+p)l-p) \times ((n+p)(l+N)-p)}$ .

Comme dans le cas primal, il est possible de mettre en évidence une relation réciproque à (2.63) conduisant aux signaux de  $\Gamma_e^d$  à partir de ceux de  $\Gamma_m^d$ . Ce lien n'est cependant pas essentiel pour la suite de la démarche et ne sera donc pas explicité. D'autre part, en exploitant l'inversibilité de  $\tilde{\mathcal{E}}$ , il est possible d'établir une correspondance entre les matrices de  $\Gamma_e^d$  et  $\Gamma_m^d$  comme cela été fait entre leurs correspondants primaux. Pour éviter la redondance, ce développement n'est cependant pas présenté.

## 2.6 Analyse robuste des modèles polynomiaux périodiques à ordre variant

Les opérations de lifting et de dualité préservent la stabilité ainsi que les performances robustes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Par conséquent, les modèles  $\Sigma_{cl}(\theta)$ ,  $\Gamma_m(\theta)$ ,  $\Gamma_e(\theta)$ ,  $\Sigma_{cl}^d(\theta)$ ,  $\Gamma_m^d(\theta)$  et  $\Gamma_e^d(\theta)$  partagent tous les mêmes résultats

d'analyses.

En ce basant sur ce résultat et en exploitant les liens existant entre les liftings, il est possible d'obtenir des conditions d'analyse accessibles au type de relaxation mise en œuvre dans le premier chapitre. Ceci conduit à des bornes supérieures des coût garantis. Or, le chapitre 1 a montré que les conditions d'analyse de stabilité robuste primales et duales ne sont pas équivalentes dans le cas général. Des exemples numériques démontrent que cette constatation se vérifie aussi pour l'analyse de performance puisque les bornes des conditions primales et duales ne sont pas identiques. Par conséquent, l'exploitation de la dualité permet d'affiner l'analyse robuste en ne retenant que le minimum des deux bornes.

### 2.6.1 Stratégie conduisant à des conditions LMI

Le système  $\Gamma_m(\theta)$  s'exprime comme un modèle d'état à temps-invariant classique, ce qui permet de faire appel à une gamme très vaste d'outils d'analyse. Les développements précédents ont toutefois montré que les matrices de  $\Sigma_{cl}(\theta)$  n'apparaissent pas linéairement dans l'expression de celles de  $\Gamma_m(\theta)$ , alors qu'il s'agit d'une exigence forte pour la dérivation de conditions d'analyse robuste testables (voir le chapitre 1). La représentation descripteur  $\Gamma_e(\theta)$  a été conçue comme une réponse à ce défaut, mais n'a pu être obtenue qu'en adoptant une formulation plus difficilement accessible à l'analyse. La stratégie retenue s'efforce donc de tirer parti de chacune de ces deux formulations en exploitant les correspondances existant entre elles. Les grandes lignes de cette démarche sont maintenant présentées et illustrées pour l'analyse de stabilité de  $\Sigma_{cl}\{1\}$ . On remarquera que cette approche est très similaire à celle menée dans les preuves des théorèmes 9 et 11 du chapitre 1.

1. Obtenir des conditions d'analyse pour  $\Gamma_m(\theta)$  via les outils classiques pour les modèles à temps-invariant.

*Le modèle  $\Gamma_m(\theta)$  est stable si et seulement si sa matrice d'état  $\Psi(\theta)$  est stable au sens de Schur :*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \quad \Psi^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) - P(\theta) \prec 0 \quad \text{avec} \quad \Psi(\theta) = A_{1,0}(\theta)A_{0,0}(\theta) + A_{1,1}(\theta) \quad (2.64)$$

2. En exploitant les correspondances entre les deux liftings, reformuler les conditions précédentes en faisant apparaître les matrices de  $\Gamma_e(\theta)$ .

*La condition (2.64) est réécrite de manière équivalente*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \quad \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q} \end{bmatrix} \prec 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

*afin d'utiliser la correspondance*

$$\begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

*conduisant à la condition*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n : \quad \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{bmatrix}^T T^T \begin{bmatrix} P(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P(\theta) \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{bmatrix} \prec 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_{1,0}(\theta) & A_{1,1}(\theta) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2q+2} \\ x_{2q+1} \\ x_{2q} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

*que le lemme d'élimination permet de réécrire sous la forme*

$$\exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^n, \exists \mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{3n \times 2n} : \quad \begin{bmatrix} P(\theta) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P(\theta) \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}(\theta) \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_{1,0}(\theta) & A_{1,1}(\theta) \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0}(\theta) \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (2.65)$$

3. Relaxer les conditions obtenues afin d'obtenir un problème SDP.

Contraindre  $\mathcal{F}$  à être indépendant de  $\theta$  et  $P(\theta)$  à être polytopique rend (2.65) linéaire en  $\theta$ . Une condition suffisante de stabilité robuste peut alors être dérivée en évaluant (2.65) uniquement sur les sommets du polytope auquel appartient  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{3n \times 2n} \quad & \text{telle que} \\ \exists P^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \quad & \begin{bmatrix} P^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & A_{1,0}^{[i]} & A_{1,1}^{[i]} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} & A_{0,0}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} \prec 0, \quad \forall i \in \{1 \cdots L\} \end{aligned}$$

Cette dernière condition n'est autre que le résultat d'analyse principal du chapitre 1. Comme il a été expliqué précédemment, cette dernière n'est que suffisante en raison de la restriction pour  $\mathcal{F}$  de ne pas dépendre de  $\theta$ .

**Remarque.** Cette démarche peut indifféremment s'appuyer sur les correspondances entre les signaux ou entre les matrices. Dans cette sous-section, on fait le choix d'utiliser les liens sur les signaux. L'annexe E témoigne que ces résultats peuvent être retrouvés de façon entièrement algébrique en s'appuyant sur les relations entre les matrices, donnant ainsi lieu à une preuve alternative.  $\circ$

### 2.6.2 Analyse par le modèle monodromique

Comme expliqué précédemment, les conclusions sur l'analyse de  $\Gamma_m$  s'appliquent également au modèle périodique  $\Sigma_{cl}$ . Les théorèmes suivants reposent sur cette propriété.

**Théorème 15** (Stabilité robuste : conditions monodromiques). *Chacune des deux conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité robuste du modèle périodique  $\Sigma_{cl}$  :*

$$\text{Primale :} \quad \exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl} : \Psi^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) - P(\theta) \prec 0 \quad (2.66)$$

$$\text{Duale :} \quad \exists W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl} : \check{\Psi}_{00}(\theta)W(\theta)\check{\Psi}_{00}^T(\theta) - W(\theta) \prec 0 \quad (2.67)$$

avec

$$\check{\Psi}_{00}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nl} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nl} \end{bmatrix}^T \check{\Psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nl} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nl} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

*Démonstration.* Si la condition primale est évidente, son équivalent duale nécessite les quelques développements suivants. D'après (2.62),  $\rho_q^d$  est composé en partie de  $\phi_q^d = \bar{w}_{Nq-r+1}^d$  représentant l'historique des entrées nécessaires à l'évaluation de  $x_{Nq-r-1}^d$ . Ainsi, lors de la période  $q-1$ ,  $\phi_{q-1}^d$  puisera parmi  $\phi_q^d$  et  $\check{w}_q^d$  pour actualiser cet historique. Selon (2.5.2) et (2.58), la correspondance entre ces signaux et les entrées de  $\Sigma_{cl}^d$  est la suivante :

$$\phi_{q-1}^d = \begin{bmatrix} w_{Nq-N+l-r-1}^d \\ \vdots \\ w_{Nq-N-r+1}^d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p(l-1)}, \quad \begin{bmatrix} \phi_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{Nq+l-r-1}^d \\ \vdots \\ w_{Nq-N-r+1}^d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p(N+l-1)}$$

d'où l'on obtient :

$$\phi_{q-1}^d = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p(l-1) \times pN} & \mathbf{1}_{p(l-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

Or, l'équation dynamique du modèle  $\Gamma_m^d$  définie par (2.61) s'écrit de la façon suivante si l'on emploie les notations (2.62) :

$$\begin{bmatrix} \eta_{q-1}^d \\ \phi_{q-1}^d \end{bmatrix} = \check{\Psi}^T \begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \phi_q^d \end{bmatrix} + \check{\mathfrak{C}}^T \check{w}_q^d$$

On en déduit alors la structure de  $\check{\Psi}^T$  :

$$\check{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \check{\Psi}_{00}^T & \check{\Psi}_{01}^T \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nl} & \check{\Psi}_{11}^T \end{bmatrix}$$

où

$$\check{\Psi}_{11}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p(l-1) \times pN} & \mathbf{1}_{p(l-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{p(l-1)} \\ \mathbf{0}_{pN \times p(l-1)} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{0}_{p(l-1)} & (l \leq N+1) \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{p(l-1-N)} \\ \mathbf{0}_{pN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} & (l > N+1) \end{cases}$$

Les valeurs propres de  $\check{\Psi}_{11}^T$  sont donc toujours nulles ce qui démontre sa stabilité au sens de Schur. La stabilité de  $\check{\Psi}^T$  est donc équivalente à celle de  $\check{\Psi}_{00}^T$ , elle-même équivalente à la condition (2.67).  $\square$

Par construction, le vecteur  $\phi_q^d$ , constituant une partie de  $\rho_q^d$  selon (2.62), correspond à la mémorisation des entrées de  $\Sigma_{cl}^d$  sur un horizon fini. La dynamique associée à  $\phi_q^d$  est donc toujours stable puisqu'elle correspond à un simple décalage temporel. C'est la raison pour laquelle une partie seulement de  $\check{\Psi}^T$ , la matrice d'état de  $\Gamma_m^d$ , doit être examinée pour statuer sur la stabilité du modèle complet.

**Théorème 16** ( $\mathcal{H}_\infty$  : conditions monodromiques). *La solution  $\nu_{wc}$  du problème d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  est solution du problème d'optimisation suivant, pour lequel  $P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}$  :*

$$\text{Primale : } \quad \nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{P(\theta)} \nu$$

sous

$$\begin{bmatrix} \Psi^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) - P(\theta) + \mathfrak{C}^T(\theta)\mathfrak{C}(\theta) & \Psi^T(\theta)P(\theta)\mathfrak{B}(\theta) + \mathfrak{C}^T(\theta)\mathfrak{D}(\theta) \\ \mathfrak{B}^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) + \mathfrak{D}^T(\theta)\mathfrak{C}(\theta) & \mathfrak{B}^T(\theta)P(\theta)\mathfrak{B}(\theta) + \mathfrak{D}^T(\theta)\mathfrak{D}(\theta) - \nu 1_{mN} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.70)$$

Le problème d'optimisation suivant, pour lequel  $W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$ , conduit également à  $\nu_{wc}$  :

$$\text{Duale : } \quad \nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{W(\theta)} \nu$$

sous

$$\begin{bmatrix} \check{\Psi}(\theta)W(\theta)\check{\Psi}^T(\theta) - W(\theta) + \check{\mathfrak{B}}(\theta)\check{\mathfrak{B}}^T(\theta) & \check{\Psi}(\theta)W(\theta)\check{\mathfrak{C}}^T(\theta) + \check{\mathfrak{B}}(\theta)\check{\mathfrak{D}}^T(\theta) \\ \check{\mathfrak{C}}(\theta)W(\theta)\check{\Psi}^T(\theta) + \check{\mathfrak{D}}(\theta)\check{\mathfrak{B}}^T(\theta) & \check{\mathfrak{C}}(\theta)W(\theta)\check{\mathfrak{C}}^T(\theta) + \check{\mathfrak{D}}(\theta)\check{\mathfrak{D}}^T(\theta) - \nu 1_{pN} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.71)$$

**Théorème 17** ( $\mathcal{H}_2$  : conditions monodromiques via le grammien d'observabilité). *La solution  $\gamma_{wc}$  du problème d'analyse  $\mathcal{H}_2$  est solution du problème d'optimisation suivant, pour lequel  $P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}$  et  $Z(\theta) \in \mathbb{S}^{mN}$  :*

$$\text{Primale : } \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{P(\theta), Z(\theta)} \gamma$$

sous

$$\Psi^T(\theta)P(\theta)\Psi(\theta) - P(\theta) + \mathfrak{C}^T(\theta)\mathfrak{C}(\theta) \prec 0 \quad (2.72a)$$

$$\mathfrak{B}^T(\theta)P(\theta)\mathfrak{B}(\theta) + \mathfrak{D}^T(\theta)\mathfrak{D}(\theta) - Z(\theta) \prec 0 \quad (2.72b)$$

$$\text{trace}(Z(\theta)) < \gamma \quad (2.72c)$$

Le problème d'optimisation suivant, pour lequel  $W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$  et  $Z(\theta) \in \mathbb{S}^{pN}$ , conduit également à  $\gamma_{wc}$  :

$$\text{Duale : } \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{W(\theta), Z(\theta)} \gamma$$

sous

$$\check{\Psi}(\theta)W(\theta)\check{\Psi}^T(\theta) - W(\theta) + \check{\mathfrak{B}}(\theta)\check{\mathfrak{B}}^T(\theta) \prec 0 \quad (2.73a)$$

$$\check{\mathfrak{C}}(\theta)W(\theta)\check{\mathfrak{C}}^T(\theta) + \check{\mathfrak{D}}(\theta)\check{\mathfrak{D}}^T(\theta) - Z(\theta) \prec 0 \quad (2.73b)$$

$$\text{trace}(Z(\theta)) < \gamma \quad (2.73c)$$

**Remarque.** Dans le cas temps-invariant, il est bien connu que les conditions d'analyse  $\mathcal{H}_2$  du modèle primal obtenues via le grammien d'observabilité partagent la même formulation que les conditions d'analyse du modèle dual s'appuyant sur le grammien de commandabilité. Stricto sensu, cette correspondance n'existe pas ici puisque les modèles  $\Gamma_m$  et  $\Gamma_m^d$  n'entretiennent pas entre-eux la relation classique des modèles d'état duaux à temps-invariant. Les deux conditions d'analyse  $\mathcal{H}_2$  du théorème 17 sont cependant équivalentes, même si elles n'adoptent pas la même formulation.

Dans le même esprit, la ressemblance de (2.66) et (2.67) avec les conditions d'analyse classiques des modèles temps-invariant pourrait laisser croire que  $\Psi$  est la matrice transposée de  $\check{\Psi}_{00}$ . Cette fois encore, cette correspondance directe n'existe pas puisque  $\Gamma_m^d$  n'a pas été directement dérivé de  $\Gamma_m$  mais de  $\Gamma_e^d$  par l'intermédiaire de  $\Sigma_{cl}^d$ .  $\circ$

### 2.6.3 Analyse par le modèle descripteur

Suivant le fil conducteur annoncé au début de cette section, il s'agit maintenant d'adapter ces conditions à l'analyse du lifting descripteur. A cette fin, les conditions primales précédentes sont préalablement reformulées en utilisant les signaux de  $\Gamma_m$ . Pour éviter la redondance, l'équivalent de ce résultat pour le modèle duale est relégué dans l'annexe E.



**Lemme 19** (Conditions primales utilisant les signaux). *Les conditions primales de stabilité robuste et des problèmes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  peuvent être réécrites de la façon suivante :*

– (2.66) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.74)$$

– (2.70) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & & & \\ & -P & & \\ & & -\nu \mathbf{1}_{mN} & \\ & & & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.75)$$

– (2.72a) et (2.72b) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & & & \\ & -P & & \\ & & \mathbf{0}_{mN} & \\ & & & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.76a)$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & & & \\ & \mathbf{0}_{nl} & & \\ & & -Z & \\ & & & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{q+1} \\ \eta_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.76b)$$

*Démonstration.* L'application du lemme d'élimination suffit à prouver que les conditions (2.74), (2.75), (2.76a) et (2.76b) sont équivalentes à (2.66), (2.70), (2.72a) et (2.72b) respectivement en remarquant que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, & \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi & \mathfrak{B} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathfrak{C} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, & \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{1} & \Psi & \mathfrak{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{B} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathfrak{D} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

□

En s'appuyant sur la correspondance entre les signaux des liftings donnée par les propositions 5 et 11, ces nouveaux énoncés autorisent la reformulation des conditions d'analyse faisant apparaître les matrices des liftings descripteurs  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_e^d$ . Seules les preuves pour les conditions primales sont données dans cette section. Le lecteur intéressé par les démonstrations des conditions duales pourra se référer à l'annexe E.

**Théorème 18** (Stabilité robuste : conditions descripteur). *Chacune des deux conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour prouver la stabilité robuste du modèle périodique  $\Sigma_{cl}$  :*

$$\text{Primale : } \exists P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}, \exists \mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{n(N+l) \times nN} : -\mathcal{X}(P(\theta)) + \text{He}\{\mathcal{F}(\theta) \begin{bmatrix} \mathcal{E}(\theta) & \mathcal{A}(\theta) \end{bmatrix}\} \prec 0 \quad (2.77)$$

$$\text{Duale : } \exists W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}, \exists \mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{nN \times n(N+l)} : \mathcal{X}(W(\theta)) + \text{He}\left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}(\theta) \\ \check{\mathcal{E}}(\theta) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) \right\} \prec 0 \quad (2.78)$$

où l'opérateur  $\mathcal{X}(P) \in \mathbb{R}^{n(l+N)}$  est défini comme suit

$$\mathcal{X}(P) = T^T \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{nN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

*Démonstration.* La matrice  $T$  étant de rang plein en colonne, la condition (2.74) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\hat{x}_q^T T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} T \hat{x}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{A} \end{bmatrix} \hat{x}_q = \mathbf{0}$$

Puis,  $\mathcal{X}(P)$  est introduite et le lemme d'élimination est utilisé pour obtenir (2.77). La preuve de la condition duale, très similaire, est disponible dans l'annexe E. □

**Théorème 19** ( $\mathcal{H}_\infty$  : conditions descripteur). *La solution  $\nu_{wc}$  du problème d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  est solution du problème d'optimisation suivant, pour lequel  $P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}$  et  $\mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n(N+l)+mN) \times nN}$  :*

$$\text{Primale : } \quad \nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{P(\theta), \mathcal{F}(\theta)} \nu$$

sous

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{X}(P(\theta)) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T(\theta) \\ \mathcal{C}_2^T(\theta) \\ \mathcal{D}^T(\theta) \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \{ \mathcal{F}(\theta) [\mathcal{E}(\theta) \quad \mathcal{A}(\theta) \quad \mathcal{B}(\theta)] \} \prec 0 \quad (2.80)$$

Le problème d'optimisation suivant, pour lequel  $W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$  et  $\mathcal{F}(\theta) \in \mathbb{R}^{nN \times (n(N+l)+p(N+l-1))}$ , conduit également à  $\nu_{wc}$  :

$$\text{Duale : } \quad \nu_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{W(\theta), \mathcal{F}(\theta)} \nu$$

sous

$$\mathcal{X}^d(W(\theta), -\nu \mathbf{1}_{pN}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{B}}(\theta) \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{D}}(\theta) \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}(\theta) \\ \check{\mathcal{E}}(\theta) \\ \check{\mathcal{C}}_2(\theta) \\ \check{\mathcal{C}}_1(\theta) \end{bmatrix} \mathcal{F}(\theta) \right\} \prec 0 \quad (2.81)$$

où l'opérateur  $\mathcal{X}^d(W, Z)$  est défini pour  $W \in \mathbb{S}^{nl+p(l-1)}$  et  $Z \in \mathbb{S}^{pN}$  par

$$\mathcal{X}^d(W, Z) = (T^d)^T \begin{bmatrix} -W & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1} \end{bmatrix} T^d = \begin{bmatrix} -W_1 & \mathbf{0} & -W_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -W_2^T & \mathbf{0} & -W_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_1 & \mathbf{0} & W_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{pN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W_2^T & \mathbf{0} & W_3 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

avec  $W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2^T & W_3 \end{bmatrix}$ ,  $W_1 \in \mathbb{S}^{nl}$  et  $W_3 \in \mathbb{S}^{p(l-1)}$ .

*Démonstration.* Comme pour le problème de stabilité robuste, (2.75) est d'abord reformulée en s'appuyant sur (2.25)

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} T \\ -\nu \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} + \hat{z}_q^T \hat{z}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{E} & \mathcal{A}] & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ [\check{\mathcal{C}}_1 & \check{\mathcal{C}}_2] & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

avant d'introduire  $\mathcal{X}(P)$ , définie par (2.79). La substitution de l'expression de  $\hat{z}_q$  donne ensuite

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} -\mathcal{X}(P) & \\ & -\nu \mathbf{1} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}^T \\ \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \right\} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{E} & \mathcal{A}] & \mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

qui conduit à (2.80) en appliquant le lemme d'élimination. Une preuve alternative de ce résultat est disponible dans l'annexe E. La preuve de la condition duale est disponible dans l'annexe E.  $\square$

**Théorème 20** ( $\mathcal{H}_2$  : conditions descripteur). *La solution  $\gamma_{wc}$  du problème d'analyse  $\mathcal{H}_2$  est solution du problème d'optimisation suivant, pour lequel  $P(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl}$  et  $\mathcal{F}_1(\theta) \in \mathbb{R}^{n(N+l) \times nN}$ ,  $\mathcal{F}_2(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+m)N \times nN}$  et  $Z(\theta) \in \mathbb{S}^{mN}$  :*

$$\text{Primale : } \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{P(\theta), \mathcal{F}_1(\theta), \mathcal{F}_2(\theta), Z(\theta)} \gamma$$

sous

$$-\mathcal{X}(P(\theta)) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T(\theta) \\ \mathcal{C}_2^T(\theta) \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \{ \mathcal{F}_1(\theta) [\mathcal{E}(\theta) \quad \mathcal{A}(\theta)] \} \prec 0 \quad (2.83a)$$

$$Z(P(\theta), Z(\theta)) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T(\theta) \\ \mathcal{D}^T(\theta) \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \{ \mathcal{F}_2(\theta) [\mathcal{E}(\theta) \quad \mathcal{B}(\theta)] \} \prec 0 \quad (2.83b)$$

$$\text{trace}(Z(\theta)) < \gamma \quad (2.83c)$$

Le problème d'optimisation suivant, pour lequel  $W(\theta) \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$ ,  $\mathcal{F}_1(\theta) \in \mathbb{R}^{nN \times (n(N+l)+p(N+l-1))}$ ,  $\mathcal{F}_2(\theta) \in \mathbb{R}^{nN \times (n+p)N}$  et  $Z(\theta) \in \mathbb{S}^{pN}$ , conduit également à  $\gamma_{wc}$  :

$$\text{Duale : } \quad \gamma_{wc} = \max_{\theta \in \Theta} \min_{W(\theta), \mathcal{F}_1(\theta), \mathcal{F}_2(\theta), Z(\theta)} \gamma$$

sous

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathcal{X}^d(W(\theta), \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathbf{B}}(\theta) \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathbf{A}}(\theta) \\ \check{\mathbf{E}}(\theta) \\ \check{\mathbf{C}}_2(\theta) \end{bmatrix} \mathcal{F}_1(\theta) \right\} \prec 0 \quad (2.84a)$$

$$\mathcal{Z}^d(W(\theta), Z(\theta)) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times n} & \mathbf{1}_{nN} \\ \check{\mathbf{D}}(\theta) & \check{\mathbf{B}}(\theta) \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathbf{E}}(\theta) \\ \check{\mathbf{C}}_1(\theta) \end{bmatrix} \mathcal{F}_2(\theta) \right\} \prec 0 \quad (2.84b)$$

$$\text{trace}(Z) < \gamma \quad (2.84c)$$

où les opérateurs  $\mathcal{Z}(P, Z)$  et  $\mathcal{Z}^d(W, Z)$  sont définis par

$$\mathcal{Z}(P, Z) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0}_{nl \times nN} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0}_{nl \times nN} \end{bmatrix} \\ -Z \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+m)N} \quad (2.85)$$

$$\mathcal{Z}^d(W, Z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl \times nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix}^T (T^d)^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl+p(l-1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -Z \end{bmatrix} T^d \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl \times nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{(n+p)N} \quad (2.86)$$

*Démonstration.* La condition  $\mathcal{H}_2$  est obtenue en suivant la même démarche : l'utilisation de (2.25) permet de réécrire (2.76a) :

$$\hat{x}_q^T T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} T \hat{x}_q + \hat{z}_q^T \hat{z}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{E} & \mathcal{A}] & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ [\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2] & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

qui peut être simplifiée de la façon suivante :

$$\hat{x}_q^T T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P \end{bmatrix} T \hat{x}_q + \hat{z}_q^T \hat{z}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{E} & \mathcal{A}] & \mathbf{0} \\ [\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2] & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Ceci conduit à (2.83a), après substitution de  $\hat{z}_q$  par son expression et utilisation du lemme d'élimination.

De même, en s'appuyant sur (2.25), (2.76b) est reformulée comme suit :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} + \hat{z}_q^T \hat{z}_q < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\mathcal{E} & \mathcal{A}] & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ [\mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2] & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.87)$$

On remarque que les derniers  $nl$  éléments de  $\hat{x}_q$  sont nuls si bien que l'on peut écrire :

$$\hat{x}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}_q$$

ce qui permet de simplifier (2.87) :

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T T^T \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \end{bmatrix} + \hat{z}_q^T \hat{z}_q < 0 \\ \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A nouveau, le remplacement de  $\hat{z}_q$  par son expression ainsi que l'emploi du lemme d'élimination conduit à (2.83b). La preuve de la condition duale est disponible dans l'annexe E.  $\square$

## 2.6.4 Conditions d'analyse robuste sous forme LMI

Les matrices du modèle  $\Sigma_{cl}$  apparaissant linéairement dans les dernières conditions présentées, la relaxation utilisée dans le chapitre 1 peut à nouveau être mise en oeuvre :  $P(\theta)$ ,  $W(\theta)$  et  $Z(\theta)$  sont choisies comme des fonctions polytopiques de  $\theta$  et les matrices des variables de relaxation, à savoir  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$ , sont contraintes à ne pas dépendre de  $\theta$ . L'invocation de l'argument de convexité traditionnel (voir la preuve du théorème 7 du chapitre 1) permet alors de n'évaluer les conditions obtenues que sur les sommets du polytope auquel appartient  $\theta$ .

**Théorème 21** (Stabilité robuste [Tréguët et al., 2012b]). *Chacun des deux jeux suivants de conditions constitue une condition suffisante de stabilité du modèle périodique  $\Sigma_{cl}$  :*

$$\text{Primale : } \exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n(N+l) \times nN} \text{ telle que } \forall i \in \{1 \dots L\}, \exists P^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl} : -\mathcal{X}(P^{[i]}) + \text{He}\{\mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{[i]} & \mathcal{A}^{[i]} \end{bmatrix}\} \prec 0 \quad (2.88)$$

$$\text{Duale : } \exists \mathcal{F} \in \mathbb{R}^{nN \times n(N+l)} \text{ telle que } \forall i \in \{1 \dots L\}, \exists W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl} : \mathcal{X}(W^{[i]}) + \text{He}\left\{\begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{[i]} \end{bmatrix} \mathcal{F}\right\} \prec 0 \quad (2.89)$$

où l'opérateur  $\mathcal{X}(P)$  est défini par (2.79).

**Théorème 22** ( $\mathcal{H}_\infty$  - [Tréguët et al., 2012a]). *La solution  $\nu_g$  du problème SDP suivant, pour lequel  $P^{[i]} \in \mathbb{S}^{nl}$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{(n(N+l)+mN) \times nN}$ , est un coût garanti du problème d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$ , c'est-à-dire  $\nu_{wc} \leq \nu_g$  :*

$$\text{Primale : } \nu_g = \min_{P^{[i]}, \mathcal{F}} \nu$$

sous les contraintes suivantes, pour  $i \in \{1 \dots L\}$ ,

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{X}(P^{[i]}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{I}_{mN} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathcal{C}_1^{[i]})^T \\ (\mathcal{C}_2^{[i]})^T \\ (\mathcal{D}^{[i]})^T \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \mathcal{F} \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{[i]} & \mathcal{A}^{[i]} & \mathcal{B}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (2.90)$$

La solution  $\nu_g^d$  du problème SDP suivant, pour lequel  $W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$  et  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{nN \times (n(N+l)+p(N+l-1))}$ , est un autre coût garanti du problème d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\text{Duale : } \nu_g^d = \min_{W^{[i]}, \mathcal{F}} \nu$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $i \in \{1 \dots L\}$ ,

$$\mathcal{X}^d(W^{[i]}, -\nu \mathbf{I}_{pN}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{B}}^{[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{D}}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{C}}_2^{[i]} \\ \check{\mathcal{C}}_1^{[i]} \end{bmatrix} \mathcal{F} \right\} \prec 0 \quad (2.91)$$

Les opérateurs  $\mathcal{X}(P)$  et  $\mathcal{X}^d(P, Z)$  sont respectivement définis par (2.79) et (2.82).

**Théorème 23** ( $\mathcal{H}_2$  - [Tréguët et al., 2012c]). *La solution  $\gamma_g$  du problème SDP suivant, pour lequel  $P^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl}$ ,  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{n(N+l) \times nN}$ ,  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{(n+m)N \times nN}$  et  $Z^{[i]} \in \mathbb{S}^{mN}$ , est un coût garanti du problème d'analyse  $\mathcal{H}_2$ , c'est-à-dire  $\gamma_{wc} \leq \gamma_g$  :*

$$\text{Primale : } \gamma_g = \min_{P^{[i]}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, Z^{[i]}} \gamma$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $i \in \{1 \dots L\}$ ,

$$-\mathcal{X}(P^{[i]}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathcal{C}_1^{[i]})^T \\ (\mathcal{C}_2^{[i]})^T \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}_1 \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{[i]} & \mathcal{A}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (2.92a)$$

$$\mathcal{Z}(P^{[i]}, Z^{[i]}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} (\mathcal{C}_1^{[i]})^T \\ (\mathcal{D}^{[i]})^T \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \mathcal{F}_2 \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{[i]} & \mathcal{B}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad (2.92b)$$

$$\text{trace}(Z^{[i]}) < \gamma \quad (2.92c)$$

La solution  $\gamma_g^d$  du problème SDP suivant, pour lequel  $W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$ ,  $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{R}^{nN \times (n(N+l)+p(l-1))}$ ,  $\mathcal{F}_2 \in \mathbb{R}^{nN \times (n+p)N}$  et  $Z^{[i]} \in \mathbb{S}^{pN}$  est un autre coût garanti du problème d'analyse  $\mathcal{H}_2$  :

$$\text{Duale : } \gamma_g^d = \min_{W^{[i]}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, Z^{[i]}} \gamma$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $i \in \{1 \cdots L\}$ ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathcal{X}^d(W^{[i]}, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{B}}^{[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{C}}_2^{[i]} \end{bmatrix} \mathcal{F}_1 \right\} \prec 0 \quad (2.93a)$$

$$\mathcal{Z}^d(W^{[i]}, Z^{[i]}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times n} & \mathbf{1}_{nN} \\ & \check{\mathcal{D}}^{[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{B}}^{[i]} \right\} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \check{\mathcal{E}}^{[i]} \\ \check{\mathcal{C}}_1^{[i]} \end{bmatrix} \mathcal{F}_2 \right\} \prec 0 \quad (2.93b)$$

$$\text{trace}(Z^{[i]}) < \gamma \quad (2.93c)$$

Les opérateurs  $\mathcal{Z}^d(P, Z)$  et  $\mathcal{X}^d(P, Z)$  sont respectivement définis par (2.85) et (2.86).

*Démonstration.* Le complément de Schur permet de transformer les inégalités du théorème 22 et du théorème 23 de façon à faire apparaître linéairement les matrices  $\mathcal{C}^{[i]}$  et  $\mathcal{D}^{[i]}$  pour les versions primales et  $\check{\mathcal{B}}^{[i]}$  et  $\check{\mathcal{D}}^{[i]}$  dans le cas dual. La combinaison convexe des conditions ainsi obtenues conduit aux conditions d'analyse du théorème 19 et du théorème 20.

Finalement, les inégalités  $\nu_{\text{wc}} \leq \nu_g$ ,  $\nu_{\text{wc}} \leq \nu_g^d$ ,  $\gamma_{\text{wc}} \leq \gamma_g$  et  $\gamma_{\text{wc}} \leq \gamma_g^d$  proviennent de la sous-optimalité des problèmes, dont l'origine provient de la contrainte pour  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  d'être indépendantes de  $\theta$ .  $\square$

Les résultats existant dans la littérature sont retrouvés comme des cas particuliers puisque ce chapitre généralise les approches considérées ultérieurement. Ainsi, lorsque  $l = 1$ , on vérifiera que les conditions d'analyse de stabilité et de performance  $\mathcal{H}_\infty$  correspondent littéralement aux résultats proposés dans [Ebihara et al., 2011]. De même, si  $l = N - 1$ , on retrouve exactement la condition d'analyse de stabilité donnée dans [Tréguët et al., 2011a]. On notera finalement que la condition d'analyse  $\mathcal{H}_2$  pour  $l = 1$  est formulée différemment dans [Ebihara, 2012]. Il semble cependant qu'il ne s'agisse que d'une reformulation.

## 2.7 Synthèse de lois de commande périodiques à mémoire

Les théorèmes 21, 22 et 23 peuvent être considérés comme l'aboutissement de l'étude des systèmes périodiques polynomiaux à ordre variant menée dans les sections précédentes. Comme énoncé auparavant, l'usage de lois de commande périodiques à mémoire conduit à des équations en boucle fermée appartenant à cette classe de modèle.

On rappelle également que toute loi de commande périodique à mémoire (2.1) peut être assimilée à un PFMC structuré. La sous-section suivante traite donc de la synthèse des correcteurs (2.1) dans le cas général. Le cas particulier du PFMC non structuré est abordé par la suite.

### 2.7.1 Cas général correspondant aux PFMC structurés

Comme dans le chapitre 1, les théorèmes de synthèse sont établis en ré-introduisant les matrices du modèle en boucle ouverte  $\Sigma$  dans les conditions d'analyse duales. Dans cet esprit, on décompose  $\check{\mathcal{A}}$ ,  $\check{\mathcal{E}}$ ,  $\check{\mathcal{C}}_2$  et  $\check{\mathcal{C}}_1$  pour chacun des deux exemples :

$$\begin{aligned} \text{Ex.1 : } \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}} \\ \check{\mathcal{E}} \\ \check{\mathcal{C}}_2 \\ \check{\mathcal{C}}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{1,0} & A_{1,1} \\ -1 & A_{0,0} \\ \mathbf{0} & -1 \\ C_{1,0} & C_{1,1} \\ \mathbf{0} & C_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^{ol} & \mathbf{0} \\ -1 & A_0^{ol} \\ \mathbf{0} & -1 \\ C_1^{ol} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_0^{ol} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{u0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,0} & K_{1,1} \\ \mathbf{0} & K_{0,0} \end{bmatrix} \\ \text{Ex.2 : } \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}} \\ \check{\mathcal{E}} \\ \check{\mathcal{C}}_2 \\ \check{\mathcal{C}}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{0,1} & A_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} \\ -1 & A_{0,0} \\ \mathbf{0} & -1 \\ C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{0,1} & C_{0,2} \\ C_{1,0} & C_{1,1} \\ \mathbf{0} & C_{0,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_1^{ol} & \mathbf{0} \\ -1 & A_0^{ol} \\ \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C_1^{ol} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_0^{ol} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{u1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{u0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_{u0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D_{u1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{u0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{u1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{u0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{0,1} & K_{0,2} \\ K_{1,0} & K_{1,1} \\ \mathbf{0} & K_{0,0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

puis dans le cas général

$$\begin{bmatrix} \check{A} \\ \check{\xi} \\ \check{C}_2 \\ \check{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \check{A}^{ol} \\ \check{\xi}^{ol} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nN} \\ \check{C}_1^{ol} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \check{B}_{u2}^{ol} \\ \check{B}_{u1}^{ol} \\ \check{D}_{u2}^{ol} \\ \check{D}_{u1}^{ol} \end{bmatrix} \check{\mathcal{K}} \quad (2.94)$$

Les matrices  $\check{A}^{ol} \in \mathbb{R}^{nl \times nN}$ ,  $\check{\xi}^{ol} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\check{C}_1^{ol} \in \mathbb{R}^{pN \times nN}$ ,  $\check{B}_{u2}^{ol} \in \mathbb{R}^{nl \times m_u(N+l-1)}$ ,  $\check{B}_{u1}^{ol} \in \mathbb{R}^{nN \times m_u(N+l-1)}$ ,  $\check{D}_{u2}^{ol} \in \mathbb{R}^{p(l-1) \times m_u(N+l-1)}$  et  $\check{D}_{u1}^{ol} \in \mathbb{R}^{pN \times m_u(N+l-1)}$  sont telles que

$$\begin{bmatrix} \check{A}^{ol} \\ \check{\xi}^{ol} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl \times nN} \\ -\mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times nN} \\ \mathcal{R}(A_k^{ol}) \\ \mathbf{0}_{n \times nN} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \check{B}_{u2}^{ol} \\ \check{B}_{u1}^{ol} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}(B_{uk}) \\ \mathbf{0}_{n \times m_u(N+l-1)} \end{bmatrix}, \quad \check{C}_1^{ol} = \mathcal{R}(C_k^{ol}), \quad \begin{bmatrix} \check{D}_{u2}^{ol} \\ \check{D}_{u1}^{ol} \end{bmatrix} = \mathcal{V}(D_{uk})$$

où les opérateurs  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{V}$  sont définis comme suit

$$\mathcal{R}(X_k) = \text{diag}\{X_{N-r}, \dots, X_0, X_{N-1}, \dots, X_{N-r+1}\} \quad (2.95)$$

$$\mathcal{V}(X_k) = \text{diag}\{\mathbf{1}_{b+1} \otimes \text{diag}\{X_{N-1}, \dots, X_0\}, X_{N-1}, \dots, X_{N-r+1}\} \quad (2.96)$$

Selon cette définition, la matrice  $\check{\mathcal{K}}$  est donc composée des gains  $K_{k,j}$  du correcteur périodique (2.5) :

$$\check{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{b+1} \\ \vdots \\ \mathcal{K}_1 \\ \mathbf{0}_{m_u r \times n(N-r+1)} \quad \mathcal{K}_{0,0} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

avec  $\mathcal{K}_{0,0} \in \mathbb{R}^{m_u(r-1) \times n(r-1)}$  et, pour  $j = \{1, \dots, b+1\}$ ,  $\mathcal{K}_j \in \mathbb{R}^{m_u N \times nN}$  décrites par

$$\mathcal{K}_{0,0} = \begin{bmatrix} K_{N-1,0} \cdots \cdots K_{N-1,r-2} \\ \mathbf{0}_{m_u \times n} \quad \ddots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ \mathbf{0}_{m_u \times n} \cdots \mathbf{0}_{m_u \times n} \quad K_{N-r+1,0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} K_{N-1,r-1} \cdots K_{N-1,N-2} \quad K_{N-1,N-1} \cdots K_{N-1,N+r-2} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ K_{N-r,0} \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathbf{0}_{m_u \times n} \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \ddots \quad K_{1,0} \quad \vdots \\ \mathbf{0}_{m_u \times n} \quad \mathbf{0}_{m_u \times n} \quad K_{0,0} \quad \cdots \quad K_{0,r-1} \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

$$\mathcal{K}_j = \begin{bmatrix} K_{N-1,(j-1)N+r-1} \cdots K_{N-1,jN+r-2} \\ \vdots \quad \vdots \\ K_{0,(j-2)N+r} \quad \cdots \quad K_{0,(j-1)N+r-1} \end{bmatrix}, \quad (2 \leq j \leq b+1) \quad (2.99)$$

Comme il a été expliqué dans le premier chapitre, la substitution de ces nouvelles expressions dans les conditions d'analyse duales donne naissance à des termes bilinéaires détruisant la convexité du problème d'optimisation associé. Cette fois encore, la difficulté peut être contournée en mettant en œuvre un changement de variables pour lequel la structuration des matrices contenant les variables de relaxation est une étape préalable. A cette fin, on introduit le lemme suivant.

**Lemme 20.** *Si une (au moins) des propositions suivantes est vérifiée alors la matrice  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  est inversible.*

1. il existe une matrice  $\mathcal{F} = [\mathbf{0}_{nN \times nl} \quad \mathcal{G}]$  satisfaisant la condition (2.78),
2. il existe une matrice  $\mathcal{F} = [\mathbf{0}_{nN \times nl} \quad \mathcal{G} \quad \mathbf{0}_{nN \times p(N+l-1)}]$  satisfaisant la condition (2.81),
3. il existe une matrice  $\mathcal{F}_1 = [\mathbf{0}_{nN \times nl} \quad \mathcal{G} \quad \mathbf{0}_{nN \times p(l-1)}]$  satisfaisant la condition (2.84a) et une matrice  $\mathcal{F}_2 = [\mathcal{G} \quad \mathbf{0}_{nN \times pN}]$  satisfaisant la condition (2.84b).

*Démonstration.* Soit la matrice  $H$  de rang plein en colonne définie par

$$H^T = [\mathbf{0}_{nN \times nl} \quad \mathbf{1}_{nN}]$$

En remplaçant  $\mathcal{F}$  donnée par la première proposition dans (2.78), la multiplication de l'inégalité ainsi obtenue par  $H^T$  à gauche et par  $H$  à droite donne

$$H^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P \end{bmatrix} H + \text{He} \{ \check{\xi} \mathcal{G} \} \prec \mathbf{0}$$

On remarque que  $H^T \text{diag}\{\mathbf{0}_{nN}, P\}H \succeq \mathbf{0}$ , ce qui prouve que  $\text{He}\{\check{\mathcal{E}}\mathcal{G}\} \prec \mathbf{0}$  et permet d'affirmer que  $\mathcal{G}$  est inversible.

Similairement, après avoir remplacé  $\mathcal{F}$  dans (2.81) par son expression issue de la seconde proposition, la multiplication de l'inégalité résultante à gauche par  $[H^T \quad \mathbf{0}_{nN \times p(N+l-1)}]$  et à droite par la transposée de cette même matrice conduit à l'expression suivante :

$$H^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} H + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times n} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix} \check{\mathcal{B}} \right\} + \text{He} \left\{ \check{\mathcal{E}}\mathcal{G} \right\} \prec \mathbf{0} \quad (2.100)$$

A nouveau, en remarquant que  $H^T \text{diag}\{\mathbf{0}_{nN}, P_1\}H + \text{Sq}\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix} \check{\mathcal{B}}\right\} \succeq \mathbf{0}$ , le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que la matrice  $\mathcal{G}$  est une matrice non singulière.

En traitant la troisième proposition de manière identique, chacune des conditions (2.84b) et (2.84b) conduisent à l'inégalité (2.100), ce qui prouve donc que dans ce cas  $\mathcal{G}$  est également inversible.  $\square$

Dans le cas de la condition duale de stabilité, cette nouvelle expression de  $\mathcal{F}$  réécrit le terme bilinéaire  $\check{\mathcal{K}}\mathcal{F}$  sous la forme  $[\mathbf{0} \quad \check{\mathcal{Y}}]$  avec  $\check{\mathcal{Y}} = \check{\mathcal{K}}\mathcal{G}$ . Si le lemme précédent assure l'absence de singularité dans le calcul de  $\mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1}$ , il n'est cependant que la première étape vers la garantie de reconstruction des gains du contrôleur. En effet, pour que le résultat ainsi obtenu puisse être considéré comme la matrice  $\check{\mathcal{K}}$ , il est nécessaire que les structures de  $\mathcal{Y}\mathcal{G}^{-1}$  et de  $\check{\mathcal{K}}$  coïncident. Or, comme indiqué dans la sous-section 2.2.2, la loi de commande (2.1), définie par une séquence  $\alpha_k$  arbitraire, correspond à un PFMC structuré. Par conséquent, dans le cas général, la définition de  $\check{\mathcal{K}}$ , donnée par (2.97) pour le cas particulier des PFMC non structurés, doit être adaptée, ce qui conduit à une matrice très structurée. C'est la raison pour laquelle  $\mathcal{G}$  est choisie diagonale par blocs

$$\mathcal{G} = \text{diag}\{G_{N-1}, \dots, G_0\} \quad \text{avec} \quad G_j \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.101)$$

de sorte que  $\check{\mathcal{Y}} = \check{\mathcal{K}}\mathcal{G}$  hérite de la structure de  $\check{\mathcal{K}}$ . Dans le cas des deux exemples traités dans ce chapitre, la matrice  $\check{\mathcal{Y}}$  est donnée par les équations suivantes.

$$\text{Ex.1 : } \check{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{1,0} & Y_{1,1} \\ \mathbf{0} & Y_{0,0} \end{bmatrix}, \quad \text{Ex.2 : } \check{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} Y_{1,2} & Y_{1,3} \\ Y_{0,1} & Y_{0,2} \\ Y_{1,0} & Y_{1,1} \\ \mathbf{0} & Y_{0,0} \end{bmatrix}$$

Les autres conditions d'analyse sont traitées de la même façon, donnant ainsi lieu aux théorèmes suivants.

**Théorème 24** (Stabilisation robuste - [Tréguët et al., 2012b]). *S'il existe  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ , donnée par (2.101), et  $\check{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{m_u(N+l-1) \times nN}$ , définie conformément à la structure de  $\check{\mathcal{K}}$  choisie, telles que la condition suivante soit satisfaite quel que soit  $i \in \{1 \dots L\}$ ,*

$$\exists W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl} : \mathcal{X}(W^{[i]}) + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{op[i]} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}_{u2}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{B}}_{u1}^{op[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{Y}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} \end{bmatrix} \right\} \prec \mathbf{0} \quad (2.102)$$

alors le correcteur, dont les gains sont calculés via (2.103), est une solution au problème de stabilisation robuste.

$$\check{\mathcal{K}} = \check{\mathcal{Y}}\mathcal{G}^{-1} \quad (2.103)$$

**Théorème 25** ( $\mathcal{H}_\infty$  - Synthèse [Tréguët et al., 2012a]). *Le problème SDP suivant, pour lequel  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  est donnée par (2.101),  $\check{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{m_u(N+l-1) \times nN}$  est définie conformément à la structure de  $\check{\mathcal{K}}$  choisie et  $W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$  :*

$$\nu_g^s = \min_{W^{[i]}, \mathcal{G}, \check{\mathcal{Y}}} \nu$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $i \in \{1 \dots L\}$ ,

$$\mathcal{X}^d(W^{[i]}, -\nu \mathbf{1}_{pN}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{B}}^{[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{D}}^{[i]} \end{bmatrix} \right\} + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{op[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nN} \\ \check{\mathcal{C}}_1^{op[i]} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}_{u2}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{B}}_{u1}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{D}}_{u2}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{D}}_{u1}^{op[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{Y}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times p(N+l-1)} \end{bmatrix} \right\} \prec \mathbf{0} \quad (2.104)$$



conduit à un coût garanti du problème de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . Les gains du correcteur sont reconstruits via (2.103) et le critère d'optimisation  $\nu_g^s$  est un coût garanti en boucle fermée tel que  $\nu_g^s \geq \nu_g^d \geq \nu_{wc}$ .

**Théorème 26** ( $\mathcal{H}_2$  - Synthèse [Tréguët et al., 2012c]). *Le problème SDP suivant, pour lequel  $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$  est donnée par (2.101),  $\check{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R}^{m_u(N+l-1) \times nN}$  est définie conformément à la structure de  $\check{\mathcal{K}}$  choisie,  $W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^{nl+p(l-1)}$  et  $Z^{[i]} \in \mathbb{S}^{pN}$  :*

$$\gamma_g^s = \min_{W^{[i]}, \mathcal{G}, \check{\mathcal{Y}}, Z^{[i]}} \gamma$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $i \in \{1 \cdots L\}$ ,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathcal{X}^d(W^{[i]}, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n(l-1) \times mN} \\ \check{\mathcal{B}}^{[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times mN} \end{bmatrix} \right\} \\ & + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \check{\mathcal{A}}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{E}}^{op[i]} \\ \mathbf{0}_{p(l-1) \times nN} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}_{u2}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{B}}_{u1}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{D}}_{u2}^{op[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{Y}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times p(l-1)} \end{bmatrix} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (2.105a)$$

$$\begin{aligned} & Z^d(W^{[i]}, Z^{[i]}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN \times n} & \mathbf{1}_{nN} \\ & \check{\mathcal{D}}^{[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{B}}^{[i]} \right\} \\ & + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} \check{\mathcal{E}}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{C}}_1^{op[i]} \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} \check{\mathcal{B}}_{u1}^{op[i]} \\ \check{\mathcal{D}}_{u1}^{op[i]} \end{bmatrix} \check{\mathcal{Y}} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times pN} \end{bmatrix} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (2.105b)$$

$$\text{trace}(Z^{[i]}) < \gamma \quad (2.105c)$$

conduit à un coût garanti du problème de synthèse  $\mathcal{H}_2$ . Les gains du correcteur sont reconstruits via (2.103) et le critère d'optimisation  $\gamma_g^s$  est un coût garanti en boucle fermée tel que  $\gamma_g^s \geq \gamma_g^d \geq \gamma_{wc}$ .

Naturellement, de telles manipulations s'accompagnent d'un accroissement du conservatisme par rapport à la condition d'analyse : il peut en effet exister des matrices  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  n'ayant pas la structure requise mais satisfaisant les inégalités d'analyse. C'est la raison pour laquelle  $\nu_g^s \geq \nu_g^d$  et  $\gamma_g^s \geq \gamma_g^d$ .

**Remarque.** *La conception du correcteur (2.1) pour un choix  $\alpha_k$  quelconque correspond donc à un problème particulier de synthèse de correcteur structuré pour lequel il n'existe pas de conditions convexes nécessaires et suffisantes dans le cas général. Si le choix consistant à structurer les matrices de relaxation ajoutée du conservatisme, on notera toutefois qu'il ne remet pas en cause la nécessité puisque les conditions d'analyse duales n'étaient déjà que suffisantes.*  $\circ$

## 2.7.2 Cas des PFMC non structurés

Considérons l'ensemble des lois de commande (2.1) pouvant être vues comme des PFMC structurés d'ordre  $\kappa = l - 1$ , où  $l$  donné par (2.4) est fonction de la séquence  $\alpha_k$ . Dans cet ensemble, moins le PFMC sera structuré, moins la matrice  $\check{\mathcal{K}}$  est creuse et donc plus  $\check{\mathcal{Y}}$  contient de variables. Le correcteur PFMC (plein) d'ordre  $\kappa$  conduit donc à des conditions de synthèse dont le conservatisme ne peut être plus faible que celui obtenu pour les autres contrôleurs de cet ensemble. On retrouve ici la remarque faite en introduction selon laquelle la structure de type PFMC offre le plus grand nombre de degrés de liberté pour une connaissance donnée des états passés du système.

D'autre part, tout PFMC (plein) conduit à une matrice  $\check{\mathcal{K}}$  trapézoïdale supérieure. Dans ce cas (et dans ce cas uniquement),  $\mathcal{G}$  peut être choisie triangulaire supérieure tout en préservant la garantie de reconstruction de  $\check{\mathcal{K}}$ . En effet, dans ce cas,  $\check{\mathcal{Y}} = \check{\mathcal{K}}\mathcal{G}$  reste trapézoïdale si bien que  $\check{\mathcal{K}}$  et  $\check{\mathcal{Y}}\mathcal{G}^{-1}$  partagent toujours la même structure. De cette remarque découle le théorème suivant.



**Théorème 27** (Synthèse robuste - PFMC). *Dans le cas des contrôleurs de type PFMC (plein), les théorèmes de synthèse 24, 25 et 26 s'appliquent avec  $\mathcal{G}$  triangulaire supérieure :*

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} G_{N-1,0} & \cdots & \cdots & G_{N-1,N-1} \\ \mathbf{0}_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_n & \cdots & \mathbf{0}_n & G_{0,0} \end{bmatrix} \quad \text{où } G_{k,j} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.106)$$

*De plus, les critères optimisés, notés  $\nu_g^{sm}$  pour le problème  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\gamma_g^{sm}$  pour le problème  $\mathcal{H}_2$ , sont tels que  $\nu_g^s \geq \nu_g^{sm} \geq \nu_g^d \geq \nu_{wc}$  et  $\gamma_g^s \geq \gamma_g^{sm} \geq \gamma_g^d \geq \gamma_{wc}$*

On vérifiera que pour le PFMC 2-périodique d'ordre 0, (2.102) avec  $\mathcal{G}$  triangulaire correspond à la condition de synthèse robuste du théorème 13 du chapitre 1, pour laquelle  $M_1 = M_2 = M_3 = \mathbf{0}$ . En ce sens, la condition de stabilité (2.102) généralise le résultat du chapitre 1 puisqu'il s'intéresse au cas N-périodique et à tous les contrôleurs de la forme (2.1) mais n'aborde pas la question du choix du modèle auxiliaire que les matrices  $M_j$  caractérisent. Il serait donc intéressant de paramétrer les théorèmes de synthèse de ce chapitre par les matrices d'un modèle auxiliaire. Cet aspect n'a pas été abordé dans le cadre de cette thèse mais il sera l'objet de travaux futurs.

## 2.8 Résultats numériques

Cette section met les conditions d'analyse et de synthèse développées dans ce chapitre à l'épreuve d'un exemple numérique. Elle s'organise en deux sous sections. La première présente le calcul des gains de quatre lois de commande puis analyse des boucles fermées résultantes. La seconde discute de l'influence du choix de  $\tau$ , le point de départ de la période, sur les conditions d'analyse relatives à une des quatre boucles fermées précédentes.

### 2.8.1 Diminution du conservatisme grâce au correcteurs à mémoire

Soit le modèle 3-périodique suivant, provenant de [Farges et al., 2007] avec quelques légères modifications.

$$\begin{aligned} A_0^{ol} &= \begin{bmatrix} -3 - \theta_1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1^{ol} = \begin{bmatrix} -1 - \theta_1 & 2 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2^{ol} = \begin{bmatrix} 1 - \theta_1 & 2 \\ 2.5 & 3 \end{bmatrix} \\ B_0 = B_{u0} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3\theta_2 - 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_{u2} = \begin{bmatrix} 0.5(\theta_2 + 1) \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_0^{ol} &= \begin{bmatrix} -0.5 - \theta_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_1^{ol} = \begin{bmatrix} -\theta_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_2^{ol} = \begin{bmatrix} 1.5 - \theta_1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ D_0 = D_1 = D_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{u0} = D_{u1} = D_{u2} = \begin{bmatrix} -\theta_2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les deux incertitudes réelles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont constantes (indépendante du temps) et satisfont  $|\theta_1| \leq 0.6$  et  $0 \leq \theta_2 \leq 1$ . De cette définition, il apparaît clairement que ce système peut être modélisé par le modèle incertain polytopique (2.6) avec  $L$ , le nombre de sommets du polytope, égal à 4. L'objectif ici est de concevoir des lois de retour d'état minimisant  $\sqrt{\nu_g}$  ou  $\sqrt{\gamma_g}$ , les bornes supérieures des coûts garantis des normes  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_2$  respectivement du modèle en boucle fermée. On précise dès maintenant que l'utilisation des théorèmes 25 et 26 conduit à des conditions LMI non faisable si le correcteur considéré est sans mémoire. Ce modèle est donc soumis à des incertitudes importantes et son asservissement est un problème difficile. Les commentaires à venir sont donnés pour le cas  $\mathcal{H}_2$  mais s'appliquent de la même façon pour le coût  $\mathcal{H}_\infty$ .

Plusieurs correcteurs correspondant à des choix différents de la séquence  $\alpha_k$  sont conçus, en s'appuyant sur le théorème 26 et, lorsque la structure de l'asservissement le permet, sur le théorème 27. On notera que pour tous les correcteurs retenus, la valeur de  $r$ , défini par (2.30), est égale à 1. Pour chacune des boucles fermées résultantes, les bornes sont calculées grâce aux conditions primales et duales. Les résultats sont rassemblés dans le Tab. 2.3 et Tab. 2.4 où chaque loi de commande est identifiée par un numéro. L'effort de calcul associé à chacune des étapes de synthèse est évalué en termes de nombre de lignes et de nombre de variables de décisions des LMI.

Ces résultats montrent que, pour un théorème de synthèse donné et pour une même valeur de  $r$ , l'augmentation des degrés de liberté des lois de commande peut réduire le conservatisme des conditions de synthèse bien qu'il induise un effort de calcul plus important :

TABLE 2.3 – Résultats d’analyse et de synthèse  $\mathcal{H}_2$  pour différents choix de la séquence  $\alpha_k$ 

Correcteurs		Synthèse				Analyse (Th. 23)	
id.	$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$	Théorème	$\sqrt{\gamma_g^s}$	Nb. lignes	Nb. var.	$\sqrt{\gamma_g}$	$\sqrt{\gamma_g^d}$
1	{1, 2, 3}	Th. 27	26.8481	92	133	13.6868	12.5817
2	{3, 3, 3}	Th. 26	63.1261	156	335	14.9883	13.9183
3	{3, 4, 5}	Th. 26	57.4131	156	341	14.8726	13.6674
4	{3, 4, 5}	Th. 27	17.7953	156	353	13.4219	11.8480

TABLE 2.4 – Résultats d’analyse et de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  pour différents choix de la séquence  $\alpha_k$ 

Correcteurs		Synthèse				Analyse (Th. 22)	
id.	$\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$	Théorème	$\sqrt{\nu_g^s}$	Nb. lignes	Nb. var.	$\sqrt{\nu_g}$	$\sqrt{\nu_g^d}$
5	{1, 2, 3}	Th. 27	54.5911	64	49	15.9835	15.7897
6	{3, 3, 3}	Th. 25	104.4296	128	251	18.9917	18.5349
7	{3, 4, 5}	Th. 25	87.8195	128	257	21.5516	20.5909
8	{3, 4, 5}	Th. 27	19.0963	128	269	14.7321	14.7321

- En considérant leur capacité à réduire  $\sqrt{\gamma_g^s}$ , les contrôleurs conçus grâce au théorème 27 peuvent être hiérarchisés par  $1 < 4$  tandis que ceux obtenus au moyen du théorème 26 vérifient  $2 < 3$ .
- Toutefois, cette remarque n’est plus vraie lorsque différents théorèmes de synthèse sont utilisés. La valeur  $\sqrt{\gamma_g^s}$  obtenue avec le contrôleur 2 est plus grande que celle avec la loi 1 bien que sa structure soit plus riche. De plus, de 3 au 4,  $\sqrt{\gamma_g^s}$  diminue de 69 pourcents alors que la structure de contrôle reste la même et que l’effort de calcul est sensiblement identique.
- Enfin, on constate que l’écart entre les coûts garantis de synthèse et d’analyse  $\sqrt{\gamma_g^s}$  et  $\sqrt{\gamma_g^d}$  est beaucoup plus important avec le théorème 26 qu’avec le théorème 27.

Ces deux dernières observations mettent en lumière le rôle crucial que joue la structure de  $\mathcal{G}$  dans la réduction du conservatisme des conditions de synthèse.

Concernant l’analyse robuste, deux coût garantis sont fournis, à savoir  $\sqrt{\gamma_g}$  et  $\sqrt{\gamma_g^d}$ , et sont différents dans le cas général. On remarque que  $\sqrt{\gamma_g^d} \leq \sqrt{\gamma_g^s}$ . Il s’agit d’un résultat attendu puisque les conditions de synthèse ont été dérivées de celles d’analyse duale en structurant la matrice  $\mathcal{F}$ . Ces résultats sont confirmés par la figure 2.4 qui propose une visualisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  de la boucle fermée de  $\Sigma(\theta)$  avec le correcteur 1, grâce à un maillage de l’espace paramétrique<sup>3</sup>. On constate que  $\sqrt{\gamma_g}$  et  $\sqrt{\gamma_g^d}$  sont bien des bornes du coût garanti  $\sqrt{\gamma_{wc}}$ .

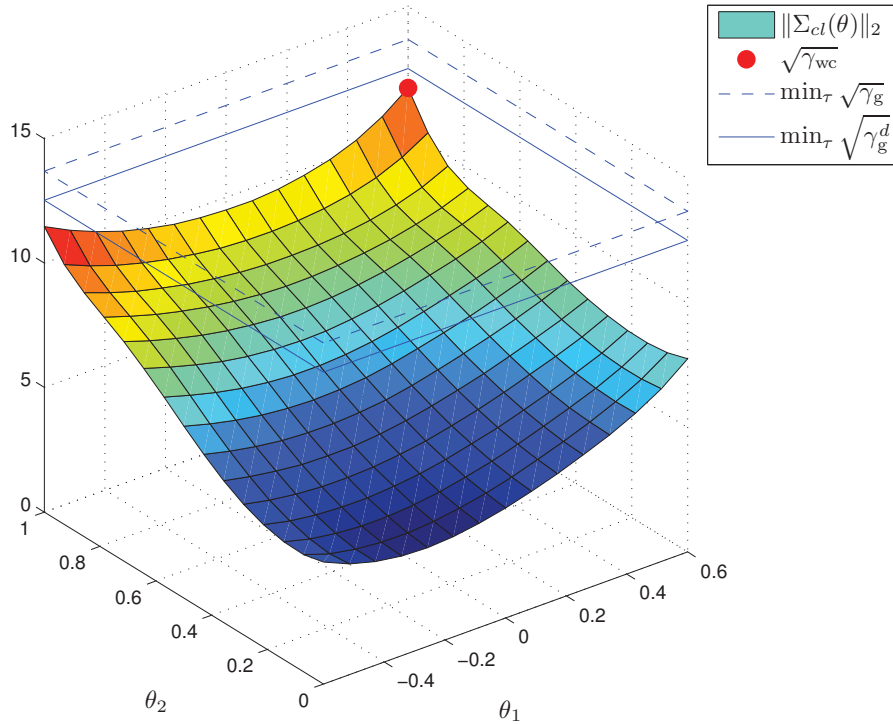
Dans le cas de l’analyse robuste des lois de commande issues de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , il est intéressant de remarquer que la hiérarchie entre les correcteurs peut ne pas être préservée de l’étape de synthèse à celle d’analyse : de 6 à 7,  $\sqrt{\nu_g^s}$  diminue alors que  $\sqrt{\nu_g}$  et  $\sqrt{\nu_g^d}$  augmentent. Si  $\sqrt{\nu_{wc}}$  augmente également<sup>4</sup>, alors cet exemple montre que la diminution de la borne  $\sqrt{\nu_g^s}$  ne s’accompagne pas nécessairement de la réduction du vrai coût  $\sqrt{\nu_{wc}}$ . Des exemples numériques effectués par ailleurs semble indiquer cependant que ce cas de figure est marginal. Dans la majorité des cas, la stratégie mise en oeuvre dans ce chapitre (et classique dans la littérature, voir par exemple [El Ghaoui and Niculescu, 2000]) consistant à réduire la borne  $\sqrt{\nu_g^s}$  sert donc bien l’objectif ultime de diminuer  $\sqrt{\nu_{wc}}$ .

## 2.8.2 Influence du choix de $\tau$

Les résultats d’analyse et de synthèse ont été obtenus grâce à une utilisation intensive des représentations liftées. L’usage d’un tel outil requiert implicitement le choix de la valeur de  $\tau$ , point de départ des périodes considérées lors de la construction des vecteurs étendus d’entrée/sortie. Dans le cas général, le vecteur  $\hat{w}_q$  est paramétré par  $\tau$  de telle sorte que  $\hat{w}_q^\tau = [w_{qN+N-1+\tau}^T \ \cdots \ w_{qN+\tau}^T]^T$ . Jusqu’à présent, ce chapitre ne s’est intéressé qu’au cas particulier où  $\tau = 0$  puisqu’une ré-indexation cyclique permet de prendre en compte les

3. On note que, pour chacun des points du maillage, le calcul de  $\|\Sigma_{cl}(\theta)\|_2$  est indépendant de  $\tau$ .

