

UNIVERSITÉ DE  
BORDEAUXUniversité de Bordeaux  
École Doctorale Mathématiques et Informatique

# Thèse

présentée à

**l'Université de Bordeaux**par **Arthur LAURENT**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

\*\*\*\*\*

## AUTOUR DES NOMBRES DE TAMAGAWA

*(On Tamagawa Numbers)*

\*\*\*\*\*

Soutenue le 28 Juin 2013 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, après avis de :

V. ABRASHKIN	Professeur, Durham University (Royaume-Uni)	<b>Rapporteur</b>
L. BERGER	Professeur, ENS de Lyon	<b>Rapporteur</b>

et devant la commission d'examen composée de :

D. BENOIS	Professeur, Université Bordeaux 1	<b>Directeur</b>
L. BERGER	Professeur, ENS de Lyon	<b>Rapporteur</b>
O. BRINON	Professeur, Université Bordeaux 1	
L. FOURQUAUX	Maître de conférence, Université de Rennes 1	
N. MAZZARI	Maître de conférence, Université Bordeaux I	
B. PERRIN-RIOU	Professeure, Université Paris-Sud 11, Orsay	<b>Présidente</b>

N° d'ordre : ...



---

# Autour des Nombres de Tamgawa

---

*On Tamagawa Numbers*

Arthur Laurent

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251  
Université Bordeaux 1  
351 cours de la Libération  
F 33405 Talence Cedex







# Remerciements

Je souhaiterais avant tout exprimer ma gratitude à Denis Benois pour la grande patience avec laquelle il a su m'encadrer depuis de nombreuses années, pour mes deux mémoires de Master et évidemment pour cette thèse. Le sujet qu'il m'a donné m'a réellement intéressé et m'a permis de découvrir un domaine de la recherche mathématique qui m'a conquis. Je le remercie également pour sa disponibilité, son aide, les conseils et idées qu'il m'a donnés.

C'est un grand honneur que m'ont fait Victor Abrashkin et Laurent Berger d'avoir accepté le rôle de rapporteur. Je tiens à leur exprimer ma profondes reconnaissances pour s'être acquitté de ce labeur dans de si brefs délais qui plus est. Leurs remarques m'ont, je l'espère, permis d'améliorer le manuscrit de ma thèse. Je remercie aujourd'hui Laurent Berger d'être présent à la soutenance de ma thèse et pour sa disponibilité.

Je voudrais aussi à remercier Olivier Brinon, Lionel Fourquaux, Nicola Mazzari et Bernadette Perrin-Riou qui ont accepté d'être membre de mon jury ; je suis content et honoré qu'ils en fassent tous partie.

Je tiens à remercier tout particulièrement Bernadette Perrin-Riou pour l'intérêt qu'elle a porté à ma thèse lorsque je suis arrivé à Orsay en début d'année, pour les discussions que nous avons eues, pour ses questions et ses réponses.

Au cours de mes 9 ans d'études en Mathématiques à Bordeaux 1, j'ai eu le plaisir d'approcher et de suivre des cours d'un bon nombre d'excellents mathématiciens et d'excellents enseignants qui n'ont fait qu'accroître mon attirance pour les Mathématiques. En faire une liste exhaustive serait bien trop long mais je pense notamment à Michel Matignon, Pierrette Cassou-Noguès, Emmanuel Kowalski ou Renaud Coulangéon... et tout particulièrement à Jean Fresnel et Philippe Cassou-Noguès. Je remercie Jean Fresnel pour ses encouragements rassurants, sa disponibilité et son aide autant pendant la préparation à l'Agrégation, que pendant ma thèse ou lorsque je suis de passage à Bordeaux. Je suis admiratif de sa culture Mathématiques sans faille.

Philippe Cassou-Noguès a eu l'excellente idée de me présenter à Denis Benois lorsque je cherchais un directeur de mémoire de Master 2 et un futur directeur de thèse. Je le remercie pour cela. J'ai réellement apprécié cet enseignant et ses

TD que j'ai eu le plaisir de suivre presque chaque semestre en licence (et ce même s'il est évident qu'il mettait beaucoup de mauvaise volonté lorsqu'il s'agissait de déchiffrer, décoder mes copies).

Ces trois ans de thèses à Bordeaux puis à Orsay m'ont permis de rencontrer, de connaître et de passer d'excellents moments avec beaucoup d'amis que j'espère continuer à voir à Bordeaux, Paris ou ailleurs!! J'ai une pensée très affectueuse pour mes nombreux cobureaux : d'abord, la plus belle, Claire, et puis Louis qui peut-être un jour fera des Mathématiques (et j'en profite pour avoir une petite pensée pour Johana? Joana? Johanna?), Pierre L. (et ses amis du Haut-Carré), Giovanni L. (mon prof d'italien et mon étudiant de français) mais aussi forcément mes cobureaux parisiens parmi lesquels Carolina et Olivier (ce qui me permet d'avoir une petite pensée pour Cyrielle). J'ai aussi une pensée pour d'autres collègues qui sont devenus des amis : mon grand frère Guillaume, Pierre C. (dit le Grand Jaune... entre autre), Vincent (qui n'a jamais dit ça), Nico (et ses raisonnements bien à lui quant il est question de jouer), Fred (et ses pantalons colorés), Aurélien, tout les Ritaux de Bordeaux ou de Paris (Nicola, Andrea et Giovanni R. — qui vient de Paris pour assister à ma soutenance!), Stéphanie, Fabien (mon adversaire préféré au trône de fer), Bruno et les Orcéens : Arijit (not that Orcéen...), Lucco, Élodie, Laure, Lucie, Samuel, Clément etc etc.

Et comment pourrai-je oublier les amis tout aussi proches que j'ai rencontrés dans mes études, sur les cours de badminton ou ailleurs? Une grande, énorme, pensée à Cyprien (*p*-addict devant l'éternel), Marion (la Voleuse; en chemin, j'ai dû abandonner tes idées pour ces premières pages de ma thèse), Gaëlle (nouvelle mômmon, super amie... Gaëlle quoi!), Jérôme (nounours, ami de longue date!), Isabelle, Delphine, Ariane et forcément à Valentin (mon partenaire/adversaire de badminton) et Mathilde!

Je tiens aussi à remercier — et c'est trop rare que je le fasse — ma famille pour leur soutien sans faille, leur bienveillance, leur foi en moi. Avant tout à mes parents!! mais aussi à mes deux grands-parents bordelais et à Bruno et Shirley. J'ai aussi une pensée pour Lucie que je suis ravi de revoir à Paris et Thomas, c'est toujours un plaisir de le voir, de parler avec lui quand je suis de passage à Lyon!!



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
0.1 Représentations $p$ -adiques de corps locaux . . . . .	5
0.1.1 Liens avec la géométrie . . . . .	6
0.1.2 Théorie de Hodge $p$ -adique . . . . .	7
0.2 Exponentielle de Bloch et Kato et nombres de Tamagawa . . . . .	8
0.2.1 Exponentielle de Bloch et Kato . . . . .	8
0.2.2 Nombres de Tamagawa . . . . .	9
Définitions . . . . .	9
Premiers calculs avec la théorie de Hodge $p$ -adique . . . . .	10
0.3 Principaux résultats . . . . .	12
0.3.1 Autour des énoncés . . . . .	12
0.3.2 Stratégie . . . . .	15
Théorie des $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	15
Une nouvelle écriture du problème . . . . .	15
Un encadrement de $(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n))$ . . . . .	16
Remarque sur les principaux résultats . . . . .	17
0.4 Plan . . . . .	17
<b>1 Préliminaires</b>	<b>19</b>
1.1 Notations . . . . .	20
1.2 Périodes de représentations $p$ -adiques et $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	20
1.2.1 Théorie des $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine . . . . .	21
$\mathbb{F}_p$ -représentations et théorie du corps des normes . . . . .	21
Représentations $p$ -adiques et $\mathbb{Z}_p$ -représentations . . . . .	24
1.2.2 Théorie de Hodge $p$ -adique . . . . .	26
Représentations de de Rham . . . . .	26
Représentations cristallines . . . . .	30
1.3 Cohomologies . . . . .	32
1.3.1 Cohomologie galoisienne et cohomologie d'Iwasawa . . . . .	33

TABLE DES MATIÈRES

---

1.3.2	Cohomologie galoisienne et $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	34
1.3.3	Cohomologie d'Iwasawa et $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	36
1.4	Modules de Wach . . . . .	37
1.4.1	Le module de Wach d'une représentation cristalline . . . . .	37
1.4.2	Modules de Wach et théorie de Fontaine-Laffaille . . . . .	39
1.4.3	Les sous-modules $(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)$ et $((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$ . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Autour de l'exponentielle de Bloch et Kato</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	Définition . . . . .	46
2.2	L'exponentielle en termes de $(\varphi, \Gamma)$ -modules . . . . .	47
2.2.1	Contexte et motivations . . . . .	48
2.2.2	Construction . . . . .	49
2.3	Lien avec le module de Wach . . . . .	52
2.3.1	Énoncé . . . . .	53
2.3.2	Le cas où $k \notin [1, h]$ . . . . .	58
2.3.3	Le cas où $k \in [1, h]$ . . . . .	60
2.4	Autour de $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$ . . . . .	63
2.4.1	Description de $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$ . . . . .	64
	Premier résultat . . . . .	64
	Lemmes préliminaires . . . . .	68
	Démonstration du théorème . . . . .	70
2.4.2	Étude de la torsion de ses co-invariants par $\Gamma_n$ ( $n \geq 1$ ) . . . . .	73
	Énoncé : encadrement de $\sharp T_n$ . . . . .	74
	Démonstration lorsque $h < k$ ou $h = 1 = k$ . . . . .	75
	Modification de l'énoncé . . . . .	78
	Démonstration de l'encadrement lorsque $h \geq k$ . . . . .	78
	Corollaire . . . . .	84
2.4.3	Étude de la torsion de $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_K} / A_1^{\eta_0}$ . . . . .	85
<b>3</b>	<b>Encadrement des nombres de Tamagawa</b> . . . . .	<b>89</b>
3.1	Sur les nombres de Tamagawa . . . . .	90
3.1.1	Définitions et résultats déjà connus . . . . .	90
	Nombres de Tamagawa de représentations $p$ -adiques. . . . .	90
	Premiers calculs de nombres de Tamagawa . . . . .	91
3.1.2	Résultats principaux . . . . .	96
	Énoncés . . . . .	96
	Première étape de la preuve des théorèmes principaux . . . . .	100
3.2	Majoration de $(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n))$ . . . . .	101
3.2.1	Premier cas : lorsque $n \geq 1$ . . . . .	101
3.2.2	Second cas : lorsque $n = 0$ . . . . .	105
3.3	Démonstration des résultats principaux . . . . .	107

3.4	Plusieurs calcul de $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$ . . . . .	108
3.4.1	Le cas des représentations strictement négatives . . . . .	109
	Un point sur le calcul caractères par caractères . . . . .	110
	Cas du caractère trivial . . . . .	112
	Cas des caractères non triviaux . . . . .	113
	Preuve de la proposition 3.4.1 . . . . .	114
3.4.2	Le cas des courbes elliptiques . . . . .	116
	Autour de la représentation associée à une courbe elliptique	117
	Rappels sur le groupe formel associé à $E$ . . . . .	118
	Un calcul classique des nombres de Tamagawa . . . . .	120
	Comparaison avec les résultats de la thèse . . . . .	121
3.4.3	Le cas de certaines formes modulaires . . . . .	127
	Autour des représentations provenant de formes modulaires	127
	Autour de $\Xi_{V_f(m),n}$ et de $R_n$ . . . . .	128
	Un calcul en lien avec les courbes elliptiques . . . . .	129
 <b>A Structure de <math>((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}</math></b>		<b>131</b>
A.1	Énoncé . . . . .	131
A.2	Préliminaires . . . . .	132
A.3	Démonstration de la proposition A.1.1 . . . . .	134
 <b>B Complément sur la construction de l'exponentielle en termes de <math>(\varphi, \Gamma)</math>-modules</b>		<b>135</b>
B.1	Démonstration du lemme 2.2.1 . . . . .	135
B.2	Démonstration du lien entre $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$ et l'exponentielle de Bloch et Kato . . . . .	136
B.3	Autour de $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ . . . . .	141
 <b>Index des notations</b>		<b>145</b>
 <b>Bibliographie</b>		<b>147</b>
 <b>Résumé</b>		<b>152</b>
 <b>Summary</b>		<b>153</b>

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

Tout au long de cette thèse,  $K/\mathbb{Q}_p$  désigne une extension non ramifiée finie. Le but de cette thèse est de donner un encadrement des nombres de Tamagawa des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$  le long de la tour cyclotomique de  $K$ , et ce sans aucune condition supplémentaire sur leurs poids de Hodge-Tate.

Les nombres de Tamagawa de représentations  $p$ -adiques seront brièvement définis plus loin dans cette introduction.

## 0.1 Représentations $p$ -adiques de corps locaux

Soit  $F$  un corps de nombres,  $\overline{F}$  une clôture algébrique de ce corps et  $G_F = \text{Gal}(\overline{F}/F)$  le groupe de Galois absolu de  $F$ . Pour résoudre une équation à coefficients dans  $F/\mathbb{Q}$ , il peut être utile d'étudier  $G_F$ .

Toutefois la structure de ce groupe est compliquée. Pour pallier cette difficulté, nous pouvons nous borner à l'étude de certains de ces sous-groupes particulièrement importants. Pour simplifier, supposons un instant que  $F = \mathbb{Q}$ .

Soit  $p$  un nombre premier et  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques. Le groupe de Galois absolu  $G_{\mathbb{Q}_p}$  de  $\mathbb{Q}_p$  est inclus dans celui de  $\mathbb{Q}$ ; il est isomorphe au groupe de décomposition en la place  $p$ .

Le groupe  $G_{\mathbb{Q}_p}$  — et plus généralement, le groupe de Galois absolu  $G_K$  l'extension  $K/\mathbb{Q}_p$  — est profini; c'est en effet la limite projective de  $\text{Gal}(L/K)$  où  $L/K$  parcourt l'ensemble des extensions galoisiennes finies. C'est donc un groupe topologique compact. Ce sont ces sous-groupes  $G_{\mathbb{Q}_p}$  avec  $p$  premier que nous étudions plutôt que  $G_{\mathbb{Q}}$ .

Mais travailler sur ces  $G_{\mathbb{Q}_p}$  serait stérile s'il n'était pas possible de revenir en arrière, c'est-à-dire d'en tirer des informations sur  $G_{\mathbb{Q}}$ . Il est évidemment possible d'obtenir de telles informations car il existe une compatibilité entre le local et le global. C'est la raison pour laquelle travailler avec des corps locaux est intéressant.

Pour étudier  $G_K$ , nous nous intéressons à la manière dont il agit sur les espaces vectoriels de dimension finie. Nous nous restreignons aux représentations linéaires

continues de  $G_K$  sur certains corps  $E$ .

Une représentation linéaire continue de  $G_K$  sur un corps  $E$  est un morphisme continu  $\rho : G_K \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  où  $V$  est un  $E$ -espace vectoriel de dimension finie. Il revient au même de donner une action linéaire continue de  $G_K$  sur  $V$ . Pour cette thèse, nous choisissons ce point de vue plutôt que le premier.

L'hypothèse de continuité peut être très contraignante lorsque la topologie de  $E$ , le corps de base de la représentation, et la topologie  $p$ -adique de  $G_K$  ne se ressemblent pas. C'est ce qu'il se passe lorsque  $E$  est un corps  $l$ -adique avec  $l$  premier distinct de  $p$  ou si  $E = \mathbb{C}$ . C'est la raison pour laquelle nous ne considérons que des représentations linéaires continues de  $G_K$  sur un corps  $p$ -adique  $E$ , disons  $E = \mathbb{Q}_p$ . Une telle représentation est appelée représentation  $p$ -adique.

Nous aurons souvent besoin de considérer des structures entières : une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre de type fini muni d'une action linéaire continue de  $G_K$ .

### 0.1.1 Liens avec la géométrie

Il existe un pont entre le monde des représentations  $p$ -adiques et celui de la géométrie algébrique.

En effet, de nombreuses représentations proviennent de la géométrie. Ainsi un résultat dans le monde des représentations  $p$ -adiques peut être source d'informations du côté de la géométrie algébrique.

Expliquons rapidement ce que signifie "provenir de la géométrie". Soit  $X$  une variété propre et lisse définie sur  $K$ . Les groupes de la cohomologie étale  $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$  sont des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  pour tout  $i$ .

Une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  provient de la géométrie si elle est sous-quotient d'un groupe  $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}, \mathbb{Q}_p)$  pour un certain  $i$  et une certaine variété propre et lisse  $X$ .

Une question toujours d'actualité est de déterminer quelles sont les représentations  $p$ -adiques qui proviennent de la géométrie. Notons que J.-M. Fontaine et B. Mazur ont conjecturé une réponse à cette question (cf. [FM95] ou [Kis07]).

L'exemple le plus connu de représentation issue de la géométrie est sans doute le suivant. Soit  $E$  une courbe elliptique sur  $K$ , soit  $E(\overline{K})$  l'ensemble des points de  $E$  sur  $\overline{K}$ . Le module de Tate de  $E$ , noté  $T_p(E)$ , est l'ensemble des points de  $p$ -torsion de  $E(\overline{K})$  ou en d'autres termes la limite projective des points d'ordre  $p^n$  de  $E(\overline{K})$  i.e.  $T_p(E) = \varprojlim E(\overline{K})[p^n]$ .

Comme le groupe de Galois  $G_K$  agit naturellement sur ce  $\mathbb{Z}_p$ -module libre,  $T_p(E)$  est un premier exemple de  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$ . En inversant  $p$ , nous

obtenons alors une représentation  $p$ -adique :  $V_E = T_p(E) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ . Cet exemple sera largement utilisé tout au long de cette thèse. Notons que nous avons plus généralement  $H_{\text{ét}}^i(E_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq \bigwedge^i V_E^*$ .

L'étude des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations provenant d'une courbe elliptique permettent de recueillir des informations notamment sur sa fonction  $L$ .

### 0.1.2 Théorie de Hodge $p$ -adique

Une approche pour étudier les représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  est la théorie de Hodge  $p$ -adique.

L'idée générale de cette théorie — ainsi que de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules dont nous parlerons plus tard — est d'utiliser des équivalences de catégories pour ramener l'étude des représentations  $p$ -adiques à celle de certains modules ayant des structures supplémentaires.

Cela permet de mettre en avant certains invariants importants, de classifier les représentations etc. L'avantage est qu'au lieu de considérer des représentations  $p$ -adiques générales, nous pouvons nous restreindre à certaines sous-catégories de représentations. Rechercher des propriétés communes aux représentations de ces sous-catégories etc.

Les anneaux de périodes  $p$ -adiques  $\mathbb{B}_{\text{cris}} \subset \mathbb{B}_{\text{st}} \subset \mathbb{B}_{\text{dR}}$  jouent un rôle central dans cette théorie (nous ne parlerons pas davantage de  $\mathbb{B}_{\text{st}}$  dans cette thèse). Ils ont été construits par J.-M. Fontaine dans les années 1980 et sont des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres munies d'une action du groupe de Galois  $G_K$  et de structures additionnelles (filtration, Frobenius, opérateur de monodromie etc) compatibles avec l'action de  $G_K$ .

Le corps  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  est muni d'une filtration exhaustive, décroissante et séparée. L'anneau  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  est contenu dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  ; il est quant à lui muni d'un Frobenius  $\varphi$  et hérite naturellement de la filtration de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ .

Si  $\mathbb{B}_{\clubsuit}$  est l'un des anneaux des périodes  $p$ -adiques et si  $V$  est une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$ , posons  $\mathbb{D}_{\clubsuit}(V) = (\mathbb{B}_{\clubsuit} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ . Les structures additionnelles de  $B$  sont ainsi retrouvées sur le module  $\mathbb{D}_{\clubsuit}(V)$ .

Le module de de Rham  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  admet une filtration et est de dimension inférieure ou égale à celle de  $V$  sur  $\mathbb{Q}_p$  ; si les dimensions sont égales, la représentation  $V$  est de de Rham.

Le module cristallin  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  est quant à lui un  $\varphi$ -module sur  $K_0$  de dimension inférieure ou égale à celle de  $V$  (où  $K_0/\mathbb{Q}_p$  est l'extension non ramifiée maximale contenue dans  $K/\mathbb{Q}_p$ ) et  $K \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  admet une filtration héritée de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . S'il y a égalité des dimensions, la représentation  $V$  est cristalline.

Lorsque  $V$  est de de Rham, la filtration de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  permet de lui associer plusieurs invariants importants (les sauts de filtrations,  $t_H(V)$ ... voir le paragraphe 1.2.2). De la même manière lorsque  $V$  est cristalline, le Frobenius  $\varphi$  et la filtration de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  mettent en avant plusieurs invariants.

J.-M. Fontaine a défini les  $\varphi$ -modules filtrés faiblement admissibles ([Fon94a]) puis lui et P. Colmez ont montré que cette catégorie était équivalente à celle des représentations  $p$ -adiques cristallines ([CF00] ou §1.2.2 pour des explications supplémentaires). Aussi donner une représentation  $p$ -adique cristalline revient à donner un  $\varphi$ -module filtré faiblement admissible, c'est-à-dire une structure purement algébrique et donc plus simple à manipuler a priori.

## 0.2 Exponentielle de Bloch et Kato et nombres de Tamagawa

### 0.2.1 Exponentielle de Bloch et Kato

L'inclusion  $\mathbb{B}_{\text{cris}} \subset \mathbb{B}_{\text{dR}}$  est précisée par l'injection  $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{B}_{\text{cris}} \subset \mathbb{B}_{\text{dR}}$  et par la suite exacte fondamentale

$$(0.2.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}} \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}} \oplus \mathbb{B}_{\text{dR}}/\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme  $\mathbb{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}} \oplus \mathbb{B}_{\text{dR}}/\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  est défini par  $x \mapsto ((1 - \varphi)x, x[\mathbb{B}_{\text{dR}}^+])$ .

Prenons une représentation  $p$ -adique de de Rham  $V$  de  $G_K$ . En tensorisant la suite exacte fondamentale par  $V$  et en prenant les invariants par  $G_K$ , il vient la suite exacte longue de cohomologie suivante :

$$(0.2.2) \quad 0 \longrightarrow H^0(K, V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K) \xrightarrow{\delta_V} H^1(K, V) \longrightarrow \dots$$

où  $t_V(K)$  est l'espace tangent de  $V$  sur  $K$  défini par  $t_V(K) = \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)/\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ .

Soit  $H_f^1(K, V)$  le noyau du morphisme  $H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes V)$ . L'application  $\delta_V$  induit l'exponentielle de Bloch et Kato introduite dans [BK90]

$$\exp_{K, V} : t_V(K) \rightarrow H_f^1(K, V).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur  $V$  et sur le corps de base  $K$ , nous écrivons  $\exp$  plutôt que  $\exp_{K, V}$ .

Le nom de cette application de connexion vient du fait qu'elle généralise l'exponentielle classique. Nous illustrerons cela à travers deux exemples dans le paragraphe 2.1.



Soit enfin  $H_f^1(K, V)$  l'image de l'espace tangent de  $V$  par l'exponentielle de Bloch-Kato et  $H_f^1(K, T)$  l'image réciproque de  $H_f^1(K, V)$  par le morphisme

$$H^1(K, T) \rightarrow H^1(K, V).$$

## 0.2.2 Nombres de Tamagawa

L'exponentielle de Bloch et Kato permet d'étudier un autre objet, les nombres de Tamagawa.

### Définitions

Les nombres de Tamagawa viennent à l'origine de la théorie de la géométrie algébrique. B. Birch et H. Swinnerton-Dyer ont ensuite vu les nombres de Tamagawa d'une courbe elliptique  $E$  comme des "fudge factors" qui apparaissent dans les facteurs eulériens de la  $L$ -fonction  $L_E(s)$  associée à  $E$ .

J. Tate a ensuite précisé ces facteurs dans [Tat75]. Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur une extension finie  $F/\mathbb{Q}$ ; le facteur eulérien de  $L_E$  en  $\mathfrak{p}$  premier de  $F$  en lequel  $E$  a bonne réduction peut être défini comme une intégrale sur  $E(F_{\mathfrak{p}})$  où  $F_{\mathfrak{p}}$  désigne la complétion  $\mathfrak{p}$ -adique de  $F$ . En procédant de la même manière sur les premiers en lesquels  $E$  a une réduction singulière, nous obtenons un facteur supplémentaire.

Soit  $P(x, y) = 0$  l'équation de Weierstrass minimale de  $E$  pour un premier  $\mathfrak{p}$  et  $\overline{E}$  la cubique définie par la réduction  $\overline{P}(x, y) = 0$  de  $P$  modulo  $\mathfrak{p}$ . La partie lisse de  $\overline{E}$  est notée  $\overline{E}_0$ .

Il existe un homomorphisme naturel  $E(F_{\mathfrak{p}}) \rightarrow \overline{E}(k_{F_{\mathfrak{p}}})$  (c'est l'application qui réduit modulo  $\mathfrak{p}$  les coordonnées projectives d'un élément de  $E(F_{\mathfrak{p}})$ ). Notons de plus  $E_0(F_{\mathfrak{p}})$  l'image réciproque de  $\overline{E}_0(k_{F_{\mathfrak{p}}})$  par cette application, c'est aussi l'ensemble des points de  $E(F_{\mathfrak{p}})$  qui ont bonne réduction en  $\mathfrak{p}$ . L'indice  $(E(F_{\mathfrak{p}}) : E_0(F_{\mathfrak{p}}))$  est fini et n'est autre que le nombre de Tamagawa de  $E$  ou encore le nombre de composantes de  $E(F_{\mathfrak{p}})$  (cf. [Tat75, théorèmes 4.1 et 5.2]).

En reprenant l'intégrale qui donne le facteur eulérien dans le cas de bonne réduction pour les premiers de réduction singulière, nous obtenons le produit d'une intégrale sur  $E_0(\hat{F}_{\mathfrak{p}})$  multipliée par le nombre de Tamagawa  $(E(\hat{F}_{\mathfrak{p}}) : E_0(\hat{F}_{\mathfrak{p}}))$ .

Pour une variété algébrique, les nombres de Tamagawa sont le volume du groupe de points pour une mesure induite par l'espace tangent. L'exponentielle de Bloch et Kato permet de généraliser la notion de groupes de points aux représentations  $p$ -adiques  $V$ . En effet, ils ont montré qu'il était possible de construire les nombres de Tamagawa locaux de  $V$  à l'aide la théorie de Hodge  $p$ -adique; ceux-ci

sont définis comme des volumes de certains modules pour une mesure de Haar induite par une partie du groupe cohomologique  $H^1(K, V)$  (cf. [BK90, §4-5]).

Depuis, les nombres de Tamagawa locaux ont été normalisés différemment permettant ainsi une généralisation à toute représentation  $p$ -adique de de Rham de  $G_K$ . Ainsi la définition de S. Bloch et K. Kato a évolué faisant place à celle qui suit (voir aussi [FPR94]).

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de de Rham de  $G_K$ . Définissons  $L_f(V)$  en posant  $L_f(V) = \det_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} H_f^1(K, V)$ ; la suite exacte (0.2.2) donne lieu à l'isomorphisme canonique suivant :

$$\iota_{K,V} : L_f(V) \rightarrow \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} t_V(K).$$

À tout réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ , nous associons canoniquement un réseau  $L_f(T)$  de  $L_f(V)$  avec  $L_f(T) = \det_{\mathbb{Z}_p} H^0(K, T) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p}^{-1} H_f^1(K, T)$ .

Soit  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$  et  $\omega^{-1}$  sa base duale. Le nombre de Tamagawa  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$  relatif à  $T$  et à  $\omega$  provient de la comparaison des deux structures entières  $L_f(T)$  et  $\mathbb{Z}_p \omega^{-1}$  via l'isomorphisme  $\iota_{K,V}$ . Plus précisément,  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$  est l'unique puissance de  $p$  vérifiant l'égalité

$$\iota_{K,V}(L_f(T)) = \mathbb{Z}_p \text{Tam}_{K,\omega}^0(T) \omega^{-1}.$$

Cette thèse a pour objet l'étude de ces nombres  $\text{Tam}_{K_n,\omega}^0(T)$  lorsque  $V$  est une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  où  $K/\mathbb{Q}_p$  non ramifiée et où  $K_n$  est la  $p^n$ -ième extension cyclotomique de  $K$  (où  $p$  est un premier impair fixé).

S. Bloch et K. Kato ont conjecturé un lien entre les nombres de Tamagawa d'un motif  $M$  et la fonction  $L$  associée à  $M$  (cf. [BK90], [Fon92] ou [FPR94]). Nous expliquerons un peu cela dans le paragraphe 3.1.1.

### Premiers calculs avec la théorie de Hodge $p$ -adique

La théorie de Hodge  $p$ -adique a permis de calculer explicitement certains nombres de Tamagawa. En effet, nous avons des formules décrivant  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(\mathbb{Z}_p(m))$ ; cela est dû à S. Bloch et K. Kato lorsque  $K = \mathbb{Q}_p$  puis a été généralisé à toute extension abélienne  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  dans [BNQD02], [HK03] ou [BF06]. Nous verrons cela dans le paragraphe 3.1.1.

Il a été ensuite possible d'obtenir des formules pour les nombres de Tamagawa des représentations issues de la théorie de Fontaine-Laffaille (cf. paragraphe 3.1.1).

Grâce à [BB08], dans le cas absolument cristallin — et c'est aussi conjecturé dans le cas potentiellement semi-stable (voir [FPR94], [PR95], [Kat93]) — nous savons que les nombres de Tamagawa  $\text{Tam}_{K, \cdot}^0(T)$  et  $\text{Tam}_{K, \cdot}^0(T^*(1))$  sont liés. C'est le théorème  $C_{EP}(K, V)$  de D. Benois-L. Berger.

**Théorème 0.2.1** ( $C_{EP}(K, V)$ )

Supposons l'extension  $K/\mathbb{Q}_p$  non ramifiée et prenons  $n \geq 0$ . Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  et  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .

Soit  $\omega$  la base  $\omega_2^{-1} \otimes \omega_1$  de  $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$  où  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) désigne une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)$  (resp. de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V^*(1)}(K_n)$ ). Nous avons :

$$\frac{\text{Tam}_{K_n, \omega_1}^0(T)}{\text{Tam}_{K_n, \omega_2}^0(T^*(1))} = |d_{K_n}|_p^{\dim V/2} |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(\omega, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p.$$

Explicitons les notations :  $\epsilon(K_n, V)$  est la constante locale de Weil-Deligne (voir [Del73] ou le paragraphe 2.3 de [BB08]),  $d_{K_n}$  désigne le discriminant de  $K_n$ . La constante  $\alpha_{V, K_n}(\omega, T)$  est quant à elle liée au déterminant de la matrice de passage d'une base de  $T$  à une  $\mathbb{Q}_p$ -base  $(a_i)_i$  de  $\mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$  vérifiant  $\bigwedge a_i = \omega$  tandis que  $\Gamma_n^*(V)$  est une constante explicite définie à partir des sauts de filtration de  $V$  sur  $K_n$ .

Ce théorème fournit, dans certains cas, une méthode de calcul explicite des nombres de Tamagawa.

Considérons un exemple simple qui sera développé dans le paragraphe 3.1.1. Dans le cas d'une représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  dont les sauts de filtration sont positifs et telle que  $V^{G_K} = 0$ , les nombres de Tamagawa sont faciles à calculer. En effet, la plupart des  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels intervenant dans la définition de ces nombres sont nuls.

Aussi le théorème  $C_{EP}$  permet d'obtenir les nombres de Tamagawa de certaine représentation  $p$ -adique cristalline strictement négative. Cela donne le corollaire suivant.

**Corollaire 0.2.2**

Soit  $n$  un entier positif. Soit  $V$  une représentation absolument cristalline de  $G_K$  à poids de Hodge-Tate strictement positifs (c'est-à-dire  $\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V) = 0$ ) et telle que  $V^*(1)^{G_K} = 0$ . Soit enfin  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .

Pour toute base  $\omega$  de  $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega}^0(T) &= \sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) |\det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p \\ &\quad \times |d_{K_n}|_p^{\dim V/2} |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(\omega, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p. \end{aligned}$$

Notons que l'hypothèse  $V^*(1)^{G_K} = 0$  n'est pas contraignante puisque, comme nous l'avons dit avant, il existe des formules décrivant les nombres de Tamagawa  $\text{Tam}_{K_n, \cdot}^0(\mathbb{Z}_p(1))$ .

En revanche lorsque les sauts de filtration de  $V$  ne sont pas tous de même signe, nous n'avons pas toujours de formules décrivant les nombres de Tamagawa d'une représentation  $p$ -adique cristalline. C'est dans l'optique de mieux connaître ces nombres de Tamagawa que cette thèse donne certains encadrements ainsi que des cas d'égalité.

## 0.3 Principaux résultats

### 0.3.1 Autour des énoncés

Nous supposons toujours que  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension non ramifiée finie. Le but de cette thèse est de donner un encadrement des nombres de Tamagawa des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$  le long de la tour cyclotomique de  $K$ , et ce sans aucune condition supplémentaire sur leurs poids de Hodge-Tate.

Pour énoncer les principaux résultats, nous avons besoin de plusieurs notations supplémentaires.

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  qui n'est pas positive. Ses sauts de filtration sont donc contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ . Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier ; cette hypothèse sera justifiée dans le paragraphe 3.1. Supposons aussi que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Fixons de plus  $n \geq 0$ .

Soit  $\mathcal{D}(T(-k)) = (\mathbb{A}_K^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(T(-k)))^{\psi=0}$  et  $\mathcal{D}(V(-k)) = \mathcal{D}(T(-k)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ .

La construction de l'exponentielle en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules permet de définir une application explicite surjective  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(-k)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$ . Soit  $R_n$  l'image de  $\mathcal{D}(T(-k))$  par  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon$  ; c'est un réseau de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$ .

Considérons la suite exacte suivante :

$$(0.3.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \longrightarrow 0$$

où  $f(x) = ((1 - \varphi)x, x \text{ [mod Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)])$ . Elle donne lieu à l'isomorphisme de comparaison  $\det_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \simeq \det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)$ . Soit  $v'_n$  un générateur de l'image de  $\det_{\mathbb{Q}_p} R_n$  par cet isomorphisme.

La théorie de Hodge  $p$ -adique permet de définir les constantes,  $\Gamma_n^+(V)$ ,  $t_H(V)$  et  $t_H^+(V)$ . La constante  $t_H(V)$  (resp.  $t_H^+(V)$ ) est la somme des sauts de filtration

(resp. des sauts de filtrations positifs) de  $V$ . L'autre constante  $\Gamma_n^+(V)$  — qui est à rapprocher de  $\Gamma_n^*(V)$  — est aussi liée aux sauts de filtrations de  $V$ , nous la définirons précisément dans le corps de cette thèse.

Avec ces notations, vient le théorème suivant.

**Théorème 0.3.1 (majoration des nombres de Tamagawa)**

Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension non ramifiée finie. Soit  $V$  une représentation cristalline dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ .

Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier. Supposons également que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit un réseau  $T$  de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Soit  $n \geq 0$ .

(i) Lorsque  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T) &\leq \# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) p^{[K_n: \mathbb{Q}_p]n\alpha} |\Gamma_n^*(V)|_p \\ &\quad \times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Lorsque  $n = 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K, v'_0}^0(T) &\leq \# H^0(K, V^*(1)/T^*(1)) |\Gamma_0^*(V)|_p p^{[K: \mathbb{Q}_p]\alpha} \\ &\quad \times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)}. \end{aligned}$$

(iii) Lorsque  $h < k$ , les deux inégalités ci-dessus se transforment en des égalités.

Notons que pour tout entier  $n \geq 0$ , le groupe  $H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$  est fini ; cela sera justifié plus tard dans la proposition 1.3.2.

Sous les mêmes hypothèses que celle du théorème 0.3.1 et sans beaucoup d'efforts supplémentaires, nous pourrons obtenir une minoration lorsque  $n \geq 0$ .

**Théorème 0.3.2 (minoration des nombres de Tamagawa)**

Gardons les mêmes hypothèses que le théorème précédent ainsi que ses notations.

(i) Lorsque  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\text{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T) \geq |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} p^{[K_n: \mathbb{Q}_p](n\alpha - n t_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Si  $n = 0$ , alors

$$\mathrm{Tam}_{K, v'_0}^0(T) \geq |\Gamma_0^*(V)|_p |\Gamma_0^+(V)|_p^{-1} p^{[K:\mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \mathrm{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V))}.$$

Notons que les encadrements proposés dans le chapitre 3, §3.1.2 sont en fait légèrement meilleurs que ceux que nous venons d'énoncer.

Si maintenant  $h = 1 = k$ , cette minoration peut être considérablement améliorée donnant même lieu à une égalité.

**Corollaire 0.3.3**

*Gardons les mêmes notations que celles du théorème précédent. Supposons  $h = 1 = k$  et  $n \geq 0$ . Alors si  $n \geq 1$ ,*

$$\mathrm{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T) = \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))}.$$

*Si maintenant  $n = 0$ , alors*

$$\mathrm{Tam}_{K, v'_0}^0(T) = \frac{\sharp H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))}$$

où  $H_{Iw+f}^1(K_n, T)$  est simplement  $H_{Iw+f}^1(K_n, T) = H_f^1(K_n, T) + H_{Iw}^1(K, T)_{\Gamma_n}$ .

Ce corollaire s'applique si  $T = T_E$  est le module de Tate d'une courbe elliptique  $E$  sur une extension finie non ramifiée  $K/\mathbb{Q}_p$  qui a bonne réduction supersingulière en  $p$ . Cela permet de retrouver des résultats déjà connus (voir paragraphe 3.4.2).

Avant d'évoquer les idées utilisées dans la démonstration de ce théorème, faisons un point sur ses hypothèses. La première — " $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier" — n'est absolument pas contraignante puisque comme nous l'avons dit avant, nous savons déjà calculer les nombres de Tamagawa de  $\mathbb{Z}_p(m)$ .

La seconde — " $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ " — est, elle, restrictive. Cependant beaucoup de représentations  $p$ -adiques vérifient cette hypothèse. Donnons un exemple concret (parmi d'autres) dans lequel les résultats peuvent être appliqués.

Soit  $X/\mathbb{Q}_p$  une variété projective lisse ayant bonne réduction ; G.Faltings a démontré que les groupes de cohomologie étale  $V_i = H_{\mathrm{ét}}^i(X_{\overline{\mathbb{Q}_p}}, \mathbb{Q}_p)$  de  $X$  étaient des représentations  $p$ -adiques cristallines. D'autre part, N.Katz et W.Messing ont montré que les valeurs propres  $(\alpha_{i,j})_j$  de  $\varphi$  opérant sur le module de Dieudonné  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V_i)$  associé à  $V_i$  étaient algébriques sur  $\mathbb{Q}$  et de valeur absolue  $|\alpha_{i,j}|_{\infty} = p^{i/2}$  pour tout plongement. Il est dès lors évident que beaucoup de ces représentations vérifient les bonnes hypothèses et que les résultats que nous avons peuvent être appliqués.

## 0.3.2 Stratégie

### Théorie des $(\varphi, \Gamma)$ -modules

À l'instar de la théorie de Hodge  $p$ -adique, l'objectif de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules est de classifier les représentations  $\mathbb{Z}_p$ -adiques ou  $p$ -adiques de  $G_K$ .

La théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine consiste en une équivalence explicite entre la catégorie des représentations de  $G_K$  d'une part et celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales d'autre part.

En se restreignant à la sous-catégorie pleine des représentations  $p$ -adiques cristallines ou à leurs réseaux, cette théorie peut être affinée ; cela se fait en s'appuyant sur les modules de Wach (voir paragraphe 1.4).

La cohomologie galoisienne et la cohomologie d'Iwasawa sont intimement liées à la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. En effet, L. Herr a construit dans [Her98] et dans [Her01] un complexe à trois termes défini à partir de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules qui donne directement la cohomologie galoisienne. D'un autre côté, J.-M. Fontaine puis F. Cherbonnier-P. Colmez ont donné un complexe qui permet de retrouver les groupes de la cohomologie d'Iwasawa (voir [CC99]).

Certains de ces liens avec la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules peuvent être traduits en termes de modules de Wach. Nous verrons cela dans le chapitre suivant.

### Une nouvelle écriture du problème

Afin d'expliquer plus clairement la stratégie que nous utiliserons pour montrer les principaux résultats de cette thèse, supposons pour quelques instants seulement que  $\mathbf{1} - \varphi$  est bijectif sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Dans ce cas, l'exponentielle de Bloch et Kato est un isomorphisme.

En conséquence, par définition des nombres de Tamagawa et par choix de  $v'_n$ , nous avons :

$$\text{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T) = |\det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p \left( H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n) \right).$$

Aussi en notant  $\tilde{H}_f^1(K_n, T)$  l'image de  $H_f^1(K_n, T)$  dans  $H_f^1(K_n, V)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T) &= |\det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p \# H^0(K, V/T) \\ &\quad \times \left( \tilde{H}_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n) \right). \end{aligned}$$

Nous nous rapprochons dans ce cas de la définition des nombres de Tamagawa de S. Bloch et K. Kato puisqu'ici, le calcul de  $\text{Tam}_{K_n, v'_n}^0(T)$  n'est en fait que la comparaison entre deux réseaux de  $H_f^1(K_n, V)$  (c'est le volume que S. Bloch et K. Kato étudient dans [BK90, théorème 4.1]).

Ainsi dans ce cas, la démonstration des résultats de cette thèse se ramène à un problème d'encadrement de l'indice généralisé  $(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n))$ . Or il est difficile de comparer  $H_f^1(K_n, T)$  et  $\exp(R_n)$  : la définition de l'exponentielle n'est pas pratique à manipuler avec des structures entières. Les difficultés sont les mêmes lorsque  $1 - \varphi$  n'est plus supposé bijectif sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Cependant, la théorie de B. Perrin-Riou pallie cette difficulté en donnant de premières propriétés intégrales liées à l'exponentielle de Bloch et Kato.

D'autre part, la construction de D. Benois de cette exponentielle  $\exp_{K_n, V}$  en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules permet d'obtenir des expressions complètement explicites. En effet, D. Benois a construit des homomorphismes explicites

$$\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(-k)) \rightarrow H^1(K_n, T)$$

et  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(-k)) \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  vérifiant

$$(0.3.2) \quad \Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V} \circ \Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon.$$

Un autre avantage de cette construction est qu'elle est liée à la théorie de B. Perrin-Riou ; aussi l'application  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon$  a de bonnes propriétés intégrales.

Soit  $\mathcal{D}(T(-k))$  un réseau canonique de  $\mathcal{D}(V(-k))$ . Ainsi pour étudier les nombres de Tamagawa, il est désormais naturel de scinder la démonstration en deux étapes :

- 1) l'égalité (0.3.2) pousse à étudier  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T(-k)))$ . Cela fera intervenir de nombreux outils liés à la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et des modules de Wach. Ce sera l'objet de la seconde moitié du chapitre 2 ;
- 2) comparer  $H_f^1(K_n, T)$  avec  $\exp_{K_n, V}(R_n)$  i.e. avec  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T(-k)))$ . C'est ici qu'apparaît le cardinal de  $H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$ .

Une autre difficulté qui masquée par la formulation des théorèmes 0.3.1-0.3.2 et du corollaire 0.3.3 est que  $v'_n$  n'est pas toujours évident à expliciter. Cependant, dans certaines situations, il est possible de faire entièrement ce travail. Dans le cas des représentations positives, cette seconde étape se fait grâce à un calcul caractères par caractères en utilisant la suite exacte (0.3.1). Nous détaillerons ce point dans le troisième chapitre, §3.4.1.

Dans le cas des courbes elliptiques et de certaines formes modulaires, nous passons par les groupes formels pour exprimer  $v'_n$  (voir §§3.4.2-3.4.3).

### Un encadrement de $(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n))$

Pour encadrer cet indice généralisé, la dualité locale parfaite entre  $H^1(K, V)$  et  $H^1(K, V^*(1))$  joue un rôle important. En effet, celle-ci permet de faire un lien



entre la construction de l'exponentielle proposée par D. Benois dans [Ben00] et les modules de Wach  $\mathbb{N}(T)$ .

Nous verrons en effet dans le théorème 2.3.1 que la fonction  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon$  construite par D. Benois induit un isomorphisme

$$(0.3.3) \quad \mathcal{D}(T(-k))(k)_{\Gamma_n} \xrightarrow{\sim} ((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

En nous appuyant sur ce dernier isomorphisme et en utilisant le lien cohomologie galoisienne/ cohomologie d'Iwasawa/  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, nous passerons de l'étude de l'indice généralisé  $(H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n))$  à celle du cardinal de la  $p$ -torsion d'un groupe. Précisons de quel groupe il s'agit.

Le module  $((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  s'envoie surjectivement sur un sous-module  $A_n$  de  $H_{\text{Iw}}^1(K, T)_{\Gamma_n}$ . Nous devons alors étudier la  $p$ -torsion de  $H_{\text{Iw}}^1(K, T)_{\Gamma_n}/A_n$ . En d'autres termes, selon que  $n$  soit nul ou non, cela nous amènera ainsi à étudier la  $p$ -torsion des deux groupes qui suivent

$$(\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/(\varphi^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_K}^{\psi=1}) \quad \text{et} \quad (\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}).$$

### Remarque sur les principaux résultats

Les majorations et minoration proposées dans cette thèse correspondent à des cas extrêmes dans lesquels l'action de  $\Gamma_n$  sur  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  est soit particulièrement agréable à décrire soit au contraire plus compliquée.

Dans le cas d'égalité du théorème 0.3.1, (iii), l'action de  $\Gamma_n$  est diagonale sur une certaine base de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$ ; c'est un exemple dans lequel l'action de  $\Gamma_n$  est particulièrement simple.

Dans le chapitre 2, nous donnerons des conditions sous lesquelles la minoration du théorème 0.3.2 est atteinte. Je ne sais pas s'il est possible de trouver des cas dans lesquels ces conditions sont vérifiées.

## 0.4 Plan

Cette thèse se divise en trois parties, chacune fait l'objet d'un chapitre. La première est entièrement dédiée aux rappels nécessaires aux démonstrations des principaux résultats ainsi qu'à la bonne compréhension de celle-ci. Nous y parlerons en détail de la théorie de Hodge  $p$ -adique et de la théorie de Fontaine-Laffaille, de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, de plusieurs aspects des modules de Wach, de différentes cohomologies etc.

La seconde a pour thème central l'exponentielle de Bloch et Kato. Après l'avoir définie, nous reprendrons dans le paragraphe 2.2 la construction de l'exponentielle

de Bloch et Kato en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de D. Benois [Ben00]. Cela permettra de construire l'homomorphisme (0.3.3) qui lie le module de Wach d'une représentation cristalline et l'exponentielle de Bloch et Kato (voir théorème 2.3.1). Dans ce paragraphe, nous prouverons aussi la bijectivité de ce morphisme.

Enfin nous terminerons ce chapitre en décrivant plusieurs aspects du quotient  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  (voir le paragraphe 2.3).

La troisième et dernière partie est consacrée aux nombres de Tamagawa et aux principaux résultats de cette thèse. Nous rappellerons la définition des nombres de Tamagawa et donnerons quelques résultats déjà connus sur ces nombres dans un premier paragraphe.

Nous énoncerons dans un second paragraphe les résultats de cette thèse : nous proposerons un encadrement des nombres de Tamagawa des représentations absolument cristallines de  $G_K$  le long de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .

Pour démontrer ces résultats, nous aurons besoin d'un travail préliminaires. C'est ce que nous ferons dans la deuxième sous-partie de ce dernier chapitre. En effet, nous y proposerons, pour tout entier  $n \geq 0$ , un encadrement de l'indice généralisé :

$$(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V} R_n).$$

Ce troisième chapitre se terminera avec des exemples dans lesquels il est possible de décrire entièrement  $v'_n$  ; ce sera le travail que nous ferons dans le paragraphe 3.4 autour de  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  (voir le début du chapitre 3 pour une définition).

Finalement, les deux appendices serviront à démontrer deux résultats que nous aurons momentanément admis dans le cœur de la thèse pour en faciliter la compréhension.

# Chapitre 1

## Préliminaires

*Résumé.*

*Dans ce chapitre, nous mettons en place les outils nécessaires aux démonstrations des principaux résultats de cette thèse ainsi qu'à la bonne compréhension de celle-ci. À quelques exceptions près, ce chapitre est constitué de rappels.*

*Après avoir énoncé les notations de base que nous utilisons tout au long de cette thèse, nous ferons des rappels autour de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine et celle de Hodge  $p$ -adique.*

*La première classe les représentations  $p$ -adiques de corps locaux. Pour l'expliquer, nous aurons besoin de parler du corps des normes de J.-M. Fontaine-J.-P. Wintenberger. Nous retrouverons la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules tout au long de ce chapitre. En effet, la théorie de Hodge  $p$ -adique, la cohomologie galoisienne, la cohomologie d'Iwasawa de même que les modules de Wach ou l'exponentielle de Bloch et Kato (cf. chapitre 3) sont liés aux  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.*

*À l'instar des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, la théorie de Hodge  $p$ -adique permet de classer les représentations  $p$ -adiques de corps locaux selon qu'elles vérifient ou non certaines propriétés remarquables.*

*Nous parlerons ensuite des deux cohomologies dont nous aurons besoin dans cette thèse, celle de Galois et celle d'Iwasawa.*

*Nous terminerons ce chapitre en parlant des modules de Wach. Ces derniers permettent d'une part de faire un lien entre les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et la théorie de Hodge  $p$ -adique et d'autre part de redémontrer certains résultats de la théorie de Fontaine-Laffaille.*

## 1.1 Notations

Chaque partie de cette thèse nécessite des notations particulières ; cependant il y aura un bagage commun de notations de base. Ce sont ces notations que nous introduisons dans ce premier paragraphe. Ces dernières ainsi que toutes celles qui seront régulièrement utilisées dans cette thèse sont répertoriées dans l'Index des notations à la fin de cette thèse.

Soit  $p$  un nombre premier impair. Soit  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathbb{C}_p$  une complétion de  $\overline{\mathbb{Q}_p}$  pour la topologie  $p$ -adique et  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  son anneau de valuation. Soit  $\nu_p$  la valuation de  $\mathbb{C}_p$  normalisée par

$$\nu_p(p) = 1.$$

Soit  $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$  un système compatible de racines de l'unité d'ordre  $p^n$  ; elles vérifient donc  $\zeta_{p^n}^p = \zeta_{p^{n-1}}$  pour tout  $n > 0$ . Les chapitres 2 et 3 de cette thèse dépendent du choix de ce système compatible de racines.

Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension finie et  $K_0/\mathbb{Q}_p$  sa sous-extension non ramifiée maximale. Le corps résiduel  $k_K$  de  $K$  est fini et de caractéristique  $p$ .

Soit  $K_\infty$  l'extension cyclotomique de  $K$  :

$$K_\infty = \bigcup_{n \geq 1} K_n$$

où, pour tout entier  $n$  strictement positif,  $K_n = K[\zeta_{p^n}]$ .

Beaucoup de groupes de Galois apparaissent ici : notons  $G_K$  le groupe de Galois absolu  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$  de  $K$ ,  $H_K$  désigne le groupe de Galois  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K_\infty)$  et  $\Gamma_K = G_K/H_K$ . Ainsi,  $\Gamma_K$  est le groupe de Galois de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .

Soit  $\Gamma_n$  le groupe de Galois de  $K_\infty/K_n$  et  $G_n = \Gamma_K/\Gamma_n$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(K_n/K)$ . Lorsque  $n = 1$ , nous notons  $\Delta_K$  au lieu de  $G_1$ .

Soit  $\chi : \Gamma_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  le caractère cyclotomique de  $\Gamma_K$ .

## 1.2 Périodes de représentations $p$ -adiques et $(\varphi, \Gamma)$ -modules

La théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et celle de Hodge  $p$ -adique permettent de classer les représentations  $p$ -adiques d'extensions finies de  $\mathbb{Q}_p$ .

La première de ces théories consiste en une équivalence entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  et celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur un certain

anneau  $\mathbb{B}_K$ . Cette théorie permet aussi de classifier les représentations sur  $\mathbb{Z}_p$  ou sur  $\mathbb{F}_p$ .

La théorie de Hodge  $p$ -adique permet quant à elle de classifier les représentations en les regroupant en certaines sous-catégories pleines remarquables. La technique consiste à introduire un certain nombre d'anneaux, appelés anneaux de périodes  $p$ -adiques. Ces derniers sont des  $\mathbb{Q}_p$ -algèbres topologiques munies d'une action de  $G_K$  et de structures additionnelles (filtration, Frobenius, opérateur de monodromie etc).

Les représentations  $p$ -adiques sont classées de la manière suivante. Soit  $B$  un certain anneau de périodes  $p$ -adiques. Une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  est dite  $B$ -admissible si  $B \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq B \otimes_{B^{G_K}} \mathbb{D}_B(V)$ .

Dans certains cas — notamment dans le cas des représentations cristallines — cela équivaut à dire que l'ensemble des invariants  $\mathbb{D}_{\mathbb{B}_{\text{cris}}}(V) = (\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$  de  $\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  contient toutes les informations de  $V$ , i.e. qu'il est possible de retrouver  $V$  à partir de  $\mathbb{D}_{\mathbb{B}_{\text{cris}}}(V)$ .

Les modules  $\mathbb{D}_B(V)$  héritent des structures de l'anneau  $B$ . Cela permet de lire certains invariants de  $V$  sur ces modules (sauts de filtration, valuation du déterminant du Frobenius etc).

### 1.2.1 Théorie des $(\varphi, \Gamma)$ -modules de Fontaine

L'objectif de cette théorie est de transformer les représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  en des objets plus simples à étudier, des objets purement algébriques, sans perdre d'informations. Les candidats sont les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

Cette théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules de J.-M. Fontaine peut être découpée en deux parties : le cas des  $\mathbb{F}_p$ -représentations et celui des représentations sur  $\mathbb{Z}_p$ . Nous trouvons le deuxième en relevant le premier. En inversant  $p$ , nous pourrions alors classifier les représentations  $p$ -adiques.

#### $\mathbb{F}_p$ -représentations et théorie du corps des normes

J.-M. Fontaine a montré qu'il existait une équivalence entre la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur le corps de fonctions  $k_K((u))$  noté  $E_K$  et celle des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de  $G_K$  (voir [Fon90, §A.3.4.3]).

Lorsque  $K/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée, le Frobenius  $\varphi$  agit sur cette indéterminée  $u$  selon la formule  $\varphi(u) = u^p$  tandis que pour tout  $g \in \Gamma_K$ , nous avons  $g(u) = (u + 1)^{\chi(g)} - 1$ .

Cette équivalence de catégories a pour essence la théorie du corps des normes de J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger.

**Théorie du corps des normes ([Win83]).** Dans ce paragraphe, nous construisons les outils qui interviennent dans la théorie du corps des normes et qui sont nécessaires aux théories des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et de Hodge  $p$ -adique. Nous expliquons ensuite un résultat important de la théorie du corps des normes.

Soit  $\tilde{\mathbb{E}}$  la limite projective  $\tilde{\mathbb{E}} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbb{C}_p$ , en d'autres termes :

$$\tilde{\mathbb{E}} = \left\{ x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}_p^{\mathbb{N}} \mid (x^{(n+1)})^p = x^{(n)} \right\}.$$

L'ensemble  $\tilde{\mathbb{E}}$  peut être muni des deux lois qui suivent :

$$x + y = a \text{ où } a^{(n)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$$

et

$$x \cdot y = b \text{ où } b^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}.$$

Ce dernier devient alors un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ . Il peut être muni d'une valuation (non discrète)  $\nu_{\tilde{\mathbb{E}}}$  définie par :

$$\nu_{\tilde{\mathbb{E}}}(x) = \nu_p(x^{(0)}).$$

Le corps  $\tilde{\mathbb{E}}$  est complet pour cette valuation et, si  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  désigne son anneau des entiers, alors

$$\tilde{\mathbb{E}}^+ = \left\{ x \in \tilde{\mathbb{E}} \mid x^{(0)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \right\}.$$

Le système compatible de racines de l'unité  $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$  définit un élément de  $\tilde{\mathbb{E}}$ , toujours noté  $\varepsilon$ . L'élément  $\bar{\pi} = \varepsilon - 1$  appartient à  $\tilde{\mathbb{E}}$  et même à  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  puisqu'il est de valuation strictement positive.

Le Frobenius arithmétique  $\varphi : x \mapsto x^p$  et le groupe  $G_K$  agissent sur  $\tilde{\mathbb{E}}$  et sur  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  de manière continue pour la topologie engendrée par  $\nu_{\tilde{\mathbb{E}}}$ . Le Frobenius commute de plus avec l'action de  $G_K$ .

Il existe un isomorphisme d'anneaux entre  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  et  $\varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} / (\varpi_K)$  où  $\varpi_K$  est une uniformisante de  $K$ . Celui-ci permet de voir  $k_K$  comme un sous-corps de  $\tilde{\mathbb{E}}$  en identifiant un élément  $x$  de  $k_K$  à  $(x^{p^{-n}})_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathbb{E}}$ .

Par conséquent,  $E_{K_0} = k_K((\bar{\pi}))$  est un sous corps de  $\tilde{\mathbb{E}}$  stable par l'action du Frobenius  $\varphi$  et de  $G_K$ . En effet, ils agissent sur ce corps selon les formules  $\varphi(\bar{\pi}) = \bar{\pi}^p$  et, pour tout  $g \in G_K$ ,  $g(\bar{\pi}) = (\bar{\pi} + 1)^{\chi(g)} - 1$ .

La clôture séparable  $E = E_{K_0}^{\text{sep}}$  de  $E_{K_0}$  dans  $\tilde{\mathbb{E}}$  est elle aussi stable par l'action du Frobenius  $\varphi$  et de  $G_K$ .

Soit  $E_K = \varphi^{-r_K}(E^{H_K})$  où  $r_K$  est le degré de l'extension  $\mathbb{Q}_{p,\infty} \cap K/\mathbb{Q}_p$  (où  $\mathbb{Q}_{p,\infty}$  est l'extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$  i.e.  $\mathbb{Q}_{p,\infty} = \bigcup_n \mathbb{Q}_{p,n}$  avec  $\mathbb{Q}_{p,n} = \mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$ ). Si  $K$  est un corps absolument non ramifié, c'est-à-dire si  $K = K_0$ , nous retrouvons  $E_K = E_{K_0}$ .

La théorie du corps des normes dit que le morphisme naturel de  $H_K$  dans le groupe de Galois absolu  $G_{E_K}$  de  $E_K$  est un isomorphisme (voir [Win83, théorème 3.2.2]).

**$\mathbb{F}_p$ -représentations.** Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $E_K$  est un  $E_K$ -module libre de type fini muni d'un Frobenius semi-linéaire  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire continue de  $\Gamma_K$  qui commute avec l'opérateur  $\varphi$ . Il est dit étale si le Frobenius transforme une base de ce module en une base.

Il existe une équivalence entre la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $E_K$  et celle des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de  $G_K$ , c'est-à-dire des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie muni d'une action continue de  $G_K$ . Celle-ci se construit en deux temps : il y a d'abord un aspect " $\varphi$ -modules" ; le côté " $\Gamma$ -modules" est ensuite greffée à cette première structure.

Un  $\varphi$ -module étale  $M$  sur  $E_K$  est un  $E_K$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un opérateur Frobenius  $\varphi$  semi-linéaire qui transforme une base de cet espace vectoriel en une base.

En utilisant l'isomorphisme  $H_K \simeq G_{E_K}$  de la théorie du corps des normes et l'équivalence entre la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de  $G_{E_K}$  et celle des  $\varphi$ -modules étales sur  $E_K$  (cf. par exemple [Fon90, §A.1.2.6]), J.-M. Fontaine a obtenu une équivalence entre la catégorie des  $\varphi$ -modules étales sur  $E_K$  et celle des  $\mathbb{F}_p$ -représentations de  $H_K$ . Celle-ci est donnée par le foncteur qui à une  $\mathbb{F}_p$ -représentation  $V$  de  $H_K$  associe

$$\mathbb{D}(V) = (E \otimes_{\mathbb{F}_p} V)^{H_K}.$$

Si maintenant  $V$  est une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de  $G_K$ , l'équivalence précédente donne le  $\varphi$ -module  $\mathbb{D}(V)$  étale sur  $E_K$ . La structure de  $\Gamma$ -module est ensuite ajoutée en remarquant que le groupe de Galois  $\Gamma_K$  agit par quotient sur  $\mathbb{D}(V)$ . Cette action résiduelle suffit pour retrouver l'action de tout  $G_K$  dans la représentation de  $H_K$  associée à  $\mathbb{D}(V)$ .

Ainsi vient l'équivalence de catégories de J.-M. Fontaine

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{F}_p\text{-représentations de} \\ G_K \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{D}} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} (\varphi, \Gamma)\text{-modules étales} \\ \text{sur } E_K \end{array} \right\}.$$

### Représentations $p$ -adiques et $\mathbb{Z}_p$ -représentations

Ce cas se relève du précédent paragraphe : les corps résiduels des anneaux qui interviennent pour le cas des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations sont les corps qui sont définis dans le cas des  $\mathbb{F}_p$ -représentations.

Soit  $\tilde{\mathbb{A}}$  l'anneau des vecteurs de Witt sur  $\tilde{\mathbb{E}}$  :

$$\tilde{\mathbb{A}} = W(\tilde{\mathbb{E}})$$

et  $\tilde{\mathbb{B}} = \tilde{\mathbb{A}}[p^{-1}]$ . Pour tout élément  $x \in \tilde{\mathbb{E}}$ , nous écrivons  $[x]$  pour désigner son représentant de Teichmüller dans  $\tilde{\mathbb{A}}$ .

L'action de  $G_K$  sur  $\tilde{\mathbb{E}}$  se relève dans  $\tilde{\mathbb{A}}$  et donc dans  $\tilde{\mathbb{B}}$ . Comme  $\tilde{\mathbb{E}}$  est parfait, le Frobenius absolu  $\varphi : \tilde{\mathbb{E}} \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}$  se relève aussi en une bijection sur  $\tilde{\mathbb{B}}$  à l'aide de la formule

$$\varphi \left( \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \right) = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k^p].$$

Posons  $\pi = [\varepsilon] - 1$  et pour tout entier  $n$ , notons  $\varepsilon_n = \varphi^{-n}(\varepsilon) = \varepsilon^{1/p^n}$  et  $\pi_n = [\varepsilon^{1/p^n}] - 1$ . Posons aussi  $\omega = \pi/\pi_1$  et  $q = \varphi(\omega)$ .

Soit  $\mathbb{A}_{K_0}^+ = \mathcal{O}_{K_0}[[\pi]]$  et  $\mathbb{A}_{K_0}$  le complété  $p$ -adique de  $\mathbb{A}_{K_0}^+[\pi^{-1}]$ . L'anneau  $\mathbb{A}_{K_0}$  est local de corps résiduel  $E_{K_0} = k_K((\varepsilon - 1))$  et son corps des fractions  $\mathbb{B}_{K_0}$  est obtenu par inversion de  $p$  dans  $\mathbb{A}_{K_0}$  i.e.  $\mathbb{B}_{K_0} = \mathbb{A}_{K_0}[p^{-1}]$ .

Tout ces anneaux reçoivent l'action du Frobenius  $\varphi$  puisque  $\varphi(\pi) = (\pi + 1)^p - 1$  et peuvent être munis d'une action de  $G_K$  en posant  $g(\pi) = (\pi + 1)^{\chi(g)} - 1$  pour tout  $g \in G_K$  où  $\chi : G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  désigne le caractère cyclotomique.

Soit  $\mathbb{B}$  le complété  $p$ -adique de l'extension non ramifiée maximale de  $\mathbb{B}_{K_0}$  dans  $\tilde{\mathbb{B}}$  et  $\mathbb{A} = \mathbb{B} \cap \tilde{\mathbb{A}}$ ,  $\mathbb{B}^+ = \mathbb{B} \cap \tilde{\mathbb{B}}^+$  et  $\mathbb{A}^+ = \mathbb{A} \cap \tilde{\mathbb{A}}^+$ . Ces anneaux sont eux aussi stables par  $\varphi$  et munis d'une action de  $G_K$  qui commute à  $\varphi$ .

Le corps résiduel de  $\mathbb{A}$  est  $E$ , la clôture séparable de  $k_K((\varepsilon - 1))$  dans  $\tilde{\mathbb{E}}$ .

Soit  $\mathbb{A}_K = \varphi^{-r_K}(\mathbb{A}^{H_K})$  où  $r_K$  est toujours le degré de l'extension  $\mathbb{Q}_{p,\infty} \cap K/\mathbb{Q}_p$  et  $\mathbb{B}_K = \mathbb{A}_K[p^{-1}]$ . Ces notations sont compatibles avec celles de  $\mathbb{A}_{K_0}$  et de  $\mathbb{B}_{K_0}$ .



Lorsque  $K/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée, l'anneau  $\mathbb{A}_{K_n}$  n'est autre que  $\varphi^{-n}(\mathbb{A}_{K_0})$  i.e. le complété pour la topologie  $p$ -adique de  $\mathcal{O}_K[[\pi_n]][\pi_n^{-1}]$ . C'est un anneau local de dimension 2 et de corps résiduel  $k_K((\varepsilon_n - 1))$ . De la même manière, le corps  $\mathbb{B}_{K_n}$  est égal à  $\varphi^{-n}(\mathbb{B}_{K_0})$ .

Dans la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules pour les représentations  $p$ -adiques, le corps  $\mathbb{B}$  joue le même rôle que  $E = k_K((\bar{\pi}))^{sep}$  pour les  $\mathbb{F}_p$ -représentations tandis que le corps  $\mathbb{B}_K$  joue celui de  $E_K$ .

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $M$  sur  $\mathbb{A}_K$  est un  $\mathbb{A}_K$ -module libre de type fini muni d'un Frobenius semi-linéaire  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire continue de  $\Gamma_K$  qui commute avec l'opérateur  $\varphi$ . Il est dit étale si l'application qui vient est un isomorphisme :

$$\varphi : \mathbb{A}_K \otimes_{\varphi} M \rightarrow M.$$

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $M$  sur  $\mathbb{B}_K$  est un  $\mathbb{B}_K$ -module libre de type fini muni d'un Frobenius semi-linéaire  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire continue de  $\Gamma_K$  qui commute avec l'opérateur  $\varphi$ . Il est étale s'il admet un  $\mathbb{A}_K$ - $(\varphi, \Gamma)$ -module étale pour réseau.

Vient alors le résultat suivant.

**Théorème 1.2.1 (Classification des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ )**

*Soit  $V$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  de dimension  $d$ .*

- (i)  $\mathbb{D}(V) = (\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{H_K}$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale sur  $\mathbb{B}_K$  de dimension  $d$ .
- (ii) Le  $\otimes$ -foncteur  $\mathbb{D}$  induit une équivalence entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  et celle des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\mathbb{B}_K$ .
- (iii) Le  $\otimes$ -foncteur  $\mathbb{V}$  défini par  $\mathbb{V}(\cdot) = (\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{B}_K} \cdot)^{\varphi=1}$  est un quasi-inverse de  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.*

Voir [Fon90, théorème 3.4.3]. □

En remplaçant le corps  $\mathbb{B}$  par l'anneau  $\mathbb{A}$ , il est possible d'obtenir un résultat semblable pour les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations de  $G_K$  avec le foncteur  $\mathbb{D}(\cdot) = (\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \cdot)^{H_K}$ .

Ainsi il est possible de passer du monde des représentations  $p$ -adiques — ou des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations — de  $G_K$  à celui, purement algébriques, des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sans perdre d'informations. La théorie de Hodge  $p$ -adique, la cohomologie galoisienne, la cohomologie d'Iwasawa ou encore l'exponentielle de Bloch et Kato peuvent être traduites en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

## 1.2.2 Théorie de Hodge $p$ -adique

Cette théorie permet de classier les représentations  $p$ -adiques selon qu'elles vérifient ou non certaines propriétés remarquables.

Outre cette classification, la théorie de Hodge  $p$ -adique met en exergue un certain nombre d'invariants attachés à ces représentations.

Même si nous n'en parlons pas davantage pour l'instant, remarquons que la théorie de Hodge  $p$ -adique et la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sont liées. En effet, L. Berger a montré dans [Ber02a] que les modules obtenus avec la théorie de Hodge  $p$ -adique peuvent être retrouvés avec  $\mathbb{D}(V)$ .

### Représentations de de Rham

Nous commençons avec une première sous-catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ , les représentations de de Rham. Pour cela, nous avons besoin de construire l'anneau des périodes  $p$ -adiques  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ .

**Construction de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  ([Fon94a]).** Soit  $\tilde{\mathbb{A}}^+ = W(\tilde{\mathbb{E}}^+)$  l'anneau des vecteurs de Witt de  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  et  $\tilde{\mathbb{B}}^+ = \tilde{\mathbb{A}}^+[1/p]$ . Tout élément  $x$  de  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  s'écrit de manière unique sous la forme  $x = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k]$  où  $[x_k]$  désigne le représentant de Teichmüller de  $x_k \in \tilde{\mathbb{E}}^+$ .

Outre la topologie  $p$ -adique, l'anneau  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  peut être muni d'une topologie plus faible obtenue en prenant comme base du voisinage de 0 les idéaux de la forme  $[\pi]^k \tilde{\mathbb{A}}^+ + p^n \tilde{\mathbb{A}}^+$  avec  $k, n \geq 0$ .

Le Frobenius  $\varphi : \tilde{\mathbb{E}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbb{E}}^+$  se prolonge en une bijection de  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  à l'aide de la formule

$$\varphi \left( \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \right) = \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k^p].$$

Soit  $\theta$  l'homomorphisme d'anneaux défini sur  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}_p$  donné par la formule :

$$\theta \left( \sum_{k \gg -\infty} p^k [x_k] \right) = \sum_{k \gg -\infty} p^k x_k^{(0)}.$$

Le noyau de cette application  $\theta$  est un idéal principal qui admet  $\omega$  pour générateur.

Définissons maintenant  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  comme la complétion  $(\ker \theta)$ -adique de  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  i.e., en d'autres termes :

$$\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim_{n \geq 0} \tilde{\mathbb{B}}^+ / (\ker \theta)^n .$$

L'anneau  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  est de valuation discrète, d'idéal maximal engendré par  $\omega$  et son corps résiduel est  $\mathbb{C}_p$ . L'action naturelle de  $G_K$  sur  $\tilde{\mathbb{E}}^+$  se prolonge à  $\tilde{\mathbb{B}}^+$  mais aussi à  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ .

La série  $\log[\varepsilon]$  converge dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  et définit ainsi un élément  $t$  de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  ; c'est aussi un générateur de l'idéal maximal de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  et  $g(t) = \chi(g)t$  pour tout  $g \in G_K$ .

Soit  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  le corps des fractions de  $\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  obtenu en inversant  $t$  :

$$\mathbb{B}_{\text{dR}} = \mathbb{B}_{\text{dR}}^+ [t^{-1}] .$$

Il peut être muni d'une filtration décroissante, exhaustive, séparée et stable par l'action de  $G_K$  en posant  $\text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}} = t^i \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . En effet, pour tout  $i$  entier,  $\text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}} \subset \text{Fil}^{i-1} \mathbb{B}_{\text{dR}}$ , mais aussi  $\bigcup_i \text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}} = \mathbb{B}_{\text{dR}}$  et  $\bigcap_i \text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}} = 0$ .

**Représentations de de Rham ([Fon94a]).** Pour toute représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$ , soit  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V) = (\mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ . C'est un espace vectoriel filtré sur  $K$  (la  $i$ -ième filtration  $\text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)$  étant définie par  $\text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V) = (\text{Fil}^i \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ ) de dimension finie

$$\dim_K \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V .$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous écrivons plus simplement  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ .

La représentation  $p$ -adique  $V$  est dite de de Rham si elle est  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ -admissible c'est-à-dire si l'inégalité ci-dessus est une égalité. Dans ce cas, il existe un isomorphisme canonique dit de comparaison  $\text{comp}_{V,K}$  défini par :

$$(1.2.1) \quad \text{comp}_{V,K} : \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V .$$

Les premiers invariants d'une représentation  $p$ -adique  $V$  liés à  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  sont les sauts de filtration de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . Pour tout entier  $i$ , posons

$$h_i(V) = \dim_K (\text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) / \text{Fil}^{i+1} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)) .$$

Les opposés des sauts de filtration, i.e. des  $i$  tels que  $h_i(V) \neq 0$ , sont appelés poids de Hodge-Tate de  $V$ .

Lorsque  $V$  est de de Rham, ces invariants permettent de retrouver la décomposition de Hodge-Tate de  $V$ ; en effet, cette dernière s'écrit :

$$\mathbb{C}_p \otimes V \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(-i)^{h_i(V)}.$$

Un autre invariant de  $V$  est  $t_H(V)$  défini comme suit :

$$t_H(V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i h_i(V).$$

Les sauts de filtration tout comme  $t_H(V)$  peuvent être définis de la même manière pour tout module filtré  $D$ ; ces invariants sont  $h_i(D)$  et  $t_H(D)$ .

Une représentation  $V$  est (strictement) positive (respectivement (strictement) négative) si les sauts de filtration sont (strictement) positifs (resp. (strictement) négatifs) ou de manière équivalente si les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont (strictement) négatifs (resp. (strictement) positifs).

**Lemme 1.2.2**

*Soit  $L/K$  une extension finie. Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de de Rham de  $G_L$  et  $\text{Ind}_{L/K} V$  la représentation induite de  $V$  à  $G_K$  définie par  $\text{Ind}_{L/K} V = \mathbb{Q}_p[G_K] \otimes_{\mathbb{Q}_p[G_L]} V$ . Alors  $\text{Ind}_{L/K} V$  est de de Rham et nous avons :*

$$\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(\text{Ind}_{L/K} V) \simeq \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V).$$

*Démonstration.*

Pour tout  $\sigma$  de  $\text{Gal}(L/K)$ , soit  $\tilde{\sigma}$  un relèvement de  $\sigma$  dans  $G_K$ . Alors les  $G_L \tilde{\sigma}$  constituent une partition de  $G_K$ ; ainsi  $\text{Ind}_{L/K} V \simeq \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \mathbb{Q}_p \sigma \otimes V$ . Il vient alors

$$\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(\text{Ind}_{L/K} V) \simeq \left( \bigoplus_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \mathbb{Q}_p \sigma \otimes \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V) \right)^{\text{Gal}(L/K)}.$$

Si  $x = \sum \sigma \otimes x_\sigma$  appartient à  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(\text{Ind}_{L/K} V)$ , nous avons  $x_{\sigma'} = \sigma'(x_1)$  pour tout  $\sigma$  dans  $\text{Gal}(L/K)$ .

Réciproquement, si  $y \in \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V)$ , alors  $\sum \sigma \otimes (\sigma(y))$  appartient à  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(\text{Ind}_{L/K} V)$ . Il vient alors une injection de modules filtrés de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V)$  dans  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^K(\text{Ind}_{L/K} V)$ ; un jeu de dimension assure que c'est un isomorphisme. En particulier,  $\text{Ind}_{L/K} V$  est de de Rham.  $\square$

**Autour de l'isomorphisme de comparaison.** Dans le paragraphe précédent, nous avons vu qu'une représentation  $p$ -adique de de Rham  $V$  de  $G_K$  donne lieu à un isomorphisme de comparaison  $\text{comp}_{V,K} : \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ . Lui-même donne naissance à plusieurs autres morphismes. C'est ce dont nous parlons dans ce paragraphe.

Soit  $A$  un anneau. Pour tout  $A$ -module  $M$  libre de rang  $r$ , notons

$$\det_A M = \bigwedge_A^r M.$$

Au cours de cette thèse, l'anneau  $A$  sera successivement  $\mathbb{Z}_p$ ,  $\mathbb{Q}_p$ ,  $\mathbb{Q}_p[G_n]$  ou  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ .

Soit  $L/K$  une extension galoisienne finie et  $V$  une représentation de de Rham de  $G_K$ . Notons — abusivement —  $\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V$  la représentation induite à  $G_{\mathbb{Q}_p}$  de la restriction de  $V$  à  $G_L$ .

L'isomorphisme de comparaison  $\text{comp}_{\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V, \mathbb{Q}_p}$  allié à l'isomorphisme du lemme 1.2.2 qui lie les modules filtrés  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V)$  et  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^{\mathbb{Q}_p}(\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V)$  donne

$$(1.2.2) \quad \text{comp}_{\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V, \mathbb{Q}_p} : \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V.$$

Ce dernier isomorphisme donne naissance à l'homomorphisme  $\tilde{\alpha}_{V,L}$  défini par

$$\tilde{\alpha}_{V,L} : \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det_{\mathbb{Q}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}.$$

De cette manière nous obtenons une application : .

**Lemme 1.2.3**

Soit  $\alpha_{V,L}$  l'homomorphisme défini par

$$(1.2.3) \quad \alpha_{V,L} : \begin{cases} \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det_{\mathbb{Q}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}} \\ x \otimes y \mapsto t^{-r} \tilde{\alpha}_{V,L}(x \otimes y) \end{cases}$$

où  $r = [L : \mathbb{Q}_p] t_H(V)$ . Ce morphisme est à valeurs dans une extension finie de  $\widehat{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}}$ .

*Démonstration.*

Comme  $V$  est une représentation cristalline de  $G_K$ , la restriction de  $\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V$  à  $G_L$  est cristalline. Il en découle que la restriction de  $\det_{\mathbb{Q}_p}(\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V)$  à  $G_L$  est de de Rham de rang 1 et donc que sa restriction à  $G_{L'}$  avec  $L'/\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}$  finie est isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(r)$ . Nous en déduisons le lemme.  $\square$

Pour tout réseau  $M$  de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^L(V)$  et pour tout réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ , notons  $\alpha_{V,L}(M, T)$  l'image de  $\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det_{\mathbb{Z}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} T$  par cette application.

## Représentations cristallines

Dans ce paragraphe, nous construisons d'abord l'anneau des périodes  $p$ -adiques  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ . Cela permet de mettre en lumière une nouvelle sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ , celle des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$ .

**Construction de  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  ([Fon94a]).** Soit  $\mathbb{A}_{\text{cris}}$  l'anneau défini par

$$\mathbb{A}_{\text{cris}} = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{\omega^n}{n!} \mid (a_n)_n \subset \tilde{\mathbb{A}}^+ \text{ avec } a_n \rightarrow 0 \text{ pour la topologie } p\text{-adique} \right\}$$

où  $\omega = \pi/\pi_1$  avec  $\pi_1 = [\varepsilon^{1/p}] - 1$ ; définissons également  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ = \mathbb{A}_{\text{cris}}[p^{-1}]$ .

L'élément  $t$  défini plus haut par la série  $\log[\varepsilon]$  appartient à cet anneau. En inversant  $t$  dans  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ , nous obtenons l'anneau  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  :

$$\mathbb{B}_{\text{cris}} = \mathbb{B}_{\text{cris}}^+[t^{-1}].$$

Cet anneau est inclus dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ . Il existe de plus une injection  $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} \mathbb{B}_{\text{cris}} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}$  (où  $\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}/\mathbb{Q}_p$  désigne la sous-extension non ramifiée maximale de  $\overline{\mathbb{Q}}_p$ ); ce plongement induit une filtration  $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} \mathbb{B}_{\text{cris}}$  et une action de  $G_K$  sur  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ .

Le Frobenius agit naturellement  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^+$ ; nous avons notamment  $\varphi(t) = pt$ .

**Représentations cristallines ([Fon94a]).** De la même manière que pour toute représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$ , nous avons défini  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ , posons

$$\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = (\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}.$$

C'est un espace vectoriel de dimension finie sur  $K_0$  et de dimension  $\leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ .

Il est de plus muni d'un Frobenius hérité de  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  et l'injection de  $\overline{\mathbb{Q}}_p \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\text{nr}}} \mathbb{B}_{\text{cris}}$  dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$  induit une filtration sur  $K \otimes_{K_0} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Une telle structure est appelée  $\varphi$ -module filtré sur  $K$ . Ces modules sont les objets d'une catégorie notée  $\text{MF}_K$ .

Une représentation  $V$  est cristalline si elle est  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$ -admissible c'est-à-dire si l'inégalité précédente sur les dimensions est une égalité.

Un  $\varphi$ -module  $D$  filtré sur  $K$  est admissible s'il existe une représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  de  $G_K$  telle que  $D \simeq \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Les  $\varphi$ -modules filtrés sur  $K$  admissibles forment une sous-catégorie  $\text{MF}_K^{\text{ad}}$  de  $\text{MF}_K$ .

Le théorème qui vient résume les résultats de J.-M. Fontaine à propos des représentations  $p$ -adiques cristallines (voir [Fon82, théorème 5.2], et [Fon79, §3 – 4]).

**Théorème 1.2.4**

- (i) La sous-catégorie pleine formée des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$  et  $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{ad}}$  sont toutes deux stables par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel et par dualité.
- (ii) Le  $\otimes$ -foncteur  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}$  induit une équivalence entre la catégorie des représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$  et  $\mathrm{MF}_K^{\mathrm{ad}}$ .
- (iii) Le  $\otimes$ -foncteur  $\mathbb{V}_{\mathrm{cris}}$  défini par  $\mathbb{V}_{\mathrm{cris}}(M) = \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} M)^{\varphi=1}$  pour tout  $\varphi$ -module filtré sur  $K$  admissible  $M$  est un quasi-inverse de la restriction  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}$  à la catégorie des représentations  $p$ -adiques cristallines.

L'injection  $\overline{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \hookrightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$  permet de lier la dimension du  $\varphi$ -module filtré sur  $K$  et celle du module de de Rham  $\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V)$  associé à  $V$  :

$$\dim_{K_0} \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) \leq \dim_K \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

Aussi, toute représentation  $p$ -adique cristalline est de de Rham et si  $V$  est cristalline, alors

$$\mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

**Autour de la faible admissibilité.** Soit  $D$  un  $\varphi$ -module filtré sur  $K$  de dimension finie. Il existe un invariant de  $D$  lié au déterminant du Frobenius. Pour toute base  $(e_i)_i$  de  $D$  sur  $K_0$ ; il existe  $\lambda \in K_0$  tel que

$$\bigwedge_i \varphi(e_i) = \lambda \bigwedge_i e_i.$$

L'extrémité du polygone de Newton de  $\varphi$  est la valuation  $t_N(D) = \nu_p(\lambda)$  de cette constante; cette valuation ne dépend pas du choix de la base de  $D$ , c'est l'invariant attaché à  $D$ .

Un  $\varphi$ -module filtré sur  $K$  est faiblement admissible si  $t_N(D) = t_H(D)$  et si pour tout sous- $\varphi$ -module filtré  $D'$  de  $D$ , nous avons  $t_N(D') \geq t_H(D')$ .

P. Colmez et J.-M. Fontaine ont montré que l'admissibilité était équivalente à la faible admissibilité (voir [CF00] pour la preuve). Cela permet de décrire parfaitement les  $\varphi$ -modules filtrés de dimension finie qui proviennent d'une représentation  $p$ -adique cristalline et constitue ainsi un avantage de la catégorie  $\mathrm{MF}_K$  : se donner une représentation  $p$ -adique cristalline revient à définir un  $\varphi$ -module filtré faiblement admissible i.e. une structure purement algébrique.

**Théorie de Fontaine-Laffaille (voir e.g. [FL82], [FPR94, chap. 1, §4]).** Lorsque  $K/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée, il existe une version entière aux foncteurs  $\mathbb{V}_{\text{cris}}$  et  $\mathbb{D}_{\text{cris}}$ .

Un  $\mathcal{O}_K$ -réseau  $M$  d'un  $\varphi$ -module  $D$  filtré sur  $K$  est fortement divisible lorsque  $\sum_i p^{-i} \varphi(\text{Fil}^i M) = M$  (où  $\text{Fil}^i M$  désigne la filtration de  $D$  induite sur  $M$ ).

Soit  $\text{MF}_{\mathcal{O}_K}^{f, [r, r+p-1]}$  la catégorie des réseaux fortement divisibles des  $\varphi$ -modules filtrés sur  $K$  (faiblement admissibles) dont les sauts de filtration sont contenus dans l'intervalle  $[r, r+p-1]$ .

Soit  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{cris}}^{[r, r+p-1]}(G_K)$  la catégorie des  $\mathbb{Z}_p$ -représentations  $T$  de  $G_K$  telles que  $T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  est une représentation  $p$ -adique cristalline à sauts de filtration contenus dans  $[r, r+p-1]$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour toute représentation  $V$ , notons  $V(k)$  la représentation obtenue en tordant  $V$  par la puissance  $k$ -ième du caractère cyclotomique.

Soit  $\mathbb{M}_{\text{cris}}$  et  $\mathbb{T}_{\text{cris}}$  les foncteurs définis comme suit. Pour tout  $T$  et tout  $M$  respectivement de  $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{cris}}^{[r, r+p-1]}(G_K)$  et de  $\text{MF}_{\mathcal{O}_K}^{f, [r, r+p-1]}$ , posons

$$\mathbb{M}_{\text{cris}}(T) \otimes e_{-r} = (\mathbb{A}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T(r))^{G_K} \quad \text{et} \quad \mathbb{T}_{\text{cris}}(M)(-r) = (\mathbb{A}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \otimes e_r)^{G_K}$$

où pour tout  $l$  entier,  $e_{-l}$  est une base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(l))$ . La théorie de Fontaine-Laffaille dit que ces foncteurs sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'un de l'autre :

$$\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p, \text{cris}}^{[r, r+p-1]}(G_K) \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{M}_{\text{cris}}} \\ \xleftarrow{\mathbb{T}_{\text{cris}}} \end{array} \text{MF}_{\mathcal{O}_K}^{f, [r, r+p-1]}.$$

Cette théorie est de plus compatible avec la dualité. Elle transforme en outre le twist par le caractère cyclotomique en le produit tensoriel par  $t^{-1}\varepsilon$ . Expliquons cela.

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline dont la longueur de filtration est strictement inférieure à  $p$ ,  $T$  est un réseau de  $V$  stable par  $G_K$  et  $k$  est un entier. Soit  $M$  le réseau fortement divisible associé à  $T$ , alors le réseau fortement divisible associé à  $T(k)$  est  $M \otimes t^{-k}\varepsilon^{\otimes k}$ .

### 1.3 Cohomologies

Dans ce paragraphe, nous introduisons la cohomologie galoisienne et celle d'Iwasawa des représentations et nous donnons le lien existant entre ces deux cohomologies.

Nous traduisons ensuite ces cohomologies en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.



### 1.3.1 Cohomologie galoisienne et cohomologie d'Iwasawa

Pour toute  $\mathbb{Z}_p$ -représentation  $T$ , pour toute représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  et tout entier  $i$ , notons  $H^i(K, T)$  (resp.  $H^i(K, V)$ ) le  $i$ -ième groupe de la cohomologie galoisienne  $H^i(G_K, T)$  de  $T$  (resp.  $H^i(G_K, V)$  de  $V$ ).

Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$  et  $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ . Les groupes de cohomologie d'Iwasawa de  $T$  (resp. de  $V$ ) sont définis par :

$$H_{\text{Iw}}^i(K, T) = \varprojlim_{\text{cor}_{K_{n+1}/K_n}} H^i(K_n, T) \quad (\text{resp. } H_{\text{Iw}}^i(K, V) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_{\text{Iw}}^i(K, T)).$$

Ces groupes sont simplement notés  $H_{\text{Iw}}^i(T)$  ou  $H_{\text{Iw}}^i(V)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base.

Soit  $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma_K]]$  l'algèbre d'Iwasawa de  $\Gamma_K$ . Les groupes  $H_{\text{Iw}}^i(T)$  (respectivement  $H_{\text{Iw}}^i(V)$ ) sont des  $\Lambda$ -modules (resp. des  $\Lambda_p = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ -modules). Ils ont fait l'objet d'une étude minutieuse par B. Perrin-Riou (voir [PR92]).

#### Proposition 1.3.1

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ . Alors

- (i)  $H_{\text{Iw}}^i(V) = 0$  si  $i \notin \{1, 2\}$ ,
- (ii) la  $\Lambda_p$ -torsion de  $H_{\text{Iw}}^1(V)$  est isomorphe à  $V^{H_K}$  et  $H_{\text{Iw}}^1(V)/V^{H_K}$  est libre de rang  $[K : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ ,
- (iii)  $H_{\text{Iw}}^2(V) \simeq (V^*(1)^{H_K})^*$ .

Ces deux cohomologies sont liées par la proposition suivante.

#### Proposition 1.3.2

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$  et  $T$  un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Pour entier  $j$ , nous avons la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow H_{\text{Iw}}^j(T)_{\Gamma_n} \longrightarrow H^j(K_n, T) \longrightarrow H_{\text{Iw}}^{j+1}(T)^{\Gamma_n} \longrightarrow 0.$$

Si  $j = 1$ , nous obtenons en particulier :

$$0 \longrightarrow H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n} \longrightarrow H^1(K_n, T) \longrightarrow H_{\text{Iw}}^2(T)^{\Gamma_n} \longrightarrow 0,$$

et si de plus  $(V^*)^{H_K} = 0$ , alors  $H_{\text{Iw}}^2(T)$  est fini et nous avons :

$$\# H_{\text{Iw}}^2(T)^{\Gamma_n} = \# H_{\text{Iw}}^2(T)_{\Gamma_n} = \# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)).$$

*Idée de démonstration.*

Cela résulte de la suite spectrale de Hochschild-Serre (voir [PR94], [Nek06] ou [BB08]).  $\square$

### 1.3.2 Cohomologie galoisienne et $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Dans ce paragraphe, nous voyons le lien entre la cohomologie galoisienne et la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

Le groupe  $H^0(K, V)$  est l'ensemble des invariants de  $V$  par  $G_K$  qui n'est autre que l'ensemble des éléments de  $\mathbb{D}(V)$  fixés à la fois par  $\varphi$  et par  $\Gamma_K$ .

D'autre part  $H^1(K, V)$  classe les extensions de  $V$  par la représentation triviale. En effet, si  $c : G_K \rightarrow V$  est le représentant d'une classe  $\alpha$  de  $H^1(K, V)$ , la représentation  $p$ -adique  $V_\alpha = V \oplus \mathbb{Q}_p e$  de  $G_K$  définie par  $g(e) = e + c(g)$  est indépendante du choix du représentant de  $\alpha$ . Réciproquement, toute extension de  $V$  par la représentation triviale peut s'écrire sous cette forme.

Ainsi si  $W$  est une extension de  $V$  par la représentation triviale, elle s'insère dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0.$$

Par la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, une telle extension  $W$  donne lieu à une extension de  $\mathbb{D}(V)$  par le  $(\varphi, \Gamma)$ -module trivial  $\mathbb{B}_K$ .

Inversement, toute extension de  $\mathbb{D}(V)$  par le  $(\varphi, \Gamma)$ -module trivial est étale (voir par exemple [Ber08, lemme 1.2.3]) et provient ainsi d'une représentation  $p$ -adique extension de  $V$  par  $\mathbb{Q}_p$ .

En considérant ces premiers liens entre les deux premiers groupes de cohomologie galoisienne et la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, nous ne sommes pas surpris de voir que la cohomologie galoisienne d'une représentation  $p$ -adique de  $G_K$  peut être entièrement calculée à l'aide de son  $(\varphi, \Gamma)$ -module associé via le foncteur  $\mathbb{D}$ .

Soit  $\gamma$  un générateur topologique de  $\Gamma_K$ ,  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathbb{B}_K$  et  $\mathcal{E}_{\varphi, \gamma}(D)$  le complex :

$$\mathcal{E}_{\varphi, \gamma}(D) : 0 \longrightarrow D \xrightarrow{f} D \oplus D \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0,$$

avec  $f(x) = ((\varphi - 1)x, (\gamma - 1)x)$ ,  $g(x, y) = (\gamma - 1)x - (\varphi - 1)y$  et où " $D \oplus D$ " est en degré 1. Notons  $H^i(\mathcal{E}_{\varphi, \gamma}(D))$  les groupes de cohomologie de ce complex ; s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous écrivons plus simplement  $H^i(D)$ .

Le groupe  $H^0(D)$  est l'ensemble des éléments de  $D$  fixés par  $\varphi$  et par  $\Gamma_K$  simultanément. Il est ainsi égal à  $H^0(K, V)$  lorsque  $D$  provient d'une certaine représentation  $p$ -adique  $V$  de  $G_K$ .

D'autre part, de la même manière que  $H^1(K, V)$  classifié les extensions de  $V$  par la représentation triviale,  $H^1(D)$  classe les extensions de  $D$  par le  $(\varphi, \Gamma)$ -module trivial  $\mathbb{B}_K$ . Expliquons cela.

À tout  $(\alpha, \beta)$  de  $D \oplus D$  annulé par  $g$  est associée l'extension  $D_{(\alpha, \beta)}$  de  $D$  par  $\mathbb{B}_K$  définie par la suite exacte

$$0 \rightarrow D \rightarrow D_{(\alpha, \beta)} = D \oplus \mathbb{B}_K e \rightarrow \mathbb{B}_K e \rightarrow 0$$

et par les relations  $(\varphi - \mathbb{1})e = \alpha$  et  $(\gamma - \mathbb{1})e = \beta$ . Réciproquement, toute extension de  $D$  par le  $(\varphi, \Gamma)$ -module trivial provient d'un élément de  $D \oplus D$  tué par  $g$  puisque l'action de  $\Gamma_K$  et de  $\varphi$  commutent.

Les ressemblances entre les groupes de cohomologie  $H^i(K, V)$  et  $H^i(D)$  pour  $i = 0, 1$  lorsque  $D$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module de  $V$  ne sont en fait que les conséquences du résultat de L. Herr (voir [Her98]) qui suit.

**Proposition 1.3.3**

*Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique de  $G_K$ . Pour tout entier  $i$ , les groupes  $H^i(\mathbb{D}(V))$  et  $H^i(K, V)$  s'identifient via un isomorphisme canonique  $h_V^i$ .*

Pour  $i = 1$ , cette identification est explicitée dans le lemme qui suit (voir [Ben00, proposition 1.3.2] ou [CC99, §1.4]).

**Lemme 1.3.4**

*Soit  $(a, b)$  un représentant d'un élément  $x$  de  $H^1(\mathbb{D}(V))$  et  $u$  une solution de  $(\mathbb{1} - \varphi)u = a$  dans  $\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ . Alors  $h_V^1$  envoie  $x$  sur la classe du cocycle :*

$$g \mapsto (g - \mathbb{1})u + (\mathbb{1} + \gamma_n + \dots + \gamma_n^{k(g)-1})b$$

où  $k(g)$  est tel que  $\gamma_n^{k(g)} = g|_{K_\infty}$ .

Notons une nouvelle fois qu'il existe des complexes et des résultats semblables pour les  $\mathbb{Z}_p$ -représentations de  $G_K$ .

Cette traduction de la cohomologie galoisienne en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules permet de prouver la formule d'Euler-Poincaré pour les représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  i.e. pour les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\mathbb{B}_K$  (voir [Her98]).

**Théorème 1.3.5 (Formule d'Euler-Poincaré)**

*Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$ . Les  $H^i(K, T)$  sont des  $\mathbb{Z}_p$ -modules de type fini ; leurs rangs sont liés par la formule*

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} H^i(K, T) = - [K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T.$$

Une formule similaire pour les représentations  $p$ -adiques se déduit de ce théorème en inversant  $p$ .

### 1.3.3 Cohomologie d'Iwasawa et $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Comme nous l'avons fait pour les groupes de cohomologie galoisienne dans le paragraphe précédent, nous mettons ici en avant le lien entre la cohomologie d'Iwasawa et la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Pour cela, nous avons besoin d'un nouvel opérateur  $\psi$ .

Le Frobenius  $\varphi$ , vu comme opérateur de  $\mathbb{B}$ , n'est pas surjectif : le corps  $\mathbb{B}$  est une extension de degré  $p$  de  $\varphi(\mathbb{B})$ . Il est en revanche injectif ; nous pouvons d'ailleurs définir un inverse à gauche  $\psi$  de  $\varphi$  qui commute à l'action de  $G_K$  en posant :

$$\psi(x) = \frac{1}{p} \varphi^{-1} (\text{Tr}_{\mathbb{B}/\varphi(\mathbb{B})}(x)).$$

Soit  $\gamma_1$  un générateur topologique de  $\Gamma_1$  et, pour tout entier  $n$  non nul,  $\gamma_n = \gamma_1^{p^{n-1}}$ .