4. On précise que, formellement, rien ne permet de l’affirmer puisque, dans le cas général,  $\sqrt{\nu_g}$  et  $\sqrt{\nu_g^d}$  diffèrent du vrai coût  $\sqrt{\nu_{wc}}$ .

FIGURE 2.4 – Norme  $\mathcal{H}_2$  de la boucle fermée de  $\Sigma(\theta)$  avec le correcteur 1

autres cas. En effet, si l'on nomme  $\Sigma_{cl}^\tau$  le modèle périodique dérivé de  $\Sigma_{cl}$  via un décalage positif des indices de ces matrices de  $\tau$ , c'est-à-dire  $A_{k,j}^\tau = A_{k+\tau(\text{mod } N),j}$ ,  $B_k^\tau = B_{k+\tau(\text{mod } N)}$ , etc, alors l'application des théorèmes précédents à  $\Sigma_{cl}^\tau$  est équivalent à considérer  $\Sigma_{cl}$  avec  $\tau \neq 0$ . L'influence de cette manipulation sur le conservatisme des conditions d'analyse robuste est maintenant analysée sur la boucle fermée impliquant le contrôleur 1 dont les gains ont été obtenus précédemment.

TABLE 2.5 – Influence de  $\tau$  sur les résultats d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  (Th. 22) et  $\mathcal{H}_2$  (Th. 23)

$\tau$	$\sqrt{\nu_g}$	$\sqrt{\nu_g^d}$	$\sqrt{\gamma_g}$	$\sqrt{\gamma_g^d}$
0	18.1120	17.7016	13.6868	12.5817
1	18.1120	17.6746	13.9512	12.5177
2	18.1120	17.6746	14.2759	12.5310

Les résultats sont rassemblés dans le Tab. 2.5.

- Ils confirment que dans le cas général  $\tau$  peut avoir une influence sur le conservatisme des conditions d'analyse puisque les bornes supérieures ne sont pas toujours les mêmes.
- On remarque également que ce paramètre n'affecte pas les coûts primaux et duaux et de la même façon puisque, dans le cas  $\mathcal{H}_2$ ,  $\tau = 1$  est meilleur que  $\tau = 0$  pour  $\sqrt{\gamma_g^d}$  mais pas pour  $\sqrt{\gamma_g}$ .

Les mêmes conclusions s'appliquent dans le cas de l'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  même si, pour cet exemple particulier,  $\tau$  semble ne pas avoir d'influence sur  $\sqrt{\nu_g}$  et ne modifie  $\sqrt{\nu_g^d}$  que dans certains cas.

Ainsi, le choix de  $\tau$  peut être vu comme un moyen d'affiner les résultats d'analyse en ne retenant que le minimum des coûts primaux et duaux obtenus par variation de ce paramètre. Évidemment, une approche procédurale donnant *a priori* la valeur de  $\tau$  conduisant au coût le plus faible est souhaitable, bien qu'elle semble difficile à concevoir.

## 2.9 Conclusions

Ce chapitre a permis d'obtenir des conditions de synthèse robuste sous forme SDP pour les correcteurs périodiques à mémoire possédant une structure arbitraire. Les problèmes de stabilité et de performance  $\mathcal{H}_2$  et

$\mathcal{H}_\infty$  ont été traités.

Il a été démontré qu'une telle loi de commande conduit à un modèle en boucle fermée sous forme polynomiale en  $\sigma$  d'ordre variant. Pour cette raison, ce type de modèle a fait l'objet d'une attention particulière. Ce chapitre a montré qu'il admet plusieurs reformulations invariantes dans le temps pouvant être liées les unes aux autres par des relations sur les signaux ou sur les matrices. Ces liens ont permis d'obtenir des conditions d'analyses SDP applicable à n'importe quel modèle polynomial périodique d'ordre variant, et donc en particulier à la boucle fermée résultant de l'utilisation d'un correcteur périodique à mémoire. Le modèle dual de ce type a également été établi en s'efforçant de préserver la dimension originelle. Ce résultat a permis de dériver des conditions d'analyse duales à partir desquelles des théorèmes de synthèse ont pu être obtenus.

Les résultats numériques ont montré l'existence de modèles pour lesquels les théorèmes de synthèse échouent si les correcteurs considérés sont sans mémoire. De plus, il a été prouvé que l'augmentation de la taille de la mémoire des correcteurs pouvait diminuer le conservatisme des conditions de synthèse sans augmenter de façon significative l'effort de calcul nécessaire à la synthèse. Des phénomènes plus surprenant ont également été mis en évidence : certains correcteurs à la structure particulière, les PFMC, peuvent réduire le conservatisme de synthèse correspondant à d'autres lois de commande à mémoire possédant pourtant plus de degrés de liberté. Cette apparente contradiction provient du fait que la structure de ces correcteurs a permis de les doter de conditions de synthèse particulièrement efficaces. L'origine de cette particularité est une question ouverte : le statut des PFMC provient-il des qualités intrinsèques à la structure même de ces correcteurs ou est-il lié à la méthode employée dans ce chapitre (techniques LMI s'appuyant sur des modèles liftés) ? En d'autres termes, l'utilisation d'une autre méthode d'analyse robuste conduirait-elle vers des conditions de synthèse robuste pour lesquelles les PFMC jouent un rôle particulier ?

La sous-section 2.2.2 a montré que cette classe de contrôleurs offre le maximum de degrés de liberté (sous la contrainte de causalité) pour une connaissance donnée des états du système précédant le début de la période. Cette constatation souligne les qualités des PFMC *dans le cadre* d'une analyse traitant la dynamique de  $\Sigma_{cl}$  période par période. Une telle remarque suggère que toute condition de synthèse basée sur une technique d'analyse s'appuyant sur des représentations liftées devraient accorder aux PFMC un rôle particulier. En revanche, si d'autres techniques sont employées, rien n'indique que ces contrôleurs conserveront un intérêt particulier. D'ailleurs, les exemples numériques présentés dans la suite de ce chapitre montre qu'il existe des systèmes pour lesquelles un PFMC d'ordre  $\kappa$  est meilleur qu'un PFIRC d'ordre  $\kappa$ .

Les exemples numériques de ce chapitre accentuent cette impression en montrant qu'il existe certains modèles pour lesquels le PFMC suivant

$$\begin{cases} u_{2q} & = & & & K_{0,0}x_{2q} \\ u_{2q+1} & = & & K_{1,0}x_{2q+1} + & K_{1,1}x_{2q} \\ u_{2q+2} & = & K_{2,0}x_{2q+2} + & K_{2,1}x_{2q+1} + & K_{2,2}x_{2q} \end{cases}$$

conduit à des conditions de synthèse moins conservatives que le PFIRC défini comme suit :

$$\begin{cases} u_{2q} & = & & & K_{0,0}x_{2q} + & K_{0,1}x_{2q-1} + K_{0,2}x_{2q-2} \\ u_{2q+1} & = & & K_{1,0}x_{2q+1} + & K_{1,1}x_{2q} + & K_{1,2}x_{2q-1} \\ u_{2q+2} & = & K_{2,0}x_{2q+2} + & K_{2,1}x_{2q+1} + & K_{2,2}x_{2q} \end{cases}$$

Ce résultat est inexplicable si l'on s'en tient à la structure des contrôleurs puisque ce PFIRC englobe évidemment le PFMC. Il semble indiquer au contraire que la qualité des contrôleurs obtenus est parfois plus liée à la méthode de synthèse qu'à leur structure.

Ce chapitre confirme les potentialités des correcteurs périodiques à mémoire. Pour aller plus loin dans le développement des outils leur étant destinés, il serait intéressant d'étudier le problème de synthèse multi-objectif  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  dans ce cadre. Le traitement des incertitudes bornées en norme est également une piste de travail intéressante du point de vue des applications industrielles. La seconde partie de cette thèse en donne une illustration en mettant en œuvre des techniques de commande périodique pour le contrôle d'attitude de satellites.

**Contributions principales :**

Nouveaux outils de synthèse et d'analyse pour les lois de commande à mémoire périodiques à temps-discret considérant la stabilisation et la performance  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  [Tréguët et al., 2011a, 2012a,b,c]

**Contributions complémentaires :**

- nouveaux outils d'analyse robuste pour les modèles périodiques, polynomiaux et polytopiques (section 2.6) ;
- nouveau regard sur la dualité des systèmes périodiques polynomiaux (section 2.5).

Deuxième partie

Contrôle d'attitude périodique et robuste  
de satellites



## Chapitre 3

# Modélisation du mouvement d'attitude de satellites équipés de roues à réaction et de magnéto-coupleurs

### 3.1 Introduction

Ce chapitre amorce la seconde partie de cette thèse consacrée au contrôle d'orientation de satellite. La section 3 montre en effet que ce problème fait intervenir des phénomènes intrinsèquement périodiques, du fait de la rotation du satellite autour de la Terre. Ce chapitre est plus particulièrement dédié à la modélisation du mouvement du satellite autour de son centre de gravité et de son environnement le long de son orbite. Les résultats disponibles dans la littérature sur cet aspect du problème sont en effet très disparates : différents types de pointage, d'actionneurs, de modèles de champ magnétique et de perturbations sont considérés. Ce chapitre vise à établir un cadre unifié pour ces différentes approches.

La section 2 entame ce chapitre par un aperçu des concepts de base pour le contrôle d'attitude de satellite dont le chapitre 3 détaille les aspects périodiques. La section 4 propose ensuite une étude des équations de la dynamique et de la cinématique du satellite dans un cadre générique visant à englober les différents cas de pointages considérés dans la littérature. L'accent est mis en particulier sur la modélisation du champ magnétique terrestre sur lequel s'appuient les magnéto-coupleurs pour créer un couple de commande. La section 5 donne ensuite un modèle approché par linéarisation et met au jour les difficultés particulières liées à la définition d'une trajectoire de linéarisation dans ce contexte. Finalement la section 6 extrait de ce cadre général, deux cas d'études couramment traité dans la littérature et les présente plus en détail.

### 3.2 Le contrôle d'attitude

En s'appuyant principalement sur la référence [Courtois, 1998], cette première section présente les principes généraux définissant le fonctionnement d'un système de contrôle d'attitude.

#### 3.2.1 Problématique

L'attitude est définie comme l'orientation du satellite par rapport à un référentiel externe. En l'absence de contrôle, elle évolue sous l'effet des couples perturbateurs qui agissent sur le satellite, tout au long de sa trajectoire orbitale. Ces couples peuvent provenir, soit de l'environnement externe au véhicule, soit de sources de perturbations internes au satellite.

Le système de contrôle d'attitude se donne pour objectif d'asservir l'attitude du satellite en orientant ses axes vers les directions requises pour assurer sa mission, malgré les perturbations. Pour cela, le satellite détermine son attitude grâce à des capteurs et fournit un contrôle via des actionneurs (actifs ou passifs), créateurs de couples.

### 3.2.2 Exigences du pointage

Le terme pointage fait référence à l'écart angulaire entre les axes du référentiel lié au satellite et ceux du référentiel de consigne<sup>1</sup>. Les spécifications du contrôle d'attitude peuvent être paramétrées de la façon suivante :

- direction de pointage (par rapport à la Terre, aux étoiles ou autre) ;
- précision de pointage mesuré ;
- stabilité du pointage, caractérisée par la variation maximale de l'attitude au cours d'un intervalle temporel donné ;
- connaissance requise de l'attitude, soit en temps réel et à bord (estimation d'attitude), soit en temps différé et au sol (restitution d'attitude).

Ces exigences sont imposées par la mission. A titre d'exemple, l'observation des astres nécessite des visées stables et précises du ciel, comme dans le cas du satellite Corot, alors que les satellites européens météorologiques de la famille Meteosat s'accommodent d'un pointage plus grossier en direction de la terre [Courtois, 1998].

De plus, dans le cadre d'une même mission, on distingue différents modes de contrôle d'attitude, caractérisés par un ensemble d'actionneurs et de capteurs, pour lesquels les exigences de pointage peuvent varier considérablement. Typiquement, les modes que le système de contrôle d'attitude doit prendre en compte sont les suivants :

- mode mission : maintien de l'attitude opérationnelle requise pour la mission ;
- mode manœuvre : utilisé lors d'une correction nécessaire de l'orbite du satellite ;
- mode de survie : repli autonome du satellite utilisé en cas d'anomalie grave pour satisfaire des besoins énergétiques et thermiques en attente d'une intervention au sol. Le satellite est alors orienté vers le soleil. Ce mode peut être utilisé pour l'acquisition de l'attitude opérationnelle à l'issue de la séparation avec le lanceur.

### 3.2.3 Principes du système de contrôle d'attitude

La génération de couples de commande utilisables pour le contrôle d'attitude s'appuie sur un (ou deux) des principes suivants [Courtois, 1998, p.37-41,123] :

- stabilisation passive qui exploite l'action des couples perturbateurs au travers d'une structure du satellite spécifiquement conçu dans ce but (gouverne aérodynamique, voiles solaires, utilisation du gradient de gravité, stabilisation par gyration) ;
- stabilisation active nécessitant l'utilisation d'actionneurs consommateurs d'énergie.

Pour faire face à des exigences de pointage de plus en plus fortes, on a recours à la stabilisation active de façon plus systématique de façon à assurer aux satellites la capacité de s'orienter selon plusieurs axes (typiquement trois). En règle générale, on distingue deux catégories de contrôle d'attitude actif :

- contrôle via un moment cinétique embarqué, réalisé avec une roue cinétique ;
- contrôle 3-axes (roues à réaction, actionneurs gyroscopiques, magnéto-coupleurs et tuyères).

### 3.2.4 Cadre de cette étude

Cette étude s'intéresse au contrôle 3-axes en mode mission de satellites évoluant en orbite basse et inclinée. Les considérations suivantes précisent le cadre de travail :

- on supposera que le satellite est rigide ;
- les problématiques d'estimation seront éliminées pour se focaliser sur la fonction de contrôle. A tout instant, on suppose donc que l'attitude du satellite ainsi que sa vitesse angulaire sont parfaitement connues ;
- la référence de la direction du pointage restera générique autant que possible.

**Remarque.** *On précise que les actionneurs de moment cinétique embarqué n'appartiennent pas au cadre de cette étude. Comme les roues à réaction, il s'agit de faire tourner un objet cylindrique autour d'un axe fixe par rapport au satellite. Pourtant, malgré cette similitude, l'usage différencie ces deux types d'actionneurs puisque les roues à réaction font varier leur vitesse de rotation de manière à créer un couple sur le satellite alors que les actionneurs de moment cinétique embarqué tournent à vitesse constante (ou quasi-constante) dans l'objectif de conférer au satellite une raideur gyroscopique sur deux axes.* ◦

**Choix des actionneurs** Pour ce type de mission, la configuration d'actionneurs la plus répandue est formée de roues à réaction et de magnéto-coupleurs. A titre d'exemple, on pourra citer Spot, Jason, Demeter, pour les missions d'observations de la Terre et de son environnement et Corot et Hubble, pour les missions d'observations astronomiques.

---

1. Tous les référentiels utilisés dans le cadre de cette thèse sont définis précisément dans l'annexe G.



Chaque axe du satellite est ainsi équipé d'une ou plusieurs roues dont les vitesses de rotation sont commandées par des moteurs. L'accélération et la décélération de ces dernières créent un couple de réactions sur le satellite. Ce fonctionnement peut être interprété comme un échange de moment cinétique entre le satellite et les roues à réaction. La variation de la vitesse de rotation des roues est donc le principe de fonctionnement de ce type d'actionneurs. Evidemment, il existe une vitesse de saturation au-delà de laquelle les roues ne peuvent tourner plus rapidement. De plus, certaines vitesses particulières doivent être évitées car elles créent des perturbations préjudiciables aux pointages : autour de la vitesse nulle les couples de stictions bloquent la roue et il existe certaines fréquences pour lesquelles la rotation des roues peut entrer en résonance avec la structure mécanique du satellite. Pour toutes ces raisons, un système de commande de la vitesse de rotation des roues doit être mis en œuvre. Les deux objectifs d'asservissement sont donc les suivants :

1. contrôle 3-axes ;
2. asservissement du moment cinétique des roues.

La qualité de la loi de commande sera donc évaluée grâce à la précision, la stabilité du pointage et l'excursion en vitesse des roues autour de leur vitesse nominale.

Les magnéto-coupleurs génèrent un moment magnétique dont l'interaction avec le champ magnétique terrestre crée un couple. Par nature, ce couple est contraint d'appartenir au plan orthogonal au champ géomagnétique tel qu'il est perçu par le satellite. Ces contraintes rendent l'utilisation de ces actionneurs inappropriée pour le contrôle 3-axes précis s'ils sont utilisés seuls. En revanche, ils constituent des équipements intéressants pour l'asservissement du moment cinétique des roues. Des considérations de coût, de poids et de fiabilité justifient l'usage de ce type d'actionneurs. On remarquera cependant que l'utilisation des magnéto-coupleurs est souvent restreinte aux satellites en orbites basses, pour lesquelles l'amplitude du champ géomagnétique est suffisante<sup>2</sup>. La suite de ce chapitre montre en effet que l'amplitude du champ décroît en  $1/r^3$ , où  $r$  est la distance entre le centre de la Terre et le satellite. Ainsi, d'après [Sidi, 1997], un magnéto-coupleur créant un moment magnétique de  $100 \text{ A.m}^2$  perpendiculairement au champ magnétique et à une altitude de 400 km génère un couple maximal de  $2,56.10^{-3} \text{ N.m}$ . La même configuration à une orbite géostationnaire donne un couple de  $10,46.10^{-6} \text{ N.m}$ .

### 3.3 Aspects de périodicité dans le contrôle d'attitude

Du fait de leur rotation autour de la terre, la perception qu'ont les satellites de leur environnement est intrinsèquement périodique. Cet environnement exerce une influence sur le contrôle d'attitude par le biais :

- des actionneurs dont le principe de fonctionnement est très lié à l'environnement ;
- des perturbations environnementales.

Cette section discute de chacun de ces deux cas.

#### 3.3.1 Actionneurs dépendant de l'environnement : exemple des magnéto-coupleurs

Certains actionneurs s'appuient sur l'environnement spatial pour créer un couple de commande. L'exemple des magnéto-coupleurs est emblématique de ce cas de figure puisque le moment magnétique qu'ils génèrent se traduit sous la forme de couple par l'intermédiaire du champ magnétique terrestre. Or, tout au long de son orbite, le satellite perçoit ce champ différemment, même dans le cas où son attitude est invariante dans le référentiel inertiel.

Après un tour d'orbite, le champ magnétique dans lequel le satellite est immergé est très similaire à celui qu'il avait rencontré, une orbite auparavant. On notera toutefois que cette périodicité n'est pas exacte (même dans le cas d'une orbite non perturbée) puisque le satellite ne survole pas exactement le même point de la terre à chaque orbite, en raison de la rotation de la terre sur elle-même. En orbite basse, le satellite tourne cependant autour de la terre plus rapidement que cette planète tourne autour de son axe. De ces remarques, on conclut que le comportement des actionneurs magnétiques est quasi-périodique à la fréquence orbitale<sup>3</sup>. La suite de ce chapitre donnera des arguments plus formels pour étayer cette affirmation.

#### 3.3.2 Perturbations environnementales

Comme expliqué précédemment, le satellite est soumis tout au long de sa trajectoire orbitale à des forces ayant une influence directe sur son attitude. On dresse la liste des perturbations les plus significatives en orbite basse :

2. Certains travaux récents cherchent néanmoins à dépasser cette limite (voir [Desiderio et al., 2009] par exemple).

3. La suite de ce chapitre montre que, selon la direction de pointage, cette fréquence peut être égale au double de la fréquence orbitale.

- couple aérodynamique : l'atmosphère résiduelle que rencontre le satellite sur son orbite est à l'origine de forces aérodynamiques se traduisant sous la forme de couples, selon la géométrie du satellite et son orientation ;
- couple de gradient de gravité : tous les points du satellite n'étant pas situés à la même distance de la terre, ils subissent des forces d'attraction gravitationnelle différentes. Le centre de gravité (barycentre des forces de gravité) du satellite ne coïncide donc pas avec la centre de masse (barycentre des masses élémentaires). Cette configuration est à l'origine d'un couple s'exerçant sur le satellite ;
- pression de radiation solaire : l'impact des photons sur la surface éclairée du satellite se traduit par une force de pression perturbant l'attitude du satellite ;
- couples résiduels magnétiques : l'interaction du moment magnétique, provenant des matériaux et des boucles de courants du satellite, avec le champ géomagnétique crée une force génératrice d'un couple. Le principe physique à l'origine de cette force est le même que celui utilisé par les magnéto-coupleurs, mais le moment magnétique conduisant aux couples résiduels est créé involontairement.

En raison du mouvement orbital du satellite, les perturbations extérieures sont modélisées comme une fonction périodique à la fréquence orbitale du satellite. Dans le cadre de cette thèse, on utilise la formulation suivante des perturbations dans le référentiel inertiel, retenant les deux premières harmoniques d'une décomposition sinusoïdale :

$$T_{ext}^{[I]}(t) = \begin{bmatrix} T_{0x} + T_{1x} \sin(\omega_0(t)t + \varphi_{T1x}) + T_{2x} \sin(2\omega_n(t)t + \varphi_{T2x}) \\ T_{0y} + T_{1y} \sin(\omega_0(t)t + \varphi_{T1y}) + T_{2y} \sin(2\omega_n(t)t + \varphi_{T2y}) \\ T_{0z} + T_{1z} \sin(\omega_0(t)t + \varphi_{T1z}) + T_{2z} \sin(2\omega_n(t)t + \varphi_{T2z}) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où  $\omega_0(t)$  fait référence à la composante orthogonale au plan d'orbite du vecteur de vitesse angulaire orbitale. L'amplitude des composantes continues  $T_{0x} = T_{0y} = T_{0z}$  est de l'ordre de  $1,0 \cdot 10^{-7}$  N.m, tandis que  $\|T_{ext}^{[I]}(t)\|$  vaut d'environ  $4,0 \cdot 10^{-5}$  N.m. Les valeurs numériques utilisées dans le cadre de cette étude sont fournies par l'annexe I.

### 3.4 Modèle non-linéaire

La démarche de modélisation du mouvement d'un corps est classiquement divisée en deux étapes. La première s'intéresse à la relation entre le mouvement et sa cause en s'appuyant sur la relation fondamentale de la dynamique et sur le théorème du moment cinétique. La seconde se concentre sur la description de la position et de l'orientation du corps à partir de l'expression de sa vitesse obtenue à l'étape précédente. Les équations obtenues à l'issue de ces étapes sont nommées respectivement, équations de la dynamique et de la cinématique.

Dans le cadre de cette étude, la dynamique fait référence au lien entre les couples extérieurs et intérieurs exercés sur le satellite et sa vitesse angulaire. La connaissance exclusive de cette dernière grandeur permet de connaître l'orientation instantanée du satellite grâce à la cinématique. On note que, dans le cas le plus général, les équations dynamiques peuvent dépendre de l'attitude. Le satellite considéré étant équipé de trois roues à réaction et d'un jeu de magnéto-coupleurs, le modèle recherché peut être représenté graphiquement par le schéma proposé par la figure 3.1.

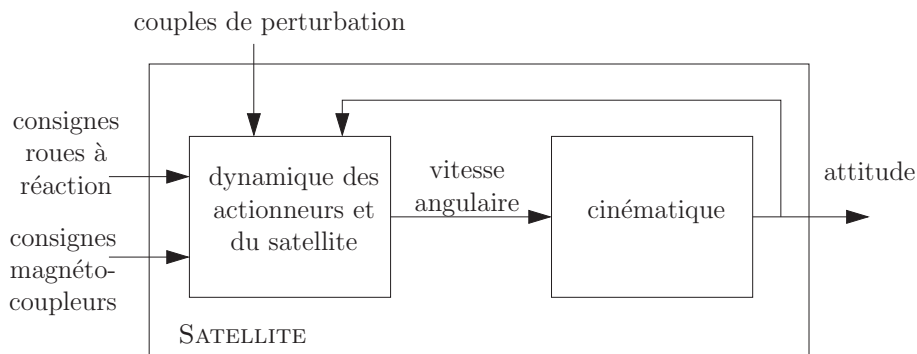


FIGURE 3.1 – Schéma du modèle du mouvement d'attitude du satellite

Cette section donne successivement les équations internes à chacun des deux blocs nommés « dynamique des actionneurs et du satellite » et « cinématique ». Obtenir l'expression du champ géomagnétique perçu par le satellite fait également l'objet d'une sous-section puisque cette grandeur est requise pour la modélisation des

magnéto-coupleurs. Cette démarche se conclut en résumant l'ensemble des équations sous la forme d'un modèle d'état.

### 3.4.1 Préliminaires

#### Vectrices

Cette section fait appel à de multiples référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. Dans ce contexte, la dérivation des équations dynamiques scalaires nécessite un soin particulier. C'est la raison pour laquelle, cette étude s'appuie sur un outil mathématique nommée « vectrice » et correspondant à une matrice formée par les trois vecteurs d'un trièdre orthonormé direct. A titre d'exemple, la vectrice  $\vec{\mathcal{F}}_A$  associée au référentiel  $F_A$  est définie comme suit :

$$\vec{\mathcal{F}}_A = \begin{bmatrix} \vec{x}_A \\ \vec{y}_A \\ \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

L'avantage majeur de cette variable instrumentale est de rétablir, de façon non-ambiguë, la distinction entre un vecteur  $\vec{v}$  et la matrice  $v^{[A]}$  de ses composantes scalaires  $\{v_x^{[A]}, v_y^{[A]}, v_z^{[A]}\}$  dans le référentiel  $F_A$  :

$$v^{[A]} = \begin{bmatrix} v_x^{[A]} \\ v_y^{[A]} \\ v_z^{[A]} \end{bmatrix}$$

On a en effet

$$\vec{v} = v_x^{[A]} \vec{x}_A + v_y^{[A]} \vec{y}_A + v_z^{[A]} \vec{z}_A = \left( v^{[A]} \right)^T \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{\mathcal{F}}_A^T v^{[A]}$$

Bien que la matrice de composantes  $v^{[A]}$  soit fréquemment assimilée au vecteur  $\vec{v}$  lui-même, dans ce chapitre le terme vecteur est exclusivement dédié à l'objet noté  $\vec{v}$ .

On considère maintenant le cas où  $F_B$  tourne par rapport à  $F_A$ . Le vecteur de vitesse angulaire de  $F_B$  par rapport à  $F_A$  est noté  $\vec{\omega}_{B/A}$ . La cinématique de la vectrice associée au référentiel en mouvement est alors régie par l'équation

$$\dot{\vec{\mathcal{F}}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{\mathcal{F}}_B$$

grâce à laquelle on déduit la relation suivante, applicable à un vecteur  $\vec{v}$  quelconque

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{v} + \overset{\circ}{v}^{[B]} \quad \text{avec} \quad \overset{\circ}{v}^{[B]} = \vec{\mathcal{F}}_B^T \dot{v}^{[B]} \quad (3.2)$$

Le vecteur  $\overset{\circ}{v}^{[B]}$  correspond donc à la forme vectorielle de la dérivée des composantes de  $\vec{v}$  dans  $F_B$ . Il s'agit du concept bien connu de la dérivée relative qui n'est équivalente à la dérivée classique (ou absolue) que si le référentiel de référence est inertiel. Autrement dit, dans le cas général,  $\dot{\vec{v}} = \overset{\circ}{v}^{[A]}$  si et seulement si  $F_A$  est inertiel. Cette discussion met en évidence un autre avantage des vectrices : l'usage de (3.2) permet l'étude d'équations de la dynamique sous une forme exclusivement vectorielle, et donc indépendante du (ou des) référentiel dans lequel les relations obtenues seront exprimées.

De plus amples détails sur cette notion sont donnés par l'annexe F extraite essentiellement de [Hugues, 1986]. Nous croyons que l'inévitable effort nécessaire à l'adoption de cet instrument mathématique est pleinement justifié par la rigueur et l'absence d'ambiguïté du cadre qu'il permet de mettre en place.

#### Notations

En raison de son objet d'étude, cette section fait appel à de très nombreuses variables. Plutôt que d'en dresser une liste exhaustive, on donne ici la philosophie de la nomenclature utilisée. Cette dernière se base principalement sur [Hugues, 1986], avec quelques légères modifications empruntées à [Courtois, 1998]. Cette sous-section reprend les explications données au commencement de cette thèse.

Selon la discussion précédente, on note  $\vec{\mathcal{F}}_A$  la vectrice associée à  $F_A$  et formée des vecteurs unitaires  $\vec{x}_A$ ,  $\vec{y}_A$  et  $\vec{z}_A$ . La notation  $O_A$  correspond à l'origine de ce trièdre. Le terme  $v^{[A]}$  fait référence à la matrice des composantes du vecteur  $\vec{v}$  dans  $F_A$  et la lettre  $v$  (sans flèche) correspond à l'amplitude de ce vecteur.

Lorsque ces référentiels sont associés à des corps en mouvement, on utilise le style calligraphique pour nommer ces derniers. Ainsi,  $\mathcal{A}$  est lié à  $F_A$ . On note  $\vec{h}_{\mathcal{A}/O_B}$  le moment cinétique de cet objet par rapport à l'origine du référentiel  $F_B$ .

La rotation du référentiel  $F_B$  par rapport à  $F_A$  est paramétrée par le quaternion  $q_{B/A}$ . La matrice de rotation et le vecteur vitesse angulaire associés sont notés  $C_{B/A}$  et  $\vec{\omega}_{B/A}$  respectivement. De façon similaire, le vecteur  $\vec{v}_{B/A}$  fait référence à la vitesse de translation de  $F_B$  par rapport à  $F_A$ , c'est-à-dire  $O_A\dot{O}_B$ .

Finalement, conformément aux développements précédents, on a recours à la notation  $\dot{(\ )}$  pour désigner la dérivation temporelle absolue. La dérivation temporelle relative au référentiel  $F_B$  est notée  $\overset{\circ}{(\ )}^{[B]}$ .

### Référentiels

L'annexe G fait la liste des référentiels utilisés dans ce chapitre et rappelle leurs définitions. Néanmoins, pour faciliter la lecture, on présente dès à présent les plus essentiels d'entre eux.

- $F_I$  : l'origine de ce référentiel est situé au centre de la Terre et ses axes sont tels que :  $\vec{z}_I$  est aligné avec l'axe de rotation de la Terre et dirigé vers le pôle Nord géographique,  $\vec{x}_I$  est dirigé vers le soleil pendant l'équinoxe vernal et  $\vec{y}_I$  complète le trièdre orthogonal direct ;
- $F_S$  : l'origine et les axes de ce référentiel correspondent au centre de masse et aux axes principaux du satellite complet (corps central plus actionneurs). Ce référentiel est donc fixe par rapport au satellite.

On précise également le cadre de l'étude grâce à l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 1.** *Le référentiel  $F_I$  est inertiel.*

Implicitement, on suppose donc que la nutation et la précession de la Terre peuvent être négligées. Il s'agit d'une hypothèse communément admise pour la commande d'attitude utilisant des magnéto-coupleurs [McElvain, 1964].

Le référentiel  $F_S$  étant fixe par rapport au satellite, l'attitude de ce dernier peut être caractérisée par l'orientation des axes de  $F_S$  par rapport à un autre référentiel connu, servant de référence. Dans le cas où le satellite doit s'orienter par rapport aux étoiles (pointage inertiel), le référentiel inertiel  $F_I$  joue traditionnellement ce rôle. En revanche, si la mission exige une orientation du satellite vers la Terre (pointage géocentrique), on définira plus volontiers l'attitude par rapport à un référentiel orbital local dont un des axes est toujours orienté vers la Terre. Pour ne pas perdre en généralité, cette étude se base sur la définition minimale suivante de ce référentiel de référence noté  $F_R$  :

- $F_R$  : l'origine de ce référentiel est confondue avec le centre de masse du satellite mais ses axes sont indépendants de l'orientation de ce dernier.

**Hypothèse 2.** *Le mouvement de  $F_R$  par rapport à  $F_I$  est tel que  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$  ainsi que  $q_{R/I}(t)$  sont périodiques à la période orbitale  $T_0$ .*

Ainsi, dans le cas du pointage inertiel, on choisit  $\vec{\omega}_{R/I} = \vec{0}$  alors que le pointage géocentrique conduit plus naturellement à faire correspondre  $\vec{\omega}_{R/I}$  avec la vitesse angulaire orbitale. On remarquera que ces deux cas particuliers vérifient l'hypothèse 2. Ils feront l'objet d'une attention particulière dans la suite de ce chapitre.

### 3.4.2 Equations de la dynamique du satellite

On obtient les équations régissant la dynamique du satellite complet identifié à l'aide de la lettre  $\mathcal{S}$ , en décomposant ce dernier en plusieurs éléments distincts. On note ainsi  $\mathcal{W}_k$  la  $k$ -ième roue à réactions et  $\mathcal{B}$  le satellite privé des trois roues.

#### Dynamique du satellite sans les roues à réaction

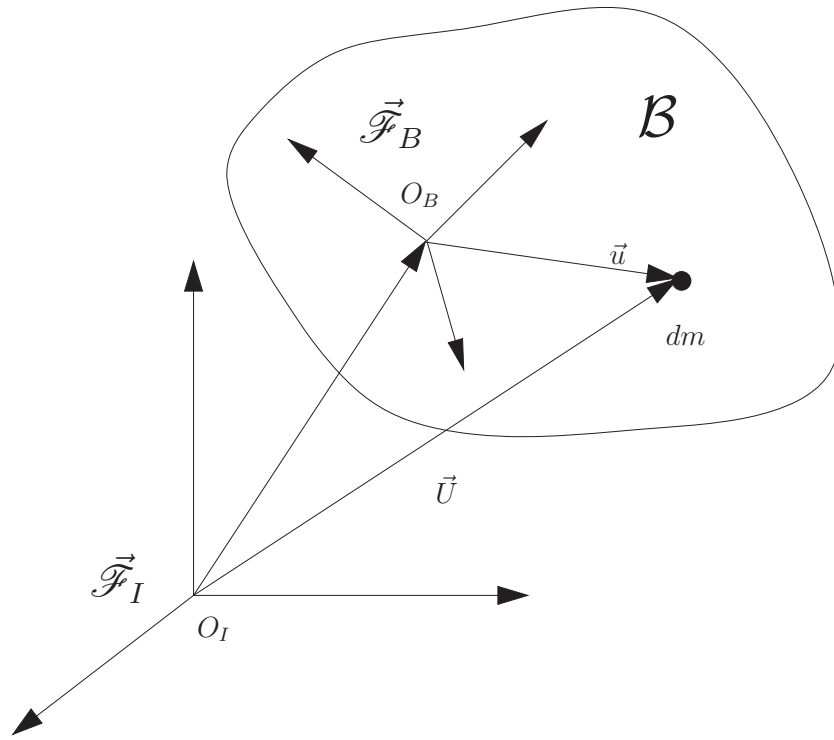
Bien que classiques, les résultats présentés dans cette sous-section permettent de se familiariser avec les notations et les outils utilisés par la suite.

On associe à  $\mathcal{B}$ , le référentiel  $F_B$  dont l'origine et les axes correspondent au centre de masse et aux axes principaux de cet objet. Ce référentiel est fixe par rapport au satellite et donc par rapport à  $F_S$ .

Pour obtenir l'équation de la dynamique de  $\mathcal{B}$ , on considère tout d'abord un point de masse  $dm$  appartenant à ce corps (rigide) et repéré par  $\vec{U}$  selon la relation

$$\vec{U} = O_I\vec{O}_B + \vec{u} \quad (3.3)$$

dont la figure 3.2 fournit une représentation graphique. Le lemme suivant donne l'expression de la vitesse de ce point.

FIGURE 3.2 – Corps central du satellite  $\mathcal{B}$ 

**Lemme 21.** La dérivée temporelle du point repéré par le vecteur  $\vec{U}$  vérifie la relation suivante :

$$\dot{\vec{U}} = \vec{v}_{B/I} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{u} \quad (3.4)$$

où  $\vec{v}_{B/I}$  et  $\vec{\omega}_{B/I}$  correspondent respectivement à la vitesse de translation et de rotation de  $F_B$  par rapport à  $F_I$ .

*Démonstration.* D'après (3.3), on a

$$\dot{\vec{U}} = \vec{v}_{B/I} + \dot{\vec{u}}$$

Le terme  $\dot{\vec{u}}$  peut être décomposé en une partie correspondant à la vitesse du point par rapport à  $F_B$  et une partie liée à la vitesse angulaire de  $F_B$  par rapport à  $F_I$ . On obtient donc

$$\dot{\vec{U}} = \vec{v}_{B/I} + \dot{\vec{u}}^{[B]} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{u}$$

Finalement, la rigidité de  $\mathcal{B}$  impose que le point repéré par  $\vec{U}$  soit fixe par rapport à  $F_B$ , ce qui se traduit par  $\dot{\vec{u}}^{[B]} = \vec{0}$ . On obtient alors la relation (3.4).  $\square$

Grâce à ce résultat, on obtient l'expression du moment angulaire de  $\mathcal{B}$  faisant intervenir le dyadic du moment d'inertie d'ordre deux, noté  $\vec{\vec{J}}_{\mathcal{B}/O_B}$ . Cet objet mathématique peut être vu comme la traduction vectorielle de la matrice d'inertie plus communément utilisée. Pour plus d'informations sur ce sujet, on pourra consulter l'annexe F.

**Lemme 22.** L'expression vectorielle du moment angulaire de  $\mathcal{B}$  par rapport à  $O_B$  est la suivante :

$$\vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} = \vec{\vec{J}}_{\mathcal{B}/O_B} \cdot \vec{\omega}_{B/I} \quad \text{avec} \quad \vec{\vec{J}}_{\mathcal{B}/O_B} = \int_{\mathcal{B}} (u^2 \vec{1} - \vec{u}\vec{u}) dm \quad (3.5)$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} = \int_{\mathcal{B}} (\vec{u} \times \dot{\vec{U}}) dm$$

La substitution de  $\dot{\vec{U}}$  par son expression établie dans (3.4) donne

$$\vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} = \int_{\mathcal{B}} (\vec{u} \times (\vec{v}_{B/I} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{u})) dm = \int_{\mathcal{B}} \vec{u} dm \times \vec{v}_{B/I} + \int_{\mathcal{B}} (\vec{u} \times \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{u}) dm$$

Le point  $O_B$ , origine du référentiel  $F_B$ , est situé au centre de masse de  $\mathcal{B}$ . Par conséquent, on a  $\int_{\mathcal{B}} \vec{u} dm = \vec{0}$ . Le développement suivant du terme restant permet de factoriser  $\vec{\omega}_{B/I}$  :

$$\begin{aligned} \vec{h}_{B/O_B} &= \int_{\mathcal{B}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{\omega}_{B/I} - (\vec{u} \cdot \vec{\omega}_{B/I}) \vec{u} dm \\ &= \int_{\mathcal{B}} u^2 \vec{\omega}_{B/I} - \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{\omega}_{B/I}) dm \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left( u^2 \vec{1} - \vec{u} \vec{u} \right) \cdot \vec{\omega}_{B/I} dm \\ &= \int_{\mathcal{B}} u^2 \vec{1} - \vec{u} \vec{u} dm \cdot \vec{\omega}_{B/I} \end{aligned}$$

Cette dernière relation n'est autre que l'expression recherchée (3.5).  $\square$

A l'aide de ce résultat, l'application de la relation fondamentale de la dynamique conduit au théorème suivant.

**Théorème 28.** *L'équation régissant la dynamique d'attitude du satellite privé des roues à réaction est donnée, sous sa forme vectorielle, par l'équation suivante :*

$$\vec{J}_{B/O_B} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{B/I}^{[B]} + \vec{\omega}_{B/I} \times \left( \vec{J}_{B/O_B} \cdot \vec{\omega}_{B/I} \right) = \vec{T}_{ext} \quad (3.6)$$

où  $\vec{T}_{ext}$  représente le vecteur des forces extérieures s'exerçant sur le satellite. L'expression de cette relation dans le référentiel  $F_B$  correspond à la relation suivante :

$$J_{B/O_B}^{[B]} \cdot \dot{\omega}_{B/I}^{[B]} + \left( \omega_{B/I}^{[B]} \right)^\times \cdot J_{B/O_B}^{[B]} \cdot \omega_{B/I}^{[B]} = T_{ext}^{[B]} \quad (3.7)$$

*Démonstration.* D'après la relation fondamentale de la dynamique, la dérivée du moment angulaire est égale à la somme des couples extérieurs :

$$\dot{\vec{h}}_{B/O_B} = \vec{T}_{ext}$$

En séparant cette dérivation temporelle en deux parties, on obtient :

$$\dot{\vec{h}}_{B/O_B}^{[B]} + \vec{\omega}_{B/I} \times \vec{h}_{B/O_B} = \vec{T}_{ext}$$

L'utilisation de (3.5) conduit alors à (3.6) en remarquant que  $\vec{J}_{B/O_B}$  est constant par rapport à  $F_B$ .

L'usage des vectrices permet de réécrire cette équation sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \left( \vec{\mathcal{F}}_B^T J_{B/O_B}^{[B]} \vec{\mathcal{F}}_B \right) \cdot \left( \vec{\mathcal{F}}_B^T \dot{\omega}_{B/I}^{[B]} \right) + \left( \vec{\mathcal{F}}_B^T \omega_{B/I}^{[B]} \right) \times \left( \left( \vec{\mathcal{F}}_B^T J_{B/O_B}^{[B]} \vec{\mathcal{F}}_B \right) \cdot \left( \vec{\mathcal{F}}_B^T \omega_{B/I}^{[B]} \right) \right) &= \vec{\mathcal{F}}_B^T T_{ext}^{[B]} \\ \vec{\mathcal{F}}_B^T J_{B/O_B}^{[B]} \dot{\omega}_{B/I}^{[B]} + \vec{\mathcal{F}}_B^T \left( \omega_{B/I}^{[B]} \right)^\times J_{B/O_B}^{[B]} \omega_{B/I}^{[B]} &= \vec{\mathcal{F}}_B^T T_{ext}^{[B]} \end{aligned}$$

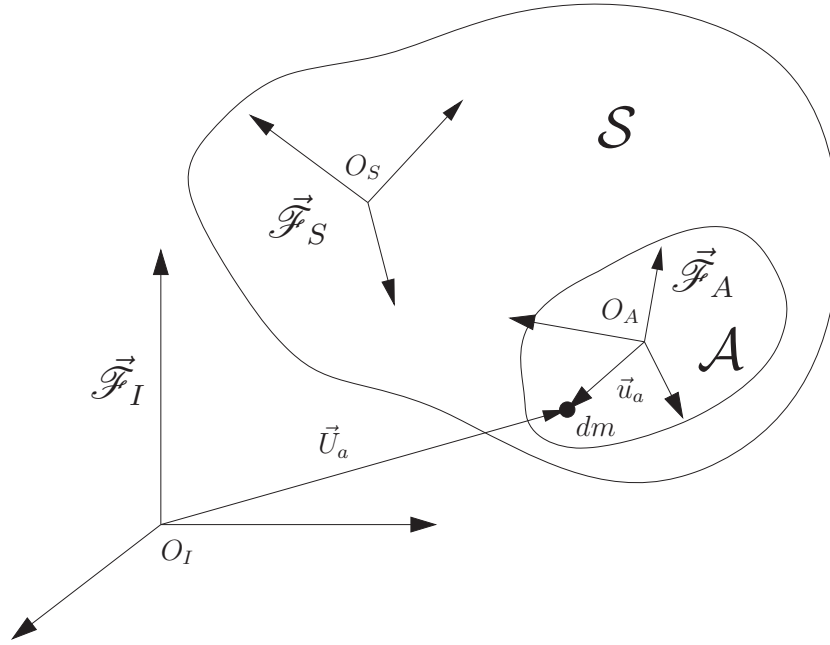
Par définition, ceci correspond à l'expression (3.7).  $\square$

Les équations données par le théorème 28 sont caractéristiques du mouvement non-amorti d'un corps dans un espace à trois dimensions. Pour intégrer la dynamique des roues à cette description, on considère au préalable les résultats intermédiaires de la section suivante, établies comme une factorisation des développements à venir.

### Dynamique d'un objet dont le centre de masse est fixe par rapport à $\mathcal{S}$

Soit un objet rigide  $\mathcal{A}$  auquel on associe le référentiel  $F_A$  de telle sorte que le centre de masse de  $\mathcal{A}$  est superposé à  $O_A$  et que  $\mathcal{A}$  est fixe par rapport à  $F_A$ . On suppose également que  $O_A$  est fixe par rapport au référentiel  $F_S$  lié au satellite. Par la suite, on assimilera cet objet  $\mathcal{A}$  au corps central  $\mathcal{B}$  puis à chacune des roues à réaction  $\mathcal{W}_k$ .

Le lemme suivant donne la quantité de mouvement et le moment cinétique de  $\mathcal{A}$  en fonction du mouvement du satellite. Pour ce faire, on considère le point de masse  $dm$  appartenant à  $\mathcal{A}$  et repéré par le vecteur  $\vec{U}_a$  selon la figure 3.3.

FIGURE 3.3 – Représentation de l'objet  $\mathcal{A}$  appartenant au satellite  $\mathcal{S}$ 

**Lemme 23.** La quantité de mouvement de  $\mathcal{A}$ , de masse  $m_a$ , s'écrit

$$\vec{p}_A = m_a \left( \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A \right) \quad (3.8)$$

et son moment cinétique par rapport à  $O_A$  est donné par la relation suivante :

$$\vec{h}_{A/O_A} = \vec{J}_{A/O_A} \cdot \vec{\omega}_{A/I} \quad \text{avec} \quad \vec{J}_{A/O_A} = \int_A \left( u_a^2 \vec{1} - \vec{u}_a \vec{u}_a \right) dm \quad (3.9)$$

Ces deux grandeurs permettent d'obtenir le moment cinétique de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $O_S$  :

$$\vec{h}_{A/O_S} = O_S \vec{O}_A \times \vec{p}_A + \vec{h}_{A/O_A} \quad (3.10)$$

*Démonstration.* Le vecteur  $\vec{U}_a$  est réécrit comme suit :

$$\vec{U}_a = O_I \vec{O}_S + O_S \vec{O}_A + \vec{u}_a \quad (3.11)$$

En décomposant  $O_S \vec{O}_A$  et  $\vec{u}_a$ , la dérivée par rapport au temps de cette expression est la suivante :

$$\dot{\vec{U}}_a = \vec{v}_{S/I} + \left( O_S \overset{\circ}{\vec{O}}_A^{[S]} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A \right) + \left( \overset{\circ}{\vec{u}}_a^{[A]} + \vec{\omega}_{A/I} \times \vec{u}_a \right)$$

Le vecteur  $O_S \vec{O}_A$  est fixe par rapport à  $F_S$ , de même que le point repéré par  $\vec{u}_a$  est solidaire du référentiel  $F_A$ . La relation précédente se simplifie donc ainsi :

$$\dot{\vec{U}}_a = \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A + \vec{\omega}_{A/I} \times \vec{u}_a \quad (3.12)$$

Par définition, la quantité de mouvement de  $\mathcal{A}$  est donnée par la relation suivante :

$$\vec{p}_A = \int_A \dot{\vec{U}}_a dm$$

La substitution de l'expression de  $\dot{\vec{U}}_a$  dans cette équation permet le développement suivant :

$$\vec{p}_A = \int_A \left( \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A + \vec{\omega}_{A/I} \times \vec{u}_a \right) dm = \left( \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A \right) \int_A dm + \vec{\omega}_{A/I} \times \int_A \vec{u}_a dm$$



Le centre de masse de  $\mathcal{A}$  étant localisé à l'origine du référentiel  $F_A$ , on a  $\int_{\mathcal{A}} \vec{u}_a dm = \vec{0}$ . En nommant  $m_a$  la masse de  $\mathcal{A}$ , on obtient alors (3.8).

En utilisant à nouveau la relation (3.12), le moment cinétique de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $O_A$  s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{h}_{\mathcal{A}/O_A} &= \int_{\mathcal{A}} \left( \vec{u}_a \times \dot{\vec{U}}_a \right) dm \\ &= \int_{\mathcal{A}} \left( \vec{u}_a \times \left( \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A + \vec{\omega}_{A/I} \times \vec{u}_a \right) \right) dm \\ &= \int_{\mathcal{A}} \vec{u}_a dm \times \left( \vec{v}_{S/I} + \vec{\omega}_{S/I} \times O_S \vec{O}_A \right) + \int_{\mathcal{A}} \left( \vec{u}_a \times \vec{\omega}_{A/I} \times \vec{u}_a \right) dm \end{aligned}$$

La quantité  $\int_{\mathcal{A}} \vec{u}_a dm$  étant nulle, on obtient (3.9) via un développement similaire à celui ayant conduit à (3.5).

Enfin, le moment angulaire de  $\mathcal{A}$  par rapport à  $O_S$  s'écrit

$$\vec{h}_{\mathcal{A}/O_S} = \int_{\mathcal{A}} \left( \left( O_S \vec{O}_A + \vec{u}_a \right) \times \dot{\vec{U}}_a \right) dm = O_S \vec{O}_A \times \int_{\mathcal{A}} \dot{\vec{U}}_a dm + \int_{\mathcal{A}} \left( \vec{u}_a \times \dot{\vec{U}}_a \right) dm$$

En reconnaissant la définition de  $\vec{p}_{\mathcal{A}}$  et  $\vec{h}_{\mathcal{A}/O_A}$  dans cette relation, on obtient directement (3.10).  $\square$

### Dynamique des roues à réaction selon leur axe de rotation

On présente maintenant le référentiel  $F_{W_k}$  lié à la roue  $W_k$ . Son origine est située au centre de masse de l'actionneur et l'axe de rotation de la roue est dirigé par  $\vec{x}_{W_k}$ .

L'application directe du lemme 23 permet alors d'obtenir le moment cinétique de la roue par rapport à  $O_{W_k}$  :

$$\vec{h}_{W_k/O_{W_k}} = \vec{J}_{W_k/O_{W_k}} \cdot \vec{\omega}_{W_k/I} \quad \text{avec} \quad \vec{J}_{W_k/O_{W_k}} = \int_{W_k} \left( u_{kw}^2 \vec{1} - \vec{u}_{kw} \vec{u}_{kw} \right) dm \quad (3.13)$$

où  $\vec{u}_{kw}$  relie  $O_{W_k}$  au point de masse  $dm$  appartenant à  $W_k$ .

Le principe de fonctionnement d'une roue à réaction consiste à accélérer ou décélérer sa vitesse de rotation afin d'agir sur le mouvement du satellite par transfert de moment cinétique. Chacune des roues  $W_k$  est donc équipée d'un moteur permettant de modifier son moment cinétique selon son axe de rotation  $\vec{x}_{W_k}$ . La composante de  $\vec{h}_{W_k/O_{W_k}}$  selon cet axe présente donc un intérêt particulier. Les expressions de cette grandeur scalaire, notée  $h_{kw}$ , et de sa dérivée temporelle sont données par le lemme suivant.

**Lemme 24.** *L'expression de la grandeur scalaire  $h_{kw} = \vec{h}_{W_k/O_{W_k}} \cdot \vec{x}_{W_k}$  s'écrit :*

$$h_{kw} = J_s \left( \omega_{kw} + \vec{x}_{W_k} \cdot \vec{\omega}_{S/I} \right) \quad (3.14)$$

où  $\omega_{kw}$  est la vitesse de rotation de la roue selon son axe. La dérivée temporelle de  $h_{kw}$  vérifie l'équation suivante

$$\dot{h}_{kw} = T_{kw} \quad (3.15)$$

avec  $T_{kw}$  correspondant au couple de commande exercé par le moteur sur la roue  $W_k$ .

*Démonstration.* Le dyadic du moment d'inertie de la roue  $W_k$  s'écrit comme suit :

$$\vec{J}_{W_k/O_{W_k}} = J_s \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} + J_t \vec{y}_{W_k} \vec{y}_{W_k} + J_t \vec{z}_{W_k} \vec{z}_{W_k}$$

où  $J_s$  et  $J_t$  sont deux valeurs scalaires représentant les inerties de la roue selon l'axe de rotation et les axes transverses, respectivement. En s'appuyant sur la définition du dyadic unitaire, disponible dans l'annexe F, on reformule cette expression :

$$\vec{J}_{W_k/O_{W_k}} = J_s \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} + J_t \left( \vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right)$$

On décompose également le vecteur de rotation  $\vec{\omega}_{W_k/I}$  sous la forme :

$$\vec{\omega}_{W_k/I} = \vec{\omega}_{W_k/S} + \vec{\omega}_{S/I} = \omega_{kw} \vec{x}_{W_k} + \vec{\omega}_{S/I}$$

Ces deux relations permettent de réécrire  $\vec{h}_{W_k/O_{W_k}}$ , donnée par (3.13) :

$$\vec{h}_{W_k/O_{W_k}} = \left( J_s \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} + J_t \left( \vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \right) \cdot \left( \omega_{kw} \vec{x}_{W_k} + \vec{\omega}_{S/I} \right)$$



En remarquant que

$$(\vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k}) \cdot \vec{x}_{W_k} = \vec{0} \quad (3.16)$$

on développe cette expression :

$$\begin{aligned} \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} &= J_s \omega_{kw} \vec{x}_{W_k} + J_t \omega_{kw} \left( \vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \cdot \vec{x}_{W_k} + J_s \vec{x}_{W_k} (\vec{x}_{W_k} \cdot \vec{\omega}_{S/I}) + J_t \left( \vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \cdot \vec{\omega}_{S/I} \\ &= J_s (\omega_{kw} + \vec{x}_{W_k} \cdot \vec{\omega}_{S/I}) \vec{x}_{W_k} + J_t \left( \vec{1} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \cdot \vec{\omega}_{S/I} \end{aligned} \quad (3.17)$$

La relation (3.14) se déduit aisément de cette équation en utilisant à nouveau (3.16).

La relation fondamentale de la dynamique permet d'affirmer que la dérivée de  $\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}}$  est égale au couple  $\vec{T}_{W_k}$  s'exerçant sur les roues :

$$\dot{\vec{h}}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} = \vec{T}_{W_k}$$

Après décomposition de la dérivée du moment angulaire, la projection de cette relation sur l'axe  $\vec{x}_{W_k}$  donne

$$\underbrace{\overset{\circ}{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}}^{[B]} \cdot \vec{x}_{W_k}}_a + \underbrace{\left( \vec{\omega}_{S/I} \times \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} \right) \cdot \vec{x}_{W_k}}_b = \vec{T}_{W_k} \cdot \vec{x}_{W_k} = T_{kw} \quad (3.18)$$

En remarquant que  $\overset{\circ}{x}_{W_k}^{[B]} = \vec{0}$ , le premier terme s'écrit

$$a : \overset{\circ}{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}}^{[B]} \cdot \vec{x}_{W_k} = \overbrace{\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}}^{[B]} \cdot \vec{x}_{W_k}}^o = \dot{h}_{kw}$$

On montre maintenant que le second terme est nul. Pour cela, (3.17) est réécrite de façon équivalente sous la forme

$$\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} = \underbrace{\left( J_s \omega_{kw} + (J_s - J_t) (\vec{x}_{W_k} \cdot \vec{\omega}_{B/I}) \right)}_{c \in \mathbb{R}} \vec{x}_{W_k} + J_t \vec{\omega}_{S/I}$$

Cela prouve que  $\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}}$  possède une composante selon  $\vec{x}_{W_k}$  et une autre dans la direction du vecteur  $\vec{\omega}_{B/I}$ . En remplaçant cette expression dans la formulation du terme  $b$ , on obtient

$$\begin{aligned} b : \left( \vec{\omega}_{S/I} \times \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} \right) \cdot \vec{x}_{W_k} &= \left( \vec{\omega}_{S/I} \times (c \vec{x}_{W_k} + J_t \vec{\omega}_{S/I}) \right) \cdot \vec{x}_{W_k} \\ &= c \left( \vec{\omega}_{S/I} \times \vec{x}_{W_k} \right) \cdot \vec{x}_{W_k} + J_t \left( \vec{\omega}_{S/I} \times \vec{\omega}_{S/I} \right) \cdot \vec{x}_{W_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation (3.18) est donc équivalente à (3.15).  $\square$

La relation (3.15) montre que la variation du moment cinétique des roues selon leur axe de rotation est directement égale au couple transmis par le moteur aux roues à réaction. Cette caractéristique facilite l'utilisation de ces actionneurs. Par la suite, on utilise les relations du lemme 24 pour faire apparaître les couples  $T_{kw}$  dans les équations de la dynamique de  $\mathcal{S}$ .

### Dynamique du corps central et de trois roues à réaction

Pour obtenir la description du mouvement du satellite complet  $\mathcal{S}$ , on fait appel à la relation fondamentale de la dynamique. Cette fois encore, la dérivation de l'expression du moment cinétique de  $\mathcal{S}$  par rapport à son centre de masse, c'est-à-dire  $\vec{h}_{\mathcal{S}/O_S}$ , est un préalable à ce développement. En présence de roues à réaction, cette grandeur trouve son origine dans le mouvement du corps central  $\mathcal{B}$  mais également dans celui des trois roues à réaction  $\{\mathcal{W}_k\}_{k=1,2,3}$ . On a en effet

$$\vec{h}_{\mathcal{S}/O_S} = \vec{h}_{\mathcal{B}/O_S} + \sum_{k=1}^3 \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_S} \quad (3.19)$$

On réécrit maintenant cette expression en utilisant les résultats des lemmes 23 et 24.

**Lemme 25.** *Le moment cinétique de  $\mathcal{S}$  par rapport à son centre de masse s'exprime comme suit :*

$$\vec{h}_{\mathcal{S}/O_S} = \vec{J}_{\mathcal{S}/O_S} \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} + \sum_{k=1}^3 h_{kw} \vec{x}_{W_k} \quad (3.20)$$

avec

$$\vec{J}_{\mathcal{S}/O_S} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \quad (3.21)$$

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_{\mathcal{B}/O_B} + m_b \left( \|O_S \vec{O}_B\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_B O_S \vec{O}_B \right)$$

$$\vec{J}_2 = \sum_{k=1}^3 \left\{ m_w \left( \|O_S \vec{O}_{W_k}\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_{W_k} O_S \vec{O}_{W_k} \right) + J_t \left( \vec{\mathbb{1}} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \right\}$$

*Démonstration.* L'application du lemme 23 au corps central  $\mathcal{B}$  puis aux roues à réaction  $\mathcal{W}_k$  conduit aux résultats suivants :

$$\vec{h}_{\mathcal{B}/O_S} = O_S \vec{O}_B \times \vec{p}_{\mathcal{B}} + \vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} \quad \text{avec} \quad \vec{p}_{\mathcal{B}} = m_b \left( \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \times O_S \vec{O}_B \right) \quad (3.22)$$

$$\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_S} = O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{p}_{\mathcal{W}_k} + \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} \quad \text{avec} \quad \vec{p}_{\mathcal{W}_k} = m_w \left( \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \times O_S \vec{O}_{W_k} \right) \quad (3.23)$$

Grâce à ces relations, on réécrit l'expression de  $\vec{h}_{\mathcal{S}/O_B}$  donnée par (3.19) comme suit :

$$\vec{h}_{\mathcal{S}/O_B} = O_S \vec{O}_B \times \vec{p}_{\mathcal{B}} + \vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} + \sum_{k=1}^3 \left\{ O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{p}_{\mathcal{W}_k} \right\} + \sum_{k=1}^3 \vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} \quad (3.24)$$

En utilisant la formulation de  $\vec{p}_{\mathcal{W}_k}$  donnée par (3.23), le terme  $O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{p}_{\mathcal{W}_k}$  est développé :

$$\begin{aligned} O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{p}_{\mathcal{W}_k} &= O_S \vec{O}_{W_k} \times \left( m_w \left( \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \times O_S \vec{O}_{W_k} \right) \right) \\ &= m_w O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + m_w O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \times O_S \vec{O}_{W_k} \\ &= m_w O_S \vec{O}_{W_k} \times \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + m_w \left( \|O_S \vec{O}_{W_k}\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_{W_k} O_S \vec{O}_{W_k} \right) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \end{aligned} \quad (3.25)$$

En utilisant un raisonnement similaire, (3.22) donne

$$O_S \vec{O}_B \times \vec{p}_{\mathcal{B}} = m_b O_S \vec{O}_B \times \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + m_b \left( \|O_S \vec{O}_B\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_B O_S \vec{O}_B \right) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \quad (3.26)$$

Puis, en reconnaissant l'expression de  $h_{kw}$  donnée par (3.14) dans l'équation (3.17), le moment cinétique de  $\mathcal{W}_k$  peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\vec{h}_{\mathcal{W}_k/O_{W_k}} = h_{kw} \vec{x}_{W_k} + J_t \left( \vec{\mathbb{1}} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \quad (3.27)$$

En remarquant également que  $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/I} = \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I}$ , puisque  $\vec{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{S}} = \vec{0}$  est nul, (3.5) devient :

$$\vec{h}_{\mathcal{B}/O_B} = \vec{J}_{\mathcal{B}/O_B} \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{S}/I} \quad (3.28)$$

L'utilisation de (3.25), (3.26), (3.27) et (3.28) permet de reformuler (3.24) :

$$\begin{aligned} \vec{h}_{\mathcal{S}/O_B} &= \left( \vec{J}_{\mathcal{B}/O_B} + m_b \left( \|O_S \vec{O}_B\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_B O_S \vec{O}_B \right) + \sum_{k=1}^3 \left\{ m_w \left( \|O_S \vec{O}_{W_k}\|^2 \vec{\mathbb{1}} - O_S \vec{O}_{W_k} O_S \vec{O}_{W_k} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_t \left( \vec{\mathbb{1}} - \vec{x}_{W_k} \vec{x}_{W_k} \right) \right\} \right) \cdot \vec{\omega}_{\mathcal{B}/I} + \left( m_b O_S \vec{O}_B + m_w \sum_{k=1}^3 O_S \vec{O}_{W_k} \right) \times \vec{v}_{\mathcal{S}/I} + \sum_{k=1}^3 h_{kw} \vec{x}_{W_k} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Cette équation n'est autre que (3.20) puisqu'on a  $m_b O_S \vec{O}_B + m_w \sum_{k=1}^3 O_S \vec{O}_{W_k} = \vec{0}$ ,  $O_S$  étant le centre de masse du satellite.  $\square$

Le moment d'inertie total exprimé par (3.21) est décomposé en deux termes,  $\vec{J}_1$  et  $\vec{J}_2$ . Le premier est la contribution du corps central tandis que le second est dû à la présence des roues à réaction. Les termes multipliés par  $m_b$  et  $m_w$  sont dus à la distance séparant le centre de masse du satellite de celui de ses composants : les roues et le corps central. Les autres éléments du moment d'inertie peuvent être interprétés comme la somme de l'inertie de  $\mathcal{B}$  et de celle des axes transverses de chacune des roues à réaction, ou encore comme l'inertie du système complet ( $\mathcal{B} + \mathcal{W}_{1,2,3}$ ) privée de l'inertie des roues selon leur axe de rotation.