Même si de prime abord la relation entre la cohomologie d'Iwasawa et la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules est moins frappante que dans la cohomologie galoisienne, il n'en existe pas moins une. En effet, les groupes de cohomologie d'une représentation peuvent être exprimés en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

**Proposition 1.3.6 (J.-M. Fontaine, cf. [CC99])**

*Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$ . Les groupes de cohomologie du complex*

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}(T) \xrightarrow{\psi-1} \mathbb{D}(T) \longrightarrow 0$$

*s'identifient canoniquement à la cohomologie d'Iwasawa de  $T$  (le premier " $\mathbb{D}(T)$ " est en degré 1).*

*Idée de démonstration.*

L'isomorphisme entre  $H_{\text{Iw}}^1(T)$  et  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}$  a été explicité comme suit. Si  $x$  est un élément de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}$ , alors  $(\varphi - 1)x \in \mathbb{D}(T)^{\psi=0}$ . L'homomorphisme  $\gamma_n - 1$  étant inversible sur  $\mathbb{D}(T)^{\psi=0}$  (op. cit., proposition I.5.1), il existe  $x_n \in \mathbb{D}(T)^{\psi=0}$  tel que  $(\gamma_n - 1)x_n = (\varphi - 1)x$ .

Les  $\text{cl}(x_n, x) \in H^1(\mathcal{Z}_{\varphi, \gamma_n}(\mathbb{D}(T))) \simeq H^1(K_n, T)$  sont compatibles et forment donc un élément de  $H_{\text{Iw}}^1(T)$ .  $\square$

Notons une fois encore, qu'en tensorisant pour  $\mathbb{Q}_p$ , il vient des résultats similaires et un isomorphisme tout aussi explicite pour les représentation  $p$ -adiques de  $G_K$ .

## 1.4 Modules de Wach

Dans ce paragraphe,  $K/\mathbb{Q}_p$  désigne une extension finie non ramifiée.

Le module de Wach des représentation de  $G_K$  est le fruit de la quête d'objets de plus en plus petits qui décrivent entièrement les représentations. Cela permet entre autre de mieux déceler les propriétés remarquables de certaines représentations.

Ainsi, il est possible de passer des représentations aux modules de Wach sans perdre d'informations (et il est donc possible de retrouver une représentation en partant de son module de Wach).

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu qu'il était possible de passer d'une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation  $T$  (ou d'une représentation  $p$ -adique  $V$ ) à un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathbb{A}_K$  (ou sur  $\mathbb{B}_K$ ) sans perdre d'informations. Dans le cas d'une représentation absolument cristalline, tout ce qui caractérise  $T$  (respectivement  $V$ ) est en fait contenu dans un  $\mathbb{A}_K^+$ -module (resp. dans un  $\mathbb{B}_K^+$ -module) muni d'une action de  $\Gamma$  et d'un Frobenius  $\varphi$ , le module de Wach  $\mathbb{N}(T)$  de  $T$  (resp.  $\mathbb{N}(V)$  de  $V$ ).

Ces modules  $\mathbb{N}(T)$  et  $\mathbb{N}(V)$  permettent de préciser le lien entre la théorie de Hodge  $p$ -adique de [Ber02a]. En effet, il est non seulement possible de retrouver le  $\varphi$ -module filtré  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  avec  $\mathbb{N}(V)$  mais il est également possible d'associer à tout réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$  un  $\mathcal{O}_K$ -réseau canonique de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Cela permet de reformuler la théorie de Fontaine-Laffaille en termes de modules de Wach.

### 1.4.1 Le module de Wach d'une représentation cristalline

S'appuyant sur les modules construits par N. Wach dans [Wac96], P. Colmez a montré dans [Col99] que, dans le cas absolument cristallin, il existe une base de  $\mathbb{D}(T)$  contenue dans  $\mathbb{D}^+(T) = (\mathbb{A}^+ \otimes_{\mathbb{Z}_p} T)^{H_K}$ .

Cela permet de caractériser le fait d'être cristallin pour les représentations  $p$ -adiques de  $G_K$  mais aussi de retrouver le module  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  dans  $\mathbb{D}^+(V)$  lorsque  $V$  est cristalline.

Ces travaux ont été précisés par L. Berger dans [Ber04]. Les propositions 1.4.1 et 1.4.2 résument cela.

#### Définition 1.4.1

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers avec  $b \geq a$ . Un module de Wach à poids dans  $[a, b]$  est un  $\mathbb{A}_K^+$ -module (ou un  $\mathbb{B}_K^+$ -module)  $N$  libre de type fini muni d'une action de  $\Gamma_K$  agissant trivialement sur  $N/\pi N$  et d'un Frobenius  $\varphi : N[1/\pi] \rightarrow N[1/\varphi(\pi)]$  commutant l'un avec l'autre tel que  $N \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{A}_K$  (ou  $N \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{B}_K$ ) est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale et vérifiant de plus  $\varphi(\pi^b N) \subset \pi^b N$  et tel que  $\pi^b N/\varphi^*(\pi^b N)$  est tué par  $q^{b-a}$ .

**Proposition 1.4.1**

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive et cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont  $r_1 = 0 \leq r_2 \leq \dots \leq r_d = h$ . Soit  $T$  un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .

Il existe un unique sous- $\mathbb{A}_K^+$ -module  $\mathbb{N}(T)$  de  $\mathbb{D}^+(T)$  stable par  $\varphi$  et satisfaisant les trois propriétés suivantes :

- (i)  $\mathbb{N}(T)$  est un  $\mathbb{A}_K^+$ -module libre de rang  $d = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$  et contient une base de  $\mathbb{D}(T)$  sur  $\mathbb{A}_K$  ;
- (ii) l'action de  $\Gamma_K$  préserve  $\mathbb{N}(T)$  et est triviale sur  $\mathbb{N}(T)/\pi\mathbb{N}(T)$  ;
- (iii)  $\pi^h\mathbb{D}^+(T) \subset \mathbb{N}(T)$ .

Ce  $\mathbb{A}_K^+$ -module est appelé module de Wach de  $T$  ; celui-ci est à poids dans  $[-h, 0]$ .

*Démonstration.*

L'existence de  $\mathbb{N}(T)$  vérifiant les trois propriétés est assurée dans les propositions II.1.1 et III.3.1 de [Ber04].  $\square$

La définition des modules de Wach associé à une représentation peut être étendue à toute représentation cristalline. Soit  $T$  une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation de  $G_K$  et  $a$  le plus petit saut de filtration de  $V = \mathbb{Q}_p \otimes \mathbb{Z}_p$  ; le module de Wach de  $T$  est défini par  $\mathbb{N}(T) = \pi^a\mathbb{N}(T(a)) \otimes \varepsilon^{\otimes -a}$ . Ce module vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) de la proposition précédente.

Dans tout les cas, posons  $\mathbb{N}(V) = \mathbb{N}(T) \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{B}_K^+$  ; ce  $\mathbb{B}_K^+$ -module  $\mathbb{N}(V)$  est le module de Wach de  $V$  et est indépendant du choix du réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ .

Le foncteur  $\mathbb{N}$  est une équivalence entre la catégorie des représentations cristallines de  $G_K$  et celle des modules de Wach sur  $\mathbb{B}_K^+$  ; il est compatible avec le produit tensoriel, avec la dualité et avec les suites exactes (cf. [Ber04, théorème 2]).

L'application qui à un réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$  associe  $\mathbb{N}(T)$  induit une bijection entre les réseaux de  $V$  stables par  $G_K$  et les modules de Wach sur  $\mathbb{A}_K^+$  réseau de  $\mathbb{N}(V)$  (cf. loc. cit.).

Notons  $\mathcal{R}_K^+$  l'ensemble des séries formelles en  $\pi$  indexées sur  $\mathbb{N}$ , à coefficients dans  $K$  et qui convergent sur le disque unité ouvert  $\{x \in \mathbb{C}_p \mid |x|_p < 1\}$ . Cet anneau est de Bézout et vérifie la théorie des diviseurs élémentaires (cf. [Ber02a, proposition 4.12]).

Nous avons l'inclusion  $\mathbb{B}_K^+ \subset \mathcal{R}_K^+$  ; les actions de  $\varphi$  et de  $\Gamma_K$  sur  $\mathbb{B}_K^+$  se prolongent naturellement à  $\mathcal{R}_K^+$ ,

Il existe des plongements  $\varphi^{-n} : \mathcal{R}_K^+ \hookrightarrow K_n[[t]] \subset \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  qui envoient  $\pi$  sur  $\zeta_n \exp(t/p^n) - 1$ .

**Proposition 1.4.2**

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive et cristalline de  $G_K$  et  $r_1 \leq \dots \leq r_d$  ses sauts de filtration. Nous avons :

$$\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \left( \mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V) \right)^{\Gamma_K}$$

et :

$$\left[ \mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V) : \mathcal{R}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \right] = \left\{ \left( \frac{t}{\pi} \right)^{r_1} : \dots : \left( \frac{t}{\pi} \right)^{r_d} \right\}.$$

*Démonstration.*

Voir la proposition III.4 de [Ber04]. □

**1.4.2 Modules de Wach et théorie de Fontaine-Laffaille**

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  de  $G_K$  et  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Les modules de Wach permettent d'associer à  $T$  un  $\mathcal{O}_K$ -réseau canonique  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Ainsi les modules de Wach sont liés à la théorie de Fontaine-Laffaille.

Notons  $a$  le plus petit saut de filtration de  $V$ . La proposition 1.4.2 entraîne l'égalité  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \left( \left( \frac{t}{\pi} \right)^a \mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\Gamma_K}$ . De plus, si  $(n_i)_i$  est une base de  $\mathbb{N}(T)$ , l'égalité précédente permet de définir l'homomorphisme naturel

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) &= \left( \left( \frac{t}{\pi} \right)^a \mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V) \right)^{\Gamma_K} \rightarrow \mathbb{N}(V)/\pi\mathbb{N}(V) \\ &\sum_i \left( \frac{t}{\pi} \right)^a f_i(\pi) \otimes n_i \mapsto \sum_i f_i(0) \otimes n_i. \end{aligned}$$

**Proposition 1.4.3**

Pour toute représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  de  $G_K$ , posons

$$\text{Fil}^i \mathbb{N}(V) = \{x \in \mathbb{N}(V) \mid \varphi(x) \in q^i \mathbb{N}(V)\}.$$

Le précédent morphisme  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \rightarrow \mathbb{N}(V)/\pi\mathbb{N}(V)$  est un isomorphisme de  $\varphi$ -modules filtrés.

*Démonstration.*

Cela provient directement du théorème III.4.4 et du corollaire III.4.5 de [Ber04] donnent la proposition qui vient. □

Nous pouvons à présent définir un réseau canonique  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  comme l'image réciproque de  $\mathbb{N}(T)/\pi\mathbb{N}(T)$  dans  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , en d'autres termes,

$$(1.4.1) \quad \mathbb{D}_{\text{cris}}(T) = \left\{ \sum_i \left(\frac{t}{\pi}\right)^a f_i(\pi) \otimes n_i \in \left( \left(\frac{t}{\pi}\right)^a \mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\Gamma_K} \mid \forall i, f_i(0) \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Faisons maintenant le lien entre la théorie de Fontaine-Laffaille et les modules de Wach (voir [Wac97], [Ber04]) en reformulant la bijection de cette théorie.

**Proposition 1.4.4**

*Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  de longueur de filtration  $< p$ , c'est-à-dire dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[r, r + p - 1]$ .*

*(i) Pour tout réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ , le réseau  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  est fortement divisible.*

*(ii) Réciproquement, si  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  n'a pas de partie de pente  $r$  ou pas de partie de pente  $r + p - 1$ , tout réseau  $M$  fortement divisible de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  est isomorphe à  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  pour un certain réseau (explicite)  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ .*

*Démonstration.*

La proposition V.2.1 [Ber04] donne le premier point tandis que le second provient de la proposition V.2.3 du même article.  $\square$

Pour résumer, si  $V$  est une représentation comme dans la proposition précédente, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{réseaux de } V \text{ stables} \\ \text{par } G_K \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbb{M}_{\text{cris}}} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \text{réseaux fortement} \\ \text{divisibles de } \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \end{array} \right\} \\ & \begin{array}{c} \searrow \mathbb{N} \\ \nearrow \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} \text{modules de Wach qui} \\ \text{sont réseaux de } \mathbb{N}(V) \end{array} \right\} \end{array}$$

où la seconde flèche horizontale est donnée par le second point de la proposition précédente ou par  $\mathbb{T}_{\text{cris}}$  et où la seconde flèche oblique est donnée par (1.4.1).

Rappelons que la théorie de Fontaine-Laffaille transforme le twist par le caractère cyclotomique en le produit tensoriel par  $t^{-1}\varepsilon$ . En effet, si  $V$  est une représentation  $p$ -adique cristalline dont la longueur de filtration est strictement inférieure à  $p$ , si  $T$  est un réseau de  $V$  stable par  $G_K$  et  $k$  est un entier, le réseau fortement divisible associé à  $T(k)$  est  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T(k)) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T) \otimes t^{-k}\varepsilon^{\otimes k}$ .



### 1.4.3 Les sous-modules $(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)$ et $((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$

Considérons une représentation  $p$ -adique cristalline  $V$  de  $G_K$  et un réseau  $T$  de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .

Soit  $n \geq 1$ . Si  $A$  est contenu dans  $\mathbb{N}(T)$ , notons  $(\varphi^n)^*A$  le sous- $\mathbb{A}_K^+$ -module de  $\mathbb{N}(T)$  engendré par  $\varphi^n(A)$ . Ces modules jouent un rôle prépondérant dans les deux prochaines parties de cette thèse. C'est pour cette raison que nous prenons le temps de les décrire dans ce paragraphe.

#### Proposition 1.4.5

*Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline et positive de  $G_K$  et un réseau  $T$  de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .*

*Soit  $\Lambda$  l'algèbre d'Iwasawa. Les  $\Lambda$ -modules  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  et  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  sont libres de rang  $[K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ .*

La démonstration — un peu longue — de ce résultat est proposée en appendice. Lorsque  $n = 1$ , cela provient directement du théorème 3.5 de [LLZ10] puisque  $\varphi - 1$  induit la bijection suivante (voir par exemple dans la démonstration du lemme 3.6 de [BB08]) :

$$\varphi - 1 : \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\psi_n=1} \xrightarrow{\sim} \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\psi_n=0}.$$

Le théorème 3.5 de [LLZ10] peut être adapté pour  $n$  quelconque donnant ainsi lieu à la proposition. Comme la démonstration ne diffère pas réellement du cas traité par A. Lei, D. Loeffler et S. Zerbes, nous nous contentons de mettre cette démonstration en appendice.

#### Lemme 1.4.6

*Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  et un réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ . Alors*

$$\left( \frac{\varphi^n(\pi)}{\pi} \right)^{h-k} \mathbb{N}(T) \subset (\varphi^n)^*\mathbb{N}(T).$$

*Démonstration.*

Cela se montre par récurrence sur  $n$ . Lorsque  $n = 1$ , cela provient de la proposition A.2 du premier appendice de [Ber03]. Supposons maintenant maintenant l'inclusion  $(\varphi^n(\pi)/\pi)^{h-k} \mathbb{N}(T) \subset (\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)$  vraie.

Soit  $x \in (\varphi^{n+1}(\pi)/\pi)^{h-k} \mathbb{N}(T)$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence, il vient que  $(\varphi^n(\pi)/\varphi^{n+1}(\pi))^{h-k} x$  appartient à  $(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)$ .

Nous avons donc  $x \in (\varphi^n)^*((\varphi(\pi)/\pi)^{h-k} \mathbb{N}(T))$ . En utilisant à nouveau l'inclusion pour  $n = 1$ , nous trouvons finalement que  $x \in (\varphi^{n+1})^*\mathbb{N}(T)$ . Le lemme est ainsi montré par récurrence.  $\square$

**Corollaire 1.4.7**

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  et n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

Nous avons

$$\left( \frac{1}{\varphi^n(\pi)^{h-k}} (\varphi^n)^* \mathbb{N}(V) \right)^{\psi=1} = \left( \frac{1}{\pi^{h-k}} \mathbb{N}(V) \right)^{\psi=1} = \mathbb{D}(V)^{\psi=1}.$$

*Démonstration.*

L'inclusion  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} \subset (\pi^{k-h} \mathbb{N}(V))^{\psi=1}$  (voir [Ber03, théorème A.3]) et le lemme 1.4.6 entraînent directement les deux égalités.  $\square$

**Lemme 1.4.8**

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  et n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

Alors :

(i) pour tout entier  $n \geq 1$ , le quotient  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  n'a pas de  $p$ -torsion ;

(ii) si  $0 \leq h < k$  ou si  $-k, h \geq 0$ , le quotient  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  n'a pas d'invariants non triviaux par  $\Gamma_n$ .

*Démonstration du premier point.*

Une fois encore, comme par définition  $\pi^k \mathbb{N}(T) = \mathbb{N}(T(-k)) \otimes \varepsilon^{\otimes k}$ , il suffit montrer que le quotient  $\mathbb{D}(T(-k))^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T(-k)))^{\psi=1}$  n'a pas de  $p$ -torsion.

Quitte à tordre par la puissance  $k$ -ième du caractère cyclotomique, nous pouvons supposer que  $k = 0$ .

Soit  $(e_i)_i$  une base de  $\mathbb{N}(T)$  sur  $\mathbb{A}_K^+$  ; d'après le premier point de la proposition 1.4.1, c'est une  $\mathbb{A}_K$ -base de  $\mathbb{D}(T)$ . Aussi  $(\varphi^n(e_i))_i$  est une  $\mathbb{A}_K^+$ -base de  $(\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)$  mais également une base de  $\mathbb{D}(T)$  sur  $\mathbb{A}_K$  puisque le  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $\mathbb{D}(T)$  est étale.

Soit  $x = \sum_i f_i(\pi) \varphi^n(e_i)$  un élément de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}$  tel que  $px \in (\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)^{\psi=1}$ . Ainsi  $f_i(\pi)$  appartient à  $\mathbb{A}_K \cap \mathbb{B}_K^+$ , i.e. à  $\mathbb{A}_K^+$ . Il en découle  $x \in (\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)$  et comme il est par hypothèse fixe par  $\psi$ , nous trouvons  $x \in ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}$ .

Il vient que tout élément de  $p$ -torsion de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  est nul et le premier point du lemme est prouvé.  $\square$

*Démonstration du second point.*

Comme d'après le premier point du lemme,  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  n'a pas de  $p$ -torsion, il suffit de montrer que  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$  n'a pas d'invariants non triviaux par  $\Gamma_n$ . Faisons cela.

Soit  $x \in \mathbb{D}(V)^{\psi=1}$  tel que  $(\gamma_n - \mathbf{1})x \in ((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$ . Nous voulons montrer que  $x \in (\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V))$ .

L'égalité  $(\varphi^n(\pi^{-h})(\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1} = \mathbb{D}(V)^{\psi=1}$  du corollaire 1.4.7 et la décomposition  $\mathbb{B}_K^+ = \bigoplus_{i < p^n} \varphi^n(\mathbb{B}_K^+)(1 + \pi)^i$  de  $\mathbb{B}_K^+$  donnent

$$x \in \bigoplus_{i < p^n, j} \varphi^n(\pi^{-h} \mathbb{B}_K^+)(1 + \pi)^i \varphi^n(\pi^k e_j)$$

où  $(e_j)_j$  est une base du module de Wach  $\mathbb{N}(T)$ .

Or pour tout  $l \in [1, h]$  entier,  $\gamma_n(\varphi^n(\pi^{-l})) \equiv \chi(\gamma_n)^{-l} \varphi^n(\pi^{-l}) \pmod{\varphi^n(\pi^{-l})\pi \mathbb{B}_K^+}$  et pour tout  $i$  et  $j$  entiers,  $\gamma_n(1 + \pi)^i \equiv 1$ ,  $\gamma_n(\pi^k e_j) \equiv \chi(\gamma_n)^k \pi^k e_j \pmod{\pi}$ .

Ces congruences permettent de conclure que  $x \in (\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V))$ . En effet, sinon nous aurions

$$(\gamma_n - \mathbf{1})x \notin (\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)).$$

(en effet,  $\chi(\gamma_n)^{-l+k} - 1 \neq 0$  pour tout  $l \in [1, h]$  puisque  $0 \leq h < k$  ou  $-k$ ,  $h \geq 0$ ). Nous aurions alors une contradiction; il vient alors  $x \in (\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V))$  et le second point du lemme est ainsi démontré.  $\square$



## Chapitre 2

# Autour de l'exponentielle de Bloch et Kato

*Résumé.*

*Nous considérons toujours un premier  $p$  impair et une extension finie  $K/\mathbb{Q}_p$ . Comme le titre du chapitre l'indique, le sujet central de cette partie est l'exponentielle de Bloch et Kato de représentations  $p$ -adiques cristallines de  $G_K$ .*

*Nous parlerons ici de nombreux aspects de cet homomorphisme, de sa définition à l'origine de son nom (cf. §2.1) en passant par sa traduction en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules (voir §2.2) ou par ses liens avec les modules de Wach (voir paragraphe 2.3) etc.*

*Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h - k]$  avec  $k \geq 1$ ,  $h \geq 0$  et qui n'admet pas de sous-quotient isomorphes à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier. Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .*

*Nous pourrions appliquer tous les résultats des trois premiers paragraphes à  $T$  et  $V$  pour mieux connaître  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$ . Dans le chapitre précédent nous avons déjà vu que ce quotient n'avait ni  $p$ -torsion ni invariants par  $\Gamma_n$  (du moins lorsque  $k$  est assez grand ou lorsque  $h - k$  est assez petit). Dans ce chapitre, nous décrirons deux nouveaux aspects de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$ .*

*Dans un premier temps, nous étudierons la structure de  $\Lambda_p$ -module du quotient  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$ . Nous terminerons ce chapitre en proposant des encadrements le cardinal des coinvariants de ce quotient par  $\Gamma_n$  ainsi que le cardinal de la  $p$ -torsion de  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_K}^{\psi=1} / A_1^{\eta_0}$  où  $A_1$  est l'image de  $(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1}$  dans  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_1}$  par les homomorphismes  $(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_1}^{\psi=1} \simeq H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_1}$ .*

## 2.1 Définition

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que  $\mathbb{B}_{\text{cris}}$  s'injecte naturellement dans  $\mathbb{B}_{\text{dR}}$ . Le lien entre ces deux anneaux est plus précisément décrit par les suites exactes fondamentales suivantes :

$$(2.1.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}} \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}} \oplus (\mathbb{B}_{\text{dR}}/\mathbb{B}_{\text{dR}}^+) \longrightarrow 0$$

où la dernière flèche est l'homomorphisme  $x \mapsto ((1 - \varphi)(x), x \bmod \mathbb{B}_{\text{dR}}^+)$ ; et :

$$(2.1.2) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}/\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \longrightarrow 0$$

où l'application  $\mathbb{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \rightarrow \mathbb{B}_{\text{dR}}/\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$  est l'homomorphisme  $x \mapsto x \bmod \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ .

En tensorisant par une représentation  $p$ -adique  $V$  de de Rham de  $G_K$ , puis en prenant les invariants par  $G_K$ , il vient deux suites exactes longues de cohomologie. Nous obtenons les suites exactes suivantes :

$$(2.1.3) \quad 0 \longrightarrow H^0(K, V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K) \xrightarrow{\delta_V} H_f^1(K, V) \longrightarrow 0$$

et :

$$(2.1.4) \quad 0 \longrightarrow H^0(K, V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow t_V(K) \xrightarrow{\delta_V} H_e^1(K, V) \longrightarrow 0$$

où  $t_V(K)$  est l'espace tangent de  $V$  de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  défini par Bloch et Kato par

$$t_V(K) = \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) / \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$$

et où  $H_e^1(K, V)$  (respectivement  $H_f^1(K, V)$ ) est la partie exponentielle (resp. finie) de  $H^1(K, V)$  définie par

$$H_f^1(K, V) = \ker (H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V))$$

$$(\text{resp. } H_e^1(K, V) = \ker (H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, \mathbb{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V))).$$

Les applications  $\delta_V$  induisent l'exponentielle de S. Bloch et K. Kato de  $V$  :

$$\exp_{K, V} : t_V(K) \rightarrow H_f^1(K, V).$$

L'appellation de cet homomorphisme vient du fait qu'elle généralise l'exponentielle classique. Prenons deux exemples tirés de [BK90] pour illustrer cela; nous renvoyons d'ores et déjà à cet article pour plus de détails sur ces exemples.

Supposons  $K/\mathbb{Q}_p$  non ramifié. Pour tout entier  $n$ , nous avons suite exacte

$$0 \longrightarrow \mu_{p^n} \longrightarrow \overline{K}^\times \xrightarrow{p^n} \overline{K}^\times \longrightarrow 0$$

En prenant les invariants par  $G_K$ , puis en passant à la limite projective la suite exacte longue de cohomologie ainsi obtenue, nous trouvons une application de connexion  $\delta : K^\times \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}_p(1))$ . L'exponentielle classique  $\exp : x \mapsto \sum_n x^n/n!$  induit un isomorphisme entre  $p\mathcal{O}_K$  et le groupe  $U$  des unités de  $\mathcal{O}_K$  congrues à 1 modulo  $p$  donnant ainsi lieu à un isomorphisme  $K \simeq \mathcal{O}_K^\times \otimes \mathbb{Q}_p$ .

Vient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}_K^\times \otimes \mathbb{Q}_p \\ & \searrow \exp_{\mathbb{Q}_p(1), K} & \downarrow \delta \otimes \mathbb{Q}_p \\ & & H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)) \end{array}$$

Soit  $X$  une variété abélienne sur  $K$ . Soit  $T_p(X)$  le module de Tate de  $X$  et  $V_p(X)$  la représentation  $p$ -adique  $V_p(X) = T_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ ; d'après [Fon94a], cette dernière est de de Rham. L'espace tangent à l'origine  $\tan(X)$  de  $X$  est canoniquement isomorphe à l'espace tangent  $t_{V_p(X)}(K)$  de  $V_p(X)$ .

Il existe alors une application exponentielle  $\exp_X$  allant de l'espace tangent de  $X$  dans  $X(K) \otimes \mathbb{Q}_p$  où  $X(K)$  est groupe des points rationnels sur  $K$ . Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tan(X) & \xrightarrow{\exp_X} & X(K) \otimes \mathbb{Q}_p \\ \uparrow \wr & & \downarrow \wr \\ t_{V_p(X)}(K) & \xrightarrow{\exp_{K, V_p(X)}} & H_e(K, V_p(X)) \end{array}$$

où le morphisme vertical de gauche est l'isomorphisme dont nous parlons ci-dessus et où celui de droite s'obtient en passant à la limite projective les applications de Kummer  $X(K) \rightarrow H^1(K, X(\overline{K})[p^n])$ .

Dans l'article [BK90], S. Bloch et K. Kato généralisent ce lien aux groupes  $p$ -divisibles.

## 2.2 L'exponentielle en termes de $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Supposons désormais, et jusqu'à la fin de cette thèse, l'extension  $K/\mathbb{Q}_p$  non ramifiée.

### 2.2.1 Contexte et motivations

Précisons avant tout le contexte de cette construction et donnons les premières notations.

Rappelons tout d'abord que  $\gamma$  est un générateur topologique de  $\Gamma$ , que  $\gamma_1$  est un générateur topologique de  $\Gamma_1$  et, pour tout entier non nul  $n$ , nous avons posé  $\gamma_n = \gamma_1^{p^{n-1}}$ .

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  positive telle que  $V^{H_K} = 0$  et dont le plus grand saut de filtration est  $h$ . Fixons un réseau  $T$  de  $V$  préservé par l'action de  $G_K$ . Soit  $\mathcal{D}(V) = (\mathbb{B}_K^+)^{\psi=0} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit  $n \geq 1$  et  $k \in \mathbb{Z}$  deux entiers. Rappelons que la représentation obtenue en tordant  $V$  (respectivement  $T$ ) par la puissance  $k$ -ième du caractère cyclotomique est notée  $V(k)$  (resp.  $T(k)$ ).

D.Benois construit des morphismes  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon : \mathcal{D}(T) \rightarrow H^1(K_n, T(k))$  qui, lorsque  $k \geq 1$  et lorsque  $V^{H_K} = 0$ , vérifie

$$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V(k)} \circ \Xi_{V,k,n}^\varepsilon$$

où  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$  est une application explicite.

Cette construction s'appuie sur la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et tout particulièrement sur la cohomologie galoisienne en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et sur les modules de Wach.

La motivation de cette construction était double. La première était de fournir une formule explicite de l'exponentielle élargie de Perrin-Riou  $\Omega_V^{(0), \varepsilon}$  à chaque étage de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$ . L'exponentielle élargie de Perrin-Riou interpole les exponentielles de Bloch et Kato pour les différents twists de  $V$  par le caractère cyclotomique le long de la tour  $K_\infty/K$ . C'est-à-dire qu'elle rend le diagramme suivant commutatif pour  $k \gg 0$  et pour tout  $n > 0$  :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} & \xrightarrow{\text{Tw}_k^\varepsilon \circ \Omega_V^{(0), \varepsilon}} & \mathcal{H}(\Gamma) \otimes_\Lambda H_{\text{Iw}}^1(T(k))/T(k)^{H_K} \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr}_{T(k), n} \\ K_n \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) & \xrightarrow{(-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V(k)}} & H^1(K_n, T(k)) \end{array}$$

où la première flèche verticale est un homomorphisme explicite que nous ne précisons pas et où  $\mathcal{H}(\Gamma)$  est un espace de séries formelles en  $\gamma_1 - 1$  qui vérifient certaines propriétés (il est ici inutile de les préciser).



La seconde motivation de la construction de l'exponentielle en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules est liée à la première. Elle permet de montrer la loi de réciprocité explicite conjecturée par B. Perrin-Riou.

Cette conjecture généralise la loi de réciprocité explicite classique sur un corps local qui décrit le symbole de Hilbert.

Pour expliquer ce qu'est ici cette loi de réciprocité, introduisons une nouvelle notation. Soit, pour tout  $n$  entier,  $(\cdot, \cdot)_{T,n} : H^1(K_n, T) \times H^1(K_n, T^*(1)) \rightarrow \mathbb{Q}_p$  l'accouplement obtenu par dualité locale. En passant à la limite projective puis en tensorisant par  $\mathcal{H}(\Gamma)$ , ces accouplements en induisent un autre :

$$(\cdot, \cdot)_T : H_{\text{Iw}}^1(T) \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}(\Gamma) \times H_{\text{Iw}}^1(T^*(1)) \otimes_{\Lambda} \mathcal{H}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}(\Gamma).$$

La loi de réciprocité explicite lie cet accouplement à l'exponentielle élargie de Perrin-Riou (voir le paragraphe suivant, proposition 2.2.2, (ii), pour une formulation de ce lien).

La construction de l'exponentielle en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules est très largement utilisée dans la suite. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, le but final de cette thèse est de mieux connaître les nombres de Tamagawa d'une représentation  $p$ -adique absolument cristalline de  $G_K$  le long de la tour cyclotomique  $K_{\infty}/K$ .

Or la construction de D. Benois a trois avantages pour étudier cette problématique.

- 1) Tout y est explicite,  $\Omega_{T,k,n}^{\varepsilon}$  aussi bien que  $\Xi_{V,k,n}^{\varepsilon}$  — ce dernier homomorphisme est d'ailleurs étudié dans le paragraphe B.3.
- 2) Cette construction préserve de plus toutes les structures entières.
- 3) Comme nous venons de l'expliquer, elle permet de retrouver une expression de l'exponentielle de Bloch et Kato à chaque étage de la tour cyclotomique  $K_{\infty}/K$ . Cela autorise à se promener dans cette tour sans encombre (seul le cas  $n = 0$  nécessite un traitement spécial).

## 2.2.2 Construction

Dans ce paragraphe nous redonnons dans un premier temps la construction de l'exponentielle de Bloch et Kato en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules que D. Benois a proposée.

**Construction de l'exponentielle en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** Nous utilisons ici le complexe  $\varphi^{-n}(\mathcal{E}_{\varphi, \gamma_n}(\cdot))$  en lieu et place de  $\mathcal{E}_{\varphi, \gamma_n}(\cdot)$ . Ce premier complexe de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathbb{A}_{K_n} = \varphi^{-n}(\mathbb{A}_K)$  est isomorphe au second.

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive cristalline de  $G_K$  telle que  $V^{H_K} = 0$  et  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 0$ . Rappelons que  $\gamma$  désigne un générateur topologique de  $\Gamma_K$ .

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.4.2, les propriétés des modules de Wach (voir proposition 1.4.2) permettent de définir un  $\mathcal{O}_K$ -réseau canonique  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  associé à  $T$ . Introduisons pour cela  $(e_i)_i$  une  $\mathbb{A}_K^+$ -base de  $\mathbb{N}(T)$  et posons :

$$\mathbb{D}_{\text{cris}}(T) = \left\{ \sum_i f_i(\pi) \otimes e_i \in (\mathcal{R}_K^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T))^{\Gamma_K} \mid \sum_i f_i(0)e_i \in \mathbb{N}(T)/\pi\mathbb{N}(T) \right\}.$$

Si  $\mathcal{D}(T) = (\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ , il est alors clair que  $\mathcal{D}(T)$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau de  $\mathcal{D}(V)$ . Posons de plus  $\mathcal{D}(V(k)) = (\mathbb{B}_K^+)^{\psi=0} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$ .

Ces dernières notations seront conservées jusqu'à la fin de cette thèse.

Rappelons à présent la définition de la fonction  $E_{k,n}$  de [Ben00, § 3]. Pour tout  $f(\pi)$  de  $(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$ , posons :

$$E_{k,n}(f(\pi)) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} (k-1)(k-2) \dots (k-i) p^{n(i-1)} t^{-i} \partial_n^{-i}(f(\pi_n))$$

où  $\partial_n$  désigne l'opérateur différentiel  $\partial_n = (1+\pi_n) d/d\pi_n$ . Notons que cet opérateur  $\partial_n$  est inversible sur  $(\mathbb{A}_{K_n}^+)^{\psi=0}$  puisque  $(\mathbb{A}_{K_n}^+)^{\psi=0} = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \varphi(\mathbb{A}_{K_n}^+)(1+\pi_n)^i$ .

Soit  $\alpha = f(\pi) \otimes m \in \mathcal{D}(T)$  avec  $m = \sum_i a_i(\pi) \otimes e_i \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  où les  $a_i(\pi)$  appartiennent à  $\mathcal{R}_K^+$ . Nous pouvons préciser d'avantage le sous anneau de  $\mathcal{R}_K^+$ . En effet, comme l'action de  $\Gamma$  est triviale sur  $\mathbb{N}(T)/\pi\mathbb{N}(T)$ , il vient que les  $a_i$  appartiennent à  $\mathbb{A}_K^+ [[\pi^k/c_k, k \geq 0]]$  avec  $c_k = \prod_{j=1}^k (\chi(\gamma)^j - 1)$ .

D'autre part, par le lemme 3.1.1 de [Ben00], nous savons que pour tout  $i$  et tout  $j$  entiers,  $t^{-j} = \sum_{i \geq -j} \alpha_i \pi^i$  avec  $\nu_p(\alpha_i) \geq -\lfloor (i+j)/(p-1) \rfloor$ .

Ainsi  $E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)$  appartient à  $p\mathbb{A}_{K_n} + \pi_n K [[\pi_n]]$ . En notant  $\overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)}$  la série obtenue en tronquant les  $a_i(\pi)/t^j$  modulo  $\pi$  dans  $E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)$ , nous avons  $\overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)} \in \mathbb{A}_K$ .

Soit  $\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^d \overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)} e_i \otimes \varepsilon^{\otimes k}$ ; alors  $\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)$  appartient à  $\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k)))$  et

$$(2.2.1) \quad \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) \equiv E_{k,n}(f(\pi))m \otimes \varepsilon^{\otimes k} \left[ \text{mod } \pi_n K [[\pi_n]] \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right].$$

**Lemme 2.2.1**

Soit  $\psi_n$  l'application  $\psi$  agissant sur  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ . Il existe un unique  $\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha)$  dans  $(\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))))^{\psi_n=1}$  tel que

$$(\varphi - \mathbf{1}) \cdot \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) = (\gamma_n - \mathbf{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha).$$

Pour ne pas nous attarder sur les détails techniques, nous admettons ce lemme. Il sera en revanche démontré dans l'Appendice B.

Le couple  $(\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha), \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha))$  définit donc une classe de  $\varphi^{-n}(H^1(\mathbb{D}(T)))$  puisque

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha), \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) \in \varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))) \\ (\varphi - \mathbf{1}) \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) = (\gamma_n - \mathbf{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha). \end{cases}$$

Soit  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  l'application composée des deux homomorphismes suivants :

$$\mathcal{D}(T) \xrightarrow{(\mathcal{E}_{T,k,n}, \mathcal{F}_{T,k,n})} \varphi^{-n}(H^1(\mathbb{D}(T(k)))) \xrightarrow{\sim} H^1(K_n, T(k)).$$

Soit  $n \geq 1$ . Soit l'application  $\Xi_{V(k),n}^\varepsilon$  définie par

$$\Xi_{V(k),n}^\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{D}(V(k)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))} \\ \alpha \mapsto p^{-n} \left( -\alpha(0); \sum_{l=1}^n (\sigma \otimes \varphi)^{-l}(\alpha)(\zeta_{p^l} - 1) \right) \end{cases}$$

(notons que  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}$  s'entend comme le conoyau de l'homomorphisme  $(\mathbf{1} - \varphi, \cdot [\text{mod Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V(k))]) : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \rightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K)$ ).

Soit  $e_{-k} = t^{-k} \otimes \varepsilon^{\otimes k}$  le générateur de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(k))$  associé à  $\varepsilon$  et  $\partial$  l'opérateur défini par  $\partial = (1 + \pi) d/d\pi$ .

Pour tout  $n$  entier,  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}$  est l'homomorphisme

$$\Xi_{V,k,n}^\varepsilon = \begin{cases} \Xi_{V(k),n}^\varepsilon \circ (\partial^{-k} \otimes e_{-k}) \circ (\sigma \otimes \varphi)^n \text{ si } n \geq 1 \\ \text{Tr}_{K_1/K} \circ \Xi_{V,k,n}^\varepsilon \text{ si } n = 0. \end{cases}$$

Rappelons que  $(\cdot, \cdot)_{T(k),n} : H^1(K_n, T(k)) \times H^1(K_n, T^*(1-k)) \rightarrow \mathbb{Q}_p$  désigne l'accouplement obtenu par dualité locale.

**Proposition 2.2.2**

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive de  $G_K$  vérifiant  $V^{H_K} = 0$ . Soit de plus  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

(i) Soit  $k \geq 1$ ,  $n \geq 1$ . Pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}(V)$ ,

$$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\alpha) = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V(k)} \left( \Xi_{V,k,n}^\varepsilon(\alpha) \right).$$

(ii) Pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}(T)$  et tout  $\beta \in \mathcal{D}(T^*(-h))$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (\Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\alpha), \Omega_{T^*(-h), h-k+1, n}^\varepsilon(\beta))_{T(k), n} &= (-1)^k p^{nh} \prod_{m=1}^h (k-m) \\ &\times \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p} \left( \operatorname{res} \left( \frac{1}{\pi} \left\{ \partial^{-k} \alpha(\pi_n), (\partial^{k-h-1} \otimes e_{-h}) \beta(\pi_n) \right\} \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) \right) \end{aligned}$$

où  $\{., .\}$  désigne la dualité fournie par prolongement à  $\mathcal{D}(V) \times \mathcal{D}(V^*)$  par linéarité de la dualité naturelle :

$$\{., .\} : \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \times \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*) \rightarrow K.$$

Le premier point a été démontré dans [Ben00, théorème 4.3] pour tout élément dans  $\mathcal{D}(V)^{\Delta=0}$ , un sous-module de  $\mathcal{D}(V)$ . L'application  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$  peut être définie sur tout  $\mathcal{D}(V)$ ; nous montrons dans l'annexe B que l'application  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  est en fait compatible avec l'exponentielle de Bloch et Kato sur tout  $\mathcal{D}(V)$ .

Le second point de cette proposition est quant à lui essentiellement la loi de réciprocité explicite conjecturée par B. Perrin-Riou dans [PR94] et prouvée indépendamment par K. Kato-M. Kurihara-T. Tsuji, P. Colmez, B. Perrin-Riou, D. Benois et L. Berger respectivement dans [KKT96], [Col98], [PR99], [Ben00] et [Ber03].

Pour terminer ce paragraphe, donnons une propriété remarquable — et importante dans la suite — de l'homomorphisme  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ . Ce résultat est démontré dans l'annexe B, cf. corollaire B.3.5.

### Lemme 2.2.3

Si  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$ , alors l'homomorphisme  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}$  est surjectif.

## 2.3 Lien avec le module de Wach

Dans ce paragraphe,  $n$  désigne un entier strictement positif. Nous traitons ici du lien entre le module de Wach d'une représentation  $p$ -adique cristalline et l'application  $\Omega_{.,k,n}^\varepsilon$  du paragraphe précédent. Nous commencerons par expliciter ce lien.

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive cristalline de  $G_K$  telle que  $V^{H_K} = 0$  et  $h$  son plus grand saut de filtration. Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Choisissons  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 0$ . Rappelons que  $\gamma$  désigne un générateur topologique de  $\Gamma_K$ .

La démonstration du résultat principal de ce paragraphe sera scindée en deux étapes : le cas où  $k \notin [1, h]$  — c'est-à-dire le cas où la représentation  $V(k)$  est soit positive, soit négative — et celui où  $k \in [1, h]$ . Le second de ces cas se déduira du premier.

### 2.3.1 Énoncé

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'homomorphisme  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  envoie  $\alpha \in \mathcal{D}(T)$  sur la classe de  $(\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha), \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha))$  où

$$\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) \in \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=1}$$

L'élément  $\varphi^n(\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha))$  appartient par conséquent à  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1}$  et la construction de  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  induit donc une application  $\mathcal{D}(T) \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1}$  qui à  $\alpha$  associe  $\varphi^n(\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha))$ .

La bijectivité de  $\gamma_n - 1$  sur  $\mathbb{D}(T)^{\psi=0}$  (voir [CC99, proposition I.5.1]) permet de retrouver  $\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)$  en partant  $\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha)$ . Nous en déduisons dès lors que l'homomorphisme  $\mathcal{D}(T) \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1}$  rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T) & \longrightarrow & ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1} \\ & \searrow \Omega_{T,k,n}^\varepsilon & \downarrow \\ & & H^1(K_n, T(k)) \end{array}$$

(la flèche verticale étant la composée des homomorphismes naturels

$$((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1} \hookrightarrow \mathbb{D}(T(k))^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T) \rightarrow H^1(K_n, T(k)).$$

Cependant  $\mathcal{D}(T) \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1}$  n'est pas équivariant par  $\Gamma_n$  ; en effet, les applications  $E_{k,n}$  ne sont pas équivariantes modulo  $\pi_n$  (voir la proposition 3.1.3, (iv) de [Ben00]). Il est toutefois possible le rendre invariant par  $\Gamma_n$  en tordant l'espace de départ par la puissance  $k$ -ième du caractère cyclotomique. Nous obtenons de cette manière

$$\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon : \mathcal{D}(T)(k) \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))^{\psi=1}.$$

Ce morphisme induit ainsi un homomorphisme  $\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$ .

**Théorème 2.3.1**

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline positive de  $G_K$  telle que  $V^{H_K} = 0$  et n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier. Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

Alors pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $n \geq 1$ , l'application  $\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme :

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \simeq ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

Rappelons que ce résultat a été démontré par D. Benois et L. Berger dans [BB08] lorsque  $n = 1$  et pour  $k \notin [1, h]$ . Pour prouver ce théorème, nous avons besoin de plusieurs résultats techniques. La fin de ce paragraphe leur est consacrée.

Rappelons que  $\partial_n = (1 + \pi_n) d/d\pi_n$ .

**Lemme 2.3.2**

Pour tout  $m \geq 1$  et tout  $h(\pi_n) \in \mathbb{A}_{K_n}^+$ , nous avons

$$(2.3.1) \quad \text{res} \left( \frac{h(\pi_n)}{t^m} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) = \frac{1}{(m-1)! p^{(m-1)n}} \text{res} \left( \frac{\partial_n^{m-1}(h(\pi_n))}{\pi} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right).$$

*Démonstration.*

Si  $m = 1$ , le lemme est évident. Supposons donc  $m \geq 2$ ; de l'égalité  $\partial_n = p^n \partial$  nous tirons

$$\partial_n \left( \frac{h(\pi_n)}{t^{m-1}} \right) = \frac{\partial_n(h(\pi_n))}{t^{m-1}} - (m-1)p^n \frac{h(\pi_n)}{t^m}.$$

Et comme  $\text{res}(\partial_n(h(\pi_n)/t^{m-1}) d\pi_n / (1 + \pi_n)) = 0$ , il vient :

$$\text{res} \left( \frac{\partial_n(h(\pi_n))}{t^{m-1}} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) = (m-1)p^n \text{res} \left( \frac{h(\pi_n)}{t^m} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right).$$

En répétant ce procédé plusieurs fois, à chaque étape nous faisons chuter la puissance de dénominateur. Ainsi, nous aboutissons finalement à l'égalité (2.3.1) du lemme.  $\square$

**Lemme 2.3.3**

(i) Si  $f(\pi_n), g(\pi_n) \in \mathbb{A}_{K_n}^+$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et tout  $m \geq 0$ , nous avons :

$$\text{res} \left( E_{k,n}(f(\pi)) t^m g(\pi_n) \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \equiv 0 \left[ \text{mod } p^{nm} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-m)} \right].$$

(ii) Rappelons que  $h$  est le plus grand saut de filtration de  $V$ . Prenons un élément  $\beta$  de  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T^*(-h)))^{\psi=1}(h+1-k)$  et  $f(\pi) \otimes x \in \mathcal{D}(T)(k)$  avec  $f(\pi) \in (\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0}$ , nous avons :

$$\text{res} \left( E_{k,n}(f(\pi)) [x, \varphi^{-n}(\beta)]_{V(k)} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \equiv 0 \left[ \text{mod } p^{nh} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)} \right].$$

où, pour tout  $l$  entier,  $\Gamma^*(k)/\Gamma^*(k-l) = (k-1) \dots (k-l)$ .

*Démonstration de (i).*

La démonstration de ce lemme repose sur les mêmes idées que celles de la preuve du lemme 3.8 de l'article [BB08].

Notons tout d'abord que si  $m = 0$ , la première partie du lemme est trivialement vraie. Prenons donc  $m \geq 1$ .

Compte tenu des définitions de  $E_{k,n}$  et de  $\Gamma^*(k)/\Gamma^*(k-m)$ , pour obtenir le premier point du lemme, il suffit de montrer la congruence suivante pour tout  $j \geq 0$  :

$$\begin{aligned} (-1)^{j-1} (k-1) \dots (k-(j-1)) p^{n(j-1)} \text{res} \left( t^{m-j} g(\pi_n) \partial_n^{-j} f(\pi_n) \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \\ \equiv 0 \left[ \text{mod } p^{nm} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-m)} \right]. \end{aligned}$$

Si  $j \leq m$ , la congruence est vraie car  $t^{m-j} g(\pi_n) (1 + \pi_n)^{-1} \partial_n^{-j} f(\pi_n) \in \mathcal{D}_K^+$ . Il reste à la montrer pour  $j > m$ .

Soit donc  $j > m$ . En utilisant l'égalité (2.3.1) du précédent lemme, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \text{res} \left( t^{m-j} g(\pi_n) \partial_n^{-j} f(\pi_n) \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \\ = \frac{1}{(j-m)! p^{(j-m-1)n}} \text{res} \left( \frac{\partial_n^{j-m-1} (g(\pi_n) \partial_n^{-j} f(\pi_n))}{\pi} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la congruence est vraie puisque le résidu qui apparaît dans le membre droit de l'égalité précédente appartient à  $\mathbb{Z}_p$  et puisque

$$\frac{(k-1) \dots (k-(j-1))}{(j-m)!} = \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-m)} \prod_{i=2}^{j-m} \frac{(k-j+1)+i}{i} \in \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-m)} \mathbb{Z}_p.$$

Dès lors, le (i) est démontré.  $\square$

*Démonstration de (ii).*

Pour alléger les notations, notons  $c_j = (\chi(\gamma) - 1) \dots (\chi(\gamma)^j - 1)$ . De  $\pi = \exp t - 1$ , nous tirons

$$\pi^{j+h} = t^{j+h} \sum_{s_1, \dots, s_{j+h} \geq 0} \frac{t^{s_1 + \dots + s_{j+h}}}{(s_1 + 1)! \dots (s_{j+h} + 1)!}.$$

Puisque  $x$  appartient à  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T) \otimes \varepsilon^{\otimes k}$  et  $\varphi^{-n}(\beta) \in \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T^*(-h))(h+1-k)$ , nous avons :

$$(2.3.2) \quad \begin{aligned} [x, \varphi^{-n}(\beta)]_{V(k)} &= \sum_{j \geq 0} \frac{\pi^{j+h} b_j(\pi_n)}{c_j} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{s_1, \dots, s_{j+h} \geq 0} t^h \frac{t^{s_1 + \dots + s_{j+h} + j} b_j(\pi_n)}{(s_1 + 1)! \dots (s_{j+h} + 1)! c_j} \end{aligned}$$

où les  $b_j(\pi_n)$  désignent des éléments de  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ .

Or  $p^s/(s+1)!$  et  $p^s/c_s$  appartiennent à  $p\mathbb{Z}_p$  pour tout  $s \geq 1$  et  $1/2, 1/c_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$  (car  $p \notin 2$ ). Ainsi en utilisant la dernière égalité (2.3.2) et le premier point du lemme, nous obtenons la congruence

$$\text{res} \left( E_{k,n}(f(\pi)) t^h b_j(\pi_n) \frac{t^{s_1 + \dots + s_{j+h} + j}}{(s_1 + 1)! \dots (s_{j+h} + 1)! c_j} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \equiv 0 \left[ \text{mod } p^{nh} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)} \right].$$

Le (ii) est maintenant démontré.  $\square$

### Proposition 2.3.4

Soit  $k \notin [1; h]$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{O}(T)$ ,  $\beta \in ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T^*(-h)))^{\psi=1}(h-k+1)$  et  $\text{cl}(\beta)$  la classe de cohomologie de  $H^1(K_n, T^*(1-k))$  associée à  $\beta$  via l'application composée suivante :

$$\begin{aligned} ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T^*(-h)))^{\psi=1}(h-k+1) &\hookrightarrow \mathbb{D}(T^*(1-k))^{\psi=1} \\ &\xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(T^*(1-k)) \longrightarrow H^1(K_n, T^*(1-k)). \end{aligned}$$

Nous avons

$$(\Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\alpha), \text{cl}(\beta))_{T(k),n} \equiv 0 \left[ \text{mod } p^{hn} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)} \right].$$

Avant toute chose, rappelons que le cup-produit ainsi que l'isomorphisme canonique  $H^2(K_n, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p$  peuvent être traduits en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. En effet, par la proposition 4.4 de [Her01],

$$(\text{cl}(a, b), \text{cl}(x, y))_{T(k),n} = -\text{cl} \left( [\gamma_n(a); y]_{V(k)} - [\varphi(b); x]_{V(k)} \right).$$



D'autre part, l'isomorphisme canonique  $H^2(K_n, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p$  peut être explicité comme suit (cf. [Ben00, théorème 2.2.6]) :

$$\begin{cases} H^2(K_n, \mathbb{Z}_p(1)) & \rightarrow \mathbb{Z}_p \\ \text{cl}(h(\pi_n) \otimes \varepsilon) & \mapsto -\frac{p^n}{\log \chi(\gamma_n)} \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p} \left( \text{res} \left( h(\pi_n) \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) \right). \end{cases}$$

*Démonstration.*

La preuve de cette proposition se fait en tout point comme celle de la proposition 3.9 de [BB08]. Reproduisons-la.

Pour  $\alpha = f(\pi) \otimes m \in (\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ , nous avons

$$\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) \equiv E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k} \left[ \text{mod } \pi_n K[[\pi_n]] \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right].$$

Nous en déduisons l'existence de  $y \in \pi_n K[[\pi_n]] \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k)$  tel que

$$\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) = E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k} + (\varphi - \mathbf{1})y$$

(en effet,  $\sum_i \varphi^i$  converge dans  $\pi_n K[[\pi_n]] \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k)$  sur cet espace). En posant  $F_{T,k,n}(\alpha) = \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) + (\gamma_n - \mathbf{1})y$ , nous avons

$$(\mathbf{1} - \varphi)F_{T,k,n}(\alpha) = (\gamma_n - \mathbf{1})(E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k}).$$

Soit  $A$  une solution dans  $\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))^{\psi=0})$  de  $(\gamma_n - \mathbf{1})A = \varphi^{-n}(\varphi - \mathbf{1})\beta$ . La formule qui explicite l'isomorphisme  $H^2(K_n, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq \mathbb{Z}_p$ , celle du cup-produit et le lemme 3.3 de [Her01] donnent

$$(\Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\alpha), \text{cl}(\beta))_{T(k),n} = \frac{p^n}{\log \chi(\gamma_n)} \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}_p} \left( \text{res} \left( h(\pi_n) \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) \right)$$

où  $h(\pi_n) = [\gamma_n(E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k}); \varphi^{-n}(\beta)]_{V(k)} - [\varphi(F_{T,k,n}(\alpha)); A]_{V(k)}$  car

$$\text{res} \left( (\gamma_n - \mathbf{1})(a(\pi_n)) \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) = 0 = \text{res} \left( (\varphi - \mathbf{1})(a(\pi_n)) \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) = 0$$

pour tout  $a(\pi_n) \in K((\pi_n))$  (cf. e.g. [Col04]).

Il suffit désormais de montrer que le résidu de  $h(\pi_n)(1+\pi_n)^{-1} d\pi_n$  est congru à 0 modulo  $p^{hn} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)}$ . Or comme  $A$  est annulé par  $\psi_n$ ; il vient (voir [Ben00, lemme 2.2.2.1])

$$\text{res} \left( [\varphi(F_{T,k,n}(\alpha)); A]_{V(k)} \frac{d\pi_n}{1+\pi_n} \right) = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \text{res} \left( [\gamma_n(E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k}); \varphi^{-n}(\beta)]_{V(k)} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right) \\ = \text{res} \left( E_{k,n}(f(\pi)) [m \otimes \varepsilon^{\otimes k}; \gamma_n^{-1} \varphi^{-n}(\beta)]_{V(k)} \frac{d\pi_n}{1 + \pi_n} \right). \end{aligned}$$

La proposition est ainsi obtenue en appliquant le lemme 2.3.3, (ii).  $\square$

### 2.3.2 Le cas où $k \notin [1, h]$

Dans ce paragraphe nous donnons la preuve du théorème 2.3.1 dans ce premier cas. L'objectif est donc de montrer que, pour ces  $k$ , l'homomorphisme  $\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \simeq ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

*Démonstration du théorème — premier cas :  $k \notin [1, h]$ .*

Il faut naturellement étudier deux points : l'injectivité de cette application dans un premier temps et sa surjectivité ensuite.

**Injectivité.** Le deuxième point de la proposition 2.2.2 implique l'injectivité de  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  et donc celle de  $\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$  lorsque  $k \notin [1, h]$ . Cela donne l'injectivité

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \hookrightarrow ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

**Surjectivité.** L'injectivité que nous venons de prouver et la proposition 2.3.4 entraînent l'imbrication des réseaux de  $\mathbb{Z}_p$  suivants :

$$\begin{aligned} & \left( \Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n}), \Omega_{T^*(-h),1+h-k,n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T^*(-h))(1+h-k)_{\Gamma_n}) \right)_{T(k),n} \\ & \quad \cap \\ & \left( ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}, \Omega_{T^*(-h),1+h-k,n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T^*(-h))(1+h-k)_{\Gamma_n}) \right)_{T(k),n} \\ & \quad \cap \\ & \left( p^{nh} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)} \right)^{[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V} \mathbb{Z}_p. \end{aligned}$$

D'autres part le (ii) de la proposition 2.2.2 implique que les réseaux du haut et du bas sont égaux. Il en découle que ces inclusions sont en fait des égalités ce qui

termine de démontrer la surjectivité et donc le théorème dans le cas où  $k \notin [1, h]$ .  
□

**Corollaire 2.3.5**

Si  $k \notin [1, h]$ , nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left( \mathbb{D}(T(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1} : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \\ & \quad \times \left( \mathbb{D}(T^*(1-k))_{\Gamma_n}^{\psi=1} : ((\varphi^n)^* (\pi^{h+1-k} \mathbb{N}(T^*(1-k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \\ & \quad = \left( p^{nh} \frac{\Gamma^*(k)}{\Gamma^*(k-h)} \right)^{[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V}. \end{aligned}$$

Avant de prouver ce corollaire, notons deux points importants. Tout d'abord par définition,  $\pi^k \mathbb{N}(T(k)) = \mathbb{N}(T)(k)$ , cela permet d'utiliser l'isomorphisme que nous venons de prouver.

Ensuite, ces deux indices ont un sens. Appliquons le lemme du serpent à la suite tautologique

$$0 \rightarrow ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)(k)^{\psi=1} \rightarrow \frac{\mathbb{D}(T)(k)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))^{\psi=1}} \rightarrow 0$$

en utilisant le lemme 1.4.8, (ii) qui dit que  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  n'a pas d'invariants non triviaux par  $\Gamma_n$ . Il est alors évident que  $((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  s'injecte dans  $\mathbb{D}(T(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  (du moins lorsque  $k \notin [1, h]$ ). Aussi les deux indices généralisés du corollaire ont bien un sens.

D'autre part, le premier indice est bien fini. En effet,  $((\varphi^n)^* \mathbb{N}(V)(k))^{\psi=1}$  et  $\mathbb{D}(V(k))^{\psi=1}$  sont libres de même rang sur  $\Lambda_p$  (cf. propositions 1.4.5 et 1.3.1, (ii) car  $V^{H_K} = 0$ ). Il en découle que  $((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(V(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  et  $\mathbb{D}(V(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  ont même dimension. Comme de plus le premier s'injecte naturellement dans le second, ces deux espaces vectoriels sont canoniquement isomorphes.

Or  $\mathbb{D}(T(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  et  $((\varphi^n)^* \mathbb{N}(V)(k))^{\psi=1}$  sont de type fini. Par les propositions 1.3.1 et 1.3.6 d'une part et le lemme 1.4.5 d'autre part, nous savons également qu'ils ont même rang. Ainsi, il vient que  $(\mathbb{D}(T(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1} : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1})$  est fini. L'autre indice l'est aussi pour les mêmes raisons.

*Démonstration du corollaire.*

Ici aussi la preuve est semblable à celle du corollaire 3.10 de [BB08] (même si les notations sont différentes). Notons  $l = h + 1 - k$  pour alléger la preuve.

Comme  $V$  n'admet pas d'invariants par  $G_K$ , nous obtenons d'une part

$$\mathrm{tor}_p H^1(K_n, T(k)) \simeq H^0(K_n, V(k)/T(k))$$

et d'autre part  $\sharp H_{\mathrm{Iw}}^2(T(k))^{\Gamma_n} = \sharp H^0(K_n, V^*(1-k)/T^*(1-k))$  (voir la proposition 1.3.2).

Le lien entre la cohomologie d'Iwasawa et la cohomologie galoisienne énoncé dans la proposition 1.3.2 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \left( H_{\mathrm{Iw}}^1(T(k))_{\Gamma_n} : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) &= \frac{\sharp H^0(K_n, V(k)/T(k))}{\sharp H^0(K_n, V^*(1-k)/T^*(1-k))} \\ &\times \left( \tilde{H}^1(K_n, T(k)) : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \end{aligned}$$

où  $\tilde{H}^1(K_n, T(k)) = H^1(K_n, T(k)) / \mathrm{tor}_p H^1(K_n, T(k))$ .

Par symétrie, nous pouvons obtenir la même formule avec  $T^*(1-k)$ ; il en découle

$$\begin{aligned} (2.3.3) \quad &\left( H_{\mathrm{Iw}}^1(T(k))_{\Gamma_n} : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \\ &\times \left( H_{\mathrm{Iw}}^1(T^*(1-k))_{\Gamma_n} : ((\varphi^n)^* (\pi^l \mathbb{N}(T^*(1-k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \\ &= \left( \tilde{H}^1(K_n, T(k)) : ((\varphi^n)^* (\pi^k \mathbb{N}(T(k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right) \\ &\times \left( \tilde{H}^1(K_n, T^*(1-k)) : ((\varphi^n)^* (\pi^l \mathbb{N}(T^*(1-k))))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right). \end{aligned}$$

Or, par le théorème 2.3.1 lorsque  $k \notin [1, h]$ , le second membre de l'égalité n'est autre que le déterminant

$$\left( \Omega_{T, k, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n}), \Omega_{T^*(-h), l, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T^*(-h))(l)_{\Gamma_n}) \right)_{T(k), n}.$$

Or, d'après le deuxième point de la proposition 2.2.2, ce déterminant est engendré par  $(p^{nh} \Gamma^*(k) / \Gamma^*(k-h))^{[K_n : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V}$ . D'autre part, les groupes de la cohomologie d'Iwasawa de  $T$  et de  $T^*(1-k)$  peuvent être exprimés en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules (voir la proposition 1.3.6). Cela permet de transformer les deux membres de l'égalité (2.3.3) et donc de terminer la preuve du corollaire.  $\square$

### 2.3.3 Le cas où $k \in [1, h]$

Dans ce paragraphe, nous prouvons que pour  $k \in [1, h]$ , l'homomorphisme  $\tilde{\Omega}_{T, k, n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$\mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \simeq ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

Pour cela, nous utilisons le cas que nous venons de démontrer. Nous commençons par lier  $\mathcal{F}_{T,k+p^m,n}$  et  $\mathcal{F}_{T,k,n}$ . En utilisant le cas précédent où  $k > h$ , nous pourrions alors conclure.

**Lemme 2.3.6**

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}(T)$ , nous avons :

$$\mathcal{F}_{T,k+p^m,n}(\alpha) \equiv \varepsilon^{p^m} \otimes \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) \left[ \text{mod } p^m \varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k+p^m))) \right].$$

Ce lemme est démontré en deux temps. Nous transformons d'abord ce qu'il y a démontré; nous terminons ensuite la preuve.

*Première étape de la démonstration : reformulation.*

Posons  $k_m = k + p^m$ . Il suffit de montrer que

$$(2.3.4) \quad \mathcal{E}_{T,k_m,n}(\alpha) \equiv \varepsilon^{p^m} \otimes \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) \left[ \text{mod } p^m \varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k_m))) \right].$$

Admettons cette congruence un instant. Comme de plus  $(\gamma_n - \mathbf{1})(\mathcal{E}_{T,k_m,n}(\alpha))$  et  $(\gamma_n - \mathbf{1})(\varepsilon^{p^m} \otimes \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha))$  appartiennent à  $(\mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k_m))^{\psi_n=0}$  (voir la démonstration du lemme B.1.1), ces deux derniers éléments sont congrus modulo  $p^m(\mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k_m))^{\psi_n=0}$ . D'où il vient :

$$\begin{aligned} (\gamma_n - \mathbf{1})(\mathcal{E}_{T,k_m,n}(\alpha)) \\ \equiv \varepsilon^{p^m} \otimes (\gamma_n - \mathbf{1})(\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)) \left[ \text{mod } p^m(\mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k_m))^{\psi_n=0} \right]. \end{aligned}$$

Or dans la démonstration du corollaire A.1.2, nous voyons que  $\varphi - \mathbf{1}$  induit la bijection

$$\varphi - \mathbf{1} : \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=1} \xrightarrow{\sim} \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=0}.$$

Comme  $\varphi$  agit trivialement sur  $\varepsilon$ , il en résulte le lemme. Ainsi, il suffit bien de montrer la congruence (2.3.4).  $\square$

*Fin de la démonstration.*

Montrons (2.3.4) pour un élément  $\alpha = f(\pi) \otimes m$  de  $\mathcal{D}(T)$ . Il existe alors  $a_i(\pi) \in \mathcal{R}_K^+$  et une base  $(n_i)_i$  de  $\mathbb{N}(T)$  tels que  $m = \sum_i a_i(\pi) \otimes n_i \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ .

Par définition des  $E_{\cdot,n}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} -E_{k_m,n}(f(\pi)) + E_{k,n}(f(\pi)) \\ = \sum_{j=1}^k \left( \frac{(k-1)!}{(k-j)!} - \frac{(k_m-1)!}{(k+p^m-j)!} \right) (-1)^{j-1} \frac{p^{n(j-1)}}{t^j} \partial_n^{-j} f(\pi_n) \\ + \sum_{j=k+1}^{k_m-1} (k_m-1) \dots (k_m-j+1) (-1)^{j-1} \frac{p^{n(j-1)}}{t^j} \partial_n^{-j} f(\pi_n) \end{aligned}$$

avec

$$(2.3.5) \quad \begin{cases} \frac{(k-1)!}{(k-j)!} - \frac{(k_m-1)!}{(k_m-j)!} \equiv 0 \pmod{p^m} & \text{si } 1 \leq j \leq k \\ (k_m - 1) \dots (k_m - j + 1) \equiv 0 \pmod{p^m} & \text{si } k + 1 \leq j. \end{cases}$$

L'élément  $\overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)}$  est obtenu en tronquant les  $a_i(\pi)/t^j$  modulo  $\pi$  dans  $E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)$ . Il vient en particulier de (2.3.5) que les éléments  $\overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)}$  et  $\overline{E_{k_m,n}(f(\pi))a_i(\pi)}$  sont congrus modulo  $p^m$  dans  $\mathcal{O}_{K_n}$ .

Il en découle la congruence du lemme puisque

$$\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^d \overline{E_{k,n}(f(\pi))a_i(\pi)} n_i \otimes \varepsilon^{\otimes k} \in \varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))).$$

Cela clôt la démonstration. □

*Démonstration du théorème — deuxième cas :  $k \in [1, h]$ .*

Il s'agit de montrer que, pour  $k \in [1, h]$ , l'application  $\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$(2.3.6) \quad \mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n} \xrightarrow{\sim} ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

Pour un tel  $k$  et pour  $m$  assez grand,  $k_m = k + p^m$  n'appartient pas à  $[1, h]$ . Ainsi, par le paragraphe précédent, pour ces  $k_m$ , les applications induites par  $\tilde{\Omega}_{T,k_m,n}^\varepsilon$  sont des isomorphismes.

Il vient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T)(k)_{\Gamma_n}/p^m & \longrightarrow & ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k))_{\Gamma_n}^{\psi=1}/p^m \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathcal{D}(T)(k_m)_{\Gamma_n}/p^m & \xrightarrow{\sim} & ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(k_m))_{\Gamma_n}^{\psi=1}/p^m \end{array}$$

(les flèches verticales sont les twists par  $\varepsilon^{\otimes p^m}$  et les flèches horizontales sont induites par  $\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$  et  $\tilde{\Omega}_{T,k_m,n}^\varepsilon$ ). Il en découle que la flèche verticale du haut est aussi une bijection.

La réduction modulo  $p^m$  de l'application (2.3.6) étant bijective pour tout  $m$  suffisamment grand, le cas " $h \leq k$ " en résulte. Cela finit de démontrer le théorème.

□

## 2.4 Autour de $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  qui n'est pas positive. Ses sauts de filtration sont donc contenus dans un intervalle  $[-k, h - k]$  avec  $k \geq 1, h \geq 0$ . Supposons toujours que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

Dans ce paragraphe, nous travaillons avec  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  pour  $n \geq 1$ .

Nous pouvons d'ores et déjà commencer à entrevoir l'intérêt que ce quotient — ou plutôt l'importance que le quotient " $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$ " — va revêtir dans notre étude des nombres de Tamagawa.

Remarquons que " $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$ " n'est pas tout le temps rigoureusement défini puisque l'homomorphisme évident partant de  $((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  et à valeurs dans  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  n'est pas toujours injectif. Toutefois, nous nous contentons pour l'instant de cette écriture pour parler du quotient de  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  par l'image de  $((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  dans  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1}$ .

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$\mathcal{D}(T(-k))(k)_{\Gamma_n} \simeq ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

Ainsi, comme  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon$  est intimement lié à l'exponentielle de Bloch et Kato de  $V$ , le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  correspond à l'image d'un certain ensemble  $E$  par l'exponentielle de Bloch et Kato.

D'autre part, nous savons que  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)$  (voir prop. 1.3.6 — mais dans sa version entière) et que  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n} \subset H^1(K_n, T)$  (voir prop. 1.3.2).

Ainsi  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  et  $H^1(K_n, T) / \exp_{K_n, V}(E)$  sont à rapprocher.

Nous savons déjà que  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  n'a pas de  $p$ -torsion, il n'a pas non plus d'invariants par  $\Gamma_n$  si  $h - k < 0$  (cf. lemme 1.4.8). Dans ce paragraphe, nous étudions deux nouveaux aspects de ce quotient. Nous décrivons d'abord  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$ . Il suffit pour cela d'étudier le cas où  $k = 0$  (nous pourrions ensuite tordre à loisir par le caractère cyclotomique).

Dans un second temps nous proposons un encadrement du cardinal de la torsion des co-invariants de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  par  $\Gamma_n$  puis par  $\Gamma_K$ .

### 2.4.1 Description de $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$

Le lien entre l'homomorphisme  $\Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon$  et le module de Wach de  $T$  vu dans le paragraphe précédent donne une description de  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}$  pour  $n \geq 1$ .

#### Théorème 2.4.1

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h-k]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $h \geq 0$ . Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , l'application  $\varphi^{-n}$  induit l'isomorphisme de  $\Lambda_p$ -modules suivant :

$$i_{V,n} : \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^\star(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}} \simeq \bigoplus_{m=1-k}^{h-k} (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)).$$

Notons ce théorème a été démontré par D. Benois et L. Berger pour  $n = 1$  et  $k = 0$  (voir [BB08, §4.4]).

Les égalités  $\pi^k \mathbb{N}(T) = \mathbb{N}(T(-k))(k)$ ,  $\mathbb{D}(V) = \mathbb{D}(V(-k))(k)$  et  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(-k)) \otimes e_{-k}$  permettent de se ramener au cas où  $k = 0$  en tordant par la puissance  $(-k)$ -ième du caractère cyclotomique. Nous supposons donc que la représentation  $V$  est positive à sauts de filtration dans  $[0, h]$ .

#### Premier résultat

Soit  $L/\mathbb{Q}_p$  une extension finie. Pour tout module  $M$  de torsion sur  $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L$  (respectivement sur  $\Lambda_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ ), notons  $\text{car}_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L}(M)$  (resp.  $\text{car}_{\Lambda_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}(M)$ ) le polynôme caractéristique de  $M$ ; celui-ci vérifie l'égalité

$$\begin{aligned} \det_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L} M &= \text{car}_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L}(M)^{-1} \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L \\ &\text{(resp. } \det_{\Lambda_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L} M = \text{car}_{\Lambda_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L}(M)^{-1} \Lambda_p \otimes_{\mathbb{Q}_p} L). \end{aligned}$$

Pour obtenir le théorème précédent, nous avons recours à la proposition intermédiaire qui vient.

#### Proposition 2.4.2

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans l'intervalle  $[0, h]$  et n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Pour tout  $n \geq 1$ ,



(i) l'application  $\varphi^{-n}$  induit l'injection de  $\Lambda_p$ -modules qui suit :

$$i_{V,n} : \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}} \hookrightarrow \bigoplus_{m=1}^h (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) ;$$

$$(ii) \text{car}_{\Lambda} \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}} \right) \text{ divide } \prod_{m=1}^h (\text{car}_{\Lambda}(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes \mathbb{Z}_p(-m)))^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}.$$

La démonstration se fait en trois étapes.

- 1) Montrer que le premier point implique le second ; il suffira dès lors de montrer le premier point.
- 2) Transformer la formulation du premier point ; le (i) est équivalent à l'injectivité d'une famille d'applications  $i_{V,n,m}$  où

$$i_{V,n,m} : \mathbb{N}_m(V) / \mathbb{N}_{m-1}(V) \rightarrow K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$$

et où, pour tout  $l$  entier,  $\mathbb{N}_l(V) = (\varphi^n(\pi^{-l})(\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}$ .

- 3) Montrer l'injectivité des applications  $i_{V,n,m}$ .

*Démonstration de la première étape : (i)  $\Rightarrow$  (ii).*

Les  $\Gamma_K$ -modules  $K[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)$  et  $K_n t^{-m}$  sont isomorphes. Allié à l'injectivité du premier point (i), cela donne la relation de divisibilité

$$\text{car}_{\Lambda_p} \left( \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}} \right) \left| \prod_{m=1}^h (\text{car}_{\Lambda}(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes \mathbb{Z}_p(-m)))^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \right.$$

Et comme, d'après le lemme 1.4.8, le quotient  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  n'a pas de  $p$ -torsion, il en découle l'égalité :

$$\text{car}_{\Lambda_p} \left( \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}} \right) = \text{car}_{\Lambda} \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}} \right).$$

Cela entraîne le second point de la proposition et termine la preuve de la première étape.  $\square$

*Démonstration de la seconde étape : reformulation de (i).*

Rappelons que  $h$  est le plus grand saut de filtration de  $V$ . La proposition 1.4.2 entraîne l'inclusion  $\mathbb{N}(V) \subset (\pi/t)^h \mathcal{D}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  de même qu'un isomorphisme entre  $K[[t]] \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V)$  et  $K[[t]] \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Comme  $\varphi^{-n}(1/\pi) \in \mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ , l'application  $\varphi^{-n}$  induit une injection

$$\varphi^{-n} : \mathbb{D}(V)^{\psi=1} \hookrightarrow \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)).$$

Adoptons les mêmes notations que D. Benois et L. Berger et posons :

$$\begin{cases} D_m = \bigoplus_{l \leq m} (K_n t^{-l} \otimes_K \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \\ \mathbb{N}_m(V) = (\varphi^n(\pi^{-m})(\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}. \end{cases}$$

Nous avons  $D_h = \text{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))$ ,  $D_m/D_{m-1} \simeq K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Le Frobenius  $\varphi^{-n}$  induit les plongements  $\mathbb{N}_m(V) \hookrightarrow D_m$ . Ceux-ci donnent lieu aux morphismes

$$\mathbb{N}_m(V)/\mathbb{N}_{m-l}(V) \rightarrow D_m/D_{m-l} \text{ où } m \geq 0 \text{ et où } 0 \leq l < m.$$

(seuls les cas où  $l = m$  et  $l = 1$  seront utilisés). D'autre part, nous avons déjà vu dans le lemme 1.4.7 que

$$(\varphi^n(\pi)^{-h}(\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1} = \mathbb{D}(V)^{\psi=1}.$$

Cela implique que l'application  $i_{V,n}$  du premier point de la proposition n'est autre que l'application  $\mathbb{N}_h(V)/\mathbb{N}_0(V) \rightarrow D_h/D_0$ . Pour démontrer l'injectivité de ce dernier homomorphisme, il suffit dès lors de prouver l'injectivité des applications suivantes pour tout entier  $1 \leq m \leq h$  :

$$i_{V,n,m} : \mathbb{N}_m(V)/\mathbb{N}_{m-1}(V) \rightarrow K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V). \quad \square$$

*Démonstration de la troisième étape : injectivité des applications  $i_{V,n,m}$ .*

Soit  $x \in \mathbb{N}_m(V)$  annulé par l'homomorphisme  $\mathbb{N}_m(V) \rightarrow K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  induit par  $\varphi^{-n}$ . Il s'agit de montrer que  $x \in \mathbb{N}_{m-1}(V)$ .

Nous savons par définition que  $\pi^m \varphi^{-n}(x)$  appartient à  $\mathbb{B}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V)$  et que  $\varphi^{-n}(x)$  est dans  $t^{-m+1} K_n [[t]] \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Comme toute base de  $\mathbb{N}(V)$  est une base de  $K_n [[t]] \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , il vient que  $x$  est annulé par le prolongement par linéarité de  $\theta$  à  $\mathbb{B}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V)$ . En d'autres termes,  $\pi^m \varphi^{-n}(x)$  appartient à  $\omega \mathbb{B}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{B}_K^+} \mathbb{N}(V)$  et donc

$$x \in (\varphi^{n-1}(1/\pi) \varphi^n(\pi^{1-m})(\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}.$$

Si  $(e_i)_i$  désigne une base de  $\mathbb{N}(V)$ , alors  $x = \sum b_i(\pi) \varphi^{n-1}(1/\pi) \varphi^n(\pi^{1-m} e_i)$  avec  $b_i(\pi) \in \mathbb{B}_K^+$ . Pour obtenir  $x \in \mathbb{N}_{m-1}(V)$ , il suffit de montrer que  $\varphi^{n-1}(\pi)$  divise  $b_i(\pi)$  dans  $\mathbb{B}_K^+$ .

Pour cela, notons que  $\mathbb{B}_K^+ = \bigoplus_{j < p^{n-1}} \varphi^{n-1}(\mathbb{B}_K^+)(1 + \pi)^j$ ; cela permet d'écrire  $b_i(\pi) = \sum_{j < p^{n-1}} \varphi^{n-1}(b_{i,j}(\pi))(1 + \pi)^j$ . Il reste à montrer que  $b_{i,j}(0) = 0$  pour tout  $i$  et tout  $j$ .

Nous montrons dans un premier temps la nullité des  $b_{i,j}(0)$  lorsque  $p^{n-1}$  divise  $j$  (c'est-à-dire pour  $j = 0$ ) puis celle des  $b_{i,j}(0)$  lorsque  $p^{n-2}$  divise  $j$  etc.

**Nullité des  $b_{i,0}(0)$ .** Soit  $(m_1, \dots, m_d)$  une  $K$ -base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  congrue à  $(e_i)_i$  modulo  $\pi \mathcal{S}_K^+ \otimes_{\mathbb{A}_k^+} \mathbb{N}(T)$  et  $y \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  défini par

$$y = \sum \varphi^{-1}(b_{i,0}(0)) m_i = \sum \varphi^{-1}((\psi^{n-1}(b_i(\pi)))(0)) m_i$$

Puisque  $\psi^n(x) = \psi^{n-1}(x)$ , nous avons

$$(2.4.1) \quad \sum \frac{\psi^{n-1}(b_i)}{\pi} \varphi(e_i) = q^{m-1} \sum \psi \left( \frac{\psi^{n-1}(b_i)}{\pi} \right) e_i.$$

Nous en tirons l'appartenance de  $y$  à  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^{\varphi=p^{m-1}}$ . Or  $y \in \text{Fil}^{m-1} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  (cf. le lemme 2.4.3 qui suit avec  $j = 0$ ), donc  $y \in (V(m-1))^{G_K} \otimes e_{m-1}$  qui est nulle par hypothèse. Il en découle que  $b_{i,0}(0) = 0$  pour tout  $i$ .  $\square$

### Lemme 2.4.3

Dans le contexte de la démonstration précédente, pour tout  $j < p^{n-1}$  nous avons

$$\sum_i \varphi^{-1}(b_{i,j}(\pi)/\pi) \varphi^{-n}((1 + \pi)^j) e_i / \pi^{m-1} \in \bigoplus_{l \leq m-1} K_n t^{-l} \otimes_K \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{cris}}(V).$$

*Démonstration du lemme.*

Par définition de  $\varphi^{-n}$ , nous avons  $\varphi^{-n}(x) \in \bigoplus_{l \leq m-1} K_n t^{-l} \otimes_K \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  et

$$\varphi^{-n}(x) = \sum_{j < p^{n-1}, i} \varphi^{-1}(b_{i,j}(\pi)/\pi) \varphi^{-n}((1 + \pi)^j) e_i / \pi^{m-1}$$

avec  $\varphi^{-1}(b_{i,j}(\pi)/\pi) \in K_1[[t]]$  et  $\varphi^{-n}(1 + \pi)^j = \zeta_{p^n}^j \exp(tj/p^n)$ . Or  $(e_i)_i$  est une base de  $K[[t]] \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  tandis que  $(\zeta_{p^n}^j)_{0 \leq j < p^{n-1}}$  est une  $K_1$ -base de  $K_n$ , nous en déduisons la conclusion.  $\square$

**Nullité des  $b_{i,p^{n-2}l}(0)$  pour tout  $1 \leq l \leq p-1$ .** De  $\psi^{n-2}(x) = \psi^{n-1}(x)$ , vient

$$\sum_{l,i} \varphi(b_{i,p^{n-2}l}(\pi))(1 + \pi)^l \varphi^2(e_i) = \sum_i \varphi(\pi) \varphi(q)^{m-1} \frac{b_{i,0}(\pi)}{\pi} \varphi(e_i).$$

Or  $\varphi$  est bijectif sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Comme de plus  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  est isomorphe à  $\mathbb{N}(V)/\pi\mathbb{N}(V)$  (voir prop. 1.4.3), il vient  $(\varphi(e_i))_i$  est une base de  $\mathbb{N}(V)/\pi\mathbb{N}(V)$ .

Par ailleurs,  $\pi$  divise  $b_{i,0}(\pi)$  d'où il vient que  $\sum_l \varphi(b_{i,p^{n-2l}}(\pi))(1+\pi)^l$  est divisible par  $\varphi(\pi)$  dans  $\mathbb{B}_K^+$  pour tout  $i$ .

N'oublions pas que la décomposition  $\mathbb{B}_K^+ = \bigoplus_{j < p} \varphi(\mathbb{B}_K^+)(1+\pi)^j$ . Celle-ci implique que  $\varphi(\pi)$  divise tout les  $\varphi(b_{i,p^{n-2l}}(\pi))$  dans  $\mathbb{B}_K^+$ . Et donc  $b_{i,p^{n-2l}}(0) = 0$  pour tout  $l$  et pour tout  $i$ .

Ainsi, de proche en proche, nous prouvons la nullité des  $b_{i,j}(0)$  pour tout  $i$  et tout  $j$ . Cela permet de terminer la démonstration de la dernière étape et donc de la proposition intermédiaire.  $\square$

### Lemmes préliminaires

Avant de démontrer le théorème 2.4.1, énonçons deux derniers lemmes.

Le premier calcule le polynôme caractéristique

$$\prod_{m=1}^h (\text{car}_\Lambda(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes \mathbb{Z}_p(-m)))^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}.$$

Le second permet quant à lui de travailler sur le polynôme caractéristique

$$\text{car}_\Lambda \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}} \right).$$

Mis ensemble, ces deux lemmes permettent de terminer la démonstration du principal théorème de cette partie. En effet, les polynômes caractéristiques de  $\Lambda$ -modules sont l'ingrédient essentiel de cette preuve : plutôt que de montrer directement la bijection de l'homomorphisme, nous montrerons l'égalité des polynômes caractéristiques de  $\bigoplus_{m=1}^h (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))$  et de  $\mathbb{D}(V)^{\psi=1} / ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(V))^{\psi=1}$ . Nous concluons en utilisant l'injection de la proposition 2.4.2.

Rappelons que  $\Delta_K$  désigne le groupe de Galois de  $K_1/K$  et que  $\mathbb{Q}_{p,n} = \mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$ .

#### Lemme 2.4.4

Soit  $i$  et  $m$  deux entiers et  $\delta_i = \frac{1}{\#\Delta_K} \sum_{\sigma \in \Delta_K} \chi^{-i}(\sigma)\sigma$  l'idempotent associé à  $\chi^{-i}$ . Pour tout entier strictement positif  $n$ , nous avons :

$$\text{car}_\Lambda (\delta_i (\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) = \delta_{i+m} \otimes (\gamma_n - \chi(\gamma_n)^{-m}).$$

*Démonstration.*

Soit  $\mathbb{Q}_{p,n} = \mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$ . Comme  $G_n = \Delta_K \times \Gamma_1/\Gamma_n$ , un rapide calcul donne

$$\begin{aligned} \delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)) &= \delta_{m+i}(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)) \\ &= \delta_{m+i}(\mathbb{Q}_{p,n}[\Delta_K][\Gamma_1/\Gamma_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)) \end{aligned}$$

d'où  $\delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)) = \mathbb{Q}_{p,n}[\Gamma_1/\Gamma_n] \delta_{m+i} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)$ .

Si  $\eta$  un caractère de  $\Gamma_1/\Gamma_n$  et si  $e_\eta = \frac{1}{\#\Gamma_1/\Gamma_n} \sum_{g \in \Gamma_1/\Gamma_n} \eta^{-1}(g)g$  est l'idempotent habituel associé à  $\eta$ , nous obtenons la décomposition :

$$\delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)) = \bigoplus_{\eta \in X(\Gamma_1/\Gamma_n)} \mathbb{Q}_{p,n} \delta_{m+i} e_\eta \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{car}_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_{p,n}}(\delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) &= \delta_{i+m} \otimes \prod_{\eta \in X(\Gamma_1/\Gamma_n)} (\gamma_1 - \chi(\gamma_1)^{-m} \eta(\gamma_1)) \\ &= \delta_{i+m} \otimes (\gamma_n - \chi(\gamma_n)^{-m}). \end{aligned}$$

Or  $\text{car}_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_{p,n}}(\delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) = \text{car}_{\Lambda_p}(\delta_i(\mathbb{Q}_p[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m)))$  et comme le module  $\delta_i(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))$  n'a pas de  $p$ -torsion, il vient

$$\begin{aligned} \text{car}_{\Lambda}(\delta_i(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) &= \text{car}_{\Lambda_p}(\delta_i(\mathbb{Q}_p[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) \\ &= \text{car}_{\Lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p,n}}(\delta_i(\mathbb{Q}_{p,n}[G_n] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(-m))) \\ &= \delta_{i+m} \otimes (\gamma_n - \chi(\gamma_n)^{-m}). \end{aligned}$$

Le lemme est ainsi démontré. □

### Lemme 2.4.5

Soit  $l \notin [1, h]$ . Nous avons

$$\# \left( \frac{\mathbb{D}(T(l))^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n} = \left( \mathbb{D}(T(l))_{\Gamma_n}^{\psi=1} : ((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(l))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \right).$$

*Démonstration.*

Par le second point du lemme 1.4.8, nous savons déjà que

$$\left( \frac{\mathbb{D}(T(l))^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n} = 0.$$

Le lemme du serpent appliqué à la suite tautologiquement exacte

$$0 \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T(l))^{\psi=1} \rightarrow \frac{\mathbb{D}(T(l))^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1}} \rightarrow 0$$

donne la suite exacte

(2.4.2)

$$0 \rightarrow \left( ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1} \right)_{\Gamma_n} \rightarrow \left( \mathbb{D}(T(l))^{\psi=1} \right)_{\Gamma_n} \rightarrow \left( \frac{\mathbb{D}(T(l))^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n} \rightarrow 0.$$

Cela permet ainsi de terminer cette démonstration.  $\square$

### Démonstration du théorème

Nous pouvons désormais prouver le théorème 2.4.1 i.e. montrer la bijectivité du morphisme de  $\Lambda_p$ -modules

$$i_{V,n} : \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(V))^{\psi=1}} \rightarrow \bigoplus_{m=1}^h (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)).$$

Nous écrivons  $a \sim_p b$  si  $a$  et  $b$  sont deux éléments non nuls de  $\mathbb{Q}_p$  vérifiant  $a/b \in \mathbb{Z}_p^\times$ .

Puisque l'injectivité a déjà été montrée dans le paragraphe 2.4.1, il ne reste plus qu'à montrer la surjectivité.

Pour cela, nous procédons en deux temps.

- 1) Transformation de l'énoncé : nous reformulerons l'énoncé en termes de polynômes caractéristiques.
- 2) Démonstration du nouvel énoncé. C'est ici que les deux lemmes du paragraphe précédent joueront un rôle.

*Démonstration de la première étape : reformulation du problème.*

Il suffit de montrer

(2.4.3)

$$\det_{\Lambda} \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}} \right) = \prod_{m=1}^h (\det_{\Lambda}(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes \mathbb{Z}_p(-m)))^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}.$$

En effet, si ces deux polynômes caractéristiques sont égaux, le déterminant sur  $\Lambda_p$  du conoyau de l'injection

$$i_{V,n} : \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*\mathbb{N}(V))^{\psi=1}} \hookrightarrow \bigoplus_{m=1}^h (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))$$

est égal à  $\Lambda_p$ . Il en résulte la nullité de ce conoyau (puisque  $\Lambda_p$  est principal) ce qui entraîne la surjectivité de  $i_{V,n}$ .  $\square$

*Démonstration de la deuxième étape : égalité des polynômes caractéristiques.*

Soit  $\delta_i$  les idempotents associés aux caractères de  $\Delta_K$  et :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{p-2} \delta_i \otimes f_{T,i}(\gamma_1 - \mathbf{1}) = \text{car}_\Lambda \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T))^{\psi=1}} \right), \\ \sum_{i=0}^{p-2} \delta_i \otimes g_{T,i}(\gamma_1 - \mathbf{1}) = \prod_{k=1}^h (\text{car}_\Lambda(\mathbb{Z}_p[G_n] \otimes \mathbb{Z}_p(-k)))^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^k \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}. \end{cases}$$

Soit de plus  $f_T(\gamma_1 - \mathbf{1}) = \prod_i f_{T,i}(\gamma_1 - \mathbf{1})$  et  $g_T(\gamma_1 - \mathbf{1}) = \prod_i g_{T,i}(\gamma_1 - \mathbf{1})$ . Soit  $\aleph_l$  l'ensemble des  $\chi(\gamma_1)^{-l} \zeta - 1$  lorsque  $\zeta \in \mu_{p^{n-1}}$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que  $f_T(\gamma_1 - \mathbf{1}) = g_T(\gamma_1 - \mathbf{1})$ . Par la proposition 2.4.2, nous savons déjà que  $f_T(\gamma_1 - \mathbf{1})$  divise  $g_T(\gamma_1 - \mathbf{1})$  et de la même manière que  $f_{T^*(-h)}(\gamma_1 - \mathbf{1})$  divise  $g_{T^*(-h)}(\gamma_1 - \mathbf{1})$ .

Aussi pour conclure, il suffit de montrer que, pour  $l$  suffisamment grand et avec  $l' = l - h - 1$ , nous avons

$$\prod_{x \in \aleph_l, y \in \aleph_{l'}} f_T(x) f_{T^*(-h)}(y) \sim_p \prod_{x \in \aleph_l, y \in \aleph_{l'}} g_T(x) g_{T^*(-h)}(y).$$

Montrons cette équivalence.

Nous savons que pour tout  $l \notin [1, h]$

$$\prod_{x \in \aleph_l} f_T(x) = \sharp \left( \frac{\mathbb{D}(T(l))^{\psi=1}}{((\varphi^n)^* \mathbb{N}(T)(l))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n}$$

d'où, par le corollaire 2.3.5 et le lemme 2.4.5, pour tout  $l$  suffisamment grand

$$(2.4.4) \quad \prod_{x \in \aleph_l, y \in \aleph_{l'}} f_T(x) f_{T^*(-h)}(y) \sim_p \left( p^{nh} \frac{\Gamma^*(l)}{\Gamma^*(l-h)} \right)^{[K_n : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V}.$$

D'autre part,  $g_{T,i}(\gamma_1 - \mathbf{1}) = \prod_{m=1}^h (\gamma_n - \chi(\gamma_n)^{-m})^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  (cf. lemme 2.4.4). Comme  $\chi(\gamma_n)$  appartient à  $1 + p^n \mathbb{Z}_p^\times$ , il vient  $\chi(\gamma_n)^j - 1 \sim_p j p^n$  pour tout  $j$  entier.

Pour  $l \notin [1, h]$  et  $x \in \aleph_l$ , nous obtenons donc

$$g_{T,i}(x) \sim_p p^{n[K:\mathbb{Q}_p]t_H(V)} \prod_{m=1}^h (l-m)^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}.$$

Le même type d'égalité vient avec  $g_{T^*(-h)}(y)$  où  $y \in \mathfrak{N}_{l'}$  et  $l' = l - h - 1$ . Les deux égalités  $t_H(V) + t_H(V^*(-h)) = h \dim_{\mathbb{Q}_p} V$  et

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) + \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^{1-m} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*) = [K : \mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

permettent d'obtenir pour tout  $l \notin [1, h]$ , tout  $x \in \mathfrak{N}_l$  et pour tout  $y \in \mathfrak{N}_{l'}$

$$(2.4.5) \quad g_T(x)g_{T^*(-h)}(y) \sim_p \left( p^{nh} \frac{\Gamma^*(l)}{\Gamma^*(l-h)} \right)^{[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V}.$$

Les points (2.4.4) et (2.4.5) donnent pour tout  $l$  assez grand :

$$\prod_{x \in \mathfrak{N}_l, y \in \mathfrak{N}_{l'}} f_T(x)f_{T^*(-h)}(y) \sim_p \prod_{x \in \mathfrak{N}_l, y \in \mathfrak{N}_{l'}} g_T(x)g_{T^*(-h)}(y).$$

Cela permet d'obtenir  $f_T(\gamma_1 - \mathbb{1}) = g_T(\gamma_1 - \mathbb{1})$  puisque  $f_T(\gamma_1 - \mathbb{1})f_{T^*(-h)}(\gamma_1 - \mathbb{1})$  divise  $g_T(\gamma_1 - \mathbb{1})g_{T^*(-h)}(\gamma_1 - \mathbb{1})$ .  $\square$

### Corollaire 2.4.6

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h - k]$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $h \geq 0$ . Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

Soit  $n \geq 1$ . Soit  $\mathbb{N}_a(V)$  est défini par  $\mathbb{N}_a(V) = (\varphi^n(\pi^{-a})(\varphi^n)^* \mathbb{N}(V))^{\psi=1}$  pour tout  $a$  entier.

Pour tout entier  $l \geq m$ , l'application  $\varphi^{-n}$  induit l'isomorphisme de  $\Lambda_p$ -modules suivant :

$$\mathbb{N}_l(V)/\mathbb{N}_m(V) \simeq \bigoplus_{i=m+1}^l K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V).$$

*Démonstration.*

La preuve de la proposition 2.4.2 dit que pour tout  $l \geq m$ , nous avons une injection de  $\Lambda_p$ -modules suivant induite par  $\varphi^{-n}$  :

$$\mathbb{N}_l(V)/\mathbb{N}_m(V) \hookrightarrow \bigoplus_{i=m+1}^l K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V).$$



Pour tout  $l \geq l' \geq m$ , le diagramme suivant est commutatif :

$$(2.4.6) \quad \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{N}_{l'}(V)/\mathbb{N}_m(V) \hookrightarrow & \bigoplus_{i=m+1}^{l'} (K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}_l(V)/\mathbb{N}_m(V) \hookrightarrow & \bigoplus_{i=m+1}^l (K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}_l(V)/\mathbb{N}_{l'}(V) \hookrightarrow & \bigoplus_{i=l'+1}^l (K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) & \\ \downarrow & \downarrow & \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Aussi pour obtenir le corollaire, il suffit de montrer que  $\varphi^{-n}$  induit l'isomorphisme de  $\Lambda_p$ -module  $\mathbb{N}_{h-k}(V)/\mathbb{N}_m(V) \simeq \bigoplus_{i=1+m}^{h-k} (K_n t^{-i} \otimes_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))$ . Cela résulte directement du théorème 2.4.1 puisque  $\mathbb{N}_{h-k}(V) = \mathbb{D}(V)^{\psi=1}$  (cf. lemme 1.4.7).  $\square$

## 2.4.2 Étude de la torsion de ses co-invariants par $\Gamma_n$ ( $n \geq 1$ )

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  qui n'est pas positive et n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Ses sauts de filtration sont donc contenus dans un intervalle  $[-k, h-k]$  avec  $k \geq 1, h \geq 0$ . Introduisons également un réseau  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ .

Soit de plus  $n \geq 1$ . Rappelons que  $\mathbb{N}_l(T) = (\varphi^n(\pi)^{-l}(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  pour tout  $l$  entier.

Par le paragraphe précédent, nous savons que  $\varphi^{-n}$  induit l'isomorphisme de  $\Lambda_p$ -modules

$$i_{V,n} : \frac{\mathbb{D}(V)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(V)))^{\psi=1}} \simeq \bigoplus_{m=1-k}^{h-k} (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))$$

Soit  $T_n$  la  $p$ -torsion des co-invariants de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1}$  par  $\Gamma_n$ . Pour travailler sur ce module, nous utilisons la filtration de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} = \mathbb{N}_{h-k}(T)$  par les  $\mathbb{N}_l(T)$ .