A partir du lemme précédent, on établit l'équation de la dynamique du système complet en s'appuyant sur les notations matricielles suivantes :

$$X_W^{[S]} = \begin{bmatrix} x_{W_1}^{[S]} & x_{W_2}^{[S]} & x_{W_3}^{[S]} \end{bmatrix}, \quad h_w = \begin{bmatrix} h_{1w} \\ h_{2w} \\ h_{3w} \end{bmatrix}, \quad T_w = \begin{bmatrix} T_{1w} \\ T_{2w} \\ T_{3w} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

**Théorème 29.** *L'équation régissant la dynamique d'attitude du satellite avec roues à réaction est donnée sous sa forme vectorielle par l'équation suivante :*

$$\vec{J}_{S/O_S} \cdot \overset{\circ}{\omega}_{S/I}^{[S]} + \vec{\omega}_{S/I} \times \left( \vec{J}_{S/O_S} \cdot \vec{\omega}_{S/I} + \sum_{k=1}^3 (h_{kw} \vec{x}_{W_k}) \right) = \vec{T}_{ext} - \sum_{k=1}^3 (T_{kw} \vec{x}_{W_k}) \quad (3.31)$$

L'expression de cette relation dans le référentiel  $F_S$  correspond à la relation

$$J_{S/O_S}^{[S]} \dot{\omega}_{S/I}^{[S]} + \left( \omega_{S/I}^{[S]} \right)^\times \left( J_{S/O_S}^{[S]} \omega_{S/I}^{[S]} + X_W^{[S]} h_w \right) = T_{ext}^{[S]} - X_W^{[S]} T_w \quad (3.32)$$

à laquelle s'ajoute les trois relations scalaires (3.15).

*Démonstration.* A nouveau, l'utilisation de la relation fondamentale de la dynamique et la décomposition de la dérivée de  $\vec{h}_{S/O_B}$  conduit à

$$\overset{\circ}{h}_{S/O_B}^{[S]} + \vec{\omega}_{S/I} \times \vec{h}_{S/O_B} = \vec{T}_{ext} \quad (3.33)$$

En utilisant (3.20), on obtient l'expression vectorielle (3.31) en remarquant que  $\vec{J}_{S/O_S}$  est constant par rapport à  $F_S$ . L'expression de cette relation dans le référentiel  $F_S$  est ensuite obtenue en suivant une démarche maintenant classique et en utilisant les notations données par (3.30).  $\square$

La comparaison de (3.31) avec sa relation analogue (3.6), pour laquelle les roues n'étaient pas prises en compte, montre que ces actionneurs donnent naissance aux termes gyroscopiques  $\vec{\omega}_{S/I} \times (h_{kw} \vec{x}_{W_k})$  et modifient le moment cinétique total en prenant en compte le poids des roues et leur inertie selon les axes transverses. Finalement, on remarquera également que les couples de commande créés par les roues peuvent être considérés (au signe près) comme des couples extérieurs s'appliquant selon l'axe de rotation des roues à réaction.

### Couple créé par les magnéto-coupleurs

La circulation d'un courant dans une bobine génère un moment magnétique, noté  $\vec{M}$ , d'amplitude proportionnelle au courant. Ce moment interagit avec le champ magnétique environnant pour créer un couple magnétique  $\vec{T}_m$  selon la loi suivante :

$$\vec{T}_m = \vec{M} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{M} \quad (3.34)$$

Il est possible d'utiliser ce principe pour générer un couple destiné au contrôle d'attitude de satellites en orbite autour de la Terre, puisque ces derniers sont immergés dans le champ géomagnétique. Dans le cadre de cette étude, on considère le cas de satellites équipés d'un jeu de trois bobines dont les axes ne sont pas colinéaires deux à deux, chacune d'elles contribuant à une partie du moment magnétique total  $\vec{M}$ .

On précise que ce couple est perçu par le satellite comme un couple extérieur. Les équations du théorème 29 sont donc adaptées pour tenir compte de cet actionneur.

**Théorème 30.** *La forme vectorielle de l'équation de la dynamique du satellite équipé de roues à réaction et de magnéto-coupleurs est la suivante :*

$$\vec{J}_{S/O_S} \cdot \overset{\circ}{\omega}_{S/I}^{[S]} + \vec{\omega}_{S/I} \times \left( \vec{J}_{S/O_S} \cdot \vec{\omega}_{S/I} + \sum_{k=1}^3 (h_{kw} \vec{x}_{W_k}) \right) = \vec{T}_{ext} - \sum_{k=1}^3 (T_{kw} \vec{x}_{W_k}) - \vec{B} \times \vec{M} \quad (3.35)$$

Dans le référentiel  $F_S$ , cette relation s'exprime comme suit :

$$J_{S/O_S}^{[S]} \dot{\omega}_{S/I}^{[S]} + \left( \omega_{S/I}^{[S]} \right)^\times \left( J_{S/O_S}^{[S]} \omega_{S/I}^{[S]} + X_W^{[S]} h_w \right) = T_{ext}^{[S]} - X_W^{[S]} T_w - \left( B^{[S]} \right)^\times M^{[S]} \quad (3.36)$$

On ajoute les trois relations scalaires (3.15) qui complètent ces équations.

### 3.4.3 Equations décrivant la cinématique du satellite

Comme expliqué précédemment, dans le cadre de cette étude la cinématique a pour objectif de décrire l'orientation du satellite en intégrant sa vitesse de rotation. Cette description est caractérisée par l'angle que forment les vecteurs de  $F_S$  avec ceux de  $F_R$ . Elle peut donc être paramétrée grâce au quaternion  $q_{B/R}$ . On précise que ce quaternion est défini selon la convention suivante :

$$q_{S/R} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{S/R} \\ \eta_{S/R} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{S/R} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \eta_{S/R} \in \mathbb{R} \quad (3.37)$$

Finalement, on rappelle que  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$ , la vitesse de rotation de  $F_R$  par rapport au référentiel inertiel, est donnée puisqu'elle dépend de la mission du satellite.

Dans ce contexte, les équations régissant la dérivée  $q_{S/R}$  sont données par le théorème suivant.

**Théorème 31.** *L'équation suivante décrit la cinématique du satellite*

$$\dot{q}_{S/R} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{S/R} \\ \dot{\eta}_{S/R} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\left(\omega_{S/I}^{[S]}\right)^\times + C_{S/R} \left(\omega_{R/I}^{[R]}(t)\right)^\times C_{S/R}^T & \omega_{S/I}^{[S]} - C_{S/R} \omega_{R/I}^{[R]}(t) \\ -\left(\omega_{S/I}^{[S]}\right)^T + \left(\omega_{R/I}^{[R]}(t)\right)^T C_{S/R}^T & 0 \end{bmatrix} q_{S/R} \quad (3.38)$$

La matrice de rotation  $C_{S/R}$  dépend de  $q_{S/R}$  selon la relation suivante, extraite de [Hugues, 1986] :

$$C_{S/R}(q_{S/R}) = \left(\eta_{S/R}^2 - \varepsilon_{S/R}^T \varepsilon_{S/R}\right) \mathbf{1}_3 + 2\varepsilon_{S/R} \varepsilon_{S/R}^T - 2\eta_{S/R} \varepsilon_{S/R}^\times \quad (3.39)$$

*Démonstration.* D'après [Hugues, 1986], la dérivée du quaternion vérifie la relation suivante

$$\dot{q}_{S/R} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{S/R} \\ \dot{\eta}_{S/R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\eta_{S/R} \mathbf{1}_3 + \varepsilon_{S/R}^\times\right) \\ -\frac{1}{2} \varepsilon_{S/R}^T \end{bmatrix} \cdot \omega_{S/R}^{[S]}$$

pouvant être réécrite comme suit grâce aux propriétés des matrices de produits croisés

$$\dot{q}_{S/R} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\left(\omega_{S/R}^{[S]}\right)^\times & \omega_{S/R}^{[S]} \\ -\left(\omega_{S/R}^{[S]}\right)^T & 0 \end{bmatrix} \cdot q_{S/R} \quad (3.40)$$

La loi de composition des vitesses permet de décomposer  $\vec{\omega}_{S/I}$  sous la forme suivante :

$$\vec{\omega}_{S/I} = \vec{\omega}_{S/R} + \vec{\omega}_{R/I}$$

L'expression de cette relation dans le référentiel  $F_S$  est obtenue grâce au développement suivant :

$$\vec{\mathcal{F}}_S \cdot \left(\vec{\mathcal{F}}_S^T \cdot \omega_{S/I}^{[S]}\right) = \vec{\mathcal{F}}_S \cdot \left(\vec{\mathcal{F}}_S^T \cdot \omega_{S/R}^{[S]} + \vec{\mathcal{F}}_R^T \cdot \omega_{R/I}^{[R]}(t)\right)$$

conduisant à

$$\omega_{S/I}^{[S]} = \omega_{S/R}^{[S]} + C_{S/R} \cdot \omega_{R/I}^{[R]}(t) \quad (3.41)$$

La substitution de  $\omega_{S/I}^{[S]}$  dans (3.40) par son expression issue de (3.41) donne (3.38).  $\square$

### 3.4.4 Modélisation du champ magnétique

L'usage des magnéto-coupleurs nécessite l'expression du champ géomagnétique dans le référentiel lié au satellite  $F_S$ . Cette grandeur dépend non seulement de l'orientation du satellite mais aussi de sa localisation par rapport à la Terre. Afin de mieux appréhender ce couplage entre la dynamique d'attitude et le mouvement orbital, on a recours au référentiel de référence par le biais de la relation suivante :

$$B^{[S]} = C_{S/R} B^{[R]} \quad (3.42)$$

On rappelle que les axes de  $F_R$  sont indépendants de l'orientation du satellite et que son origine est confondue avec le centre de masse du satellite. Par conséquent,  $B^{[R]}$  n'est fonction que de la position du satellite sur l'orbite alors que  $C_{S/R}$  dépend uniquement de son attitude. L'expression de cette matrice de rotation étant donnée par (3.39), on se concentre dans cette sous-section sur l'évaluation de  $B^{[R]}$ .

### Modèle du champ magnétique terrestre

Il existe des modèles analytiques donnant accès à l'expression du champ magnétique terrestre. Ces derniers fournissent l'amplitude et la direction du champ magnétique local en tout point du référentiel  $F_E$ , lié à la Terre, sous l'hypothèse d'un champ géomagnétique non perturbé et en régime permanent [Makovec, 2001]. Comme illustré par la figure 3.8,  $F_E$  est obtenu à partir du référentiel inertiel par la rotation élémentaire<sup>4</sup> 3 d'angle  $\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t$ . La constante  $\omega_{\oplus}$  désigne la vitesse moyenne de rotation de la Terre sur elle-même tandis que  $\beta_{\oplus}$  correspond à la longitude Est du méridien de Greenwich au temps initial par rapport à  $F_I$ .

Le modèle standard du champ  $\vec{B}$  est l'IGRF (International Geomagnetic Reference Field) [Wertz, 1978]. Il fournit l'expression de  $\vec{B}$  dans le référentiel sphérique local, noté  $F_P$ , dont l'origine est repérée par le vecteur  $\vec{r}$  et dérivant de  $F_E$  grâce à la séquence de rotations élémentaires 3-2-1 d'angles  $\lambda$ ,  $\theta - \pi/2$  et  $-\pi/2$ , respectivement.

$$C_{P/E} = C_1(-\pi/2) \cdot C_2(\theta - \pi/2) \cdot C_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \lambda & \sin \theta \sin \lambda & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \lambda & \cos \theta \sin \lambda & -\sin \theta \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

La figure 3.4 illustre cette relation. Les variables  $\lambda$  et  $\theta$  font référence aux coordonnées sphériques du point repéré par  $\vec{r}$ , c'est-à-dire à la longitude Est par rapport au méridien de Greenwich et à la co-élévation respectivement. Les relations suivantes permettent d'obtenir ces valeurs à partir des coordonnées cartésiennes de  $\vec{r}$  :

$$\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{r_y^{[E]}}{r_x^{[E]}} \right), \quad \theta = \cos^{-1} \left( \frac{r_z^{[E]}}{r} \right) \quad (3.44)$$

Muni de ces notations, on donne l'expression de  $\vec{B}$  fournie par l'IGRF et extraite de [Wertz, 1978] :

$$B^{[P]} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (g^{n,m} \cos(m\lambda) + h^{n,m} \sin(m\lambda)) P^{n,m}(\theta) \\ - \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g^{n,m} \cos(m\lambda) + h^{n,m} \sin(m\lambda)) \frac{\partial P^{n,m}(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{-1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^k \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n m (-g^{n,m} \sin(m\lambda) + h^{n,m} \cos(m\lambda)) P^{n,m}(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

où le rayon équatorial de la Terre est noté  $R_{\oplus}$ . Les termes  $g^{n,m}$  et  $h^{n,m}$  correspondent aux coefficients gaussiens, dont les valeurs numériques sont librement mises à disposition de la communauté scientifique par l'IAGA (International Association of Geomagnetism and Aeronomy). Les fonctions  $P^{n,m}$  sont les fonctions de Legendre normalisées au sens de Schmidt. On trouvera dans [Wertz, 1978] des méthodes efficaces de calcul pour traiter ces fonctions.

La formulation (3.45) retenue pour l'IGRF se base sur une série d'harmoniques sphériques. Cette convention donne lieu à un modèle mathématique précis ne nécessitant qu'un faible nombre de coefficients  $g^{n,m}$  et  $h^{n,m}$ . On précise que ces derniers varient lentement au cours du temps : pour un point fixe par rapport à la Terre, le champ évolue avec le temps. Des observations ont mis en évidence l'existence d'inversion de polarité du champ géomagnétique. Toutefois, ces phénomènes ont lieu à des échelles de temps de l'ordre de la centaine de milliers d'années [Wertz, 1978]. Cette remarque justifie l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.** *En l'absence de perturbations magnétiques, l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  est constante dans le référentiel  $F_E$ .*

Dans le cadre de cette hypothèse, les seuls éléments de  $B^{[P]}$  variants dans le temps sont donc les coordonnées sphériques de  $\vec{r}$ , c'est-à-dire  $r$ ,  $\lambda$  et  $\theta$ . Comme le montre la sous-section suivante, leurs expressions sont des fonctions du mouvement orbital du satellite puisque dans le cas général, le satellite n'est pas fixe par rapport à la Terre.

### Trajectoire orbitale du satellite dans $F_E$

Pour décrire l'orbite de satellites autour de la Terre, on utilise les paramètres orbitaux suivants : la longitude du noeud ascendant  $\Omega$ , l'inclinaison  $i$ , l'anomalie vraie  $\nu$ , l'argument du périégée  $\omega$ , le demi grand axe  $a$  et enfin l'excentricité  $e$ . La distance  $r$  du satellite par rapport au centre de la Terre complète ce jeu de variables. Ces grandeurs sont représentées graphiquement par la figure 3.5.

4. L'axe de la rotation élémentaire  $i$  correspond au  $i$ -ième vecteur du trièdre. Ainsi, le vecteur directeur de la rotation 3 est  $\vec{z}$ . L'annexe G décrit plus en détails ces rotations.

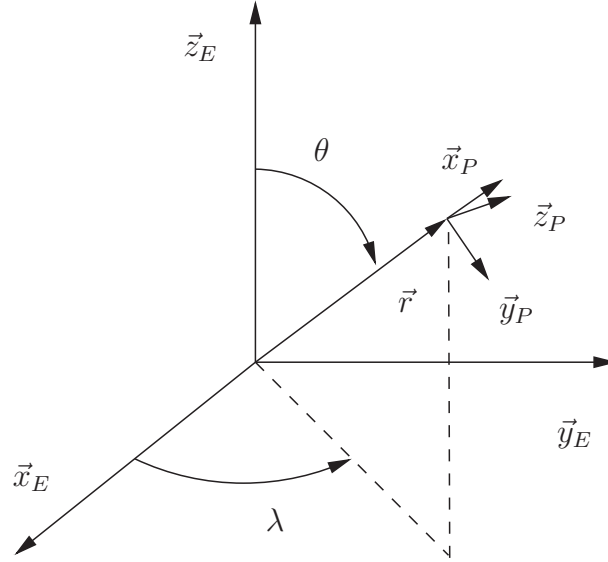


FIGURE 3.4 – Repère sphérique utilisé par le modèle IGRF

**Hypothèse 4.** *Les perturbations orbitales peuvent être négligées.*

En l'absence de perturbations orbitales, seules  $r$  et  $\nu$  varient au cours du temps [Schaub and Junkins, 2003]. Le mouvement du satellite sur son orbite suit alors les lois de Kepler liées aux équations décrites par le lemme suivant.

**Lemme 26** ([Vallado and McClain, 2001]). *Sous l'hypothèse 4, la dynamique orbitale est décrite par les deux équations suivantes :*

$$\dot{\nu} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (3.46)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (3.47)$$

où  $\mu$  est la constante de gravitation de la Terre.

Soit le référentiel orbital, noté  $F_O$ , dont l'origine est située au centre de la Terre et tel que  $\vec{x}_O$  est toujours orienté vers le satellite et que  $\vec{z}_O$  est colinéaire au vecteur de rotation  $\omega_{O/I}$ . Par définition,  $F_O$  dérive de  $F_I$  par la séquence de rotations élémentaires 3-1-3 d'angles  $\Omega$ ,  $i$  et  $\nu + \omega$  comme le montre la figure 3.5.

Le lemme suivant s'appuie sur cette définition pour obtenir les coordonnées du satellite dans le référentiel  $F_E$ .

**Lemme 27.** *Les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{r}$ , localisant le satellite, dans le référentiel  $F_E$  sont les suivantes :*

$$r^{[E]}(t) = r(t) \begin{bmatrix} \cos(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t - \Omega) \cos(-\nu(t) - \omega) - \sin(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t - \Omega) \sin(-\nu(t) - \omega) \cos i \\ -\sin(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t - \Omega) \cos(-\nu(t) - \omega) - \cos(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t - \Omega) \sin(-\nu(t) - \omega) \cos i \\ -\sin(-\nu(t) - \omega) \sin i \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

*Démonstration.* Les trois équations suivantes sont des conséquences directes de la définition des référentiels  $F_E$  et  $F_O$  :

$$r^{[O]} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{E/I} = C_3(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t), \quad C_{O/I} = C_3(\nu + \omega) \cdot C_1(i) \cdot C_3(\Omega) \quad (3.49)$$

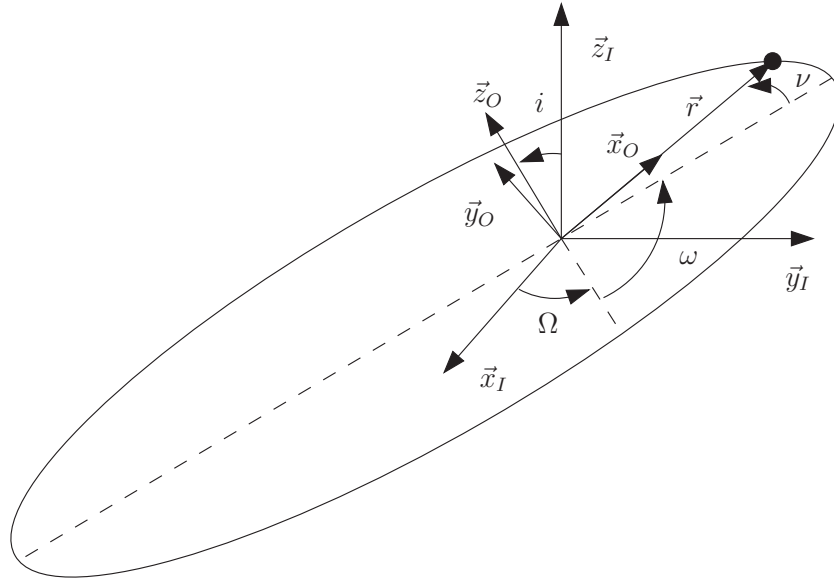


FIGURE 3.5 – Lien entre les repères inertiel et orbital

L'utilisation de ces relations permet d'obtenir l'expression de  $r^{[E]}$  via le développement suivant

$$\begin{aligned}
 r^{[E]} &= C_{E/O} r^{[O]} \\
 &= C_{E/I} C_{I/O} r^{[O]} \\
 &= C_3(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus} t) (C_3(\nu + \omega) C_1(i) C_3(\Omega))^T r^{[O]} \\
 &= r C_3(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus} t - \Omega) C_1(-i) C_3(-\nu - \omega) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

conduisant à (3.48). □

**Remarque.** On retrouve ici le cas particulier de l'orbite géostationnaire pour laquelle  $r^{[E]}$  est constante. On vérifiera aisément que si  $e = 0$ ,  $i = 0$  et  $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \omega_{\oplus}$ , alors la matrice de rotation  $C_{E/O}$  ne dépend pas du temps. Dans ce cas, l'orbite est circulaire et  $r = a = 42,164$  km. Ceci correspond à une altitude de 35,786 km, ce qui exclut ce cas de figure du cadre de cette étude consacrée aux missions en orbite basse. Pour cette thèse, le vecteur  $r^{[E]}$  est donc toujours fonction du temps. ◦

### Expression du champ magnétique dans le référentiel de référence

Les développements des deux sous-sections précédentes permettent de calculer l'expression du champ  $\vec{B}$  dans le référentiel  $F_P$ . Pour en déduire  $B^{[R]}$ , il suffit d'utiliser la matrice de rotation  $C_{R/P}$  pouvant être décomposée sous la forme  $C_{R/P} = C_{R/I} C_{I/E} C_{E/P}$ . En faisant appel aux équations (3.43) et (3.49), on obtient aisément

$$C_{R/P} = C_{R/I}(t) C_3(-\beta_{\oplus} - \omega_{\oplus} t - \lambda) C_2(\pi/2 - \theta) C_1(\pi/2) \tag{3.51}$$

On précise que la matrice  $C_{R/I}(t)$  peut être calculée directement à partir de  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$  en s'appuyant sur les équations suivantes, semblables à (3.39) et (3.40) :

$$\dot{q}_{R/I} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(\omega_{R/I}^{[R]}(t))^{\times} & \omega_{R/I}^{[R]}(t) \\ -(\omega_{R/I}^{[R]}(t))^T & 0 \end{bmatrix} \cdot q_{R/I} \tag{3.52a}$$

$$C_{R/I}(q_{R/I}) = (\eta_{R/I}^2 - \varepsilon_{R/I}^T \varepsilon_{R/I}) \mathbf{1}_3 + 2\varepsilon_{R/I} \varepsilon_{R/I}^T - 2\eta_{R/I} \varepsilon_{R/I}^{\times} \tag{3.52b}$$

Etant donnée la complexité des expressions mises en jeu, plutôt que d'obtenir une équation unique donnant  $B^{[R]}$ , on résume la démarche conduisant à cette matrice par la procédure suivante :

1. intégrer (3.47) pour obtenir l'expression de  $\nu$  et en déduire la valeur de  $r$  grâce à (3.46) ;
2. calculer les coordonnées cartésiennes puis sphériques de  $\vec{r}$  dans  $F_E$  en utilisant (3.48) puis (3.44) ;
3. évaluer l'expression du champ magnétique dans le référentiel sphérique via (3.45) ;
4. en déduire  $B^{[R]}$  en utilisant la relation entre les matrices de rotation donnée par (3.51).

### 3.4.5 Représentation sous forme de modèle d'état

#### Intégration de la dynamique orbitale

Deux termes de (3.36) dépendent à la fois de l'orientation du satellite et de sa position sur son orbite :  $B^{[S]}$  et  $T_{ext}^{[S]}$ . Dans le cas du champ magnétique, (3.42) a montré que l'influence de chacune de ces deux dynamiques pouvait être séparée grâce au référentiel  $F_R$  et à la matrice  $C_{S/R}$ . Similairement, on réécrit le terme correspondant aux perturbations extérieures de la façon suivante

$$T_{ext}^{[S]} = C_{S/R} T_{ext}^{[R]}$$

où  $T_{ext}^{[R]}$  ne dépend que de la localisation du satellite par rapport à la Terre et  $C_{S/R}$  est uniquement fonction de son attitude. La relation suivante lie  $T_{ext}^{[R]}$  à  $T_{ext}^{[I]}$  dont l'expression est donnée par (3.1), par l'intermédiaire de  $C_{R/I}$  fournie par (3.52).

$$T_{ext}^{[R]} = C_{R/I} T_{ext}^{[I]}$$

Sous l'hypothèse 4, selon laquelle les perturbations orbitales peuvent être négligées, et dans un environnement non bruité,  $T_{ext}^{[R]}$  et  $B^{[R]}$  sont totalement définis par les paramètres initiaux de l'orbite et  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$ . La résolution de (3.52) et des équations de la section 3.4.4 conduit alors à l'expression de  $B^{[R]}(t)$  et  $T_{ext}^{[R]}(t)$  le long de l'orbite du satellite. L'usage de ce précalcul permet de s'affranchir de la dynamique orbitale pour se focaliser sur la problématique de la commande d'attitude.

**Remarque.** Cette stratégie suppose une connaissance parfaite de la trajectoire du satellite par rapport à la Terre. Ce cadre est acquis sous l'hypothèse 4 d'une orbite non perturbée. Dans le cas contraire, cette approche n'est pas sans fondement dans la mesure où l'orbite du satellite fait également l'objet d'un asservissement, ce qui la rend relativement prévisible.  $\circ$

#### Choix des variables d'état et de commande

On fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 5.** Le temps de réponse des actionneurs est négligeable.

Selon la technologie utilisée, les roues à réaction sont commandées par des moteurs électriques en réponse à une tension ou un courant [Wertz, 1978]. Sous l'hypothèse 5,  $\omega_{kw}$ , la vitesse de rotation de  $\mathcal{W}_k$ , et  $T_{kw} = \dot{h}_{kw} = J_s \dot{\omega}_{ks}$  sont directement et respectivement proportionnels à cette commande et à sa dérivée. C'est la raison pour laquelle la matrice de couple  $T_w$ , regroupant les termes  $T_{kw}$ , est directement considérée comme l'entrée de commande générée par les roues à réaction. Par ailleurs, comme expliqué précédemment, le moment magnétique  $\vec{M}$  des magnéto-coupleurs est dû à l'action conjointe de plusieurs bobines traversées par des courants électriques. L'hypothèse 5 permet de négliger le régime transitoire lié à l'utilisation de ces actionneurs. On peut alors considérer l'expression de  $\vec{M}$  dans  $F_S$  comme l'entrée de commande relative à ces instruments. L'action de ces deux actionneurs influence donc les équations de la dynamique par le biais du vecteur  $u$  défini comme suit :

$$u = \begin{bmatrix} T_w \\ M^{[S]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.53)$$

Les variables d'état considérées sont données par la liste suivante :  $\omega_{S/I}^{[S]} \in \mathbb{R}^3$ ,  $q_{S/R}^{[S]} \in \mathbb{R}^4$  et  $h_w \in \mathbb{R}^3$ . Elles forment le vecteur d'état  $x$  :

$$x = \begin{bmatrix} \omega_{S/I}^{[S]} \\ q_{S/R}^{[S]} \\ h_w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \quad (3.54)$$



### Modèle d'état quasi-périodique

Le théorème suivant synthétise les résultats de modélisation obtenus jusqu'à présent.

**Théorème 32.** *L'équation d'état du modèle décrivant la dynamique et la cinématique du satellite équipé des roues à réaction et des magnéto-coupleurs est la suivante :*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} f_\omega(t, x, u) \\ f_q(t, x) \\ f_h(u) \end{bmatrix} \quad (3.55a)$$

avec

$$f_\omega(t, x, u) = \left( J_{S/O_S}^{[S]} \right)^{-1} \left( - \left( \omega_{S/I}^{[S]} \right)^\times \left( J_{S/O_S}^{[S]} \omega_{S/I}^{[S]} + X_W^{[S]} h_w \right) + C_{S/R} T_{ext}^{[R]}(t) - X_W^{[S]} T_w - \left( C_{S/R} B^{[R]}(t) \right)^\times M^{[S]} \right) \quad (3.55b)$$

$$f_q(t, x) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} - \left( \omega_{S/I}^{[S]} \right)^\times + C_{S/R} \left( \omega_{R/I}^{[R]}(t) \right)^\times C_{S/R}^T & \omega_{S/I}^{[S]} - C_{S/R} \omega_{R/I}^{[R]}(t) \\ - \left( \omega_{S/I}^{[S]} \right)^T + \left( \omega_{R/I}^{[R]}(t) \right)^T C_{S/R}^T & 0 \end{bmatrix} q_{S/R} \quad (3.55c)$$

$$f_h(u) = T_w \quad (3.55d)$$

On rappelle également (3.39) établissant le lien entre  $C_{S/R}$  et  $q_{S/R}$  :

$$C_{S/R} (q_{S/R}) = \left( \eta_{S/R}^2 - \varepsilon_{S/R}^T \varepsilon_{S/R} \right) \mathbf{1}_3 + 2\varepsilon_{S/R} \varepsilon_{S/R}^T - 2\eta_{S/R} \varepsilon_{S/R}^\times$$

Les résultats de ce théorème permettent de préciser le schéma de la figure 3.1 sous la forme proposée par la figure 3.6. Cette représentation graphique met en lumière la dépendance que les fonctions  $f_\omega(t, x, u)$  et  $f_q(t, x)$  entretiennent vis-à-vis du temps par l'intermédiaire des termes  $T_{ext}^{[R]}(t) = C_{R/I}(t) T_{ext}^{[I]}(t)$ ,  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$  et  $B^{[R]}(t)$ .

Par hypothèse,  $q_{R/I}(t)$ ,  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$  et  $T_{ext}^{[I]}(t)$  sont périodiques à la période orbitale. La relation (3.52b) prouve que cette propriété se transmet à  $C_{R/I}(t)$  et donc à  $T_{ext}^{[R]}(t)$ . De plus, comme expliqué précédemment, l'expression de  $B^{[R]}(t)$  est quasi-périodique à la même période. La suite de ce chapitre en fera la démonstration. L'ensemble du modèle décrit par (3.55) est donc quasi-périodique à la fréquence orbitale.

Pour faire face à la complexité du modèle décrit par le théorème 32, la section suivante en propose une version approchée.

## 3.5 Approximation du modèle au voisinage d'une trajectoire prédéfinie

Les équations de la dynamique d'attitude de  $\mathcal{S}$  établies dans la section précédente sont non-linéaires et variantes dans le temps. Ces aspects complexifient la mise en œuvre d'une stratégie d'analyse (et à plus forte raison de synthèse) de stabilité et de performance. Pour surmonter ces obstacles, on propose une version approchée du modèle autour d'une trajectoire particulière, identifiée par le symbole  $\sharp$ . La notation  $(\ )_\sharp$  correspond à l'évaluation du contenu de la parenthèse sur cette trajectoire. On notera que, par nature, cette approche conduit à un modèle dont la validité n'est que locale.

Dans un premier temps, cette section présente la trajectoire retenue avant d'établir une version linéarisée des équations du théorème 32 au voisinage de cette trajectoire. L'approximation du calcul du champ sur cette trajectoire conclut cette section.

Avant toute chose, on procède à une simplification des notations puisque, pour la majorité des variables, la suite des développements ne présente plus de risques de confusion. Le tableau suivant fait la correspondance entre les anciennes notations et leur nouvelle version simplifiées :

Anciennes notations	$q_{S/R}$	$\varepsilon_{S/R}$	$\eta_{S/R}$	$\omega_{S/I}^{[S]}$	$\omega_{S/R}^{[S]}$	$\omega_{R/I}^{[R]}(t)$	$M^{[S]}$	$J_{S/O_S}^{[S]}$	$T_{ext}^{[R]}$	$(h_s)_\sharp$
Notations simplifiées	$q$	$\varepsilon$	$\eta$	$\omega$	$\omega_{S/R}$	$\omega_{R/I}(t)$	$M$	$J$	$T_{ext}$	$h_\sharp$

Pour poursuivre cette simplification, on fait l'hypothèse suivante

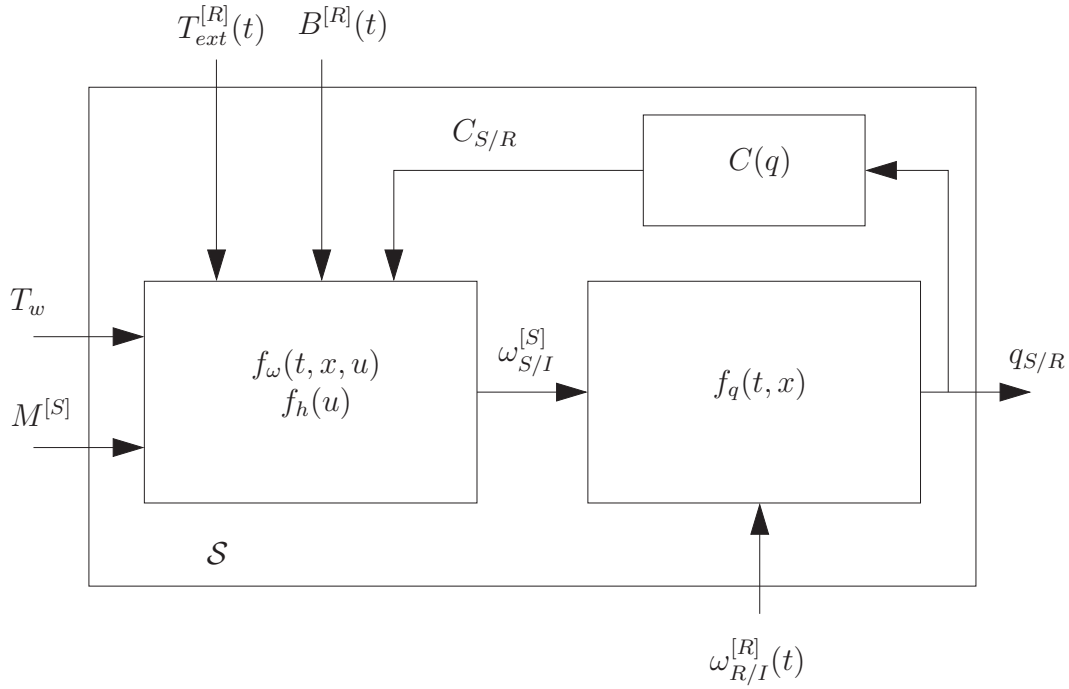


FIGURE 3.6 – Représentation graphique du modèle non-linéaire décrit par le théorème 32

**Hypothèse 6.** La matrice  $X_W^{[S]}$  est égale à l'identité.

Dans ce cas, les relations du théorème 32 s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{bmatrix} f_{\omega}(t, x, u) \\ f_q(t, x) \\ f_h(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} (-\omega^{\times} (J\omega + h_w) + C_{S/R} T_{ext}(t) - T_w - (C_{S/R} B^{[R]}(t))^{\times} M) \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega^{\times} + C_{S/R} \omega_{R/I}^{\times}(t) C_{S/R}^T & \omega - C_{S/R} \omega_{R/I}(t) \\ -\omega^T + \omega_{R/I}^T(t) C_{S/R}^T & 0 \end{bmatrix} q_{S/R} \\ T_w \end{bmatrix}$$

### 3.5.1 Trajectoire de l'approximation

Comme expliqué précédemment, le modèle approché n'est valide que localement. Toute démarche d'analyse et de synthèse s'appuyant sur le modèle approché ne peut donc être valable que si le modèle complet évolue au voisinage de la trajectoire  $\sharp$ . C'est la raison pour laquelle on définit  $\sharp$  par rapport à l'objectif de commande. Le système d'asservissement conçu à partir du modèle approché devra alors remplir le double rôle consistant à satisfaire les critères de stabilité et de performance et à maintenir le modèle à proximité de  $\sharp$ .

On rappelle que l'asservissement de l'attitude du satellite et la régulation de la vitesse des roues constituent les deux objectifs d'asservissement retenus dans le cadre de cette thèse. Comme expliqué auparavant, le premier peut être interprété comme la régulation de  $q$  autour du quaternion unitaire. On traduit le second comme la régulation des termes  $h_{kw}$  autour d'un moment cinétique nominal  $h_{k\sharp}$ . Ces spécifications conduisent à la définition suivante de  $\sharp$ .

**Définition 6.** La trajectoire  $\sharp$  est caractérisée par les équations suivantes :

$$\sharp : \begin{cases} (\omega_{S/R})_{\sharp} = \mathbf{0} \\ (q)_{\sharp} = \mathbf{1} \\ (h_s)_{\sharp} = [h_{1\sharp} \quad h_{2\sharp} \quad h_{3\sharp}]^T = h_{\sharp} \end{cases} \quad (3.56)$$

On complète cette définition par la relation

$$(M)_{\sharp} = \mathbf{0} \quad (3.57)$$

○

**Remarque.** Le terme trajectoire que l'on associe à  $\sharp$  peut sembler inapproprié, étant donné que (3.56) et (3.57) décrivent un point. Il faut pourtant se souvenir que  $B(t)$ ,  $\omega_{R/I}(t)$  et  $T_{ext}(t)$  conservent leur dépendance à l'égard du temps sur  $\sharp$ . Ceci justifie la terminologie adoptée. ○

Grâce à (3.55), (3.41) et (3.39), on obtient les relations suivantes, directement déduites de la définition de  $\sharp$  :

$$(C_{S/R})_{\sharp} = \mathbf{1}_3, \quad \omega_{\sharp} = (\omega_{S/R} + C_{S/R}\omega_{R/I}(t))_{\sharp} = \omega_{R/I}(t), \quad (T_s)_{\sharp} = (\dot{h}_s)_{\sharp} = \mathbf{0}$$

On obtient alors aisément les expressions de  $x$  et  $u$  sur cette trajectoire :

$$x_{\sharp} = \begin{bmatrix} \omega \\ q \\ h_w \end{bmatrix}_{\sharp} = \begin{bmatrix} \omega_{R/I}(t) \\ \mathbf{1} \\ h_{\sharp} \end{bmatrix}, \quad u_{\sharp} = \begin{bmatrix} T_w \\ M \end{bmatrix}_{\sharp} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

### 3.5.2 Linéarisation du modèle d'état

Pour obtenir une approximation du modèle (32) autour de la trajectoire  $\sharp$ , on procède à sa linéarisation. A cette fin, on définit classiquement le résultat de l'opérateur  $\Delta$  par l'équation suivante, satisfaite pour une matrice  $y$  quelconque.

$$\Delta y = y - (y)_{\sharp} \quad (3.59)$$

**Théorème 33.** *Les équations suivantes correspondent à la linéarisation du modèle décrit par le théorème 32 au voisinage de la trajectoire  $\sharp$  :*

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\omega} \\ \Delta \dot{\varepsilon} \\ \Delta \dot{h}_s \end{bmatrix} = A(t) \begin{bmatrix} \Delta \omega \\ \Delta \varepsilon \\ \Delta h_w \end{bmatrix} + B_u(t) \begin{bmatrix} \Delta T_w \\ \Delta M \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} J^{-1}K(t) & 2J^{-1}T_{ext}^{\times}(t) & -J^{-1}\omega_{R/I}^{\times}(t) \\ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_3 & -\omega_{R/I}^{\times}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad B_u(t) = \begin{bmatrix} -J^{-1} & -J^{-1}(B^{[R]}(t))^{\times} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

avec

$$K(t) = (J\omega_{R/I}(t) + h_{\sharp})^{\times} - \omega_{R/I}^{\times}(t)J \quad (3.62)$$

*Démonstration.* Voir l'annexe H. □

On vérifiera que l'on retrouve l'expression de modèles existants dans la littérature (voir [Lovera et al., 2002, Pulecchi et al., 2010, Wiśniewski and Blanke, 1999] traitant du pointage géocentrique et prenant en compte le couple de gradient de gravité).

On remarquera que  $\eta$ , le dernier élément du quaternion est absent de cette expression. En effet, à proximité de la trajectoire  $\sharp$ ,  $\varepsilon$  suffit à paramétrer sans ambiguïté l'orientation du satellite. Il n'y a pas de risque de singularités et le terme  $\eta$  peut être reconstruit en s'appuyant sur la contrainte de norme unitaire des quaternions. C'est la raison pour laquelle, on ne prend pas en compte la dynamique de  $\Delta\eta$ , suivant en ce sens l'approche mise en œuvre dans [Corno and Lovera, 2009] par exemple.

### 3.5.3 Condition de validité de l'approximation du modèle

On montre dans cette section que la trajectoire  $\sharp$  n'est pas admissible<sup>5</sup> en boucle fermée, quelle que soit la loi de commande choisie. L'origine de ce constat est discutée et des pistes visant à contourner cette difficulté sont proposées. A notre connaissance, cette question n'a pas été traitée dans la littérature.

Au préalable, on définit deux trajectoires supplémentaires, notées  $\flat$  et  $\natural$ , grâce au tableau suivant (le caractère  $-$  indique que la grandeur considérée n'est pas contrainte) :

	$\sharp$	$\flat$	$\natural$
$\omega$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$q$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$h_w$	$h_{\sharp}$	$h_{\sharp}$	$-$
$M$	$\mathbf{0}$	$-$	$-$

5. On qualifie une trajectoire  $\diamond$  d'admissible pour le système  $\Sigma$  si les équations décrivant  $\Sigma$  sont vérifiées sur  $\diamond$ . Ce concept est moins fort que l'atteignabilité qui, selon [Bittanti and Colaneri, 2008], requiert non seulement que  $\diamond$  soit admissible mais également qu'il existe une seconde trajectoire admissible partant de l'origine et rejoignant  $\diamond$ .

Ces nouvelles trajectoires doivent être vues comme des relaxations de  $\sharp$ , obtenues en retirant les contraintes sur  $M$  puis sur  $h_w$ .

### Admissibilité de la trajectoire

**Présentation de la problématique** Quelle que soit la loi de commande considérée, on montre que la trajectoire  $\sharp$  n'est pas admissible pour le système asservi. Plus précisément, dans le cas général, l'équation de la dynamique (3.55b) n'est pas vérifiée sur la trajectoire  $\sharp$ . Pour justifier cette affirmation, cette équation est réécrite sous la forme suivante, où le terme  $-J\dot{\omega}_{R/I}(t)$  a été introduit :

$$J(\dot{\omega} - \dot{\omega}_{R/I}(t)) = T_a + C_{S/R}(q)T_{ext}(t) - T_w - \left(C_{S/R}(q)B^{[R]}(t)\right)^\times M \quad (3.63)$$

avec

$$T_a(t) = -J\dot{\omega}_{R/I}(t) - \omega^\times(J\omega + h_w) \quad (3.64)$$

Sur la trajectoire  $\sharp$ , le coté gauche de l'égalité (3.63) est nul contrairement au coté droit valant  $(T_a)_\sharp + T_{ext}(t)$  où

$$T_{a\sharp}(t) = -J\dot{\omega}_{R/I}(t) - \omega_{R/I}^\times(t)(J\omega_{R/I}(t) + h_\sharp) \quad (3.65)$$

qui n'est pas nul dans le cas général.

**Remarque.** Le couple  $T_{a\sharp}(t)$  naît du mouvement de  $F_R$  par rapport à  $F_I$ . Si  $\omega_{R/I}(t) = \mathbf{0}$ , alors  $T_{a\sharp}(t)$  est également nul. Il peut être vu comme un couple extérieur auquel les actionneurs doivent s'opposer pour maintenir le satellite sur la trajectoire  $\sharp$ . Typiquement, dans le cas des missions de pointage géocentrique, l'amplitude de  $T_{a\sharp}(t)$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour un petit satellite en orbite basse.  $\circ$

**Relaxation de la contrainte sur  $M_\sharp$**  Face à ce constat, il semble naturel de chercher à relaxer les contraintes de la définition 6 de  $\sharp$ . Cette trajectoire est caractérisée d'une part par la traduction directe des objectifs de commande, correspondant à  $\omega_\sharp = \omega_{R/I}(t)$ ,  $q_\sharp = \mathbf{1}$  et  $h_\sharp$  constant, et, d'autre part, par la contrainte  $M_\sharp = \mathbf{0}$ . Sans remettre en cause les spécifications, il est donc possible de relaxer la contrainte portant sur  $M$ , ce qui conduit à la trajectoire  $\flat$ . Le lemme suivant établit une condition nécessaire et suffisante pour que  $\flat$  soit une trajectoire admissible pour le système asservi.

**Lemme 28.** Il existe une loi de commande à retour d'état  $\{T_w(x), M(t, x)\}$  assurant que la trajectoire  $\flat$  est un équilibre stable asymptotiquement et globalement pour le système décrit par (3.55) si et seulement si la relation suivante est vérifiée :

$$(B^{[R]})^T(t)(T_{a\sharp}(t) + T_{ext}(t)) = \mathbf{0} \quad (3.66)$$

L'expression de  $M$  sur la trajectoire  $\flat$  est alors donnée par

$$M_\flat(t) = -\frac{(B^{[R]})^\times(t)}{\|B^{[R]}(t)\|^2} (T_{a\sharp}(t) + T_{ext}(t)) \quad (3.67)$$

L'équation (3.65) fournit le terme  $T_{a\sharp}(t)$ .

*Démonstration.* En s'appuyant sur (3.55), on vérifie aisément que  $\dot{q}_\flat = f_q(x_\flat) = \mathbf{0}$  et que  $(\dot{h}_s)_\flat = f_h(u_\flat) = \mathbf{0}$  si et seulement si  $(T_w)_\flat = \mathbf{0}$ .

On montre maintenant que (3.66) est une condition nécessaire pour que l'équation de la dynamique soit vérifiée sur  $\flat$ . Sur cette trajectoire, le coté gauche de l'égalité (3.63) est nul tandis que le coté droit correspond à  $T_{ab}(t) + T_{ext}(t) - (B^{[R]}(t))^\times M_\flat$ . On obtient donc la condition nécessaire suivante :

$$T_{ab}(t) + T_{ext}(t) - (B^{[R]}(t))^\times M_\flat = \mathbf{0} \quad (3.68)$$

La multiplication à gauche par  $(B^{[R]}(t))^T$  de cette expression conduit à (3.66) puisque  $v^T v^\times = \mathbf{0}$  quel que soit  $v \in \mathbb{R}^3$ .

D'autre part, en utilisant l'identité  $vv^T/\|v\|^2 - v^\times v^\times/\|v\|^2 = \mathbf{1}_3$  valable quel que soit  $v \in \mathbb{R}^3$ , il est possible de réécrire (3.68) sous la forme suivante

$$\left( \frac{B^{[R]}(B^{[R]})^T}{\|B^{[R]}\|^2} - \frac{(B^{[R]})^\times(B^{[R]})^\times}{\|B^{[R]}\|^2} \right) (T_{ab} + T_{ext}) - (B^{[R]})^\times M_\flat = \mathbf{0}$$

se réduisant à

$$-\frac{(B^{[R]})^\times(B^{[R]})^\times}{\|B^{[R]}\|^2} (T_{ab} + T_{ext}) - (B^{[R]})^\times M_\flat = \mathbf{0}$$

si l'équation (3.66) est satisfaite. L'expression de  $M_\flat$  donnée par (3.67) se déduit de cette équation.  $\square$

L'invariance de  $h_w$  sur la trajectoire  $\flat$  est à l'origine de ce résultat. En effet, si la vitesse des roues ne varie pas, ces actionneurs ne sont plus en mesure de délivrer des couples de commande. On a alors  $(T_w)_\flat = \mathbf{0}$ . Le satellite ne peut alors se maintenir sur  $\flat$  que si les magnéto-coupleurs génèrent à chaque instant un couple opposé à  $T_{ab}(t)$  et  $T_{ext}(t)$ . Or, ces actionneurs ne peuvent s'acquitter de cette tâche que si la composante de  $-T_{ab}(t) - T_{ext}(t)$  selon  $B^{[R]}(t)$  est nulle. La condition (3.66) est la traduction directe de cette condition. La loi (3.67) génère un couple correspondant à la projection de  $-T_{ab} - T_{ext}(t)$  sur le plan orthogonal à  $B^{[R]}(t)$ .

Dans le cas général, la condition (3.66) n'est pas satisfaite. Comme dans le cas de  $\sharp$ , aucune loi de commande ne rend donc la trajectoire  $\flat$  admissible par le système asservi. Le relaxation de la contrainte sur  $M$  ne permet donc pas de répondre au problème.

### Suggestion pour obtenir une trajectoire admissible

Deux ébauches de solution sont maintenant proposées pour faire face au problème soulevé précédemment. La première poursuit la démarche de relaxation des contraintes définissant  $\sharp$  tandis que la seconde s'appuie sur la robustesse de l'asservissement.

**Redéfinition de la trajectoire de linéarisation** Pour faire face à l'impossibilité d'asservir à la fois l'attitude et le moment cinétique des roues, on choisit de relaxer la contrainte imposant à  $h_w$  d'être constant. Ceci donne lieu à la trajectoire notée  $\natural$ . Comme dans les méthodes de régulation du moment cinétique des roues, ce choix est motivé par la taille de la plage de variation admissible de  $h_w$ . L'objectif de cette approche est de définir un profil de  $h_w(t)$ , noté  $h_\natural(t)$ , tel que la trajectoire  $\natural$  puisse être admissible pour le système asservi. Sous cette contrainte, on cherchera à minimiser la distance entre  $h_\natural(t)$  et  $h_\sharp$ .

Cette fois encore, on évalue (3.63) sur la trajectoire  $\natural$  :

$$T_{a_\natural}(t) + T_{ext}(t) - (T_w)_\natural - (B^{[R]})^\times(t)M_\natural = \mathbf{0}$$

avec

$$T_{a_\natural}(t) = -J\dot{\omega}_{R/I}(t) - \omega_{R/I}^\times(t)(J\omega_{R/I}(t) + h_\natural(t))$$

Contrairement aux approches précédentes, le couple  $(T_w)_\natural = \dot{h}_\natural(t)$  n'est pas nul.

En s'appuyant sur ces relations et en définissant la distance entre  $h_\natural(t)$  et  $h_\sharp$  grâce à la norme  $\mathcal{L}_2$ , on obtient le problème d'optimisation suivant.

**Problème 6.** Trouver la fonction  $h_\natural^*(t)$  solution du problème d'optimisation suivant :

$$h_\natural^*(t) = \min_{h_\natural(t)} \int_0^{+\infty} (h_\natural(\tau) - h_\sharp)^2 d\tau$$

tel que

$$\exists M_\natural(t, h_\natural) : \dot{h}_\natural(t) = -\omega_{R/I}^\times(t)h_\natural(t) - (B^{[R]})^\times(t)M_\natural(t, h_\natural) + T_b(t)$$

où la fonction périodique  $T_b(t)$  est définie par l'équation suivante et est une donnée du problème

$$T_b(t) = -\omega_{R/I}^\times(t)J\omega_{R/I}(t) - J\dot{\omega}_{R/I}(t) + T_{ext}(t)$$

○

Sous cette forme, ce problème semble difficile à résoudre et doit probablement être relaxé. Sa résolution (exacte ou approchée) sera l'objet de travaux futurs.

**Rejet de perturbation** La démarche proposée maintenant cherche à contourner le problème en se basant sur des propriétés de robustesse de l'asservissement. Elle repose sur l'idée suivante : dans l'hypothèse où il existe un couple extérieur additionnel égal à  $-T_{a_\sharp} - T_{ext}$ , l'équation de la dynamique (3.63) est vérifiée sur  $\sharp$  pour toute loi de commande satisfaisant  $(T_w)_\sharp = \mathbf{0}$  et  $M_\sharp = \mathbf{0}$ . Il est possible de considérer que ce couple fictif existe à condition d'admettre également l'existence de son opposé  $T_{a_\sharp} + T_{ext}$ .

Cette approche ne résout pas le problème mais permet de l'envisager dans le cadre plus classique d'un rejet de perturbations. Toute loi de commande conçue à partir du modèle linéarisé (3.60) est donc valide à condition :

1. de maintenir le système asservi au voisinage de  $\sharp$  ;
2. de rejeter une perturbation persistante d'expression  $T_{a_\sharp} + T_{ext}$ .

**Remarque.** On notera que les couples fictifs à éliminer, à savoir  $T_{a_\sharp} + T_{ext}$ , ne dépendent pas des variables d'état. Ils ne modifient donc pas l'expression du modèle linéarisé. ○

### 3.5.4 Approximation de $\vec{B}$ dans le référentiel de référence

La complexité de la procédure conduisant à l'expression du champ magnétique dans le référentiel de référence  $F_R$  risque d'être un frein à l'analyse du modèle ainsi qu'à la compréhension du phénomène physique qu'il représente. C'est la raison pour laquelle cette sous-section cherche à dériver des expressions de  $B^{[R]}(t)$  plus simples mais toujours pertinentes. Pour atteindre cet objectif, deux stratégies sont mises en œuvre. La première peut être interprétée comme l'identification paramétrique d'une fonction prédéfinie à partir de résultats de simulation tandis que la seconde cherche à obtenir une fonction approchée de  $B^{[R]}$  de façon entièrement analytique en ne retenant que le premier harmonique de l'IGRF.

On rappelle que cette étude se situe dans le cadre général où  $\omega_{R/I}(t)$  est un paramètre du modèle. Pour cette raison, les approches présentées dans cette section ne peuvent être conduites jusqu'à leur terme. La section suivante propose toutefois des résultats correspondant à deux choix particuliers du référentiel  $F_R$ .

#### Identification paramétrique

La procédure présentée dans la section 3.4.4 conduit à l'expression de  $B^{[R]}(t)$  via l'intégration des équations de la dynamique orbitale. Si la formulation obtenue est relativement complexe, il est possible d'en obtenir une approximation en choisissant de façon adéquate les paramètres d'une fonction matricielle  $B_p^{[R]}(t)$  préalablement définie. La qualité de l'approximation dépend alors de l'adéquation entre l'allure de  $B^{[R]}(t)$  et la classe de fonctions à laquelle appartient  $B_p^{[R]}(t)$  mais aussi de la qualité de l'estimation des paramètres de  $B_p^{[R]}(t)$ .

D'après la discussion menée en début de ce chapitre, l'évolution temporelle de  $B^{[R]}(t)$  est quasi-périodique à la période orbitale. On considère donc naturellement que  $B_p^{[R]}(t)$  est formée à partir de fonctions trigonométriques dont les périodiques sont liées aux multiples de la fréquence orbitale :

$$B_p^{[R]}(t) = \begin{bmatrix} B_{0x} \\ B_{0y} \\ B_{0z} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{N_h} \left( \begin{bmatrix} B_{ix}^s \\ B_{iy}^s \\ B_{iz}^s \end{bmatrix} \sin(i\omega_0(t)t) + \begin{bmatrix} B_{ix}^c \\ B_{iy}^c \\ B_{iz}^c \end{bmatrix} \cos(i\omega_0(t)t) \right) \quad \text{avec} \quad \omega_0(t) = \dot{\nu}(t) \quad (3.69)$$

où  $N_h$  représente le nombre d'harmoniques. Les paramètres  $B_{ix}^s$  et  $B_{ix}^c$  de  $B_p^{[R]}(t)$  apparaissent linéairement. La méthode des moindres carrés conduit donc à la solution optimale minimisant la somme des carrés de la différence entre  $B^{[R]}(t)$  et  $B_p^{[R]}(t)$ . La mise en œuvre de cette approche en temps continu, bien que théoriquement envisageable, est relativement fastidieuse puisqu'elle requiert l'expression analytique de l'intégrale du produit d'éléments de  $B^{[R]}(t)$  et de  $B_p^{[R]}(t)$ . On lui préférera une approche en temps discret consistant à minimiser l'écart entre les deux fonctions sur un nombre fini de valeur de  $t$ .

#### Modèle dipolaire du champ magnétique

Comme expliqué précédemment, le modèle IGRF s'écrit sous la forme d'une série finie d'harmoniques sphériques. Toute troncature de cette série conduit à un modèle approché, plus simple que l'original. En choisissant de ne retenir que le premier harmonique, c'est-à-dire en choisissant  $k = 1$ , (3.45) donne

$$B^{[P]} = \left( \frac{R_{\oplus}}{r} \right)^3 \begin{bmatrix} 2(g^{1,0} \cos \theta + (g^{1,1} \cos \lambda + h^{1,1} \sin \lambda) \sin \theta) \\ g^{1,0} \sin \theta - (g^{1,1} \cos \lambda + h^{1,1} \sin \lambda) \cos \theta \\ g^{1,1} \sin \lambda - h^{1,1} \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Il est démontré dans [Wertz, 1978] que cette équation admet une traduction vectorielle.

**Lemme 29** ([Wertz, 1978]). *Soient les constantes  $H_0$  et  $\mu_m$  liées aux coefficients du modèle (3.45) par les relations suivantes :*

$$H_0 = \sqrt{(g^{1,0})^2 + (g^{1,1})^2 + (h^{1,1})^2}, \quad \mu_m = R_{\oplus}^3 H_0 \quad (3.71)$$

*On définit également le vecteur  $\vec{m}$  de norme unitaire et dont les coordonnées sphériques dans  $F_E$ , notées  $\lambda_m$  et  $\theta_m$ , sont données par les relations suivantes :*

$$\lambda_m = \tan^{-1} \left( \frac{h^{1,1}}{g^{1,1}} \right), \quad \theta_m = \cos^{-1} \left( \frac{g^{1,0}}{H_0} \right) \quad (3.72)$$

*La forme vectorielle suivante est alors équivalente à (3.70), la troncature à l'ordre 1 du modèle (3.45) :*

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_m}{r^3} \vec{N} \cdot \vec{m} \quad (3.73)$$

avec

$$N^{[O]} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

*Démonstration.* D'après [Wertz, 1978], on a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_m}{r^3} \left( 3 \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{m} \right) \frac{\vec{r}}{r} - \vec{m} \right) \quad (3.75)$$

L'utilisation des dyadics permet de réécrire cette relation sous la forme (3.73) avec

$$\vec{\vec{N}} = 3 \frac{\vec{r} \vec{r}}{r r} - \vec{\vec{1}}$$

En remarquant que  $\vec{r}/r = \vec{x}_O$  et en écrivant le dyadic unitaire sous la forme  $\vec{\vec{1}} = \vec{x}_O \vec{x}_O + \vec{y}_O \vec{y}_O + \vec{z}_O \vec{z}_O$ , on obtient :

$$\vec{\vec{N}} = 2\vec{x}_O \vec{x}_O - \vec{y}_O \vec{y}_O - \vec{z}_O \vec{z}_O \quad (3.76)$$

dont la traduction est donnée par (3.74). □

**Remarque.** On rappelle que  $\lambda_m$  et  $\theta_m$  correspondent à la longitude Est par rapport au méridien de Greenwich et à la co-élévation du vecteur  $\vec{m}$  selon la convention illustrée par la figure 3.4. ◦

L'équation (3.73) est caractéristique du champ magnétique généré par un dipôle dont l'axe est orienté par le vecteur  $\vec{m}$ . En 2010, la valeur de  $\theta_m$  était de  $170^\circ$  ce qui traduit l'absence d'alignement entre l'axe magnétique et l'axe de rotation de la Terre et justifie la dénomination « dipôle penché » de ce modèle.

A partir de (3.73) (ou sa version équivalente (3.75)), on fait les observations suivantes :

- si  $\vec{r}$  est orthogonal à  $\vec{m}$  alors  $\vec{B}(\vec{r})$  est dirigé par  $\vec{m}$ . Ce cas de figure est rencontré lorsque le satellite se trouve sur l'équateur géomagnétique. Le champ  $\vec{B}$  est alors normal au plan équatorial magnétique ;
- si  $\vec{r}$  et  $\vec{m}$  sont colinéaires, alors  $\vec{B}(\vec{r})$  est également dirigé par  $\vec{m}$ . Le satellite rencontre cette situation lorsqu'il se situe sur l'axe Nord-Sud magnétique, où  $\vec{B}$  est alors dirigé par cet axe.

Ces deux observations permettent de mettre en évidence la topologie du champ magnétique dont la figure 3.7 donne une illustration. Sur ce schéma, l'axe (Nm,Sm) et (Ng,Sg) correspondent aux axes magnétiques et de rotation de la Terre. Les losanges symbolisent un boussole dont la direction s'oriente de façon à suivre les lignes de champs.

## 3.6 Cas d'études

Jusqu'à présent, cette étude s'est positionnée dans le cadre général où la vitesse angulaire de  $F_R$  par rapport à  $F_I$  est un paramètre de modélisation. Comme expliqué dans la sous-section 3.4.1, l'objectif est de factoriser ainsi les développements correspondant à différents types de missions.

Pour aller plus loin, il est nécessaire de préciser l'expression de  $\omega_{R/I}(t)$ . Cette section particularise les résultats obtenus jusque là pour le cas des pointages géocentriques et inertiels, puisqu'il s'agit des deux cas de figure les plus courants.

### 3.6.1 Description et justification du choix

Comme expliqué précédemment, la référence d'attitude du satellite est définie en accord avec le type de la mission. Typiquement, lorsque la charge utile doit être orientée vers un objet céleste lointain, on choisira le référentiel inertiel comme référence puisque le mouvement de la cible est très faible dans ce référentiel. Pour se mettre en conformité avec la définition de  $F_R$ , on définit le référentiel inertiel local noté  $F_N$ , dont les axes sont alignés avec ceux de  $F_I$  mais dont l'origine est située au centre de masse du satellite.

En suivant la même logique, si la cible est fixe par rapport à la Terre, on choisira plus volontiers un référentiel dont les axes sont toujours orientés vers cette planète. Le référentiel orbital local LVLH (Local-Vertical-Local-Horizontal), noté  $F_L$ , remplit ce rôle puisque son vecteur  $\vec{z}_L$  est toujours dirigé vers le centre de la Terre. On précise également que  $O_L$  est confondu avec le centre de masse du satellite. La figure 3.8 illustre cette configuration. Par définition, on a  $\vec{z}_L = \vec{x}_O$  et  $\vec{x}_L = \vec{y}_O$ , ce qui conduit à la matrice  $C_{L/O}$  constante suivante



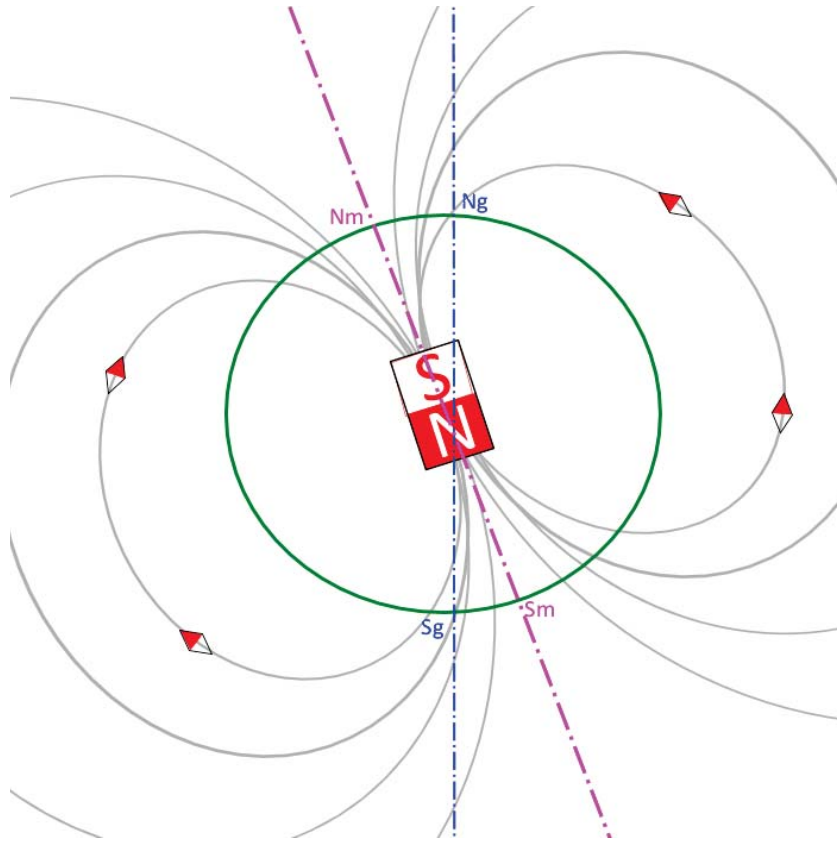


FIGURE 3.7 – Modèle dipolaire géomagnétique

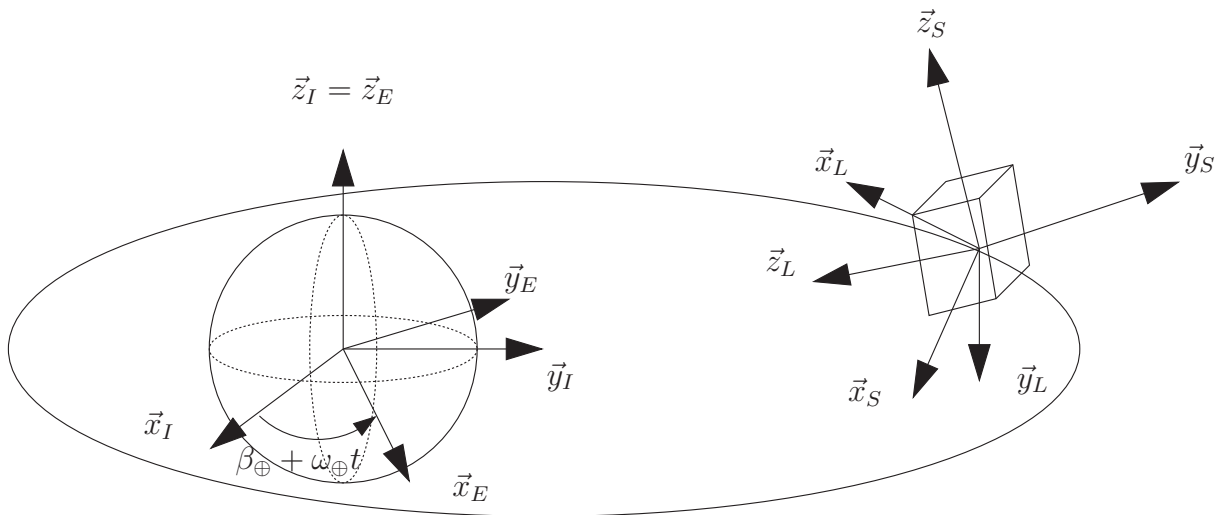


FIGURE 3.8 – Représentation des référentiels inertiels, satellite et orbital local



$$C_{L/O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Les référentiels  $F_L$  et  $F_O$  étant fixes l'un par rapport à l'autre, on a  $\vec{\omega}_{L/I} = \vec{\omega}_{O/I}$ . La définition de  $F_O$  permet d'écrire  $\vec{\omega}_{L/I} = \dot{\nu}(t)\vec{z}_O = -\dot{\nu}(t)\vec{y}_L$  dont la traduction dans  $F_L$  est donnée par

$$\omega_{L/I}^{[L]}(t) = [0 \quad -\omega_0(t) \quad 0]^T \quad \text{avec} \quad \omega_0(t) = \dot{\nu}(t)t$$

La suite de cette section considère alternativement les cas suivants :

- pointage inertiel :  $F_R = F_N$  ;
- pointage géocentrique :  $F_R = F_L$ .