Nous pouvons alors regarder les graduations  $\mathbb{N}_l(T)/\mathbb{N}_{l-1}(T)$  de cette filtration comme des réseaux de  $K_n t^{-l} \otimes_K \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  grâce au théorème 2.4.1 et à son corollaire 2.4.6.

Cette partie est composée de cinq paragraphes. Dans le premier, nous donnons les énoncés. Dans le second, nous démontrons la proposition qui décrit  $T_n$  dans le cas le plus simple, i.e. lorsque  $k$  est grand par rapport à  $h$ .

Pour la démonstration dans le cas général, nous avons besoin de préalablement modifier l'énoncé de la proposition ; c'est ce qui est dans le troisième paragraphe. Cela permet de terminer la preuve dans le cas général.

Enfin dans un dernier temps, nous donnons un corollaire qui s'avérera essentiel dans l'étude de nombres de Tamagawa.

### Énoncé : encadrement de $\sharp T_n$

Commençons par quelques notations. Rappelons que les  $h_i(V)$  désignent les sauts de filtration de  $V$  et que  $t_H(V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i h_i(V)$ . Nous pouvons également définir  $t_H^+(V)$  en posant  $t_H^+(V) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i h_i(V)$ .

Soit de plus  $\Gamma_n^*(V) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n:\mathbb{Q}_p]}$  et  $\Gamma_n^+(V) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n:\mathbb{Q}_p]}$  où

$$\Gamma^*(i) = \begin{cases} (i-1)! & \text{si } i > 0 \\ \frac{(-1)^i}{(-i)!} & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Proposition 2.4.7

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h-k]$  avec  $k \geq 1$ ,  $h \geq 0$ . Supposons également qu'elle n'a pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Soit  $n \geq 1$ .

(i) Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p](n\alpha - n t_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \leq \sharp T_n \leq p^{[K_n:\mathbb{Q}_p]n\alpha} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p. \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Lorsque  $h < k$  ou si  $h = 1 = k$ , la majoration ci-dessus est une égalité.

La démonstration de ce résultat se fait en deux temps : nous nous occupons d'abord des cas où  $h < k$  ou où  $h = 1 = k$ . Pour le cas général où  $h \geq k$ , nous avons besoin de lemmes préliminaires.

**Quelques remarques sur cet encadrement.** (i) Il est clair que pour passer de la majoration à la minoration, il suffit de multiplier par la puissance négative ou nulle de  $p$  qui suit :

$$p^{-[K_n: \mathbb{Q}_p](n t_H^+(V) + n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V))} |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1}$$

La minoration et la majoration sont en particulier égales si et seulement  $h = 1 = k$ . En effet, dans ce cas,  $t_H^+(V) = 0$  et les bornes sont toutes deux égales à 1.

(ii) La minoration proposée a un intérêt réel, dans le sens où elle n'est jamais  $< 1$ . Pour voir cela, il est plus pratique d'anticiper un peu sur les démonstrations, de voir que la minoration peut s'écrire  $\star_1/\star_2$  avec

$$\begin{cases} \star_1 = p^{[K_n: \mathbb{Q}_p](n\alpha - n t_H^+(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^\star(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \star_2 = p^{n(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} \end{cases}$$

et avec :

$$(2.4.7) \quad \begin{cases} \star_1 = \prod_{i=1-k}^{-1} |\chi(\gamma_n)^i - 1|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} \\ \star_2 = \prod_{i=1-k}^{-1} |\chi(\gamma_n)^i - 1|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} \end{cases}.$$

Pour voir que la borne inférieure proposée n'est pas  $< 1$ , il suffit dès lors de savoir que  $\text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V) \geq \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)$  pour tout  $i \leq 0$ . De la même manière, nous remarquons également que la borne inférieure est égale à 1 si et seulement si la représentation  $V$  n'admet qu'un seul saut de filtration négatif.

(iii) Pour que la minoration proposée ici soit atteinte, il suffit que le module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - 1$  soit saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  pour  $2-k \leq l \leq h-k$ . Nous verrons cela dans la preuve de cette proposition lorsque  $h \geq k$  grâce aux explications qui suivent lemmes 2.4.11 et 2.4.12.

### Démonstration lorsque $h < k$ ou $h = 1 = k$

Nous savons que  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1}/\mathbb{N}_{-k}(T) = \mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T)$  (cf. corollaire 1.4.7). D'autre part, par le théorème 2.4.1, nous savons que  $\varphi^{-n}$  induit l'isomorphisme de  $\Lambda_p$ -modules suivant :

$$i_{V,n} : \mathbb{N}_{h-k}(V)/\mathbb{N}_{-k}(V) \simeq \bigoplus_{m=1-k}^{h-k} (K_n t^{-m} \otimes_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)).$$

Ainsi si  $h = 1 = k$ , alors  $\mathbb{N}_{h-k}(V)/\mathbb{N}_{-k}(V)$  est invariant par  $\Gamma_n$ , en d'autres termes,  $T_n = 1$  est fini et la proposition est montrée dans ce cas.

Ainsi si  $h < k$ , alors  $T_n = (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n}$  est fini. Le lemme de Herbrand permet de voir que le cardinal de la  $p$ -torsion  $T_n$  est indépendant du choix du réseau de  $\bigoplus_{m \in I} K_n t^{-m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Il vient alors par exemple :

$$\#T_n = \# \left( \bigoplus_{m \in I} \mathcal{O}_{K_n} t^{-m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \text{Fil}^m M \right)_{\Gamma_n}$$

où  $I = [1 - k, h - k] \setminus \{0\}$ . Or chaque  $\mathcal{O}_{K_n} t^{-m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \text{Fil}^m M$  est stable par  $\Gamma_n$  et ce groupe agit par la multiplication par  $\chi(\gamma_n)^m - 1$ . Il en découle :

$$\#T_n = \# \left( \bigoplus_{m \in I} \mathcal{O}_{K_n} t^{-m} \otimes_{\mathcal{O}_K} \text{Fil}^m M \right)_{\Gamma_n} = \prod_{m \in I} |\chi(\gamma_n)^m - 1|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}.$$

La fin de la démonstration de ces deux premiers cas résulte alors du lemme calculatoire qui suit.  $\square$

#### Lemme 2.4.8

(i) Si  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)$ , alors

$$\sum_{\substack{m=1-k \\ m \neq 0}}^{h-k} \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V) = \alpha$$

$$\text{et } \sum_{m=1-k}^{-1} \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V) = \alpha - t_H^+(V).$$

(ii) D'autre part, nous avons :

$$\prod_{\substack{m=1-k \\ m \neq 0}}^{h-k} \left| \frac{1}{m} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} = \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p$$

$$\text{et } \prod_{m=1-k}^{-1} \left| \frac{1}{m} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} = \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1}.$$

*Démonstration de (i).*

Par définition  $h_i(V) = \dim_K \text{Fil}^i \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) - \dim_{K_n} \text{Fil}^{i+1} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . Il en ressort

$$(2.4.8) \quad \begin{aligned} t_H(V) &= \sum_{l \geq -k} l \dim_K (\text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) / \text{Fil}^{l+1} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)) \\ &= -k \dim_K \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) + \sum_{m=1-k}^{h-k} \dim_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) \end{aligned}$$

et donc la première assertion du lemme. Un travail similaire montre que :

$$t_H^+(V) = \sum_{m=1}^{h-k} \dim_K \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}(V).$$

En mettant bout à bout la dernière égalité et (2.4.8), nous trouvons la seconde égalité de (i).  $\square$

*Démonstration de (ii).*

De la même manière que dans la démonstration du premier point, en considérant à nouveau la définition de  $h_i(V)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma_n^*(V) &= \prod_{m=-k}^{-1} \Gamma_n^*(-m)^{[K_n:\mathbb{Q}_p]h_i(V)} \prod_{m=1}^{h-k} \Gamma_n^*(-m)^{[K_n:\mathbb{Q}_p]h_i(V)} \\ &= \pm (k-1)!^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} \prod_{\substack{m=1-k \\ m \neq 0}}^{h-k} \frac{1}{m^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}} \end{aligned}$$

puisque  $\text{Fil}^{-k} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) = \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  et  $\text{Fil}^{h-k+1} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) = 0$  et ainsi la première assertion du second point est prouvée. Pour démontrer la seconde égalité, il suffit de procéder de la même manière afin de trouver

$$\Gamma_n^+(V) = \pm \prod_{m=1}^{h-k} \frac{1}{m^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}}. \quad \square$$

Pour prouver l'encadrement de la proposition 2.4.7 dans le cas général, c'est-à-dire quand  $h \geq k$ , nous devons auparavant modifier l'énoncé, reformuler la proposition.

### Modification de l'énoncé

Supposons désormais que  $h \geq k$ . Le corollaire 1.4.7 dit que  $\mathbb{N}_{h-k}(T) = \mathbb{D}(T)^{\psi=1}$  avec toujours  $\mathbb{N}_l(T) = (\varphi^n(\pi)^{-l}(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  pour tout  $l$  entier.

#### Lemme 2.4.9

Nous avons :

$$\sharp T_n = \frac{\sharp (\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n}}{\left( \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} \right)} \sharp \operatorname{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}.$$

Notons que cette égalité a bien un sens : les groupes  $(\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n}$  et  $\operatorname{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}$  sont finis (nous justifions cela dans la démonstration qui suit).

*Démonstration.*

La suite qui vient est naturellement exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T) \longrightarrow \mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T) \longrightarrow \mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \longrightarrow 0.$$

Comme  $(\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} = 0$ , celle-ci donne lieu, par le lemme du serpent, à la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} & \longrightarrow & (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))^{\Gamma_n} & \longrightarrow & (\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n} \\ & & & & & & \swarrow \\ & & (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n} & \longrightarrow & (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

En utilisant le théorème 2.4.1 et son corollaire 2.4.6, nous obtenons d'une part que  $(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_*(T))^{\Gamma_n} = (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_*(T))^{\Gamma_n}$  est libre lorsque  $* = -1$  ou  $-k$  — et même que  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))^{\Gamma_n} = \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$ . Nous trouvons d'autre part que  $(\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n}$  est fini. Le lemme est alors évident.  $\square$

Cette proposition indique la marche à suivre pour connaître  $\sharp T_n$  : nous pourrions calculer exactement  $\sharp (\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n}$  (cf. lemme 2.4.10) ; il faudra ensuite fournir un encadrement des deux autres éléments apparaissant dans le lemme précédent i.e.  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n})$  et  $\sharp \operatorname{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}$ . C'est l'objet du paragraphe suivant.

### Démonstration de l'encadrement lorsque $h \geq k$

Dans un premier temps, nous étudions séparément chacun des trois objets mis en avant par le lemme 2.4.9 ; nous terminons la démonstration de la proposition 2.4.7 ensuite.

**Lemmes préliminaires.**

**Lemme 2.4.10**

*Nous avons :*

$$\# (\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))_{\Gamma_n} = p^{[K_n:\mathbb{Q}_p](n\alpha - nt_H^+(V))} \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} \times |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

*Démonstration.*

Ce lemme se prouve en tout point comme la proposition 2.4.7 avec  $h < k$  ou  $h = 1 = k$  (cf. paragraphe 2.4.2) : il suffit de remarquer que  $\mathbb{N}_{-1}(V)/\mathbb{N}_{-k}(V)$  n'a pas d'invariants non triviaux (cf. corollaire 2.4.6) et d'appliquer le lemme de Herbrand puis d'utiliser le lemme 2.4.8.  $\square$

**Lemme 2.4.11**

*Nous avons :*

$$1 \leq \left( \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} \right) \leq p^{n(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)}.$$

Cet encadrement correspond aux deux cas extrêmes possibles : lorsque les éléments de  $\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$  proviennent en fait de  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n}$  (dans ce cas, l'indice est évidemment égal à 1). C'est ce qui arrive lorsque  $k = 1$  par exemple.

L'autre cas extrême est lorsqu'il est nécessaire de multiplier par une grande puissance de  $p$  les éléments de  $\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$  pour qu'ils proviennent en fait de  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n}$ . Nous montrons dans la preuve qui suit que cette puissance peut être majorée. Cela donnera la borne supérieure du lemme.

Je n'arrive pour l'instant pas à déterminer si le second de ces deux cas extrêmes arrive parfois ou non.

La démonstration de ce lemme se fait en trois temps. Soit  $(e_i)_i \subset \mathbb{N}_0(T)$  le relèvement d'une base de  $\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$ . Une nouvelle fois grâce au corollaire 2.4.6, nous savons que  $(\gamma_n - \mathbb{1})(e_i)$  appartient à  $\mathbb{N}_{-1}(T)$ .

(i) et (ii) Nous commençons par étudier précisément deux cas. Le premier de ces cas est celui où les  $(\gamma_n - \mathbb{1})(e_i)$  appartiennent plus précisément à  $\mathbb{N}_{-k}(T)$ .

Le second est le cas celui où, pour  $0 \geq l \geq 1 - k$ , le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbb{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{dR}(V)$ .

(iii) Dans un troisième temps, nous montrons que ces situations sont extrêmes et donnent bien l'encadrement voulu.

(i) *Premier cas.*

Supposons ici que les  $(\gamma_n - \mathbb{1})(e_i)$  appartiennent à  $\mathbb{N}_{-k}(T)$ . Il est alors évident que  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))^{\Gamma_n} = \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T)$  et que

$$\left( \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} \right) = 1.$$

Dans ce cas, la minoration du lemme est donc atteinte.  $\square$

(ii) *Second cas.*

Supposons ici que pour tout  $0 \geq l \geq 1 - k$ , le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbb{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . Pour alléger les notations, posons  $a_l = 1 - \chi(\gamma_n)^l$ .

Posons  $x_i^1 = (\gamma_n - \mathbb{1})(e_i)$ . Par hypothèse,  $x_i^1$  appartient à  $\mathbb{N}_{-1}(T)$  mais pas ni à  $p\mathbb{N}_{-1}(T)$  ni à  $\mathbb{N}_{-2}(T)$  et

$$a_1 e_i + x_i^1 \in (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-2}(T))^{\Gamma_n}.$$

Comme  $(\chi(\gamma_n)^{-1} \gamma_n - \mathbb{1})\mathbb{N}_{-1}(T)$  est un sous-module saturé de  $\mathbb{N}_{-2}(T)/\mathbb{N}_{-3}(T)$  de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^{-1} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  et comme  $x_i^1$  n'est pas divisible par  $p$  dans  $\mathbb{N}_{-1}(T)$ , nous trouvons que  $(\chi(\gamma_n)^{-1} \gamma_n - \mathbb{1})(x_i^1)$  et donc  $(\gamma_n - \mathbb{1})(a_1 e_i + x_i^1)$  n'est pas dans  $p\mathbb{N}_{-2}(T)$ .

En posant  $x_i^j = (\gamma_n - \mathbb{1})(a_1 \dots a_{j-1} e_i + a_2 \dots a_{j-1} x_i^1 + \dots + a_{j-1} x_i^{j-2} + x_i^{j-1})$ , nous trouvons de proche en proche que

$$a_1 \dots a_j e_i + a_2 \dots a_j x_i^1 + \dots + a_j x_i^{j-1} + x_i^j \in (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-j-1}(T))^{\Gamma_n}$$

avec  $x_i^j$  non divisible par  $p$  dans  $\mathbb{N}_{-j}(T)$  (et  $a_i \in p\mathbb{Z}_p$  pour tout  $i$ ).

Il en découle que le plus petit  $p^a$  tel que  $p^a e_i \in \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$  provient d'un élément de  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n}$  est  $p^a = a_1 \dots a_{k-1}$ . Il vient alors :

$$\left( (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))^{\Gamma_n} : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n} \right) = |a_1 \dots a_{k-1}|^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}.$$

Ainsi ici, la borne supérieure du lemme est atteinte puisque  $a_i \sim_p p^n | -i |_p^{-1}$  pour tout  $i$ .  $\square$

(iii) *Autres cas.*

Terminons la preuve du lemme 2.4.11 en supposant que le sous-module engendré par les  $(\gamma_n - \mathbb{1})(e_i)$  n'est pas saturé dans  $\mathbb{N}_{-1}(T)/\mathbb{N}_{-2}(T)$  ou n'est pas de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ .



En notant toujours  $a_i = 1 - \chi(\gamma_n)^i$ , il existe  $0 \leq \alpha < \nu_p(a_1)$  et  $x_i^1$  dans  $\mathbb{N}_{-1}(T) \setminus p\mathbb{N}_{-1}(T)$  ou  $x_i^1 = 0$  tel que

$$p^\alpha e_i + x_i^1 \in (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-2}(T))^{\Gamma_n} \text{ pour un certain } i.$$

Ainsi le plus  $p^\alpha$  tel que  $p^\alpha e_i \in \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$  provient de  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_n}$  ne peut être que de valuation inférieure à celle de  $p^\alpha a_2 \dots a_{k-1}$ . Et nous trouvons alors un cas intermédiaire.

Il en est de même si l'un des sous-modules  $(\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - 1)(\mathbb{N}_l(T))$  n'est pas saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ .

Cela signifie en particulier que les deux cas qui ont été traités précédemment sont bien deux cas extrêmes. □

**Lemme 2.4.12**

*Nous avons :*

$$p^n [K_n: \mathbb{Q}_p] t_H^+(V) |\Gamma_n^+(V)|_p \geq \sharp \text{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} \geq 1.$$

Pour prouver ce lemme, nous passons par plusieurs étapes intermédiaires : nous reformulons d'abord ce qu'il faut démontrer ; nous terminerons ensuite la démonstration.

*Première étape de la démonstration : reformulation du problème.*

La suite qui vient est naturellement exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \longrightarrow \mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \longrightarrow \mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T) \longrightarrow 0.$$

Comme  $(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))^{\Gamma_n} = 0$  et  $(\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} = \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$ , le lemme du serpent donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \longrightarrow (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} \longrightarrow (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))_{\Gamma_n} \longrightarrow 0.$$

Or  $(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))_{\Gamma_n}$  est fini donc

$$\sharp \text{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} = \frac{\sharp (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))_{\Gamma_n}}{\left( \frac{(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}}{\text{tor}} : \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \right)}.$$

Il suffit donc d'une part de calculer  $\sharp (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))_{\Gamma_n}$  et d'encadrer l'indice du dénominateur. □

Le lemme 2.4.12 résulte alors naturellement des deux lemmes qui suivent.

**Lemme 2.4.13**

Nous avons :

$$\# (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_0(T))_{\Gamma_n} = p^n [K_n: \mathbb{Q}_p] t_H^+(V) |\Gamma_n^+(V)|_p.$$

*Démonstration.*

Pour montrer cela, nous procédons exactement comme pour prouver le lemme 2.4.10, c'est-à-dire en utilisant le corollaire 2.4.6, le lemme de Herbrand puis le lemme 2.4.8.  $\square$

**Lemme 2.4.14**

Nous avons :

$$1 \leq \left( \frac{(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}}{\text{tor}} : \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \right) \leq p^n [K_n: \mathbb{Q}_p] t_H^+(V) |\Gamma_n^+(V)|_p.$$

A l'instar du lemme 2.4.11, cet encadrement et donc celui du lemme 2.4.12 correspond aux deux cas extrêmes possibles.

La preuve de ce lemme suit la méthode du lemme 2.4.11 ; elle se fait elle-aussi en trois temps. Notons toutefois que le lemme est évident si  $h = k$ . Nous pouvons donc supposer  $h > k$ .

- (i) et (ii) Nous commençons par étudier précisément deux cas. Le premier de ces cas est celui où  $\gamma_n - \mathbb{1}$  agit diagonalement sur une certaine base de  $\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$ . Ici aussi, le second est le cas celui où le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbb{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  pour tout  $1 \leq l \leq h - k$ .
- (iii) Dans un troisième temps, nous montrons que ces situations sont extrêmes et donnent donc bien l'encadrement voulu.

(i) *Premier cas.*

Supposons ici que l'image de  $\mathbb{N}_j(T) \setminus \mathbb{N}_{j-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^j \gamma_n - \mathbb{1}$  appartient plus précisément à  $\mathbb{N}_{-1}(T)$  pour tout  $1 \leq j \leq h - k$ . Cela implique que  $\gamma_n - \mathbb{1}$  agit diagonalement sur une certaine base de  $\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$ .

Dans ce cas, nous avons

$$(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} / \text{tor}_p = \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T)$$

et la minoration du lemme est atteinte.

Notons finalement que ce cas survient par exemple lorsque  $h = 1 = k$ .  $\square$

(ii) *Second cas.*

Supposons que, pour tout  $1 \leq j \leq h - k$ , le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbb{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{j-1}(T)/\mathbb{N}_{j-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^j \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . Pour alléger les notations, posons une nouvelle fois  $a_i = \chi(\gamma_n)^i - 1$ .

Relevons une base de  $\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{h-k-1}(T)$  en  $(e_i^{h-k})_i \subset \mathbb{N}_{h-k}(T)$  et posons :

$$\epsilon_i^{h-k-1} = \chi(\gamma_n)^{k-h} (\chi(\gamma_n)^{h-k} \gamma_n - \mathbb{1}) (e_i^{h-k}).$$

Comme  $(\gamma_n - \mathbb{1})(e_i^{h-k}) = -a_{h-k} e_i^{h-k} + \epsilon_i^{h-k-1}$ , il vient :

$$a_{h-k} e_i^{h-k} \equiv \epsilon_i^{h-k-1} \text{ dans } (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}.$$

De plus l'image de la famille  $(\epsilon_i^{h-k-1})_i$  dans  $\mathbb{N}_{h-k-1}(T)/\mathbb{N}_{h-k-2}(T)$  est libre et peut être complétée en une base de ce module (puisque, par hypothèse, il y a saturation). Les éléments qui complètent cette famille se relèvent en  $(e_i^{h-k-1})_i$  dans  $\mathbb{N}_{h-k-1}(T)$ . Soit  $\mathcal{F}_{h-k-1} = (e_i^{h-k-1}, \epsilon_i^{h-k-1})_i$ .

De proche en proche, nous obtenons ainsi une famille  $\mathcal{F}_j = (e_i^j, \epsilon_i^j)_i$  de  $\mathbb{N}_j(T)$  telle que :

- a)  $(\epsilon_i^{j-1})_i$  est l'image de  $\mathcal{F}_j$  par  $\chi(\gamma_n)^{-j} (\chi(\gamma_n)^j \gamma_n - \mathbb{1})$  ;
- b) l'image de  $(e_i^j, \epsilon_i^j)_i$  dans  $\mathbb{N}_j(T)/\mathbb{N}_{j-1}(T)$  est une base de ce module.

Il vient en particulier  $a_j e_i^j \equiv \epsilon_i^{j-1}$  dans  $(\mathbb{N}_j(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}$ . Et par conséquent, de proche en proche :

$$a_1 a_2 \dots a_j e_i^j \equiv a_1 a_2 \dots a_{j-1} \epsilon_i^{j-1} \equiv \dots \equiv \epsilon_i^0 \text{ dans } (\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}.$$

Ainsi dans ce cas, nous avons :

$$\left( \frac{(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}}{\text{tor}} : \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) \right) = \prod_{m=1}^{h-k} (p^n |m|_p^{-1})^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}.$$

Le lemme 2.4.8 donne  $\prod_{m=1}^{h-k} (p^n |m|_p^{-1})^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} = p^{n[K_n: \mathbb{Q}_p] t_H^+(V)} | \Gamma_n^+(V) |_p$ . Cela permet de voir qu'ici la borne supérieure du lemme est atteinte.  $\square$

(iii) *Autres cas.*

Terminons la preuve en supposant que  $(\chi(\gamma_n)^{h-k} \gamma_n - \mathbb{1}) \mathbb{N}_{h-k}(T)$  n'est pas un sous-module saturé de  $\mathbb{N}_{h-k-1}(T)/\mathbb{N}_{h-k-2}(T)$  de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^{h-k} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . Alors il existe  $0 \leq a < \nu_p(a_{h-k})$  et  $x_i^1 \in \mathbb{N}_{h-k-1}(T) \setminus p \mathbb{N}_{h-k-1}(T)$  ou  $x_i^1 = 0$  tel que  $p^a e_i \equiv x_i^1$  dans  $(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n}$ .

Ainsi la borne supérieure proposée dans le lemme ne pourra pas être atteinte.

Il en est de même si l'un des sous-modules  $(\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbb{1}) \mathbb{N}_l(T)$  n'est pas saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ . En d'autres termes, les deux premiers cas sont bien extrémaux et le lemme est démontré.  $\square$

**Fin de la démonstration de la proposition 2.4.7 lorsque  $h \geq k$ .**

Nous voulons montrer que

$$\begin{aligned} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p](n\alpha - nt_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \leq \# T_n \leq p^{n[K_n:\mathbb{Q}_p]\alpha} \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p. \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

Cela se fait en mettant bout à bout les résultats des quatre précédents lemmes 2.4.9, 2.4.10, 2.4.11 et 2.4.12.  $\square$

**Corollaire**

De la majoration de  $T_n$  pour  $n \geq 1$  nous tirons un corollaire essentiel pour la suite. L'isomorphisme canonique  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}$  (voir prop. 1.3.6) permet de définir  $A_n$  comme l'image de  $((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  dans  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}$  via les homomorphismes

$$((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}.$$

Soit  $\Upsilon_n$  la torsion de  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}/A_n$ .

**Corollaire 2.4.15**

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h-k]$  avec  $k \geq 1$ ,  $h \geq 0$ . Supposons qu'elle n'a pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Soit  $n \geq 1$ .

(i) Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p](n\alpha - nt_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \leq \# \Upsilon_n \leq p^{[K_n:\mathbb{Q}_p]n\alpha} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p. \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Lorsque  $h < k$  ou si  $h = 1 = k$ , la majoration ci-dessus est une égalité.

*Démonstration.*

Il suffit de montrer que  $\# T_n$  peut être remplacé par  $\# \Upsilon_n$  dans la proposition 2.4.7.

Le lemme du serpent appliqué à la suite tautologiquement exacte

$$0 \rightarrow ((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)^{\psi=1} \rightarrow \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}} \rightarrow 0$$

donne la suite exacte

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}} \right)^{\Gamma_n} &\rightarrow (((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1})_{\Gamma_n} \\ &\rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} \rightarrow \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il vient en particulier que la torsion  $\Upsilon_n$  est isomorphe à celle de  $\left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1}}{((\varphi^n)^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))^{\psi=1}} \right)_{\Gamma_n}$  i.e. à  $T_n$ .  $\square$

*Remarque.* Notons que la remarque qui a été faite après la proposition 2.4.7 tient aussi pour ce corollaire.

### 2.4.3 Étude de la torsion de $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_K} / A_1^{\eta_0}$

Rappelons que  $\Delta_K$  désigne le groupe de Galois de l'extension  $K_1/K$ , que  $\gamma$  est un générateur de  $\Gamma_K$  et que  $\gamma_1$  est un générateur de  $\Gamma_1$ .

Soit  $X(\Delta_K)$  le groupe des caractères de  $\Delta_K$ ,  $\eta_0$  le caractère trivial de ce groupe et, pour tout  $i$  entier,  $\delta_i = 1/\#\Delta_K \sum_{\sigma \in \Delta_K} \chi^{-i}(\sigma)\sigma$ . Les  $\delta_i$  forment une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $\mathbb{Z}[\Delta_K]$  (car  $\Delta_K$  est d'ordre premier à  $p$ ).

Nous utilisons ici les notations et les résultats du paragraphe précédent appliqués avec  $n = 1$ .

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline dont le plus petit saut de filtration est  $-k$ . Dans ce paragraphe, nous étudions le cardinal de la  $p$ -torsion  $\Upsilon_0$  de  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_K} / A_1^{\eta_0}$  où  $A_1$  est toujours l'image de  $(\varphi^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1}$  dans  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_1}$  via les homomorphismes

$$(\varphi^*(\pi^k\mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_1}^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_1}.$$

#### Proposition 2.4.16

*Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k, h - k]$  avec  $k \geq 1$ ,  $h \geq 0$ . Supposons que cette représentation n'a pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .*

*Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .*

(i) Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} p^{[K:\mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \leq \#\Upsilon_0 \leq p^{[K:\mathbb{Q}_p]\alpha} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^K(V)} |\Gamma_n^*(V)|_p. \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Lorsque  $h < k$  ou si  $h = 1 = k$ , la majoration ci-dessus est une égalité.

Avant de prouver ce résultat, donnons un lemme préliminaire.

**Lemme 2.4.17**

Nous avons :

- (i)  $H^1(K_1, T)^{\eta_0} \simeq H^1(K, T)$ ,
- (ii)  $H_f^1(K_1, T)^{\eta_0} \simeq H_f^1(K, T)$ ,
- (iii)  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_1}^{\eta_0} \simeq H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_K}$ .

*Démonstration.*

Le premier point est évident puisque  $H^1(K_1, T)^{\eta_0} = \text{cor}_{K_1/K}(H^1(K_1, T))$  et puisque  $\text{cor}_{K_1/K} \circ \text{res}_{K_1/K} = p - 1$ . Le (ii) se traite de la même manière.

Il ne reste plus qu'à montrer (iii). D'après la suite exacte (1.3.2), le diagramme suivant est commutatif et ses lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & e_{\eta_0} (H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_1}) & \longrightarrow & e_{\eta_0} (H^1(K_1, T)) & \longrightarrow & e_{\eta_0} (H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_1}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ 0 & \longrightarrow & H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_K} & \longrightarrow & H^1(K, T) & \longrightarrow & H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_K} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Cela donne le troisième isomorphisme. □

Nous pouvons à présent prouver la proposition 2.4.16. La démonstration de cette proposition est découpée en deux étapes.

- 1) Reformulation du problème. Nous utiliserons ici les notations et les résultats intermédiaires de la démonstration de la proposition 2.4.7.
- 2) Fin de la démonstration. Pour cela, procéderons comme dans le cas où  $n \geq 1$ .

*Démonstration de la première étape : reformulation du problème.*

En vertu du lemme 2.4.17,  $\Upsilon_0$  n'est autre que la  $p$ -torsion de  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_1}^{\eta_0} / A_1^{\eta_0}$ . Pour voir cela, considérons la suite exacte courte :

$$0 \rightarrow (\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0} \rightarrow \mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0} \rightarrow \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0}}{(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0}} \rightarrow 0.$$

Associée au lemme du serpent, celle-ci donne lieu à la suite exacte longue suivante :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0}}{(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0}} \right)_{\Gamma_1} &\rightarrow ((\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1})_{\Gamma_1}^{\eta_0} \\ &\rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_1}^{\psi=1, \eta_0} \rightarrow \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0}}{(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0}} \right)_{\Gamma_1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il en découle :

$$\Upsilon_0 = \# \operatorname{tor}_p \left( \frac{\mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0}}{(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0}} \right)_{\Gamma_1}.$$

Ainsi nous devons étudier les co-invariants de  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1, \eta_0} / (\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))^{\psi=1, \eta_0}$  par  $\Gamma_1$ .  $\square$

Avant de terminer la preuve de la proposition 2.4.16, énonçons et démontrons une lemme intermédiaire.

**Lemme 2.4.18**

*Nous avons :*

$$(K_1 t^{-m} \otimes_K \operatorname{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))^{\eta_0} = \mathbb{Q}_p \delta_m(\zeta_p) t^{-m} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V).$$

*Démonstration.*

Nous savons que  $\mathbb{Q}_{p,1} = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{Q}_p \delta_i(\zeta_p)$ . Ainsi nous avons :

$$(K_1 t^{-m} \otimes_K \operatorname{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))^{\eta_0} = \left( \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{Q}_p \delta_i(\zeta_p) t^{-m} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \right)^{\eta_0}.$$

D'autre part,  $\eta_0(\delta_i(\zeta_p) t^{-m}) = (\delta_m \delta_i)(\zeta_p) t^{-m}$ , d'où  $\eta_0(\delta_i(\zeta_p) t^{-m}) = 0$  si et seulement si  $i = m$ . Le lemme est alors clair.  $\square$

*Fin de la démonstration de la proposition 2.4.16.*

Rappelons que pour tout  $l$  entier,  $\mathbb{N}_l(*) = (\varphi(\pi^{-l})\varphi^*\mathbb{N}(*))^{\psi=1}$  avec  $*$  =  $T$  ou  $V$ . Par le lemme 1.4.7, nous savons que  $\mathbb{D}(T)^{\psi=1} = \mathbb{N}_{h-k}(T)$ .

Le théorème 2.4.1 et le lemme 2.4.18 disent que  $\mathbb{N}_l(T)^{\eta_0} / \mathbb{N}_{-k}(T)^{\eta_0}$  est un réseau de  $\bigoplus_{m=1-k}^l \mathbb{Q}_p \delta_m(\zeta_p) t^{-m} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^m \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  pour tout  $1-k \leq l \leq h-k$ .

Cela permet de procéder exactement comme pour prouver la proposition 2.4.7. Voici les mêmes étapes à suivre :

- (i)  $\# \Upsilon_0 = \frac{\#(\mathbb{N}_{-1}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-k}(T)^{\eta_0})_{\Gamma_1}}{(\mathbb{N}_0(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-1}(T)^{\eta_0} : (\mathbb{N}_0(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-k}(T)^{\eta_0})_{\Gamma_1})} \# \operatorname{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-1}(T)^{\eta_0})_{\Gamma_1}$  ;
- (ii)  $\#(\mathbb{N}_{-1}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-k}(T)^{\eta_0})_{\Gamma_1} = p^{[K:\mathbb{Q}_p](\alpha-t_H^+(V))} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)} \times |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1}$
- où  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \operatorname{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)$  ;
- (iii)  $1 \leq \left( \mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-1}(T) : (\mathbb{N}_0(T)/\mathbb{N}_{-k}(T))^{\Gamma_1} \right) \leq p^{(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)} |(k-1)!|_p^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)}$  ;
- (iv)  $p^{[K:\mathbb{Q}_p]t_H^+(V)} |\Gamma_n^+(V)|_p \geq \# \operatorname{tor}_p(\mathbb{N}_{h-k}(T)/\mathbb{N}_{-1}(T))_{\Gamma_n} \geq 1$ .

Chacune de ces étapes se démontrent comme les lemmes 2.4.9 2.4.10, 2.4.11, 2.4.12. Nous ne refaisons pas une seconde fois ces démonstrations.

Notons tout de même que les majorations de même que les minorations proposées dans ces étapes intermédiaires correspondent aux cas extrêmes.

Un de ces cas survient lorsque l'action de  $\gamma_n$  sur  $\mathbb{N}_{h-k}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-1}(T)^{\eta_0}$  et sur  $\mathbb{N}_0(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{-k}(T)^{\eta_0}$  est particulièrement simple — est diagonale sur certaines bases de ces modules.

Pour que l'autre cas extrême se produise, il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées

- (i) le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbf{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{l-2}(T)^{\eta_0}$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  pour tout  $1 \leq l \leq 1-k$  ;
- (ii) cette fois, pour tout  $1 \leq j \leq h-k$ , le sous-module engendré par l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbf{1}$  est saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)^{\eta_0}/\mathbb{N}_{l-2}(T)^{\eta_0}$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \operatorname{Fil}^l \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$ .  $\square$



## Chapitre 3

# Encadrement des nombres de Tamagawa

*Résumé.*

*Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, les nombres de Tamagawa  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$  peuvent être définis et étudiés avec la théorie de Hodge  $p$ -adique. Dans un premier paragraphe, nous rappellerons cette définition et plusieurs calculs ou résultats obtenus avec cette méthode.*

*Dans un second temps, nous énoncerons les divers résultats de cette thèse. Ceux-ci consistent en plusieurs encadrements des nombres de Tamagawa de représentations  $p$ -adiques cristallines d'un corps  $K$  absolument non ramifié le long de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .*

*Le paragraphe qui suivra sera entièrement consacré aux démonstrations des principaux résultats de cette thèse. Nous verrons qu'il est possible d'écrire les nombres de Tamagawa comme produit de deux éléments; ainsi il suffira d'étudier séparément ces deux termes. C'est ce que nous ferons dans les paragraphes 3.2, 3.4.*

*Dans beaucoup de démonstrations nous serons contraints de traiter séparément le cas des nombres de Tamagawa  $\text{Tam}_{K_n,\omega}^0(T)$  lorsque  $n \geq 1$  puis lorsque  $n = 0$ .*

*Enfin, ce chapitre se termine avec des exemples : nous traitons le cas des représentations positives qui permet alors de retrouver un résultat de D. Benois et L. Berger conjecturé par B. Perrin-Riou. Nous retrouvons également que les résultats concernant le cas des nombres de Tamagawa des courbes elliptiques. Enfin, nous considérons le cas des représentations provenant de certaines formes modulaires.*

## 3.1 Sur les nombres de Tamagawa

### 3.1.1 Définitions et résultats déjà connus

Dans ce paragraphe uniquement, nous ne supposons plus que  $p$  est impair. Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension finie.

#### Nombres de Tamagawa de représentations $p$ -adiques.

Tensorisons la suite exacte fondamentale (2.1.1) par une représentation  $p$ -adique de de Rham  $V$  de  $G_K$  et prenons les invariants par l'action de  $G_K$ . Il vient alors la suite exacte exacte longue de cohomologie qui mène à la suite exacte suivante :

$$(3.1.1) \quad 0 \longrightarrow H^0(K, V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K) \xrightarrow{\exp_{K, V}} H_f^1(K, V) \longrightarrow 0$$

où, rappelons-le,  $t_V(K) = \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)/\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  désigne l'espace tangent de  $V$  sur  $K$  et où  $H_f^1(K, V)$  est la partie finie de  $H^1(K, V)$ . En d'autres termes,  $H_f^1(K, V)$  est le noyau de l'application  $H^1(K, V) \longrightarrow H^1(K, \mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur  $V$  et sur le corps de base  $K$ , nous écrivons  $\exp$  plutôt que  $\exp_{K, V}$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  laissé stable par  $G_K$ . Posons

$$L_f(V) = \det_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} H_f^1(K, V) \\ \text{et } L_f(T) = \det_{\mathbb{Z}_p} H^0(K, T) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p}^{-1} H_f^1(K, T).$$

Le  $\mathbb{Z}_p$ -module  $L_f(T)$  est un réseau de  $L_f(V)$ .

En passant aux déterminants, la suite exacte (3.1.1) donne l'isomorphisme canonique de  $\mathbb{Q}_p$ -espaces vectoriels  $\iota_{K, V}$  suivant :

$$\iota_{K, V} : L_f(V) \longrightarrow \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} t_V(K) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} t_V(K)$$

où l'homomorphisme  $\det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \longrightarrow \mathbb{Q}_p$  est celui qui envoie  $(\bigwedge e_i)^{-1} \wedge (\bigwedge e_i)$  sur 1 pour toute base  $(e_i)_i$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Plus tard, nous serons amenés à considérer les isomorphismes  $\iota_{K_n, V}$  pour une représentation  $V$  de de Rham de  $G_K$  fixée et en faisant varier  $n$ ; nous écrivons alors plus simplement  $\iota_n$  au lieu de  $\iota_{K_n, V}$ .

Soit  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$  et  $\omega^{-1}$  sa base duale. Le nombre de Tamagawa  $\text{Tam}_{K,\omega}(T)$  relatif à  $T$  et  $\omega$  est la comparaison des 2 structures entières  $L_f(T)$  et  $\mathbb{Z}_p\omega^{-1}$  avec l'isomorphisme de comparaison  $\iota_{K,V}$ . Plus formellement, nous avons la définition suivante.

**Définition 3.1.1**

Soit  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$ . Alors  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$  est l'unique puissance de  $p$  telle que

$$\iota_{K,V}(L_f(T)) = \mathbb{Z}_p \text{Tam}_{K,\omega}^0(T) \omega^{-1}.$$

Vient de plus la proposition suivante :

**Proposition 3.1.1 (multiplicativité des nombres de Tamagawa)**

Soit  $0 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 0$  une suite exacte de  $\mathbb{Z}_p$ -représentations de  $G_K$  telles que  $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  est cristalline. Soit  $\omega$  la base  $\omega' \otimes \omega''$  de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$  où  $\omega'$  (respectivement  $\omega''$ ) désigne une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V'}(K)$  (resp. de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V''}(K)$ ). Alors :

$$\text{Tam}_{K,\omega}^0(T) = \text{Tam}_{K,\omega'}^0(T') \text{Tam}_{K,\omega''}^0(T'').$$

*Démonstration.*

Cette proposition découle directement de la définition des nombres de Tamagawa et des propriétés du produit extérieur.  $\square$

Les principaux résultats de cette thèse décrivent ces nombres de Tamagawa locaux de représentations  $p$ -adiques.

Il est également possible de définir des nombres de Tamagawa pour des représentations  $l$ -adiques de  $G_K$  avec  $l \neq p$  (y compris lorsque  $l = \infty$ ) et pour des réseaux  $T$  de  $V$  stable par  $G_K$ . Celle-ci est légèrement différente de celle que nous venons de donner (voir par exemple [FPR94] ou [BNQD02]). Tout ces nombres de Tamagawa locaux donnent ensuite lieu aux nombres de Tamagawa globaux. Nous ne verrons cela que dans l'exemple qui suit.

**Premiers calculs de nombres de Tamagawa**

L'approche des nombres de Tamagawa de S. Bloch et K. Kato a permis certains calculs de nombres de Tamagawa. Nous en donnons plusieurs exemples dans la fin de ce paragraphe.

**Les nombres de Tamagawa de  $\mathbb{Z}(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .** Les premiers calculs de nombres de Tamagawa utilisant la théorie de Hodge  $p$ -adique ont été faits par S. Bloch et K. Kato dans [BK90]. Dans cet article, ils se sont intéressés aux nombres de Tamagawa globaux  $\text{Tam}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}(m))$  pour  $m \geq 2$  entier (voir le théorème 6.1 *op. cit.*). Cela leur a permis de prouver le lien entre la fonction zéta de Riemann et les nombres de Tamagawa globaux.

Ce résultat a ensuite été généralisé à toute extension abélienne  $F/\mathbb{Q}$  par D. Benois et T. Nguyen Quang Do dans [BNQD02], A. Huber et G. Kings dans [HK03] et par D. Burns et M. Flach [BF06].

Les nombres de Tamagawa globaux sont les produits des nombres de Tamagawa locaux  $\text{Tam}_{F_\nu}^0(\mathbb{Z}(m))$  où le produit est pris sur toutes les places  $\nu$  finies ou non de  $F$ .

Le nombre de Tamagawa local pour une place finie  $\nu$  est quant à lui défini comme suit :

$$\text{Tam}_{F_\nu}^0(\mathbb{Z}(m)) = \prod_{l \text{ premier}} \text{Tam}_{F_\nu}^0(\mathbb{Z}_l(m))$$

où  $\text{Tam}_{F_\nu}^0(\mathbb{Z}_l(m)) = \text{Tam}_{F_\nu, \omega_m}^0(\mathbb{Z}_l(m))$  si  $\nu$  est au-dessus de  $l$  et où  $\omega_m$  est une base de  $\det_{\mathbb{Q}_l} \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_l} e_{-m}$ . Lorsque  $\nu$  n'est au-dessus de  $l$ , la définition de  $\text{Tam}_{F_\nu}^0(\mathbb{Z}_l(m))$  est légèrement différente (voir par exemple [FPR94] ou [BNQD02]).

### **Théorème 3.1.2**

Soit  $p \geq 3$  et  $K$  abélien sur  $\mathbb{Q}_p$ . Nous avons  $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m)) = \text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(m))$  et :

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(m)) = \begin{cases} \# H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)) |(m-1)!|_p^{[K:\mathbb{Q}_p]} |d_K|_p^{m-1} & \text{si } m \geq 2, \\ 1 & \text{si } m = 0 \text{ ou } 1, \\ \# H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $d_K$  désigne le discriminant de  $K$ .

*Démonstration.*

Voir le lemme 1.3.2 et le théorème 2.1 de [BNQD02]. □

Les nombres de Tamagawa globaux et donc locaux sont à rapprocher des valeurs spéciales des fonctions  $L$ . En effet, S. Bloch et K. Kato ont conjecturé un lien entre les nombres de Tamagawa d'un motif  $M$  et la fonction  $L$  associée à  $M$  (cf. [BK90], [Fon92] ou [FPR94]); ainsi la compatibilité de l'équation fonctionnelle de cette fonction  $L$  est liée à certaines propriétés des nombres de Tamagawa.

Le théorème précédent a permis de prouver cette conjecture de Bloch et Kato pour  $\mathbb{Q}(m)$  et pour les corps abéliens (voir [BK90], [BNQD02]).

Revenons aux nombres de Tamagawa locaux de représentations  $p$ -adiques de  $G_K$ . La multiplicativité des nombres de Tamagawa ainsi que le théorème précédent permettent d'obtenir les nombres de Tamagawa des représentations  $p$ -adiques cristallines ordinaires de  $G_K$  dont les quotients successifs sont de la forme  $\mathbb{Q}_p(m)$ .

Notons enfin que ce théorème 3.1.2 permettra de faire des hypothèses supplémentaires essentielles lorsque nous parlerons des principaux résultats de cette thèse. En effet, nous pourrons travailler avec des représentations absolument cristallines n'admettant de sous-quotient de la forme  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Les nombres de Tamagawa et la théorie de Fontaine-Laffaille (voir [BK90], [FPR94] ou [Ber02b]).** Supposons à nouveau que  $p$  est impair et que  $K/\mathbb{Q}_p$  est non ramifiée. Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique cristalline de  $G_K$  telle que  $1 - \varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  est bijective.

Supposons de plus que les poids de Hodge-Tate de  $V$  sont contenus dans un intervalle de longueur  $p - 2$  de  $[-(p - 2), p - 1]$ .

S. Bloch et K. Kato ont proposé un calcul explicite de nombres de Tamagawa des représentations de cette forme (cf. [BK90, théorème 4.1, (iii)] ou [FPR94, proposition I.4.2.3]).

**Proposition 3.1.3**

*Soit  $V$  une représentation comme ci-dessus,  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$  et  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  le réseau fortement divisible de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  qui lui est associé par la théorie de Fontaine-Laffaille. Soit enfin  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Z}_p} M$ . Alors*

$$\text{Tam}_{K,\omega}^0(T) = 1.$$

Bien qu'ils fournissent un encadrement de  $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$ , les résultats que nous proposons ne permettent en général malheureusement pas de retrouver cette égalité. Nous verrons cela dans le paragraphe 3.1.2.

**Les nombres de Tamagawa et la conjecture  $C_{EP}$ .** Dans les années 1990, J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou ont conjecturé un lien entre les nombres de Tamagawa d'une  $\mathbb{Z}_p$ -représentation  $T$  et ceux de  $T^*(1)$  lorsque  $V = T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$  est de de Rham (voir [FPR94], [PR94], [PR95], [BB08]). C'est la conjecture  $C_{EP}$ . Cela entraîne en particulier la compatibilité de la conjecture de Bloch et Kato avec l'équation fonctionnelle.

Dans le cas absolument cristallin, D. Benois et L. Berger ont démontré dans [BB08] la conjecture  $C_{EP}$  (notons qu'ils ont en fait démontré une conjecture plus forte de K. Kato).

Avant de parler de ce résultat de D. Benois et L. Berger, rappelons quelques notations. Supposons à nouveau que  $p$  est impair. Pour toute extension  $L/\mathbb{Q}_p$  galoisienne finie, notons  $d_L$  le discriminant de cette extension.

Rappelons que nous avons défini  $\Gamma^*(i)$  et  $\Gamma_n^*(V)$  comme suit. Nous avons

$$\Gamma^*(i) = \begin{cases} (i-1)! & \text{si } i > 0 \\ \frac{(-1)^i}{(-i)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\Gamma_n^*(V) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n:\mathbb{Q}_p]}$ .

Rappelons aussi que si  $L/K$  est une extension finie et que si  $M$  (resp.  $T$ ) est un  $\mathbb{Z}_p$ -réseau de  $\mathbb{D}_{dR}(V)$  (resp. un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ ), alors  $\alpha_{V,L}(M, T)$  a été défini comme étant l'image par  $\alpha_{V,L}$  de  $\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \det_{\mathbb{Z}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} T$  où

$$\alpha_{V,L} : \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \mathbb{D}_{dR}(V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det_{\mathbb{Q}_p} \text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V \rightarrow \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$$

est l'homomorphisme lié au morphisme de comparaison  $\text{comp}_{\text{Ind}_{L/\mathbb{Q}_p} V, \mathbb{Q}_p}$  (voir paragraphe 1.2.2).

### **Théorème 3.1.4** ( $C_{EP}(K, V)$ )

Soit  $n \geq 0$ . Soit  $V$  une représentation absolument cristalline de  $G_K$  et  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Soit  $\omega \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$  non nul tel que  $\omega \simeq \omega_2^{-1} \otimes \omega_1$  où  $\omega_1$  (respectivement  $\omega_2$ ) est un élément de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)$  (resp. de  $\det_{\mathbb{Q}_p} t_{V^*(1)}(K_n)$ ). Nous avons :

$$\frac{\text{Tam}_{K_n, \omega_1}^0(T)}{\text{Tam}_{K_n, \omega_2}^0(T^*(1))} = |d_{K_n}|_p^{\dim V/2} |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(\omega, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p$$

où  $\epsilon(K_n, V)$  est la constante locale de Weil-Deligne (voir [Del73] ou le paragraphe 2.3 de [BB08]).

### **Corollaire 3.1.5**

Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension non ramifiée finie et  $n \geq 0$ . Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  à poids de Hodge-Tate strictement positifs (i.e. telle que  $\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V) = 0$ ). Supposons que  $V^*(1)^{G_K} = 0$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .

Soit  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega}^0(T) &= \#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} \mid \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \\ &\quad \times |d_{K_n}|_p^{\dim V/2} |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(\omega, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p \end{aligned}$$

où  $\#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$  est le cardinal de l'ensemble fini  $H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$ .

*Démonstration.*

Cela résulte immédiatement du théorème  $C_{EP}(K, V)$  et du rapide calcul qui suit. En considérant les dimensions des espaces vectoriels de la suite exacte (3.1.1) avec  $V^*(1)$  à la place de  $V$ , il vient  $H^0(K_n, V^*(1)) = 0$ , de  $H_f^1(K_n, V^*(1)) = 0$  et  $t_{V^*(1)}(K_n) = 0$ .

Il vient ainsi :

$$\text{Tam}_{K_n, 1}^0(T^*(1)) = \#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) \left| \det(\varphi - \mathbf{1} \mid \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))) \right|_p.$$

Le théorème précédent donne alors :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega}^0(T) &= \#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) \left| \det(\varphi - \mathbf{1} \mid \mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))) \right|_p \\ &\quad \times |d_{K_n}|_p^{\dim V/2} |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(\omega, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p. \end{aligned}$$

Si  $e_{-1}$  désigne une base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1))$ , alors  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1)) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)^* \otimes e_{-1}$ , et finalement il vient la conclusion voulue.  $\square$

Ce corollaire peut se reformuler comme suit.

### Corollaire 3.1.6

Gardons les mêmes hypothèses. Soit en outre  $M_n$  est le réseau de  $\mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$  défini par  $M_n = \mathbb{Z}_p[G_n] \cdot x_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  où  $x_n = \zeta_p + \cdots + \zeta_p^n$ . Soit  $\omega_n$  une base de  $\det_{\mathbb{Z}_p} M_n$ , alors :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) &= \#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} \mid \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \\ &\quad \times |\Gamma_n^*(V)|_p |d_{K_n}|_p^{-t_H(V)} p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V + n[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V}. \end{aligned}$$

Pour obtenir cette égalité, il suffit d'appliquer le corollaire 3.1.5 et d'expliciter les constantes qui apparaissent alors. Ce corollaire découle donc du lemme suivant.

### Lemme 3.1.7

Soit  $n \geq 1$ . Alors :

1.  $|d_{K_n}|_p = p^{-n[K:\mathbb{Q}_p]p^n + (n+1)[K:\mathbb{Q}_p]p^{n-1}} = p^{-n[K_n:\mathbb{Q}_p] + [K:\mathbb{Q}_p]p^{n-1}};$

2.  $|\epsilon(K_n, V)|_p = |d_{K_n}|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V + t_H(V)}$  ;
3.  $|\alpha_{V, K_n}(M_n, T)|_p = p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V + n[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V} |d_{K_n}|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V/2}$ .

*Démonstration.*

La première égalité vient après un rapide calcul (ou avec le lemme 5 de [CF86]). La deuxième résulte des propriétés des constantes locales. Renvoyons sur ce point au paragraphe 2.3 de [BB08].

Justifions la dernière égalité. La fin de la démonstration de la proposition 2.17 de [BB08] donne grâce à un calcul caractère par caractère l'égalité suivante :

$$|\alpha_{V, K_n}(M_n, T)|_p = |\alpha_{V, K}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(T), T)|_p^{[K_n:K]} \times p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V + n[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V} |d_{K_n}|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V/2}.$$

Pour conclure, il suffit dès lors d'appliquer la proposition V.1.2 de [Ber04] qui dit que  $|\alpha_{V, K}(\mathbb{D}_{\text{cris}}(T), T)|_p = 1$ .  $\square$

Notons que l'hypothèse  $V^*(1)^{G_K} = 0$  n'est pas contraignante. En effet, nous avons déjà vu que les nombres de Tamagawa de représentations cristallines étaient multiplicatifs et que  $\text{Tam}_{K_n, \omega}^0(\mathbb{Z}_p(1)) = 1$  lorsque  $\omega$  est une base de  $\det_{\mathbb{Q}_l} \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_l} e_{-1}$ .

### 3.1.2 Résultats principaux

Comme nous venons de le voir à travers plusieurs exemples, nous savons entièrement calculer les nombres de Tamagawa de certaines représentations cristallines. Il existe en revanche d'autres cas dans lesquels nous n'avons pas de formules. Les résultats principaux de cette thèse consistent en un encadrement des nombres de Tamagawa de représentations absolument cristallines le long de la tour cyclotomique  $K_\infty/K$ .

#### Énoncés

Revenons aux notations originelles et supposons  $p$  impair. L'extension  $K/\mathbb{Q}_p$  est désormais prise non ramifiée. Nous allons à présent pouvoir énoncer les principaux résultats de cette thèse. Fixons dans un premier temps plusieurs notations, elles resteront valables jusqu'à la fin de ce chapitre.

Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  qui n'est pas positive. Ses sauts de filtration sont donc contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ .

Comme  $V$  est une représentation cristalline de  $G_K$ , tout sous-quotient de  $V$  l'est aussi. Or nous savons déjà calculer les nombres de Tamagawa d'une représentation obtenue par torsion par une puissance du caractère cyclotomique de la



représentation triviale (voir le paragraphe précédent). Aussi, comme les nombres de Tamagawa sont multiplicatifs, nous pouvons légitimement nous restreindre au cas où  $V$  ne contient pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier.

Supposons que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Rappelons que  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$  est le réseau de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  défini dans le paragraphe 1.4 ; pour alléger les notations, posons  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ .

Soit  $R_n$  l'image de  $\mathcal{D}(T(-k))$  par  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon$  et  $v_n$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_n$ . Comme  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , le corollaire B.3.5 dit que l'homomorphisme  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(-k)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  est surjective.

Par ailleurs, comme  $\mathcal{D}(T(-k))$  est un réseau de  $\mathcal{D}(V(-k))$ , il vient que  $R_n$  est un réseau de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$ .

Notons qu'il revient au même de définir  $R_n$  comme l'image de  $p^{nk}(\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varphi^n(M)$  par  $\Xi_{V, n}^\varepsilon$  — cela permet de ne travailler qu'avec des objets liés à  $V$  et non plus à  $V(-k)$ .

La suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \longrightarrow 0$$

(où l'application  $f$  est définie par  $f(x) = ((\mathbb{1} - \varphi)x, x \pmod{\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)})$ ) donne lieu à un isomorphisme canonique :

$$j_{V, n} : \det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p .$$

La représentation  $V$  étant fixée, pour alléger les notations, nous écrirons simplement  $j_n$ .

Pour alléger les notations, définissons le sous-module  $H_{\text{Iw}+f}^1(K_n, T)$  de  $H^1(K_n, T)$  en posant  $H_{\text{Iw}+f}^1(K_n, T) = H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n} + H_f^1(K_n, T)$ .

Rappelons que  $t_H(V) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i h_i(V)$  et que  $\Gamma_n^*(V) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n : \mathbb{Q}_p]}$  où les  $h_i(V)$  sont les sauts de filtration de  $V$ . Définissons maintenant

$$\Gamma_n^+(V) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^*(-i)^{h_i(V)[K_n : \mathbb{Q}_p]} \text{ et } t_H^+(V) = \sum_{i \in \mathbb{N}} i h_i(V).$$

Le théorème principal de cette thèse est le suivant.

**Théorème 3.1.8 (majoration des nombres de Tamagawa)**

Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension non ramifiée finie. Soit  $V$  une représentation cristalline dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h-k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ .

Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier. Supposons également que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit un réseau  $T$  de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ . Soit  $n \geq 0$ ; prenons un réseau  $M_n$  de l'espace tangent  $t_V(K_n)$  et un générateur  $\omega_n$  de  $\det_{\mathbb{Z}_p} M_n$ .

(i) Lorsque  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) &\leq \frac{\# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p]n\alpha} |\Gamma_n^*(V)|_p \\ &\quad \times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Lorsque  $n = 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K, \omega_0}^0(T) &\leq \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} |\Gamma_0^*(V)|_p p^{[K:\mathbb{Q}_p]\alpha} \\ &\quad \times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)} j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}). \end{aligned}$$

(iii) Lorsque  $h < k$ , les deux inégalités ci-dessus se transforment en des égalités.

*Remarques.*

1) Notons qu'il est facile d'encadrer  $\frac{\# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))}$ . Nous avons en effet :

$$(3.1.2) \quad 1 \leq \frac{\# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} \leq \# H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) ;$$

expliquons cela. L'inclusion suffit  $H_{Iw+f}^1(K_n, T) \subset H^1(K_n, T)$  pour justifier la majoration du quotient ci-dessus.

Rappelons que la proposition 1.3.2 dit que  $H^1(K_n, T)/H_{Iw}^1(K, T)_{\Gamma_n}$  et  $H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}$  sont isomorphes et que  $H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}$  et  $H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$  ont même cardinaux pour tout entier  $n$ .

Par ailleurs, nous avons  $H_{Iw}^1(K, T)_{\Gamma_n} \subset H_{Iw+f}^1(K_n, T) \subset H^1(K_n, T)$ ; aussi la précédente minoration est claire.

Pour conclure cette première remarque, notons que l'encadrement (3.1.2) permet de faire le lien avec le théorème 0.3.1 légèrement plus faible énoncé dans l'introduction.

2) La démonstration de ce théorème permet aussi d'obtenir une minoration de  $\text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T)$ . C'est le sujet du théorème qui suit.

**Théorème 3.1.9 (minoration des nombres de Tamagawa)**

*Gardons les mêmes hypothèses que le théorème précédent ainsi que ses notations.*

(i) Lorsque  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) &\geq \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ &\quad \times p^{n[K_n:\mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$ .

(ii) Si  $n = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K, \omega_0}^0(T) &\geq \frac{\sharp H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} |\Gamma_0^*(V)|_p |\Gamma_0^+(V)|_p^{-1} \\ &\quad \times p^{[K:\mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V))} j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}). \end{aligned}$$

3) Comme il l'est dit dans le troisième point du théorème 3.1.8, les majorations proposées sont atteintes dans certains cas et il est facile d'exhiber des exemples dans lesquels la constante  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  est entièrement calculable (cf. §3.4).

Je ne sais en revanche pas si les minoration peuvent également être atteintes. Pour qu'elles le soient, il suffit que l'image de  $\mathbb{N}_l(T) \setminus \mathbb{N}_{l-1}(T)$  par  $\chi(\gamma_n)^l \gamma_n - \mathbf{1}$  engendre un sous-module saturé dans  $\mathbb{N}_{l-1}(T)/\mathbb{N}_{l-2}(T)$  et de rang  $\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^l \mathbb{D}_{dR}(V)$  pour  $2 - k \leq l \leq h - k$  (cf. chapitre précédent, paragraphe 2.4.2).

La différence entre les majorations proposées et les minoration tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cependant, si  $h = 1 = k$ , il est possible de proposer des minoration beaucoup plus fines de sorte que nous obtenons des égalités. En effet, la preuve du théorème donne aussi le corollaire suivant.

**Corollaire 3.1.10**

*Gardons les mêmes notations que celles du théorème précédent. Supposons  $h = 1 = k$  et  $n \geq 0$ . Alors si  $n \geq 1$ ,*

$$\text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}).$$

Si maintenant  $n = 0$ , alors

$$\mathrm{Tam}_{K, \omega_0}^0(T) = \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{I_{w+f}}^1(K, T))} j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}).$$

### Première étape de la preuve des théorèmes principaux

Pour montrer les théorèmes principaux de cette thèse et le corollaire, nous procédons en trois temps.

- 1) Ré-écriture du nombre de Tamagawa  $\mathrm{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T)$  comme produit de deux éléments. C'est l'objet du lemme qui suit. Il nous permettra de ramener le problème à l'étude d'un indice généralisé.
- 2) Dans le paragraphe 3.2 qui suit nous étudions cet indice généralisé. Interviendra alors les résultats sur le cardinal de  $T_n$  obtenus dans le chapitre 2, §2.4.2-2.4.3.
- 3) Terminer la démonstration, voir §3.3.

#### Lemme 3.1.11

Nous avons :

$$\mathbb{Z}_p \mathrm{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = (H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \mathbb{Z}_p.$$

*Démonstration.*

Comme  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ , nous avons en particulier  $H^0(K, V) = 0$ . Ainsi, les lignes du diagramme commutatif suivant sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(K_n, V) & \longrightarrow & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^{K_n}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^{K_n}(V) \oplus t_V(K_n) & \xrightarrow{\exp_{K_n, V}} & H_f^1(K_n, V) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{cor}_{K_n/K} & & \downarrow \mathrm{cor}_{K_n/K} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \oplus t_V(K) & \xrightarrow{\exp_{K, V}} & H_f^1(K, V) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

où l'application  $f$  est définie par  $f(x) = ((1 - \varphi)x, x \bmod \mathrm{Fil}^0 \mathbb{D}_{\mathrm{dR}}(V))$ . Comme  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \subset \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}^{K_n}(V)$  sont deux  $K$ -espace vectoriel de même dimension, cette inclusion est en fait une égalité. La commutativité du diagramme implique alors  $H^0(K_n, V) = 0$ .

De cette manière, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V(K_n) & \longrightarrow & \frac{\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow \exp_{K_n, V} & & \uparrow \wr & & \\ & & & & & & H_f^1(K_n, V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notons la ligne horizontale de même que la ligne "cassée" sont exactes.

Ce diagramme a permis de définir le morphisme  $j_n$  avec l'exactitude de la ligne du diagramme (voir début de ce paragraphe). De même,  $\iota_n$  définie dans le paragraphe 3.1.1 provient de la ligne "cassée" du diagramme. Enfin, l'isomorphisme du diagramme donne le morphisme de comparaison suivant :

$$j'_n : \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} H_f^1(K_n, V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \det_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p.$$

La commutativité du diagramme ci-dessus permet enfin de lier les isomorphismes  $j_n$ ,  $j'_n$  et de  $\iota_n$ . Si  $v$  appartient à  $\det_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  et si  $\omega$  est un générateur de  $\det_{\mathbb{Q}_p} H_f^1(K_n, T)$ , alors il vient :

$$\iota_n(\omega^{-1}) = j'_n(\omega^{-1} \otimes v) \otimes j_n(\omega_n \otimes v^{-1}) \omega_n^{-1}.$$

Cela se formule en termes de nombres de Tamagawa comme suit :

$$\text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = j'_n(\omega^{-1} \otimes v) \otimes j_n(\omega_n \otimes v^{-1}).$$

Rappelons  $R_n$  est un réseau de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  et que  $v_n$  est un générateur  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_n$ . Il vient naturellement

$$\mathbb{Z}_p \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = (H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \mathbb{Z}_p. \quad \square$$

## 3.2 Majoration de $(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n))$

Gardons pour ce paragraphe les mêmes notations que celles utilisées pour énoncer les théorèmes finaux 3.1.8 et 3.1.9 et le corollaire. Le lemme précédent 3.1.11 ramène l'étude de  $\text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T)$  à celui de  $(H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n))$ . C'est la raison pour laquelle nous consacrons cette section à cet indice généralisé.

### 3.2.1 Premier cas : lorsque $n \geq 1$

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $n \geq 1$ . Rappelons quelques notations, hypothèses et quelques résultats que nous utiliserons dans ce paragraphe.

- Le réseau  $R_n$  de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  est l'image de  $\mathcal{D}(T(-k))$  par l'homomorphisme  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon$ .

- Dans le paragraphe 2.2, nous avons construit un homomorphisme  $\Omega_{T(-k),k,n}^\varepsilon$  défini sur  $\mathcal{D}(V(-k))$  et qui, sur cet espace, vérifie l'égalité

$$\Omega_{T(-k),k,n}^\varepsilon = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V} \circ \Xi_{V(-k),k,n}^\varepsilon.$$

- D'après le théorème 2.3.1, le morphisme  $\Omega_{T(-k),k,n}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$\mathcal{D}(T(-k))(k)_{\Gamma_n} \simeq ((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}.$$

- Si  $A_n$  est le sous-module image de  $((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  dans  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}$ , alors le théorème 2.4.7 et son corollaire 2.4.15 donnent un encadrement du cardinal de la torsion  $\Upsilon_n$  de  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}/A_n$ .

### Théorème 3.2.1

Soit  $V$  une représentation cristalline non positive de  $G_K$  dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h-k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ . Supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier et également que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ ,

(i) nous avons :

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n)) &\leq \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p]n\alpha} \\ &\quad \times |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)} \end{aligned}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$  ;

(ii) lorsque  $h < k$ , alors cette majoration est une égalité et

$$(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T)) = 1 ;$$

(iii) lorsque  $h = 1 = k$ , nous avons l'égalité

$$(H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n)) = \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} ;$$

(iv) quelque soit  $k \geq 1$  et  $h \geq 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V} R_n) &\geq \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ &\quad \times p^{[K_n:\mathbb{Q}_p](n\alpha - n t_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V))}. \end{aligned}$$

L'isomorphisme canonique  $\mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}$  (voir prop. 1.3.6) permet de définir le sous-module  $A_n$  image de  $((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1}$  dans  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}$  par les homomorphismes  $((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} \simeq H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}$ .

Rappelons que  $\Upsilon_n$  est la  $p$ -torsion de  $H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n}/A_n$ .

**Lemme 3.2.2**

*Le quotient  $H_f^1(K_n, T)/A_n$  est fini.*

*Démonstration.*

Le module  $H_f^1(K_n, T)$  étant de type fini, il suffit de montrer que  $H_f^1(K_n, T)$  est la saturation de  $A_n$  dans  $H^1(K_n, T)$ .

Le diagramme suivant étant commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & A_n \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n} \hookrightarrow H^1(K_n, T) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 ((\varphi^n)^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_n}^{\psi=1} & \longrightarrow & \mathbb{D}(T)_{\Gamma_n}^{\psi=1} & \xrightarrow{\sim} & H_{\text{Iw}}^1(T)_{\Gamma_n} & \hookrightarrow & H^1(K_n, T) \\
 \uparrow & & & & & & \uparrow \\
 \mathcal{D}(T(-k))(k) & \xrightarrow[\otimes_{\varepsilon^{\otimes -k}}]{\sim} & \mathcal{D}(T(-k)) & \xrightarrow{\Omega_{T(-k), k, n}^{\varepsilon}} & H_f^1(K_n, V) & \xrightarrow{\exp_{K_n, V}} & H^1(K_n, T) \\
 & & \downarrow \Xi_{V(-k), k, n}^{\varepsilon} & & \uparrow \wr & & \\
 & & R_n \hookrightarrow & \xrightarrow{\text{réseau}} & \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} & & 
 \end{array}$$

(la flèche verticale de gauche est celle induite par  $\Omega_{T(-k), k, n}^{\varepsilon}$ , c'est-à-dire l'homomorphisme qui donne l'application du théorème 2.3.1).

Comme le précédent diagramme est commutatif, comme l'exponentielle de Bloch et Kato est surjective dans  $H_f^1(K_n, V)$  et comme  $R_n$  est un réseau de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$ , il vient non seulement l'inclusion  $A_n \subset H_f^1(K_n, T)$  mais aussi l'égalité :

$$A_n \otimes \mathbb{Q}_p = H_f^1(K_n, V).$$

Nous en déduisons que  $H_f^1(K_n, T)$  est la saturation de  $A_n$  dans  $H^1(K_n, T)$  et donc que  $H_f^1(K_n, T)/A_n$  est fini.  $\square$

**Lemme 3.2.3**

*Nous avons :*

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V} R_n) &= \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} \\ &\quad \times |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} \sharp \Upsilon_n. \end{aligned}$$

*Remarque.* Il découle de ce lemme que la qualité des encadrements donnés dans les théorèmes 3.1.8 et 3.1.9 est intimement lié à celle du cardinal de  $\Upsilon_n$ . Nous renvoyons alors à la page 75 pour quelques remarques sur l'encadrement de  $\sharp \Upsilon_n$ .

*Démonstration du lemme.*

Comme  $V(-k)$  est une représentation  $p$ -adique cristalline positive de  $G_K$ , le théorème 2.2.2 et la définition de  $R_n$  impliquent

$$(-1)^k (k-1)! \exp(R_n) = \Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T(-k))(k)) = \Omega_{T(-k), k, n}^\varepsilon(\mathcal{D}(T(-k))(k)_{\Gamma_n}).$$

Il découle du théorème 2.3.1

$$(H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) = |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} (H_f^1(K_n, T) : A_n).$$

Nous savons déjà que le quotient  $H_f^1(K_n, T)/A_n$  est fini (voir le lemme précédent) et que  $H_f^1(K_n, T)$  admet un supplémentaire dans  $H^1(K_n, T)$ .

D'après la proposition 1.3.2 le quotient  $H^1(K_n, T)/H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}$  est fini et isomorphe à  $H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}$ . Nous en déduisons que les  $\mathbb{Z}_p$ -modules  $H^1(K_n, T)$  et  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}$  ont même rang. Il vient aussi  $\sharp \Upsilon_n \sharp H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}$  est égal au produit de l'indice généralisé  $(H_f^1(K_n, T) : \exp(A_n))$  par l'indice

$$\left( \frac{H^1(K_n, T)}{H_f^1(K_n, T)} : \frac{H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}}{H_f^1(K_n, T) \cap H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n}} \right)$$

ou, en d'autres termes, par l'indice  $(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))$  en posant toujours  $H_{Iw+f}^1(K_n, T) = H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_n} + H_f^1(K_n, T)$ . Nous avons donc

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) &= \frac{\sharp H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}}{(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T))} \\ &\quad \times |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n)} \sharp \Upsilon_n. \end{aligned}$$

La proposition 1.3.2 permet de remplacer  $\sharp H_{Iw}^2(T)^{\Gamma_n}$  par  $\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))$  et donc de terminer la démonstration du lemme.  $\square$



Nous pouvons à présent démontrer le théorème 3.2.1.

*Démonstration du théorème.*

Le précédent lemme dit que pour encadrer l'indice généralisé qui nous intéresse et donc pour démontrer le théorème 3.2.1, il suffit d'encadrer le cardinal de  $\Upsilon_n$ .

Le premier et le dernier point de ce théorème découlent entièrement et directement du lemme précédent, du premier point de la proposition 2.4.7 et de son corollaire 2.4.15.

Il vient en particulier le second point puisque  $H^1(K_n, T) = H_f^1(K_n, T)$  si  $h < k$  — car  $V^{H_K} = 0$  — d'où

$$(H^1(K_n, T) : H_{Iw+f}^1(K_n, T)) = 1.$$

Le (iii) découle quant à lui du lemme 3.2.3, du (ii) de la proposition 2.4.7 et de son corollaire.  $\square$

### 3.2.2 Second cas : lorsque $n = 0$

Rappelons tout d'abord quelques notations et résultats dont nous nous servons dans ce paragraphe. Le caractère trivial de  $X(\Delta_K)$  est désigné par  $\eta_0$ .

Faisons quelques rappels.

- Pour tout  $n \geq 0$ , le réseau  $R_n$  de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  est l'image de  $\mathcal{D}(T(-k))$  par  $\Xi_{V(-k), k, n}^\varepsilon$ . Comme  $\Xi_{V(-k), k, 0}^\varepsilon = (p-1) \Xi_{V(-k), k, 1, \eta_0}^\varepsilon$ , il vient  $R_0 = e_{\eta_0}(R_1)$ .
- D'après le théorème 2.3.1, le morphisme  $\Omega_{T(-k), k, 1}^\varepsilon$  induit l'isomorphisme

$$\mathcal{D}(T(-k))(k)_{\Gamma_1} \simeq (\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1}.$$

- Le sous-module  $A_1$  est l'image de  $(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1}$  par les homomorphismes  $(\varphi^*(\pi^k \mathbb{N}(T)))_{\Gamma_1}^{\psi=1} \rightarrow \mathbb{D}(T)_{\Gamma_1}^{\psi=1} \simeq H_{Iw}^1(T)_{\Gamma_1}$ .
- Soit  $\Upsilon_0$  la  $p$ -torsion de  $H_{Iw}^1(T)_{\Gamma}/A_1^{\eta_0}$ . Le corollaire 2.4.16 fournit un encadrement de l'ordre de  $\Upsilon_0$  ainsi que des conditions — sur  $k$  et  $h$  — d'égalité.

#### Théorème 3.2.4

(i) Nous avons :

$$(H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) \leq \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p p^{[K:\mathbb{Q}_p]\alpha} \\ \times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)}$$

avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V)$  ;

(ii) lorsque  $h < k$ , la majoration précédente est une égalité et

$$(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T)) = 1 ;$$

(iii) lorsque  $h = 1 = k$ , nous avons

$$(H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) = \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} ;$$

(iv) quelque soit  $h \geq 0$  et  $k \geq 1$ , nous avons :

$$(H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) \geq \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ \times p^{[K:\mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}^K(V))}.$$

### Lemme 3.2.5

Nous avons :

$$(H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) = \frac{\# H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{Iw+f}^1(K, T))} |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)} \# \Upsilon_0.$$

*Démonstration du lemme.*

De  $R_0 = e_{\eta_0}(R_1)$  nous tirons

$$(-1)^k (k-1)! \exp_{K, V}(R_0) = (-1)^k (k-1)! \exp_{K, V}(e_{\eta_0}(R_1)) \\ = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_1, V, \eta_0}(R_1).$$

En utilisant la proposition 2.2.2, il vient

$$(-1)^k (k-1)! \exp_{K, V}(R_0) = \Omega_{T(-k), k, 1, \eta_0}^\varepsilon(\mathcal{D}(T(-k)(k))_{\Gamma_1})$$

et donc en vertu du théorème 2.3.1

$$(H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) = |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)} (H_f^1(K, T) : A_1^{\eta_0}).$$

Le quotient  $H_f^1(K_1, T)/A_1$  est fini donc il en est de même de  $H_f^1(K, T)/A_1^{\eta_0}$  (puisque d'après le lemme 2.4.17, les groupes  $H^1(K_1, T)^{\eta_0}$  et  $H^1(K, T)$  sont isomorphes). Notons aussi  $H_f^1(K, T)$  admet un supplémentaire dans  $H^1(K, T)$ .

La proposition 1.3.2 dit que le quotient  $H^1(K, T)/H_{\text{Iw}}^1(T)_\Gamma$  est fini et isomorphe à  $H_{\text{Iw}}^2(T)^\Gamma$ , il en résulte que les  $\mathbb{Z}_p$ -modules  $H^1(K, T)$  et  $H_{\text{Iw}}^1(T)_\Gamma$  ont même rang mais également que  $\sharp \Upsilon_0 \sharp H_{\text{Iw}}^2(T)^\Gamma$  est égal au produit de  $(H_f^1(K, T) : \exp(A_1^{\eta_0}))$  par l'indice

$$\left( \frac{H^1(K, T)}{H_f^1(K, T)} : \frac{H_{\text{Iw}}^1(T)_\Gamma}{H_f^1(K, T) \cap H_{\text{Iw}}^1(T)_\Gamma} \right)$$

ou, en d'autres termes, par l'indice  $(H^1(K, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K, T))$ . Nous avons donc

$$(H_f^1(K, T) : \exp(R_0)) = \frac{\sharp H_{\text{Iw}}^2(T)^\Gamma}{(H^1(K, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K, T))} |(k-1)!|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)} \sharp \Upsilon_0.$$

Finalement  $\sharp H_{\text{Iw}}^2(T)^\Gamma$  peut être remplacé par  $\sharp H^0(K, V^*(1)/T^*(1))$  grâce à la proposition 1.3.2 et la démonstration du lemme se termine ainsi.  $\square$

*Démonstration du théorème.*

Le même raisonnement que pour le cas  $n \geq 1$  allié au lemme 3.2.5 et à la proposition 2.4.16 donne la conclusion désirée.  $\square$

### 3.3 Démonstration des résultats principaux

Lorsque  $n \geq 1$ . Par le lemme 3.1.11, nous savons que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{Z}_p \text{ Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = (H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \mathbb{Z}_p.$$

Aussi pour démontrer les premiers points des théorèmes 3.1.8 et 3.1.9 ainsi le corollaire 3.1.10, il suffit d'encadrer  $(H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n))$ . Faisons cela.

En posant  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)$ , le théorème 3.2.1 dit que :

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) &\leq \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K_n, T))} p^{[K_n:\mathbb{Q}_p]n\alpha} \\ &\quad \times |\Gamma_n^*(V)|_p \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)} \end{aligned}$$

avec un cas d'égalité lorsque  $h < k$ . Si  $h = 1 = k$ , nous avons plus précisément :

$$(H_f^1(K_n, T) : \exp(R_n)) = \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K_n, T))}.$$

Ce même théorème dit également que pour tout  $k, h$  et  $n \geq 1$  nous avons la minoration suivante :

$$\begin{aligned} (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V} R_n) &\geq \frac{\sharp H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K_n, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K_n, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ &\times p^{[K_n: \mathbb{Q}_p](n\alpha - nt_H^+(V) - n(k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V))}. \end{aligned}$$

Cela termine les démonstrations des principaux résultats de cette thèse pour  $n \geq 1$ .  
□

**Lorsque  $n = 0$ .** Le raisonnement est le même que pour le cas précédent : par le lemme 3.1.11, nous savons que

$$\mathbb{Z}_p \text{ Tam}_{K, \omega_0}^0(T) = (H_f^1(K, T) : \exp(R_0)) j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}) \mathbb{Z}_p.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le théorème 3.2.4 démontré dans le paragraphe suivant qui dit que

$$\begin{aligned} (H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) &\leq \frac{\sharp H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p p^{[K: \mathbb{Q}_p]\alpha} \\ &\times \left| \frac{1}{(k-1)!} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)} \end{aligned}$$

— toujours avec  $\alpha = t_H(V) + k \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V)$  — et que cette borne est atteinte si  $h < k$  ou si  $h = 1 = k$ . Enfin le dernier point de ce théorème donne également la minoration suivante :

$$\begin{aligned} (H_f^1(K, T) : \exp_{K, V}(R_0)) &\geq \frac{\sharp H^0(K, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(K, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(K, T))} |\Gamma_n^*(V)|_p |\Gamma_n^+(V)|_p^{-1} \\ &\times p^{[K: \mathbb{Q}_p](\alpha - t_H^+(V) - (k-1) \dim_K \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}^K(V))}. \end{aligned}$$

Cela permet de terminer la démonstration des principaux résultats de cette thèse pour  $n = 0$ .  
□

### 3.4 Plusieurs calcul de $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$

Rappelons que  $j_n : \det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K_n) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$  est l'isomorphisme provenant de la suite exacte suivante :

$$(3.4.1) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \longrightarrow 0$$

où  $f$  est l'application qui à  $x$  associe  $f(x) = ((\mathbb{1} - \varphi)x, x \bmod \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V))$ .

Si  $M_n$  est un réseau de l'espace tangent  $t_V(K)$  et si  $\omega_n$  est un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} M_n$ , alors nous avons vu que

$$\mathbb{Z}_p \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n)) j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \mathbb{Z}_p$$

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'indice généralisé. Il reste donc à calculer le second terme qui apparaît dans cette écriture i.e.  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$ . En général, ce calcul n'est a priori pas facile. Cependant dans certains cas, il est possible de le calculer entièrement en utilisant diverses méthodes. C'est ce que nous faisons dans ce paragraphe. Nous serons alors amenés à considérer des réseaux classiques de l'espace tangent comme l'image  $\mathbb{Z}_p[G_n].x_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$  dans  $t_V(K_n)$  où  $x_n = \zeta_p + \dots + \zeta_{p^n}$  ou comme  $\mathcal{O}_{K_n} \otimes M$ .

### 3.4.1 Le cas des représentations strictement négatives

Gardons les mêmes hypothèses sur  $V$  : c'est une représentation cristalline dont les sauts de filtration sont contenus dans un intervalle  $[-k; h - k]$  avec  $k > 0$ ,  $h \geq 0$ . Nous supposons que  $V$  n'admet pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m$  entier.

Nous supposons en outre dans ce paragraphe que  $V$  est strictement négative i.e. que  $k > h$ . Il vient alors en particulier  $t_V(K_n) = \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)$ .

Notons immédiatement que cela implique que 1 n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . En effet, si 1 était valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , alors  $1/p$  serait valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V^*(1))$ . Et cela n'est pas possible car  $V^*(1)$  est positive avec  $(V^*(1))^{G_K} = 0$  et car  $(\mathbb{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi=1/p} = \mathbb{Q}_p$  (voir par exemple [Col98, §III.3]).

De la même manière,  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ .

Rappelons tout d'abord quelques notations dont nous nous servons dans ce paragraphe.

Soit  $n \geq 1$ . Nous avons défini le réseau  $M$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  en posant  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ . Notons  $M_n$  le  $\mathbb{Z}_p$ -réseau  $\mathbb{Z}_p[G_n].x_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$  de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)$  où  $x_n = \zeta_p + \dots + \zeta_{p^n}$ .

Rappelons que le réseau  $R_n$  de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$  est l'image de  $p^{nk}(\sigma \otimes \varphi)^n \mathcal{D}(T)$  par  $\Xi_{V, n}^\varepsilon$  et que  $v_n$  est un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_n$ .

#### Proposition 3.4.1

*Pour tout  $n \geq 1$ , le réseau engendré par  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  est égal à celui engendré par la puissance  $p$ -ième suivante :*

$$\left| \frac{\alpha_{V, K_n}(M_n, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p \left| d_{K_n} \right|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V/2} \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \\ \times p^{[K_n: \mathbb{Q}_p](-nk \dim_{\mathbb{Q}_p} V - n t_H(V))}.$$

Cela permet alors de retrouver le résultat de D. Benois et L. Berger donné dans le corollaire 3.1.5 et dont l'énoncé est rappelé ici :

**Corollaire 3.4.2** *Soit  $K/\mathbb{Q}_p$  une extension non ramifiée finie et  $n \geq 0$ . Soit  $V$  une représentation cristalline de  $G_K$  à poids de Hodge-Tate strictement positifs (i.e. telle que  $\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{dR}(V) = 0$ ). Supposons que  $V^*(1)^{G_K} = 0$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par l'action de  $G_K$ .*

*Soit  $\omega$  une base de  $\det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V)$ . Nous avons alors :*

$$\text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = \#H^0(K_n, V^*(1)/T^*(1)) \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \\ \times \left| d_{K_n} \right|_p^{\dim V/2} \left| \Gamma_n^*(V) \right|_p \left| \frac{\alpha_{V, K_n}(M_n, T)}{\epsilon(K_n, V)} \right|_p.$$

*Démonstration.*

Comme  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ . Cela permet alors d'appliquer le théorème 3.1.8, (iii).

Rappelons d'autre part que le lemme 3.1.7 explicite  $\epsilon(K_n, V)$ ,  $\alpha_{V, K_n}(M_n, T)$  et  $d_{K_n}$ . Ainsi, en joignant le théorème 3.1.8 et la proposition 3.4.1 et en faisant les simplifications, il vient le corollaire.  $\square$

Il reste donc à prouver la proposition 3.4.1. Pour cela nous passons par un calcul caractères par caractères. Nous avons alors besoin des résultats qui suivent. Cette méthode de même que ces calculs sont proches de ceux de [BB08, proposition 4.11]; ils n'utilisent toutefois pas l'exponentielle de B. Perrin-Riou.

### Un point sur le calcul caractères par caractères

Rappelons que  $G_n$  est le groupe de Galois de l'extension  $K_n/K$  et que  $\mathbb{Q}_{p, n}$  est la  $p^n$ -ième extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$  i.e.  $\mathbb{Q}_{p, n} = \mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$ .

Pour tout caractère  $\eta$  de  $X(G_n)$ , soit  $e_\eta = \frac{1}{\#G_n} \sum_{g \in G_n} \eta^{-1}(g)g$  l'idempotent habituel de  $\eta$ .

Pour tout  $\mathbb{Q}_p[G_n]$ -module de type fini  $A$ , notons  $A^\eta$  sa  $\eta$ -partie, c'est-à-dire  $A^\eta = e_\eta(A_{\mathbb{Q}_{p, n}})$  où  $A_{\mathbb{Q}_{p, n}} = A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p, n}$ . Nous avons alors la décomposition canonique  $A_{\mathbb{Q}_{p, n}} \simeq \bigoplus_{\eta \in X(G_n)} A^\eta$ .

Soit  $A$  un  $\mathbb{Q}_p[G_n]$ -module libre de rang  $r$  et  $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$  une base de ce module. Alors  $a = \bigwedge_{i=1}^r a_i$  est un élément de  $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} A$ . Si  $a_{i,\eta}$  désigne la  $\eta$ -partie de  $a_i$  i.e.  $a_{i,\eta} = e_\eta(a_i) \in A^\eta$ , alors  $a_\eta = \bigwedge_{i=1}^r a_{i,\eta}$ .

Cela permet d'avoir d'une part l'isomorphisme canonique suivant :

$$(\det_{\mathbb{Q}_p, n[G_n]} A_{\mathbb{Q}_p, n})^\eta \simeq \det_{\mathbb{Q}_p, n}(A^\eta)$$

et d'autre part le lemme qui vient.

**Lemme 3.4.3**

Soient  $A$  et  $B$  deux  $\mathbb{Q}_p[G_n]$ -modules libres de type fini et

$$f : \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} A \otimes_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1} B \rightarrow \mathbb{Q}_p[G_n].$$

Pour tout caractère  $\eta$  de  $G_n$ , soit  $f_\eta : \det_{\mathbb{Q}_p, n}(A^\eta) \otimes_{\mathbb{Q}_p, n} \det_{\mathbb{Q}_p, n}(B^\eta) \rightarrow \mathbb{Q}_p, n$  la  $\eta$ -composante de  $f$ .

Pour tout  $x \in \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} A$  et  $y \in \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} B$ , nous avons :

$$f(x \otimes y^{-1}) = \sum_{\eta \in X(G)} f_\eta(x_\eta \otimes y_\eta^{-1}) e_\eta.$$

*Démonstration du lemme.*

Il suffit d'écrire  $x = \sum_{\eta \in X(G_n)} e_\eta(x)$  et  $y = \sum_{\eta \in X(G_n)} e_\eta(y)$  en utilisant les décompositions

$$\det_{\mathbb{Q}_p, n[G_n]}(A \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p, n) = \bigoplus_{\eta \in X(G_n)} \det_{\mathbb{Q}_p, n}(A^\eta) \text{ et}$$

$$\det_{\mathbb{Q}_p, n[G_n]}(B \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p, n) = \bigoplus_{\eta \in X(G_n)} \det_{\mathbb{Q}_p, n}(B^\eta). \quad \square$$

Lorsque  $A$  est un  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}[G_n]$ -module de type fini, nous noterons  $A^\eta$  l'image de  $A$  dans  $(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)^\eta$  par  $e_\eta$ . Lorsque l'action de  $G_n$  sur  $A$  est triviale, nous avons  $A^{\eta_0} = A$ .

Rappelons que  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ . Comme il l'est montré dans le corollaire B.3.5, puisque  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , l'application  $\Xi_{V, n}^\varepsilon$  est surjective. Lorsque  $V$  est positive, les dimensions permettent de voir que cet homomorphisme est un isomorphisme.

Or d'une part,  $p^{nk}(\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varphi^n(M)$  est un  $\Lambda$ -module libre et  $R_n$  l'image de  $p^{nk}(\mathbb{A}_K^+)^{\psi=0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varphi^n(M)$  par  $\Xi_{V, n}^\varepsilon$  d'autre part. Il vient en particulier que  $R_n$  est un  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -module libre.

Soit  $y = \bigwedge_i p^{nk} \Xi_{V,n}^\varepsilon((1 + \pi) \otimes \varphi^n(m_i))$  où  $(m_i)_i$  est une base de  $M$ ;  $y$  est alors un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} R_n$ . Soit  $x$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} M_n$ . Pour calculer l'image de  $x \otimes y^{-1}$  par le morphisme

$$j_n : \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p[G_n],$$

il suffit d'un calcul caractère par caractère et du lemme 3.4.3. Ces calculs sont faits dans les propositions 3.4.6 et 3.4.4.

Nous écrivons toujours  $a \sim_p b$  lorsque  $a$  et  $b$  sont deux éléments non nuls de  $\mathbb{Q}_p$  vérifiant  $a/b \in \mathbb{Z}_p^\times$ .

### Cas du caractère trivial

Dans tout ce paragraphe,  $\mathbb{D}_{\text{dR}}(V)$  désigne le module de de Rham sur  $K$ . La  $\eta_0$ -composante de  $j_n$  n'est autre que le morphisme naturel

$$j_{n,\eta_0} : \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p.$$

En effet,  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)^{\eta_0}$  désigne la  $\eta_0$ -partie du  $\mathbb{Q}_p[G_n]$ -module  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)$  c'est-à-dire que nous avons

$$\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)^{\eta_0} = \mathbb{Q}_{p,n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} e_{\eta_0}(\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)) = \mathbb{Q}_{p,n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V).$$

Et de la même manière,  $\left( \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \right)^{\eta_0} = \mathbb{Q}_{p,n} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)}$ .

### Proposition 3.4.4

Soit  $\eta_0$  le caractère trivial de  $X(G_n)$ . Alors :

$$j_{n,\eta_0}(x_{\eta_0} \otimes y_{\eta_0}^{-1}) \sim_p \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \left| \det(\varphi^n | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p \times \left( \frac{p^{nk}}{[K_n : K]} \right)^{-\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)}.$$

Afin de prouver cela, nous avons besoin de plusieurs lemmes intermédiaires.

### Lemme 3.4.5

Soit  $x \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ ,  $a$  un entier premier à  $p$  et  $\alpha = (1 + \pi)^a \otimes m$ . Alors :

$$\Xi_{V,n,\eta_0}^\varepsilon(\alpha) = \frac{-1}{[K_n : K]} \left( 0, (\mathbf{1} - \varphi)^{-1} (\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1})(x) \right).$$



*Démonstration.*

En effet,  $\Xi_{V,n,\eta_0}^\varepsilon(\alpha) = -p^{-n} \left( x, \frac{1}{p-1} \varphi^{-1}(x) \right)$  puisque d'une part  $e_{\eta_0}(\zeta_{p^i}^a)$  est nul pour  $i \geq 2$  et que d'autre part  $e_{\eta_0}(\zeta_p) = \frac{1}{1-p}$ . Il suit :

$$\Xi_{V,n,\eta_0}^\varepsilon(\alpha) = \frac{-1}{[K_n : K]} \left( (\mathbb{1} - p^{-1} \varphi^{-1})(x), 0 \right).$$

Comme nous l'avons précisé plus haut,  $\mathbb{1} - \varphi$  est inversible sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$ , la conclusion est dès lors évidente.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.4.4.*

Par le lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} y_{\eta_0} &= \left( \frac{p^{nk}}{[K_n : K]} \right)^{[K:\mathbb{Q}_p] \dim V} \bigwedge_i (0, (\mathbb{1} - \varphi)^{-1} (\mathbb{1} - p^{-1} \varphi^{-1}) \varphi^n(x)) \\ &= \left( \frac{p^{nk}}{[K_n : K]} \right)^{[K:\mathbb{Q}_p] \dim V} \det \left( (\mathbb{1} - p^{-1} \varphi^{-1}) (\mathbb{1} - \varphi)^{-1} \varphi^n | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \right) \bigwedge_i (0, m_i). \end{aligned}$$

D'autre part, l'image de  $\bigwedge_i m_i \in \det_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  par l'isomorphisme induit par  $\mathbb{1} - \varphi$  est  $\det^{-1}(\mathbb{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \bigwedge_i (0, m_i)$ . Il vient alors :

$$y_{\eta_0} = \left( \frac{p^{nk}}{[K_n : K]} \right)^{[K:\mathbb{Q}_p] \dim V} \det \left( (\mathbb{1} - p^{-1} \varphi^{-1}) \varphi^n | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \right) x_{\eta_0}.$$

Cela permet de conclure la démonstration de cette proposition.  $\square$

### Cas des caractères non triviaux

#### Proposition 3.4.6

Soit  $\eta$  un caractère non trivial de  $G_n$  de conducteur  $l$ . Nous avons :

$$j_{n,\eta}(x_\eta \otimes y_\eta^{-1}) \sim_p p^{n(1-k) \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{dR}(V)} \left| \det \left( \varphi^{n-l} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \right) \right|_p.$$

La démonstration de ce résultat se fait peu ou prou de la même manière que lorsque  $\eta = \eta_0$  : nous commençons à calculer l'image de  $(\mathbb{A}_K^+)^{\psi=\mathbb{1}} \otimes_K \varphi^n(M)$  par  $\Xi_{V,n,\eta}^\varepsilon$ . Nous pourrons ensuite terminer la preuve en nous appuyant sur ce calcul.

*Première étape de la démonstration : calcul de l'image par  $\Xi_{V,n,\eta}^\varepsilon$ .*

Soit  $x \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $\alpha = (1 + \pi)^a \otimes x$  où  $a$  un entier premier à  $p$ . Nous avons

$$\Xi_{V,n,\eta}^\varepsilon(\alpha) = p^{-n} \left( 0; \sum_{i=1}^n e_\eta(\zeta_{p^i}^a) \otimes \varphi^{n-i}(m \otimes e_{-k}) \right).$$

Or  $e_\eta(\zeta_{p^i})$  est nul pour  $i \neq l$ , d'où  $\Xi_{V(n,\eta)}^\varepsilon(\alpha) = p^{-n} \left( 0; e_\eta(\zeta_{p^l}^a) \otimes \varphi^{n-l}(m \otimes e_{-k}) \right)$ .  
 $\square$

*Fin de la démonstration.*

L'image de  $\mathcal{D}(T(-k))$  par  $\Xi_{V(-k),k,n,\eta}^\varepsilon$  est  $p^{n(k-1)}\varphi^{n-l}M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p e_\eta(\zeta_{p^l})$ . Autrement dit,  $y_\eta$  est un générateur de

$$p^{n(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)} \det_{\mathbb{Z}_p} \left( \varphi^{n-l} M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p e_\eta(\zeta_{p^l}) \right).$$

Il en découle  $y_\eta \sim_p p^{n(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}(V)} \det(\varphi^{n-l} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) x_\eta$ . Cela donne la conclusion voulue.  $\square$

### Preuve de la proposition 3.4.1

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de cette proposition en nous appuyant sur les propositions 3.4.4 et 3.4.6.

Avant cela, rappelons le lemme 3.1.7 démontré page 95 qui explicite les éléments apparaissant dans la formule de la proposition 3.4.1 tels que  $\alpha_{V,K_n}(M_n, T)$  ou la constante locale  $\epsilon(K_n, V)$ .

#### Lemme 3.4.7

Soit  $n \geq 1$ . Nous avons :

1.  $|d_{K_n}|_p = p^{-n[K:\mathbb{Q}_p]p^n + (n+1)[K:\mathbb{Q}_p]p^{n-1}} = p^{-n[K_n:\mathbb{Q}_p] + [K:\mathbb{Q}_p]p^{n-1}}$  ;
2.  $|\epsilon(K_n, V)|_p = |d_{K_n}|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V + t_H(V)}$  ;
3.  $|\alpha_{V,K_n}(M_n, T)|_p = p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V + n[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V} |d_{K_n}|_p^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V/2}$ .