On vérifie maintenant que dans chacun des cas, l'hypothèse 2 est vérifiée. On rappelle que cette dernière suppose que  $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$  et  $q_{R/I}(t)$  sont périodiques à la période orbitale  $T_0$ . Dans le cas du pointage inertiel, la réponse est évidemment affirmative. Concernant le pointage géocentrique, le satellite évoluant sur une orbite périodique, à chacun circonvolution il retrouve les mêmes conditions orbitales. Par conséquent, les conditions d'orbite  $\omega_0(t)$  (et donc  $\omega_{L/I}^{[L]}(t)$ ) et  $q_{R/I}(t)$  sont périodiques à la période orbitale.

### 3.6.2 Particularisation des équations du modèle d'état

Les équations décrivant le modèle d'état peuvent être particularisées selon le pointage considéré. On fait ici l'inventaire de ces spécificités :

- Dans le cas du pointage inertiel, l'équation de la cinématique donnée par (3.55) se simplifie :

$$F_R = F_N : \quad f_q(t, x, u) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega^\times & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} q$$

- Sur la trajectoire  $\sharp$ , contrairement au cas du pointage inertiel où le satellite est immobile par rapport à  $F_I$ , en pointage géocentrique, le satellite tourne sur lui-même à la vitesse orbitale pour pouvoir préserver l'orientation de ses axes vers la Terre. Il est donc immobile par rapport à  $F_L$  mais en mouvement par rapport au référentiel inertiel ;
- on note  $A^s(t)$  les 6 premières lignes de la matrice du modèle d'état linéaire  $A_c(t)$ . Le théorème 33 donne la forme générale de cette matrice :

$$A^s(t) = \begin{bmatrix} J^{-1}K & 2J^{-1}T_{ext}^\times(t) & -J^{-1}\omega_{R/I}^\times \\ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_3 & -\omega_{R/I}^\times & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

On particularise maintenant cette expression dans chacun des cas retenus, en considérant que la matrice d'inertie est diagonale ( $J = \text{diag}\{J_x, J_y, J_z\}$ ) :

- $F_R = F_N$  :

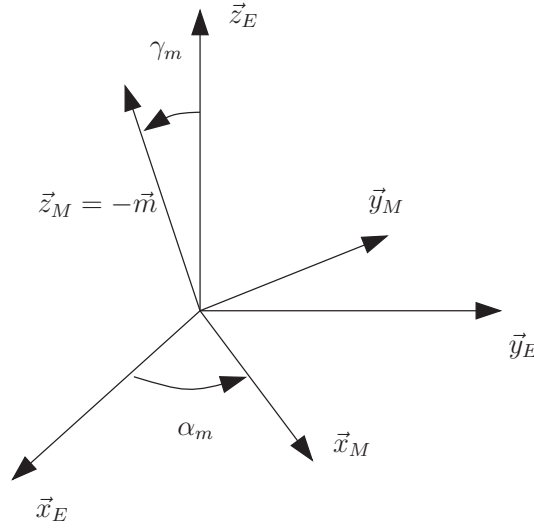
$$A^s(t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -h_{3\sharp}/J_x & h_{2\sharp}/J_x & 0 & -2T_z(t)/J_x & 2T_y(t)/J_x & 0 & 0 & 0 \\ h_{3\sharp}/J_y & 0 & -h_{1\sharp}/J_y & 2T_z(t)/J_y & 0 & -2T_x(t)/J_y & 0 & 0 & 0 \\ -h_{2\sharp}/J_z & h_{1\sharp}/J_z & 0 & -2T_y(t)/J_z & 2T_x(t)/J_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

- $F_R = F_L$  :

$$A^s(t) = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -h_{3\sharp}/J_x & -\sigma_x\omega_0(t) + h_{2\sharp}/J_x & 0 & -2T_z(t)/J_x & 2T_y(t)/J_x & 0 & 0 & \omega_0(t)/J_x \\ h_{3\sharp}/J_y & 0 & -h_{1\sharp}/J_y & 2T_z(t)/J_y & 0 & -2T_x(t)/J_y & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_z\omega_0(t) - h_{2\sharp}/J_z & h_{1\sharp}/J_z & 0 & -2T_y(t)/J_z & 2T_x(t)/J_z & 0 & -\omega_0(t)/J_z & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_0(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\omega_0(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

avec

$$\sigma_x = \frac{J_y - J_z}{J_x}, \quad \sigma_z = \frac{J_x - J_y}{J_z}, \quad T_{ext}(t) = \begin{bmatrix} T_x(t) \\ T_y(t) \\ T_z(t) \end{bmatrix}$$

FIGURE 3.9 – Localisation du référentiel magnétique  $F_M$  par rapport au référentiel terrestre  $F_E$ 

### 3.6.3 Approximation du champ magnétique

#### Equation analytique utilisant le modèle dipolaire

Cette sous-section s'intéresse au modèle dipolaire du champ géomagnétique proposé par le lemme 29. Elle dérive analytiquement l'expression de ses composantes dans  $F_N$  puis dans  $F_R$ . Au préalable, le référentiel magnétique  $F_M$  est présenté et la trajectoire du satellite dans ce référentiel est calculée. L'objectif est de simplifier la formulation des résultats recherchés.

**Référentiel magnétique** Soit  $\alpha_m$  et  $\gamma_m$  définis par

$$\alpha_m = \lambda_m - \pi/2, \quad \gamma_m = \pi - \theta_m \quad (3.78)$$

On nomme  $F_M$ , le référentiel magnétique dérivant de  $F_E$  par la séquence de rotations 3-1 d'angles  $\alpha_m$  et  $\gamma_m$  conformément à la figure 3.9. Par définition, on a donc :

$$C_{M/E} = C_1(\gamma_m)C_3(\alpha_m) \quad (3.79)$$

**Lemme 30.** *Le moment  $\vec{m}$  du modèle magnétique dipolaire peut être caractérisé par rapport au référentiel magnétique  $F_M$  grâce à la relation suivante :*

$$\vec{m} = -\vec{z}_M \quad (3.80)$$

*Démonstration.* Le vecteur  $\vec{m}$  est repéré dans  $F_E$  par ses coordonnées sphériques  $\{1, \theta_m, \lambda_m\}$ . On a donc  $\vec{m} = \vec{x}_P$ , ce qui permet d'obtenir les coordonnées cartésiennes de ce vecteur :

$$m^{[E]} = C_{E/P}x_P^{[P]} = (C_1(-\pi/2)C_2(\theta_m - \pi/2)C_3(\lambda_m))^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_m \cos(\theta_m - \pi/2) \\ \sin \lambda_m \cos(\theta_m - \pi/2) \\ -\sin(\theta_m - \pi/2) \end{bmatrix}$$

On remarque que cette expression peut-être réécrite sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta_m) \sin(\lambda_m - \pi/2) \\ \cos(\lambda_m - \pi/2) \sin(\theta_m) \\ \cos(\theta_m) \end{bmatrix} = (C_1(\pi - \theta_m)C_3(\lambda_m - \pi/2))^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice  $(C_1(\pi - \theta_m)C_3(\lambda_m - \pi/2))^T$  correspond à  $C_{M/E}^T = C_{E/M}$ . Ceci permet d'écrire la relation suivante

$$m^{[E]} = C_{E/M}(-z_M^{[M]})$$

équivalente à (3.80). □



et

$$\begin{aligned}
C_{O/M} &= C_{O/I}C_{I/E}C_{E/M} \\
&= (C_3(\nu + \omega)C_1(i)C_3(\Omega))(C_3(\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t))^T (C_1(\gamma_m)C_3(\alpha_m))^T \\
&= C_3(\nu + \omega)C_1(i)C_3(\Omega - \delta(t))C_1(-\gamma_m)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

avec  $\delta(t)$  donné par (3.84). En s'appuyant sur (3.85) la dernière colonne de  $C_{O/M}$  s'écrit

$$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\nu + \omega - \eta_m) \sin i_m \\ \cos(\nu + \omega - \eta_m) \sin i_m \\ \cos i_m \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

tandis que l'utilisation de (3.86) conduit à

$$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\cos(\nu + \omega) \sin(\Omega - \delta(t)) + \sin(\nu + \omega) \cos i \cos(\Omega - \delta(t))) \sin \gamma_m + \sin(\nu + \omega) \sin i \cos \gamma_m \\ (\sin(\nu + \omega) \sin(\Omega - \delta(t)) - \cos(\nu + \omega) \cos i \cos(\Omega - \delta(t))) \sin \gamma_m + \cos(\nu + \omega) \sin i \cos \gamma_m \\ \sin i \cos(\Omega - \delta(t)) \sin \gamma_m + \cos i \cos \gamma_m \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

En identifiant (3.88) avec (3.87), on obtient (3.82) et (3.83).  $\square$

**Expression analytique de  $\vec{B}$**  Le lemme suivant fait usage de ces notations pour obtenir l'expression de  $\vec{B}$  dans le référentiel  $F_N$ .

**Théorème 34.** *L'expression du champ magnétique donnée par le modèle dipolaire dans le référentiel inertiel est la suivante :*

$$\begin{aligned}
B^{[N]}(t) &= -\frac{\mu_m}{r^3(t)} \left( 3 \sin(\nu(t) + \omega - \eta_m(t)) \sin i_m(t) \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos(\nu(t) + \omega) - \sin \Omega \cos i \sin(\nu(t) + \omega) \\ \sin \Omega \cos(\nu(t) + \omega) + \cos \Omega \cos i \sin(\nu(t) + \omega) \\ \sin i \sin(\nu(t) + \omega) \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{bmatrix} -\sin \delta(t) \sin \gamma_m \\ \cos \delta(t) \sin \gamma_m \\ -\cos \gamma_m \end{bmatrix} \right) \tag{3.89}
\end{aligned}$$

où les expressions de  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$  sont données par le lemme 31 tandis que  $r(t)$  et  $\nu(t)$  sont les solutions des équations de la dynamique orbitale établies par le lemme 26. On rappelle également que  $\delta(t)$  est fournie par (3.84).

*Démonstration.* Exprimée dans  $F_I$ , la forme vectorielle développée de (3.73), donnée par (3.75), s'écrit ainsi :

$$B^{[N]} = \frac{\mu_m}{r^3} \left( 3 \left( \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{m} \right) C_{N/O} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - C_{N/M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Les axes de  $F_N$  et  $F_I$  étant confondus, on a  $C_{N/O} = C_{I/O}$  et  $C_{N/M} = C_{I/M}$ . De plus, on a

$$\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{m} = \frac{1}{r} (r^{[O]})^T \vec{\mathcal{F}}_O \vec{\mathcal{F}}_M^T m^{[M]} = [1 \ 0 \ 0] C_{O/M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -a_{13} \tag{3.90}$$

En utilisant la définition de  $F_O$  et  $F_M$ , ainsi que l'expression de  $a_{13}$  donnée par (3.87), on obtient (3.89).  $\square$

Un raisonnement similaire permet d'établir l'expression de  $\vec{B}$  dans le cas du pointage géocentrique.

**Théorème 35** ([McElvain, 1964]). *Dans le référentiel orbital local, les composantes du champ magnétique données par le modèle dipolaire s'écrivent comme suit :*

$$B^{[L]}(t) = \frac{\mu_m}{r^3(t)} \begin{bmatrix} \cos(\nu(t) + \omega - \eta_m(t)) \sin i_m(t) \\ -\cos i_m(t) \\ 2 \sin(\nu(t) + \omega - \eta_m(t)) \sin i_m(t) \end{bmatrix} \tag{3.91}$$

Le lemme 31 donne les expressions de  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$  alors que  $\nu(t)$  et  $r(t)$  sont fournies par le lemme 26. On rappelle que  $\omega$  est constant.

*Démonstration.* L'expression de (3.73) dans  $F_L$  est :

$$B^{[L]} = \frac{\mu_m}{r^3} C_{L/O} N^{[O]} C_{O/M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Grâce aux expressions de (3.81) et (3.77), on obtient la forme suivante dépendant des éléments de  $C_{O/M}$  selon (3.81)

$$B^{[L]} = \frac{\mu_m}{r^3} \begin{bmatrix} a_{23} \\ -a_{33} \\ 2a_{13} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

La substitution des termes  $a_{i3}$  par leurs expressions données par (3.87), conduit à (3.91).  $\square$

**Périodicité du champ perçu par le satellite** On suppose dans un premier temps que les termes  $\nu(t)$  et  $r(t)$  sont les seuls éléments variant dans le temps de  $B^{[N]}(t)$  et  $B^{[L]}(t)$ . On rappelle que  $\nu(t)$  et  $r(t)$  sont périodiques dans le cas des orbites non perturbées. Dans ce cas, il est clair que  $B^{[L]}(t)$  est périodique. Concernant le pointage inertiel, la période de  $B^{[N]}(t)$  correspond à  $T_0/2$ . La réécriture suivante de  $B^{[N]}(t)$  justifie cette affirmation :

$$B^{[N]}(t) = \frac{\mu_m}{r^3(t)} (\sin(2\nu(t) - \eta_m) B_1 + \cos(2\nu(t) - \eta_m) B_2 + B_3 + B_4) \quad (3.93)$$

où les matrices  $B_i$  ne dépendent ni de  $\nu(t)$ , ni de  $r(t)$ .

La dépendance temporelle de  $B^{[N]}(t)$  et  $B^{[L]}(t)$  est en réalité plus complexe puisque  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$  sont également des fonctions du temps. Toutefois, la dynamique de ces deux derniers termes est liée uniquement à la rotation de la Terre sur elle-même à la période  $T_{\oplus}$ . Pour des orbites basses, la période orbitale  $T_0$  est plus faible que  $T_{\oplus}$ . Par conséquent,  $\nu(t)$  et  $r(t)$  varient plus rapidement que  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$  et peuvent être perçues comme constantes à l'échelle de temps associée à  $B^{[N]}(t)$  et  $B^{[L]}(t)$ . Cette discussion justifie l'attribution du qualificatif « quasi-périodique » à  $B^{[N]}(t)$  et  $B^{[L]}(t)$ .

**Remarque.** L'expression de  $B^{[L]}(t)$  permet de retrouver aisément les conclusions portant sur la topologie du champ magnétique. Si  $i_m(t) = 0$ , le plan d'orbite et l'équateur géomagnétique instantané sont confondus. Le vecteur  $\vec{B}(t)$  est alors normal à ce plan puisqu'il est dirigé selon  $\vec{y}_L$ . L'orbite polaire magnétique correspond au cas où  $i_m(t) = \pi/2$ . Dans ce cas, la composante de  $\vec{B}(t)$  selon  $\vec{y}_L$  est nulle, ce qui traduit l'appartenance du champ au plan d'orbite.  $\circ$

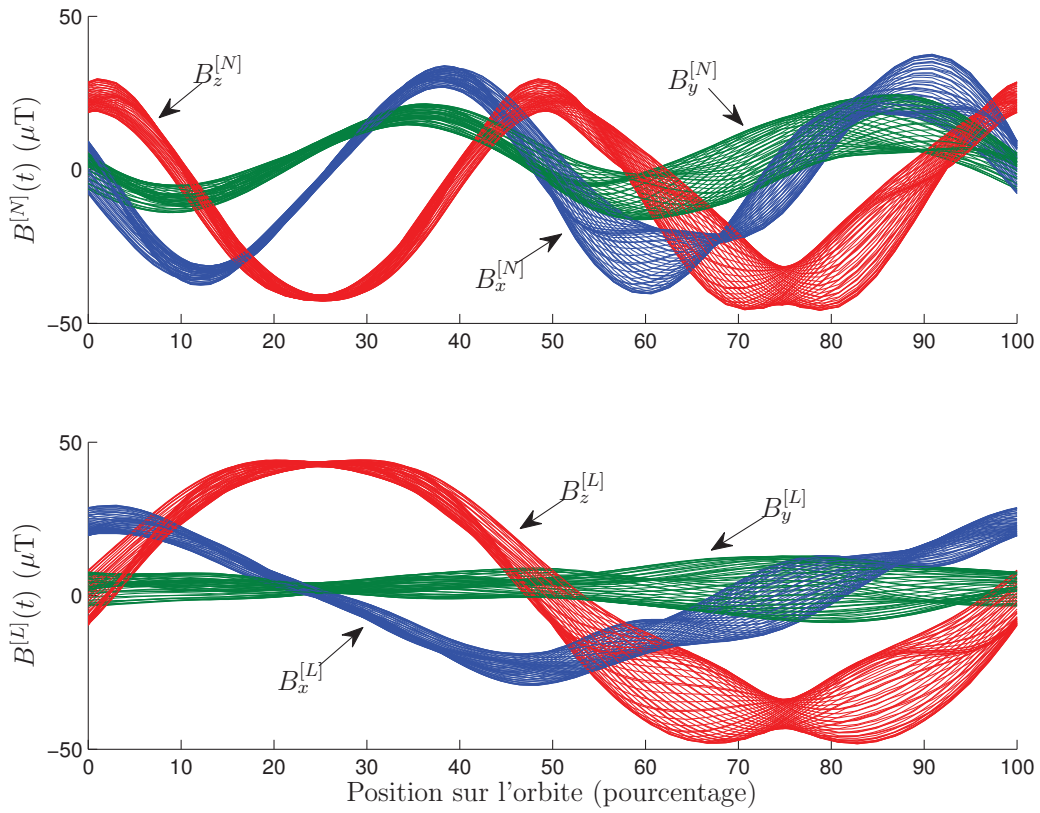
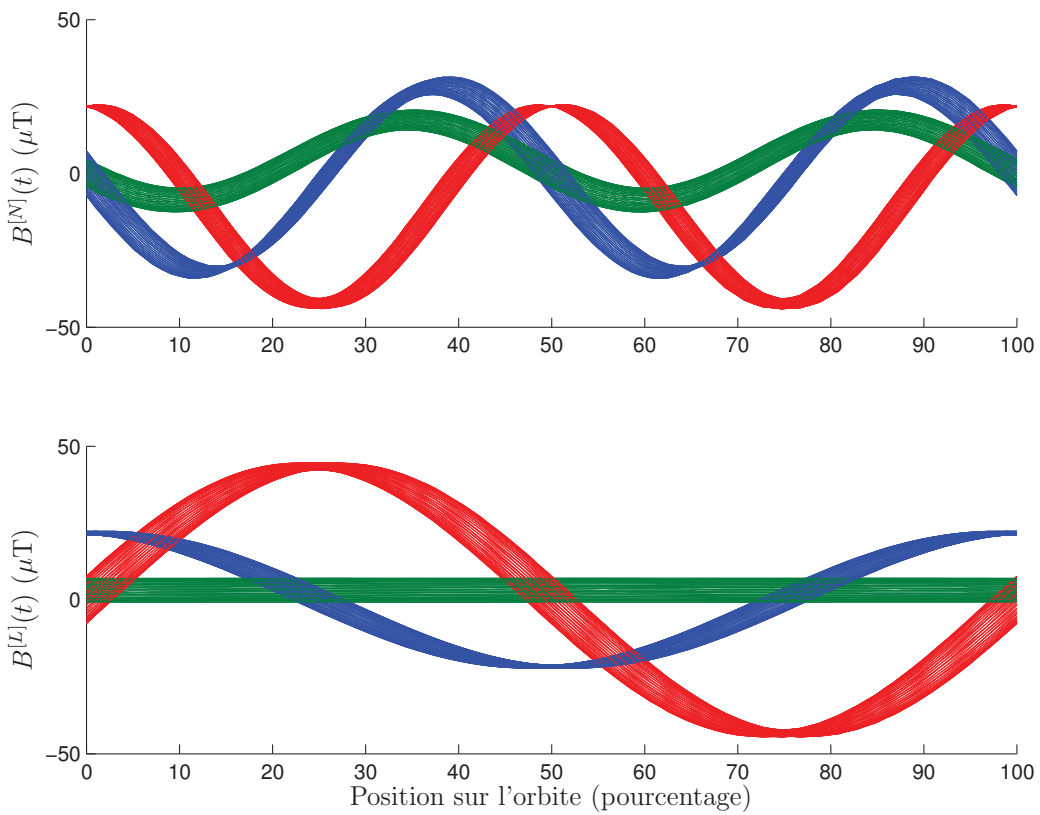
### Simulation dans le cas de l'orbite circulaire

Pour donner des représentations graphiques des derniers résultats, il est nécessaire de définir l'orbite. On choisit une orbite circulaire d'inclinaison  $i = 98.23^\circ$  et d'altitude  $a = r = 660\text{km}$ . La période orbitale est alors  $T_0 = 5867\text{ sec}$ . On précise que pour ce type d'orbite  $\omega$  est indéfini et la fréquence orbitale  $\dot{\nu} = \omega_0$  est constante et égale à  $\sqrt{\mu/r^3}$ , [Schaub and Junkins, 2003]. Les valeurs numériques utilisées pour ces simulations sont fournies par l'annexe I.

La figure 3.11 montre  $B^{[L]}(t)$  et  $B^{[N]}(t)$  sur 60 orbites (environ 4 fois 24h), tels que donnés par l'IGRF. L'axe des abscisses donne la position du satellite sur son orbite en pourcentage, 0% et 50% correspondant au début et au milieu de l'orbite respectivement. L'absence de superposition de ces courbes confirme que le champ perçu par le satellite n'est pas exactement périodique. La rotation de la Terre sur elle-même est responsable de ce phénomène. Toutefois, la tendance de ces tracés est clairement périodique avec une période correspondant à  $T_0$  pour  $B^{[L]}(t)$  et à  $T_0/2$  pour  $B^{[N]}(t)$ . On constate également que la dispersion de ces courbes n'est pas constante : à 25% de l'orbite, le champ est quasiment périodique alors que son expression est beaucoup plus variable à 70%. L'inclinaison choisie étant proche de  $\pi/2$ , on peut également confirmer que dans ce cas  $B_y^{[L]}(t)$  est proche de zéro.

La figure 3.12 est construite de la même façon mais en s'appuyant cette fois sur les modèles analytiques proposés par les théorèmes 34 et 35 et issus du modèle dipolaire du champ. Issu de la la troncature à l'ordre 1 de l'IGRF, ce modèle est moins riche, d'où la plus grande régularité de ces courbes. Pour les mêmes raisons, les courbes ne se superposent pas. L'influence de la rotation de la Terre est ici isolée dans les termes  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$ . La figure 3.13 confirme que ces grandeurs évoluent de façon périodique mais à la fréquence de rotation de la Terre : on observe 4 périodes puisqu'en 60 orbites la Terre a tourné 4 fois sur elle-même.

Finalement, la figure 3.14 compare les modèles  $B_p^{[N]}(t)$  et  $B_p^{[L]}(t)$  (traits continus), donnés par (3.69), avec l'enveloppe (traits discontinus) des courbes issues de l'IGRF affichées par la figure 3.11. Dans les deux cas, on constate que le modèle approché est voisin du centre du tube malgré un nombre d'harmoniques relativement faible,  $N_h = 3$ . Ceci valide l'approche.

FIGURE 3.11 – Modèle IGRF : superposition de  $B(t)$  sur 60 orbites pour les pointages inertiel et géocentriqueFIGURE 3.12 – Modèle dipolaire : superposition de  $B(t)$  sur 60 orbites pour les pointages inertiel et géocentrique :

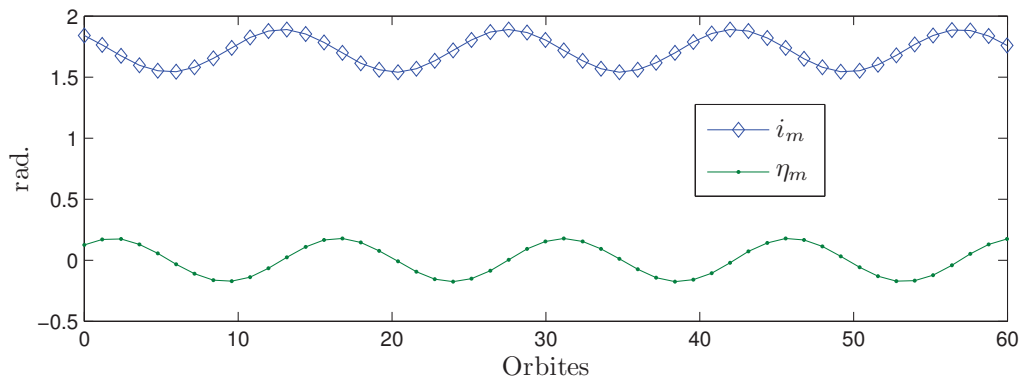
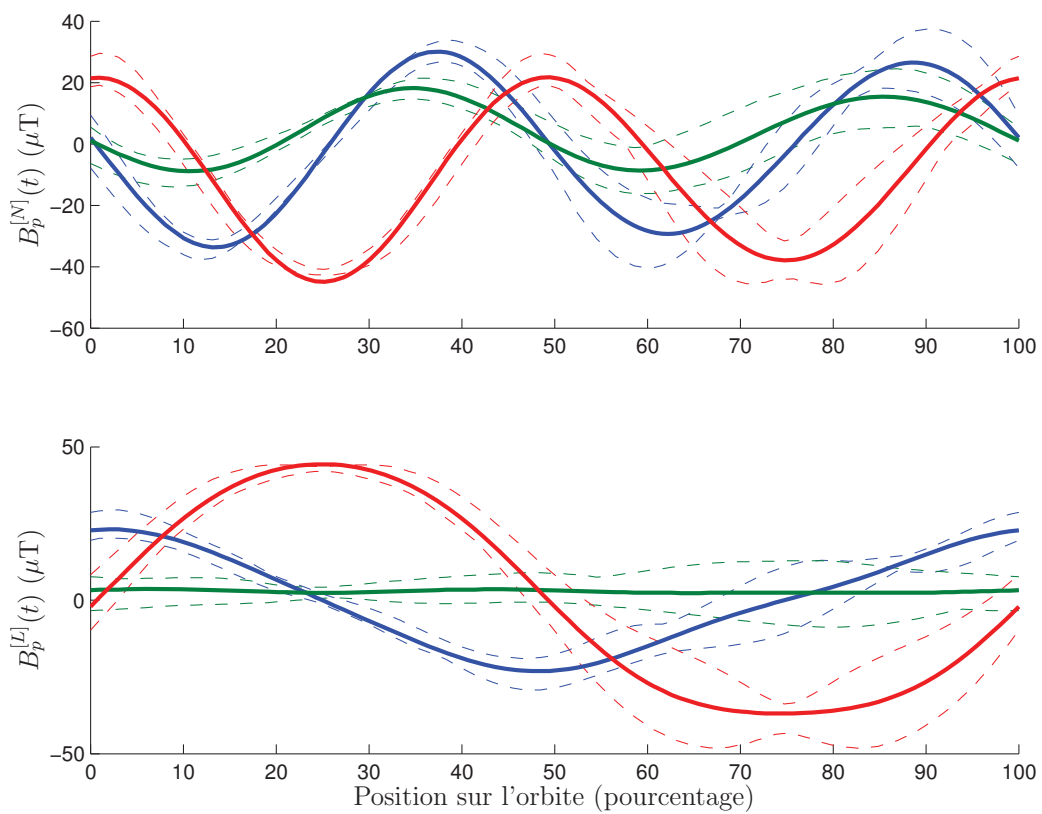
FIGURE 3.13 – Chronogrammes de  $i_m(t)$  et  $\eta_m(t)$  sur 60 orbites

FIGURE 3.14 – Modèle identifié (traits continus) : comparaison avec l'enveloppe issue de l'IGRF (traits pointillés)

### 3.7 Conclusion

Ce chapitre a permis d'obtenir, dans un cadre générique, les équations non-linéaires décrivant le mouvement d'attitude d'un satellite muni de roues à réaction et de magnéto-coupleurs. Une partie importante des efforts a été consacré à la modélisation de l'évolution du champ magnétique terrestre sur la trajectoire du satellite, ainsi qu'aux différentes approximations de cette expression. La linéarisation de ce modèle en a donné une version approché. Ce chapitre a également montré l'impossibilité, dans le cas général, de respecter parfaitement les objectifs de commande consistant à asservir à la fois l'attitude du satellite et la vitesse des roues à réaction. Entre autres conséquences, cet obstacle empêche de définir une trajectoire de linéarisation (a) satisfaisant les objectifs de commande et (b) sur laquelle le satellite peut être stabilisé. Finalement, la dernière section rappelle l'expression analytique du champ magnétique sur la trajectoire du satellite dans le cas où seul le premier harmonique du modèle IGRF est retenu.

En s'appuyant sur ces résultats, le chapitre suivant s'efforce de proposer une loi de commande utilisant les roues à réaction et les magnéto-coupleurs pour remplir les objectifs de commande dans un environnement perturbé par un signal périodique.

***Contributions principales :***

Modélisation générique du problème de contrôle d'attitude avec magnéto-coupleurs et roues à réaction pour différents cas de pointage.

***Contributions complémentaires :***

- redéfinition des conditions de validité des modèles linéarisés (section 3.5.3).



# Chapitre 4

## Contrôle d'attitude robuste et périodique en utilisant des roues à réaction et des magnéto-coupleurs

### 4.1 Introduction

En s'appuyant sur les modèles établis précédemment, ce chapitre a pour vocation de concevoir une loi de commande satisfaisant les deux objectifs de commande suivants :

1. contrôle d'attitude sur les trois axes, assimilé à l'asservissement de  $q$  autour de  $\mathbf{1}$  ;
2. régulation du moment cinétique des roues,

dans un environnement soumis à une perturbation extérieur périodique et grâce aux roues à réaction et aux magnéto-coupleurs. La qualité de la loi de commande sera évaluée grâce à la stabilité du pointage et l'excursion en vitesse des roues autour de leur vitesse nominale. Ces critères correspondent à la proximité que  $q$  et  $h_w$  entretiennent avec leur valeur de consigne  $\mathbf{1}$  et  $h_{\#}$ , respectivement.

L'étude proposée dans ce chapitre se situe dans le cadre du pointage inertiel ( $\omega_{R/I}(t) = \mathbf{0}$ ). Elle se focalise également sur la périodicité provenant de l'utilisation des magnéto-coupleurs plutôt que sur celle issue des perturbations. Pour cette première approche, les perturbations ne sont pas prises en compte lors de la synthèse, bien que les simulations montrent leur influence sur le modèle en boucle fermée.

La section 2 ouvre ce chapitre par une discussion sur le problème du contrôle d'attitude, dans un cadre faisant abstraction de la difficulté liée à la réalisation physique du couple de commande par les actionneurs. Puis, les limitations associées aux roues à réaction et aux magnéto-coupleurs sont explicitées afin de justifier leur utilisation conjointe. Une présentation critique de la façon dont ce problème a été abordé dans la littérature est menée dans la section 3. A partir des conclusions de cette discussion, le chapitre 4 bâtit un nouveau schéma de commande permettant une preuve rigoureuse de la stabilité en boucle fermée. La manière d'aborder le problème est ensuite questionnée, ce qui conduit à deux nouvelles approches présentées dans les sections 5 et 6. La première se base sur le modèle linéaire développé au chapitre 3 tandis que la seconde traite directement le modèle non-linéaire pour reformuler la problématique dans un cadre linéaire. Des simulations numériques illustrent ce chapitre en comparant les différentes approches.

Avant toute chose, le paragraphe suivant présente les notations auxquelles ce chapitre a recours.

**Notations** Le processus de simplification des notations, amorcé par le tableau 3.5 du chapitre précédent, est poursuivi puisque les risques d'ambiguïtés disparaissent dans le contexte de ce chapitre. Le tableau suivant fait la correspondance entre les anciennes notations et leur nouvelle version :

Anciennes notations	$h_{S/O_S}^{[I]}$	$B^{[I]}$	$B^{[S]}$	$C_{S/R}(q)$
Notations simplifiées	$h_S^{[I]}$	$B_o$	$B$	$C(q)$

Les termes  $b(t)$  et  $b_o(t)$  sont également introduits. Ils font référence aux versions normalisées de  $B(t)$  et  $B_o(t)$  de telle sorte que

$$b(t) = \frac{B(t)}{\|B(t)\|}, \quad b_o(t) = \frac{B_o(t)}{\|B_o(t)\|}$$

On donne finalement la relation suivante à laquelle ce chapitre a fréquemment recours :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, -\frac{v^\times v^\times}{\|v\|^2} = \mathbf{1}_3 - \frac{vv^T}{\|v\|^2} \quad (4.1)$$

Chaque coté de cette égalité correspond à la matrice de projection sur l'espace orthogonal à  $v$ .

Par la suite, les adjectifs qualifiant la stabilité sont abrégés selon la convention suivante : uniforme (U), globale (G), locale (L), exponentielle (E) et asymptotique (A). On ajoute le préfixe « 0- » lorsque l'on considère la stabilité du modèle autonome (pour lequel l'entrée est nulle). Par convention, le suffixe (S) fait référence au mot stabilité. Ainsi, le terme 0-UGES désigne la stabilité uniforme, globale et exponentielle du modèle autonome.

## 4.2 Choix des actionneurs pour la commande d'attitude

### 4.2.1 Cas d'un couple de commande idéal

#### Présentation du problème

On suppose dans un premier temps que l'on dispose d'actionneurs capables de créer un couple de commande arbitraire noté  $u_T$  sur le satellite. Dans un environnement non perturbé, le théorème 28 indique que l'équation de la dynamique s'écrit alors

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = u_T \quad (4.2a)$$

Dans le cas du pointage inertiel, la cinématique du satellite est régie par l'équation (3.38) avec  $\omega_{R/I}(t) = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega^\times & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} q \quad (4.2b)$$

**Remarque.** Rigoureusement, la matrice d'inertie considérée par (3.7) correspond à  $J_{B/O_B}^{[B]}$  alors que  $J$  est la notation simplifiée de  $J_{S/O_S}^{[S]}$ . Le premier terme correspond au satellite sans les roues contrairement au second qui prend en considération la nouvelle répartition de masse du système due à la présence de ces actionneurs. Toutefois, si les moteurs des roues n'exercent aucun couple alors (4.2a) peut être obtenue en suivant le même raisonnement que celui ayant conduit à (3.7). ◦

La trajectoire  $\sharp$ , caractérisée par la définition 6, constitue l'objectif d'asservissement, c'est-à-dire l'équilibre à atteindre en boucle fermée. On rappelle que dans le cas du pointage inertiel, (3.58) donne

$$(\omega, q)_\sharp = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \quad (4.3)$$

**Problème 7.** [Commande idéale] Pour le satellite décrit par (4.2), concevoir une loi de commande  $u_T^*(t, \omega, q)$  telle que  $(\omega, q)_\sharp$  constitue un point d'équilibre GAS en boucle fermée avec  $u_T = u_T^*$ . ◦

Dans ce problème et pour la suite de ce chapitre, la notation  $u_T^*$  fait donc référence à une *solution* du problème 7 alors que  $u_T$  désigne le couple de commande physique (et idéal) s'exerçant sur le satellite.

#### Discussion sur l'existence d'une solution globale

Le problème 7 a été très largement traité dans la littérature. On trouvera dans [Chaturvedi et al., 2011] une présentation très pédagogique de ce problème.

Sous son apparente simplicité, ce problème comporte des aspects délicats qui n'ont été mis en lumière que tardivement dans [Bhat and Bernstein, 2000]. Ainsi, [Chaturvedi et al., 2011] souligne qu'il est impossible de résoudre complètement le problème 7 grâce à une loi de commande continue et invariante dans le temps (statique ou dynamique). En effet, tout système continu et invariant dans le temps ne peut admettre un unique équilibre dans l'espace de rotations des corps rigides nommé  $SO(3)$  [Bhat and Bernstein, 2000]. Par conséquent, le qualificatif « global » associé à la stabilité en boucle fermée des solutions proposées dans la littérature [Fjellstad and Fossen, 1994, Wen and Kreutz-Delgado, 1991, Joshi et al., 1995] est en réalité abusif. Cette difficulté constitue un obstacle topologique inhérent au problème de stabilisation du mouvement rotationnel d'un corps rigide et est donc indépendant de la paramétrisation de l'attitude retenue.

A cette problématique s'ajoute une difficulté supplémentaire liée à la non-unicité du quaternion pour la représentation de l'attitude. En effet, l'orientation d'un corps peut être indifféremment représentée par  $\pm q$ . Cette duplication de l'espace physique d'attitude est propice à l'apparition du phénomène de déroulement [Bhat

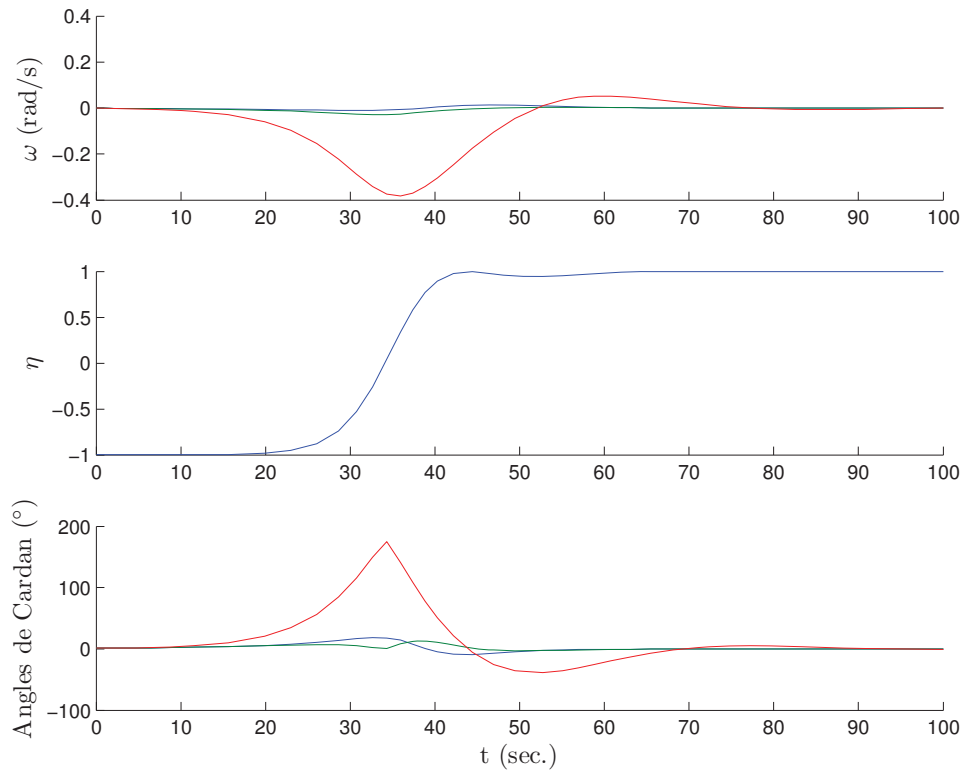


FIGURE 4.1 – Illustration du phénomène de déroulement

and Bernstein, 2000] (unwinding en anglais). Ce dernier se manifeste lorsque le correcteur génère un premier équilibre  $+q_0$  stable et un second  $-q_0$  instable, alors qu'il correspondent physiquement à la même orientation.

La figure 4.1 en donne une illustration en utilisant la loi de commande du lemme 32 présenté par la suite. L'état initial correspond à  $(\omega, q) \approx (\mathbf{0}, -\mathbf{1})$ , le caractère répulsif de  $-\mathbf{1}$  engendre un mouvement du satellite vers l'équilibre stable  $(\omega, q) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ . Or, les points de départ et d'arrivée de cette trajectoire correspondent approximativement à la même orientation physique, représentée ici par les angles de Cardan<sup>1</sup>. Bien que l'équilibre désiré  $(\omega, q) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$  soit attractif, il n'est pas stable au sens de Lyapunov dans  $SO(3)$ . Motivé par cette observation, il est suggéré dans [Chaturvedi et al., 2011] de paramétrer l'attitude grâce aux 9 éléments de la matrice de rotation  $C$  capable de représenter toute orientation de façon unique. En se basant sur cet outil, les auteurs de cet article proposent une loi de commande continue et invariante dans le temps capable de faire de  $\#$  un point d'équilibre presque global<sup>2</sup>.

En dehors du cadre des lois de commande continues et invariantes dans le temps, il est toutefois possible de résoudre complètement le problème 7. Récemment, les travaux publiés dans [Mayhew et al., 2009] ont donné une solution s'appuyant sur une loi de commande  $u_T$  hybride.

Dans la suite de ce chapitre, on distingue donc les solutions locales (ou partielles) du problème 7, conduisant à un équilibre LAS en boucle fermée, des solutions globales (ou complètes) de ce même problème, pour lesquelles il existe une preuve que le système asservi est GAS.

### Abstractions associées à ce problème et objectif de ce chapitre

**Cadre de l'étude** Le problème 7 se situe dans un cadre idéal dans la mesure où il suppose qu'il est possible de réaliser physiquement  $u_T$ . Il fait donc abstraction des limitations des actionneurs. En tenant compte (partiellement) de ces difficultés, ce chapitre constitue un effort pour obtenir une solution plus proche de la réalité physique du problème. La problématique considérée peut donc être énoncée comme suit.

**Problème 8.** Concevoir une loi de commande pilotant les actionneurs de manière à assurer que la trajectoire  $\#$  soit un équilibre GAS du satellite asservi. ◦

1. Les angles de Cardan correspondent aux angles de la séquence de rotation 3-2-1, caractérisant de façon alternative l'attitude du satellite [Courtois, 1998].

2. Si l'on nomme respectivement  $q_0$  et  $\mathcal{Q}$  l'équilibre stable et l'ensemble (discret) des équilibres instables en boucle fermée, l'attribut « presque » provient du fait que (a) il n'existe pas d'ensemble  $\mathcal{M}$  dense pour lequel toute condition initiale choisie dans  $\mathcal{M}$  conduit à des trajectoires convergent vers  $\mathcal{Q}$  et que (b) toutes les trajectoires ne convergent pas vers  $\mathcal{Q}$  tendent vers  $q_0$ .

Ce chapitre s'intéresse à ce dernier problème *exclusivement*. Il n'a donc pas à vocation de résoudre le problème 7. Toutefois, il est possible, dans certain cas, de ré-utiliser les solutions du problème 8 pour résoudre le problème 7. Dans ce cas, les solutions du problème 7 de la littérature sont utilisées directement.

**Discussion sur le caractère global ou local des solutions du problème 8** On rappelle que les solutions  $u_T^*$  du problème 7 peuvent être locales ou globales. Dans ce chapitre, on distingue de la même façon les solutions du problème 8 en fonction du type d'équilibre qu'elles permettent d'atteindre : local ou global.

Cette section propose des solutions globales au problème 8 en s'appuyant sur  $u_T^*$ , une solution elle-même globale du problème 8. La préservation de cette qualité constitue un des résultats majeurs de ce chapitre. Toutefois, il est possible d'utiliser dans ce même contexte une loi  $u_T^*$  uniquement locale. L'asservissement ne garantit alors que la stabilité locale. Cette démarche a un sens lorsque seule une loi  $u_T^*$  locale permet de remplir certains critères (de performance, de formes, etc). Selon la discussion précédente, imposer à  $u_T^*$  d'être continue et invariante dans le temps conduit à ce type d'approche, puisque  $u_T^*$  peut alors uniquement être locale. La solution suivante, extraite de la littérature correspond à ce cas précis, et sera utilisée pour les simulations de ce chapitre.

**Lemme 32** ([Joshi et al., 1995]). *Soit la loi de commande suivante :*

$$u_T^*(\omega, q) = -\frac{1}{2} \left( (\mathbf{1}_3 \eta + \varepsilon^\times) G_p + I_3 \gamma (1 - \eta) \right) \varepsilon - G_r \omega \quad (4.4)$$

où  $G_p \succ 0$ ,  $G_r \succ 0$  et la valeur propre maximale de la matrice  $G_p$  est inférieure ou égale à  $2\gamma$ . Le modèle décrit par (4.2) avec  $u_T = u_T^*$  donnée par (4.4) admet  $(\omega, q)_\# = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$  comme point d'équilibre LAS.

La suite de cette section discute des limitations associées aux roues à réaction et aux magnéto-coupleurs, qui sont les actionneurs retenus pour cette étude.

#### 4.2.2 Utilisation des roues à réaction seules

D'après le théorème 29 et sous l'hypothèse 6, la dynamique du satellite équipé des trois roues à réaction est gouvernée par les équations suivantes :

$$J\dot{\omega} + \dot{h}_w + \omega^\times (J\omega + h_w) = \mathbf{0} \quad (4.5a)$$

$$\dot{h}_w = T_w \quad (4.5b)$$

En identifiant (4.5a) avec (4.2a), il est possible de décrire cette dynamique dans le cadre des actionneurs idéaux en utilisant (4.5b) et (4.2a) avec  $u_T$  définie comme suit :

$$u_T = \dot{h}_w - \omega^\times h_w = -T_w - \omega^\times h_w \quad (4.6)$$

Comme dans le chapitre précédent, on considère le vecteur d'état  $x$  dont on rappelle l'expression sur la trajectoire  $\#$  :

$$x_\# = \begin{bmatrix} \omega \\ q \\ h_w \end{bmatrix}_\# = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ h_\# \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10} \quad (4.7)$$

où  $h_\# \in \mathbb{R}^3$  correspond à une consigne constante arbitraire du moment angulaire des roues à réaction.

Le problème 7 est modifié conformément à ce contexte.

**Problème 9.** [Roues à réaction seules] Pour le satellite décrit par (4.2) et (4.5b) avec  $u_T$  donnée par (4.6), concevoir une loi de commande  $T_w(t, x)$  telle que  $x_\#$  soit un point d'équilibre GAS en boucle fermée.  $\circ$

En l'absence de couples extérieurs, le moment cinétique  $h_S^{[I]}$  du satellite complet  $\mathcal{S}$  (corps central et roues à réaction) exprimé dans le référentiel inertiel est invariant (voir (3.33)). En s'appuyant sur ce principe, les roues à réaction accélèrent et décélèrent leur vitesse de rotation pour mettre en mouvement le satellite via un transfert de moment cinétique. De cette façon, les actionneurs peuvent modifier l'orientation du satellite à partir de valeurs initiales de  $\omega$  et  $q$  quelconques.

Pour ce type d'asservissement et en l'absence de couples perturbateurs, la valeur finale de  $h_S^{[I]}$  est fonction exclusivement des conditions initiales puisque les roues à réaction sont inaptes à modifier cette grandeur dont on rappelle l'expression obtenue à partir de l'équation (3.20) :

$$h_S^{[I]} = C^T(q)h_S^{[B]} = C^T(q)(J\omega + h_w) \quad (4.8)$$

En d'autres termes, l'usage exclusif de ces actionneurs ne permet pas d'asservir à la fois  $q$  et  $h_w$ . En s'appuyant sur cette constatation, le lemme 33 caractérise la région de l'espace d'état admissible pour rejoindre la trajectoire  $\sharp$  grâce à la matrice de rotation  $C(q)$ , dont on rappelle l'expression donnée par (3.39) :

$$C(q) = (\eta^2 - \varepsilon^T \varepsilon) \mathbf{1}_3 + 2\varepsilon \varepsilon^T - 2\eta \varepsilon^\times \quad (4.9)$$

**Lemme 33.** *La condition suivante est nécessaire pour que le problème 9 admette une solution*

$$h_S^{[I]}(t_0) = h_\sharp \quad (4.10)$$

où  $h_S^{[I]}$  est fonction des états selon la relation (4.8). De plus, si (4.10) est satisfaite pour un instant  $t_0$ , alors elle est également vérifiée quel que soit  $t$ .

Pour compléter cette discussion, on montre maintenant qu'il est possible de résoudre le problème 9 grâce aux solutions du problème 7.

**Théorème 36.** *Si la condition (4.10) est vérifiée, alors toute loi de commande  $T_w(x)$  définie par*

$$T_w(x) = -u_T^*(t, \omega, q) - \omega^\times h_w \quad (4.11)$$

où  $u_T^*$  est une solution quelconque du problème 7, résout le problème 9.

*Démonstration.* La substitution de  $T_w(x)$ , donné par (4.11), dans (4.6) donne  $u_T = u_T^*$ . On retrouve alors le cadre du problème 7, pour lequel  $u_T^*$  est, par hypothèse, une solution. Les signaux  $\omega$  et  $q$  sont donc bornés et convergent vers  $\omega_\sharp$  et  $q_\sharp$ .

D'après le lemme 33, si la condition (4.10) est vérifiée, elle est également satisfaite quel que soit  $t$ . On a alors

$$\forall t : h_w(t) = C(q(t))h_\sharp - J\omega(t)$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $(\omega, q)$  converge vers  $(\omega, q)_\sharp = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$  et cette relation montre que  $h_w(t)$  tend vers  $h_\sharp$  puisque  $C(q_\sharp) = \mathbf{1}_3$ .  $\square$

Ces résultats montrent clairement les limites de commandabilité associées à un satellite équipé uniquement de roues à réaction. La sous-section suivante se penche sur la même problématique en utilisant uniquement les magnéto-coupleurs.

**Remarque.** *On notera que la stratégie utilisée par le théorème 36 s'apparente à un retour linéarisant (voir [Wen and Kreutz-Delgado, 1991]) annulant le terme non-linéaire gyroscopique  $\omega^\times h_w$ .*  $\circ$

### 4.2.3 Problèmes spécifiques associés aux actionneurs magnétiques

**Difficulté d'utilisation des magnéto-coupleurs** Comme expliqué dans le chapitre précédent, l'interaction du moment magnétique  $M$ , créé par les magnéto-coupleurs, avec le champ géomagnétique  $B$  génère un couple  $T_m$  selon la relation suivante :

$$T_m = -B^\times M \quad (4.12)$$

et conduit à l'équation de la dynamique suivante :

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = T_m$$

On rappelle que  $B$  est fonction de l'orientation du satellite et de sa position sur l'orbite. Cette double dépendance est mise en lumière grâce à la décomposition  $B = C(q)B_o$  conduisant à

$$T_m = -(C(q)B_o(t))^\times M \quad (4.13)$$

Sous l'hypothèse que la trajectoire orbitale est parfaitement prévisible, le terme  $B_o(t)$  est connu et dépend uniquement du temps. Le problème 7 est adapté en conséquence au cas des magnéto-coupleurs.

**Problème 10.** [Magnéto-coupleurs seuls] Dans le cas où  $u_T = T_m$ , avec  $T_m$  défini par (4.13), concevoir une loi de commande à retour d'état  $M(t, \omega, q)$  conduisant à une solution du problème 7.  $\circ$

La résolution du problème 10 se heurte aux difficultés suivantes, caractéristiques de l'utilisation des magnéto-coupleurs pour le contrôle d'attitude :

- **couplage dynamique/cinématique** : le couple  $T_m$  dépend de la matrice de rotation  $C(q)$ , elle-même fonction du quaternion  $q$ . La dynamique du satellite dépend donc de son orientation. Cette constatation provient du fait que le satellite perçoit le champ magnétique différemment selon son attitude ;
- **dépendance temporelle quasi-périodique** :  $T_m$  est fonction du temps par l'intermédiaire du terme  $B_o(t)$ . La section précédente a montré que cet élément est quasi-périodique au double de la fréquence orbitale. Ainsi, pour un moment  $M$  invariant et une orientation constante, le couple magnétique varie en fonction du temps, ou, plus précisément, en fonction de la position du satellite sur l'orbite ;
- **couplage entrées/états** : l'entrée de commande  $M$  est multipliée par  $C(q)$ , une fonction polynomiale de degré 2 en les éléments de  $q$  d'après (4.9). A nouveau, cette observation trouve son origine dans la dépendance qu'entretient l'action des magnéto-coupleurs à l'égard de l'attitude du satellite.

Si chacune de ces remarques complique l'obtention d'une solution au problème 10, elles ne posent, *a priori*, aucune limitation à sa résolution. Il en va autrement de l'observation suivante qui est un facteur limitant intrinsèque à l'utilisation des magnéto-coupleurs : **à un instant donné, seuls deux axes du satellite sont commandables** par ces actionneurs. En effet, le vecteur  $\vec{T}_m$  est issu du produit vectoriel  $\vec{M} \times \vec{B}$  et est donc toujours orthogonal à  $\vec{B}$ . On retrouve cette observation en examinant la relation (4.12) pour laquelle la matrice  $B^\times$  est structurellement singulière puisque les propriétés des matrices de produit croisé indiquent que  $B^\times B = \mathbf{0}$ , quel que soit  $B \in \mathbb{R}^3$ . En d'autres termes, l'image de  $B^\times$  est le plan orthogonal à  $B$ . Le couple  $T_m$  est donc contraint dans cet ensemble, quel que soit le moment  $M$  des magnéto-coupleurs.

**Remarque.** *On notera que l'utilisation des roues à réaction n'implique aucune de ces difficultés. Elles requièrent toutefois la prise en compte de leur dynamique, en ajoutant  $h_w$  aux états du modèle. Au contraire, la dynamique des magnéto-coupleurs peut être négligée puisque le transitoire électrique de ces actionneurs est très court par rapport à la dynamique du satellite [Lovera, 2001].* ◦

**Commandabilité restreinte** La restriction de la commandabilité instantanée à deux axes est la plus contraignante des difficultés soulevées précédemment. Elle interdit en effet de générer un couple  $T_m$  arbitraire, et rend donc les solutions du problème 7 inutilisables dans ce contexte. Afin de prendre en compte ces contraintes, les travaux présentés dans la littérature ont fréquemment recours à la précommande suivante (voir par exemple [Lovera and Astolfi, 2004, Sidi, 1997, Hablani, 1997]) :

$$M = \frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} M^* \quad (4.14)$$

où  $M^*$  est la nouvelle variable de commande. Avec (4.12), cette relation conduit à l'équation suivante :

$$T_m = -b^\times(t)b^\times(t)M^*$$

Comme le montre la relation (4.1), la matrice  $-b^\times(t)b^\times(t)$  projette  $M^*$  sur le plan orthogonal à  $T_m$ . La précommande (4.14) permet ainsi :

1. de normaliser les variations d'amplitude de  $B(t)$  puisque  $\|b(t)\| = 1, \forall t$  ;
2. de minimiser l'énergie de commande en annulant la composante de  $M$  selon  $B(t)$  puisque cette direction correspond au noyau de  $B^\times(t)$  et sera donc annulée.

**Remarque.** *La mise en oeuvre de la précommande (4.14) requiert la connaissance de l'expression instantanée du champ magnétique. Ce dernier peut être calculé à bord via un modèle ou mesuré grâce à un magnétomètre. La première approche est soumise aux incertitudes de modélisation tandis que la seconde utilise un type de capteur peu précis. Cette difficulté d'accéder à la mesure du champ peut être vue comme une difficulté supplémentaire devant être surmontée par la loi de commande utilisant ces actionneurs.* ◦

En raison de la singularité de  $b^\times(t)$ , il est possible que  $T_m(t)$  soit nul alors que  $\|M^*(t)\| \neq 0$ . En revanche, si  $M^*(t)$  reste constant (et non nul) sur un intervalle de temps suffisamment long, la variation temporelle de  $b(t)$  garantit qu'il existe  $t$  pour lequel  $\|T_m(t)\| \neq 0$ . En d'autres termes, l'image de  $-b^\times(t)b^\times(t)$  est restreinte au plan orthogonal à  $b(t)$  alors que la valeur moyenne  $\Gamma$  de cette même matrice est non nulle.

$$\Gamma(t, b) = -\frac{1}{t} \int_0^t b^\times(\tau)b^\times(\tau)d\tau \quad (4.15)$$

En utilisant l'identité  $-b^\times(t)b^\times(t) = (b^\times(t))^T b^\times(t)$ , le développement suivant montre que  $\Gamma$  est structurellement semi-définie positive :

$$v^T \Gamma(b(t))v = \frac{1}{t} \int_0^t v^T (b^\times(\tau))^T b^\times(\tau) v d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t w^T(\tau)w(\tau) d\tau \quad \text{avec} \quad w(\tau) = b^\times(\tau)v$$



On remarque également que s'il existe un instant  $0 < \tau < t$  tel que  $w(\tau) \neq 0$  alors  $\Gamma$  est définie positive. Les trajectoires pathologiques sont caractérisées par  $w(t) = b^\times(t)v = \mathbf{0}$  et correspondent au cas où  $b(t)$  est constant et orthogonal à  $v$ , comme indiqué précédemment. L'examen de (4.13) montre que deux cas de figure peuvent conduire à l'invariance temporelle de  $b(t)$  :

1. l'attitude du satellite est constante et  $b_o(t)$  est invariant ;
2.  $b_o(t)$  et  $q(t)$  varient de telle sorte que  $b(t) = C(q(t))b_o(t)$  est constant.

Le premier cas peut être écarté grâce à des considérations portant sur l'orbite du satellite. Le chapitre précédent a montré en effet que la direction du champ magnétique dans le référentiel lié au satellite n'est constante que si (a) le plan orbital et l'équateur géomagnétique sont confondus<sup>3</sup> ou (b) le satellite est géostationnaire. L'une et l'autre de ces situations sont exclues de cette étude considérant des orbites basses et inclinées. Le second cas est plus insidieux puisqu'il correspond à une situation où le mouvement de l'attitude du satellite correspond très exactement aux variations du champ magnétique dues au mouvement orbital. On notera cependant que la probabilité qu'une telle configuration persiste pendant une durée d'une demi-orbite est quasi-nulle.

Dans le cadre cette thèse, on fait l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 7.** *Le champ  $B_o(t)$  dans le repère inertiel est périodique de période  $T_0/2$ , où  $T_0$  fait référence à la période orbitale, et sa direction est telle que*

$$\Gamma_o \succeq \gamma \mathbf{1}_3$$

avec

$$\Gamma_o = \Gamma(T_0/2, b_o) = -\frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} b_o^\times(\tau) b_o^\times(\tau) d\tau = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0/2} (\mathbf{1}_3 - b_o(\tau) b_o^T(\tau)) d\tau \quad (4.16)$$

Cette hypothèse permet de se focaliser sur les aspects périodiques de la commande d'attitude en excluant les orbites problématiques et en assimilant les variations de  $b_o(t)$  à un signal périodique.

**Remarque.** *Une valeur de  $\gamma$  très proche de zéro (mais positive) valide mathématiquement l'hypothèse 7 mais reste en pratique aussi problématique le cas où  $\gamma = 0$ .* ◻

**Contrôle d'attitude par magnéto-coupleurs** La discussion précédente montre qu'il est possible de garantir la commandabilité du satellite par les seuls magnéto-coupleurs sur un horizon temporel suffisamment grand. Si cette observation permet d'envisager le contrôle d'attitude 3-axe dans ce contexte, les performances obtenues ne peuvent être comparables à celles d'un système de commande utilisant des actionneurs permettant un couple quelconque. Cette solution est toutefois intéressante dans le cas de faibles exigences de pointage et d'un choix d'actionneurs restreint (typiquement pour le mode survie [Courtois, 1998]).

Dans ce contexte, [Lovera and Astolfi, 2004] propose une solution locale au problème 10.

**Théorème 37** ([Lovera and Astolfi, 2004]). *Soit la loi de commande suivante, paramétrée par  $\delta$  et conduisant à  $M(t, x)$  via la précommande décrite par (4.14) et*

$$M^*(x) = -(\delta^2 k_p \varepsilon + \delta k_v J \omega) \quad (4.17)$$

où  $k_p$  et  $k_v$  sont deux scalaires positifs satisfaisant la relation donnée par [Lovera and Astolfi, 2004, eq. (16)]. Si la condition suivante est vérifiée

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma(t, b_o) > 0 \quad (4.18)$$

où  $\Gamma$  est donnée par (4.15), alors il existe  $\delta^*$ , tel que pour tout  $\delta$  satisfaisant  $0 < \delta < \delta^*$ , la loi de commande (4.17) assure que  $(\omega, q)_\# = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$  est un point d'équilibre LES pour le système asservi décrit par (4.12) et (4.2) avec  $u_T = T_m$ .

On remarquera que l'hypothèse utilisée par ce théorème sur  $b_o(t)$  (par l'intermédiaire de  $\Gamma$ ) est plus faible que l'hypothèse 7. Premièrement,  $b_o(t)$  ne doit pas nécessairement être périodique et, deuxièmement, la positivité de  $\Gamma$  n'est requise que de façon asymptotique alors que l'hypothèse 7 exige cette propriété sur une demi-période orbitale.

---

3. On précise que cette affirmation se base sur les analyses issues du modèle dipolaire, qui correspond à une version approchée de l'IGRF. De plus, la rotation de la Terre sur elle-même interdit la superposition exacte du plan orbital et de l'équateur géomagnétique de façon continue.

**Remarque.** Comme le remarque [Lovera and Astolfi, 2004], il est intéressant de mettre en relation le problème de commandabilité dont souffrent les magnéto-coupleurs avec le cas des satellites ne disposant que de deux axes commandables et fixes par rapport au référentiel lié au satellite. Il a en effet été démontré dans [Byrnes and Isidori, 1991] que ce dernier problème est insoluble par des lois de commande continues à temps invariant (statique ou dynamique). En revanche, un correcteur à temps-variant peut conduire à la stabilité asymptotique (et non exponentielle) comme l'a montré [Morin et al., 1995]. Ce résultat ne peut cependant pas être appliqué au problème 10 puisque la direction dans  $F_S$  de l'axe non commandable (c'est-à-dire  $\vec{B}$ ) varie dans le temps. ◦

Pour ce même problème, certaines solutions proposées dans la littérature se basent sur une version linéaire approchée des équations du mouvement du satellite. En ce sens, elles diffèrent de la démarche mise en oeuvre dans [Lovera and Astolfi, 2004] utilisant directement le modèle non-linéaire. Parmi celles-ci, on peut citer les travaux pionniers de [Hablani, 1995, Stickler and Alfriend, 1974] s'affranchissant des difficultés liées aux paramètres variant dans le temps de la dynamique en considérant le modèle moyen. Plus récemment, des outils de commande robuste et optimale ont été mis en oeuvre sur une approximation périodique et linéaire du modèle [Lovera, 2001, Psiaki, 2001, Wiśniewski and Stoustrup, 2004, Zanchettin and Lovera, 2011]. Finalement, on trouvera dans [Corti and Lovera, 2012] le compte-rendu des premières tentatives visant à exploiter la mesure du champ effectuée à bord en s'appuyant sur les techniques de synthèse à destination des modèles linéaires à paramètres variants (LPV).

#### 4.2.4 Principe et justification de l'approche

Comme il a été dit précédemment, les roues à réaction ne peuvent assumer seules un objectif de commande portant à la fois sur leur vitesse de rotation et sur l'attitude du satellite : l'action des roues à réaction repose précisément sur la variation de leur vitesse de rotation. En l'absence de couple extérieur, elles ne peuvent donc être ralenties ou accélérées sans modifier l'attitude du satellite. Par ailleurs, l'usage exclusif des magnéto-coupleurs induit des contraintes sévères de commandabilité. La combinaison de ces deux types d'actionneurs s'impose donc naturellement comme une solution permettant d'asservir l'attitude du satellite (via les roues à réaction) et de réguler la vitesse de rotation de roues (via les magnéto-coupleurs).

**Remarque.** L'utilisation conjointe de ces actionneurs peut également être interprétée comme une configuration visant à surmonter les difficultés de commandabilité associées aux magnéto-coupleurs. Toutefois, les exigences de performances orientent plutôt une approche dans laquelle les actionneurs principaux sont les roues à réaction et non les magnéto-coupleurs, ces derniers pâtissant de la difficile estimation de  $B_o(t)$ . ◦

A nouveau, l'énoncé du problème 7 est adapté à ce contexte pour lequel l'équation de la dynamique devient

$$J\dot{\omega} + \dot{h}_w + \omega^\times (J\omega + h_w) = - (C(q)B_o(t))^\times M$$

En rassemblant les contributions des deux types d'actionneurs, on reformule cette relation dans le cadre précédent avec :

$$u_T = -T_w - \omega^\times h_w - (C(q)B_o(t))^\times M \quad (4.19)$$

**Problème 11.** [Roues à réaction et magnéto-coupleurs] Concevoir une loi de commande à retour d'état  $\{T_w(x), M(t, x)\}$  assurant que la trajectoire  $\ddagger$  soit un équilibre GAS pour le système décrit par (4.2), (4.5b), (4.9) et (4.19). ◦

La complexité de ce problème est essentiellement due aux deux facteurs suivants :

- **interactions potentiellement néfastes entre les objectifs de commande** : lorsqu'ils sont traités en même temps, l'asservissement d'attitude et la régulation de la vitesse des roues peuvent être des objectifs conflictuels ;
- **difficultés liés à l'usage des magnéto-coupleurs** : les discussions précédentes ont montré que l'utilisation de ces actionneurs met en jeux des phénomènes complexes, en particulier en raison de limitations sur la direction du couple de commande.

La section suivante discute du traitement dont a fait l'objet ce problème dans la littérature.

### 4.3 Position du problème vis-à-vis de la littérature

Le problème 11 est classiquement abordé via une des deux stratégies suivantes :



- **dissymétrie des gains** : pour éviter les possibles interactions entre les objectifs d’asservissement, le gain du signal de commande  $T_w$  commandant l’attitude est beaucoup plus important que celui de la loi associée à  $M$ , responsable de la régulation de vitesse des roues ;
- **allocation du couple total** : le couple de commande total  $u_T$  est réparti selon les actionneurs en fonction des limitations propres de chacun d’eux.

La suite de cette section propose un tour d’horizon des résultats de la littérature concernant chacune de ces approches.

### 4.3.1 Régulation du moment cinétique des roues

**Simplification sous l’hypothèse de dissymétrie des gains** La discussion précédente suggère une répartition des objectifs de commande en fonction des actionneurs : les roues à réaction asservissent l’attitude tandis que les magnéto-coupleurs jouent le rôle d’actionneurs secondaires assurant l’amortissement du moment cinétique des roues. En s’inspirant du théorème 36, la loi de commande  $T_w(x)$  est choisie conformément à la relation (4.11). Dans ce contexte, l’équation de la dynamique (4.2a) s’écrit

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = u_T^*(\omega, q) - (C(q)B_o(t))^\times M(t, h_w) \quad (4.20)$$

Cette relation met en évidence la possibilité d’interaction entre les lois de commandes  $u_T^*$  et  $M$ . Pour s’en prémunir, l’approche décrite ici considère la commande d’attitude comme prioritaire par rapport à la régulation de  $h_w$ . Cette hiérarchie entre les objectifs de commande peut être traduite sous la forme d’une dissymétrie entre les gains de  $u_T^*$  et de  $M$ , de telle sorte que  $\|u_T^*\|$  est très supérieure à  $\|M\|$ . Sous cette hypothèse, la loi  $u_T^*$  rejette  $(C(q)B_o(t))^\times M$  comme une perturbation extérieure et fait converger  $(\omega, q)$  vers  $(\omega, q)_\#$ . L’expression asymptotique des équations (4.11) et (4.20) est alors

$$(4.11) \rightarrow T_w(x) = -u_T^*(\omega, q), \quad (4.20) \rightarrow u_T^*(\omega, q) = B_o^\times(t)M(t, h_w)$$

ou, plus simplement et en utilisant (4.5b),

$$\dot{h}_w = -B_o^\times(t)M(t, h_w) \quad (4.21)$$

La tâche secondaire de régulation de  $h_w$  s’appuie sur cette équation. Cet objectif peut être envisagé sur un horizon temporel plus grand que celui associé à l’asservissement d’attitude étant donnée l’ampleur de la plage de variation admissible de  $h_w$ . Cette liberté s’accorde avec la lente variation de  $B_o^\times(t)$  et offre ainsi une issue aux contraintes de commandabilité associées aux magnéto-coupleurs. Cette stratégie permet ainsi de surmonter les deux obstacles du problème 11 mentionnés précédemment. On détaille par la suite les solutions proposées pour concevoir  $M(t, h_w)$  à partir de (4.21).

**Remarque.** *Dans la littérature, la simplification de (4.20) à (4.21) est justifiée en supposant l’existence d’une séparation entre les bandes de fréquences de  $u_T^*$  et  $M$ . L’usage de cette hypothèse semble toutefois inappropriée. Il repose en effet sur le principe de superposition qui n’est valide que si le modèle est linéaire. Or, seule (4.21), la version asymptotique de (4.20), est linéaire. Il semble donc que l’argument utilisé pour justifier (4.21) repose précisément sur la validité de cette même expression. Au contraire, l’hypothèse de dissymétrie des gains suffit pour valider l’expression asymptotique (4.20). La séparation fréquentielle en est alors la conséquence mais non la cause. La suite de ce chapitre propose de refonder cette stratégie de commande en s’appuyant sur le moment cinétique total du satellite.*

○

**Méthodes de projection** On rassemble sous la dénomination « méthodes de projection », tous les correcteurs utilisant la précommande (4.14) pour obtenir une loi  $M$  stabilisant (4.21). Les considérations géométriques à l’origine de (4.14) justifient ce terme. Dans cette situation, la loi de commande globale est alors

$$\begin{cases} T_w(x) = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w \\ M(t, h_w) = \frac{b_o^\times(t)}{\|B_o(t)\|} M^*(h_w) \end{cases} \quad (4.22)$$

où  $u_T^*$  et  $M^*(h_w)$  stabilisent les dynamiques associées aux équations (4.2) et (4.21) respectivement.

Plusieurs stratégies ont été proposées dans la littérature pour calculer  $M^*(h_w)$ . Dans [Camillo and Markley, 1980, Sidi, 1997], la loi utilisée se résume à un simple gain  $k_p$  tel que  $M^*(h_w) = -k_p(h_w - h_\#)$ . Comme précisé dans [Lovera, 2001], le calcul de  $k_p$  est cependant mal maîtrisé et repose principalement sur une démarche du

type essai/erreur à partir de résultats de simulations. On trouve dans [Hablani, 1997] une démarche alternative considérant une matrice diagonale au lieu d'un gain unique. Les éléments de cette matrice sont obtenus par placement des pôles de l'expression moyenne du modèle sur une orbite.

Bien que classique, cette démarche reste heuristique et il n'existe pas, à notre connaissance, de preuve formelle que cette stratégie répond au problème 11.

**Techniques alternatives** Pour commander la dynamique de (4.21), les travaux de [Giulietti et al., 2006] proposent une méthode semi-analytique conduisant à une solution  $M(t)$  optimale, en boucle ouverte, pour un axe unique. Il s'agit d'une optimalité à l'égard du temps ou de l'énergie pour faire converger  $h_w$  vers  $h_{\#}$ . Dans [Lovera, 2001, Chen et al., 1999], la démarche se base sur des méthodes de synthèse LQ. Une équation de Riccati périodique est obtenue dans [Lovera, 2001]. Des méthodes d'intégration d'équation différentielles ordinaires (Runge Kutta) permettent sa résolution numérique et donnent lieu à un correcteur  $M(t, h_w)$  dont les coefficients varient dans le temps périodiquement.

### 4.3.2 Allocation du couple total

La méthode précédente de régulation du moment cinétique des roues s'appuie d'une part, sur une répartition prédéterminée des tâches d'asservissement entre les actionneurs et d'autre part, sur un découplage de leurs actions via une dissymétrie entre les gains des lois de commande. Si les principes d'ingénierie qui fondent cette relaxation sont cohérents avec l'objectif global de l'asservissement, cette approche est intrinsèquement conservative. Il est en effet envisageable de faire participer les magnéto-coupleurs au contrôle d'attitude et d'utiliser les roues à réaction de manière à éviter l'éloignement de leur moment cinétique de  $h_{\#}$ . Cette remarque fait naturellement appel à la stratégie d'allocation de l'effort de commande rencontrée dans le contexte d'actionneurs redondants [Zaccarian, 2009].

**Approche géométrique** Le principe général de la stratégie d'allocation consiste à concevoir (a) un correcteur délivrant l'effort de commande globale puis, (b) une fonction d'allocation assurant la répartition entre les actionneurs. Les résultats de [Forbes and Damaren, 2010] se conforment à cette démarche et s'appuient sur la loi  $u_T^*$  solution du problème 7 considérant des actionneurs idéaux. Pour tenir compte des limitations des magnéto-coupleurs, il est suggéré d'assigner à  $M$  la composante orthogonale à  $B(t)$  de  $u_T^*$  et de laisser à la charge des autres actionneurs la partie colinéaire à  $B(t)$ . On obtient alors la loi suivante, en tenant compte du terme gyroscopique  $\omega^\times h_w$  :

$$\begin{cases} T_w(x) = -b(t)b^T(t) (u_T^*(\omega, q) + \omega^\times h_w) \\ M(t, h_w) = -\frac{b^\times(t)}{\|B^\times(t)\|} (u_T^*(\omega, q) + \omega^\times h_w) \end{cases} \quad (4.23)$$

En substituant ces expressions dans (4.19) et en faisant appel à l'identité (4.1), il peut être vérifié que  $u_T$ , la contribution totale des actionneurs, correspond à  $u_T^*$  à chaque instant. On retrouve le même type de décomposition dans [Chen et al., 1999]. On notera cependant que ces études ne tiennent pas compte de la possible divergence de  $h_w$ .

**Approche par programmation quadratique** Pour tenir compte d'objectifs d'allocation plus complexes, les travaux de [Pulecchi, 2008, Chap.10] proposent d'utiliser une fonction de répartition résolvant un problème de programmation quadratique à chacun instant d'échantillonnage. La technique utilisée vise à minimiser l'effort de commande, ainsi que l'écart entre la commande globale et la commande effectivement produite par les actionneurs, tout en tenant compte des contraintes de saturation des actionneurs. Dans cette étude, les satellites considérés sont équipés de magnéto-coupleurs et de tuyères. Toutefois, si l'usage de la programmation quadratique permet de prendre en compte des spécifications complexes, elle requiert la résolution d'un problème d'optimisation à bord et en temps réel. Afin de limiter l'effort de calcul, cette thèse se focalise exclusivement sur les correcteurs existant sous une forme explicite (sans optimisation à bord).

## 4.4 Formalisation de la méthode de dissymétrie des gains

La discussion entamée dans la section précédente sur la dissymétrie des gains est maintenant poursuivie. L'objectif est de refonder cette technique pour lui donner un cadre plus formel. A cette fin, cette section propose une structure de commande basée sur le moment cinétique total. Le découplage physique existant entre cette grandeur et l'influence des roues à réaction permet en effet de se prémunir contre les interactions néfastes entre les objectifs de commande.

#### 4.4.1 Asservissement d'un intégrateur simple grâce aux magnéto-coupleurs

Avant d'aborder le cœur de cette section, on considère le problème préliminaire suivant dont la suite de ce chapitre fera usage à plusieurs reprises.

**Problème 12.** Soit le modèle à temps variant décrit comme suit :

$$\dot{\alpha} = -B_{\circ}^{\times}(t)M \quad (4.24)$$

Trouver une loi de commande  $M(t, \alpha)$ , telle que l'origine  $\alpha = \mathbf{0}$  soit un équilibre UGES du modèle (4.24) en boucle fermée.  $\circ$

Le problème de régulation du moment cinétique des roues s'inscrit dans le cadre de cette problématique puisque (4.21) correspond à (4.24) avec  $\alpha = h_w$ . Plus généralement, ce problème englobe toutes les situations dans lesquelles les magnéto-coupleurs doivent commander, sur une trajectoire d'attitude fixée, une grandeur proportionnelle à une vitesse.

##### Utilisation d'un gain proportionnel constant

En s'inspirant de la démarche entreprise dans [Lovera and Astolfi, 2004, Prop.1], le lemme suivant montre qu'un simple gain  $-k_m$  combiné à la précommande (4.14) résout le problème 12.

**Lemme 34.** Soit la loi de commande  $M^*(\alpha) = -k_m\alpha$ , associée à la précommande (4.14) avec  $B(t) = B_{\circ}(t)$  :

$$M(t, \alpha) = -k_m \frac{b_{\circ}^{\times}(t)}{\|B_{\circ}(t)\|} \alpha \quad \text{avec } k_m \in \mathbb{R}_{>0} \quad (4.25)$$

Si l'hypothèse 7 est satisfaite, alors le correcteur (4.25) est une solution au problème 12 et conduit au modèle en boucle fermée suivant

$$\dot{\alpha} = k_m b_{\circ}^{\times}(t) b_{\circ}^{\times}(t) \alpha \quad (4.26)$$

*Démonstration. Résultats préliminaires.* Soit  $N = \mathbf{1}_3 - \Gamma_{\circ}$ , où  $\Gamma_{\circ}$  est donnée par (4.16) et vérifie  $\Gamma_{\circ} \succeq \gamma \mathbf{1}_3$  par l'hypothèse 7 et  $\Gamma_{\circ} \preceq \mathbf{1}_3$  par construction. Par conséquent, la matrice  $N$  satisfait

$$\mathbf{0} \preceq N \preceq (1 - \gamma) \mathbf{1}_3 \quad (4.27)$$

On définit également la matrice symétrique  $G(t)$  par l'équation suivante :

$$G(t) = \int_0^t (b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau) - N) d\tau \quad (4.28)$$

On vérifie que  $G(kT_0/2) = \mathbf{0}$  quel que soit  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  puisque  $b_{\circ}(t)$  est périodique et que  $G(T_0/2) = \int_0^{T_0/2} (b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau) - \mathbf{1}_3) d\tau + T_0 \Gamma_{\circ} / 2 = \mathbf{0}$ . Il est alors possible de borner  $G(t)$  en assurant qu'il existe  $\sigma > 0$  tel que

$$-\sigma I \leq G(t) \leq \sigma I, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.29)$$

Pour démontrer cette propriété, on décompose  $G(t)$  sous la forme suivante

$$G(t) = \underbrace{G(nT_0/2)}_{=\mathbf{0}} + \int_{nT_0/2}^t (b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau) - N) d\tau$$

pour laquelle  $n = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : kT_0/2 \leq t\}$ . En ayant recours à l'inégalité de Jensen [McShane, 1937] et une inégalité triangulaire, on peut alors affirmer que

$$|G(t)| \leq \int_{nT_0/2}^t (|b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau)| + |N|) d\tau \leq (1 + |N|)(t - nT_0/2) \leq (1 + |N|)T_0/2$$

puisque, par définition, on a

$$|b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau)| = \max_{v \in \mathbb{R}^3} \|b_{\circ}(\tau) b_{\circ}^T(\tau) v\| / \|v\| = \|b_{\circ}(\tau)\| \|b_{\circ}^T(\tau)\| \|v\| / \|v\| = \mathbf{1}$$

Ceci prouve (4.29).

*Fonction de Lyapunov.* Après ces résultats préliminaires, on introduit la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t, \alpha) = \alpha^T \left( \frac{\lambda}{2} \mathbf{1}_3 - G(t) \right) \alpha \quad (4.30)$$

qui, d'après (4.29) et pour une valeur de  $\lambda > 0$  suffisamment grande, vérifie la propriété suivante pour deux scalaires positifs  $c_1$  et  $c_2$

$$c_1 \|\alpha\|^2 \leq V(\alpha, t) \leq c_2 \|\alpha\|^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^3 \quad (4.31)$$

*Décroissance de  $V$ .* La dérivée de  $V$  par rapport au temps le long des trajectoires du système (4.26) correspond à

$$\dot{V}(t, \alpha) = -\alpha^T Q(t) \alpha \quad \text{avec} \quad Q(t) = (-\lambda \mathbf{1}_3 + 2G(t)) k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) + b_o(t) b_o^T(t) - N \quad (4.32)$$

Les vecteurs  $b_1(t)$  et  $b_2(t)$ , de norme unitaire, sont maintenant introduits. Ils définissent avec  $b_o(t)$  un trièdre orthonormé de telle sorte que

$$T^T(t) T(t) = \mathbf{1}_3 \quad \text{avec} \quad T(t) = [b_o(t) \quad b_1(t) \quad b_2(t)]$$

De cette proposition et de (4.1), on déduit les relations

$$T^T(t) b_o(t) b_o^T(t) T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_o^\times(t) b_o^\times(t) T(t) = (b_o(t) b_o^T(t) - \mathbf{1}) T(t) = [\mathbf{0} \quad -b_1(t) \quad -b_2(t)]$$

permettant de simplifier l'expression suivante

$$\begin{aligned} W(t, \beta) &= -\beta^T T^T(t) Q(t) T(t) \beta \\ &= -\beta^T T^T(t) (-\lambda k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) + 2G(t) k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) + b_o(t) b_o^T(t) - N) T(t) \beta \\ &= -\beta^T \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda k_m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda k_m \end{bmatrix} - 2k_m G(t) [\mathbf{0} \quad b_1(t) \quad b_2(t)] - T^T(t) N(t) T(t) \right) \beta \\ &= -\beta^T \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda k_m & 0 \\ 0 & 0 & \lambda k_m \end{bmatrix} - k_m \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \Xi(t) \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Xi^T(t) \end{bmatrix} \right) - T^T(t) N(t) T(t) \beta \end{aligned}$$

avec  $\Xi(t) = G(t) [b_1(t) \quad b_2(t)]$ . On montre que pour  $\lambda > 0$  suffisamment grand, il existe un scalaire positif  $c_3$  tel que  $W(t, \beta) \leq -c_3 \|\beta\|^2$  quels que soient  $\beta$  et  $t$ . En effet, grâce à (4.29), on a  $|\Xi(t)| \leq \sigma$  puisque

$$|\Xi(t)| = |G(t) [b_1(t) \quad b_2(t)]| \leq |G(t)| | [b_1(t) \quad b_2(t)] | \leq \sigma$$

et (4.27) permet d'affirmer que  $T^T(t) N(t) T(t) \preceq (1 - \gamma) T^T(t) T(t) = (1 - \gamma) \mathbf{1}_3$ . Via le changement de variables  $\alpha = T(t) \beta$ , la négativité de  $W(t, \beta)$  prouve la décroissance de la fonction de Lyapunov puisque  $\dot{V}(t, T(t) \beta) = W(t, \beta) \leq -c_3 \|\beta\|^2 = -c_3 \|\alpha\|^2$ . L'association de ce résultat et de (4.31) prouve la stabilité UGES en s'appuyant sur [Khalil, 2002, Th. 4.10].  $\square$

On insiste sur le fait que la loi (4.25) est une solution du problème 12 quel que soit  $k_m > 0$ . Ce résultat contraste avec la loi proposée dans [Lovera and Astolfi, 2004] et rappelée par (4.17), qui n'est valide que pour  $\delta$  suffisamment petit. Cette différence tient au fait que le problème de commande d'attitude, traité par [Lovera and Astolfi, 2004], considère implicitement deux intégrateurs au lieu d'un seul comme dans le problème 12.

On remarquera également que le lemme 34 reste valable quel que soit  $b_o(t)$  satisfaisant l'hypothèse 7. Cette caractéristique est un argument en faveur de la robustesse de cette approche. On émet même la conjecture que ce résultat reste une solution pratique si l'on substitue à l'hypothèse 7 celle (plus faible) donnée par (4.18) et considérée dans [Lovera and Astolfi, 2004], à condition d'éviter les orbites problématiques. L'emploi du qualificatif « pratique » se justifie en considérant que le cas pathologique discuté précédemment, où  $b(t)$  est constant alors que  $b_o(t)$  varie, n'a pas d'existence physique si l'on considère un interval temporel suffisamment grand.

### Asservissement via un gain matriciel périodique

Le lemme 34 démontre qu'un simple gain scalaire positif  $k_m$  suffit à stabiliser le système décrit par (4.24) avec certaines propriétés de robustesse vis-à-vis du champ magnétique. Cependant, ce résultat ne donne aucune indication sur la manière de choisir  $k_m$  pour favoriser la performance de l'asservissement, c'est-à-dire la façon dont le système asservi converge vers l'origine  $\alpha = \mathbf{0}$  en terme de durée du régime transitoire et d'intensité de l'effort de commande. Intuitivement, on devine que ce choix dépend de l'expression de  $B_o(t)$ . Or le chapitre précédent montre qu'il est possible de connaître ce terme avec une certaine précision. On se propose donc maintenant de concevoir une loi de commande périodique en tirant profit de l'information disponible sur  $B_o(t)$ . L'objectif est d'améliorer la performance obtenue avec le gain scalaire constant  $k_m$ .

**Construction du modèle de synthèse à temps continu** Le modèle (4.24) est linéaire et variant dans le temps. De plus, il est possible de considérer que cette dépendance temporelle est périodique en assimilant l'expression de  $B_o(t)$  à celle de  $B_P^{[N]}(t)$  issue de la régression linéaire à partir des données de l'IGRF (voir le chapitre 3). Les méthodes de synthèse développées dans le chapitre 2 peuvent alors être appliquées au modèle (4.24). Elles tiennent compte de l'expression du modèle de synthèse et donc, dans le cas présent, de  $B_o(t)$ .

Le terme utilisé  $B_P^{[N]}(t)$  n'est cependant qu'une approximation de l'IGRF, qui n'est lui-même qu'un modèle et donc une représentation partielle de la réalité. La différence entre  $B_P^{[N]}(t)$  et le champ réellement rencontré par le satellite se modélise naturellement en additionnant à  $b_o(t)$  le terme borné en norme  $\Delta b_o(t)$ . Dans ce contexte, le modèle (4.24) associé à la précommande (4.14) avec  $B(t) = B_o(t)$  s'écrit

$$\dot{\alpha} = (b_o(t) + \Delta b_o(t))^\times (b_o(t) + \Delta b_o(t))^\times M^*$$

Grâce à la linéarité de l'opérateur  $(\ )^\times$  et en négligeant le terme du second ordre, on réécrit cette équation sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_1 + b_o^\times(t) b_o^\times(t) M^* \\ z_1 = M^* \\ w_1 = (b_o^\times(t) (\Delta b_o(t))^\times + (\Delta b_o(t))^\times b_o^\times(t) + (\Delta b_o(t))^\times (\Delta b_o(t))^\times) z_1 \end{cases}$$

**Remarque.** Le terme  $b_o(t)$  apparaît dans les expressions de la précommande (4.14) et du modèle (4.24). Rigoureusement, l'incertitude associée à  $b_o(t)$  n'est pas la même dans les deux situations. Dans le premier cas, elle reflète la connaissance que l'on a du champ à bord du satellite tandis que dans le second, il s'agit de l'incertitude associée au modèle. Pour simplifier la démarche, on utilise ici le terme  $\Delta b_o(t)$  dans les deux cas.  $\circ$

Finalement, on complète la description du modèle de synthèse en ajoutant une sortie de performance  $z_2 = \alpha$ . En ajoutant les pondérations  $k_1 = 10^{-2}$  et  $k_2 = 10^{-3}$ , on obtient un modèle standard décrit par

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B & B_u(t) \\ C & \mathbf{0} & D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ w \\ M^* \end{bmatrix} \quad \text{avec } w = w_1 \quad \text{et } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

où

$$B = k_1 \mathbf{1}_3, \quad B_u(t) = b_o^\times(t) b_o^\times(t), \quad C = k_2 \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{1}_3 \end{bmatrix}, \quad D_u = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}$$

Le but de l'asservissement est assimilé à la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  du modèle (4.33) en boucle fermée. Cette grandeur peut être interprétée<sup>4</sup> comme le rapport maximal entre les normes  $\mathcal{L}_2$  de la sortie  $z(t)$  et de l'entrée  $w(t)$ . Physiquement, ceci correspond à minimiser l'influence qu'exercent les incertitudes affectant le modèle du champ sur  $\alpha$  et  $M^*$ .

**Discrétisation et conception du correcteur** Les techniques de synthèse développées dans le chapitre 2 s'appliquant aux modèles à temps discret, la discrétisation de (4.33) est une étape préalable à leur utilisation. L'ajout d'un bloqueur d'ordre 0 de période  $T_s = T_0/(2N)$  à l'entrée du modèle (4.33) conduit au modèle suivant à temps-discret :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k & B_{uk} \\ C_k & D_k & D_{uk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{Nq+k+1} \\ w_{Nq+k} \\ M_{Nq+k}^* \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

4. Pour une définition formelle des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  d'un modèle périodique à temps continu, on pourra consulter [Colaneri, 2005].

En considérant que  $\Delta u(t)$  est constant pendant un temps  $T_s$ , l'intégration analytique des équations (4.43) conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_k &= \mathbf{1}_3, & B_k &= T_s B, & B_{uk} &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} B_u(\tau) d\tau \\ C_k &= C, & D_k &= \mathbf{0}, & D_{uk} &= D \end{aligned}$$

Par souci de simplicité, on considère ici que  $B_o(t)$  (et donc  $B_u(\tau)$ ) est constante pendant une période d'échantillonnage. Cette approximation est justifiée si  $T_s$  est suffisamment petite pour que  $B_o(t)$  varie peu au cours de cet intervalle.

Contrairement au cas LTI, il n'existe pas de résultats similaires à ceux de Nyquist-Shannon pour les modèles variant dans le temps. Cette lacune complique le choix de la période d'échantillonnage  $T_s$ . On précise également que la valeur de  $N$ , liée à  $T_s$ , influe directement sur l'effort de calcul mis en jeu par les techniques d'analyse et de synthèse applicable à (4.34). Le second chapitre a montré que plus  $N$  est grand, plus la taille et le nombre de variables des LMIs de synthèse sont importants. D'autre part, le correcteur synthétisé est également de période  $N$ . Pour faciliter la mise en œuvre de la loi de commande, il est donc conseillé de diminuer la valeur de ce paramètre. Ces remarques mettent en lumière la difficulté du choix de  $T_s$ , compromis délicat entre des exigences contradictoires.

On utilise le théorème 26 du chapitre 2 pour obtenir un correcteur du type  $M_{Nq+k}^* = K_k \alpha_{Nq+k}$ . La loi de commande s'écrit alors :

$$M(t, \alpha_k) = -\frac{b_o^\times(t)}{\|B_o(t)\|} K_k \alpha_k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \quad \text{satisfaisant } kT_s \leq t < (k+1)T_s \quad (4.35)$$

On notera que ce correcteur est sans mémoire. La justification de ce choix fait l'objet d'une discussion approfondie dans la sous-section 4.5.4.

On considère  $T_s = 48,9$  secondes, ce qui correspond à  $N = T_0/(2T_s) = 60$  échantillons par demi-orbite. Le problème d'optimisation LMI comporte alors  $18N + 7 = 1087$  variables et  $9N + 6 = 546$  lignes. La comparaison de ces dimensions avec celles des problèmes LMI traités à la fin du chapitre 2 montre que le calcul des matrices  $K_k$  est numériquement difficile puisque les LMIs sont de grandes tailles. Les valeurs numériques de ces matrices ne sont pas données ici pour des raisons évidentes de concision. En revanche, la figure 4.2 représente l'évolution de la norme infinie de  $K_k$  au cours d'une période. Elle permet de vérifier que les coefficients de  $K_k$  dépendent de  $k$ .

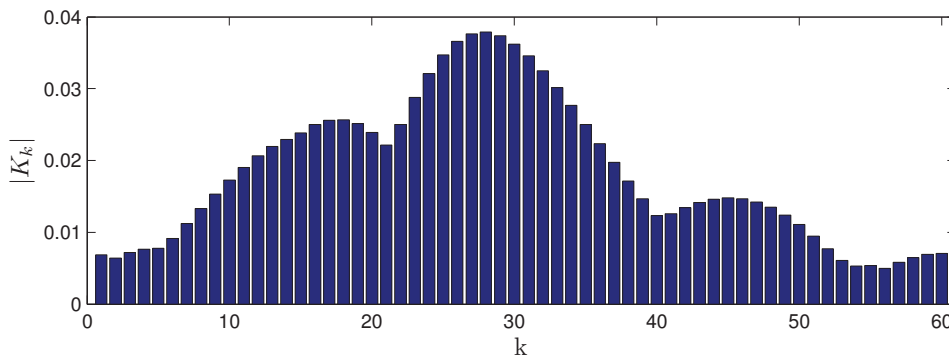


FIGURE 4.2 – Evolution de la norme de la matrice de gain périodique  $K_k$  au cours de la période

### Résultats des simulations

On procède maintenant à des simulations du modèle (4.24), asservi par les lois conçues précédemment. En premier lieu, on considère le correcteur (4.25) correspondant au gain scalaire  $k_m = 0,01$  associé à la précommande. La figure 4.3 fournit la réponse temporelle du système asservi, à la condition initiale

$$\alpha(0) = \begin{bmatrix} 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\alpha(0)\| = 1 \quad (4.36)$$

pour deux expressions différentes de  $B_o(t)$ . Les tracés en pointillés ont été obtenus avec l'approximation périodique du champ  $B_P^{[N]}(t)$  tandis que les courbes en traits pleins proviennent de l'utilisation de l'IGRF, dont

l'évolution temporelle mais pas exactement périodique. Formellement, le théorème 34 ne permet de conclure sur la stabilité du modèle que dans le premier cas. Toutefois, cette figure montre que ce contrôleur présente une certaine robustesse puisque le modèle conserve sa stabilité avec l'IGRF même si les dépassement de  $\alpha(t)$  lors du régime transitoire sont légèrement plus importants.

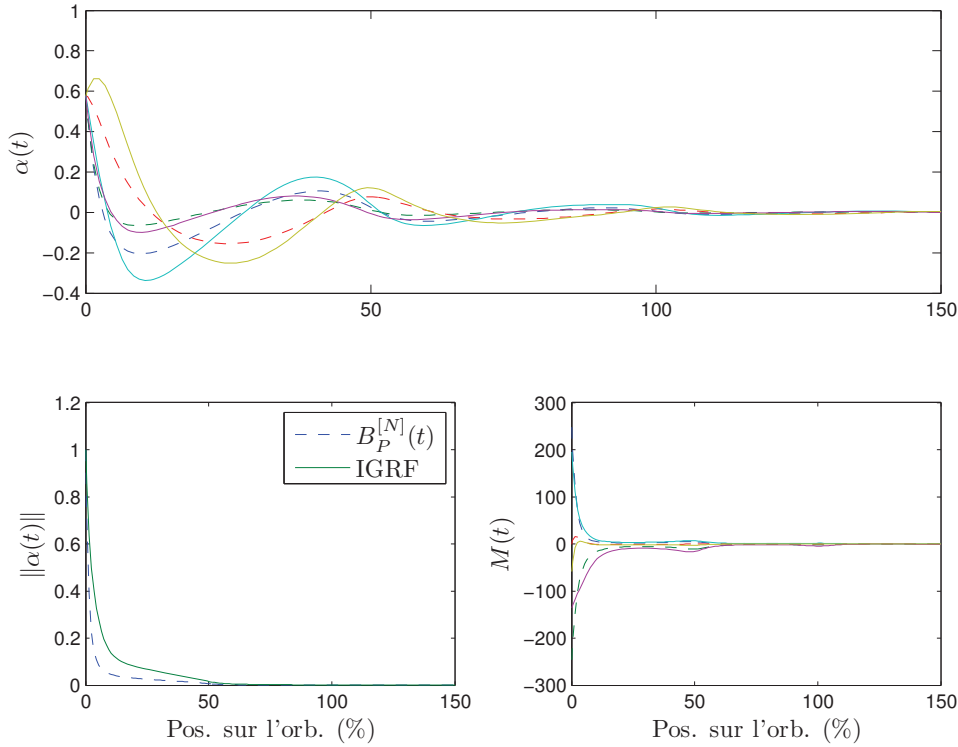


FIGURE 4.3 – Asservissement de l'intégrateur simple avec  $k_m = 0,01$  : robustesse vis-à-vis du champ

La figure 4.4 met en évidence l'influence de la valeur de  $k_m$ . Les conditions initiales sont identiques et  $B_o(t)$  est donné directement par l'IGRF. L'analyse de cette figure conduit aux remarques suivantes :

- les propriétés de robustesse du correcteur vis-à-vis des incertitudes du champ sont toujours valides pour d'autres valeurs de  $k_m$  puisque les simulations montrent que le modèle converge dans tout les cas malgré l'utilisation de l'IGRF ;
- la vitesse de convergence de la norme de  $\alpha(t)$  n'est une fonction croissante de  $k_m$  que dans les premiers instants de simulation. Par la suite,  $k_m = 0,001$  conduit à une décroissance plus rapide que  $k_m = 0,1$ . Selon ce critère,  $k_m = 0,01$  est la meilleure des trois valeurs utilisées. Cette observation contraste avec le cas invariant dans le temps où  $\dot{\alpha} = k_m \alpha$ , pour lequel la décroissance de la norme de l'état est  $\alpha(0) \exp(-k_m t)$  ;
- l'effort de commande représenté par la norme de  $M$  augmente avec  $k_m$ . La figure 4.4 représente les chronogrammes de  $M(t)$  et  $M^*(t)$  liés l'un à l'autre par (4.14). On constate que la pré-commande modifie sensiblement la régularité de la décroissance de  $M^*(t) = -k_m \alpha$ . Le choix  $k_m = 0,01$  (utilisé pour la figure 4.3) semble être un bon compromis entre performance et énergie de commande puisque  $\|M(t)\|$  varie peu entre  $k_m = 0,01$  et  $k_m = 0,001$ .



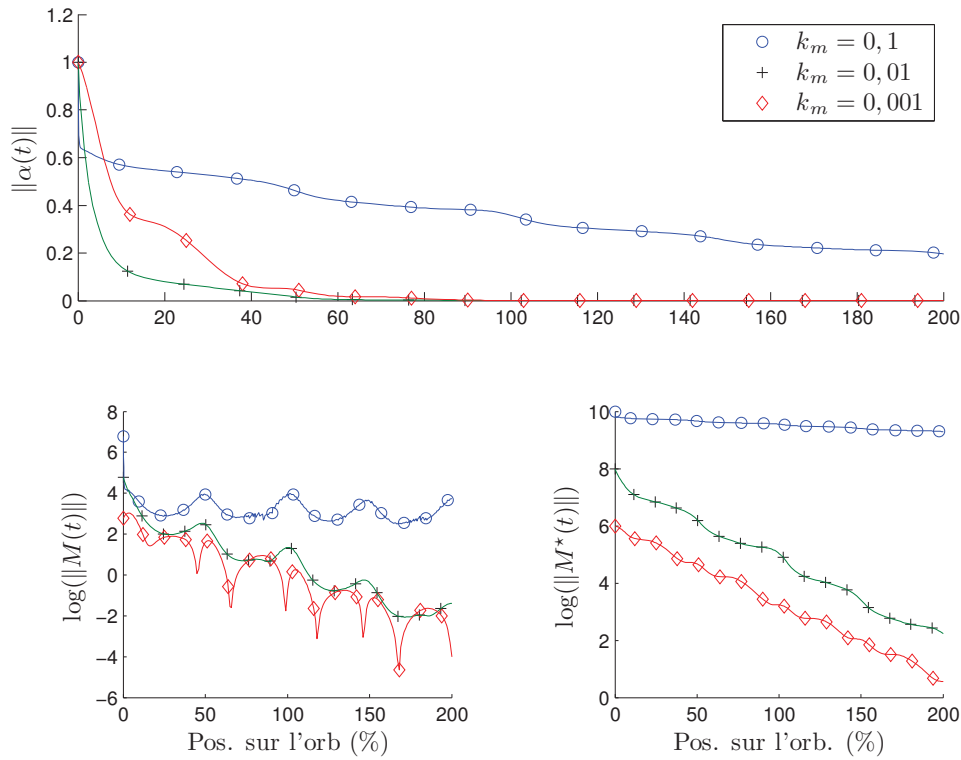


FIGURE 4.4 – Asservissement de l’intégrateur simple avec  $k_m$  : influence de la valeur de  $k_m$

Dans le cas du gain matriciel périodique  $K_k$  donné par (4.35), les figures 4.5 et 4.6 présentent les chronogrammes obtenus en réponse à l’état initial non nul (4.36). A nouveau, le champ  $B_o(t)$  est donné par  $B_P^{[N]}(t)$ , utilisé pour la synthèse, puis par l’IGRF. La comparaison des résultats obtenus dans les deux cas montre que ce correcteur conserve de bonnes performances en présence d’incertitudes sur le champ (on notera que les figures 4.3 et 4.4 n’adoptent pas la même échelle pour l’axe des abscisses que les figures 4.5 et 4.6).

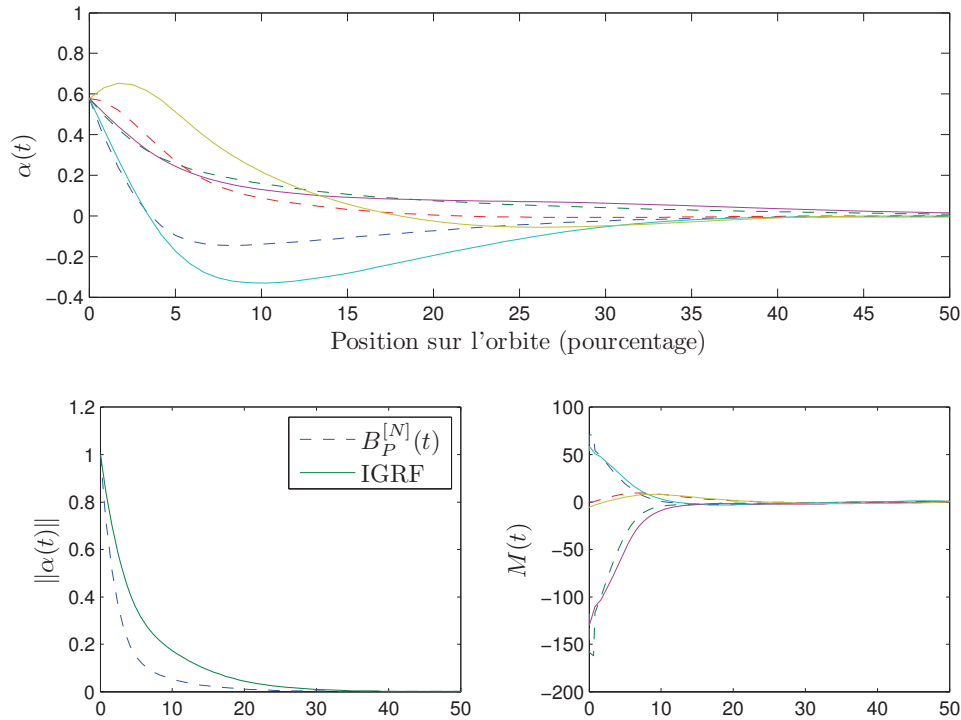
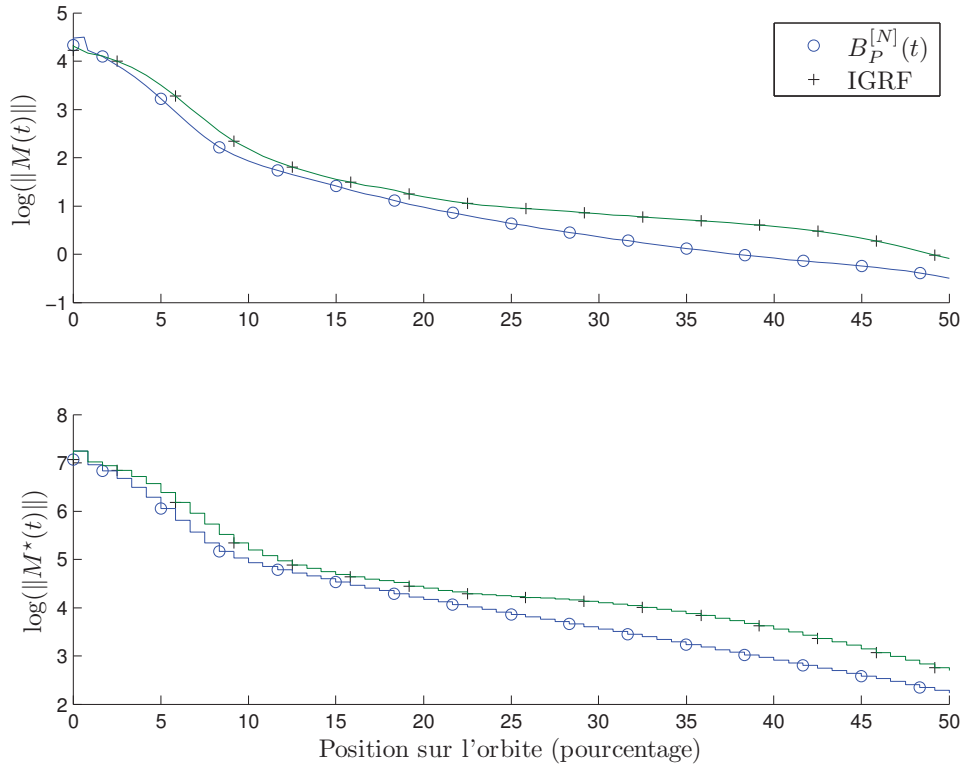


FIGURE 4.5 – Asservissement de l’intégrateur simple avec  $K_k$  : robustesse vis-à-vis du champ



FIGURE 4.6 – Asservissement de l'intégrateur simple avec  $K_k$  : robustesse via-à-vis du champ

Les deux correcteurs sont maintenant comparés dans le même contexte (état initial non nul (4.36) et utilisation de l'IGRF). La figure 4.7 donne les chronogrammes de  $\alpha(t)$  et  $M(t)$  sur une échelle normale et logarithmique. On fait les commentaires suivants :

- dans les deux cas, la décroissance de  $\|\alpha\|$  est comparable jusqu'à environ 10% de sa valeur finale ;
- au delà de cette limite, le gain scalaire ralentit la convergence de  $\|\alpha\|$  contrairement au correcteur matriciel périodique ;
- l'effort de commande, correspondant à  $\|M(t)\|$ , induit par  $k_m$  est très supérieur à celui correspondant à  $K_k$  et en particulier dans les premiers instants de la simulation. Le ralentissement de la convergence observé avec  $k_m$  accentue ce phénomène dans le reste de la simulation. Cette amélioration de l'efficacité du correcteur par l'utilisation d'un gain périodique a déjà été soulignée dans [Lovera, 2001] dans le cadre de l'approche par dissymétrie des gains.

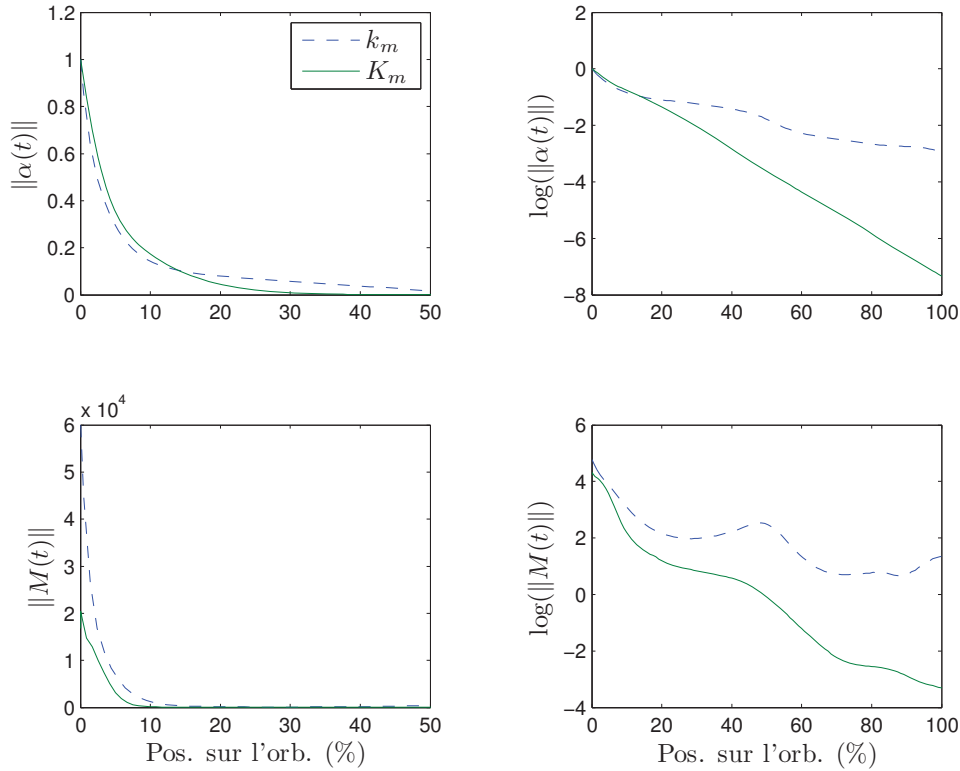
En résumé, la périodicité du gain  $K_k$  permet une diminution très nette de l'effort de commande et une amélioration sensible de la phase finale de la convergence de l'état.

#### 4.4.2 Structure de commande en cascade

On revient maintenant au problème du contrôle d'attitude. On rappelle que le couple fourni par les magnéto-coupleurs est perçu par le satellite comme un couple extérieur. Contrairement aux roues à réaction, ces actionneurs peuvent donc agir sur le moment cinétique total  $h_S^{[I]}$  exprimé dans le référentiel inertiel. L'équation suivante, à l'origine de (3.33), décrit cette relation :

$$\dot{h}_S^{[I]} = -B_\circ^\times(t)M^{[I]} \quad (4.37)$$

Le moment  $M^{[I]}$  peut être considéré comme la variable de commande des magnéto-coupleurs puisqu'il est toujours possible de déduire l'expression de  $M = C(q)M^{[I]}$  conduisant à la valeur désirée de  $M^{[I]}$ . L'équation (4.37) est alors indépendante des variables de la dynamique d'attitude  $(\omega, q)$ . De plus, cette relation montre que l'asservissement de  $h_S^{[I]}$  par  $M^{[I]}$  s'inscrit dans le cadre du problème 12 pour lequel le lemme 34 fournit une solution. En s'appuyant sur ce résultat, il est possible d'assurer à  $h_S^{[I]}$  une convergence exponentielle vers une valeur arbitraire constante. Cette remarque doit être mise en relation avec le résultat du lemme 33 soulignant l'impossibilité pour les roues à réaction de faire converger  $x$  vers  $x_\#$ , si la valeur initiale de  $h_S^{[I]}$  n'est pas égale

FIGURE 4.7 – Asservissement de l'intégrateur simple : comparaison entre  $k_m = 0,01$  et  $K_k$ 

à  $(h_S^{[I]})_\#$ . En ce sens, l'adjonction des magnéto-coupleurs au système de commande utilisant les roues peut être vue comme un moyen de s'affranchir de la condition du lemme 33.

Si la dynamique de  $h_S^{[I]}$  peut être commandée indépendamment de  $x$ , la dynamique de l'état est en revanche influencée par  $h_S^{[I]}$  via l'équation suivante obtenue en substituant (4.19) dans (4.2a)

$$J\dot{\omega} + \omega^\times J\omega = -T_w - \omega^\times h_w + C(q)\dot{h}_S^{[I]} \quad (4.38)$$

après avoir identifiée (4.37) dans (4.19) grâce à l'identité suivante :

$$(Cv)^\times = Cv^\times C^T, \forall v \in \mathbb{R}^3 \quad (4.39)$$

Cette remarque met à jour la structure en cascade représentée par la figure 4.8. On précise que la dynamique du sous-système inférieur est contrainte par la relation (4.8).

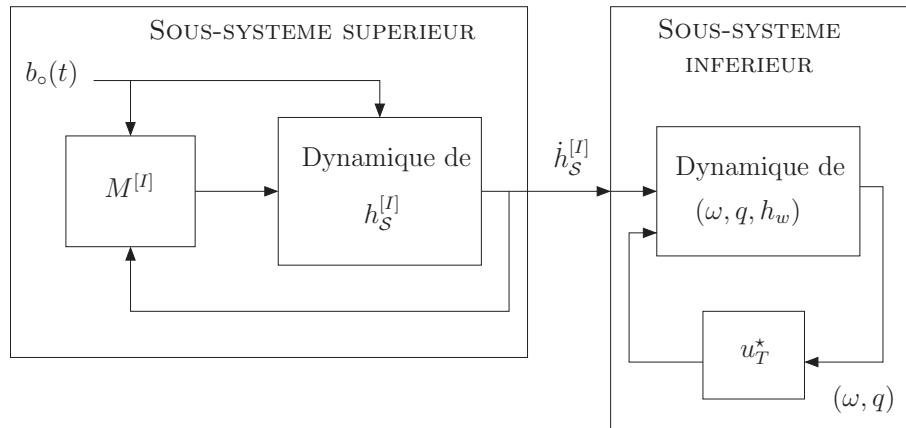


FIGURE 4.8 – Schéma de la stratégie de commande utilisant le moment cinétique total

Cette représentation montre que  $\dot{h}_S^{[I]}$  joue le rôle d'une perturbation vis-à-vis de la dynamique d'attitude. Cependant, dans l'hypothèse où  $h_S^{[I]}$  est asservi par les magnéto-coupleurs, sa dérivée converge vers  $\mathbf{0}$ . Cette caractéristique permet de certifier la stabilité globale du système et conduit ainsi à une solution au problème 11.

**Propriété 1.** La fonction  $u_T^*(t, \omega, q)$  assure que la dynamique de la boucle fermée du système décrit par (4.2) avec  $u_T = u_T^*$  :

- est ISS (Input-to-State Stable), (voir [Khalil, 2002, Def. 4.7]);
- localement Lipschitz en  $(\omega, q)$ ;
- continue par morceaux en  $t$ .

**Théorème 38.** La loi de commande suivante résout le problème 11 si l'hypothèse 7 est satisfaite :

$$M(t, x) = -k_m \frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|^2} (J\omega + h_w - C(q)h_\#) \quad (4.40a)$$

$$T_w(x) = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w \quad (4.40b)$$

où  $k_m$  est un scalaire strictement positif quelconque. Le correcteur  $u_T^*(\omega, q)$  peut être choisi arbitrairement parmi l'ensemble des lois satisfaisant la propriété 1.

*Démonstration. GAS de l'interconnexion.* Pour établir ce résultat, on s'appuie sur [Khalil, 2002, Lem. 4.7] indiquant que si le sous-système supérieur admet  $x_\#$  comme équilibre UGAS et que le sous-système inférieur vérifie la propriété 1, alors  $x_\#$  est un équilibre UGAS pour le système complet.

*UGAS du sous-système supérieur.* En utilisant l'identité (4.39) avec la relation  $b(t) = C(q)b_o(t)$  et en reconnaissant l'expression de  $h_S^{[I]}$  donnée par (4.8) dans (4.40a), on réécrit tout d'abord (4.40a) comme suit :

$$M(t, x) = -k_m C(q) \frac{b_o^\times(t)}{\|B(t)\|} (h_S^{[I]} - h_\#)$$

Le changement de référentiel  $M^{[I]} = C^T(q)M$  permet ensuite de substituer cette formulation dans (4.37) pour obtenir

$$\dot{h}_S^{[I]} = k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) (h_S^{[I]} - h_\#)$$

en remarquant que  $\|B(t)\| = \|B_o(t)\|$ . Cette relation correspond à (4.26) avec  $\alpha = h_S^{[I]} - h_\#$ . Le lemme 34 garantit alors que la variable d'état  $h_S^{[I]}$  du sous-système supérieur admet  $h_\#$  comme équilibre UGES (et donc UGAS), étant donné que  $k_m > 0$  et que l'hypothèse 7 est vérifiée.  $\square$

Ce théorème peut être vu comme la généralisation de l'approche par dissymétrie des gains. En effet, si  $u_T^*$  est très agressive par rapport à  $M$ , alors  $(\omega, q)$  reste très proche de  $(\omega, q)_\#$ . Dans ce cas, on remarque que (4.40) correspond à l'équation (4.22). L'hypothèse de dissymétrie des gains est formalisée ici par la propriété ISS du sous-système inférieur assurant la commande d'attitude.

La stabilité 0-UGAS est une conséquence de la propriété ISS [Khalil, 2002]. Par conséquent, la loi de commande  $u_T^*$ , donnée par (4.4), ne peut satisfaire la propriété 38 puisque la stabilité qu'elle induit n'est que locale (voir la section 4.2.1). Le théorème 38 n'est donc pas applicable pour ce correcteur. Cependant, la stabilité locale de la structure représentée par la figure 4.8 peut être garantie pour cette loi. Les travaux publiés dans [Vidyasagar, 1980] sur les cascades de systèmes ULAS prouve le résultat suivant, pouvant être conçu comme un corollaire du théorème 38.

**Corollaire 5.** La loi (4.4) et (4.40) est une solution locale au problème 11, c'est-à-dire que  $\#$  est un équilibre ULAS en boucle fermée.

### 4.4.3 Résultats de simulation

Dans cette sous-section, la loi de commande  $u_T^*$  considérée est donnée par (4.4) avec les paramètres suivants :

$$G_p = \begin{bmatrix} 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,80 & 0 \\ 0 & 0 & 0,40 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad G_r = \begin{bmatrix} 0,180 & 0 & 0 \\ 0 & 0,165 & 0 \\ 0 & 0 & 0,075 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 7,0 \cdot 10^{-4} \quad (4.41)$$

et vérifiant la condition donnée par le lemme 32. On précise immédiatement que ces paramètres sont choisis de manière à rendre les performances de cette loi volontairement médiocre afin de mieux visualiser les phénomènes de convergence.

**Stabilité du système asservi** En premier lieu, on montre que cette structure de commande est capable de stabiliser le système malgré les approximations du champ. Pour ce faire, on soumet le modèle du satellite aux conditions initiales suivantes :

$$\omega(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q(0) = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,05 \\ 0,02 \\ 0,99 \end{bmatrix}, \quad h_w(0) = \begin{bmatrix} 90 \\ 72 \\ 78 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (4.42)$$

dans un environnement non-perturbé,  $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$ . On précise que les angles de Cardan du dépointage initial sont :  $\phi = 11,6^\circ$ ,  $\theta = 5,5^\circ$  et  $\psi = 2,7^\circ$ . Les simulations sont effectuées avec le champ périodique  $B_P^{[N]}(t)$  puis l'IGRF.

En premier lieu, on utilise le gain scalaire constant  $k_m = 0,01$  pour asservir le moment cinétique total. Les figures 4.9 et 4.10 donnent les chronogrammes des signaux appartenant au premier et au second sous-système, respectivement. La figure 4.9 fournit également l'expression de  $\|C(q)\dot{h}_S^{[I]}\|$  en valeur normale et logarithmique. Selon (4.38), ce terme agit comme un gain perturbateur vis-à-vis de la dynamique du sous-système inférieur. Ces résultats doivent être comparés avec ceux présentés par les figures 4.11 et 4.12 établis dans le même contexte mais avec le gain matriciel périodique  $K_k$ . On fait les remarques suivantes :

- pour les deux correcteurs, chacun des sous-systèmes convergent vers  $\sharp$ , quelle que soit l'expression du champ considérée. Dans le cas de  $K_k$ , la convergence est même plus rapide au début de la simulation avec  $B_P^{[N]}(t)$  qu'avec l'IGRF. Cette observation est un argument en faveur de la robustesse de la structure de contrôle ;
- conformément aux remarques faites précédemment, l'effort de commande lié à  $K_k$  est très inférieur à celui induit par  $k_m$  ;
- par rapport à  $k_m$ , le correcteur  $K_k$  fait converger le moment cinétique total  $h_S^{[I]}$  en un temps similaire mais de façon beaucoup plus régulière puisqu'il n'y a pas de dépassements de la valeur de consigne. Cette caractéristique est très importante puisque la dérivée de  $h_S^{[I]}$  agit directement comme une perturbation sur la dynamique d'attitude. On peut ainsi vérifier que  $\|C(q)\dot{h}_S^{[I]}\|$  est beaucoup plus faible avec  $K_k$  qu'avec  $k_m$ . Cette observation explique que  $\omega$ , les angles de Cardan et  $h_w$  convergent vers  $\sharp$  de façon beaucoup plus régulière lors de l'utilisation du gain périodique.

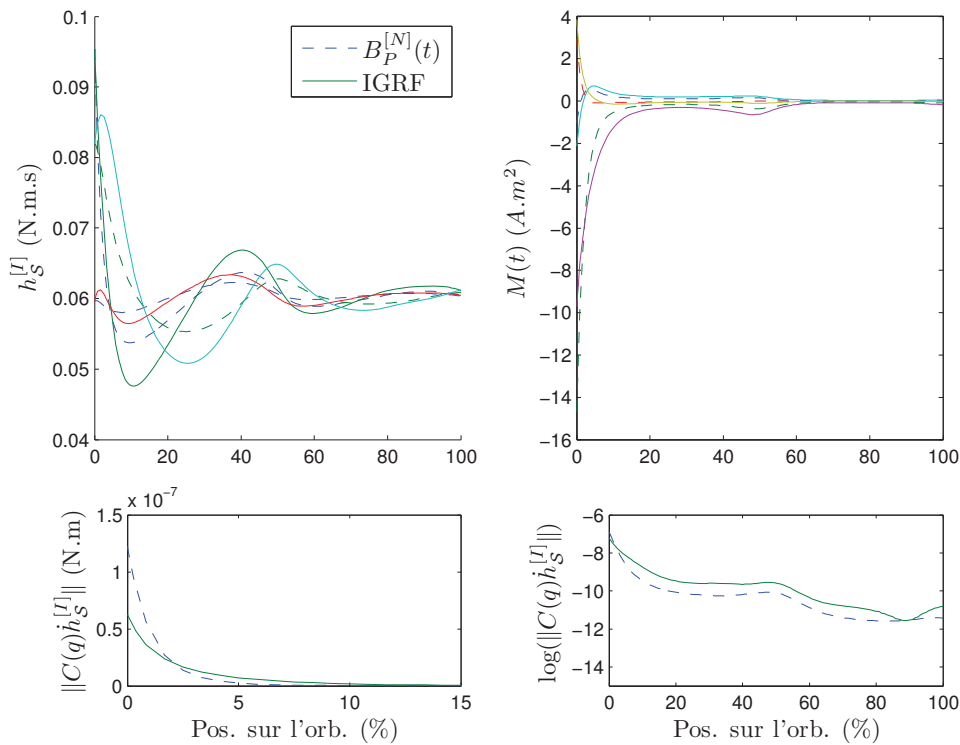


FIGURE 4.9 – Structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $k_m = 0,01$  : signaux du sous-système supérieur

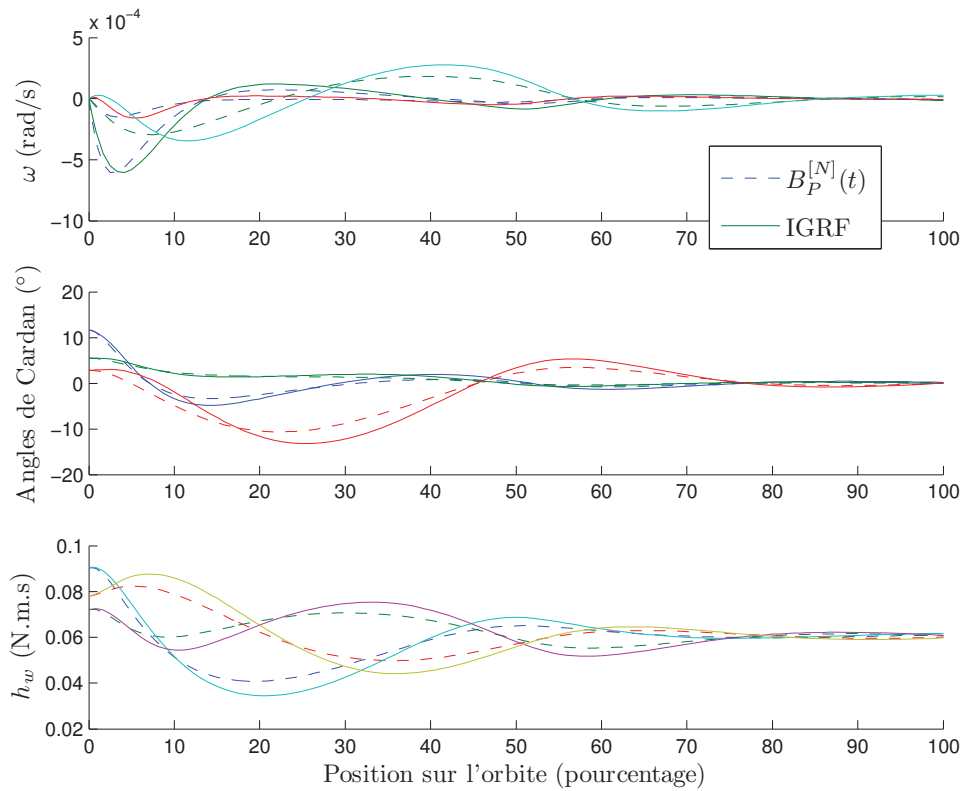


FIGURE 4.10 – Structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $k_m = 0,01$  : signaux du sous-système inférieur

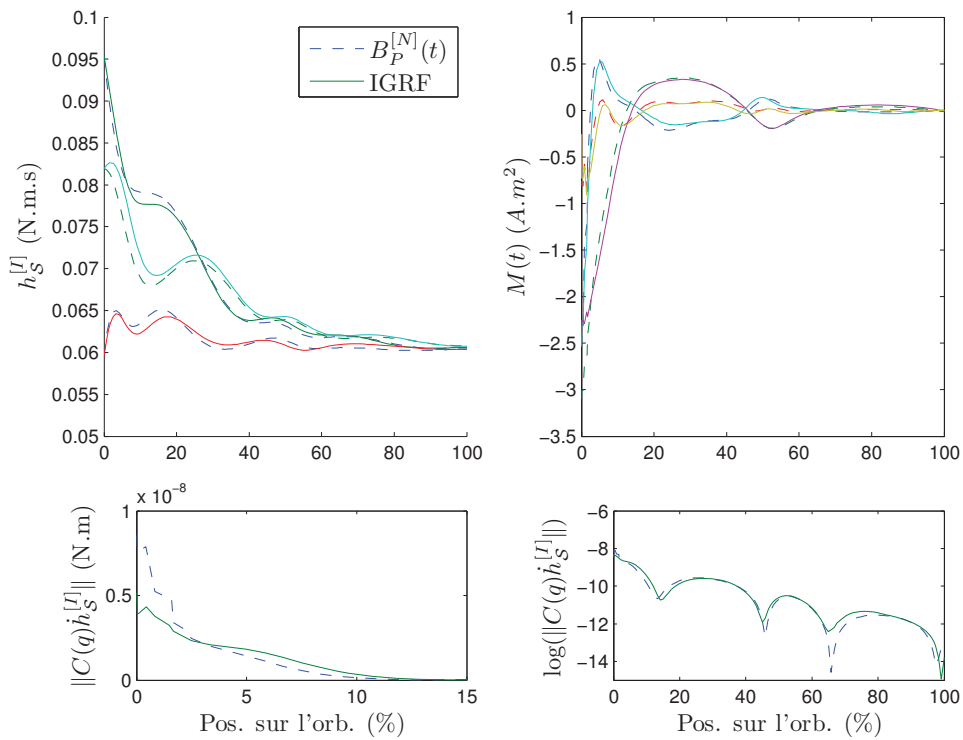


FIGURE 4.11 – Structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $K_k$  : signaux du sous-système supérieur

**Rejet de perturbations** Dans un second temps, on évalue la robustesse de la structure de commande vis-à-vis de la perturbation persistante  $T_{ext}(t)$ . La loi  $u_T^*$  est identique et les simulations sont effectuées en utilisant l'IGRF. En revanche, on « positionne » initialement le système sur la trajectoire désirée, c'est-à-dire

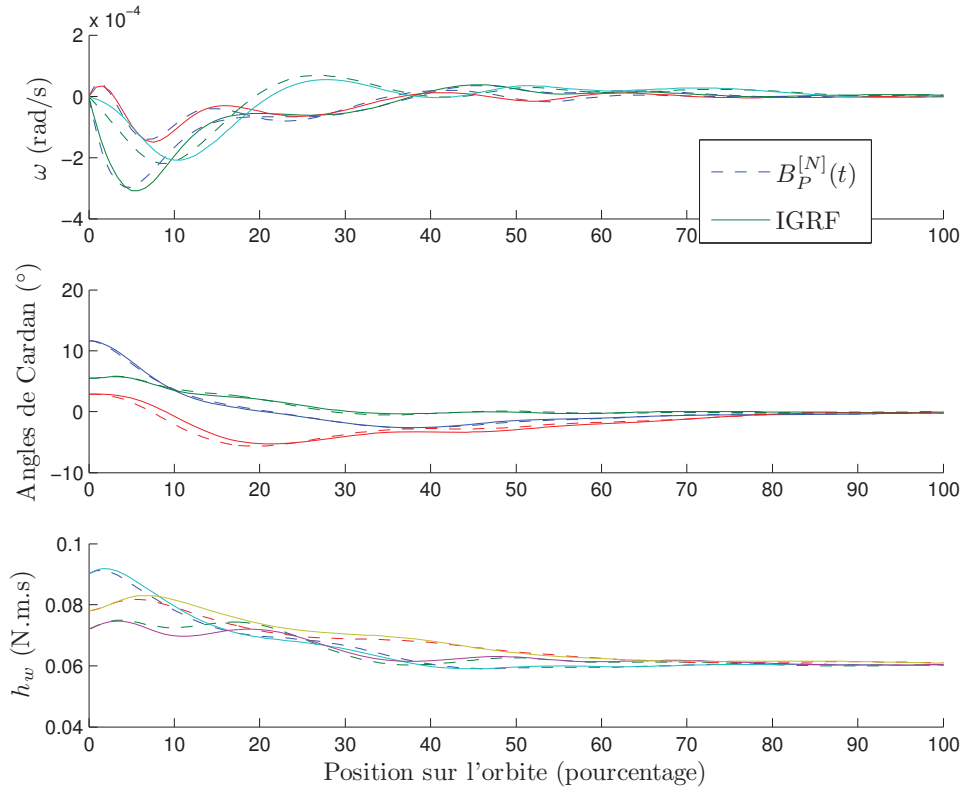


FIGURE 4.12 – Structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $K_k$  : signaux du sous-système inférieur

que  $x(0) = x_{\ddagger}$ .