*Démonstration de la proposition 3.4.1.*

Le lemme rappelé ci-dessus permet de reformuler l'équivalence à prouver comme suit :

$$(3.4.2) \quad j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \sim_p p^{-[K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V - n(k-1)[K_n:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V - p^{n-1}[K:\mathbb{Q}_p] t_H(V)} \times \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p.$$

Soit  $\beta_n$  la somme des conducteurs des caractères de  $G_n$  i.e.  $\beta_n = \sum_{\eta \in X(G_n)} \text{cond } \eta$ . Les propositions 3.4.4 et 3.4.6 ainsi que la functorialité du produit extérieur impliquent

$$j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \sim_p p^{-n(k-1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V) - [K:\mathbb{Q}_p] \dim_{\mathbb{Q}_p} V} \left| \det(\varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p^{-\beta_n + n[K_n:K]} \times \left| \det(\mathbf{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)) \right|_p.$$

Pour terminer la preuve en retrouvant l'égalité (3.4.2), il suffit de montrer que

$$|\det(\varphi| \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p^{-\beta_n + n[K_n:K]} = p^{\beta_n [K:\mathbb{Q}_p] t_H(V) - n[K_n:\mathbb{Q}_p] t_H(V)}$$

et d'expliciter  $\beta_n$ . La faible admissibilité de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  permet de faire la première opération. La seconde opération relève du lemme 3.4.8.  $\square$

**Lemme 3.4.8**

Pour tout entier  $n > 0$ , nous avons  $\beta_n = (n + 1)p^{n-1}(p - 1) - p^n = \nu_{K_n}(d_{K_n})$ .

*Démonstration.*

Il suffit de montrer que

$$(3.4.3) \quad \#\{\eta \in X(G_n) \mid \text{cond } \eta = k\} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ p - 2 & \text{si } k = 1 \\ (p - 1)^2 p^{k-2} & \text{si } 2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

En effet, la conclusion voulue se déduit alors d'un petit calcul :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \sum_{k=2}^n k (p - 1)^2 p^{k-2} + p - 2 \\ &= (n + 1)p^{n-1}(p - 1) - p^n. \end{aligned}$$

Prouvons donc les égalités (3.4.3). Si  $k = 0$ , c'est évidente. Soit donc  $1 \leq k \leq n$ . La surjection canonique de  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$  dans  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$  induit une bijection naturelle entre l'ensemble des caractères de  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$  et celui des caractères de  $G_n$  dont le conducteur est  $\leq k$ .

Il vient :

$$\#\{\eta \in X(G_n) \mid \text{cond } \eta = k\} = \#\text{Hom}\left((\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times, \mathbb{C}^\times\right) - \#\text{Hom}\left((\mathbb{Z}/p^{k-1}\mathbb{Z})^\times, \mathbb{C}^\times\right).$$

Aussi les égalités sont dès lors évidentes.  $\square$

**Le cas où  $n = 0$ .** Pour tout entier  $n \geq 0$ , les nombres de Tamagawa s'écrivent comme suit

$$\mathbb{Z}_p \text{Tam}_{K_n, \omega_n}^0(T) = (H_f^1(K_n, T) : \exp_{K_n, V}(R_n)) j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) \mathbb{Z}_p.$$

Dans les paragraphes précédents, nous avons encadré l'indice généralisé pour  $n \geq 0$ , nous avons ensuite calculé  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  pour  $n \geq 1$  lorsque  $V$  est positive. Dans ce paragraphe, nous faisons un calcul semblable pour  $n = 0$ .

Rappelons tout d'abord quelques notations dont nous nous servons dans ce paragraphe. Le caractère trivial de  $X(\Delta_K)$  est désigné par  $\eta_0$ .

Rappelons que nous avons défini le réseau  $M = M_0$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  en posant  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ .

Nous avons en outre noté  $M_1$  le  $\mathbb{Z}_p$ -réseau  $\mathbb{Z}_p[G_1] \cdot \zeta_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$  de  $\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_1}(V)$ . Nous avons en particulier  $M_0 = e_{\eta_0}(M_1)$ .

Rappelons que  $R_1$  est l'image de  $p^k(\sigma \otimes \varphi) \mathcal{O}(T)$  par  $\Xi_{V,1}^\varepsilon$  et que nous avons de plus pris un générateur  $v_1$  de  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_1$ . Comme l'extension  $K_1/K$  est de degré  $p-1$  et comme  $\Xi_{V,0}^\varepsilon = \text{Tr}_{K_1/K} \circ \Xi_{V,1}^\varepsilon$ , il vient  $R_0 = e_{\eta_0}(R_1)$ .

Enfin, pour  $n = 0$  ou  $1$ , l'isomorphisme  $j_n$  est défini en passant aux déterminants la suite exacte qui suit

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) \oplus \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V)} \longrightarrow 0$$

où  $f(x) = ((\mathbb{1} - \varphi)(x), x)$ .

### Proposition 3.4.9

Le réseau de  $\mathbb{Z}_p$  généré par  $j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1})$  admet également la puissance de  $p$  suivante pour générateur :

$$|\det(\mathbb{1} - p^{-1}\varphi^{-1} | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p p^{[K:\mathbb{Q}_p](-t_H(V) - k \dim_{\mathbb{Q}_p} V)}.$$

*Démonstration.*

Cela vient directement de la proposition 3.4.4 et de la faible admissibilité puisque

$$j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}) \sim_p j_{1,\eta_0}(\omega_1 \otimes v_1^{-1})$$

et  $|\det(\varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V))|_p = p^{[K:\mathbb{Q}_p]t_H(V)}$ . □

### 3.4.2 Le cas des courbes elliptiques

Dans ce paragraphe, nous appliquons les formules du théorème 3.1.8 et du corollaire 3.1.10 aux représentations issues de courbes elliptiques.

### Autour de la représentation associée à une courbe elliptique

Soit  $E$  une courbe elliptique sur une extension abélienne finie  $K/\mathbb{Q}_p$ . Le module de Tate  $T_E = \varprojlim E[p^n]$  de  $E$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre muni d'une action continue de  $G_{\mathbb{Q}_p}$ . Si  $V_E = \hat{T}_E \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ , alors  $V_E$  est une représentation  $p$ -adique de  $G_{\mathbb{Q}_p}$  associée de dimension 2. Décrivons-là d'avantage (voir [Del] pour plus de détails).

Cette représentation est cristalline si et seulement si  $E$  a bonne réduction en  $p$ . Si  $V_E$  est cristalline, alors elle est irréductible si et seulement si  $E$  a une réduction supersingulière. Les résultats principaux de cette thèse permettent de retrouver des résultats déjà connus dans le cas supersingulier.

Supposons donc que  $E$  a bonne réduction en  $p$ . Ainsi la représentation  $p$ -adique  $V_E$  est cristalline; ses sauts de filtrations sont 0 et 1. Nous pouvons également décrire le module cristallin associé à  $V_E$ . Nous avons l'égalité suivante :

$$\det(1 - \varphi X | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)) = 1 - \frac{a_p}{p} X + \frac{1}{p} X^2 \text{ avec } a_p \in \mathbb{Z}_p.$$

Comme  $E$  a bonne réduction supersingulière en  $p$ , le coefficient  $a_p$  est congru à 0 modulo  $p$ .

#### Lemme 3.4.10

Soit  $\tilde{e}_1$  une  $\mathbb{Z}_p$ -base de  $\text{Fil}^1 \mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$  et  $\tilde{e}_2 = \varphi(\tilde{e}_1)/p$ . Alors  $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$ .

*Démonstration.*

Soit  $e$  un élément de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$  tel que  $(\tilde{e}_1, e)$  est une base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$ . Le module  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$  étant fortement divisible par la proposition 1.4.4, il vient que  $(\tilde{e}_1, e/p)$  est également une base de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E(-1))$ .

Il est dès lors possible de passer de la première base à la seconde en passant par une matrice  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ .

Pour démontrer le lemme, il suffit de montrer que  $c \in \mathbb{Z}_p^\times$  puisque dans ce cas  $e$  est combinaison linéaire de  $\tilde{e}_1$  et de  $\tilde{e}_2$ . Montrons cela.

La matrice de  $\varphi$  dans la base  $(\tilde{e}_1, e/p)$  est  $\begin{pmatrix} pa & b \\ pc & d \end{pmatrix}$ . Or le polynôme caractéristique de  $\varphi$  est  $X^2 - a_p X + p$  et  $a_p$  appartient à  $p\mathbb{Z}_p$ . Cela implique  $d \in p\mathbb{Z}_p$  est donc  $c \in \mathbb{Z}_p^\times$  puisque  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ .  $\square$

Soit  $e_i = \tilde{e}_i \otimes t^{-1}\varepsilon$ ; alors  $(e_1, e_2)$  est une base de  $M$  telle que  $\varphi(e_1) = e_2$  et telle que  $\text{Fil}^0 M = \mathbb{Z}_p e_1$ . Cette base jouera un rôle par la suite.

Comme  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)$ , le corollaire 3.1.10 donne, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, n, \omega_n}^0(T) = \frac{\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, n, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T))} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$$

et pour  $n = 0$  :

$$\text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, \omega_0}^0(T) = \frac{\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, V^*(1)/T^*(1))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, T) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, T))} j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}).$$

Dans ce paragraphe, nous prenons  $M_n = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n} \otimes_{\mathcal{O}_K} M$  où  $M$  est toujours défini par  $M = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T_E)$ . Nous allons montrer ici que les deux précédentes égalités permettent d'avoir une nouvelle démonstration de  $\text{Tam}_{K, \omega_n}^0(T) = 1$  pour tout entier  $n \geq 0$ . Pour cela, nous avons besoin de plusieurs rappels.

### Rappels sur le groupe formel associé à $E$

Nous pouvons dores et déjà renvoyer à [Sil09, chapitre IV] ou [Kur02, §2] pour de plus amples détails sur le contenu de ce paragraphe.

Soit  $F_E$  le groupe formel associé à  $E$  ; nous avons alors  $F_E(X, Y) \in \mathbb{Z}_p[[X, Y]]$ . La courbe elliptique  $E$  étant fixé, nous pouvons remplacer la notation  $F_E$  par  $F$ .

#### Lemme 3.4.11

*Il existe une série formel  $\log_F(X)$  et un unique élément  $\exp_F(X)$  dans  $\mathbb{Q}_p[[X]]$  tels que  $\log_F(\exp_F(X)) = X = \exp_F(\log_F(X))$  et vérifiant :*

$$F(X, Y) = \exp_F(\log_F(X) + \log_F(Y)).$$

*L'élément  $\log_F(X)$  est le logarithme formel de  $F$  tandis que  $\exp_F$  est son exponentielle.*

*Démonstration.*

Voir IV§5 de [Sil09]. □

#### Lemme 3.4.12

*Pour tout élément  $f(X)$  de  $X\mathbb{Z}_p[[X]]$ , l'élément  $\mathbf{L}_F(f(X))$  défini comme suit appartient à  $X\mathbb{Z}_p[[X]]$  :*

$$\mathbf{L}_F(f(X)) = (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2) \log_F(f(X)).$$

Cette démonstration classique se fait en plusieurs étapes.

*Première étape de la démonstration.*

Comme tout élément  $f(X)$  de  $(X\mathbb{Z}_p[[X]], +_F)$  s'écrit comme somme — pour la loi  $+_F$  — de monômes de degré  $\geq 1$ , il suffit de montrer la proposition pour  $f(X) = aX^m$  avec  $m \geq 1$  et  $a \in \mathcal{O}_K$ .  $\square$

*Deuxième étape de la démonstration.*

Soit  $f(X) = aX^m$  avec  $m \geq 1$  et  $a \in \mathcal{O}_K$ . Soit  $\phi(X) = X^p$ . Montrons qu'il suffit de montrer le lemme en remplaçant dans les définitions  $\varphi$  par  $\phi$ . De  $\varphi(X) \equiv \phi(X)$  modulo  $p$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_F(f(X)) &= \log_F(f(X)) - a_p/p \log_F(\phi(f(X)) + pg_1(X)) \\ &\quad + 1/p \log_F(\phi^2(f(X)) + pg_2(X)). \end{aligned}$$

Comme  $\log'_F$  est une série formelle à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ , par la formule de Taylor, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_F(f(X)) &\equiv \log_F(f(X)) - a_p/p \log_F(\phi(f(X))) + 1/p \log_F(\phi^2(f(X))) \\ &\equiv (1 - a_p/p\phi + 1/p\phi^2) \log_F(f(X)) \pmod{p\mathbb{Z}_p[[X]]}. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit en effet de montrer que  $(1 - a_p/p\phi + 1/p\phi^2) \log_F(f(X))$  appartient à  $X\mathbb{Z}_p[[X]]$ .  $\square$

*Fin de la démonstration.*

Il n'est pas difficile de montrer que  $(1 - a_p/p\phi + 1/p\phi^2) \log_F(X^m)$  appartient bien à  $X\mathbb{Z}_p[[X]]$  (voir par exemple [BV90]). Cela termine donc la démonstration du lemme.  $\square$

### Lemme 3.4.13

*L'application  $\mathbf{L}_F : (X\mathbb{Z}_p[[X]], +_F) \longrightarrow (X\mathbb{Z}_p[[X]], +)$  est un isomorphisme de groupes.*

*Pour tout  $f(X) \in$ , posons  $\mathbf{E}_F(f(X)) = \exp_F((1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)^{-1}(f(X)))$ . Alors  $\mathbf{E}_F$  est l'isomorphisme réciproque de  $\mathbf{L}_F$ .*

*Démonstration.*

Les égalités  $\mathbf{L}_F \circ \mathbf{E}_F = \mathbf{1} = \mathbf{E}_F \circ \mathbf{L}_F$  sont évidentes. Il reste donc à montrer que ce sont des morphismes.

Comme, par définition,  $\mathbf{L}_F(f(X) +_F g(X)) = \mathbf{L}_F(F(f(X), g(X)))$ , le lemme 3.4.11 donne  $\mathbf{L}_F(f(X) +_F g(X)) = (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)(\log_F f(X) + \log_F g(X))$ . La conclusion résulte de cette dernière égalité.  $\square$

Pour résumer, le diagramme suivant est commutatif :

$$(3.4.4) \quad \begin{array}{ccccc} (X\mathbb{Z}_p[[X]], +_F) & \begin{array}{c} \xleftarrow{L_F} \\ \xrightarrow{E_F} \end{array} & (X\mathbb{Z}_p[[X]], +) & \xrightarrow{(1+a\varphi+1/p\varphi^2)^{-1}} & (X\mathbb{Q}_p[[X]], +) \\ \downarrow & & & \swarrow & \\ (X\mathbb{Q}_p[[X]], +_F) & \begin{array}{c} \xleftarrow{\log_F} \\ \xrightarrow{\exp_F} \end{array} & (X\mathbb{Q}_p[[X]], +) & & \end{array}$$

### Un calcul classique des nombres de Tamagawa

Soit  $L/\mathbb{Q}_p$  une extension finie et  $L_0/\mathbb{Q}_p$  sa sous-extension non ramifiée maximale. Rappelons tout d'abord la construction de l'exponentielle de Bloch et Kato  $\exp_{L, V_E}$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , la suite exacte  $E[p^n] \xrightarrow{p^n} E(\bar{L}) \xrightarrow{p^n} E(\bar{L}) \longrightarrow 0$  donne lieu, en passant à la cohomologie à la suite exacte suivante :

$$E(L) \xrightarrow{p^n} E(L) \longrightarrow H^1(L, E[p^n]).$$

En passant à la limite projective, il vient une injection  $E(L) \xrightarrow{\exp_{L, V_E}} H_f^1(L, T_E)$ . Ce morphisme s'avère en fait être un isomorphisme (voir [BK90]).

Soit  $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p}$  l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$  et  $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p})$  le groupe formel associé à  $E$ . Comme  $E$  est supposée supersingulière, il vient  $F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p}) \simeq E(\overline{\mathbb{Q}_p})$  et, si  $T_F$  désigne le module de Tate de  $F$ , alors  $T_F \simeq T_E$ .

Il en découle le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & E(L) & \xrightarrow{\sim} & H_f^1(L, T_E) \\ & \swarrow & & \downarrow \\ F(\mathfrak{M}_L) & & \log_E & \\ & \searrow & & \downarrow \\ & L \simeq t_E(L) & \xrightarrow{\exp_{L, V_E}} & H_f^1(L, V_E) \end{array}$$

Soit  $t_E(L)$  et  $t_F(L)$  les espaces tangents respectifs de  $E$  et de  $F$ ; ce sont les espaces duaux des espaces des formes différentielles invariantes.

Ainsi comme  $\omega_F = \log'_F(X)dX$  est par définition une forme différentielle invariante pour  $F$ , elle correspond à une certaine forme invariante  $\omega_E$  de  $E$ .

### Proposition 3.4.14

Nous avons  $\text{Tam}_{L, \omega_E}^0(T_E) = 1$ .



Cette démonstration se scinde en plusieurs étapes. Commençons par remarquer que  $\text{Tam}_{L, \omega_E}^0(T_E) = \det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}^L(V_E))^{-1} (H_f^1(L, T_E) : \exp_{L, V_E}(\mathcal{O}_L \omega_E))$ . Dans un premier temps, nous calculons l'indice généralisé; nous nous occupons ensuite du déterminant.

*Première étape de la démonstration — calcul de l'indice généralisé.*

Le précédent diagramme commutatif permet de ramener à la question à l'étude de l'application  $\alpha : F(\mathfrak{M}_L) \rightarrow L$  qui à  $x$  associe  $\alpha(x)$  avec  $\alpha(x)\omega_E = \log_F(x)$ . Comme  $\log'_F(X) \in \mathbb{Z}_p[[X]]$ , cette application induit l'isomorphisme suivant :

$$\alpha : F(p\mathfrak{M}_L) \xrightarrow{\sim} p\mathfrak{M}_L.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} (H_f^1(L, T_E) : \exp_{L, V_E}(\mathcal{O}_L \omega_E)) &= (H_f^1(L, T_E) : \exp_{L, V_E}(\mathfrak{M}_L \cdot \omega_E)) \\ &\quad \times (\exp_{L, V_E}(\mathfrak{M}_L \cdot \omega_E) : \exp_{L, V_E}(\mathcal{O}_L \omega_E)). \end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} (H_f^1(L, T_E) : \exp_{L, V_E}(\mathfrak{M}_L \cdot \omega_E)) &= (F(\mathfrak{M}_L) : \exp_{L, V_E}(\mathfrak{M}_L \omega_E)) \\ &= \frac{(F(\mathfrak{M}_L) : F(p\mathfrak{M}_L))}{(\exp_{L, V_E}(\mathfrak{M}_L \omega_E) : \exp_{L, V_E}(p\mathfrak{M}_L \omega_E))} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Il en découle  $(H_f^1(L, T_E) : \exp_{L, V_E}(\mathcal{O}_L \omega_E)) = (\mathfrak{M}_L : \mathcal{O}_L) = p^{-[L_0 : \mathbb{Q}_p]}$ .  $\square$

*Fin de la démonstration.*

Comme  $a_p/p$  appartient à  $\mathbb{Z}_p$ , nous avons  $\det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}^L(V_E)) = p^{-[L_0 : \mathbb{Q}_p]}$ . La conclusion de la proposition est alors naturelle.  $\square$

### Comparaison avec les résultats de la thèse

Reprenons les notations que nous avons adopté dans le cœur de cette thèse avec  $K = \mathbb{Q}_p$  et  $\mathbb{Q}_{p, n} = \mathbb{Q}_p[\zeta_{p^n}]$  et comparons avec les résultats connus du paragraphe précédent avec  $L = \mathbb{Q}_{p, n}$ . Le réseau  $R_n$  de  $\frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)}$  est l'image par  $\Xi_{V_E, n}^\varepsilon$  de  $p^{nk}(\sigma \otimes \varphi)^n \mathcal{D}(T_E)$  et  $v_n$  est un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_n$ .

L'homomorphisme  $j_n : \det_{\mathbb{Q}_p} t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n}) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$  est obtenu en passant au déterminant la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n}) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)} \longrightarrow 0$$

où  $f(x) = ((1 - \varphi)x, x \pmod{\text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V_E)})$ .

Nous pouvons comparer le résultat de la précédente proposition avec les égalités données dans le corollaire 3.1.10. En effet, celui-ci dit que si  $n \geq 1$ , alors :

$$\text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, n, \omega_n}^0(T_E) = \frac{\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_E^*(1)/T_E^*(1))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E))} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$$

tandis que si  $n = 0$ , alors

$$\text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, \omega_0}^0(T_E) = \frac{\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, V_E^*(1)/T_E^*(1))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, T_E) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, T_E))} j_0(\omega_0 \otimes v_0^{-1}).$$

**Lemme 3.4.15**

Pour tout entier  $n \geq 0$ , nous avons  $\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_E/T_E) = 0$ . Aussi, il vient en particulier :

$$\frac{\sharp H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_E/T_E)}{(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E))} = 1.$$

*Démonstration.*

Comme  $(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E) : H_{\text{Iw}+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T_E)) \leq H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_E/T_E)$ , il suffit de montrer la première assertion du lemme, i.e. que  $(V_E/T_E)^{G_{\mathbb{Q}_p, n}} = 0$ . Il suffit alors de prouver que que  $(T_E/p)^{G_{\mathbb{Q}_p, n}} = E[p]^{G_{\mathbb{Q}_p, n}} = 0$ . Faisons cela.

Comme  $E$  est supposée supersingulière,  $F(\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$  est isomorphe à  $E(\overline{\mathbb{Q}_p})$ . Cela autorise à raisonner avec le groupe formel  $F$ .

Soit  $x$  un point de  $p$ -torsion de  $F(\mathfrak{M}_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ . Il existe (voir par exemple [Sil09, corollaire IV4.4])  $f(x) \in x^2 \mathbb{Z}_p[[x]]$  et  $g(x) \in x \mathbb{Z}_p[[x]]$  tel que

$$0 = [p]x = px + pf(x) + g(x^p).$$

Ainsi en divisant par  $x$  puis par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe donc  $u \in \mathbb{Z}_p^\times$  et un polynôme  $P \in \mathbb{Z}_p[X]$  de degré  $p^2 - 2$  tel que  $x$  est racine de  $X^{p^2-1} + pP(X) + pu = 0$ . Ce polynôme étant d'Eisenstein, il est irréductible dans  $\mathbb{Q}_p[X]$ . Il en découle que  $x$  engendre une extension non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  degré  $p^2 - 1$ ; celle-ci ne peut donc pas être contenue dans une extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}_p$ .

Il vient alors  $x$  n'est pas fixé par  $G_{\mathbb{Q}_p, n}$  et nous concluons que  $(T_E/p)^{G_{\mathbb{Q}_p, n}} = 0$  et par suite  $(V_E/T_E)^{G_{\mathbb{Q}_p, n}} = 0$ .  $\square$

**Lemme 3.4.16**

Pour tout  $n \geq 0$ , nous avons  $j_n(\omega_E \otimes v_n^{-1}) = 1$ .

En appliquant les deux derniers lemmes au corollaire 3.1.10 pour les courbes elliptiques supersingulières, nous retrouvons naturellement le résultat de la proposition 3.4.14 i.e.  $\text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, n, \omega_E}^0(T_E) = 1$ .

La fin de ce paragraphe est dédiée à la démonstration de lemme. Avant cela, faisons quelques rappels sur les notations que nous utilisons.

**Lien entre  $\Xi_{V_E, n}$  et  $\log_F$ .** Le lemme B.3.2 permet de remplacer la définition proposée dans le chapitre 2, §2.2.2 par celle qui suit : si  $\alpha \in \mathcal{D}(V_E)$  et si  $\beta \in \mathcal{H}(V_E)$  tel que  $(\mathbb{1} - \varphi)(\beta) = \alpha$ , alors

$$\Xi_{V_E, n}^\varepsilon(\alpha) = p^{-n} (0; (\sigma \otimes \varphi)^{-n}(\beta)(\zeta_{p^n} - 1)).$$

D'où  $R_n = \left\{ (0, Z(\zeta_{p^n} - 1)) \mid Z \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \text{ et } (\mathbb{1} - \varphi)Z \in \mathcal{D}(T_E) \right\}$ . Cette nouvelle égalité permet de lier  $\Xi_{V_E(-1), 1, n}$  et  $\log_F$ .

**Proposition 3.4.17**

*Nous avons  $R_n = \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}))$ .*

Afin de pouvoir montrer cette égalité, nous avons besoin de plusieurs lemmes préliminaires.

Avant cela, rappelons que si  $e_1$  est une base de  $\text{Fil}^0 M$  et que  $e_2 = \varphi(e_1)$ , alors, par le lemme 3.4.10,  $(e_1, e_2)$  est une base de  $M$ . Alors  $\mathcal{D}(T_E)$  est un  $\Lambda$  module de rang 2 et de base  $((1 + \pi) \otimes e_1, (1 + \pi) \otimes e_2)$ .

Soit  $g(\varphi) = (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)^{-1} : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+ \rightarrow \mathbb{Q}_p[[\pi]]$  l'opérateur défini par :

$$g(\varphi) : \begin{cases} 1 \mapsto (1 - a_p/p + 1/p)^{-1} \\ f(\pi) \mapsto (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)^{-1} f(\pi) \text{ si } f(\pi) \in \pi \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+ \end{cases}$$

Soit  $\alpha = (1 + \pi) \otimes e_2$ . Soit  $Z = b_1(\pi)e_1 + b_2(\pi)e_2 \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)$  une solution de  $(\mathbb{1} - \varphi)Z = \alpha$ . Alors :

$$\begin{cases} b_1(\pi) + 1/p\varphi(b_2(\pi)) = 0 \\ b_2(\pi) - \varphi(b_1(\pi)) - \frac{a_p}{p}\varphi(b_2(\pi)) = 1 + \pi \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} b_1(\pi) = -1/p\varphi(b_2(\pi)) \\ (1 - \frac{a_p}{p}\varphi + \frac{1}{p}\varphi^2)b_2(\pi) = 1 + \pi. \end{cases}$$

Nous avons alors  $b_2(\pi) = g(\varphi)(1 + \pi)$ . Posons  $x_n = (g(\varphi)(1 + \pi))(\zeta_{p^n} - 1)$ .

En remplaçant  $\alpha = (1 + \pi) \otimes e_2$  par  $(1 + \pi) \otimes e_1$ , de la même manière, nous aboutissons à  $b_1(\pi) = g(\varphi)(\varphi(1 + \pi))$ . Soit  $y_n = (g(\varphi)(\varphi(1 + \pi)))(\zeta_{p^n} - 1)$ .

Les réciproques étant évidentes et comme  $\mathcal{D}(T_E)$  est un  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -module libre de base  $((1 + \pi) \otimes e_1, (1 + \pi) \otimes e_2)$ , il vient que  $R_n$  est un  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -module engendré par  $(x_n, y_n)$ .

**Lemme 3.4.18**

*Nous avons*

$$\begin{cases} x_n = \zeta_{p^n} + c_1 \zeta_{p^{n-1}} + \cdots + c_{n-1} \zeta_{p^1} + (1 - a_p/p + 1/p)^{-1} \\ y_n = \zeta_{p^{n-1}} + c_1 \zeta_{p^{n-2}} + \cdots + c_{n-2} \zeta_{p^1} + (1 - a_p/p + 1/p)^{-1} \end{cases}$$

avec  $c_l = \sum_{2i+j=l} (-1)^i \binom{i}{j} (-a_p/p)^{i-j} (1/p)^i$  est de valuation  $- \geq \lfloor l/2 \rfloor$ . Si  $l$  est pair alors cette majoration est une égalité.

*Démonstration.*

Comme  $g(\varphi)1 = (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)^{-1}$ , les termes derniers termes de  $x_n$  et  $y_n$  sont évidents.

Nous tirons d'autre part de  $g(\varphi) = (1 - a_p/p\varphi + 1/p\varphi^2)^{-1}$  sur  $\pi\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  l'égalité suivante :

$$g(\varphi) = 1 + \sum_{l=1}^{n-1} c_l \varphi^l \pmod{\varphi^n} \text{ avec } c_l = \sum_{2i+j=l} (-1)^i \binom{i}{j} (-a_p/p)^{i-j} (1/p)^i.$$

En remarquant que  $(\varphi^l(\pi)) (\zeta_{p^n} - 1) = \zeta_{p^{n-i}} - 1$ , nous obtenons les égalités sur  $x_n$  et  $y_n$ .

Enfin, pour obtenir la valuation de  $c_l$ , il suffit de savoir que  $a_p/p$  est dans  $\mathbb{Z}_p$ .

□

**Lemme 3.4.19**

*Nous avons la décomposition :*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+ = (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0} \oplus \varphi((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}) + pg(\varphi)\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+.$$

*Démonstration.*

Soit  $y = \varphi^2(x_0) \in \varphi^2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)$ . Comme  $a_p \in p\mathbb{Z}_p$ , il vient  $pg(\varphi)(a_1) - y \equiv 0$  modulo  $p\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$ .

Comme  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  se décompose sous la forme  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+ = (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0} \oplus \varphi((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}) \oplus \varphi^2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)$ , il existe donc  $a_1, b_1$  et  $y_1$  respectivement dans  $(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$ , dans  $\varphi((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0})$  et dans  $\varphi^2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)$  avec  $y = pg(\varphi)(x_0) + pa_1 + pb_1 + py_1$ .

Et ainsi de suite, en refaisant la même opération, nous obtenons :

$$y = pg(\varphi)(x_0) + \sum_{i \geq 0} p^i a_i + p^i b_i + p^i pg(\varphi)(y_0)$$

avec, pour tout  $i$  entier,  $a_i, b_i$  et  $x_i$  respectivement dans  $(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$ , dans  $\varphi((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0})$  et dans  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$ . □

**Lemme 3.4.20**

Soit  $\varrho_n : \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}_{p,n}$  qui à  $f(\pi)$  associe  $(g(\varphi)(f(\pi))) (\zeta_{p^n} - 1)$ . Nous avons alors  $R_n = \text{Im } \varrho_n$ .

*Première étape de la démonstration : reformulation du lemme.*

La résolution des équations  $(1 - \varphi)X = \alpha$  avec  $\alpha = (1 + \pi) \otimes e_i$  avec  $i = 1, 2$  que nous avons faite plus haut permet d'obtenir :

$$R_n = \varrho_n \left( (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0} \oplus \varphi((\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}) \right).$$

La décomposition du lemme précédent donne  $\text{Im } \varrho_n = R_n + \varrho_n(pg(\varphi)\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)$  et par suite  $R_n = R_n + p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}}$ . Pour démontrer le lemme, il suffit donc de montrer que  $p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} \subset R_n$ .  $\square$

*Fin de la démonstration du lemme 3.4.20.*

Montrons que  $p\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}}$  est inclus dans le  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -module  $R_n$ . Pour cela, le lemme 3.4.18 joue un rôle prépondérant.

Pour tout  $i$ , choisissons  $\gamma_i$  un générateur de  $\Gamma_i$  vérifiant  $\chi(\gamma_i) = 1 + p^i$ . Le lemme 3.4.18 et un rapide calcul donnent alors :

$$(\gamma_{n-1}^i - \mathbb{1})x_n = \zeta_{p^n}(\zeta_p^i - 1).$$

Nous tirons de cela  $\sum_{i=1}^{p-1} (\gamma_{n-1}^i - \mathbb{1})x_n = -p\zeta_{p^n}$ . Nous avons ainsi  $p\zeta_{p^n} \in R_n$ . Comme  $R_n$  est un  $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -module, il vient que  $p\zeta_{p^n}^a$  appartient à  $R_n$  pour tout  $a$  premier à  $p$ .

En reproduisant le même raisonnement avec  $y_n$  à la place de  $x_n$ , nous trouvons que  $p\zeta_{p^{n-1}}^a$  appartient à  $R_n$  pour tout  $a$  premier à  $p$ .

En procédant de la même manière, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{p-1} (\gamma_{n-3}^i - \mathbb{1})x_n = -p\zeta_{p^n} - pc_1\zeta_{p^{n-1}} + pc_2\zeta_{p^{n-2}}.$$

Comme, par le lemme 3.4.18, nous avons que  $c_1 \in \mathbb{Z}_p$  et que  $c_2 \in p\mathbb{Z}_p^\times$ , il vient que  $pc_2\zeta_{p^{n-2}}$  appartient à  $R_n$ . Et encore une fois, en remplaçant  $x_n$  à la place de  $y_n$ , nous obtenons  $pc_2\zeta_{p^{n-3}}$ .

De proche en proche, nous montrons que  $pc_{2i}\zeta_{p^{n-2i}}$  et  $pc_i\zeta_{p^{n-2i-1}}$  sont dans  $R_n$ . Le résultat escompté vient alors du fait que  $c_{2l}$  est de valuation  $-l$ ; en effet, nous venons de montrer que  $p\zeta_{p^m}^a$  est dans  $R_n$  pour tout  $1 \leq m \leq n$  et pour tout  $a$  premier à  $p$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.4.17.*

Il s'agit de montrer que  $R_n = \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}))$ . Comme, d'après le lemme précédent 3.4.20,  $R_n = \text{Im } \varrho_n$ , le lemme revient à dire que  $\text{Im } \varrho_n = \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}))$ . Montrons cela.

Par définition,  $\varrho_n(\mathbb{Z}_p) = p\mathbb{Z}_p$ . D'autre part,  $p\mathbb{Z}_p \subset \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}))$  — en effet,  $\log_F$  induit un isomorphisme entre  $F(p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p})$  et  $p\mathbb{Z}_p$ . Ainsi, il suffit de montrer que  $\varrho_n(\pi\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+) = \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}))$ ; cela se lit sur le diagramme commutatif du lemme qui suit.  $\square$

### Lemme 3.4.21

*Le diagramme suivant étant commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} (X\mathbb{Z}_p[[X]], +) & \xrightarrow[\sim]{E_F} & (X\mathbb{Z}_p[[X]], +_F) & \xrightarrow{\pi} & \\ \downarrow \varrho_n & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}_{p, n} & \xleftarrow[\log_F]{} & F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n}) & \xrightarrow{\zeta_{p^n} - 1} & \end{array}$$

*Démonstration.*

Seule l'injectivité de la flèche du bas nécessite d'être prouvée. Comme d'une part  $H^0(\mathbb{Q}_{p, n}, V_E/T_E) = H^0(\mathbb{Q}_{p, n}, V_E^*/T_E^*)$  est la partie de torsion de  $H_f^1(\mathbb{Q}_{p, n}, T_E)$  et comme d'autre part  $\sharp H^0(\mathbb{Q}_{p, n}, V_E/T_E) = 0$  (cf. lemme 3.4.15), il vient que  $H_f^1(\mathbb{Q}_{p, n}, T_E)$  est un  $\mathbb{Z}_p$ -module libre.

Or  $\log_F$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Q}_{p, n} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n}} F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_p, n})$  dans  $\mathbb{Q}_{p, n}$ ; nous obtenons donc l'injectivité de la flèche du bas.  $\square$

*Démonstration du lemme 3.4.16.*

Rappelons que  $v_n$  est un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} R_n$  et que l'homomorphisme  $j_n : \det_{\mathbb{Q}_p} t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n}) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$  est obtenu en passant au déterminant la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n}) \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)} \longrightarrow 0 \\ x \xrightarrow{f} ((1 - \varphi)x, x \text{ [mod Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V_E)]) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que  $j_n(\omega_E \otimes v_n^{-1}) = 1$ .

Soit  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n}$  un réseau de  $t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})$  tel que  $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n} = \mathbb{Z}_p \omega_E$  et  $\varpi$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n} \subset \det_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_{V_E}(\mathbb{Q}_{p, n})}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)}$ . Il est clair que

$$j_n(\omega_E \otimes v_n^{-1}) = j_n(\omega_E \otimes \varpi^{-1})(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n} : R_n).$$

Ainsi le lemme vient de

$$j_n(\omega_E \otimes \varpi^{-1}) = \det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)) = p^{-1}$$

et du lemme qui suit.  $\square$

**Lemme 3.4.22**

Nous avons  $(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : R_n) = p$ .

*Démonstration.*

Par le lemme 3.4.17, nous avons  $(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : R_n) = (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}})))$ . Comme  $\log_F$  induit un isomorphisme de  $F(p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}})$  dans  $p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}$ , d'où il vient ainsi :

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : R_n) &= (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}) (\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}) \\ &\quad \times (\log_F(F(p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}})) : \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}))). \end{aligned}$$

Or  $(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}) = p$ . Et finalement, comme  $\log_F$  est injectif sur  $\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}$  (voir lemme 3.4.4), il vient :

$$(\log_F(p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}) : \log_F(F(\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}))) = (p\mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : \mathfrak{M}_{\mathbb{Q}_{p,n}}).$$

Cela donne  $(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_{p,n}} : R_n) = p$  et finit de démontrer le lemme.  $\square$

**3.4.3 Le cas de certaines formes modulaires**

De la même manière que pour les courbes elliptiques, nous pouvons calculer  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  pour les représentations  $p$ -adiques provenant de certaines formes modulaires supersingulières. Nous pourrions alors préciser l'encadrement des nombres de Tamagawa donné dans les théorèmes 3.1.8 et 3.1.9.

Introduisons des notations qui serviront tout au long de cette section. Soit  $f$  une nouvelle forme modulaire pour le groupe  $\Gamma_0(N)$  de poids  $k$ . Soit  $\varepsilon : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$  le caractère de Dirichlet associé à  $f$ .

**Autour des représentations provenant de formes modulaires**

Pour plus de précisions, renvoyons d'ores et déjà à [Del]. Soit  $p$  un premier impair ne divisant pas  $N$ . La représentation  $p$ -adique  $V_f$  associée à  $f$  est cristalline de dimension 2; ses sauts de filtration sont  $k - 1$  et 0. Nous savons également que

$$\det(\mathbf{1} - \varphi X | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)) = 1 - a_p X + \varepsilon(p) p^{k-1} X^2 \text{ avec } a_p \in \mathbb{Z}_p.$$

Tout au long de ce paragraphe, nous supposons que  $f$  a une bonne réduction supersingulière, i.e. que  $\nu_p(a_p) > 0$ .

Pour tout  $1 \leq m \leq k-1$ , l'espace tangent  $t_{V_f(m)}(\mathbb{Q}_{p,n})$  est de dimension 1 et l'exponentielle de Bloch et Kato est alors un isomorphisme  $\exp_{\mathbb{Q}_{p,n}, V_f(m)}$  entre  $t_{V_f(m)}(\mathbb{Q}_{p,n})$  et  $H_f^1(\mathbb{Q}_{p,n}, V_f(m))$ .

Nous avons en outre  $\varphi^2 - a_p p^{-m} \varphi + \varepsilon(p) p^{k-1-2m} = 0$  sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f(m))$ .

**Lemme 3.4.23**

*Supposons  $k < p$  et  $1 \leq m \leq k-1$ . Il existe alors une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f(m))$  telle que  $e_2 = p^{1-k+m} \varphi(e_1)$  et  $e_1 \in \text{Fil}^{k-1-m} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f(m))$ .*

*Idée de démonstration.*

Comme le réseau  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f)$  est fortement divisible, en procédant comme dans le lemme 3.4.10, il est facile de trouver une base  $(e, p^{1-k} \varphi(e))$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f)$  avec  $e \in \text{Fil}^{k-1} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_f)$ .

Pour trouver la base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f(m))$  proposée dans le lemme, il suffit alors de tordre par la puissance  $m$  du caractère cyclotomique. En effet, nous avons  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f(m)) = \mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f) \otimes e_{-m}$ .  $\square$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, nous fixons une base  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T_f(m))$  comme dans le lemme.

**Autour de  $\Xi_{V_f(m),n}$  et de  $R_n$**

Jusqu'à la fin du paragraphe sur les formes modulaires, nous supposons que  $k < p$  et que  $1 \leq m \leq k-1$ . Nous ne travaillerons qu'avec la base  $(e_1, e_2)$  du lemme 3.4.23. Enfin, pour alléger les notations, posons  $W = V_f(m)$ .

Grâce au lemme B.3.2, l'homomorphisme  $\Xi_{W,n}$  peut être défini comme suit. Si  $\alpha \in \mathcal{D}(W)$  et si  $\beta \in \mathcal{H}(W)$  tel que  $(\mathbf{1} - \varphi)(\beta) = \alpha$ , alors

$$\Xi_{W,n}^\varepsilon(\alpha) = p^{-n} (0; (\sigma \otimes \varphi)^{-n}(\beta)(\zeta_{p^n} - 1)).$$

D'où  $R_n = \left\{ (0, Z(\zeta_{p^n} - 1)) \mid Z \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(W) \text{ et } (\mathbf{1} - \varphi)Z \in \mathcal{D}(T_f(m)) \right\}$ . Ainsi, comme dans le cas des courbes elliptiques,  $R_n$  peut-être exprimé en termes de solutions d'équations.

Faisons (rapidement) à nouveau le travail effectué pour les courbes elliptiques. Soit  $\alpha = (1 + \pi) \otimes e_1$ . Soit  $Y = b_1(\pi)e_1 + b_2(\pi)e_2$  dans  $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}_p}^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(W)$  une solution de  $(\mathbf{1} - \varphi)Y = \alpha$ ; alors :

$$\begin{cases} b_1(\pi) = -\varepsilon(p)p^{-m}\varphi(b_2(\pi)) + 1 + \pi \\ (1 - a_p/p^m\varphi + \varepsilon(p)p^{k-1-2m}\varphi^2)(p^{1-k+m}b_2(\pi)) = \varphi(1 + \pi). \end{cases}$$



De la même manière, si  $\alpha_2 = (1 + \pi) \otimes e_2$  et si un élément  $Z = \beta_1(\pi)e_1 + \beta_2(\pi)e_2$  de  $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^+ \otimes \mathbb{D}_{\text{cris}}(W)$  est solution de  $(\mathbf{1} - \varphi)Z = \alpha$ , alors :

$$\begin{cases} \beta_1(\pi) = -1/p\varphi(\beta_2(\pi)) \\ (1 - a_p/p^m\varphi + \varepsilon(p)p^{k-1-2m}\varphi^2)(p^{1-k+m}\beta_2(\pi)) = 1 + \pi. \end{cases}$$

### Un calcul en lien avec les courbes elliptiques

Lorsque  $k = 2m$  est pair,  $\varepsilon(p) = 1$  et lorsque  $\nu(a_p) \geq k/2$ , on peut lier le calcul de  $j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1})$  au travail fait dans le paragraphe 3.4.2. Cela permet d'obtenir le lemme suivant.

#### Lemme 3.4.24

Soit  $n \geq 0$  et  $\omega_n$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n}} \otimes \overline{M}$ . Nous avons :

$$j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) = p^{(k/2-1)[\mathbb{Q}_p, n: \mathbb{Q}_p]}.$$

*Première étape de la démonstration — lien avec les résultats du paragraphe 3.4.2.*

Soit  $b_2(\pi)$  et  $\beta_2(\pi)$  les deux solutions trouvées dans le paragraphe 3.4.3. Soit  $x_n = b_2(\zeta_{p^n} - 1)$  et  $y_n = \beta_2(\zeta_{p^n} - 1)$ . Le travail fait dans ce paragraphe amène à l'égalité  $R_n = \mathbb{Z}_p[G_n]x_n \oplus \mathbb{Z}_p[G_n]y_n$ .

D'un autre côté, remarquons que  $p^{1-k/2}x_n$  et  $p^{1-k/2}y_n$  sont les mêmes deux éléments que ceux que nous avons obtenus dans le paragraphe 3.4.2. Aussi, d'après le lemme 3.4.22, nous avons  $(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n} : p^{1-k/2}R_n) = p$ .

Les deux dernières égalités donnent  $(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n} : R_n) = p^{(k/2-1)[\mathbb{Q}_p, n: \mathbb{Q}_p]+1}$ .  $\square$

*Fin de la démonstration.*

Rappelons que  $j_n : \det_{\mathbb{Q}_p} t_W(\mathbb{Q}_p, n) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W) \oplus t_W(\mathbb{Q}_p, n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p$  est l'isomorphisme obtenu en passant au déterminant la suite exacte suivante :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(W) \xrightarrow{(\mathbf{1} - \varphi, \text{ mod Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(W))} \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E) \oplus t_W(\mathbb{Q}_p, n) \\ \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W) \oplus t_W(\mathbb{Q}_p, n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n}$  un réseau de  $t_W(\mathbb{Q}_p, n)$  tel que  $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n} = \mathbb{Z}_p\omega_E$  et  $\varpi$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n} \subset \det_{\mathbb{Q}_p} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W) \oplus t_W(\mathbb{Q}_p, n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(W)}$ . Il est clair que

$$\begin{aligned} j_n(\omega_n \otimes v_n^{-1}) &= j_n(\omega_n \otimes \varpi^{-1})(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}_p, n} : R_n) \\ &= \det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)) p^{(k/2-1)[\mathbb{Q}_p, n: \mathbb{Q}_p]+1}. \end{aligned}$$

La conclusion vient de  $\det(\mathbf{1} - \varphi | \mathbb{D}_{\text{cris}}(V_E)) \sim_p p^{-1}$ .  $\square$

Nous pouvons à présent préciser l'encadrement des théorèmes 3.1.8 et 3.1.9.

**Proposition 3.4.25**

Supposons que  $k = 2m \leq p$  est pair, que  $\varepsilon(p) = 1$  et que  $\nu(a_p) \geq k/2$ . Soit  $\omega_n$  un générateur de  $\det_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p, n} \otimes \bar{M}$ . Alors pour tout entier  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, n, \omega_n}^0(T_f(k/2)) &\leq \frac{\# H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_f^*(1 - k/2)/T_f^*(1 - k/2))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T_f(k/2)) : H_{Iw+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T_f(k/2)))} p^{n[\mathbb{Q}_p, n : \mathbb{Q}_p](k-2)} \\ &\quad \times |\Gamma_n^*(V_f(k/2))|_p \left| \frac{1}{(k/2)!} \right|_p p^{(k/2-1)[\mathbb{Q}_p, n : \mathbb{Q}_p]}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $n = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K, \omega_0}^0(T_f(k/2)) &\leq \frac{\# H^0(K, V_f^*(1 - k/2)/T_f^*(1 - k/2))}{(H^1(K, T_f(k/2)) : H_{Iw+f}^1(K, T_f(k/2)))} p^{[K : \mathbb{Q}_p](k-2)} \\ &\quad \times |\Gamma_0^*(V_f(k/2))|_p \left| \frac{1}{(k/2)!} \right|_p p^{(k/2-1)}. \end{aligned}$$

**Proposition 3.4.26**

Sous les mêmes hypothèses,  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{\mathbb{Q}_p, n, \omega_n}^0(T_f(k/2)) &\geq \frac{\# H^0(\mathbb{Q}_p, n, V_f^*(1 - k/2)/T_f^*(1 - k/2))}{(H^1(\mathbb{Q}_p, n, T_f(k/2)) : H_{Iw+f}^1(\mathbb{Q}_p, n, T_f(k/2)))} \\ &\quad \times |(k/2 - 1)|_p^{[\mathbb{Q}_p, n : \mathbb{Q}_p]} p^{(k/2-1)[\mathbb{Q}_p, n : \mathbb{Q}_p]}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $n = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{K, \omega_0}^0(T_f(k/2)) &\geq \frac{\# H^0(K, V_f^*(1 - k/2)/T_f^*(1 - k/2))}{(H^1(K, T_f(k/2)) : H_{Iw+f}^1(K, T_f(k/2)))} \\ &\quad \times |(k/2 - 1)|_p^{[K : \mathbb{Q}_p]} p^{(k/2-1)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.*

Comme nous avons  $\alpha = k - 2$ ,  $\alpha - t_H^+(V) - (k - 1) \dim_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{dR}}(V) = 0$  etc, il suffit d'appliquer le lemme 3.4.24 pour prouver ces deux propositions.  $\square$

# Annexe A

## Structure de $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}$

Le corps  $K$  est toujours supposé absolument non ramifié. Soit  $V$  une représentation cristalline et positive de  $G_K$  n'ayant pas de sous-quotient isomorphe à  $\mathbb{Q}_p(m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ . Soit  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ .

### A.1 Énoncé

Beaucoup des démonstrations de ce paragraphe sont semblables à celles de [LLZ10].

#### Proposition A.1.1

Le  $\Lambda$ -module  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  est libre de rang  $[K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ .

#### Corollaire A.1.2

Le  $\Lambda$ -module  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=1}$  est libre de rang  $[K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ .

*Démonstration du corollaire.*

Soit  $\psi_n$  l'application  $\psi$  agissant sur  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ . Le corollaire résulte directement de la proposition précédente puisque  $\varphi - 1$  induit la bijection suivante (voir par exemple dans la démonstration du lemme 3.6 de [BB08]) :

$$\varphi - 1 : \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\psi_n=1} \xrightarrow{\sim} \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T) \right)^{\psi_n=0}. \quad \square$$

Pour  $n = 1$ , la démonstration de la proposition A.1.1 a été donnée par A. Lei, D. Loeffler et S.L. Zerbes dans [LLZ10, théorème 3.5]. La preuve pour  $n$  quelconque n'en est qu'une adaptation.