Les figures 4.13 et 4.14 sont obtenues avec  $k_m = 0,01$  tandis que l'utilisation de  $K_k$  conduit aux figures 4.15 et 4.16. Ces résultats montrent qu'en présence de perturbations, le système conserve sa stabilité et oscille autour de  $\ddagger$ . On rappelle qu'il est possible de choisir une loi  $u_T^*$  aussi agressive que désirée et diminuer ainsi d'autant les variations de l'attitude autour de  $\ddagger$  en régime permanent. La comparaison des deux jeux de figures est à l'avantage de  $K_k$  concernant la norme de  $M(t)$ . Pour les autres grandeurs, les résultats sont comparables.

#### 4.4.4 Critique de l'approche et objectifs des nouvelles structures de contrôle

Malgré les résultats encourageants obtenus dans cette section, le principe à l'origine de cette loi de commande est maintenant questionné. Deux critiques peuvent en effet lui être opposées :

- **dépendance de l'attitude à l'égard de la régulation de  $h_w$**  : par construction, la loi de commande proposée dans cette section est telle que l'attitude du satellite est influencée par la dynamique de régulation du moment cinétique total, utilisée comme grandeur intermédiaire pour la commande de  $h_w$ . La section précédente a montré que l'évolution temporelle de  $h_S^{[I]}$  est fonction (a) du gain de sa loi d'asservissement et (b) de l'expression du champ magnétique. Ces deux éléments modifient donc la dynamique d'attitude du satellite, dont l'asservissement est pourtant l'objectif principal ;
- **cloisonnement du rôle des actionneurs vis-à-vis des objectifs de commande** : la structure de commande assigne à chacun des deux actionneurs une tâche très précise. Les magnéto-coupleurs sont responsables de la régulation de  $h_S^{[I]}$  tandis que les roues à réaction ont en charge la gestion de l'attitude du satellite. Si cette approche a le mérite de la simplicité, elle peut paraître conservatrice dans la mesure où les magnéto-coupleurs pourraient également contribuer au contrôle d'attitude et la vitesse des roues pourrait être modifiée de façon à éviter l'éloignement par rapport à  $\ddagger$ .

Les objectifs pour les nouvelles lois de commande sont donc les suivants :

1. rendre l'asservissement d'attitude indépendant de la régulation de  $h_w$  ;
2. faire participer chacun des actionneurs à la régulation de  $h_w$  ainsi qu'au contrôle d'attitude du satellite.

Idéalement, on cherchera à remplir conjointement l'un et l'autre de ces objectifs.

Malgré un intérêt évident, cette problématique n'a reçu que peu (ou pas) d'attention [Pulecchi, 2008]. La loi de commande (4.23), basée sur les travaux de [Forbes and Damaren, 2010], constitue un premier effort dans

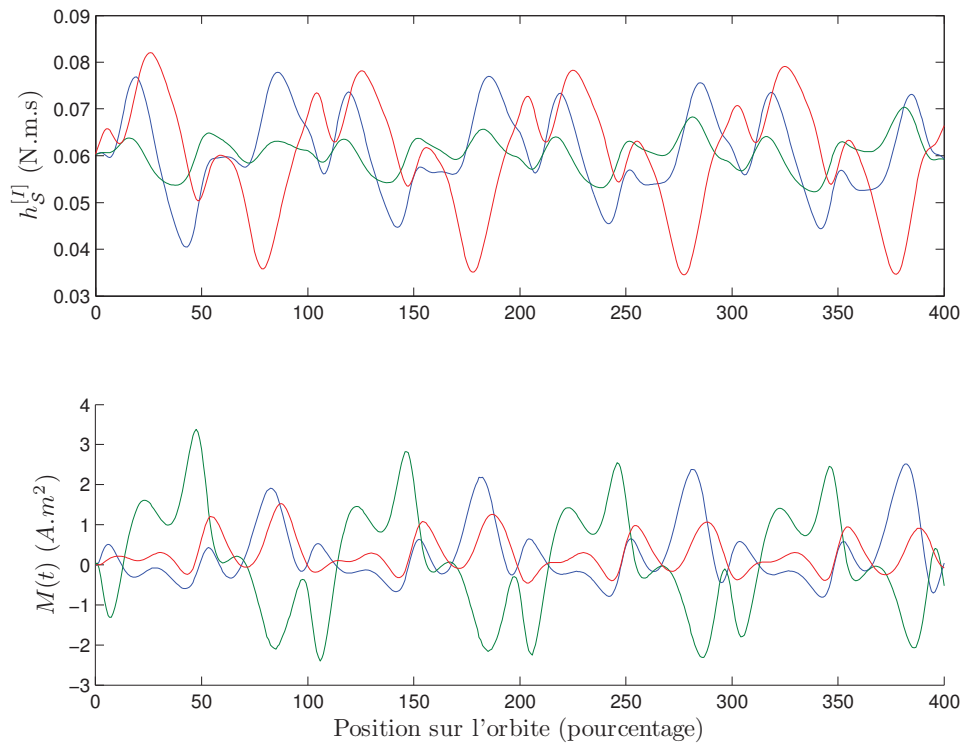


FIGURE 4.13 – Robustesse de la structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $k_m = 0,01$  vis-à-vis de  $T_{ext}(t)$  : signaux du sous-système supérieur

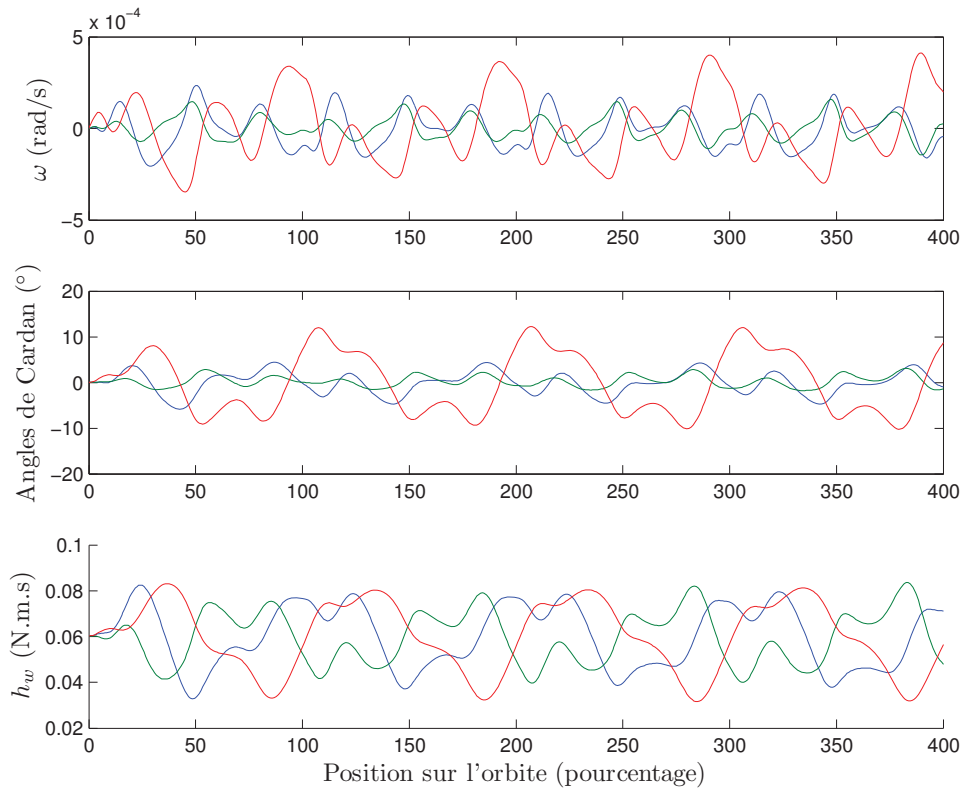


FIGURE 4.14 – Robustesse de la structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $k_m = 0,01$  vis-à-vis de  $T_{ext}(t)$  : signaux du sous-système inférieur

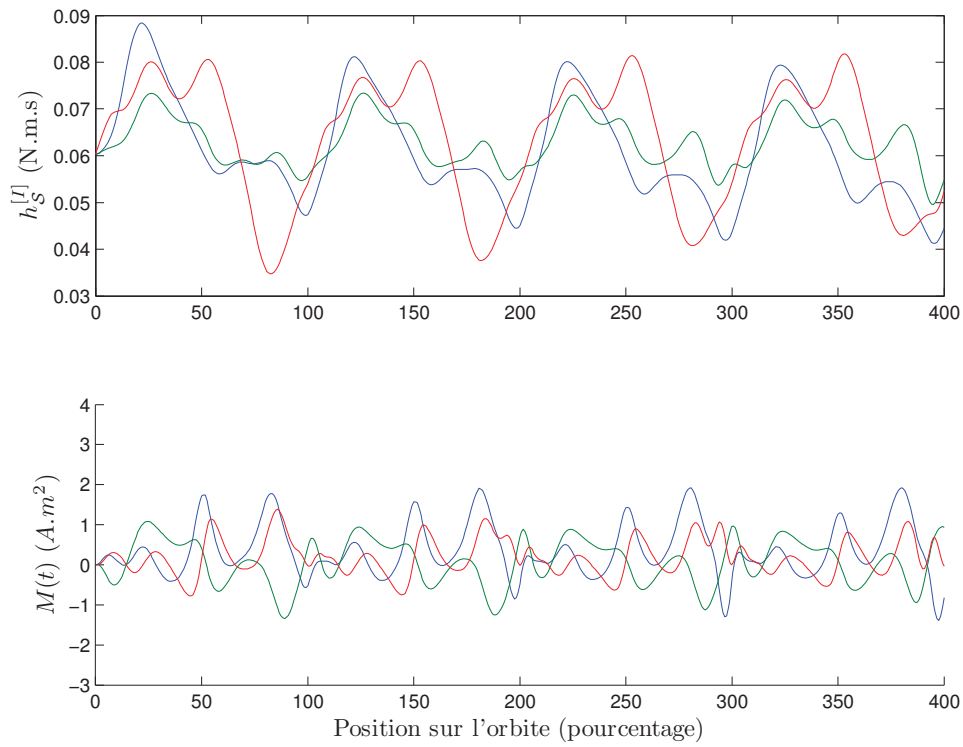


FIGURE 4.15 – Robustesse de la structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $K_k$  vis-à-vis de  $T_{ext}(t)$  : signaux du sous-système supérieur

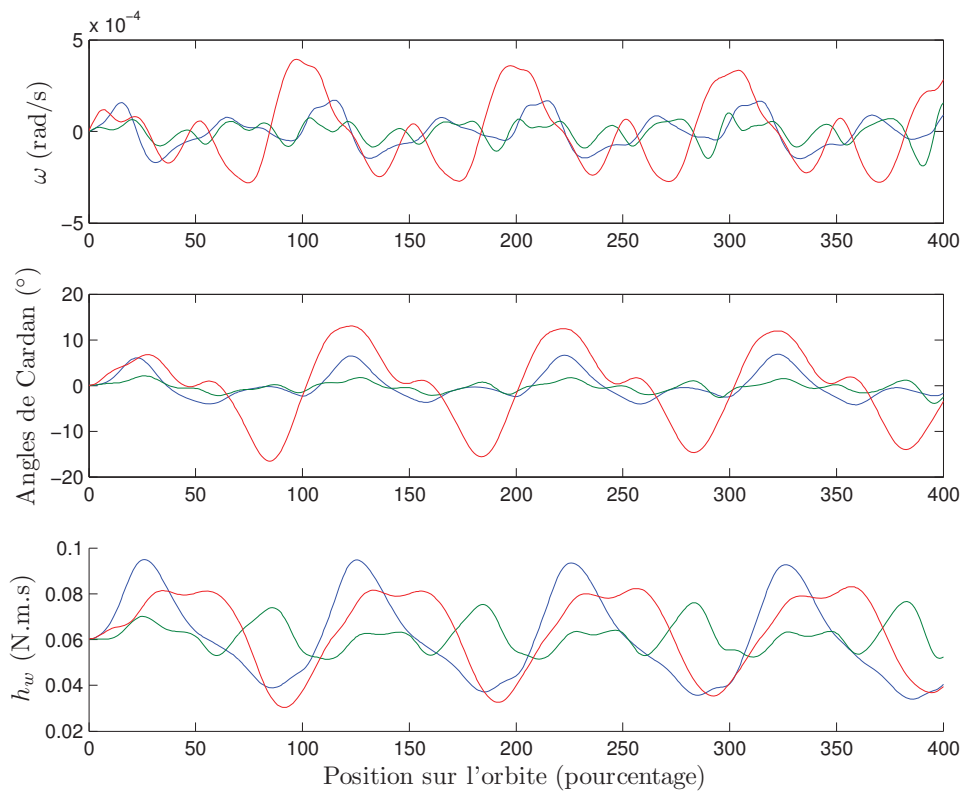


FIGURE 4.16 – Robustesse de la structure de contrôle utilisant  $h_S^{[I]}$  et  $K_k$  vis-à-vis de  $T_{ext}(t)$  : signaux du sous-système inférieur



cette direction, mais elle ne garantit aucunement la convergence de moment cinétique des roues.

Partant de ce constat, les sections suivantes proposent plusieurs nouveaux schémas de commande :

- la section 4.5 utilise le **modèle linéaire périodique** conçu dans le chapitre 3 et issu de l'approximation du modèle complet au voisinage de  $\sharp$ . Un correcteur commandant *conjointement* les roues et les magnétocoupleurs est obtenu par résolution d'un problème  $\mathcal{H}_2$  périodique à partir du modèle linéaire discrétisé. Cette démarche s'efforce de remplir le second objectif de la liste précédente ;
- la section 4.6 met en œuvre une **stratégie d'allocation du couple total** requis pour le contrôle d'attitude. Cette démarche peut être vue comme une adaptation de (4.23) apportant la garantie de la convergence de  $h_w$ . La dernière version de cette solution répond simultanément à chacun des deux objectifs.

## 4.5 Approche par linéarisation

Le système asservi doit s'efforcer de rejoindre la trajectoire  $\sharp$  selon certains critères (de consommation, de vitesse...). Ces spécifications font appel au concept de performance d'asservissement qui est mieux maîtrisé dans le cadre des modèles linéaires.

C'est la raison pour laquelle on met en œuvre dans cette section une approche s'appuyant sur l'approximation linéaire périodique du modèle au voisinage de  $\sharp$  et proposée dans le chapitre précédent. Les méthodes de synthèse  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  permettent alors de concevoir un correcteur minimisant un critère de performance et utilisant conjointement les deux actionneurs.

### 4.5.1 Construction du modèle de synthèse

**Rappel de l'expression du modèle** Dans le cas du pointage inertiel ( $\omega_{R/I}(t) = \mathbf{0}$ ) et en l'absence de perturbations ( $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$ ), le modèle linéaire proposé par le théorème 33 au chapitre précédent s'exprime comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\omega} \\ \Delta\dot{\varepsilon} \\ \Delta\dot{h}_s \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\varepsilon \\ \Delta h_s \end{bmatrix} + B_u(t) \begin{bmatrix} \Delta T_s \\ \Delta M \end{bmatrix} \quad (4.43a)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} J^{-1}h_{\sharp}^{\times} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad B_u(t) = \begin{bmatrix} -J^{-1} & -J^{-1}B_{\circ}^{\times}(t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.43b)$$

L'expression de  $B_{\circ}(t)$  retenue correspond à l'approximation périodique  $B_p^{[N]}(t)$  du champ géomagnétique dans le référentiel inertiel local (voir le chapitre 3).

Dans ce contexte très particulier, la trajectoire  $\sharp$  peut être un équilibre stable en boucle fermée puisque  $T_a(t)$ , donné par (3.65), est nul. D'après la discussion du chapitre précédent, cette situation contraste avec le cas général.

**Addition de canaux de performance** Afin de traduire les objectifs de commande, le modèle est enrichi de canaux de performance :

$$\Sigma(t) : \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B_u(t) \\ C & D & D_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ w(t) \\ \Delta u(t) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

avec

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{1}_3 \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \quad C = [\mathbf{1}_3 \quad k_{\varepsilon}\mathbf{1}_3 \quad k_h\mathbf{1}_3], \quad D_u = [\mathbf{0}_3 \quad \mathbf{0}_3]$$

où  $k_{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-3}$  et  $k_h = 1 \cdot 10^{-4}$ . Le but de l'asservissement est assimilé à la minimisation de la norme  $\mathcal{H}_2$  du modèle  $\Sigma(t)$  en boucle fermée. Cette grandeur peut être interprétée<sup>5</sup> comme la norme  $\mathcal{L}_2$  de la sortie  $z(t) = \Delta\omega(t) + k_{\varepsilon}\Delta\varepsilon(t) + k_h\Delta h_w(t)$  dans le cas d'une impulsion sur chacune des entrées de  $w(t)$ . Physiquement, ceci correspond à minimiser la distance (au sens de la norme  $\mathcal{L}_2$  et pondérée différemment selon les états) entre  $x(t)$  et  $x_{\sharp}$  dans le cas d'une condition initiale non nulle sur la vitesse du satellite (puisque  $\dot{\varepsilon}(0) \approx \omega/2$  correspond à l'impulsion  $w(t)$ ). Cet objectif traduit bien l'asservissement de l'attitude et du moment cinétique des roues.

5. Pour une définition formelle de la norme  $\mathcal{H}_2$  d'un modèle périodique à temps continu, on pourra consulter [Colaneri, 2005].

**Discrétisation et influence de la période d'échantillonnage** Comme lors de la discrétisation de l'intégrateur, l'ajout d'un bloqueur d'ordre 0 de période  $T_s = T_0/(2N)$  à l'entrée du système (4.43) conduit au modèle suivant à temps-discret :

$$\Sigma_k : \begin{bmatrix} \Delta x_{Nq+k+1} \\ z_{Nq+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k & B_{uk} \\ C_k & D_k & D_{uk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{Nq+k+1} \\ w_{Nq+k} \\ \Delta u_{Nq+k} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

avec

$$\begin{aligned} A_k &= \exp(AT_s), & B_k &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \exp(A((k+1)T_s - \tau))d\tau B, & B_{uk} &= \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} \exp(A((k+1)T_s - \tau))B_u(\tau)d\tau \\ C_k &= C, & D_k &= D, & D_{uk} &= D \end{aligned}$$

Comme précédemment, on considère que  $B_o(t)$  est constant pendant une période d'échantillonnage.

La difficulté du choix de la période d'échantillonnage  $T_s$  a été abordée dans la section 4.4.1. Dans le contexte présent, l'instabilité de  $\sharp$  en boucle fermée rencontrée dans cas général, représente un obstacle supplémentaire. En effet, en raison de ce phénomène, la loi de commande doit corriger en permanence la trajectoire du système pour rester au voisinage de  $\sharp$  mais sans jamais pouvoir l'atteindre. La fréquence  $1/T_s$  d'actualisation de l'entrée de commande doit donc être suffisamment importante pour éviter l'éloignement du système de  $\sharp$  et assurer la validité de (4.43). La figure 4.17 illustre ce phénomène. Une trajectoire assimilable à  $\sharp$  y est représentée en pointillés et son voisinage est délimité par un tube. Deux trajectoires du système en boucle fermée se superposent à cette représentation. La première, en trait continu, est issue d'un asservissement continu tandis que la seconde, linéaire par morceaux, montre une trajectoire provenant d'un correcteur à temps discret. On voit ici que la nature de la seconde l'empêche de se maintenir dans le tube.

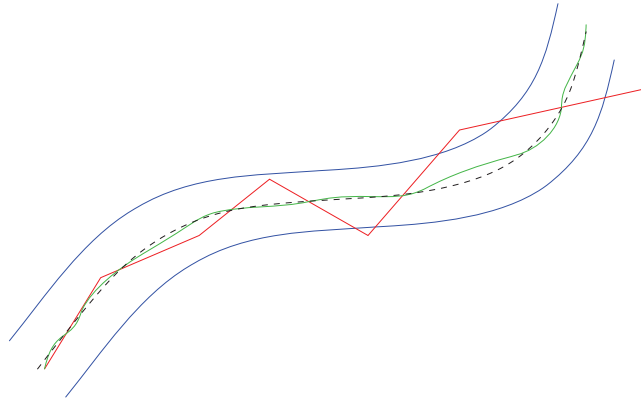


FIGURE 4.17 – Eloignement de la trajectoire de linéarisation due à la discrétisation

Ces remarques mettent en lumière la difficulté du choix de  $T_s$  résultant d'un compromis délicat entre des exigences contradictoires. La suite de cette section illustre cette discussion par des résultats de simulation.

### 4.5.2 Synthèse du correcteur périodique à temps-discret

En l'absence d'incertitudes, on considère le théorème de synthèse suivant. On peut montrer que ce dernier est équivalent au théorème 26 du chapitre 2, dans le cas où le modèle est parfaitement connu et lorsque le correcteur est sans mémoire.

**Théorème 39** ([Farges, 2006]). *Soit le problème SDP suivant, pour lequel  $W_k \in \mathbb{S}_+^9$ ,  $Y_k \in \mathbb{R}^{6 \times 9}$  et  $Z_k \in \mathbb{S}^3$  :*

$$\gamma = \min_{W_k, Y_k, Z_k} \text{trace} \sum_{k=1}^N Z_k$$

sous les contraintes suivantes, pour tout  $k \in \{1 \dots N\}$ ,

$$\begin{bmatrix} -W_k + B_k B_k^T & A_k W_{k-1} + B_{uk} Y_k \\ \star & -W_{k-1} \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{bmatrix} -Z_k + D_k D_k^T & C_k W_{k-1} + D_{uk} Y_k \\ \star & -W_{k-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.46)$$

Le correcteur  $N$ -périodique  $u_{Nq+k} = K_k x_{Nq+k}$ , avec  $K_k = Y_k W_k^{-1}$ , stabilise le modèle (4.45) tout en minimisant  $\sqrt{\gamma}$ , le coût  $\mathcal{H}_2$  de la boucle fermée résultante.

Ce problème SDP comporte  $105N$  variables et  $39N$  lignes. On remarquera que le théorème 39 propose un grand nombre de LMIs de petite taille, contrairement aux théorèmes du chapitre 2 qui utilisent un petit nombre de grandes LMIs. Numériquement, il semble que le premier type de problème soit plus facile à résoudre que le second.

On fait donc usage du théorème 39 pour obtenir deux correcteurs correspondant à deux périodes d'échantillonnage différentes caractérisées par  $N = 20$  et  $N = 30$ . Les dimensions des conditions (4.46) sont alors de 2100 variables et 780 lignes dans le premier cas et de 3150 variables et 1170 lignes dans le second. En raison de la taille des matrices, les valeurs numériques du correcteurs ne sont pas données ici.

### 4.5.3 Résultats de simulations

Tous les résultats présentés sont issus de la boucle fermée du contrôleur périodique à temps discret et du modèle non-linéaire donné par le théorème 32. Le quaternion est converti sous la forme d'angles de Cardan. On analyse successivement l'influence de la période d'échantillonnage du correcteur, du modèle du champ utilisé en simulation et des perturbations extérieures  $T_{ext}(t)$ . Les états initiaux des simulations sont définis de la façon suivante :

$$\omega(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}, \quad \varepsilon(0) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -1,0 \\ 2,0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad h_w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On précise finalement que tous les éléments de  $h_{\#}$  sont égaux à  $60,3 \cdot 10^{-3}$  N.m.s.

La figure 4.18 présente les résultats obtenus pour  $N = 20$  et  $N = 30$ , correspondant à des périodes d'échantillonnages  $T_s$  de 147 sec. et 98 sec., respectivement. L'approximation périodique  $B_p^{[N]}(t)$  du champ est utilisée pour cette simulation et la perturbation est nulle. Dans ce contexte, on constate que si les deux lois de commande stabilisent le modèle non-linéaire, la diminution de  $T_s$  (équivalente à l'augmentation de  $N$ ) améliore les résultats en terme de rapidité de convergence du système vers  $\#$ .

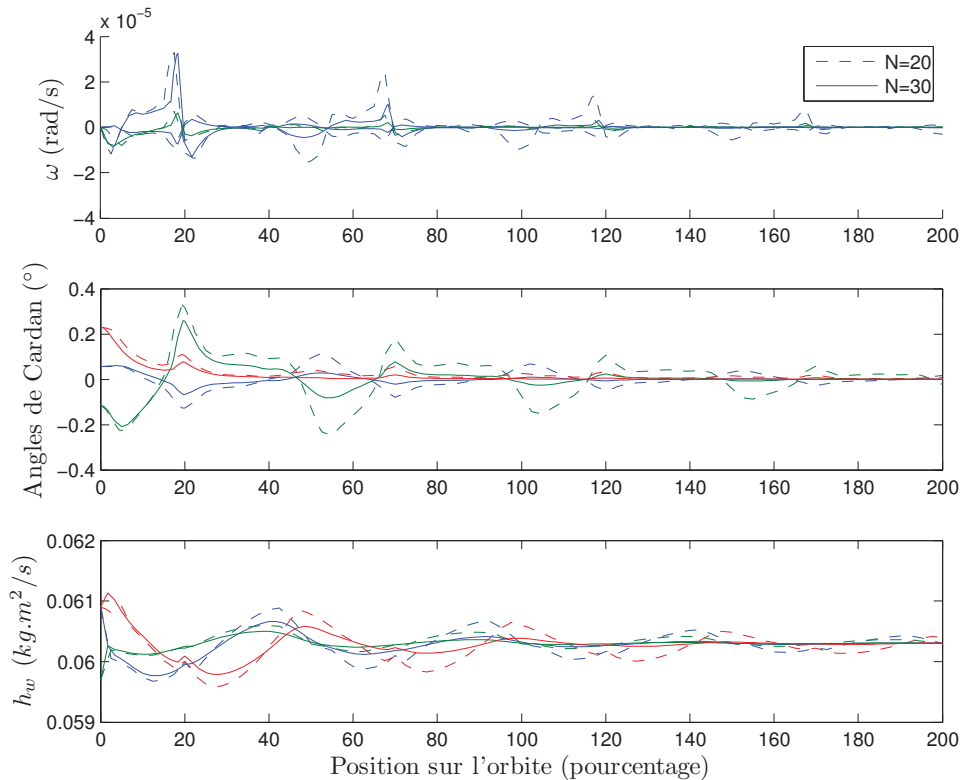


FIGURE 4.18 – Résultats de l'approche locale avec  $B_p^{[N]}(t)$  et  $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$

Le champ  $B_p^{[N]}(t)$  utilisé à l'étape de synthèse n'est qu'une approximation périodique des résultats fournis par l'IGRF. En utilisant directement ce dernier modèle du champ, les chronogrammes donnés par la figure 4.19 poursuivent donc la démarche de validation du correcteur. Le temps de convergence est plus long que précédemment mais les propriétés naturelles de robustesse du correcteur correspondant à  $N = 30$  lui permettent toujours

de stabiliser le modèle. Seuls les chronogrammes obtenus avec cette loi de commande sont présentés puisque le correcteur correspondant à  $N = 20$  fait diverger le modèle. Finalement, la figure 4.20 permet de vérifier que la stabilité est préservée en présence de la perturbations  $T_{ext}(t)$ . On remarquera toutefois que le modèle s'éloigne très fortement de la trajectoire  $\#$  pendant le transitoire.

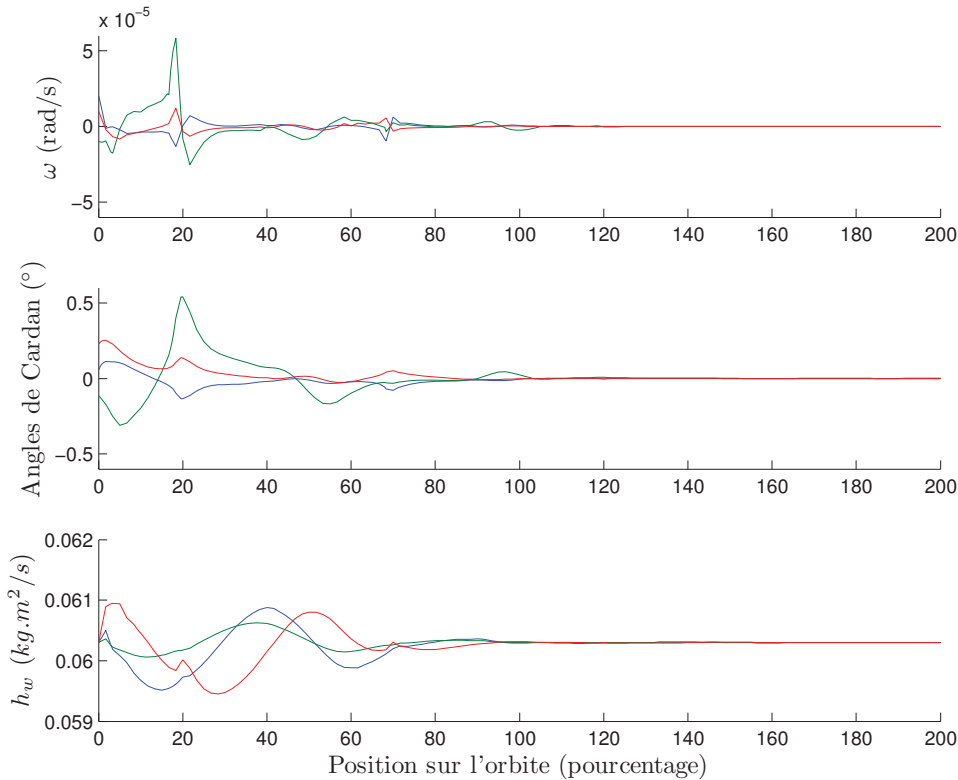


FIGURE 4.19 – Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et  $T_{ext}(t) = \mathbf{0}$

#### 4.5.4 Discussion sur la démarche

Les figures précédentes montrent que l'approche menée dans cette section peut conduire à un correcteur stabilisant le modèle continu non-linéaire. Même si ce dernier est encore largement perfectible, la technique employée paraît problématique. Elle semble en effet conduire à des correcteurs très sensibles à l'égard des conditions initiales et des incertitudes du modèle. Des simulations complémentaires montrent ainsi qu'un éloignement minime de  $x_0$  par rapport à  $x_{\#}$  peut conduire à la divergence du modèle. De plus, le modèle de synthèse est construit à partir de  $B_o(t)$ , l'expression de  $B(t)$  sur  $\#$ . Or, les résultats de la figure 4.20 montrent que si le modèle du champ en simulation n'est pas exactement  $B_o(t)$ , le système se rapproche dangereusement de l'instabilité. Ces remarques indiquent que le correcteur requiert une très grande proximité entre le système en boucle fermée et  $\#$ . Le bassin d'attraction du système asservi est donc très réduit. Il est donc peu robuste de ce point de vue.

Pour accroître la robustesse du contrôleur, on propose deux directions :

- **diminuer la période d'échantillonnage** : les résultats de la figure 4.18 ont montré que la diminution de  $T_s$  (équivalent à l'augmentation de  $N$ ) améliore la rapidité de convergence du système vers  $\#$ . On peut légitimement penser que cette diminution peut aussi avoir des effets bénéfiques du point de vue de la robustesse ;
- **utilisation de techniques de synthèse robuste** : l'éloignement du modèle non-linéaire continu avec la trajectoire  $\#$  rend le modèle linéaire à temps discret imprécis. Cette remarque motive la conception d'un correcteur robuste, tolérant aux incertitudes du modèle.

Chacune de ces propositions induits inévitablement un accroissement du volume de calcul nécessaire pour la synthèse du correcteur. Or, cette section a montré que, dans l'état actuel des programmes d'optimisation LMI, ce paramètre était déjà critique pour le modèle nominal et  $N = 30$ .

Les remarques faites au cours du chapitre 2 peuvent laisser penser que l'usage de correcteurs à mémoire pourrait permettre de surmonter cet obstacle. En effet, ces lois de commande sont capables d'accroître la robustesse de la boucle fermée sans augmenter significativement l'effort de calcul nécessaire à leur synthèse.

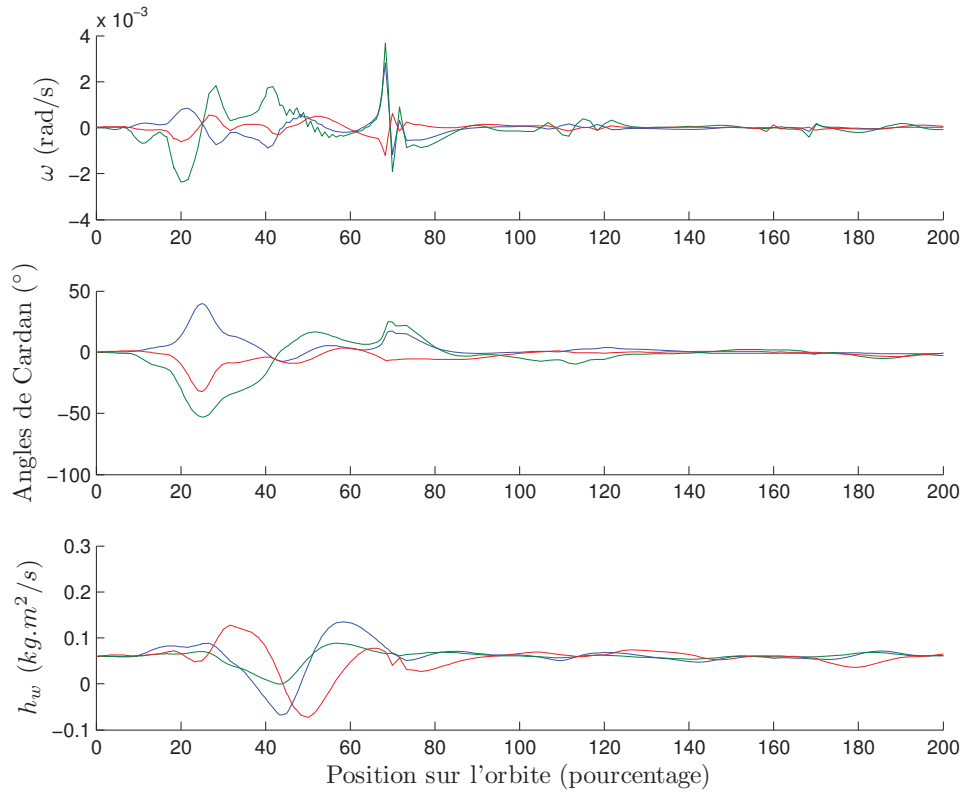


FIGURE 4.20 – Résultats de l'approche locale avec le modèle de l'IGRF et avec perturbations

Toutefois, du point de vue du modèle de synthèse, l'éloignement du modèle  $\sharp$  se traduit principalement par une imprécision dans la valeur de  $b_o(t)$ . La section 4.4.1 a montré que les incertitudes sur ce terme se modélisent naturellement en ajoutant un terme  $\Delta b_o(t)$  dont la norme est bornée<sup>6</sup>. A contrario, les résultats des chapitres 1 et 2 portent sur les modèles soumis à des incertitudes polytopiques *invariantes* dans le temps. C'est la raison pour laquelle la section 4.4.1 s'est efforcée de tenir compte de  $\Delta b_o(t)$  par le biais des canaux de performance. Dans ce contexte, la mémoire du correcteur n'est d'aucune utilité puisque les incertitudes sont retirées du modèle. Ceci explique la structure du correcteur périodique  $K_k$ . Les outils développés dans la première partie de cette thèse sont donc inappropriés à ce problème particulier. On précise finalement que la solution utilisant les canaux de performance est prohibée ici puisqu'elle augmente significativement l'effort de calcul.

Cette discussion suggère d'appliquer à ce problème des théorèmes de synthèse capable de tenir compte d'incertitudes bornées en norme dans le modèle. Les recherches futures s'orienteront dans cette direction. La section suivante montre cependant qu'il est possible de contourner cette difficulté en employant une stratégie différente.

**Remarque.** *Les méthodes des chapitres 1 et 2 s'appliquent à des modèles à temps discret. Du point de vue du correcteur, les incertitudes sont donc invariantes pendant une période d'échantillonnage. Dans ce contexte, il est alors possible de traiter les incertitudes variantes dans le temps et bornées en norme grâce à des techniques conçues pour des modèles soumis à des incertitudes polytopiques invariantes dans le temps. Cependant, le nombre de sommets du polytope à prendre en compte est exponentiel en  $N$ , la période du modèle à temps discret. Pour le problème traité ici, cette approche est donc inapplicable.*  $\circ$

## 4.6 Stratégie d'allocation du couple total

Cette proximité du système avec  $\sharp$  est une contrainte liée à l'utilisation d'un modèle de synthèse issu de la linéarisation autour de cette trajectoire. Pour contourner cette difficulté, la section à venir propose une nouvelle structure de commande, basée directement sur le modèle non-linéaire. On montre que cette approche met en

6. Dans ce contexte, la synthèse robuste doit être comprise comme le processus conduisant à un correcteur garantissant que le système asservi résultant satisfait certaines propriétés (dont la stabilité) quel que soit  $\Delta b_o(t)$  satisfaisant  $|\Delta b_o(t)| \leq \gamma$ .

place un nouveau cadre dans lequel les méthodes de synthèse LMI sont également applicables mais cette fois sans requérir de linéarisation préalable.

#### 4.6.1 Nouvelle structure de contrôle et preuve de stabilité

Le schéma d'asservissement présenté dans cette section trouve sa justification dans les défauts de la méthode présentée dans la section 4.4 et basée sur l'utilisation de  $h_S^{[I]}$ . On rappelle que dans le cadre de cette stratégie,  $C(q)\dot{h}_S^{[I]}$  joue le rôle d'un couple perturbateur vis-à-vis de la dynamique d'attitude. Bien que la décroissance de ce terme permette de conclure à la stabilité, le régime transitoire du sous-système supérieur ralentit la convergence de la dynamique d'attitude correspondant au sous-système inférieur (voir la figure 4.8).

Pour donner la priorité à l'asservissement d'attitude par rapport à la régulation du moment cinétique total, on propose dans cette section une stratégie d'allocation du couple total. Comme expliqué précédemment, ce type d'approche garantit qu'à chaque instant, la somme des couples délivrés par les actionneurs est égale à la valeur instantanée d'une loi de commande  $u_T^*$  stabilisant l'attitude du satellite. L'asservissement d'attitude est donc totalement indépendant de l'autre objectif de commande consistant à réguler  $h_w$ .

Par définition, on a  $u_T = u_T^*$  conduisant, grâce à (4.19), à

$$u_T^*(t, \omega, q) = -T_w - \omega^\times h_w - (C(q)B_o(t))^\times M$$

En remplaçant  $T_w$  par  $\dot{h}_w$ , on obtient alors l'équation régissant la dynamique de  $h_w$  :

$$\dot{h}_w = -\omega^\times h_w - (C(q)B_o(t))^\times M - u_T^*(t, \omega, q) \quad (4.47)$$

Cette équation décrit le sous-système inférieur d'une nouvelle structure en cascade représentée par la figure 4.21. Le sous-système supérieur est formé par la dynamique d'attitude donnée par (4.2) commandé par un choix judicieux de la loi  $u_T = u_T^*(t, \omega, q)$ . En inversant l'ordre des sous-systèmes dans la structure en cascade, cette démarche permet de mettre en conformité la vitesse de convergence des sous-systèmes avec la hiérarchie des objectifs de commande.

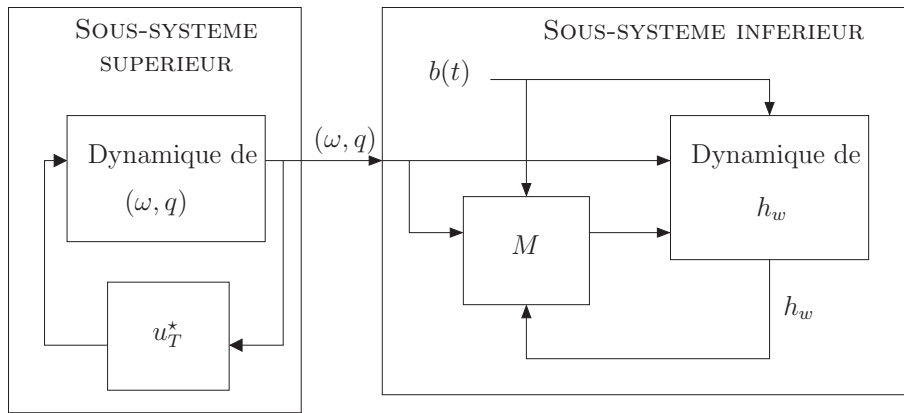


FIGURE 4.21 – Schéma de la stratégie de commande par allocation du couple total

En s'appuyant à nouveau sur le résultat du lemme 34, le théorème suivant donne une autre solution au problème 11.

**Théorème 40.** *Si l'hypothèse 7 est satisfaite, la loi de commande suivante résout le problème 11 :*

$$M(t, x) = -k_m \frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} (h_w - h_w^*) \quad (4.48a)$$

$$T_w(t, x) = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w - B^\times(t)M(t, x) \quad (4.48b)$$

où  $k_m$  est un scalaire strictement positif quelconque. Cette propriété est vérifiée pour toute loi  $u_T^*$  solution du problème 7.

*Démonstration. Stabilité de l'interconnexion.* La preuve de ce théorème s'appuie sur le résultat standard des interconnexions non-linéaires suivant : le système complet est UGAS si (a) le sous-système supérieur est UGAS et ULES, (b) le sous-système inférieur est 0-UGAS et 0-ULES et (c) les trajectoires du système sont uniformément et globalement bornées (UGB) [Sontag, 1989].

*Sous-système supérieur.* La substitution de (4.48b) dans (4.19) conduit à  $u_T = u_T^*$ . Par hypothèse, la loi de commande  $u_T^*(\omega, q)$  assure donc que  $(\omega, q)_\#$  est un équilibre UGAS et ULES de la dynamique de  $(\omega, q)$ .

*Sous-système inférieur.* En remplaçant dans (4.47)  $M(t, x)$  par son expression donnée par (4.48a), on obtient

$$\dot{h}_w = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w + k_m(C(q)b_o(t))^\times(C(q)b_o(t))^\times(h_w - h_\#) \quad (4.49)$$

La substitution dans cette expression des signaux  $(\omega, q)$  entrant dans le sous-système inférieur par leur valeur asymptotique  $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$  conduit à

$$\dot{h}_w = k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) (h_w - h_\#)$$

puisque  $u_T^*(\omega_\#, q_\#) = \mathbf{0}$ , d'après (4.2a). Cette relation correspond à (4.26) avec  $\alpha = h_w - h_\#$ . Le lemme 34 garantit donc que  $h_\#$  est un équilibre 0-UGES de la dynamique de  $h_w$  pour tout  $k_m > 0$  puisque l'hypothèse 7 est satisfaite.

*Trajectoires du système complet.* On prouve finalement que les trajectoires du systèmes sont UGB, en remarquant tout d'abord que les trajectoires  $(\omega, q)$  sont UGB puisque le sous-système supérieur est GAS. Pour montrer que  $h_w$  possède également cette propriété, (4.49) est d'abord réécrite sous la forme suivante

$$\dot{\tilde{h}}_w = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times(\tilde{h}_w + h_\#) + k_m b_o^\times(t) b_o^\times(t) \tilde{h}_w \quad \text{avec} \quad \tilde{h}_w = h_w - h_\#$$

On introduit maintenant la fonction de Lyapunov  $H = \tilde{h}_w^T \tilde{h}_w / 2$  dont la dérivé temporelle est donnée par

$$\dot{H} = -\tilde{h}_w^T (u_T^*(\omega, q) + \omega^\times h_\#) + k_m \tilde{h}_w^T b_o^\times(t) b_o^\times(t) \tilde{h}_w \quad (4.50)$$

puisque  $\tilde{h}_w^T \omega^\times \tilde{h}_w = -\tilde{h}_w^T \tilde{h}_w^\times \omega = \mathbf{0}$ . En remarquant que  $-b_o^\times(t) b_o^\times(t) = (b_o^\times(t))^T b_o^\times(t) \succeq \mathbf{0}$  quel que soit  $t$ , on obtient alors la borne supérieure suivante de  $\dot{H}$  :

$$\dot{H} \leq |\tilde{h}_w| \rho(t) \quad \text{avec} \quad \rho(t) = |u_T^*(\omega, q)| + |\omega^\times h_\#| \geq 0$$

Grâce à l'inégalité  $y < 1 + y^2$  valable pour tout  $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , on ré-introduit  $H$  dans cette expression

$$\dot{H} \leq 2\rho(t)H + \rho(t)$$

de façon à faire apparaître l'inégalité suivante :

$$H(t) \leq H(0) + \int_0^t (2\rho(s)H(s) + \rho(s)) ds$$

Des qualités de GAS et LES du sous-système supérieur, on déduit que, pour tout  $r > 0$ , il existe  $K_r$  et  $\lambda_r$  positifs tels que  $\rho(t) \leq K_r \exp(-\lambda_r t)$ . Cette remarque prouve que l'intégrale de  $\rho(t)$  est bornée :

$$\int_0^t \rho(s) ds \leq \frac{K_r}{\lambda_r} (1 - \exp(-\lambda_r t)) \leq \frac{K_r}{\lambda_r}$$

L'inégalité de Gronwall-Bellman [Khalil, 2002, Lem. A.1] permet alors d'affirmer que

$$H(t) \leq H(0) + \frac{K_r}{\lambda_r} + \int_0^t 2\rho(s) ds \leq H(0) + 3 \frac{K_r}{\lambda_r}$$

Cette relation donne une borne supérieure constante de  $H(t)$  prouvant ainsi que cette fonction, et donc  $h_w$ , est UGB puisque  $H(t) \geq 0$ .  $\square$

Dans l'hypothèse où  $B_o(t)$  est mesuré (et non pas calculé à bord à partir d'un modèle), la loi du théorème 40 est totalement indépendante des paramètres du modèle de synthèse. Il s'agit d'une différence significative par rapport au correcteur donné par le théorème 38 pour lequel l'expression de  $J$  est requise. Les conséquences de cette remarque sont très importantes puisqu'elle permet d'affirmer que la même loi (4.48) associée au contrôleur  $u_T$  indépendant de  $J$  (le correcteur (4.4) en est un exemple) stabilise n'importe quel satellite sur n'importe quelle orbite vérifiant l'hypothèse 7. Il s'agit d'un argument majeur en faveur de la robustesse de cette approche.



### 4.6.2 Utilisation d'un gain périodique

La preuve du théorème 40 montre que la conception du correcteur associé au sous-système inférieur s'appuie sur la version asymptotique de l'équation (4.47). Cette dernière décrit alors la dynamique d'un intégrateur simple soumis à l'action des magnéto-coupleurs sur la trajectoire  $\sharp$ . Il s'agit précisément du problème auquel la section 4.4.1 s'est intéressée. La solution du gain scalaire  $k_m$  a été retenue par le théorème 40 afin de bénéficier d'une preuve de convergence rigoureuse en temps continu. Toutefois, les simulations précédentes ont montré que le correcteur périodique à temps discret  $K_k$  pouvait améliorer les performances de l'asservissement de l'intégrateur simple. Dans ce contexte, il semble donc légitime d'espérer accroître la qualité de la régulation de  $h_w$  via ce même correcteur périodique. La loi de commande (4.48) est donc modifiée en conséquence :

$$M(t, x) = -\frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} K_k (h_w - h_\sharp)_k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} \text{ satisfaisant } kT_s \leq t < (k+1)T_s \quad (4.51a)$$

$$T_w(t, x) = -u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w - B^\times(t)M(t, x) \quad (4.51b)$$

### 4.6.3 Participation active des magnéto-coupleurs au contrôle d'attitude

On montre maintenant que cette structure de commande par allocation permet de remettre en cause la dissociation entre les tâches d'amortissement de la vitesse des roues et de commande 3-axes, tout en préservant le cadre de la stabilité globale.

La philosophie de la loi (4.48) peut être interprétée de la façon suivante :  $M$  génère un couple assurant la régulation de  $h_w$  tandis que  $T_w$  complète l'effort de commande de manière à ce que ce dernier soit égal à  $u_T^* + \omega^\times h_w$  à tout instant. Le théorème 40 assure que cette répartition garantit la convergence de  $x$  vers  $\sharp$ . Or les magnéto-coupleurs pourraient également prendre en charge une partie de  $u_T^* + \omega^\times h_w$  de façon à décharger partiellement les roues de cette tâche. Il semble raisonnable d'espérer que  $h_w = \int T_w$  s'éloignera alors moins facilement de  $h_\sharp$ . La loi suivante découle de cette remarque, en tenant compte des limitations de commandabilité des magnéto-coupleurs.

$$M(t, x) = -\frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} (k_m(h_w - h_\sharp) - u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w) \quad (4.52a)$$

$$T_w(t, x) = -b(t)b^T(t)(u_T^*(\omega, q) + \omega^\times h_w) + k_m b^\times(t)b^\times(t)(h_w - h_\sharp) \quad (4.52b)$$

En complément de sa tâche originelle, la loi  $M$  prend maintenant en charge la partie de  $u_T^* + \omega^\times h_w$  orthogonale à  $B(t)$ . En utilisant l'identité (4.1), on vérifie que (4.52) peut être réécrite de façon équivalente sous la forme (4.48). La démonstration du théorème 40 peut alors être employée de nouveau dans ce contexte.

**Lemme 35.** *Si (4.48) est remplacée par (4.52), le théorème 40 reste valide.*

L'utilisation du correcteur périodique  $K_k$  dans ce contexte conduit à la loi suivante :

$$M(t, x) = -\frac{b^\times(t)}{\|B(t)\|} (K_k(h_w - h_\sharp)_k - u_T^*(\omega, q) - \omega^\times h_w) \quad \text{avec } k \in \mathbb{N} : kT_s \leq t < (k+1)T_s \quad (4.53a)$$

$$T_w(t, x) = -b(t)b^T(t)(u_T^*(\omega, q) + \omega^\times h_w) + b^\times(t)b^\times(t)K_k(h_w - h_\sharp) \quad (4.53b)$$

### 4.6.4 Résultats de simulations

**Validation de la structure de commande** La structure de contrôle proposée dans cette section est mise à l'épreuve de simulations en utilisant le même cadre que précédemment : la loi de commande  $u_T^*$  considérée est donnée par (4.4) et (4.41) et les états initiaux des simulations correspondent à (4.42). Les figures 4.22 et 4.23 donnent les chronogrammes des états du système en boucle fermée avec (4.48) dans le cas non-perturbé et avec  $B_P^{[N]}(t)$  puis le modèle de l'IGRF. La valeur de  $k_m$  retenue est 0,01 afin de pouvoir comparer ces résultats avec ceux des figures 4.9 et 4.10. On fait les remarques suivants :

- la dynamique d'attitude est beaucoup plus régulière que lors de l'utilisation de  $h_S^{[I]}$ . Elle ne dépend en effet que de  $u_T^*$  et non plus de  $\dot{h}_S^{[I]}$  ou de  $B(t)$ . C'est la raison pour laquelle la figure 4.22 ne possède pas de légende ;
- dans ce contexte, la convergence du système montre les qualités de robustesse de l'asservissement ;



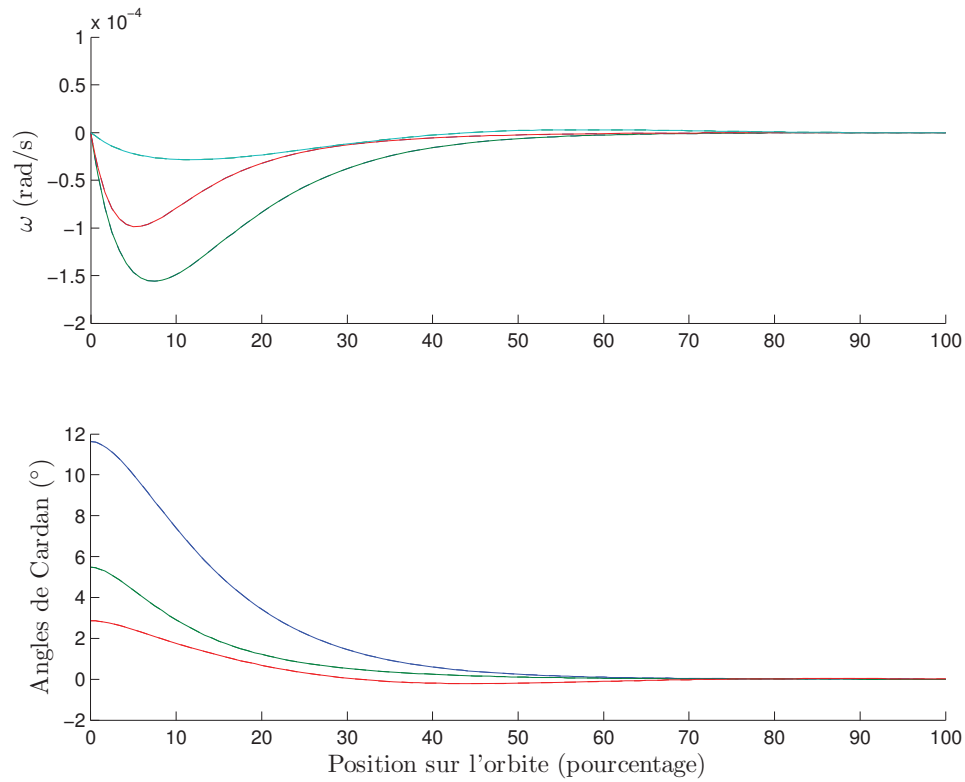


FIGURE 4.22 – Influence du champ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système supérieur

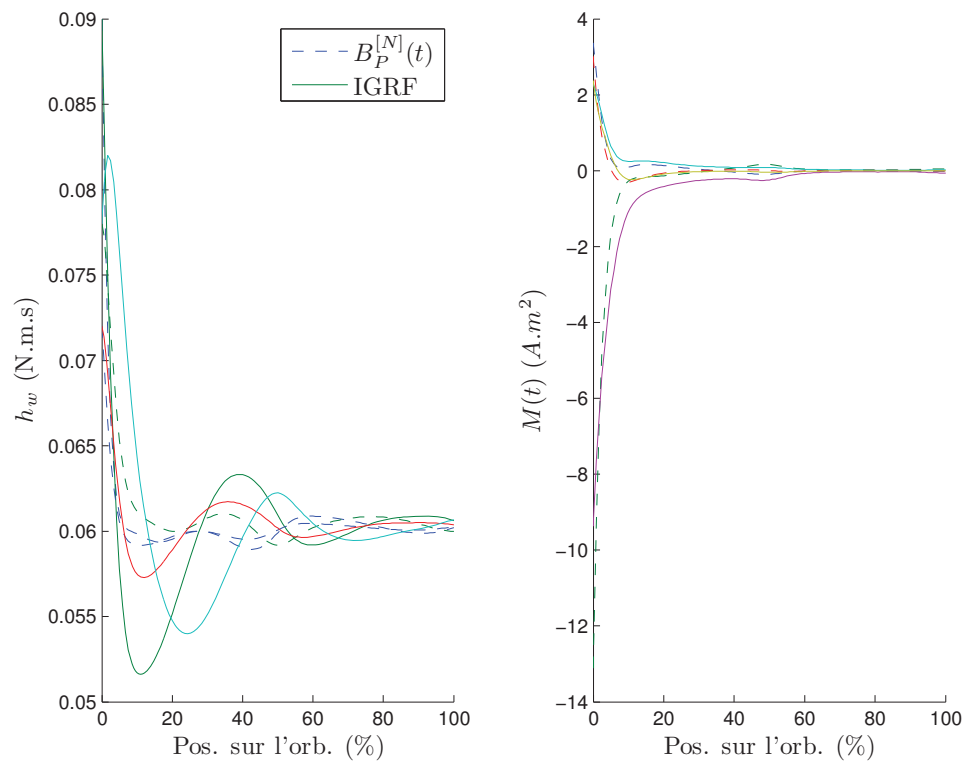


FIGURE 4.23 – Influence du champ pour l'approche par allocation : signaux du sous-système inférieur

- par rapport au schéma de contrôle utilisant le moment cinétique total, on constate que l'éloignement de  $h_w$  par rapport à  $h_{\ddagger}$  ainsi que l'effort de commande restent similaires.

Dans un second temps, on mesure la robustesse de la structure de commande vis-à-vis de la perturbation persistante  $T_{ext}(t)$ . En suivant la même procédure qu'auparavant, les simulations sont effectuées en utilisant l'IGRF et  $x(0) = x_{\#}$ . Les figures 4.24 et 4.25 sont alors obtenues et peuvent être comparées aux figures 4.14 et 4.13. Comme pour la structure de contrôle utilisant le moment cinétique total, ces résultats montrent qu'en présence de perturbations, le système conserve sa stabilité et oscille autour de  $\#$ . L'amplitude de ces oscillations est comparable à l'approche utilisant  $h_S^{[I]}$ .

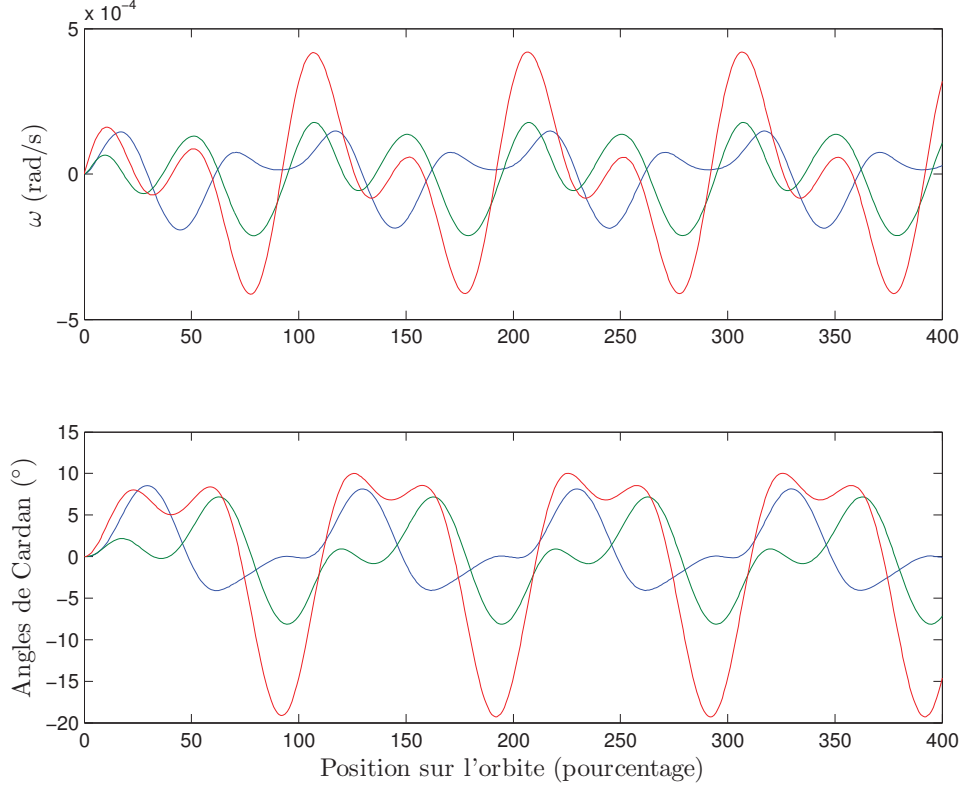


FIGURE 4.24 – Influence des perturbations  $T_{ext}(t)$  pour l'approche par allocation : signaux du sous-système supérieur

**Amélioration des performances** Tout en préservant la qualité des résultats obtenus avec  $h_S^{[I]}$ , l'approche mise en œuvre dans cette section soustrait la dynamique d'attitude à l'influence du processus de régulation des roues à réaction. Dans ce nouveau cadre, le problème consiste maintenant à définir la loi d'allocation du couple global entre les actionneurs. Cette action n'a alors aucune incidence sur les signaux d'attitude. Les simulations à venir permettent de vérifier cette affirmation. Toutefois, pour ne pas alourdir la présentation, on représente par la suite uniquement  $M(t)$  et  $h_w(t)$ , directement liés à la loi de répartition.

On soumet chacune des lois d'allocation au contexte de simulation précédent : perturbation persistante  $T_{ext}(t)$ , loi  $u_T^*$  définie par (4.4) et (4.41),  $k_m = 0,01$ , utilisation de l'IGRF et  $x(0) = x_{\#}$ . Les figures 4.26 et 4.27 représentent les résultats de simulation.

La qualité des lois de commande est évaluée grâce aux normes  $\mathcal{L}_2$  de  $h_w(t) - h_{\#}$  et de  $M(t)$ , notées  $\gamma_h$  et  $\gamma_M$ , et aux amplitudes maximales des oscillations de  $h_w(t) - h_{\#}$  et  $M(t)$  tout axe confondu, notées  $\bar{\Delta}h$  et  $\bar{\Delta}M$ . Ces critères sont formellement définis comme suit :

$$\gamma_h = \int_{2T_0}^{4T_0} (h_w(t) - h_{\#})^T (h_w(t) - h_{\#}) dt, \quad \gamma_M = \int_{2T_0}^{4T_0} M^T(t) M(t) dt$$

$$\bar{\Delta}h = \max_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \max_{t \in [2T_0, 4T_0]} \{h_{iw}(t) - h_{\#}\} \right\} - \left\{ \min_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \min_{t \in [2T_0, 4T_0]} \{h_{iw}(t) - h_{\#}\} \right\} \right\}$$

$$\bar{\Delta}M = \max_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \max_{t \in [2T_0, 4T_0]} M(t) \right\} - \left\{ \min_{i \in \{1,2,3\}} \left\{ \min_{t \in [2T_0, 4T_0]} M(t) \right\} \right\}$$

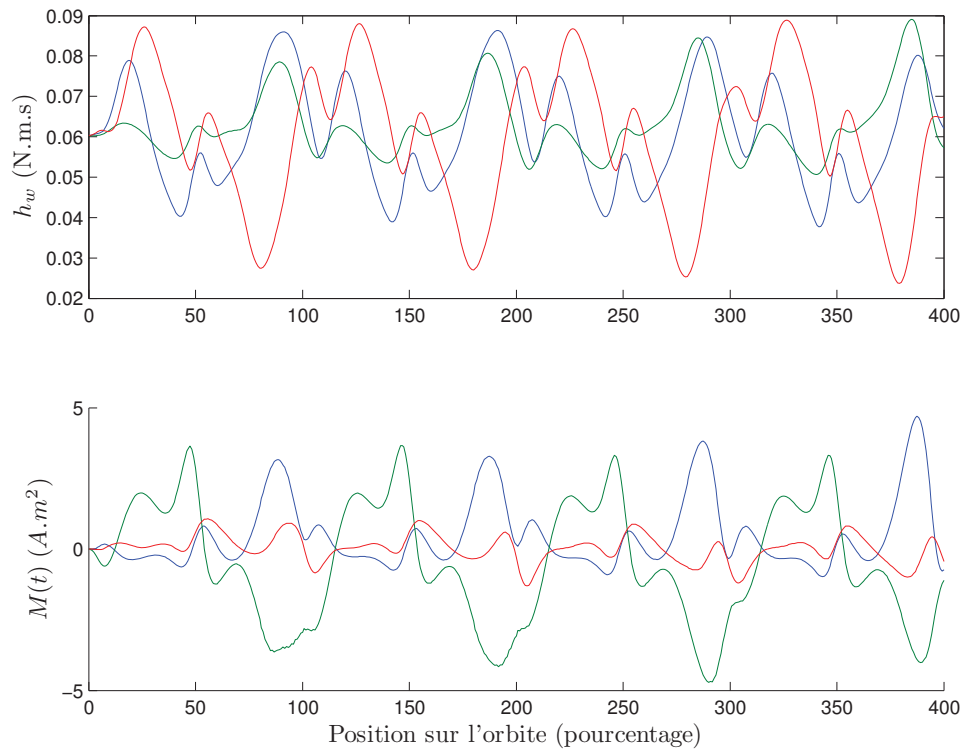


FIGURE 4.25 – Influence des perturbations  $T_{ext}(t)$  pour l'approche par allocation : signaux du sous-système inférieur

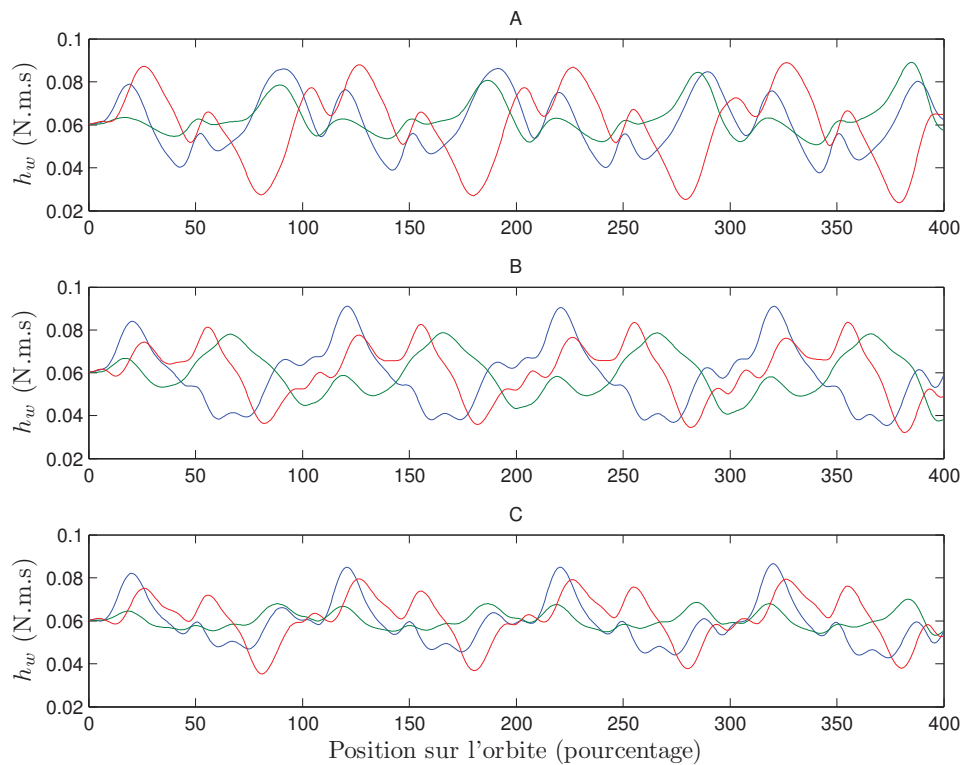


FIGURE 4.26 – Amélioration de la loi d'allocation des couples de commande : représentation de  $h_w$

On précise que ces mesures sont effectuées sur les deux dernières orbites, parmi les 4 que dure la simulation, pour éviter les régimes transitoires. L'objectif de l'asservissement est de rendre ces critères aussi proche de 0 que possible.

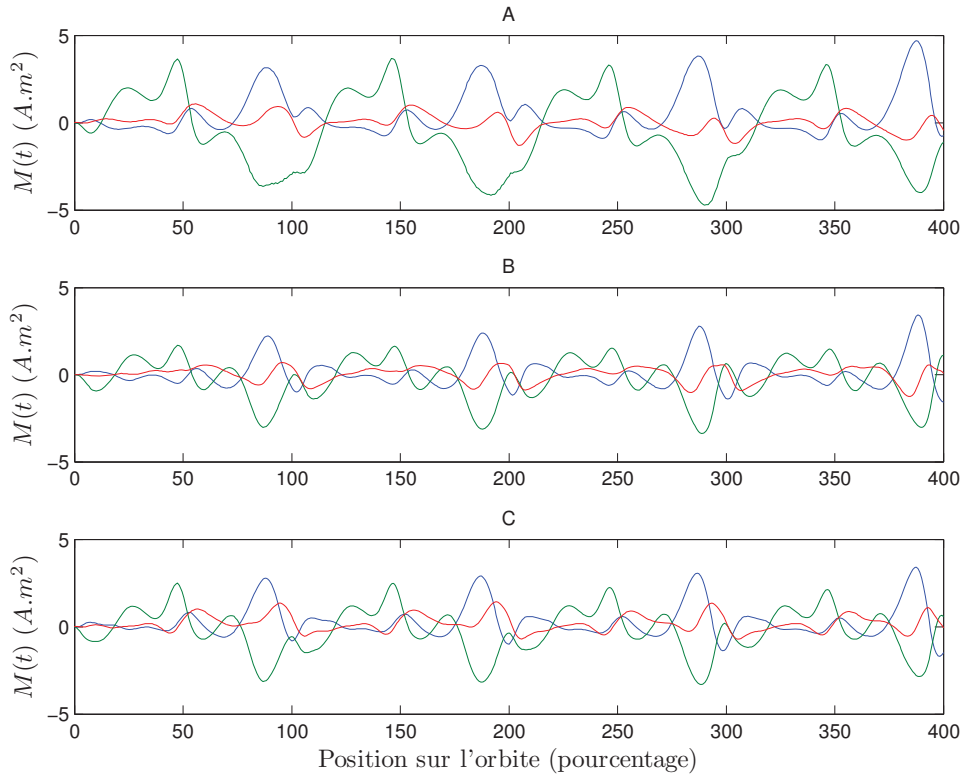
FIGURE 4.27 – Amélioration de la loi d'allocation des couples de commande : représentation de  $M(t)$ 

TABLE 4.1 – Comparaison de la performance des lois d'allocations

Description	Identifiant	Equation	$\gamma_h$	$\gamma_M$	$\bar{\Delta}h$	$\bar{\Delta}M$
Utilisation de $k_m$	A	(4.48)	563,7.10 <sup>-6</sup>	7,15	65,4.10 <sup>-3</sup>	9,41
Utilisation de $K_k$	B	(4.51)	541,2.10 <sup>-6</sup>	2,72	58,9.10 <sup>-3</sup>	6,81
Utilisation de $K_k$ + contrôle d'attitude avec magnéto-coupleurs	C	(4.53)	270,5.10 <sup>-6</sup>	2,98	48,9.10 <sup>-3</sup>	6,72

La tableau 4.1 synthétise ces résultats. On notera que les courbes liées à la loi A correspondent à celles données par les figures 4.24 et 4.25 mais sont rappelés ici pour faciliter la comparaison. L'analyse de ces résultats conduit aux remarques suivantes :

- conformément aux observations précédentes, par rapport à la loi A, le correcteur B permet de diminuer de 62% le critère  $\gamma_M$  représentatif de l'effort de commande. Le critère  $\bar{\Delta}M$ , quantifiant l'amplitude des oscillations de  $M(t)$ , décroît également de 28%. On notera que la proximité de  $h_w(t)$  avec  $h_{\#}$ , caractérisée par  $\gamma_h$  et  $\bar{\Delta}h$ , est également légèrement améliorée dans ce contexte.
- sans remettre en cause ce bénéfice, la loi 3 permet de diminuer les critères  $\gamma_h$  et  $\bar{\Delta}h$  de façon significative. Ceci justifie l'heuristique consistant à amoindrir la tâche des roues à réaction pour réduire l'éloignement de  $h_w(t)$  par rapport à  $h_{\#}$ .

En conclusion, la loi C permet de réduire l'effort de commande (grâce à  $K_k$ ) et d'accroître la proximité de  $h_w(t)$  par rapport à  $h_{\#}$  (en utilisant les magnéto-coupleurs pour le contrôle d'attitude). Par rapport à A, cette approche diminue  $\gamma_h$  de 52%,  $\gamma_M$  de 58%,  $\bar{\Delta}h$  de 25% et  $\bar{\Delta}M$  de 29%.

Pour mesurer la valeur de la loi C dans un contexte plus réaliste du point de vue de l'asservissement d'attitude, on adopte les nouveaux paramètres suivant pour la loi de commande  $u_T^*$  :

$$G_p = \begin{bmatrix} 7,5 & 0 & 0 \\ 0 & 8,0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,0 \end{bmatrix}, \quad G_r = \begin{bmatrix} 18,0 & 0 & 0 \\ 0 & 16,5 & 0 \\ 0 & 0 & 7,5 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 7,0$$

Le même contexte de simulation conduit alors aux résultats représentés par la figure 4.28. L'amplitude des oscillations d'attitude est alors beaucoup plus faible. Cette modification s'accompagne également d'une amélioration des critères puisque  $\gamma_h = 130,6.10^{-6}$ ,  $\gamma_M = 2,02$ ,  $\bar{\Delta}h = 35,4.10^{-3}$  et  $\bar{\Delta}M = 4,92.10^{-3}$ . On précise que les

vibrations de  $M(t)$  observées sont dues au bloqueur d'ordre 0 accompagnant la mise en œuvre de cette loi.

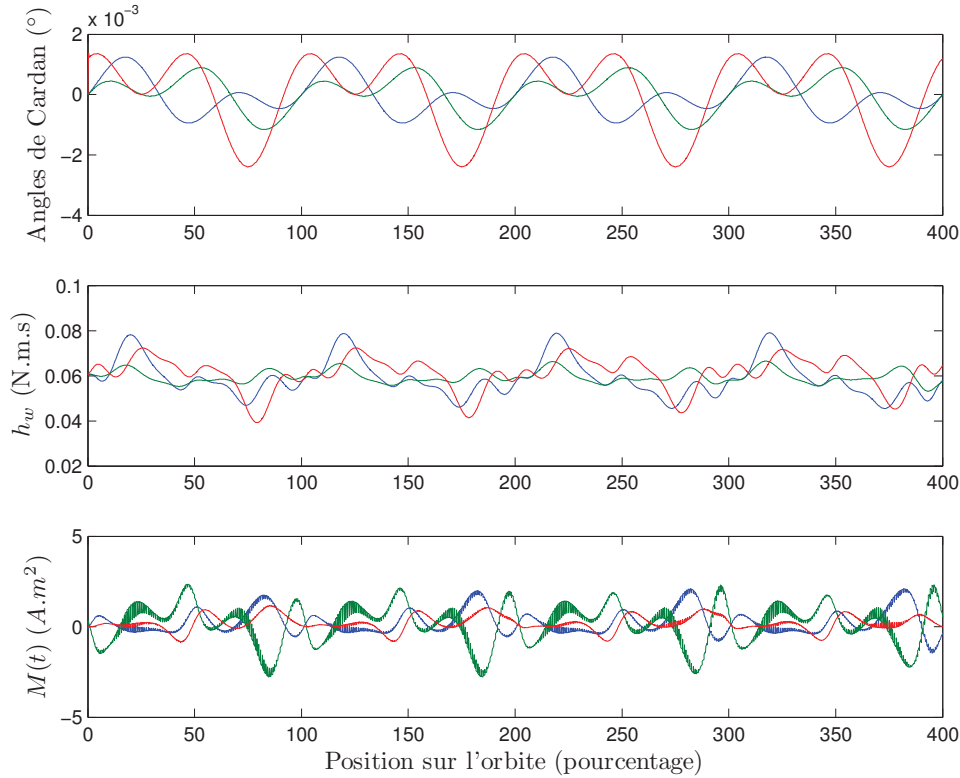


FIGURE 4.28 – Rejet de  $T_{ext}$  avec une loi de contrôle d'attitude plus agressive

## 4.7 Conclusions

Ce chapitre s'est focalisé sur la problématique d'allocation du couple de commande d'une loi de contrôle d'attitude dans le cas des satellites équipés de roues à réaction et de magnéto-coupleurs, et donc fortement lié aux variations environnementales périodiques. Dans un premier temps, cette problématique a été rigoureusement formalisée en s'appuyant sur le moment cinétique total. Des simulations numériques ont montré que l'utilisation de correcteurs périodiques pouvaient diminuer sensiblement l'effort de commande des magnéto-coupleurs sans remettre en cause la performance obtenue avec des lois de commande invariantes dans le temps.

Par la suite, ce chapitre a mis en évidence les deux critiques suivantes de cette stratégie :

1. la dépendance de la dynamique d'attitude à l'égard du processus de régulation de la vitesse des roues est problématique ;
2. le cloisonnement du rôle des actionneurs vis-à-vis des objectifs de commande est conservatif.

L'approche linéaire mise en œuvre dans la section 5 pour remettre en cause la critique 2 a conduit un correcteur à la validité « hyper locale » et donc faiblement robuste. Or, l'amélioration de la loi de commande sur cet aspect nécessite d'accroître l'effort de calcul lors de la synthèse (en diminuant la période d'échantillonnage) ou de modifier la façon dont les incertitudes sont modélisées dans les théorèmes de synthèse du chapitre 2. Etant donné le volume de calcul mis en jeu, il semble plus raisonnable de s'orienter dans la seconde direction. Il s'agit d'une des perspectives concernant les travaux entrepris dans cette thèse.

La section 6 propose de sortir de cette problématique en construisant un cadre non-linéaire pouvant être interprété comme une précommande. Le cadre du nouveau problème à résoudre est alors naturellement linéaire et donne une réponse aux deux critiques précédentes. Les lois de commande LMI peuvent donc être appliquées sans pâtir des défauts liés à la linéarisation et conduire à un correcteur périodique, soustrayant la dynamique d'attitude à la gestion du moment cinétique des roues et assurant une participation de chacun des actionneurs à tous les objectifs de commande.

***Contributions principales :***

Conception d'une loi de commande périodique et robuste garantissant l'asservissement conjoint de l'attitude et de la vitesse des roues dans un environnement périodique.

***Contributions complémentaires :***

- nouveau cadre rigoureux pour le problème de régulation du moment cinétique des roues par les magnéto-coupleurs (section 4.4) ;
- première mise en œuvre d'une approche linéaire périodique utilisant conjointement les roues à réaction et les magnéto-coupleurs (section 4.5) [Trégouët et al., 2011b,c] ;
- nouvelle structure de commande non-linéaire considérant l'effort de commande global (section 4.6).

# Conclusions

## Résumé

La première partie de cette thèse s'est intéressée aux modèles linéaires à temps discret dont les coefficients sont variants dans le temps de façon périodique mais soumis à des incertitudes réelles invariantes dans le temps. Plus précisément, les modèles considérés sont affines en les incertitudes qui appartiennent à un domaine polytopique.

Le premier chapitre a donné une vision d'ensemble des techniques LMI disponibles pour l'analyse et la synthèse de correcteurs pour ce type de modèle. Le cadre de la stabilité des modèles 2-périodiques a été retenu puisqu'il permet de rendre compte de toute la difficulté du problème sans alourdir inutilement les développements. Ce chapitre a mis en évidence que le problème d'analyse robuste se réduit à démontrer que les valeurs propres de la matrice de monodromie, dépendant des incertitudes, se situent dans le cercle unité ouvert. Dans ce contexte, plusieurs stratégies ont été utilisées : les théorèmes de Pólya, de Putinar ainsi que la méthode des variables de relaxation, conduisant à des LMI étendues. Par la suite, l'accent a été mis sur cette dernière technique en raison de son adéquation avec le problème de synthèse. Il a été démontré que la contrainte consistant à imposer à ces variables de ne pas dépendre des incertitudes est la seule (mais non négligeable) source de conservatisme. Dans ce cadre, l'utilisation de la dualité ainsi que du degré de liberté relatif au choix du point de départ  $\tau$  de la période a permis de dériver des conditions d'analyses alternatives pour un effort de calcul équivalent. Au contraire, la multiplication artificielle de la période, en répétant les matrices d'état, augmente la charge de calcul mais donne une hiérarchie claire entre les conditions obtenues, contrairement aux cas précédents. Concernant la conception de lois de commande, il a été démontré que les conditions de synthèse de correcteurs classiques (sans mémoire) obtenues par cette méthode ne peuvent qu'être meilleures que les conditions quadratiques. On note pourtant que pour certains exemples numériques, l'augmentation du conservatisme entre la synthèse et l'analyse est inévitable. Ceci n'est pas vrai pour les lois de commande 2-périodiques à mémoire. On fait la conjecture que ce résultat est également valable dans le cas N-périodique même si cette affirmation n'a pas été formellement établie. Finalement, il faut noter que pour une paramétrisation donnée, la condition de synthèse conduisant à un correcteur à mémoire ne peut qu'être moins conservatrice que son équivalent conduisant à un contrôleur classique.

Le chapitre 2 a donné suite aux dernières avancées en matière de synthèses de correcteurs périodiques dans ce cadre. Il est donc orienté vers les correcteurs à mémoire. Une nouvelle formulation générique pour ce type de loi de commande a été retenue de façon à englober les différentes approches proposées dans la littérature. Cette généralisation a requis une méthodologie inédite basée sur l'étude des modèles périodiques polynomiaux en  $\sigma$  et d'ordre variant. Plusieurs reformulations invariantes dans le temps de ces types de modèles ont été proposées et les liens qu'elles entretiennent entre elles ont été mis en évidence. Une formulation duale des modèles polynomiaux a également été dérivée. Grâce à ces développements, des conditions d'analyse de stabilité et de performance  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  ont été obtenues pour ces modèles sous forme SDP. Elles ont servi de base pour la dérivation de théorèmes d'analyse et de synthèse pour les correcteurs périodiques à mémoire. Les résultats numériques ont montré que l'augmentation de la taille de la mémoire des correcteurs pouvait diminuer le conservatisme des conditions de synthèse sans augmenter de façon significative l'effort de calcul nécessaire à la synthèse. Des phénomènes plus surprenants ont également été mis en avant : certains correcteurs à la structure particulière, les PFMC, permettent de réduire le conservatisme des conditions de synthèses au-delà de ce dont sont capables d'autres lois de commande à mémoire possédant pourtant plus de degrés de liberté. Cette apparente contradiction provient du fait que la structure de ces correcteurs a permis de les doter de conditions de synthèse particulièrement efficaces. Il semble que l'origine de cette particularité provienne de la méthode d'analyse utilisée pour obtenir les conditions de synthèse (le lifting temporelle sur une période) plutôt que des qualités intrinsèques de ces correcteurs.

L'étude des aspects périodiques du contrôle d'attitude a été l'objet de la seconde partie de cette thèse. L'évolution de l'environnement du satellite le long de son orbite est à l'origine de la dépendance temporelle

périodique des équations décrivant le mouvement du satellite autour de son centre de gravité. Cette influence s'exerce par le biais des perturbations et des actionneurs fortement dépendant de l'environnement comme les magnéto-coupleurs. Dans ce contexte, le chapitre 3 a cherché à contribuer à l'effort de modélisation en proposant un cadre unifié permettant de prendre en compte différents types de pointage. Une partie importante des efforts a été consacré à la modélisation de l'évolution du champ magnétique terrestre sur la trajectoire du satellite, pour différents niveaux de précision. De plus, les difficultés liées à la définition d'une trajectoire stabilisable et respectant les objectifs de l'asservissement ont été mises en évidence. En s'appuyant sur ces résultats, le chapitre 4 s'est intéressé à l'allocation du couple de commande d'une loi de contrôle d'attitude dans le cas des satellites équipés de roues à réaction et de magnéto-coupleurs. Ce type de problème met en jeu des phénomènes périodiques du fait de la variation cyclique du champ géomagnétique le long de l'orbite du satellite. Cette étude a permis d'adapter l'approche classiquement retenue dans la littérature pour lui donner un cadre formel bénéficiant d'une preuve de convergence rigoureuse. Ce résultat a été obtenu en s'appuyant sur le moment cinétique total. Dans un second temps, ce chapitre s'est efforcé d'apporter des réponses aux critiques formulées à l'encontre de cette approche. Premièrement, la dynamique d'attitude dépend du processus de régulation de la vitesse des roues alors que cette dernière n'est qu'une tâche secondaire. Deuxièmement, le cloisonnement du rôle de chacun des actionneurs vis-à-vis des objectifs de commande est conservatif. Pour pallier ce second défaut, une approche par linéarisation a été entreprise. Toutefois, les résultats obtenus n'ont pas donné pleine satisfaction en raison de l'étroitesse du bassin d'attraction de la boucle fermée résultante. L'utilisation de correcteur à mémoire a été identifié comme une piste de résolution de ce problème. Toutefois, la modélisation des incertitudes utilisées dans le chapitre 2 n'est pas appropriée pour ce type de problème. On précise cependant que pour obtenir les résultats désirés, une grande partie des développements effectués sont ré-utilisables en l'état. Une pré-commande non-linéaire a alors été proposée afin de s'affranchir de l'étape de linéarisation du modèle. Le cadre du nouveau problème à résoudre est en effet naturellement linéaire. De plus, l'une et l'autre des critiques précédentes trouvent une réponse dans cette nouvelle structure. L'aboutissement de ce chapitre est une loi de commande périodique, soustrayant la dynamique d'attitude à la gestion du moment cinétique des roues et assurant une participation de chacun des actionneurs à tous les objectifs de commande.

## Prospectives

Les résultats obtenus dans le cadre de cette thèse ont conduit à de nouvelles directions de recherches. La discussion suivante en identifie quelques unes.

### Partie 1 (chapitres 1 et 2) :

- **Dépendance des conditions vis-à-vis du point de départ :**  
Les chapitres 1 et 2 ont montré que  $\tau$ , le point de départ de la période considéré pour le lifting, influe sur le conservatisme des conditions de synthèse. Ce phénomène a déjà été mis en évidence dans [Hosoe and Hagiwara, 2011] mais reste mal compris. Une étude plus approfondie pourrait peut-être permettre d'obtenir une procédure indiquant la valeur de  $\tau$  conduisant à la condition la moins conservative.
- **Convergence de la hiérarchie de conditions LMI :**  
Le fait de considérer le modèle 2-périodique comme un système dont la période est multiple de 2, via la répétition de ses matrices, permet de dériver un ensemble d'autres conditions de moins en moins conservatives. Il existe pour certaines structures de correcteurs et dans le cas  $\mathcal{H}_\infty$  des preuves que cette hiérarchie converge [Ebihara et al., 2011], c'est-à-dire que la condition est nécessaire et suffisante à partir d'une certaine étape. Obtenir un tel résultat dans le cas général renforcerait l'attrait de cette démarche.
- **Modèles auxiliaires pour les conditions de synthèse :**  
Les conditions de synthèse données par le chapitre 1 sont paramétrées par les matrices  $M_{1,2,3}$  définissant un modèle périodique auxiliaire. Des exemples numériques ont montré que le choix de ces paramètres influe sur le conservatisme des conditions. Le bon usage de ce degré de liberté est une question largement ouverte même si certaines pistes ont été proposées dans ce chapitre. Cette approche pourrait également être étendue au cas général des correcteurs à mémoire considérés dans le chapitre 2.
- **Application aux modèles invariants dans le temps :**  
Il a été démontré dans [Ebihara et al., 2011, Tréguët et al., 2011a] que l'utilisation de correcteurs périodiques à mémoire pouvait contribuer à décroître le conservatisme des conditions de synthèse LMI à destination des modèles invariants dans le temps. Le bénéfice de l'usage de correcteurs périodiques pour les modèles LTI fait l'objet d'une littérature très vaste [Khargonekar et al., 1985, Bittanti and Colaneri, 2008]. Il serait intéressant de clarifier les avantages de l'utilisation de la mémoire du correcteur dans ce contexte.



– **Lois de commande à mémoire et modèles polynomiaux :**

Le chapitre 2 a mis en évidence les liens très forts qu'entretiennent les lois de commande périodiques à mémoire avec les polynômes en  $\sigma$  à coefficients périodiques. Il existe des travaux sur ce sujet [Bittanti and Colaneri, 2008, Mrabet and Bourlès, 1998]. La mise en œuvre d'un cadre unifié décloisonnant ces deux domaines de recherche pourrait conduire à des avancées significatives de part et d'autre.

– **Utilisation des entrées de commande passées :**

Les correcteurs à mémoire proposés utilisent l'historique des états passés du système pour construire l'entrée de commande courante. Cette même entrée pourrait également dépendre des *entrées* de commande passées et conservées en mémoire. La loi serait alors de la forme suivante :

$$u_{Nq+k} = (K_{k,0} + K_{k,1}\sigma^{-1} + \dots + K_{k,\alpha_k}\sigma^{-\alpha_k}) x_{Nq+k} + (K_{k,0}^I + K_{k,1}^I\sigma^{-1} + \dots + K_{k,\alpha_k}^I\sigma^{-\alpha_k}^I) u_{Nq+k-1}$$

Il serait intéressant d'évaluer le bénéfice des nouveaux degrés de liberté offerts par le choix des matrices  $K_{k,j}^I$  par rapport à l'effort de calcul supplémentaire qu'ils induisent.

**Partie 2 (chapitres 3 et 4) :**

– **Modélisation sous forme bilinéaire :**

Le couple  $T_m$  généré par les magnéto-coupleurs est donné par la relation  $T_m = -(C(q)B_o(t))^\times M$ . En première approximation, la matrice de rotation correspond à  $C(q) \approx \mathbf{1}_3 - 2\varepsilon^\times$  [Hugues, 1986, p.22]. L'opérateur  $( )^\times$  étant linéaire, on obtient alors un produit entre l'état  $\varepsilon$  et l'entrée  $M$ . Cette relation est alors bilinéaire. Il pourrait être intéressant d'appliquer dans ce contexte les techniques spécialement conçues pour ce type de modèle.

– **Trajectoire stabilisable et optimale :**

Le chapitre 3 a montré que dans le cas général aucun correcteur ne pouvait conduire à un régime permanent satisfaisant parfaitement les objectifs de commande. En effet, l'équation dynamique du système ne peut être vérifiée (même en boucle fermée) sur la trajectoire  $\ddagger$ . Dans la pratique, le correcteur tente donc de stabiliser le système autour d'une trajectoire inatteignable. Le comportement du système asservi en régime permanent est alors difficilement prévisible. Partant de ce constat, la trajectoire  $\ddagger$  pourrait être redéfinie de façon à pouvoir être stabilisable en boucle fermée tout en étant le plus proche possible de  $\ddagger$ . Cette perspective se rapproche d'une stratégie du type guidage/contrôle.

– **Choix du gain  $k_m$  :**

Selon le chapitre 4, tout gain scalaire  $k_m$  positif, associé à la pré-commande effectuant la projection sur l'espace orthogonale au champ, stabilise le modèle de l'intégrateur simple (4.25). Cependant les résultats de simulation ont montré que le choix de cette valeur conduit à des différences très importantes en termes d'effort de commande et de durée du régime transitoire. On suggère de poursuivre l'analyse du phénomène pour déterminer la valeur optimale de  $k_m$  pour un critère donné.

– **Preuves de stabilité du correcteur échantillonné :**

Dans le chapitre 4, les preuves de stabilité des structures de contrôle ont été établies dans le cas du gain scalaire  $k_m$ . Il semble raisonnable de penser que cette propriété s'applique également pour le correcteur  $K_k$  à temps discret, à condition que sa période d'échantillonnage soit suffisamment faible. Formellement, il n'existe toutefois pas de preuves que cette conclusion soit valable dans ce nouveau contexte. Cette démonstration renforcerait ce résultat et pourrait donner des informations pertinentes pour guider le choix de la période d'échantillonnage.

– **Correcteurs périodiques pour les incertitudes bornées en norme :**

Une des conclusions importantes du chapitre 4 concerne la nature des incertitudes à prendre en compte pour le problème de contrôle d'attitude tel qu'il a été posé. Les discussions à ce sujet ont montré que les signaux incertains bornés en norme semblent être les plus adéquats. Cependant, il n'existe pas, à notre connaissance, de théorèmes de synthèse spécifiquement conçus pour traiter ce type d'incertitudes et conduisant à des correcteurs périodiques à mémoire. Combler cette lacune apparaît donc comme une piste de travail pertinente.

– **Répartition des tâches entre les actionneurs :**

La structure d'allocation mise en place à la fin du chapitre 4 permet à chacun des actionneurs de participer à tous les objectifs de commande. Jusqu'à présent, cette répartition se base sur une approche heuristique. Malgré les résultats encourageants de cette démarche, il serait intéressant de rationaliser cette allocation.



# Annexes



# Annexe A

## Outils algébriques

Cette annexe rappelle un certain nombre d'outils algébriques auxquels cette thèse a fréquemment recours.

Conformément à [Skelton et al., 1997], on définit l'orthogonale matricielle à gauche de sorte que  $V^\perp V = \mathbf{0}$ . L'orthogonale à droite est alors donnée par la relation  $VV^{T\perp T} = \mathbf{0}$ .

Le premier résultat est une variation autour du lemme de Finsler [Skelton et al., 1997] et est nommé lemme d'élimination dans cette thèse. Le théorème suivant en donne deux versions : la première fait intervenir un unique vecteur  $v$  tandis que la seconde s'applique à  $v$  et  $w$ .

**Théorème 41** (Lemme d'élimination - [Skelton et al., 1997]). *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \quad v^T Q v \prec 0 \quad \text{telle que} \quad \forall v, Rv = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

$$(ii) \quad R^{T\perp} Q R^{T\perp T} \prec 0 \quad (\text{A.2})$$

$$(iii) \quad \exists \mathcal{F} : Q + \text{He}\{\mathcal{F}R\} \prec 0 \quad (\text{A.3})$$

*Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$(i) \quad \begin{cases} v^T Q v \prec 0 & \text{telle que} \quad \forall v, Rv = \mathbf{0} \\ w^T Q w \prec 0 & \text{telle que} \quad \forall w, Sw = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$(ii) \quad \begin{cases} (R^T)^\perp Q (R^T)^{\perp T} \prec 0 \\ S^{\perp T} Q S^{T\perp T} \prec 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$(iii) \quad \exists X : Q + \text{He}\{R^T X S\} \prec 0 \quad (\text{A.6})$$

On donne également plusieurs versions du complément de Schur.

**Théorème 42** (Complément de Schur - [Skelton et al., 1997]).

$$\begin{cases} Q - SR^{-1}S^T \prec 0 \\ R \prec 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Q & S \\ \star & R \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R - S^T Q^{-1} S \prec 0 \\ Q \prec 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{cases} -Q + SRS^T \prec 0 \\ R \succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -Q & S \\ \star & -R^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -Q & SR \\ \star & -R \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -R^{-1} + S^T Q^{-1} S \prec 0 \\ Q \succ 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Le théorème suivant, extrait de la littérature, constitue un résultat important, en particulier pour le chapitre 1.

**Théorème 43** ([Ebihara et al., 2008a]). *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\exists T \in \mathbb{S}^n : \begin{bmatrix} P & V \\ \star & Q + T \end{bmatrix} \prec 0, \quad \begin{bmatrix} S - T & W \\ \star & R \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{bmatrix} P & V & \mathbf{0} \\ \star & Q + S & W \\ \star & \star & R \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{A.10})$$

où  $P \in \mathbb{S}^n$ ,  $Q \in \mathbb{S}^m$ ,  $R \in \mathbb{S}^l$ ,  $S \in \mathbb{S}^m$  et  $V \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $W \in \mathbb{R}^{m \times l}$ . De plus, si  $S = \mathbf{0}$  alors  $T \succ 0$ .

*Démonstration.* (A.9)  $\Rightarrow$  (A.10).

Si (A.9) est vérifiée alors la matrice diagonale par bloc formée à partir des matrices (A.9) est également définie négative. La multiplication de cette inégalité à droite par une matrice de rang plein en colonne et par sa transposée à gauche implique (A.10) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_l \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P & V \\ \star & Q+T \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} S-T & W \\ \star & R \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_l \end{bmatrix} \prec 0 \Leftrightarrow \text{(A.10)}$$

(A.9)  $\Leftarrow$  (A.10).

En appliquant un complément de Schur sur (A.10), on obtient l'inéquation suivante :

$$\begin{bmatrix} P & V \\ \star & Q+S \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ W \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ W \end{bmatrix}^T \prec 0 \quad \text{(A.11)}$$

Par conséquent, il existe un réel positif  $\varepsilon$  tel que

$$\begin{bmatrix} P & V \\ \star & Q+S-WR^{-1}W^T + \varepsilon \mathbf{1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad \text{(A.12)}$$

En nommant  $T = S - WR^{-1}W^T + \varepsilon \mathbf{1}_m$ , on obtient alors la première inégalité de (A.9). La seconde est obtenue via l'application d'un complément de Schur sur l'inéquation  $S - T - WR^{-1}W^T = -\varepsilon \mathbf{1}_m \prec 0$ , réécriture directe de la définition de  $T$ .  $\square$

Les deux corollaires suivants sont extraits de ce résultat.

**Corollaire 6.** *S'il existe quatres matrice réelles  $F_{0,0}$ ,  $F_{1,0}$ ,  $F_{1,1}$  et  $F_{2,1}$  de dimension  $n \times n$  ainsi que deux matrices définies positives  $P_0 \in \mathbb{S}_+^n$  et  $P_1 \in \mathbb{S}_+^n$  telles que*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{0,0} \\ F_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \end{cases} \quad \text{(A.13)}$$

alors les deux inégalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{0,0} & \mathbf{0} \\ F_{1,0} & F_{1,1} \\ \mathbf{0} & F_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad \text{(A.14)}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} F_{1,1} & \mathbf{0} \\ F_{2,1} & F_{0,0} \\ \mathbf{0} & F_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad \text{(A.15)}$$

**Corollaire 7.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ F_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ F_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \end{cases} \quad \text{(A.16)}$$

$$\begin{bmatrix} -P_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_0 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_{1,0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad \text{(A.17)}$$

$$\begin{bmatrix} -P_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_1 \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ F_{2,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_{1,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \right\} \prec 0 \quad \text{(A.18)}$$

où  $P_0 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $P_1 \in \mathbb{S}_+^n$ ,  $F_{1,0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $F_{2,1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Annexe B

# Généralisation aux modèles N-périodiques des résultats du chapitre 1

Cette annexe étend au cas N-périodique les principaux théorèmes du chapitre 1.

### B.1 Analyse et synthèse nominale

Le système dynamique  $\Sigma$  considéré est le suivant :

$$\Sigma : x_{Nq+k+1} = A_k^{ol} x_{Nq+k} + B_{uk} u_{Nq+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, N-1\}$$

où  $x_{Nq+k} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état et  $u_{Nq+k} \in \mathbb{R}^{m_u}$  est l'entrée de commande. On suppose que la mesure de l'état est disponible de sorte qu'il est possible de définir la loi de commande par retour d'état périodique suivante :

$$u_{Nq+k} = K_k x_{Nq+k}$$

La dynamique de la boucle fermée  $\Sigma_{cl}$  ainsi obtenue est décrite par l'équation suivante :

$$\Sigma_{cl} : x_{Nq+k+1} = A_k x_{Nq+k}, \quad \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, N-1\}$$

avec

$$A_k = A_k^{ol} + B_{uk} K_k, \quad \forall k \in \{0, N-1\}$$

Le modèle  $\Sigma_{cl}$  est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice de monodromie sont situées dans le cercle unité ouvert. Cette condition nécessaire et suffisante est traduite sous forme LMI par la théorème suivant.

**Théorème 44** (Analyse nominale). *[[de Souza and Trofino, 2000] et [Bittanti and Colaneri, 1999]] Le modèle  $\Sigma_{cl}$  est stable asymptotiquement si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists P \in \mathbb{S}_+^n : \Psi^T P \Psi - P \prec 0$$

où  $\Psi$  fait référence à la matrice de monodromie  $\Psi$  du système définie par l'équation suivante :

$$\Psi = \prod_{k=N-1}^0 A_k$$

Comme dans le cas 2-périodique, l'utilisation de la fonction de Lyapunov périodique et du modèle dual à  $\Sigma_{cl}$  conduit à la condition de synthèse fournie par le théorème suivant.

**Théorème 45** (Synthèse nominale). *[[de Souza and Trofino, 2000] et [Bittanti and Colaneri, 1999]] Le modèle  $\Sigma$  est stabilisable asymptotiquement par la loi de commande  $u_k = K_k x_k$  si et seulement si la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists W_k \in \mathbb{S}_+^n, \exists Y_k \in \mathbb{R}^{m_u \times n} : \begin{bmatrix} -W_{k+1} & A_k^{ol} W_k + B_{uk} Y_k \\ \star & -W_k \end{bmatrix} \prec 0, \quad \forall k = \{0, N-1\}$$

avec  $W_0 = W_N$ . Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation  $K_k = Y_k W_k^{-1}$ .

## B.2 Analyse et synthèse robuste grâce aux LMI étendues

On considère maintenant le vecteur d'incertitudes  $\theta$  appartenant au  $L$ -simplex standard

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^L : \theta_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \theta_i = 1 \right\}$$

où  $\theta_i$  désigne le  $i$ -ième élément de  $\theta$ . On suppose que le modèle  $\Sigma$  est soumis de façon affine à  $\theta$  de sorte que

$$\Sigma(\theta) : x_{Nq+k+1} = A_k^{ol}(\theta)x_{Nq+k} + B_{uk}(\theta)u_{Nq+k}, \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, N-1\}$$

avec

$$\begin{bmatrix} A_0^{ol}(\theta) & B_{u0}(\theta) \\ \vdots & \vdots \\ A_{N-1}^{ol}(\theta) & B_{uN-1}(\theta) \end{bmatrix} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_0^{ol[1]} & B_{u0}^{[1]} \\ \vdots & \vdots \\ A_{N-1}^{ol[1]} & B_{uN-1}^{[1]} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A_0^{ol[L]} & B_{u0}^{[L]} \\ \vdots & \vdots \\ A_{N-1}^{ol[L]} & B_{uN-1}^{[L]} \end{bmatrix} \right\}, \forall \theta \in \Theta$$

Similairement au cas nominal, la loi  $u_{Nq+k} = K_k x_{Nq+k}$  conduit au modèle incertain en boucle fermée suivant :

$$\Sigma_{cl}(\theta) : x_{Nq+k+1} = A_k(\theta)x_{Nq+k}, \forall q \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, N-1\}$$

avec

$$A_k(\theta) = A_k^{ol}(\theta) + B_{uk}(\theta)K_k, \forall k \in \{0, N-1\}$$

Dans ce contexte, les deux conditions d'analyse suffisantes suivantes<sup>1</sup> peuvent être établies :

**Théorème 46** (Stabilité robuste - condition primale). [Ebihara et al., 2010]. *S'il existe  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{(N+1)n \times Nn}$  telle que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists P^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -P^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n(N-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \mathcal{F} \begin{bmatrix} A_0^{[i]} & -\mathbf{1}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1^{[i]} & -\mathbf{1}_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_{N-1}^{[i]} & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} \right\} \prec 0$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est robustement stable.

**Théorème 47** (Stabilité robuste - condition duale). [Ebihara et al., 2010]. *S'il existe  $\mathcal{F}^d \in \mathbb{R}^{Nn \times (N+1)n}$  tel que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n(N-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} A_{N-1}^{[i]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1}_n & A_{N-2}^{[i]} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_0^{[i]} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} \mathcal{F}^d \right\} \prec 0$$

alors le modèle incertain  $\Sigma_{cl}(\theta)$  est robustement stable.

Comme dans le chapitre 2, ces conditions peuvent être déclinées en faisant varier le point de départ  $\tau$  de la période où en multipliant la période  $N$  par un entier positif.

A partir des conditions d'analyse robuste duale, on obtient le théorème de synthèse robuste suivant :

**Théorème 48** (Synthèse robuste). [Ebihara et al., 2010]. *S'il existe  $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y_j \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$  pour  $j = \{0, N-1\}$  telles que pour  $i \in \{1 \dots L\}$  la condition suivante est satisfaite :*

$$\exists W^{[i]} \in \mathbb{S}_+^n : \begin{bmatrix} -W^{[i]} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n(N-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W^{[i]} \end{bmatrix} + \text{He} \left\{ \left( \begin{bmatrix} A_{N-1}^{ol[i]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1}_n & A_{N-2}^{ol[i]} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_0^{ol[i]} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{1}_n \end{bmatrix} \mathcal{G} + \begin{bmatrix} B_{N-1}^{[i]} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_{N-2}^{[i]} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_0^{[i]} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathcal{Y} \right) [\mathbf{0}_{nN \times n} \quad \mathbf{1}_{nN}] \right\} \prec 0$$

1. On précise que ces conditions ne sont pas équivalentes dans le cas général.



avec

$$\mathcal{G} = \text{diag}\{G_{N-1}, \dots, G_0\}, \quad \mathcal{Y} = \text{diag}\{Y_{N-1}, \dots, Y_0\}$$

alors le modèle incertain  $\Sigma(\theta)$  est stabilisable robustement par la loi de commande  $u_k = K_k x_k$ . Les gains  $K_k$  du correcteur sont alors obtenus via la relation  $K_k = Y_k W_k^{-1}$ .

Le théorème de synthèse nominal utilisant la fonction de Lyapunov périodique donné précédemment admet aussi une version robuste. On trouvera son expression dans [Bittanti and Colaneri, 2008].



## Annexe C

# Dualité des systèmes invariant dans le temps et à temps discret

Soit  $h(t, \tau)$  la réponse d'un système linéaire à temps continu (potentiellement variant dans le temps) à une impulsion au temps  $t = \tau$  et soit  $t_f$  un instant arbitraire tel que  $t_f > t$ . On considère le problème suivant : comment construire la fonction conduisant, à partir de  $h(t_f, \tau)$ , à l'instant  $\tau$  de l'impulsion ? Pour répondre à cette question, il est possible de bâtir un modèle à temps inversé particulier, nommé modèle adjoint modifié, dont la réponse temporelle conduit à la fonction recherchée [Kailath, 1980]. Historiquement, ce problème de réponse impulsionnelle inversée est une des causes importantes du développement de la théorie de la dualité des systèmes. On notera que dans la littérature la terminologie « modèle adjoint » est parfois employée pour désigner le modèle dual.

Les travaux présentés dans [Sarachik and Kreindler, 1965] s'appuie sur cette caractérisation pour étendre le concept aux modèles à temps discret. Dans ce cadre, les auteurs de [Nieuwenhuis and Willems, 1988] proposent une définition plus moderne (et plus mathématique) en se restreignant aux modèles invariants dans le temps. La dualité y est caractérisée d'un point de vue purement externe, grâce à une propriété d'orthogonalité. Dans [van der Schaft, 1991], ces résultats sont étendus au cas des modèles d'état. On citera également les travaux publiés dans [Rudolph, 1996], abordant ce concept par le biais de la théorie du module.

Dans le cas des modèles LTI sous forme de modèle d'état, on montre que les matrices du modèle dual sont construites à partir de la transposée de leurs homologues du modèle primal. Cette propriété permet d'établir des liens entre les propriétés structurelles des deux modèles. En particulier, un modèle LTI est commandable (observable) si et seulement si son dual est observable (commandable). On notera également la correspondance existant entre les résultats d'analyse : la dualité préserve la stabilité ainsi que les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ . Pour cette raison, la théorie de la dualité des systèmes est fréquemment réduite à un outil technique permettant de transposer les matrices du système considéré dans les conditions d'analyses, bien que ce concept soit en réalité beaucoup plus riche.

Après cette présentation générale, on introduit le théorème suivant définissant la dualité pour les modèles auto-régressifs à moyenne mobile (AutoRegressive-Moving Average, ARMA) et à temps-discret.

**Théorème 49** ([Nieuwenhuis and Willems, 1988]). Soit  $\Sigma_p = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q, \mathcal{B}_p)$  et  $\Sigma_d = (\mathbb{Z}, \mathbb{R}^q, \mathcal{B}_d)$  deux systèmes à temps-invariant, respectivement complet et compact. L'ensemble  $\mathcal{B}_p$  est défini par

$$\mathcal{B}_p := \{\omega \in \mathbb{R}^q \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, R(\sigma, \sigma^{-1})\omega = M(\sigma, \sigma^{-1})x\} \quad (\text{C.1})$$

où  $R(\sigma, \sigma^{-1})$  et  $M(\sigma, \sigma^{-1})$  sont des matrices de polynômes en  $\sigma^{-1}$  et  $\sigma$ . Les modèles  $\Sigma_p$  et  $\Sigma_d$  sont duaux si et seulement si

$$\mathcal{B}_d := \{\omega^d \in \mathbb{R}^q \mid \exists x^d \in \mathbb{R}^n, \omega^d = R^T(\sigma^{-1}, \sigma)x^d \text{ et } -M^T(\sigma^{-1}, \sigma)x^d = 0\} \quad (\text{C.2})$$

La restriction de ce théorème à un cas particulier conduit au corollaire suivant, dont on fait usage dans le cadre de cette thèse.

**Corollaire 8.** Les modèles descripteurs polynomiaux suivants sont duaux l'un de l'autre :

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{A}_j \sigma^{-j} & \mathcal{B} & \mathbf{0} \\ \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{C}_j \sigma^{-j} & \mathcal{D} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_q \\ \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{A}_j^T \sigma^j & \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{C}_j^T \sigma^j & \mathbf{0} \\ \mathcal{B}^T & \mathcal{D}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_q^d \\ \hat{w}_q^d \\ \hat{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{C.4})$$

*Démonstration.* Les deux équations suivantes sont des reformulations des modèles polynomiaux faisant le lien avec la définition des modèles telle que présentée dans le Th. 49.

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{B} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{D} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_q \\ \hat{z}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{A}_j \sigma^{-j} \\ \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{C}_j \sigma^{-j} \end{bmatrix} \tilde{x}_q$$

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_q^d \\ \hat{w}_q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathcal{B}^T & -\mathcal{D}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_q^d \\ \hat{w}_q^d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{A}_j^T \sigma^j & \sum_{j=0}^{b+1} \mathcal{C}_j^T \sigma^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_q^d \\ \hat{w}_q^d \end{bmatrix} = 0$$

□

## Annexe D

# Normes $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_\infty$ des modèles périodiques à temps-discret

Le contenu de cette annexe est principalement extrait de [Bittanti and Colaneri, 2008]. Afin de clarifier la présentation, on adopte dans cette annexe la convention habituelle selon laquelle la valeur du signal  $x$  à l'instant courant est notée  $x_k$ .

Soit  $\Sigma$  le modèle linéaire périodique et à temps discret suivant :

$$\Sigma : \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} A_{k+N} & B_{k+N} \\ C_{k+N} & D_{k+N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}$$

pour lequel  $w_k$  et  $z_k$  correspondent respectivement à l'entrée de perturbation et à la sortie de performance. A ce modèle, on associe la fonction de transfert matricielle périodique entre  $w_k$  et  $z_k$  définie par la relation suivante :

$$z_k = G(\sigma, k)w_k \quad \text{avec} \quad G(\sigma, k) = C_k(\sigma \mathbf{1}_n - A_k)^{-1}B_k + D_k$$

On évalue la performance de  $\Sigma$  par sa capacité à minimiser l'influence de la perturbation  $w_k$  sur la sortie contrôlée  $z_k$ . C'est la raison pour laquelle cette performance est évaluée grâce à la norme de la fonction de transfert multivariable  $G(\sigma, k)$ , que l'on assimile à la norme du modèle  $\Sigma$  lui-même. Cette annexe traite des normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ .

### D.1 Liens avec la norme du modèle temps-invariant lifté

La technique de la représentation liftée consiste à regrouper les vecteurs d'entrée/sortie sur une période complète à partir de l'instant  $k = \tau$  :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} z_{qN+\tau+N-1} \\ \vdots \\ z_{qN+\tau} \end{bmatrix}}_{\hat{z}_q} = \hat{G}_\tau(\sigma) \underbrace{\begin{bmatrix} w_{qN+\tau+N-1} \\ \vdots \\ w_{qN+\tau} \end{bmatrix}}_{\hat{w}_q} \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Z}$$

La fonction de transfert  $\hat{G}_\tau(\sigma)$  est invariante dans le temps puisqu'elle ne dépend pas de  $q$ . De plus, si son expression est paramétrée par  $\tau$ , il est possible de montrer que ses normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  sont indépendantes de cette valeur. Le modèle temps-invariant obtenu par la technique de lifting est donc indépendant du paramètre de cette transformation. C'est la raison pour laquelle les normes de  $\Sigma$  (ou de  $G(\sigma, k)$ ) sont identifiées à celles de  $\hat{G}_\tau(\sigma)$ .

**Définition 7.** Les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  du modèle périodique  $\Sigma$  correspondent aux normes du modèle lifté associé  $\hat{G}_\tau(\sigma)$  qui sont indépendantes de  $\tau$  :

$$\forall \tau, \|\Sigma\|_2 = \|\hat{G}_\tau\|_2, \quad \|\Sigma\|_\infty = \|\hat{G}_\tau\|_\infty \quad (\text{D.1})$$

◦

## D.2 Interprétations pour les modèles périodiques

La théorie des modèles à temps-invariant offre une interprétation des normes de  $\hat{G}_\tau$ . Grâce à la définition de  $\hat{w}_q$  et  $\hat{z}_q$ , ces interprétations peuvent être étendues au modèle périodique  $\Sigma$ .

### D.2.1 Norme $\mathcal{H}_2$

**Equations de Lyapunov périodiques** Soit les équations de Lyapunov périodiques suivantes

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= A_k P_k A_k^T + B_k B_k^T \\ Q_k &= A_k^T Q_{k+1} A_k + C_k^T C_k \end{aligned}$$

d'inconnues  $P_k$  et  $Q_k$ . Si ces dernières admettent des solutions périodiques et semi-définies positives, notées  $P_k = W_k^c$  et  $Q_k = W_k^o$ , alors la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\Sigma$  est donnée par les équations suivantes :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\text{trace} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} C_k W_k^c C_k^T + D_k D_k^T \right\}} = \sqrt{\text{trace} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} B_k^T W_{k+1}^o B_k + D_k^T D_k \right\}} \quad (\text{D.2})$$

Similairement au cas à temps-invariant, les solutions  $W_k^o$  et  $W_k^c$  correspondent aux grammians d'observabilité et de commanbilité dont l'expression est liée aux matrices de  $\Sigma$  via les relations suivantes :

$$W_k^c = \sum_{i=1}^{+\infty} \Phi_{i,k+1} B_k B_k^T \Phi_{i,k+1}^T, \quad W_k^o = \sum_{i=1}^{+\infty} \Phi_{i,k+1}^T C_k^T C_k \Phi_{i,k+1} \quad (\text{D.3})$$

où la matrice de transition d'état  $\Phi_{k,\tau}$  de  $A$  est telle que

$$\Phi_{k,\tau} = \begin{cases} \mathbf{0} & , (k < \tau) \\ \mathbf{1} & , (k = \tau) \\ A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_\tau & , (k > \tau) \end{cases}$$

**Equations de Lyapunov à temps-invariant** De façon analogue, les solutions semi-définies positives  $\tilde{P}_k = \tilde{W}_k^c$  et  $\tilde{Q}_k = \tilde{W}_k^o$  des  $N$  équations de Lyapunov à temps-invariant suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k &= A_k \tilde{P}_k A_k^T + B_k B_k^T \\ \tilde{Q}_k &= A_k^T \tilde{Q}_k A_k + C_k^T C_k \end{aligned}$$

conduisent à la norme  $\mathcal{H}_2$  de  $\Sigma$  via (D.2) avec  $W_k^c = \tilde{W}_k^c$  et  $W_{k+1}^o = \tilde{W}_k^o$ .

En s'appuyant sur la théorie des modèles à temps-invariant, cette dernière interprétation peut être reformulée de la façon suivante :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \|G(\sigma, k)\|_2^2}$$

La fonction de transfert  $G(\sigma, k)$  est un polynôme en  $\sigma$  dont les matrices coefficients varient périodiquement en fonction de  $k$ . Il existe donc un nombre finie, à savoir  $N$ , de fonctions de transfert LTI issues de  $G(\sigma, k)$  en fixant la valeur de  $k$ . La valeur  $\|\Sigma\|_2^2/N$  peut être interprétée comme la moyenne du carré des normes  $\mathcal{H}_2$  de ces fonctions.

**Réponse impulsionnelle** Pour un instant  $\tau$  arbitraire, on définit  $h_k^{i,j}$  comme la réponse de  $\Sigma$  à une impulsion appliquée sur l'entrée  $j$  à l'instant  $\tau + i$  (avec la condition initiale  $x(\tau) = 0$ ). Si  $\Sigma$  est un modèle périodique stable, on a alors :

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^{N-1} \|h_k^{i,j}\|_2^2}$$

Par conséquent,  $\|\Sigma\|_2^2$  représente le carré des normes  $\mathcal{L}_2$  des réponses impulsionnelles pour chacune des entrées et pour  $N$  instants consécutifs.

Cette interprétation peut être vue comme l'adaptation directe (mais nécessaire) de la définition de la norme  $\mathcal{H}_2$  pour les modèles LTI dans la mesure où, pour les systèmes à temps-variant la réponse impulsionnelle dépend de l'instant d'application de l'impulsion. Pour une même impulsion appliquée à des instants différents, il n'existe cependant que  $N$  cas différents en raison de la périodicité du système.

**Remarque.** Ces deux dernières interprétations expliquent pourquoi un facteur  $\sqrt{N}$  est parfois ajouté à la définition de la norme  $\mathcal{H}_2$ , donnée par (D.1) (voir par exemple [Bamieh et al., 1991], [Bittanti and Cuzzola, 2001] ou [Farges et al., 2007]) :  $\|\Sigma\|_2^2$  correspond alors exactement aux moyennes citées précédemment (sans le facteur  $1/N$ ). Dans [Bittanti and Colaneri, 2008], les auteurs ont abandonné l'ancienne formulation pour adopter la convention retenue dans cette thèse.  $\circ$

**Réponse à un signal aléatoire** Si l'entrée  $w_k$  du modèle périodique stable  $\Sigma$  est un bruit blanc dont la covariance est égale à la matrice identité alors

$$\|\Sigma\|_2 = \sqrt{\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[z_{qN+k}^T z_{qN+k}]}$$

où  $\mathbb{E}[\cdot]$  est l'opérateur espérance.

### D.2.2 Norme $\mathcal{H}_\infty$

**Gain maximal** La norme  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\Sigma$  peut être formulée comme suit

$$\|\Sigma\|_\infty = \sup_{w_k \in \ell_2 - \{0\}} \frac{\|z_k\|_2}{\|w_k\|_2} = \sup_{\|w_k\|=1} \|G(\sigma, k)w_k\|_2$$

Comme dans le cas des modèles temps-invariant, cette norme correspond donc au gain maximal de  $G(\sigma, k)$  selon toutes les directions de  $w_k$ .

**Stabilité robuste** Supposons qu'il existe un bouclage externe au modèle tel que  $w_k = \Delta(k)z_k$  où  $\Delta(k)$  est une matrice non-structurée (à temps-variant, pleine et dont les coefficients sont dans  $\mathbb{C}$ ) telle que  $\|\Delta(k)\|_\infty < 1/\nu$ . Une telle boucle fermée est stable si et seulement si  $\|\Sigma\|_\infty < \nu$  (voir [Rotea et al., 1993] et [Packard and Doyle, 1990]).

## D.3 Normes et dualité des systèmes

Similairement au cas LTI, il est possible de définir un modèle dual de  $\Sigma$ , noté  $\Sigma^d$ , dont la dynamique évolue à temps inversé. Classiquement, l'expression de ce système est donnée par la relation suivante, dans laquelle apparaissent les matrices périodiques de  $\Sigma$  :

$$\Sigma^d : \begin{bmatrix} x_k^d \\ z_k^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k^T & C_k^T \\ B_k^T & D_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^d \\ w_k^d \end{bmatrix}$$

Comme pour les modèles à temps-invariant,  $\Sigma^d$  est stable si et seulement si  $\Sigma$  l'est. De plus, ces deux systèmes partagent les mêmes normes.

**Théorème 50.** Les normes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  du modèle périodique  $\Sigma$  et de son dual  $\Sigma^d$  sont identiques :

$$\|\Sigma\|_2 = \|\Sigma^d\|_2, \quad \|\Sigma\|_\infty = \|\Sigma^d\|_\infty$$

Enfin, on peut montrer que les grammians d'observabilité et de commandabilité des deux modèles sont intervertis. Si l'on nomme respectivement  $W_k^{od}$  et  $W_k^{cd}$ , les grammians d'observabilité et de commandabilité de  $\Sigma^d$  alors  $W_k^{od} = W_k^c$  et  $W_k^{cd} = W_k^o$ .





## Annexe E

# Développements complémentaires au chapitre 2

### E.1 Preuves des conditions duales d'analyse du modèle descripteur

Cette annexe démontre la validité des conditions duales d'analyse établies dans la sous-section 2.6.3. En premier lieu, les conditions d'analyse basées sur le modèle monodromique dual sont reformulées par le lemme suivant.

**Lemme 36** (Conditions duales utilisant les signaux). *Les conditions duales de stabilité et des problèmes  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$  peuvent être réécrites de la façon suivante :*

– (2.67) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \eta_{q-1}^d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \eta_{q-1}^d \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad [\check{\Psi}_{0,0}^T \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \eta_{q-1}^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.1})$$

– (2.71) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & & & \\ & W & & \\ & & -\nu \mathbf{1}_{pN} & \\ & & & \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.2})$$

– (2.73a) et (2.73b) est équivalent à

$$\begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -W & & & \\ & W & & \\ & & \mathbf{0}_{pN} & \\ & & & \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl+p(l-1)} & & & \\ & W & & \\ & & -Z & \\ & & & \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_q^d \\ \rho_{q-1}^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.4})$$

*Démonstration.* L'application du lemme d'élimination suffit à prouver que les conditions (E.1), (E.2), (E.3) et (E.4) sont équivalentes à (2.67), (2.71), (2.73a) et (2.73b) respectivement en remarquant que

$$\begin{aligned} & [\check{\Psi}_{0,0}^T \quad -\mathbf{1}] \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \check{\Psi}_{0,0}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \check{\Psi}^T & \check{\mathfrak{C}}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \check{\mathfrak{D}}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \check{\Psi}^T \\ \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \check{\Psi}^T & -\mathbf{1} & \check{\mathfrak{C}}^T & \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathfrak{D}}^T & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \check{\mathfrak{C}}^T \\ \mathbf{1} \\ \check{\mathfrak{D}}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

On précise que dans le cas autonome,  $\phi_q^d = \mathbf{0}$  quel que soit  $q \in \mathbb{Z}$  d'après (2.69). Par conséquent, on a  $\eta_{q-1}^d = \check{\Psi}_{0,0}^T \eta_q^d$ .  $\square$

En s'appuyant sur la correspondance entre les signaux des liftings donnés par la proposition 11, ces nouveaux énoncés sont reformulés.

**Preuve de (2.78) : condition duale de stabilité du Th. 18**

*Démonstration.* Dans le cas autonome, la relation suivante, extraite de (2.63), établit le lien entre les vecteurs d'état de  $\Gamma_m^d$  et  $\Gamma_e^d$ .

$$\begin{bmatrix} \eta_q^d \\ \eta_{q-1}^d \end{bmatrix} = T \hat{x}_q^d$$

Cette équation est équivalente à (2.25) dans le contexte dual. La matrice  $T$  étant de rang plein, la condition (E.1) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(\hat{x}_q^d)^T T^T \begin{bmatrix} -W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W \end{bmatrix} T \hat{x}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad [\check{\mathcal{A}}^T \quad \check{\mathcal{E}}^T] \hat{x}_q^d = \mathbf{0}$$

Puis,  $\mathcal{X}(W) = T^T \text{diag}\{-W, W\} T$  est introduit et le lemme d'élimination est utilisé pour obtenir (2.78).  $\square$

**Preuve de (2.81) : condition duale  $\mathcal{H}_\infty$  du Th. 19**

*Démonstration.* L'équation (E.2) est d'abord reformulée en s'appuyant sur (2.63)

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix}^T (T^d)^T \begin{bmatrix} -W & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1} \end{bmatrix} T^d \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} + (\check{z}_q^d)^T \check{z}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\check{\mathcal{A}}^T & \check{\mathcal{E}}^T] & [\check{\mathcal{C}}_2^T & \check{\mathcal{C}}_1^T] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \check{\mathcal{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathcal{D}}^T & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.5})$$

avant d'introduire  $\mathcal{X}^d(W, -\nu \mathbf{1})$ . La substitution de l'expression de  $\check{z}_q^d$  donne ensuite

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix}^T \left( \mathcal{X}^d(W, -\nu \mathbf{1}) + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \check{\mathcal{B}} \\ \mathbf{0} \\ \check{\mathcal{D}} \end{bmatrix} \right\} \right) \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\check{\mathcal{A}}^T & \check{\mathcal{E}}^T] & [\check{\mathcal{C}}_2^T & \check{\mathcal{C}}_1^T] \\ \mathbf{0} & \check{\mathcal{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathcal{D}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.6})$$

qui conduit à la condition (2.81) en application le lemme d'élimination.  $\square$

**Preuve de (2.84a) et (2.84b) : conditions duales  $\mathcal{H}_2$  du Th. 20**

*Démonstration.* L'utilisation de (2.63) permet de réécrire (E.3) :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix}^T (T^d)^T \begin{bmatrix} -W & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T^d \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} + (\check{z}_q^d)^T \check{z}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\check{\mathcal{A}}^T & \check{\mathcal{E}}^T] & [\check{\mathcal{C}}_2^T & \check{\mathcal{C}}_1^T] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \check{\mathcal{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathcal{D}}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{pN} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.7})$$

Cette condition peut être simplifiée de la façon suivante :

$$(\hat{x}_q^d)^T \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T \mathcal{X}^d(W, \mathbf{0}) \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n(N+l)+p(l-1)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}_q^d + (\check{z}_q^d)^T \check{z}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\check{\mathcal{A}}^T & \check{\mathcal{E}}^T] & \check{\mathcal{C}}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \check{\mathcal{B}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.8})$$

Cela conduit, après substitution de  $\check{z}_q^d$  par son expression et utilisation du lemme d'élimination, à (2.84a).

De même, en s'appuyant sur (2.63), l'équation (E.4) est reformulée :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix}^T (T^d)^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -Z \end{bmatrix} T^d \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \end{bmatrix} + (\check{z}_q^d)^T \check{z}_q^d < 0 \quad \text{telle que} \quad \begin{bmatrix} [\check{\mathcal{A}}^T & \check{\mathcal{E}}^T] & [\check{\mathcal{C}}_2^T & \check{\mathcal{C}}_1^T] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \check{\mathcal{B}}^T & \mathbf{0} & \check{\mathcal{D}}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{p(l-1)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_q^d \\ \check{w}_q^d \\ \check{z}_q^d \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.9})$$

On remarque que certains éléments des signaux mis en jeu dans cette équation sont nuls ce qui permet de simplifier (E.9) :

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times p(l-1)}] \hat{x}_q^d \\ \hline & \check{w}_q^d & \end{array} \right]^T \mathcal{Z}^d(W, Z) \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times p(l-1)}] \hat{x}_q^d \\ \hline & \check{w}_q^d & \end{array} \right] + (\check{z}_q^d)^T \check{z}_q^d < 0 \\ & \text{telle que } \left[ \begin{array}{c|c} \check{\mathcal{E}}^T & \check{\mathcal{C}}_1^T | \mathbf{0} \\ \check{\mathcal{B}}^T | \mathbf{0}_{n \times nN} & \check{\mathcal{D}}^T | \mathbf{1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} [\mathbf{0}_{nN \times nl} & \mathbf{1}_{nN} & \mathbf{0}_{nN \times p(l-1)}] \hat{x}_q^d \\ \hline & \check{w}_q^d & \\ & \check{z}_q^d & \end{array} \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

A nouveau, le remplacement de  $\check{z}_q^d$  par son expression ainsi que l'emploi du lemme d'élimination donne naissance la condition (2.84b).  $\square$

## E.2 Preuve algébrique de la condition primale $\mathcal{H}_\infty$ descripteur

Cette annexe présente une preuve alternative, purement algébrique, à la condition d'analyse  $\mathcal{H}_\infty$  primale, établie dans sa version descripteur par le Th. 19. Il s'agit de montrer que (2.70) est équivalente à (2.80). On affirme que toutes les autres conditions d'analyse descripteur admettent une démonstration de cette forme.

Contrairement à la démonstration donnée dans le corps du texte, les développements de cette annexe s'appuient sur la correspondance entre les matrices des deux représentations liftée  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_m$ , données par le Tab. 2.2 et rappelées ici.

	$l \leq N$	$l > N$
$\Psi$	$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{E}_{1,0}^{-1} (\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1)$	$\begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} \\ \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0}_{n(l-N) \times nN} \end{bmatrix}$
$\mathfrak{B}$	$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{E}_{1,0}^{-1} (\mathcal{E}_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 - \mathcal{B}_1)$	$\begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$
$\mathfrak{C}$	$C_{1,0} \tilde{\mathcal{A}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + C_2$	$-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} + C_2$
$\mathfrak{D}$	$C_{1,0} \tilde{\mathcal{B}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}$	$-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}$

On rappelle également la définition du partitionnement des matrices de  $\Gamma_m$  lorsque  $l \leq N$  :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{E} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{E}_{1,0} & \mathcal{E}_{1,1} & \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathcal{E}_{0,0} & \mathcal{A}_0 & \mathcal{B}_0 \\ \hline \mathcal{C}_{1,0} & \mathcal{C}_{1,1} & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D} \end{array} \right]$$

En premier lieu, on reformule la condition  $\mathcal{H}_\infty$  monodromique (2.70) de la façon suivante :

$$\left[ \begin{array}{c|c} \Psi & \mathfrak{B} \end{array} \right]^T P \left[ \begin{array}{c|c} \Psi & \mathfrak{B} \end{array} \right] + \text{Sq} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathfrak{C}^T \\ \mathfrak{D}^T \end{array} \right] \right\} + \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (\text{E.11})$$

La démarche consiste à remplacer les expressions de  $\Psi$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{D}$ , données par le tableau précédent, dans (E.11) puis à reconstruire  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  pour faire apparaître (2.80), reformulée de la façon suivante :

$$R^T \left( \begin{bmatrix} -\mathcal{X}(P) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}^T \end{array} \right] \right\} \right) R \prec 0 \quad \text{telle que} \quad \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathcal{E} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{array} \right] R = \mathbf{0} \quad (\text{E.12})$$

### E.2.1 Cas où $l \leq N$

La substitution dans (E.11) de  $\Psi$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{D}$  par leur expression conduit à

$$\left[ \tilde{\mathcal{A}} \quad \tilde{\mathcal{B}} \right]^T P \left[ \tilde{\mathcal{A}} \quad \tilde{\mathcal{B}} \right] + \text{Sq} \left\{ \left[ \begin{array}{c} \left( C_{1,0} \tilde{\mathcal{A}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + C_2 \right)^T \\ \left( C_{1,0} \tilde{\mathcal{B}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D} \right)^T \end{array} \right] \right\} + \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \prec 0$$

On remarque que

$$\left[ \begin{array}{c} \left( C_{1,0} \tilde{\mathcal{A}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 + C_2 \right)^T \\ \left( C_{1,0} \tilde{\mathcal{B}} - C_{1,1} \mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D} \right)^T \end{array} \right]^T = \left( \begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{C}_{1,0} & \mathcal{C}_{1,1} & C_2 & \mathcal{D} \\ \hline \mathcal{C}_1 & \mathcal{C}_2 & \mathcal{D} & \end{array} \right) \underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathcal{A}} & \tilde{\mathcal{B}} \\ \hline -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{A}_0 & -\mathcal{E}_{0,0}^{-1} \mathcal{B}_0 \\ \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{mN} \end{array} \right]^T}_{\Xi} = \Xi^T \left[ \begin{array}{c} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}^T \end{array} \right]$$

La définition de  $\Xi$  permet d'écrire

$$[\tilde{\mathcal{A}} \ \tilde{\mathcal{B}}] = [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times n(N-l)} \ \mathbf{0}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}] \Xi \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} = \Xi^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n(N-l)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \Xi$$

Par conséquent, l'inéquation (E.11) est équivalente à

$$\Xi^T \left( [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times n(N-l)} \ \mathbf{0}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}]^T P [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times n(N-l)} \ \mathbf{0}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}] + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n(N-l)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \right) \Xi \prec 0$$

correspondant elle-même à (E.12) avec  $\Xi = R$  puisqu'on peut vérifier que  $[\mathcal{E} \ \mathcal{A} \ \mathcal{B}] \Xi = \mathbf{0}$ .

### E.2.2 Cas où $l > N$

A nouveau, la substitution dans (E.11) de  $\Psi$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{D}$  par leur expression conduit à

$$\begin{bmatrix} & -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A} \\ \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0}_{n(l-N) \times nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} & -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A} \\ \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0}_{n(l-N) \times nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} (-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{C}_2)^T \\ (-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D})^T \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix} \prec 0$$

On remarque que

$$\begin{bmatrix} (-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{A} + \mathcal{C}_2)^T \\ (-\mathcal{C}_1 \mathcal{E}^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{D})^T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [\mathcal{C}_1 \ \mathcal{C}_2 \ \mathcal{D}] \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A} & -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} \\ \mathbf{1}_{nl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{m_w N} \end{bmatrix}}_{\Xi} \end{pmatrix}^T$$

La définition de  $\Xi$  permet d'écrire d'une part

$$\begin{bmatrix} & -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A} \\ \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0}_{n(l-N) \times nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times nN} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}] \underbrace{\begin{bmatrix} & -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{A} \\ \mathbf{1}_{n(l-N)} & \mathbf{0}_{n(l-N) \times nN} \\ \mathbf{0}_{nN \times n(l-N)} & \mathbf{1}_{nN} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{mN} \end{bmatrix}}_{\Xi} \begin{bmatrix} -\mathcal{E}^{-1}\mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

et d'autre part

$$\begin{bmatrix} -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{Nm_w} \end{bmatrix} = \Xi^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{Nm_w} \end{bmatrix} \Xi$$

Par conséquent, l'inéquation (E.11) est équivalente à

$$\Xi^T \left( [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times nN} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}]^T P [\mathbf{1}_{nl} \ \mathbf{0}_{nl \times nN} \ \mathbf{0}_{nl \times mN}] + \text{Sq} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1^T \\ \mathcal{C}_2^T \\ \mathcal{D}^T \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{nN} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu \mathbf{1}_{Nm_w} \end{bmatrix} \right) \Xi \prec 0$$

correspondant elle-même à (E.12) avec  $\Xi = R$  puisqu'on peut vérifier que  $[\mathcal{E} \ \mathcal{A} \ \mathcal{B}] \Xi = \mathbf{0}$ .

# Annexe F

## Algèbre vectorielle et vectrices

Bien que l'étude des systèmes dynamiques consiste généralement à obtenir des équations scalaires, nombre d'équations différentielles sont exprimées dans un premier temps sous une forme vectorielle, indépendante du référentiel considéré. De plus, lors de l'usage de multiples référentiels, le respect de la règle stipulant que tous les termes d'une équation vectorielle doivent être exprimés dans le même référentiel, requiert une attention toute particulière. Il est notoire que l'une et l'autre de ces difficultés sont typiques de l'étude de la dynamique des satellites.

Les vectrices (traduction française du terme anglo-saxon *vecatrix*) ont été conçues comme une réponse à ces difficultés. Cet outil permet en effet de découpler l'analyse de la dynamique en deux étapes : la première vise à obtenir des équations vectorielles et donc indépendantes de tout référentiel, tandis que la seconde exprime ces relations dans le référentiel choisi. Dans certain cas, cette approche favorise la factorisation d'étapes de calcul redondantes en retardant l'introduction de quantités scalaires.

L'ouvrage [Hugues, 1986], et en particulier son annexe B, fournit une description détaillée de ce concept, dont on donne ici les éléments essentiels.

### F.1 Définitions

On clarifie tout d'abord le sens accordé dans le chapitre 3 au terme « vecteur ». Ce mot désigne un objet mathématique possédant une direction, un sens et une amplitude dans un espace à trois dimensions. Il ne dépend donc pas d'un référentiel particulier bien qu'il puisse, si besoin, être exprimé dans un référentiel d'intérêt.

Une vectrice, noté  $\vec{\mathcal{F}}$ , est une matrice de trois vecteurs formant une base orthonormée directe. A titre d'exemple, la vectrice associée au référentiel  $F_A$  est la suivante :

$$\vec{\mathcal{F}}_A = \begin{bmatrix} \vec{x}_A \\ \vec{y}_A \\ \vec{z}_A \end{bmatrix}$$

Soit le vecteur  $\vec{v}$ . Ses trois composantes scalaires dans le référentiel  $F_A$  sont notées  $\{v_x^{[A]}, v_y^{[A]}, v_z^{[A]}\}$ . Pour bénéficier des avantages des notations matricielles, on regroupe ces termes dans une matrice colonne de dimensions  $3 \times 1$ , notée  $v^{[A]}$  :

$$v^{[A]} = \begin{bmatrix} v_x^{[A]} \\ v_y^{[A]} \\ v_z^{[A]} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bien que cette matrice soit fréquemment assimilée au vecteur  $\vec{v}$  lui-même, cette thèse ne suit pas cette direction et réserve le terme vecteur à l'objet noté  $\vec{v}$ .

Par définition, on a la relation suivante

$$\vec{v} = v_x^{[A]} \vec{x}_A + v_y^{[A]} \vec{y}_A + v_z^{[A]} \vec{z}_A \quad (\text{F.1})$$

admettant deux représentations matricielles équivalentes

$$\vec{v} = \left( v^{[A]} \right)^T \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{\mathcal{F}}_A^T v^{[A]} \quad (\text{F.2})$$

## F.2 Expression d'une relation vectorielle dans un référentiel particulier

L'usage des vectrices rend directe l'extraction des composantes d'équations vectorielles dans un référentiel quelconque. Ceci constitue l'avantage majeur de cet outil. Sans surprise, la relation suivante montre que cette transformation se réduit à une série de produits scalaires :

$$v^{[A]} = \begin{bmatrix} \vec{v} \cdot \vec{x}_A \\ \vec{v} \cdot \vec{y}_A \\ \vec{v} \cdot \vec{z}_A \end{bmatrix} = \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{v} \quad (\text{F.3})$$

Dans un contexte où il existe de nombreux référentiels différents, l'usage de cette notation est particulièrement probant. On considère le cas où les composantes de  $\vec{v}$  sont disponibles dans  $F_A$  alors que  $\vec{v}$  doit être exprimé dans  $F_B$ . Premièrement, en utilisant (F.2),  $\vec{v}$  est écrit dans  $F_B$  :

$$v^{[B]} = \vec{\mathcal{F}}_B \cdot \vec{v}$$

Puis, les composantes de  $\vec{v}$  dans le référentiel dans lequel elles sont disponibles, sont introduites en s'appuyant sur (F.2) :

$$v^{[B]} = \vec{\mathcal{F}}_B \cdot \left( \vec{\mathcal{F}}_A^T v^{[A]} \right) = \left( \vec{\mathcal{F}}_B \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T \right) v^{[A]}$$

Le lien entre  $v^{[B]}$  et  $v^{[A]}$  est  $\vec{\mathcal{F}}_B \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T$  et correspond à la matrice de rotation  $C_{B/A}$ , comme le montre l'équation suivante :

$$\vec{\mathcal{F}}_B \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T = \begin{bmatrix} \vec{x}_B \cdot \vec{x}_A & \vec{x}_B \cdot \vec{y}_A & \vec{x}_B \cdot \vec{z}_A \\ \vec{y}_B \cdot \vec{x}_A & \vec{y}_B \cdot \vec{y}_A & \vec{y}_B \cdot \vec{z}_A \\ \vec{z}_B \cdot \vec{x}_A & \vec{z}_B \cdot \vec{y}_A & \vec{z}_B \cdot \vec{z}_A \end{bmatrix} = C_{B/A} \quad (\text{F.4})$$

Par la même occasion, on introduit la relation suivante, valable pour toute vectrice  $F_A$  :

$$\vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T = C_{A/A} = \mathbf{1}_3 \quad (\text{F.5})$$

## F.3 Produit scalaire

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  peut être écrit comme suit en faisant apparaître les composantes de ces vecteurs dans  $F_A$  :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left( \left( u^{[A]} \right)^T \vec{\mathcal{F}}_A \right) \cdot \left( \vec{\mathcal{F}}_A^T v^{[A]} \right) = \left( u^{[A]} \right)^T \left( \vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T \right) v^{[A]}$$

Grâce à (F.5), le produit scalaire correspond à la relation bien connue suivante :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left( u^{[A]} \right)^T v^{[A]}$$

## F.4 Produit vectoriel

Soit le vecteur  $\vec{w}$ , résultat du produit vectoriel suivant :

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Sous l'hypothèse que les composantes de tous ces vecteurs sont disponibles dans un référentiel unique, alors les composantes de  $\vec{w}$  dans ce même référentiel sont données par l'équation matricielle suivante :

$$w^{[A]} = \left( u^{[A]} \right)^\times \cdot v^{[A]}$$

Par conséquent, en utilisant (F.2), il peut être démontré que

$$\vec{w} = \vec{\mathcal{F}}_A^T \cdot \left( u^{[A]} \right)^\times \cdot v^{[A]}$$

Les deux dernières équations font référence à l'opérateur  $( )^\times$  construisant, à partir de la matrice colonne  $p$ , la matrice antisymétrique suivante :

$$p^\times = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pour} \quad p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

## F.5 Tenseur dyadique

Afin de conserver les équations sous leur forme vectorielle (indépendante de tout référentiel) le plus longtemps possible, on introduit un outil nommé tenseur dyadique ou, plus simplement, dyadique. Pour rendre explicite la pertinence d'un tel instrument mathématique, on considère le double produit vectoriel suivant

$$\vec{z} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

pour lequel on souhaite factoriser le terme  $\vec{w}$ .

Les composantes de  $\vec{z}$  dans le référentiel  $F_A$  peuvent être obtenues par deux approches différentes. La première consiste à exprimer ces vecteurs dans  $F_A$  puis à développer les matrices de composantes ainsi obtenues. La seconde stratégie cherche, au contraire, à développer cette expression en conservant sa forme vectorielle pour n'obtenir les composantes de cette relation qu'à la fin. Pour mettre en lumière les différences existant entre ces deux approches, elles sont mises en œuvre parallèlement. On allège temporairement les notations en omettant le nom du référentiel auquel se rapporte les matrices de composantes :  $z$ ,  $u$  et  $v$  font référence à  $z^{[A]}$ ,  $u^{[A]}$  et  $v^{[A]}$ .

$$\begin{array}{cc} \text{Approche 1} & \text{Approche 2} \\ z = (u^T w) v - (u^T v) w & \vec{z} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \end{array}$$

Les termes  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $u^T w$  étant des grandeurs scalaires,  $\vec{v}$  et  $v$  commutent.

$$z = v (u^T w) - (u^T v) w \quad \vec{z} = \vec{v} (\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$$

Puisque  $w$  et  $\vec{w}$  apparaissent du côté droit de ces équations, il est possible de factoriser ces éléments :

$$\begin{array}{cc} z = (vu^T) w - (u^T v) w & \vec{z} = (\vec{v}\vec{u}) \cdot \vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w} \\ z = (vu^T - u^T v \mathbf{1}_3) w & \vec{z} = (\vec{v}\vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \vec{\mathbf{1}}) \cdot \vec{w} \end{array}$$

Pour la première approche, l'associativité du produit matriciel permet la factorisation. Le terme restant,  $vu^T - u^T v \mathbf{1}_3$  est alors une matrice de dimension  $3 \times 3$ . En revanche, dans le cas de la seconde approche, cette même factorisation fait apparaître les deux termes suivants :  $\vec{v}\vec{u}$  et  $\vec{\mathbf{1}}$ . Ces derniers sont nommés dyadiques,  $\vec{\mathbf{1}}$  étant l'élément neutre de cet objet. Il s'agit de deux vecteurs placés côte à côte, de sorte qu'aucun point ni aucune croix ne les sépare. Ceci explique l'origine du terme dyadique, signifiant « une paire ». Le dyadique possède la propriété majeure de produire un vecteur lorsqu'il est lui-même multiplié (au sens du produit scalaire) par un autre vecteur. Ainsi, si  $\vec{D}$  est un dyadique,  $\vec{v} \cdot \vec{D}$  et  $\vec{D} \cdot \vec{v}$  sont deux vecteurs, qui sont d'ailleurs différents dans le cas général.

Parallèlement à (F.1), établie pour les vecteurs, la relation suivante s'applique pour les dyadiques quel que soit le référentiel  $F_A$  :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= d_{1,1}^{[A]} \vec{x}_A \vec{x}_A + d_{1,2}^{[A]} \vec{x}_A \vec{y}_A + d_{1,3}^{[A]} \vec{x}_A \vec{z}_A \\ &+ d_{2,1}^{[A]} \vec{y}_A \vec{x}_A + d_{2,2}^{[A]} \vec{y}_A \vec{y}_A + d_{2,3}^{[A]} \vec{y}_A \vec{z}_A \\ &+ d_{3,1}^{[A]} \vec{z}_A \vec{x}_A + d_{3,2}^{[A]} \vec{z}_A \vec{y}_A + d_{3,3}^{[A]} \vec{z}_A \vec{z}_A \end{aligned}$$

Ainsi, un dyadique peut être exprimé dans le référentiel désiré par une combinaison linéaire des dyadiques élémentaires correspondant à ce référentiel. L'usage des vectrices permet de donner une formulation matricielle plus compacte de cette équation :

$$\vec{D} = \vec{\mathcal{F}}_A^T D^{[A]} \vec{\mathcal{F}}_A \quad (\text{F.6})$$

où la matrice  $D^{[A]}$  est formée des éléments  $d_{i,j}^{[A]}$ . Cette relation joue pour les dyadiques le même rôle que (F.2) tient pour les vecteurs. La réciproque de (F.6), à savoir

$$D^{[A]} = \vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{D} \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T$$

doit donc être vue comme l'homologue de (F.3) qui a été établie pour les vecteurs.

On complète cette description par la présentation de l'élément neutre des dyadiques. Comme expliqué précédemment, ce dernier est noté  $\vec{\mathbf{1}}$  et se nomme dyadique unitaire. De la même manière que  $\vec{D}$  est associé à la matrice  $D^{[A]}$  pour le référentiel  $F_A$ ,  $\vec{\mathbf{1}}$  est associé à la matrice identité  $\mathbf{1}_3$  quel que soit le référentiel considéré. Par conséquent, dans le cas de  $F_A$ , (F.6) conduit à

$$\vec{\mathbf{1}} = \vec{\mathcal{F}}_A^T \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{x}_A \vec{x}_A + \vec{y}_A \vec{y}_A + \vec{z}_A \vec{z}_A \quad (\text{F.7})$$

## F.6 Cinématique des vectrices

On considère deux référentiels  $F_A$  et  $F_B$  tournant l'un par rapport à l'autre, le vecteur de vitesse angulaire de  $F_B$  par rapport à  $F_A$  étant noté  $\vec{\omega}_{B/A}$ . La dérivée temporelle des vecteurs unitaires associés à  $F_B$  est liée au vecteur vitesse selon les relations

$$\dot{\vec{x}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{x}_B, \quad \dot{\vec{y}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{y}_B, \quad \dot{\vec{z}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{z}_B \quad (\text{F.8})$$

dont la traduction matricielle, permise par l'utilisation des vectrices, est la suivante :

$$\dot{\vec{\mathcal{F}}}_B = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{\mathcal{F}}_B \quad (\text{F.9})$$

En utilisant (F.2) puis (F.9), la dérivée temporelle d'un vecteur  $\vec{v}$  quelconque s'exprime ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{\mathcal{F}}}_B^T v^{[B]} + \vec{\mathcal{F}}_B^T \dot{v}^{[B]} \\ &= \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{\mathcal{F}}_B^T v^{[B]} + \vec{\mathcal{F}}_B^T \dot{v}^{[B]} \end{aligned}$$

En se référant à nouveau à (F.2), on donne une représentation vectorielle à cette dernière relation :

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{v} + \overset{\circ}{v}^{[B]} \quad (\text{F.10})$$

Pour parvenir à ce résultat, on a eu recours à la nouvelle notation suivante :

$$\overset{\circ}{v}^{[B]} = \vec{\mathcal{F}}_B^T \dot{v}^{[B]}$$

La présence du terme  $\overset{\circ}{v}^{[B]}$  dans cette relation, indique que l'opérateur  $(\overset{\circ}{})^{[B]}$  correspond à la dérivée temporelle « vue » dans le référentiel  $F_B$ . Ce concept n'est équivalent à la dérivée temporelle classique (ou absolue), notée  $(\dot{\ })$  que si le référentiel de référence est fixe. Autrement dit,  $\overset{\circ}{v} = \dot{v}^{[A]}$  si et seulement si  $F_A$  est fixe (ou inertiel). Ces notations traduisent l'idée bien connue selon laquelle la perception du mouvement n'est pas le même selon le référentiel auquel est lié l'observateur.

On remarquera que la relation (F.10) ne remet pas en cause la validité de (F.8) puisque les vecteurs unitaires de  $F_B$  sont fixes par rapport à ce même référentiel :

$$\overset{\circ}{\vec{x}}_B^{[B]} = \vec{0}, \quad \overset{\circ}{\vec{y}}_B^{[B]} = \vec{0}, \quad \overset{\circ}{\vec{z}}_B^{[B]} = \vec{0}$$

## F.7 Relations importantes d'algèbre vectorielle

Les relations essentielles données dans cette section sont maintenant résumées grâce au formulaire proposé par le tableau F.1. Quelques relations complémentaires, extraites de [Hugues, 1986], sont également adjointes à cette liste.



TABLE F.1 – Relations importantes d'algèbre vectorielle

Vectrices	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\vec{v} = (v^{[A]})^T \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{\mathcal{F}}_A^T v^{[A]}</math>;</li> <li>- <math>v^{[A]} = \vec{v} \cdot \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{v}</math>;</li> <li>- <math>v^{[B]} = C_{B/A} v^{[A]}</math>;</li> <li>- <math>\vec{u} \cdot \vec{v} = (u^{[A]})^T v^{[A]}</math>;</li> <li>- <math>\vec{u} \times \vec{v} = \vec{\mathcal{F}}_A^T (u^{[A]})^\times v^{[A]}</math>.</li> </ul>
Dyadique	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\vec{\mathbf{1}} = \vec{\mathcal{F}}_A^T \vec{\mathcal{F}}_A = \vec{x}_A \vec{x}_A + \vec{y}_A \vec{y}_A + \vec{z}_A \vec{z}_A</math>;</li> <li>- <math>\vec{D} = \vec{\mathcal{F}}_A^T D^{[A]} \vec{\mathcal{F}}_A</math>;</li> <li>- <math>D^{[A]} = \vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{D} \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T</math>.</li> </ul>
Matrices de rotations	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\vec{\mathcal{F}}_B \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T = C_{B/A}</math>;</li> <li>- <math>\vec{\mathcal{F}}_A \cdot \vec{\mathcal{F}}_A^T = \mathbf{1}_3</math>;</li> <li>- <math>C_{B/A} = C_{A/B}^T</math>;</li> <li>- <math>C_j^T(\varphi) = C_j(-\varphi)</math>, <math>\forall j \in \{1, 2, 3\}</math>;</li> <li>- <math>(C_{B/A} u^{[A]})^\times = C_{B/A} \cdot (u^{[A]})^\times \cdot C_{B/A}^T</math>.</li> </ul>
Produit vectoriel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>u^\times v = -v^\times u</math>;</li> <li>- <math>(u^\times)^T = -u^\times</math>;</li> <li>- <math>(u + v)^\times = u^\times + v^\times</math>.</li> </ul>
Dérivation temporelle	<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>\dot{\vec{u}} = \dot{\vec{u}}^{[B]} + \vec{\omega}_{B/A} \times \vec{u}</math>;</li> <li>- <math>\dot{C}_{A/B} = C_{A/B} \omega_{B/A}^\times</math>.</li> </ul>



# Annexe G

## Liste des référentiels utilisés et rotations élémentaires

### G.1 Rotations élémentaires

Toute rotation d'un référentiel par rapport à un autre peut être caractérisée à l'aide de rotations élémentaires numérotées de 1 à 3. Ce chiffre fait référence au vecteur du trièdre correspondant à l'axe de rotation : l'axe de la rotation 1 est  $\vec{x}$  tandis que  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  caractérisent les rotations 2 et 3. Les matrices de rotations associées sont notées  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$ . Selon cette définition, on a

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{G.1})$$

où  $\phi$  est l'angle de la rotation.

La figure G.1 donne une représentation graphique des deux vectrices, en supposant que  $\vec{\mathcal{F}}_B$  est obtenue à partir de  $\vec{\mathcal{F}}_A$  selon une de ces rotations élémentaires.

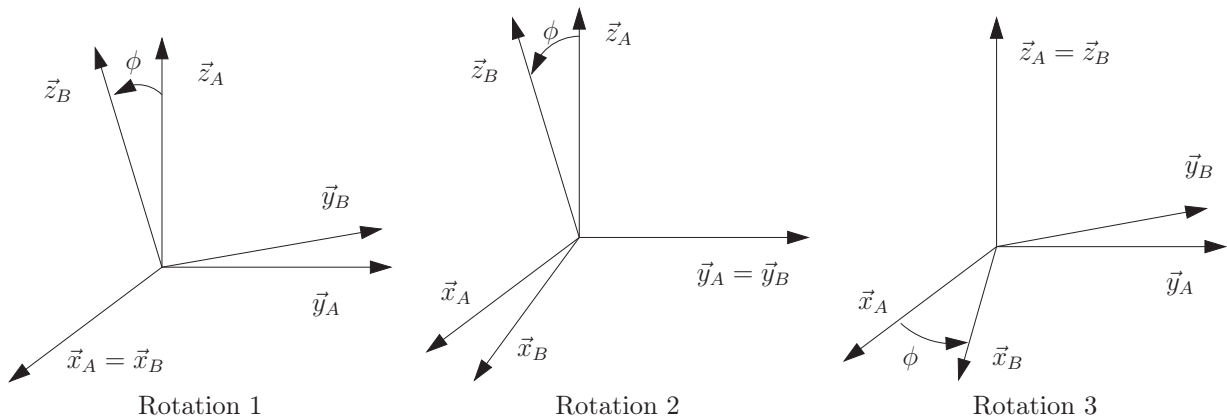


FIGURE G.1 – Représentation graphique des rotations élémentaires

### G.2 Liste des référentiels utilisés

Les tableaux G.1 et G.2 fournissent un résumé du descriptif des différents référentiels utilisés dans cette thèse.

TABLE G.1 – Vectrices des référentiels utilisés pour décrire le champ magnétique perçu par le satellite

Notation	Nom du référentiel	Origine	Description	Figure
$\vec{\mathcal{F}}_I$	Inertiel terrestre (Earth-Centered Inertial)	Centre de la Terre	$\vec{z}_I$ est aligné avec l'axe de rotation de la Terre et dirigé vers le Nord, $\vec{x}_I$ est dirigé vers le soleil pendant l'équinoxe vernal et $\vec{y}_I$ complète le trièdre orthogonal direct.	3.8
$\vec{\mathcal{F}}_E$	Terrestre fixe (Earth-Centered Earth-Fixed)	Centre de masse de la Terre	Dérive de $\vec{\mathcal{F}}_I$ par une rotation 3 d'angle $\beta_{\oplus} + \omega_{\oplus}t$ de telle sorte que $\vec{x}_E$ appartient au plan équatorial et est aligné avec le méridien de Greenwich.	3.8
$\vec{\mathcal{F}}_M$	Géomagnétique	Centre de masse de la Terre	Dérive de $\vec{\mathcal{F}}_E$ par une séquence de rotation 3-1 d'angles $\alpha_m$ et $\gamma_m$ . L'opposé de $\vec{z}_M$ correspond au vecteur unitaire dirigeant le moment $\vec{m}$ du dipôle géomagnétique.	3.9
$\vec{\mathcal{F}}_S$	Sphérique local	Centre de masse du satellite	Obtenu à partir de $\vec{\mathcal{F}}_E$ via une séquence de rotations 3-2-1 d'angle $\lambda$ , $-\phi = \theta - \pi/2$ et $-\pi/2$ .	3.4
$\vec{\mathcal{F}}_O$	Orbital	Centre de masse de la Terre	Obtenu de $\vec{\mathcal{F}}_I$ par une séquence de rotations 3-1-3 d'angles $\Omega$ , $i$ et $\nu + \omega$ de telle sorte que $\vec{x}_O$ est dirigé vers le satellite et $\vec{z}_O$ est normal au plan orbital.	3.5
$\vec{\mathcal{F}}_R$	Référence d'attitude	Centre de masse du satellite	Selon l'hypothèse 2, $\omega_{R/I}^{[R]}(t)$ est périodique à la période orbitale $T_0$ et donnée par la mission.	-
$\vec{\mathcal{F}}_N$	Inertiel local	Centre de masse du satellite	On a $\vec{\mathcal{F}}_N = \vec{\mathcal{F}}_I$	3.8
$\vec{\mathcal{F}}_L$	LVLH (Local Vertical Local Horizontal)	Centre de masse du satellite	$\vec{F}_L$ est fixe par rapport à $\vec{\mathcal{F}}_O$ . On a $\vec{x}_L = \vec{y}_O$ , $\vec{y}_L = -\vec{z}_O$ et $\vec{z}_L = -\vec{x}_O$ .	3.8

TABLE G.2 – Vectrices des référentiels utilisés pour établir les équations dynamiques du satellite

Notation	Objet associé	Origine	Description	Figure
$\vec{\mathcal{F}}_S$	$\mathcal{S}$ : satellite complet	Centre de masse de $\mathcal{S}$	Les vecteurs de $\vec{\mathcal{F}}_S$ sont dirigés par les axes principaux de $\mathcal{S}$ . Ce référentiel est donc fixe par rapport au satellite.	3.3
$\vec{\mathcal{F}}_B$	$\mathcal{B}$ : satellite privé des roues à réaction	Centre de masse de $\mathcal{B}$	Les vecteurs de $\vec{\mathcal{F}}_B$ sont dirigés par les axes principaux de $\mathcal{B}$ .	3.2
$\vec{\mathcal{F}}_{W_k}$	$\mathcal{W}_k$ : $k$ -ième roue à réaction	Centre de masse de $\mathcal{W}_k$	L'axe de rotation de la roue est $\vec{x}_{W_k}$ .	-

## Annexe H

# Linéarisation des équations de la dynamique et de la cinématique

L'utilisation des propriétés de la matrice de produits croisés permet d'affirmer que  $(C_{S/R}B)^\times = C_{S/R}B^\times C_{S/R}^T$ . Les équations non-linéaires décrites par (3.55) s'écrivent alors

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{q} \\ \dot{h}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1} \left( -\omega^\times (J\omega + h_s) + C_{S/R}T_{ext} - T_s - C_{S/R}(B^{[R]}(t))^\times C_{S/R}^T M \right) \\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega^\times + C_{S/R}\omega_{R/I}^\times(t)C_{S/R}^T & \omega - C_{S/R}\omega_{R/I}(t) \\ -\omega^T + \omega_{R/I}^T(t)C_{S/R}^T & 0 \end{bmatrix} q_{S/R} \\ T_s \end{bmatrix}$$

On rappelle également l'expression des signaux d'état sur la trajectoire  $\#$  :

$$\omega_\# = \omega_{R/I}(t), \quad \varepsilon_\# = \mathbf{0}, \quad \eta_\# = 1, \quad (h_s)_\# = h_\#$$

**Equation de la cinématique** La dérivée de  $q$  peut être approximée par la relation suivante à proximité de  $\#$  :

$$\Delta \dot{q} \approx \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} \right)_\# \Delta \omega + \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right)_\# \Delta q$$

Le premier terme est donné par

$$\left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} \right)_\# \Delta \omega = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -\Delta \omega^\times & \Delta \omega \\ -\Delta \omega^T & 0 \end{bmatrix} q \right)_\# = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \omega$$

puisque  $q_\# = \mathbf{1}$ . Le calcul du second terme est décomposé en deux étapes via la relation

$$\left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} \right)_\# \Delta q = \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial C_{S/R}} \right)_\# \left( \frac{\partial C_{S/R}}{\partial q} \right)_\# \Delta q$$

Le premier terme s'exprime ainsi

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial C_{S/R}}{\partial q} \right)_\# \Delta q &= \Delta C_{S/R} \\ &= (2\eta_\# \Delta \eta - \Delta \varepsilon^T \varepsilon_\# - \varepsilon_\#^T \Delta \varepsilon) \mathbf{1}_3 + 2(\Delta \varepsilon \varepsilon_\#^T + \varepsilon_\# \Delta \varepsilon^T) - 2\Delta \eta \varepsilon_\#^\times - 2\eta_\# \Delta \varepsilon^\times \\ &= 2\Delta \eta \mathbf{1}_3 - 2\Delta \varepsilon^\times \end{aligned} \tag{H.1}$$

tandis que la formulation du second peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \dot{q}}{\partial C_{S/R}} \right)_\# \Delta C_{S/R} &= \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \Delta C_{S/R} \left( \omega_{R/I}^\times(t) C_{S/R}^T \right)_\# + \left( C_{S/R} \omega_{R/I}^\times(t) \right)_\# \Delta C_{S/R}^T & -\Delta C_{S/R} \omega_{R/I}(t) \\ \omega_{R/I}^T(t) \Delta C_{S/R}^T & 0 \end{bmatrix} q \right)_\# \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta C_{S/R} \omega_{R/I}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En substituant dans cette équation  $\Delta C_{S/R}$  par son expression donnée précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q}\right)_{\#} \Delta q &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (2\Delta\eta \mathbf{1}_3 - 2\Delta\varepsilon^\times) \omega_{R/I}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \omega_{R/I}^\times(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\varepsilon - \begin{bmatrix} \omega_{R/I}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\eta \end{aligned}$$

En rassemblant les résultats intermédiaires, on a

$$\Delta \dot{q} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\omega - \begin{bmatrix} \omega_{R/I}^\times(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\varepsilon - \begin{bmatrix} \omega_{R/I}(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\eta$$

**Equation de la dynamique** La linéarisation de  $\dot{\omega}$  autour de la trajectoire  $\#$  est donnée par la relation suivante :

$$\Delta \dot{\omega} \approx \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega}\right)_{\#} \Delta\omega + \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q}\right)_{\#} \Delta q + \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial h_s}\right)_{\#} \Delta h_s + \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial T_s}\right)_{\#} \Delta T_s + \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial M}\right)_{\#} \Delta M$$

Le premier terme s'écrit ainsi :

$$\left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega}\right)_{\#} \Delta\omega = J^{-1} \left( -(\Delta\omega)^\times (J\omega + h_s)_{\#} - (\omega^\times J)_{\#} \Delta\omega \right) = J^{-1} K \Delta\omega$$

avec

$$K = \left( (J\omega + h_s)^\times - (\omega^\times J) \right)_{\#} = (J\omega_{R/I}(t) + h_{\#})^\times - \omega_{R/I}^\times(t) J$$

Concernant le second terme,  $q$  est lié à  $\dot{\omega}$  par le biais de la matrice de rotation  $C_{S/R}$  :

$$\left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q}\right)_{\#} \Delta q = \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial C_{B/R}}\right)_{\#} \left(\frac{\partial C_{B/R}}{\partial q}\right)_{\#} \Delta q$$

La dérivée partielle de  $\dot{\omega}$  par rapport à  $C_{S/R}$  correspond à

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial C_{S/R}}\right)_{\#} \Delta C_{S/R} &= J^{-1} \left( \Delta C_{S/R} T_{ext} - \left( \Delta C_{S/R} (B^\times(t) C_{S/R}^T)_{\#} + (C_{S/R} B^\times(t))_{\#} \Delta C_{S/R}^T \right) M_{\#} \right) \\ &= J^{-1} \Delta C_{S/R} T_{ext} \end{aligned}$$

puisque  $M_{\#} = \mathbf{0}$ . En utilisant l'expression de  $\Delta C_{S/R}$  donnée par (H.1), on obtient

$$\left(\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q}\right)_{\#} \Delta q = 2J^{-1} T_{ext} \Delta\eta + 2J^{-1} T_{ext}^\times \Delta\varepsilon$$

Le calcul des autres termes est direct et l'on obtient :

$$\Delta \dot{\omega} \approx J^{-1} \left( K \Delta\omega + 2J^{-1} T_{ext} \Delta\eta + 2J^{-1} T_{ext}^\times \Delta\varepsilon - \omega_{R/I}(t)^\times \Delta h_s - \Delta T_s - B^\times(t) \Delta M \right)$$

**Abandon de  $\Delta\eta$**  Selon la discussion succédant au théorème 33, la dynamique de  $\Delta\eta$  peut être négligée à proximité de la trajectoire  $\#$ . Ceci permet d'écrire :

$$\Delta \dot{q} \approx \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta\omega - \begin{bmatrix} \omega_{R/I}^\times(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta\varepsilon$$

$$\Delta \dot{\omega} \approx J^{-1} \left( K \Delta\omega + 2J^{-1} T_{ext}^\times \Delta\varepsilon - \omega_{R/I}(t)^\times \Delta h_s - \Delta T_s - (B^{[R]}(t))^\times \Delta M \right)$$

La forme matricielle de ces expressions est donnée par le théorème 33.

# Annexe I

## Valeurs numériques des constantes des modèles du satellite

Le tableau I.1 fournit les valeurs numériques des paramètres utilisés pour les simulations des modèles du satellite. Ces valeurs correspondent au satellite Demeter du CNES.

TABLE I.1 – Valeurs numériques des constantes des modèles

Nom	Valeur	Définition
$\mu$	398 600 km <sup>3</sup> .s <sup>-2</sup>	Constante gravitationnelle terrestre
$\omega_{\oplus}$	7, 29.10 <sup>-5</sup> rad.s <sup>-1</sup>	Vitesse moyenne de rotation de la Terre sur elle-même
$\beta_{\oplus}$	0°	Longitude Est du méridien de Greenwich à $t = 0$
$R_{\oplus}$	6 371, 2 km	Rayon équatorial terrestre
$J_s$	4, 11.10 <sup>-4</sup> kg.m <sup>2</sup>	Moment d'inertie des roues à réaction selon leurs axes de rotation
$J_{S/O_S}^{[S]}$	$\begin{bmatrix} 39.30 & -3.65 & -0.37 \\ -3.65 & 27.15 & -1.45 \\ -0.37 & -1.45 & 46.54 \end{bmatrix}$ kg.m <sup>2</sup>	Composant du dyadique du moment d'inertie d'ordre 2 par rapport à $O_S$ , de $S$ privé de l'inertie des roues selon leurs axes de rotation et exprimé dans $F_S$
$X_W^{[S]}$	$\mathbf{1}_3$	Direction des axes de rotation des roues dans le référentiel satellite
$\mu_m$	7, 943.10 <sup>15</sup> Wb.m	Intensité du moment du dipolaire géomagnétique
$\lambda_m$	-72, 22°	Longitude Est de $\vec{m}$ par rapport à $F_E$
$\theta_m$	170, 01°	Co-élévation de $\vec{m}$ par rapport à $F_E$
$\Omega$	22, 25°	Longitude du nœud ascendant
$i$	98, 23°	Inclinaison
$a$	660 km	Longueur du demi-grand axe
$e$	0	Excentricité
$\nu_0$	0°	Valeur de l'anomalie vraie à $t = 0$
$\omega_0$	1, 07.10 <sup>-3</sup> rad.s <sup>-1</sup>	Vitesse angulaire du satellite autour de la Terre
$T_0$	5868 sec.	Période orbitale

Les valeurs numériques des paramètres de la perturbation  $T_{ext}^{[I]}(t)$  sont données par le tableau I.2.

TABLE I.2 – Valeurs numériques de  $T_{ext}^{[I]}(t)$

$T_{0x} = T_{0y} = T_{0z}$	$T_{1x} = T_{1y} = T_{1z}$	$T_{2x} = T_{2y} = T_{2z}$	$\{\varphi_{T1x}, \varphi_{T2x}\}$	$\{\varphi_{T1y}, \varphi_{T2y}\}$	$\{\varphi_{T1z}, \varphi_{T2z}\}$
$1.0 \cdot 10^{-7} N.m$	$2.1 \cdot 10^{-5} N.m$	$2.1 \cdot 10^{-5} N.m$	$\{\pi/4, -\pi/4\}$	$\{-\pi/4, \pi/4\}$	$\{0, \pi/2\}$





# Bibliographie

- D. Arzelier. Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation. Habilitation à Diriger des Recherches, (HDR), LAAS-CNRS, 2004.
- J. Bailey. Periodic operation of chemical reactors : A review. *Chemical Engineering Communications*, 1(3) : 111–124, 1974.
- B. Bamieh, J. Pearson, B. A. Francis, and A. Tannenbaum. A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control. *Systems & Control Letters*, 17(2) :79 – 88, 1991.
- B. R. Barmish. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Company, New York, 1994.
- J. Bernussou, J. C. Geromel, and P. Peres. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13 :65–72, 1989.
- S. Bhat and D. Bernstein. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon. *Systems & Control Letters*, 39(1) :63–70, 2000.
- S. Bittanti and P. Colaneri. Analysis of discrete-time linear periodic systems. *Control and Dynamic Systems*, 78 :313–339, 1996.
- S. Bittanti and P. Colaneri. A LMI characterization of the class of stabilizing controllers for periodic discrete-time systems. In *14th IFAC World Congress*, Beijing, 1999.
- S. Bittanti and P. Colaneri. Invariant representations of discrete-time periodic systems. *Automatica*, 36(12) : 1777 – 1793, 2000. ISSN 00051098.
- S. Bittanti and P. Colaneri. *Periodic Systems : Filtering and Control*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2008.
- S. Bittanti and F. A. Cuzzola. An LMI approach to periodic discrete-time unbiased filtering. *Systems & Control Letters*, 42(1) :21 – 35, 2001.
- S. Bittanti and M. Lovera. On the zero dynamics of rotor loads. *European Journal of Control*, 2(1) :57–68, 1996.
- S. Bittanti and P. Colaneri. *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, volume 16, chapter Periodic Control, pages 59–73. John Wiley and Sons, Inc., 1999.
- P.-A. Bliman. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42 :2016–2042, 2004a.
- P.-A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter-dependent LMIs. *Systems & Control Letters*, 51(3–4) :165 – 169, 2004b.
- A. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24. Springer, 2003.
- A. Bloch, J. Marsden, and D. Zenkov. Nonholonomic dynamics. *Notices of the AMS*, 52(3) :320–329, 2005.
- S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, and E. Yaz. Linear matrix inequalities in system and control theory. *Proceedings of the IEEE*, 85(4) :698–699, 1997.
- P. Brunovsky. A classification of linear controllable systems. *Kybernetika*, 3(6) :173–188, 1970.
- C. Byrnes and A. Isidori. On the attitude stabilization of rigid spacecraft. *Automatica*, 27(1) :87–95, 1991.

- C. Böhm. *Predictive Control using Semi-definite Programming - Efficient Approaches for Periodic Systems and Lur'e Systems*. PhD thesis, University of Stuttgart, 2011.
- P. Camillo and F. Markley. Orbit-averaged behavior of magnetic control laws for momentum unloading. *Journal of Guidance and Control*, 3 :563–568, 1980.
- N. Chaturvedi, A. Sanyal, and N. McClamroch. Rigid-body attitude control. *Control Systems, IEEE*, 31(3) :30–51, june 2011.
- X. Chen, W. H. Steyn, S. Hodgart, and Y. Hashida. Optimal combined reaction-wheel momentum management for Earth-pointing satellites. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 22(4) :543 – 550, 1999. ISSN 07315090.
- G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. *Positive polynomials in control*, chapter An LMI-based technique for robust stability analysis of linear systems with polynomial parametric uncertainties, pages 87–101. Springer, 2004.
- G. Chesi, A. Garulli, A. Tesi, and A. Vicino. *Homogeneous Polynomial Forms for Robustness Analysis of Uncertain Systems*. Springer, 2009.
- M. Choi. Positive semidefinite biquadratic forms. *Linear Algebra and its Applications*, 12(2) :95–100, 1975.
- C. Chung and J. Hauser. Nonlinear control of a swinging pendulum. *Automatica*, 31(6) :851–862, 1995.
- P. Colaneri. Theoretical aspects of continuous-time periodic systems. *Annual Reviews in Control*, 29(2) :205 – 215, 2005.
- M. Corno and M. Lovera. Spacecraft attitude dynamics and control in the presence of large magnetic residuals. *Control Engineering Practice*, 17(4) :456 – 68, 2009.
- A. Corti and M. Lovera. *Control of Linear Parameter Varying systems with applications*, chapter Attitude Regulation for Spacecraft with Magnetic Actuators : An LPV Approach, page 339. Springer, 2012.
- M. Courtois. *Techniques & technologies des véhicules spatiaux - Volume 3 : Plats-formes*. CNES, 1998.
- D. Coutinho, A. Trofino, and M. Fu. Guaranteed cost control of uncertain nonlinear systems via polynomial Lyapunov functions. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 47(9) :1575–1580, 2002.
- J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & control letters*, 43(5) :355–359, 2001.
- M. de Oliveira, J. Bernussou, and J. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4) :261–265, 1999.
- C. de Souza and A. Trofino. An LMI approach to stabilization of linear discrete-time periodic systems. *International Journal of Control*, 73(8) :696 – 703, 2000.
- D. Desiderio, M. Lovera, S. Pautonnier, and R. Draï. Magnetic momentum management for a geostationary satellite platform. *IET Control Theory and Applications*, 3(10) :1370 – 1382, 2009.
- M. Dettori and C. Scherer. New robust stability and performance conditions based on parameter dependent multipliers. In *Decision and Control, 2000. Proceedings of the 39th IEEE Conference on*, volume 5, pages 4187–4192, 2000.
- J. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. Review of LFTs, LMIs, and  $\mu$ . In *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pages 1227–1232. IEEE, 1991.
- G. Duc and S. Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -analyse : des outils pour la robustesse*. Hermes Science, Paris, 1999.
- G. Dullerud and K. Glover. Robust performance of periodic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(8) :1146–1159, 1996.
- G. Dullerud and F. Paganini. *A course in robust control theory*, volume 6. Springer New York, 2000.
- G. E. Dullerud and S. Lall. New approach for analysis and synthesis of time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(8) :1486 – 1497, 1999.

- Y. Ebihara. Periodically time-varying memory state-feedback for robust  $\mathcal{H}_2$  control of uncertain discrete-time linear systems. *Asian Journal of Control*, 2012. DOI :10.1002/asjc.541.
- Y. Ebihara and D. Peaucelle. LMIs in control. In *IEEE-CDC and ECC*, Seville, Spain, December 2005. (invited session).
- Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. Periodically time-varying dynamical controller synthesis for polytopic-type uncertain discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 5438 – 5443, Cancun, Mexico, 2008a.
- Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. LMI-based periodically time-varying dynamical controller synthesis for discrete-time uncertain linear systems. In *17th IFAC World Congress*, Seoul, South Korea, July 2008b. (invited session).
- Y. Ebihara, Y. Kuboyama, T. Hagiwara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. Further results on periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control and Chinese Control Conference*, pages 702 – 707, Shanghai, China, 2009a.
- Y. Ebihara, Y. Onishi, and T. Hagiwara. Robust performance analysis of uncertain LTI systems : Dual LMI approach and verifications for exactness. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(5) :938–951, 2009b.
- Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. Robust performance analysis of uncertain discrete-time linear systems based on system lifting and LMIs. *European Journal of Control*, 16(6) :532–544, 2010.
- Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. Periodically time-varying memory state-feedback controller synthesis for discrete-time linear systems. *Automatica*, 47(1) :14 – 25, 2011.
- L. El Ghaoui and S. Niculescu. *Advances in linear matrix inequality methods in control*. Society for Industrial Mathematics, 2000.
- M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures ; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 121 :299–340, 1831.
- C. Farges. *Méthodes d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes linéaires périodiques*. PhD thesis, LAAS-CNRS and Université Paul Sabatier, 2006.
- C. Farges, D. Peaucelle, D. Arzelier, and J. Daafouz. Robust  $\mathcal{H}_2$  performance analysis and synthesis of linear polytopic discrete-time periodic systems via LMIs. *System and Control Letters*, 56(2) :159–166, 2007.
- O. Fjellstad and T. Fossen. Comments on “the attitude control problem”. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(3) :699–700, 1994.
- G. Floquet. Sur les équations différentielles lineaires à coefficients périodiques. *Annales de l'école normale supérieure*, 2(12) :47–89, 1883.
- J. R. Forbes and C. J. Damaren. Geometric approach to spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 33(2) :590 – 595, 2010. ISSN 07315090.
- L. Freidovich, A. Robertsson, A. Shiriaev, and R. Johansson. Periodic motions of the pendubot via virtual holonomic constraints : Theory and experiments. *Automatica*, 44(3) :785 – 791, 2008.
- F. Giuliatti, A. A. Quarta, and P. Tortora. Optimal control laws for momentum-wheel desaturation using magnetorquers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(6) :1464 – 1468, 2006.
- H. Hablani. Comparative stability analysis and performance of magnetic controllers for bias momentum satellites. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(6) :1313–1320, 1995.
- H. Hablani. Pole-placement technique for magnetic momentum removal of Earth-pointing spacecraft. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 20(2) :268–275, 1997.
- W. Haddad and V. Chellaboina. *Nonlinear dynamical systems and control : a Lyapunov-based approach*. Princeton University Press, 2011.

- D. Henrion, D. Arzelier, D. Peaucelle, and J. Lasserre. On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. In *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, volume 1, pages 887–892. IEEE, 2004.
- G. Hill. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. *Acta Mathematica*, 8(1) :1–36, 1886.
- D. Hinrichsen and A. Pritchard. *Mathematical systems theory I : modelling, state space analysis, stability and robustness*, volume 1. Springer Verlag, 2005.
- L. Hogben. *Handbook of linear algebra*. CRC Press, 2007.
- F. Horn and R. Lin. Periodic processes : a variational approach. *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 6(1) :21–30, 1967.
- Y. Hosoe and T. Hagiwara. Properties of discrete-time noncausal linear periodically time-varying scaling and their relationship with shift-invariance in lifting-timing. *International Journal of Control*, 84(6) :1067–1079, 2011.
- P. C. Hugues. *Spacecraft attitude dynamics*. Dover Publications, 1986.
- S. Joshi, A. Kelkar, and J. Wen. Robust attitude stabilization of spacecraft using nonlinear quaternion feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 40(10) :1800–1803, 1995.
- T. Kailath. *Linear systems*, volume 1. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- C. Kao, A. Megretski, and U. Jonsson. A cutting plane algorithm for robustness analysis of periodically time-varying systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(4) :579–592, 2001.
- V. Kapila and W. Haddad. Robust controller synthesis for uncertain discrete-time periodic systems. In *American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998*, volume 5, pages 3129–3130. IEEE, 1998.
- H. Kerkeni, J. Lauber, and T.-M. Guerra. Some results about stabilization of periodic takagi-sugeno models. In *Fuzzy Systems, 2009. FUZZ-IEEE 2009. IEEE International Conference on*, pages 814 –819, aug. 2009.
- H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, third edition, 2002.
- P. Khargonekar, K. Poolla, and A. Tannenbaum. Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 30(11) :1088 – 1096, nov 1985.
- J. Lasserre. *Moments, positive polynomials and their applications*. Imperial College Press, 2010.
- M. Lovera. Optimal magnetic momentum control for inertially pointing spacecraft. *European Journal of Control*, 7(1) :30–39, 2001.
- M. Lovera and A. Astolfi. Spacecraft attitude control using magnetic actuators. *Automatica*, 40(8) :1405 – 1414, 2004. ISSN 00051098.
- M. Lovera, E. De Marchi, and S. Bittanti. Periodic attitude control techniques for small satellites with magnetic actuators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(1) :90 – 95, 2002. ISSN 10636536.
- A. M. Lyapunov. Sur une série relative a la théorie des équations différentielles linéaires avec coefficients périodiques. *Compte Rendu Acad. Sci. Paris*, 123(26) :1248–1252, 1896. également dans *Collected Works*, Vol.2, pp. 387-390, Moskow, 1956.
- K. L. Makovec. A nonlinear magnetic controller for three-axis stability of nanosatellites. Master’s thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, 2001.
- E. Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 13 :137–203, 1868.
- C. Mayhew, R. Sanfelice, and A. Teel. Robust global asymptotic attitude stabilization of a rigid body by quaternion-based hybrid feedback. In *Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on*, pages 2522 –2527, dec. 2009.

- R. J. McElvain. Satellite angular momentum removal utilizing the Earth's magnetic field. In *Torques and attitude sensing in Earth satellites*, pages 137–158. S.F. Singer, New York, 1964.
- E. McShane. Jensen's inequality. *Bulletin American Mathematical Society*, 43(8), 1937.
- P. Morin, C. Samson, J. Pomet, and Z. Jiang. Time-varying feedback stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Systems & Control Letters*, 25(5) :375–385, 1995.
- Y. Mrabet and H. Broulès. Periodic-polynomial interpretation for structural properties of linear periodic discrete-time systems. *Systems & control letters*, 33(4) :241–251, 1998.
- Y. Nesterov, A. Nemirovskii, and Y. Ye. *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- J. Nieuwenhuis and J. Willems. Duality for linear time invariant finite dimensional systems. In A. Bensoussan and J. Lions, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, volume 111 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 11–21. Springer Berlin / Heidelberg, 1988.
- R. Oliveira and P. Peres. Parameter-dependent LMIs in robust analysis : Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via LMI relaxations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 52(7) :1334 –1340, july 2007.
- A. Packard and J. Doyle. Quadratic stability with real and complex perturbations. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(2) :198–201, 1990.
- D. Peaucelle. *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2000.
- D. Peaucelle and M. Sato. LMI tests for positive definite polynomials : Slack variable approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(4) :886–891, 2009.
- D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1) :21–30, 2000.
- G. Pólya. *Collected Papers, Vol. II, Location of Zeros*. 1974.
- M. Psiaki. Magnetic torquer attitude control via asymptotic periodic linear quadratic regulation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(2) :386 – 94, 2001. ISSN 0731-5090.
- T. Pulecchi. *Advanced techniques for satellites modeling and attitude control*. PhD thesis, Politecnico di Milano, 2008.
- T. Pulecchi, M. Lovera, and A. Varga. Optimal discrete-time design of three-axis magnetic attitude control laws. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 18(3) :714 – 722, 2010. ISSN 10636536.
- M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana University Mathematics Journal*, 42 (3) :969–984, 1993.
- L. Rayleigh. On the crispations of fluid resting upon a vibrating support. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 16(97) :50–58, 1883.
- M. Rotea, M. Corless, D. Da, and I. Petersen. Systems with structured uncertainty : Relations between quadratic and robust stability. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 38(5) :799–803, 1993.
- J. Rudolph. Duality in time-varying linear systems : a module theoretic approach. *Linear algebra and its applications*, 245 :83–106, 1996.
- P. Sarachik and E. Kreindler. Concerning adjoints of discrete-time systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 10(3) :350 – 352, jul 1965.
- H. Schaub and J. L. Junkins. *Analytical Mechanics of Space Systems*. AIAA Education Series, Reston, VA, October 2003.
- C. Scherer. LMI relaxations in robust control. *European Journal of Control*, 12 :3–29, 2006.



- C. Scherer and C. Hol. Matrix sum-of-squares relaxations for robust semi-definite programs. *Mathematical programming*, 107(1) :189–211, 2006.
- C. W. Scherer. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27(2) :365–395, jun 2005.
- M. Sidi. *Spacecraft dynamics and control : a practical engineering approach*. Cambridge Univ Pr, 1997.
- R. E. Skelton, T. Iwasaki, and D. E. Grigoriadis. *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*. Taylor & Francis Ltd, London, UK, 1997.
- E. Sontag. Remarks on stabilization and input-to-state stability. In *Proc. CDC*, page 1376–1378, Tampa, Florida, December 1989.
- A. Stickler and K. Alfriend. An elementary magnetic attitude control system. In *American Institute of Aeronautics and Astronautics, Mechanics and Control of Flight Conference, Anaheim, Calif, Research supported by ITHACO, Inc. and NASA*, volume 5, 1974.
- K. Stol and M. Balas. Full-state feedback control of a variable-speed wind turbine : A comparison of periodic and constant gains : Technical papers. *Journal of solar energy engineering*, 123(4) :319–326, 2001.
- J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Periodic FIR controller synthesis for discrete-time uncertain linear systems. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1367–1372, Orlando, FL, USA, December 2011a.
- J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Periodic  $H_2$  synthesis for spacecraft attitude control with magnetorquers and reaction wheels. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6876–6881, Orlando, FL, USA, December 2011b.
- J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Contrôle d’attitude périodique avec magnéto-coupleurs et roues à réactions. Marseille, France, June 2011c. Journées Nationales MACS.
- J.-F. Tréguët, D. Arzelier, D. Peaucelle, Y. Ebihara, C. Pittet, and A. Falcoz. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  performance of periodic systems with memory : New formulations, analysis and design results. In *Proceedings of the 51th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December 2012a.
- J.-F. Tréguët, Y. Ebihara, D. Arzelier, D. Peaucelle, C. Pittet, and A. Falcoz. Robust stability of periodic systems with memory : New formulations, analysis and design results. In *Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Aalborg, Denmark, June 2012b.
- J.-F. Tréguët, D. Peaucelle, D. Arzelier, and Y. Ebihara. Periodic memory state-feedback controller : New formulation, analysis and design results. *submitted to IEEE Transactions on Automatic Control*, December 2012c.
- D. Vallado and W. McClain. *Fundamentals of astrodynamics and applications*, volume 12. Springer, 2001.
- A. J. van der Schaft. *Analysis of Controlled Dynamical Systems*, chapter Duality for linear systems : External and state space characterization of the adjoint system, pages 393–403. Birkhauser, Boston, 1991.
- M. Vidyasagar. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions : Stability and stabilizability. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25(4) :773 – 779, aug 1980.
- J. Wen and K. Kreutz-Delgado. The attitude control problem. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 36(10) :1148–1162, 1991.
- J. Wertz. *Spacecraft attitude determination and control*. Kluwer Academic Publishers, 1978.
- S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2nd edition, 2003.
- R. Wiśniewski and M. Blanke. Three-axis attitude control based on magnetic torquing. *Automatica*, 35(7) :1201–1214, 1999.
- R. Wiśniewski and J. Stoustrup. Generalized  $\mathcal{H}_2$  control synthesis for periodic systems. In *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, pages 25–27, Arlington, VA, USA, June 2001.

- R. Wiśniewski and J. Stoustrup. Periodic  $\mathcal{H}_2$  synthesis for spacecraft attitude control with magnetorquers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 27(5) :696–709, 2004.
- L. Zaccarian. Dynamic allocation for input redundant control systems. *Automatica*, 45(6) :1431–1438, 2009.
- A. Zanchettin and M. Lovera.  $H_\infty$  attitude control of magnetically actuated satellites. In *IFAC World Congress*, volume 18, pages 8479–8484, Milano, Italy, 2011.
- K. Zhou and J. Doyle. *Essentials of robust control*, volume 104. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1998.