## A.2 Préliminaires

Nous avons avant tout besoin de plusieurs résultats préliminaires; les deux lemmes qui suivent sont les lemmes 3.6 et 3.7 de [LLZ10].

Pour alléger les notations notons  $\eta_l = \prod_{j=0}^{l-1} (\mathbb{1} - \chi(\gamma_1)^{-j} \gamma_1)$  où, rappelons-le,  $\gamma_1$  est un générateur de  $\Gamma_1$ . Rappelons également que  $\gamma$  est un générateur topologique de  $\Gamma_K$ .

### Lemme A.2.1

Soit  $a \in \mathbb{Z}_p$ . Pour tout  $x \in \mathbb{N}(T)$ , tout  $f(\pi) \in \mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  et tout  $g \in \Gamma_K$ , nous avons

$$(\mathbb{1} - ag)(f(\pi)x) = ((\mathbb{1} - ag)f(\pi))x + ag(f(\pi))((\mathbb{1} - g)x).$$

### Lemme A.2.2

L'homomorphisme  $\Lambda \rightarrow (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$  qui à  $\alpha$  associe  $\alpha \cdot (1 + \pi)$  est un isomorphisme et envoie  $\eta_l \Lambda$  sur  $\varphi(\pi)^l (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$  pour tout  $l$ .

Soit  $(n'_1, \dots, n'_d)$  est une base de  $\mathbb{N}(T)$  sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  (donc  $d = [K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ ). Les propriétés du module de Wach (voir le second point de la proposition 1.4.1) donnent  $(\mathbb{1} - \gamma)n'_i = \pi m_i$  avec  $m_i \in \mathbb{N}(T)$ . Posons  $n_i = n'_i - \pi m_i / (1 - \chi(\gamma)) \in \mathbb{N}(T)$ .

Le lemme 3.9 de [LLZ10] implique que  $(n_1, \dots, n_d)$  est une base de  $\mathbb{N}(T)$  sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  et que  $(\mathbb{1} - \gamma)n_i \in \pi^2 \mathbb{N}(T)$ .

Soit  $\mathcal{N}$  le  $\Lambda$ -module engendré par  $(1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_1), \dots, (1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_d)$ .

### Lemme A.2.3

Soit  $l \geq 0$ . Soit  $x \in (\varphi(\pi^l)(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ . Il existe  $a \in \eta_l \mathcal{N}$  et  $z \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  tels que

$$x = a + \varphi(\pi^{l+1})z.$$

Si  $n = 1$ , c'est le lemme 3.11 de [LLZ10]. Montrons ce lemme pour  $n$  quelconque; soit  $n \geq 2$ . Procédons par récurrence sur  $l$ .

*Démonstration pour  $l = 0$ .*

Soit  $x \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ . La décomposition  $(\varphi^n)^*\mathbb{N}(T)^{\psi=0} = \bigoplus_i (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0} \varphi^n(n_i)$  permet d'écrire  $x = \sum_i x_i \varphi^n(n_i)$  avec  $x_i \in (\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$ .

Par le lemme A.2.2, il existe  $f_i(\gamma - \mathbb{1}) \in \Lambda$  tels que  $x_i = f_i(\gamma - \mathbb{1})(1 + \pi)$  pour tout  $i$ . Et comme  $(\mathbb{1} - \gamma)n_i \in \pi^2 \mathbb{N}(T)$  pour tout  $i$ , il vient

$$\sum_i x_i \varphi^n(n_i) - \sum_i f_i(\gamma - \mathbb{1}) \cdot ((1 + \pi)\varphi^n(n_i)) \in \varphi(\pi^2)((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}.$$

Cela prouve le lemme pour  $l = 0$  (et même un résultat légèrement plus fort).  $\square$

*Démonstration de l'hérédité.*

Soit  $l \geq 1$  ; supposons le résultat du lemme vrai pour  $l - 1$ . Soit  $x$  appartenant à  $\varphi(\pi^l)((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  ; nous pouvons alors écrire  $x = \sum_i x_i \varphi^n(n_i)$  avec  $x_i \in \varphi(\pi^l)(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+)^{\psi=0}$ .

Une fois encore, le lemme A.2.2 entraîne l'existence de  $f_i(\gamma - \mathbf{1}) \in \eta_l \Lambda$  tels que  $x_i = f_i(\gamma - \mathbf{1})(1 + \pi)$ . Par définition, pour tout  $i$ , il existe  $g_i(\gamma - \mathbf{1}) \in \Lambda$  divisible par  $\eta_{l-1}$  tel que

$$f_i(\gamma - \mathbf{1}) = (\mathbf{1} - \chi(\gamma_1)^{1-l} \gamma_1) g_i(\gamma_1 - \mathbf{1}).$$

Soit  $y_i = g_i(\gamma - \mathbf{1})(1 + \pi)$ . Par le lemme A.2.1, il vient alors :

$$\begin{aligned} x &= \sum (\mathbf{1} - \chi(\gamma_1)^{1-l} \gamma_1) (y_i) \varphi^n(n_i) \\ &= (\mathbf{1} - \chi(\gamma_1)^{1-l} \gamma_1) \left( \sum_i y_i \varphi^n(n_i) \right) - \chi(\gamma_1)^{1-l} \sum_i \gamma_1(y_i) (\mathbf{1} - \gamma_1) (\varphi^n(n_i)). \end{aligned}$$

Or  $\varphi(\pi)^{l-1}$  divise  $y_i$  — en effet,  $\eta_{l-1}$  divise  $g_i(\gamma - \mathbf{1})$  — et  $(\mathbf{1} - \gamma_1) \varphi^n(n_i) \in \pi^2 \mathbb{N}(T)$  donc

$$z'_0 = \chi(\gamma_1)^{1-l} \sum_i \gamma_1(y_i) ((\mathbf{1} - \gamma_1) (\varphi^n(n_i))) \in \varphi(\pi)^{l+1} ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$$

De plus  $\sum_i y_i \varphi^n(n_i)$  peut, d'après l'hypothèse de récurrence, s'écrire sous la forme

$$\sum y_i \varphi^n(n_i) = a + \varphi(\pi^l) z \text{ avec } a \in \eta_{l-1} \mathcal{N} \text{ et } z \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}.$$

Posons

$$\begin{cases} a_0 = (\mathbf{1} - \chi(\gamma_1)^{1-l} \gamma_1) a \\ \varphi(\pi^{l+1}) z_0 = z'_0 + (\mathbf{1} - \chi(\gamma_1)^{-l} \gamma_1) (\varphi(\pi^l) z) \in \varphi(\pi)^{l+1} ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0} \\ p x_1 = (\chi(\gamma_1)^{1-l} - \chi(\gamma_1)^{-l}) \gamma_1 (\varphi(\pi^l) z) \end{cases}$$

(la seconde ligne provient une nouvelle fois du fait que  $\Gamma_1$  agit trivialement sur  $\mathbb{N}(T)/\pi \mathbb{N}(T)$ ).

En mettant bout à bout les derniers points, voilà la situation dans laquelle nous sommes. Nous avons alors  $x = a_0 + \varphi(\pi^{l+1}) z_0 + p x_1$  avec :

- 1)  $a_0 \in \eta_l \mathcal{N}$ ,
- 2)  $z_0 \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ ,
- 3)  $x_1 \in \varphi(\pi)^l((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ .

En itérant, nous obtenons des suites  $(a_j)_j \subset \eta_l \mathcal{N}$ ,  $(z_j)_j \subset ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  telles que  $x_i = a_i + \varphi(\pi^{l+1})z_i + px_{i+1}$ . Pour obtenir le lemme, il suffit dès lors de poser

$$a = \sum_j p^j a_i \text{ et } z = \sum_j p^j z_i. \quad \square$$

### A.3 Démonstration de la proposition A.1.1

Nous pouvons à présent prouver le résultat principal de cet appendice c'est-à-dire montrer que le module  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  est libre et de rang  $[K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$  sur  $\Lambda$ .

*Démonstration.*

Soit  $(n_1, \dots, n_d)$  est la base de  $\mathbb{N}(T)$  sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}_p}^+$  introduite plus haut ; nous avons alors  $d = [K : \mathbb{Q}_p] \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}_p} T$ . Soit  $\mathcal{N}$  le  $\Lambda$ -module engendré par les  $(1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_i)$ .

Il suffit de montrer que  $((1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_1), \dots, (1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_d))$  est une  $\Lambda$ -base de  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ . Pour cela, nous allons prouver que le morphisme  $\delta$  de  $\Lambda^d$  dans  $((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  défini par

$$(g_i(\gamma - \mathbb{1}))_i \mapsto \sum_i g_i(\gamma - \mathbb{1})((1 + \pi) \otimes \varphi^n(n_i))$$

est en fait un isomorphisme.

Soit  $l$  un entier. L'application  $(\Lambda^d/c_l \Lambda)^d \rightarrow ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0} / \varphi(\pi^l)((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$  est donc surjective (voir lemme A.2.2). Ces deux derniers  $\mathbb{Z}_p$ -modules étant de plus libres de même rang, nous en tirons la bijectivité de cet homomorphisme. Nous déduisons de cela que le noyau de  $\delta$  est égal à  $\bigcap_{l \geq 0} c_l \Lambda^d$ , i.e. est nul.

Si d'autre part,  $x \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ , le lemme A.2.3 permet d'écrire

$$x = a_0 + a_1 + \dots + a_l + \varphi(\pi^{l+1})z_l$$

avec  $a_i \in \eta_i \mathcal{N}$  et  $z_l \in ((\varphi^n)^*\mathbb{N}(T))^{\psi=0}$ . En faisant tendre  $l$  vers l'infini, nous trouvons que  $x \in \mathcal{N}$ . Ainsi la proposition est démontrée.  $\square$

# Annexe B

## Complément sur la construction de $(\varphi, \Gamma)$ -modules

### B.1 Démonstration du lemme 2.2.1

Dans ce paragraphe nous démontrons le lemme que nous avons admis dans le paragraphe 2.2.2. Rappelons-en l'énoncé et renvoyons à ce paragraphe pour les diverses définitions.

#### Lemme B.1.1

Soit  $\psi_n$  l'application  $\psi$  agissant sur  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ . Il existe un unique  $\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha)$  dans  $(\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))))^{\psi_n=1}$  tel que

$$(\varphi - \mathbf{1}) \cdot \mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha) = (\gamma_n - \mathbf{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha).$$

*Démonstration.*

Remarquons dans un premier temps que l'élément  $(\gamma_n - \mathbf{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)$  appartient à  $(\mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k))^{\psi_n=0}$  où  $\psi_n$  est l'application  $\psi$  agissant sur  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ . En effet, la proposition 3.1.3 de [Ben00] dit que

$$\begin{aligned} (\gamma_n - \mathbf{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) &\equiv (\gamma_n - \mathbf{1}) (E_{k,n}(f(\pi)) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k}) \\ &\equiv \frac{1 - \chi(\gamma_n)}{kp} f(\pi_n) \otimes m \otimes \varepsilon^{\otimes k} \\ &\equiv \frac{1 - \chi(\gamma_n)}{kp} \sum_i a_i(0) f(\pi_n) \otimes n_i \otimes \varepsilon^{\otimes k} \pmod{\pi_n \mathbb{N}(T)(k)}. \end{aligned}$$

Il suit que  $(\gamma_n - \mathbb{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)$  appartient à  $\mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k)$ . Comme de plus  $\partial_n^{-j}(1 + \pi_n)$  est tué par  $\psi_n$  et comme  $\psi_n(\pi^l x) = \pi_n^l \psi_n(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{A}_{K_n}^+$ , il vient que  $\mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha)$  est tué par  $\psi_n$ . Nous en déduisons que

$$(\gamma_n - \mathbb{1}) \mathcal{E}_{T,k,n}(\alpha) \in \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=0}.$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la démonstration du corollaire A.1.2,  $\varphi - \mathbb{1}$  induit la bijection

$$\varphi - \mathbb{1} : \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=1} \xrightarrow{\sim} \left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=0}.$$

Cela nous assure de l'existence et l'unicité d'une solution  $\mathcal{F}_{T,k,n}(\alpha)$  dans un premier temps dans  $\left( \mathbb{A}_{K_n}^+ \otimes_{\mathbb{A}_K^+} \mathbb{N}(T)(k) \right)^{\psi_n=1}$  et donc dans  $(\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k))))^{\psi_n=1}$  dans un second temps puisque  $\varphi - \mathbb{1}$  est injectif sur  $\varphi^{-n}(\mathbb{D}(T(k)))$  car  $V^{H_K} = 0$ .  $\square$

## B.2 Démonstration du lien entre $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$ et l'exponentielle de Bloch et Kato

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.2.2, le lemme précédent permet alors de construire l'homomorphisme  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$ .

D. Benois a montré dans [Ben00, théorème 4.3] la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(V)^{\Delta=0} & \xrightarrow{\Omega_{T,k,n}^\varepsilon} & H^1(K, V(k)) . \\ \Xi_{V,k,n}^\varepsilon \downarrow & & \parallel \\ t_V(K_n) & \xrightarrow[\times \exp_{K_n, V(k)}]{(-1)^k (k-1)!} & H^1(K, V(k)) \end{array}$$

Dans ce paragraphe, nous montrons à nouveau ce lien avec l'hypothèse supplémentaire  $V^{H_K} = 0$ ; dans ce cas, nous avons  $\mathcal{D}(V)^{\Delta=0} = \mathcal{D}(V)$ .

### Proposition B.2.1

Soit  $V$  une représentation positive vérifiant  $V^{H_K} = 0$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,  $n \geq 1$  et pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}(T)$ , nous avons :

$$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon(\alpha) = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V(k)} \left( \Xi_{V,k,n}^\varepsilon(\alpha) \right).$$



**Résultats préliminaires.** Pour tout élément  $f(\pi)$  de  $\mathcal{R}_K^+$ , l'élément  $S_{k,n}(f(\pi))$  de  $\mathrm{Fil}^0 \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$  est défini par la formule

$$S_{k,n}(f(\pi)) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} p^{n(j-k)} \frac{1}{(k-j)!} t^{k-j} \partial_n^{k-j}(f(\pi_n)).$$

Renvoyons à [Ben00] pour quelques propriétés de cette application  $S_{k,n}$ . Nous avons par exemple

$$(B.2.1) \quad S_{k,n}(f(\pi)) \equiv f(\zeta_{p^n} - 1) \left[ \mathrm{mod} \mathrm{Fil}^k \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \right].$$

Notons aussi  $S_{k,n}$  l'application obtenue en tensorisant par  $\mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)$  :

$$S_{k,n} : \mathcal{R}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(k)) \rightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(k)).$$

Vient alors le lemme suivant (cf [PR94, proposition 2.3.6] ou [Ben00, lemme 4.1.5]).

**Lemme B.2.2**

Soit  $\alpha \in \mathcal{R}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(k))$ . Il existe  $a \in \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(k)))$  tel que :

$$(\mathbb{1} - \varphi)(a) = S_{k,n}((\mathbb{1} - \varphi)\alpha) = (\mathbb{1} - \varphi)S_{k,n}(\alpha).$$

Soit  $b = (\gamma_n - \mathbb{1})(S_{k,n}(\alpha))$  et  $k(g)$  tel que  $\gamma_n^{k(g)} = g|_{K_\infty}$ . Alors la classe de  $\exp_{K_n, V(k)}(\alpha(\zeta_{p^n} - 1))$  dans  $H^1(K_n, V(k))$  est représentée par le cocycle :

$$g \mapsto (g - \mathbb{1})(-a) + (g - \mathbb{1})S_{k,n}(\alpha) = (g - \mathbb{1})(-a) + (\mathbb{1} + \gamma_n + \cdots + \gamma_n^{k(g)-1})b.$$

*Idee de démonstration.*

L'existence d'un tel  $a$  résulte immédiatement de la suite exacte fondamentale (2.1.1) tensorisée par  $V(k)$ . Prouvons le second point.

Nous avons la congruence

$$\alpha(\zeta_{p^n} - 1) \equiv S_{k,n}(\alpha) - a \left[ \mathrm{mod} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k) \right]$$

et l'égalité  $(\mathbb{1} - \varphi)(S_{k,n}(\alpha) - a) = 0$ .

Ainsi  $S_{k,n}(\alpha) - a \in \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V(k)) \simeq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$  et son image par la dernière flèche de la suite exacte fondamentale est  $(0; \alpha(\zeta_{p^n} - 1) \left[ \mathrm{mod} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k) \right])$ . Cela permet de voir que le cocycle

$$g \mapsto (g - \mathbb{1})(-a) + (g - \mathbb{1})S_{k,n}(\alpha)$$

est un représentant de la classe de  $\exp_{K_n, V(k)}(\alpha(\zeta_{p^n} - 1))$ . □

**Lemme B.2.3**

(i) Soit  $\alpha \in (\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k))^{H_K}$  et  $\beta \in (\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k))^{H_K}$  tels que

$$(\gamma_n - \mathbf{1})\alpha = (\varphi - \mathbf{1})\beta.$$

Il existe  $u \in \text{Fil}^0(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k))$  tel que  $(\mathbf{1} - \varphi)(u) = \alpha$  et l'application suivante est un cocycle continu :

$$\mu_{\alpha, \beta} : \begin{cases} G_{K_n} \rightarrow V(k) \\ g \mapsto (g - \mathbf{1})u + (\mathbf{1} + \gamma_n + \cdots + \gamma_n^{k(g)-1})\beta. \end{cases}$$

(ii) Si  $\alpha'$  et  $\beta'$  vérifient les mêmes propriétés que  $\alpha$  et  $\beta$  avec en outre

$$\alpha' \equiv \alpha \pmod{\pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k)},$$

alors les cocycles  $\mu_{\alpha, \beta}$  et  $\mu_{\alpha', \beta'}$  sont homologues.

*Précision sur la démonstration.*

Renvoyons pour cette preuve au lemme 4.4.5.1 de [Ben00]. Notons cependant que, dans notre cas, dans (ii), l'hypothèse  $\beta' \equiv \beta \pmod{\pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k)}$  du lemme de D. Benois peut être supprimée.

En effet si  $\alpha' - \alpha \in \pi_n (\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k))^{H_K}$ , alors

$$(\varphi - \mathbf{1})(\beta' - \beta) = (\gamma_n - \mathbf{1})(\alpha' - \alpha) \in \pi_n (\mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k))^{H_K}.$$

Or la suite exacte fondamentale dit que  $\mathbf{1} - \varphi$  est inversible sur  $\pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+$  ce qui permet de retrouver la congruence

$$\beta' \equiv \beta \pmod{\pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k)}. \quad \square$$

**Preuve de la proposition B.2.1.** Il est plus commode de montrer l'égalité suivante pour tout  $\beta \in \mathcal{D}(V(k))$  :

$$(B.2.2) \quad \Omega_{T, k, n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta) = (-1)^k (k-1)! \exp_{K_n, V(k)}(\Xi_{V, k, n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta)).$$

Dans un premier temps, nous travaillons avec  $\Xi_{V, k, n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta)$  afin de trouver une écriture plus adéquat pour montrer l'égalité B.2.2. Cela permet ensuite de trouver un représentant du cocycle  $\exp(\Xi_{V, k, n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta))$ . Nous pourrons alors montrer la proposition B.2.1.

*Première étape : ré-écriture de  $\Xi_{V, k, n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta)$ .*

Soit donc  $\beta = f(\pi) \otimes m \in \mathcal{D}(V(k))$  (i.e.  $(\partial^k \otimes e_k)\beta \in \mathcal{D}(V)$ ). De l'égalité  $\partial \circ \varphi = p\varphi \circ \partial$ , nous tirons

$$\begin{aligned} \Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta) &= \Xi_{V(k),n}^\varepsilon((\partial^{-k} \otimes e_{-k})(\sigma \otimes \varphi)^n(\partial^k \otimes e_k)\beta) \\ &= p^{nk} \Xi_{V(k),n}^\varepsilon((\sigma \otimes \varphi)^n \beta). \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned} \Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta) &= p^{n(k-1)} \left( -(\sigma \otimes \varphi)^n(\beta)(0); \sum_{l=1}^n (\sigma \otimes \varphi)^{n-l}(\beta)(\zeta_{p^l} - 1) \right) \\ &= p^{n(k-1)} \left( -\varphi^n(\beta(0)); \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta)(\zeta_{p^n} - 1) \right) \quad \square. \end{aligned}$$

*Seconde étape : mise en avant d'un représentant de  $\exp_{K_n, V(k)}(\Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta))$ .*  
Pour alléger les notations, posons :

$$\begin{cases} a_1 = p^{n(k-1)} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta)(\zeta_{p^n} - 1) \in t_{V(k)}(K_n) \text{ et} \\ a_2 = -p^{n(k-1)} \varphi^n(\beta(0)) \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)). \end{cases}$$

En vertu du lemme B.2.2, la classe de  $\exp(a_1)$  dans  $H^1(K_n, V(k))$  est représentée par le cocycle :

$$(B.2.3) \quad g \mapsto (g - \mathbf{1})(-a) + (\mathbf{1} + \gamma_n + \cdots + \gamma_n^{k(g)-1})(b)$$

où  $a$  désigne une solution dans  $\text{Fil}^0(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)))$  de l'équation

$$(\mathbf{1} - \varphi)a = S_{k,n} \left( (\mathbf{1} - \varphi) p^{n(k-1)} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta) \right)$$

et où  $b = (\gamma_n - \mathbf{1}) S_{k,n} \left( p^{n(k-1)} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta) \right)$ .

Soit  $c$  une solution dans  $\text{Fil}^0(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)))$  de l'équation suivante :

$$(\mathbf{1} - \varphi)c = a_2.$$

Comme la dernière flèche de la suite exacte fondamentale envoie par construction  $c$  sur  $(a_2; 0)$ , la classe de  $\exp(a_2)$  dans  $H^1(K_n, V(k))$  est représentée par le cocycle :

$$(B.2.4) \quad g \mapsto (g - \mathbf{1})c.$$

Ainsi en mettant bout à bout les égalités B.2.3 et B.2.4, nous trouvons un représentant de  $\exp(\Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta))$ .  $\square$

*Troisième étape : fin de la démonstration.*

Faisons avant tout le point sur ce que nous avons obtenu.

- $a$  est une solution dans  $\text{Fil}^0(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)))$  de l'équation

$$(\mathbf{1} - \varphi)a = S_{k,n} \left( (\mathbf{1} - \varphi)p^{n(k-1)} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta) \right).$$

- $b = (\gamma_n - \mathbf{1})S_{k,n} \left( p^{n(k-1)} \sum_{l=0}^{n-1} \varphi^l(\beta) \right)$ .
- $c$  une solution dans  $\text{Fil}^0(\mathbb{B}_{\text{cris}} \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)))$

$$(\mathbf{1} - \varphi)c = -p^{n(k-1)}\varphi^n(\beta(0)) \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)).$$

- L'élément  $\exp(\Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta))$  de  $H^1(K_n, T(k))$  est représenté, d'après les points (B.2.3) et (B.2.4), par le cocycle

$$g \mapsto (g - \mathbf{1})(-a + c) + (\mathbf{1} + \gamma_n + \dots + \gamma_n^{k(g)-1})b.$$

Aussi prouver la proposition, i.e. pour montrer que

$$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta) = (-1)^k(k-1)! \exp_{K_n, V(k)}(\Xi_{V,k,n}^\varepsilon((\partial^k \otimes e_k)\beta)),$$

il suffit, d'après lemme B.2.3, de montrer la congruence qui suit

$$(B.2.5) \quad c_{k,n}(\mathbf{1} - \varphi)(-a + c) \equiv \mathcal{E}_{T,k,n}((\partial^k \otimes e_k)\beta) \left[ \text{mod } \pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k) \right]$$

où  $c_{k,n} = (-1)^k(k-1)!$ .

Montrons cela. Les définitions de  $\mathcal{E}_{T,k,n}$ , de  $E_{k,n}$  et de  $S_{k,n}$  donnent

$$\mathcal{E}_{T,k,n}((\partial^k \otimes e_k)\beta) \equiv (-1)^{k-1}(k-1)! p^{n(k-1)} S_{k,n}(\beta) \left[ \text{mod } \pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k) \right].$$

D'un autre côté, nous avons également

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \varphi)(-a + c) &\equiv p^{n(k-1)} (-S_{k,n}(\beta) + S_{k,n}(\varphi^n(\beta)) - \varphi^n(\beta(0))) \\ &\equiv -p^{n(k-1)} S_{k,n}(\beta) \left[ \text{mod } \pi_n \mathbb{B}_{\text{cris}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k) \right] \end{aligned}$$

car en utilisant la congruence (B.2.1), nous avons

$$\begin{aligned} S_{k,n}(\varphi^n(\beta)) - \varphi^n(\beta)(0) &\equiv \varphi^n(\beta)(\zeta_{p^n} - 1) - \varphi^n(\beta(0)) \\ &\equiv (\sigma \otimes \varphi)^n(\beta)(0) - \varphi^n(\beta(0)) \\ &\equiv 0 \pmod{t\mathbb{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(k)}. \end{aligned}$$

La congruence (B.2.5) voulue découle de ces deux derniers points. Nous pouvons à présent appliquer le lemme B.2.3 pour obtenir la proposition.  $\square$

### B.3 Autour de $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$

Soit  $V$  une représentation  $p$ -adique positive cristalline de  $G_K$  telle que  $V^{H_K} = 0$  et  $T$  un réseau de  $V$  stable par  $G_K$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 0$ . Dans le chapitre 2, §2.2, nous avons construit deux applications  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$  et  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ . Ces deux homomorphismes sont liés sur  $\mathcal{D}(V)$  par la formule

$$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon = (-1)^k (k-1)! \exp_{V(k), K_n} \circ \Xi_{V,k,n}^\varepsilon.$$

Pour pouvoir utiliser  $\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$ , nous avons besoin de mieux connaître  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ . C'est l'objet de ce paragraphe (un peu plus technique).

Nous introduisons pour cela un nouveau opérateur  $\Theta$  qui lui a déjà été étudié par B. Perrin-Riou ou D. Benois-L. Berger. Comme nous le verrons par la suite,  $\Theta$  est lié à  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ .

Nous supposons toujours que  $V^{H_K} = 0$ . Soient  $k > 0$  tel que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$  et  $n$  un entier strictement positif.

Rappelons que pour tout entier  $n$  strictement positif, l'homomorphisme  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$  est l'application composée  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon = \Xi_{V(k),n}^\varepsilon \circ (\partial^{-k} \otimes e_{-k}) \circ (\sigma \otimes \varphi)^n$  où

$$\Xi_{V(k),n}^\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{D}(V(k)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))} \\ \alpha \mapsto p^{-n} \left( -\alpha(0); \sum_{l=1}^n (\sigma \otimes \varphi)^{-l}(\alpha)(\zeta_{p^l} - 1) \right). \end{cases}$$

Pour tout twist  $V(l)$  de  $V$  par une puissance entière du caractère cyclotomique, posons  $\Delta_l = \bigoplus_{j=0}^l \Delta_l^j$  et  $\Delta = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_l^j$  où, tout  $j$  entier, l'homomorphisme  $\Delta_j$  est défini par

$$\Delta_l^j : \begin{cases} \mathcal{D}(V(l)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(l))}{(\mathbf{1} - p^j \varphi) \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(l))} \\ f \otimes m \mapsto (\partial^j f)(0) \otimes m \pmod{(\mathbf{1} - p^j \varphi) \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(l))}. \end{cases}$$

**Lemme B.3.1**

(i) Si  $\mathcal{H}(T) = (\mathbb{A}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(T))^{\psi=1}$ , alors nous avons l'isomorphisme

$$\varphi - 1 : \mathcal{H}(T) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(T).$$

(ii) Soit  $k \geq 0$ . Si  $\mathcal{H}(V(k)) = (\mathbb{B}_K^+ \otimes_K \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)))^{\psi=1}$ , alors  $\varphi - 1$  induit la surjection

$$\varphi - 1 : \mathcal{H}(V(k)) \rightarrow \mathcal{D}(V(k))^{\Delta_k=0}.$$

*Démonstration.*

Le second point résulte de la suite exacte de B. Perrin-Riou (voir [PR94, §2.2.7]).  
 Démontrons le premier. La démonstration du lemme 4.1.3 de [Ben00] donne la suite exacte qui suit :

$$0 \longrightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}(T)^{\varphi=1} \longrightarrow \mathcal{H}(T) \xrightarrow{1-\varphi} \mathcal{D}(T)^{\Delta_0=0} \longrightarrow 0.$$

Notons que cette suite est le pendant entier de la suite exacte de B. Perrin-Riou (loc. cit.).

Or  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V) = \text{Fil}^0 \mathbb{D}_{\text{cris}}(V)$  et  $V^{H_K} = 0$  donc  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)^{\varphi=1} = 0$  d'une part et  $\mathcal{D}(V)^{\Delta_0=0} = \mathcal{D}(V)$  d'autre part. Cela permet d'obtenir le premier point et donc de terminer la preuve du lemme.  $\square$

Soit  $\Theta : \mathcal{D}(V(k))^{\Delta=0} \rightarrow \mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V(k))/\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))^{\varphi=1}$  l'application définie par

$$\Theta(\alpha) = p^{-n}(\sigma \otimes \varphi)^{-n}(\beta)(\zeta_{p^n} - 1)$$

où  $\beta \in \mathcal{H}(V(k))$  est tel que  $(1 - \varphi)(\beta) = \alpha$  — le lemme B.3.1 entraîne l'existence d'un tel  $\beta$ . Cet homomorphisme est noté  $\Xi_{n,V}$  dans [PR94] ou  $\Xi_{V,n}^\varepsilon$  dans [BB08].

Comme  $\varphi$  et  $\gamma$  commutent, l'homomorphisme  $\Theta$  s'annule sur  $(\gamma_n - 1) \mathcal{D}(V(k))^{\Delta=0}$ . Il induit donc l'application

$$\tilde{\Theta} : (\mathcal{D}(V(k))^{\Delta=0})_{\Gamma_n} \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{dR}}^{K_n}(V(k))}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))^{\varphi=1}}.$$

Le lemme suivant permet de faire le lien entre le  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$  et  $\tilde{\Theta}$ .

**Lemme B.3.2**

(i) Soit  $\alpha \in \mathcal{D}(V(k))^{\Delta_k=0}$  et  $\beta \in \mathcal{H}(V(k))$  tel que  $(1 - \varphi)(\beta) = \alpha$ ; nous avons alors :

$$\Xi_{V(k),n}^\varepsilon(\alpha) = p^{-n} (0; (\sigma \otimes \varphi)^{-n}(\beta)(\zeta_{p^n} - 1)).$$

(ii) Le lemme B.3.2 permet de voir que le diagramme qui suit est commutatif :

$$(B.3.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(V(k))_{\Gamma_n}^{\Delta=0} & \xrightarrow{\tilde{\Theta}} & \frac{\mathbb{D}_{dR}^{K_n}(V(k))}{\mathbb{D}_{cris}(V(k))^{\varphi=\mathbb{1}}} \\ & \searrow \Xi_{V(k),n}^\varepsilon & \downarrow \\ & & \frac{t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{cris}(V(k))^{\varphi=\mathbb{1}}} \\ & & \downarrow \\ & & \frac{\mathbb{D}_{cris}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{cris}(V(k))} \end{array}$$

(la première flèche verticale est la surjection canonique et la seconde est l'inclusion naturelle).

*Démonstration.*

Voir [BB08, lemme 4.9] pour le premier point. Le second est une conséquence immédiat du premier.  $\square$

Ce dernier lemme permet de rapprocher des résultats sur  $\tilde{\Theta}$  et certaines propriétés de  $\Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ . Ainsi, pour connaître  $\Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ , il suffit d'étudier plus profondément  $\tilde{\Theta}$ . C'est ce qui est fait dans la suite du paragraphe.

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}(V(k))^{\Delta=0} \longrightarrow \mathcal{D}(V(k)) \longrightarrow \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{\mathbb{D}_{cris}(V(k))}{(\mathbb{1}-p^j\varphi)\mathbb{D}_{cris}(V(k))} \right) (j) \longrightarrow 0$$

induit par cohomologie une application  $\mathbb{D}_{cris}(V(k))/(\mathbb{1}-\varphi) \rightarrow \mathcal{D}(V(k))_{\Gamma_n}^{\Delta=0}$ . Vient alors la proposition suivante :

### Proposition B.3.3

L'image de  $\frac{\mathbb{D}_{cris}(V(k))}{(\mathbb{1}-\varphi)\mathbb{D}_{cris}(V(k))}$  dans  $\mathcal{D}(V(k))_{\Gamma_n}^{\Delta=0}$  est contenue dans  $\ker(\tilde{\Theta})$ . La suite qui vient est exacte :

$$0 \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{cris}(V(k))}{(\mathbb{1}-\varphi)\mathbb{D}_{cris}(V(k))} \longrightarrow \ker(\tilde{\Theta}) \xrightarrow{f} \mathbb{D}_{cris}(V(k))^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow 0$$

(l'application  $f$  est donnée par  $f(\alpha) = \alpha(0)$ ).

Nous avons de plus l'isomorphisme

$$\text{coker}(\tilde{\Theta}) \xrightarrow{\text{Tr}_{K_n/K}} \frac{\mathbb{D}_{cris}(V(k))}{(\mathbb{1}-p^{-1}\varphi^{-1})\mathbb{D}_{cris}(V(k))}.$$

*Démonstration.*

Voir [PR94, § 3.4.4 et § 3.4.5] ou [BB08, proposition 3.2].  $\square$

**Proposition B.3.4**

Supposons que  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$ . L'homomorphisme  $\Xi_{V(k),n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V(k)) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}$  est alors surjectif.

*Démonstration.*

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))^{\varphi=1}} \longrightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))} \xrightarrow{s} \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}{1-\varphi} \longrightarrow 0$$

pousse à attaquer le problème de biais en regardant

- 1) l'inclusion  $\frac{t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))^{\varphi=1}} \subset \text{Im } \Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ ,
- 2) la surjectivité de la composée de  $s \circ \Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ .

Ces deux points suffisent naturellement à montrer la surjectivité de  $\Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ .

Le premier point est vrai puisque  $\tilde{\Theta}$  est surjectif —  $\varphi - p^{-1}\mathbf{1}$  agissant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$  est bijectif par hypothèse — et puisque le diagramme (B.3.1) est commutatif.

Le second point est aussi vrai. En effet, l'application composée  $s \circ \Xi_{V(k),n}^\varepsilon$  n'est autre que l'application qui à  $\alpha \in \mathcal{D}(V(k))$  associe  $p^{-n}\alpha(0)$ . Cet homomorphisme est surjectif puisque si  $x \in \mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$ , alors  $(1 + \pi) \otimes x$  appartient à  $\mathcal{D}(V)$ .  $\square$

Le corollaire suivant est dès lors immédiat.

**Corollaire B.3.5**

Si  $1/p$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  opérant sur  $\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))$ , alors l'homomorphisme  $\Xi_{V,k,n}^\varepsilon : \mathcal{D}(V) \rightarrow \frac{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k)) \oplus t_{V(k)}(K_n)}{\mathbb{D}_{\text{cris}}(V(k))}$  est surjectif.



# Index

$\{., .\}$ .....	52	$\partial$ .....	51
$(.,.)_{T,n}$ .....	49	$\partial_n$ .....	50
$\mathbb{A}$ .....	24	$\mathscr{D}(T)$ .....	50
$\mathbb{A}_{\text{cris}}$ .....	30	$\mathscr{D}(V(k))$ .....	50
$A^\eta$ .....	110	$\mathscr{D}(V)$ .....	48
$\mathbb{A}_K$ .....	25	$\mathbb{D}_{\text{cris}}$ .....	30
$\mathbb{A}_{K_0}$ .....	24	$\mathbb{D}_{\text{cris}}(T)$ .....	50
$\mathbb{A}_{K_0}^+$ .....	24	$\Delta$ .....	141
$A_n$ .....	84	$\delta_i$ .....	68
$\mathbb{A}^+$ .....	24	$\Delta_K$ .....	20
$\tilde{\mathbb{A}}^+$ .....	26	$\det$ .....	29
$\tilde{\mathbb{A}}$ .....	24	$e_{-k}$ .....	51
$\alpha$ .....	74	$e_\eta$ .....	69
$\tilde{\alpha}_{V,L}$ .....	29	$\tilde{\mathbb{E}}^+$ .....	22
$\alpha_{V,K}$ .....	29	$\tilde{\mathbb{E}}$ .....	22
$\alpha_{V,L}(M, T)$ .....	29	$E_{k,n}$ .....	50
$\mathbb{B}$ .....	24	$\varepsilon$ .....	22
$\mathbb{B}_{\text{cris}}$ .....	30	$\varepsilon_n$ .....	24
$\mathbb{B}_K$ .....	25	$\epsilon(K_n, .)$ .....	94
$\mathbb{B}_{K_0}$ .....	24	$\eta_0$ .....	112
$\mathbb{B}^+$ .....	24	$\mathcal{E}_{T,k,n}$ .....	50
$\tilde{\mathbb{B}}^+$ .....	26	$\exp_{V, K}$ .....	46
$\tilde{\mathbb{B}}$ .....	24	$\mathcal{F}_{T,k,n}$ .....	51, 135
$\mathbb{B}_{\text{dR}}$ .....	27	$\Gamma_n$ .....	20
$\mathbb{B}_{\text{dR}}^+$ .....	27	$\gamma$ .....	34
$\chi$ .....	20, 24	$\Gamma^*(i)$ .....	74
$\text{comp}_{V,L}$ .....	27	$\Gamma_K$ .....	20
$\mathbb{C}_p$ .....	20	$\gamma_1$ .....	36
$\mathcal{E}_{\varphi, \gamma_n}(\cdot)$ .....	34	$\gamma_n$ .....	36
$\mathbb{D}$ .....	25	$\Gamma_n^*(V)$ .....	74
$\mathbb{D}_{\text{dR}}$ .....	27	$\Gamma_n^+(V)$ .....	74

$G_n$ .....	20	$S_{k,n}(\cdot)$ .....	137
$H_f^1(K, V)$ .....	46	$t$ .....	27
$H^i(\cdot)$ .....	34	$t_H(V)$ .....	28
$h_i(V)$ .....	27	$t_H^\pm(V)$ .....	74
$H_{Iw+f}^1(\cdot, T)$ .....	97	$T_n$ .....	74
$H_K$ .....	20	$\text{Tam}_{K,\cdot}^0$ .....	91
$t_V$ .....	90	$\theta$ .....	26
$i_{V,n}$ .....	64	$\Upsilon_0$ .....	85
$j'_n$ .....	101	$\Upsilon_n$ .....	84
$j_{V,n}$ ou $j_n$ .....	97	$t_V(K)$ .....	46
$K$ .....	20	$\Xi_{V(k),n}^\varepsilon$ .....	51
$K_\infty$ .....	20	$\Xi_{V,k,n}^\varepsilon$ .....	51
$K_0$ .....	20	$x_n$ .....	109
$K_n$ .....	20	$\zeta_{p^n}$ .....	20
$\Lambda$ .....	33		
$\Lambda_p$ .....	33		
$L_f(T)$ .....	90		
$L_f(V)$ .....	90		
$M$ .....	97		
$\mu_{\alpha,\beta}$ .....	138		
$\mathbb{N}(\cdot)$ .....	38		
$\mathbb{N}_l(V)$ .....	65		
$\omega$ .....	24		
$\tilde{\Omega}_{T,k,n}^\varepsilon$ .....	53		
$\Omega_{T,k,n}^\varepsilon$ .....	51		
$\varphi$ .....	24		
$\varphi^{-n}$ .....	38		
$\pi$ .....	24		
$\pi_n$ .....	24		
$\psi$ .....	36		
$q$ .....	24		
$\mathbb{Q}_{p,n}$ .....	23		
$R_n$ .....	97		

# Bibliographie

- [BB08] Denis BENOIS et Laurent BERGER : Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines. II. *Comment. Math. Helv.*, 83(3):603–677, 2008.
- [Ben00] Denis BENOIS : On Iwasawa theory of crystalline representations. *Duke Math. J.*, 104(2):211–267, 2000.
- [Ber02a] Laurent BERGER : Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles. *Invent. Math.*, 148(2):219–284, 2002.
- [Ber02b] Laurent BERGER : Tamagawa numbers of some crystalline representations. *arXiv :math/0209233*, (2):219–284, 2002.
- [Ber03] Laurent BERGER : Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas. *Doc. Math.*, (Extra Vol.):99–129 (electronic), 2003. Kazuya Kato's fiftieth birthday.
- [Ber04] Laurent BERGER : Limites de représentations cristallines. *Compos. Math.*, 140(6):1473–1498, 2004.
- [Ber08] Laurent BERGER : Construction de  $(\phi, \Gamma)$ -modules : représentations  $p$ -adiques et  $B$ -paires. *Algebra Number Theory*, 2(1):91–120, 2008.
- [BF06] David BURNS et Matthias FLACH : On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives. II. *Doc. Math.*, (Extra Vol.):133–163 (electronic), 2006.
- [BK90] Spencer BLOCH et Kazuya KATO :  $L$ -functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 de *Progr. Math.*, pages 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [BNQD02] Denis BENOIS et Thong NGUYEN QUANG DO : Les nombres de Tamagawa locaux et la conjecture de Bloch et Kato pour les motifs  $\mathbb{Q}(m)$  sur un corps abélien. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(5):641–672, 2002.
- [Bou05] Jean-Louis BOURSIN : *Les Maths pour les Nuls*. Pour les nuls édition, 2005.
- [Bou06] Nicolas BOURBAKI : Algèbre, Chapitres 1 à 3. pages 652 pages, 2006.

- [BV90] D. G. BENUA et S. V. VOSTOKOV : Norm pairing in formal groups and Galois representations. *Algebra i Analiz*, 2(6):69–97, 1990. translation in Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 6, 1221–1249.
- [CC98] F. CHERBONNIER et P. COLMEZ : Représentations  $p$ -adiques surconvergentes. *Invent. Math.*, 133(3):581–611, 1998.
- [CC99] Frédéric CHERBONNIER et Pierre COLMEZ : Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques d’un corps local. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1): 241–268, 1999.
- [CF86] J. W. S. CASSELS et A. FRÖHLICH, éditeurs. *Algebraic number theory*, London, 1986. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers]. Reprint of the 1967 original.
- [CF00] Pierre COLMEZ et Jean-Marc FONTAINE : Construction des représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140(1):1–43, 2000.
- [Col98] Pierre COLMEZ : Théorie d’Iwasawa des représentations de de Rham d’un corps local. *Ann. of Math. (2)*, 148(2):485–571, 1998.
- [Col99] Pierre COLMEZ : Représentations cristallines et représentations de hauteur finie. *J. Reine Angew. Math.*, 514:119–143, 1999.
- [Col04] Pierre COLMEZ : La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer  $p$ -adique. *Astérisque*, (294):ix, 251–319, 2004.
- [Del] Pierre DELIGNE : Formes modulaires et représentations  $\ell$ -adiques. Sémin. Bourbaki 1968/69, No.355, 139-172 (1971).
- [Del73] P. DELIGNE : Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions  $L$ . In *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, pages 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349. Springer, Berlin, 1973.
- [FL82] Jean-Marc FONTAINE et Guy LAFFAILLE : Construction de représentations  $p$ -adiques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(4):547–608 (1983), 1982.
- [FM95] Jean-Marc FONTAINE et Barry MAZUR : Geometric Galois representations. In *Elliptic curves, modular forms, & Fermat’s last theorem (Hong Kong, 1993)*, Ser. Number Theory, I, pages 41–78. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [Fon79] Jean-Marc FONTAINE : Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. In *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, volume 65 de *Astérisque*, pages 3–80. Soc. Math. France, Paris, 1979.

- [Fon82] Jean-Marc FONTAINE : Sur certains types de représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):529–577, 1982.
- [Fon90] Jean-Marc FONTAINE : Représentations  $p$ -adiques des corps locaux. I. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 de *Progr. Math.*, pages 249–309. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Fon92] Jean-Marc FONTAINE : Valeurs spéciales des fonctions  $L$  des motifs. *Astérisque*, (206):Exp. No. 751, 4, 205–249, 1992. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.
- [Fon94a] Jean-Marc FONTAINE : Le corps des périodes  $p$ -adiques. *Astérisque*, (223):59–111, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [Fon94b] Jean-Marc FONTAINE : Représentations  $p$ -adiques semi-stables. *Astérisque*, (223):113–184, 1994. With an appendix by Pierre Colmez, Périodes  $p$ -adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).
- [FPR94] Jean-Marc FONTAINE et Bernadette PERRIN-RIOU : Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions  $L$ . In *Motives (Seattle, WA, 1991)*, volume 55 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 599–706. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [FW79] Jean-Marc FONTAINE et Jean-Pierre WINTENBERGER : Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 288(6):A367–A370, 1979.
- [Her98] Laurent HERR : Sur la cohomologie galoisienne des corps  $p$ -adiques. *Bull. Soc. Math. France*, 126(4):563–600, 1998.
- [Her01] Laurent HERR : Une approche nouvelle de la dualité locale de Tate. *Math. Ann.*, 320(2):307–337, 2001.
- [HK03] Annette HUBER et Guido KINGS : Bloch-Kato conjecture and Main Conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters. *Duke Math. J.*, 119(3):393–464, 2003.
- [Kat93] Kazuya KATO : Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil  $L$ -functions via  $B_{\text{dR}}$ . I. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 de *Lecture Notes in Math.*, pages 50–163. Springer, Berlin, 1993.
- [Kis07] Mark KISIN : What is... a Galois representation? *Notices Amer. Math. Soc.*, 54(6):718–719, 2007.
- [KKT96] Kazuya KATO, Masato KURIHARA et Toshio TSUJI : Local iwasawa theory of perrin-riou and syntomic complexes. *Preprint*, 1996.

- [Kur02] Masato KURIHARA : On the Tate Shafarevich groups over cyclotomic fields of an elliptic curve with supersingular reduction. I. *Invent. Math.*, 149(1):195–224, 2002.
- [Laf80] Guy LAFFAILLE : Groupes  $p$ -divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié. *Bull. Soc. Math. France*, 108(2):187–206, 1980.
- [Liu08] Ruochuan LIU : Cohomology and duality for  $(\phi, \Gamma)$ -modules over the Robba ring. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):Art. ID rnm150, 32, 2008.
- [LLZ10] Antonio LEI, David LOEFFLER et Sarah Livia ZERBES : Wach modules and Iwasawa theory for modular forms. *Asian J. Math.*, 14(4):475–528, 2010.
- [Nek93] Jan NEKOVÁŘ : On  $p$ -adic height pairings. In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91*, volume 108 de *Progr. Math.*, pages 127–202. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [Nek06] Jan NEKOVÁŘ : Selmer complexes. *Astérisque*, (310):viii+559, 2006.
- [PR92] Bernadette PERRIN-RIOU : Théorie d’Iwasawa et hauteurs  $p$ -adiques. *Invent. Math.*, 109(1):137–185, 1992.
- [PR94] Bernadette PERRIN-RIOU : Théorie d’Iwasawa des représentations  $p$ -adiques sur un corps local. *Invent. Math.*, 115(1):81–161, 1994. With an appendix by Jean-Marc Fontaine.
- [PR95] Bernadette PERRIN-RIOU : Fonctions  $L$   $p$ -adiques des représentations  $p$ -adiques. *Astérisque*, (229):198, 1995.
- [PR99] Bernadette PERRIN-RIOU : Théorie d’Iwasawa et loi explicite de réciprocité. *Doc. Math.*, 4:219–273 (electronic), 1999.
- [PR00] Bernadette PERRIN-RIOU : Représentations  $p$ -adiques et normes universelles. I. Le cas cristallin. *J. Amer. Math. Soc.*, 13(3):533–551 (electronic), 2000.
- [Sil09] Joseph H. SILVERMAN : *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, second édition, 2009.
- [Tat75] J. TATE : Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil. In *Modular functions of one variable, IV (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, pages 33–52. Lecture Notes in Math., Vol. 476. Springer, Berlin, 1975.
- [Wac96] Nathalie WACH : Représentations  $p$ -adiques potentiellement cristallines. *Bull. Soc. Math. France*, 124(3):375–400, 1996.
- [Wac97] Nathalie WACH : Représentations cristallines de torsion. *Compositio Math.*, 108(2):185–240, 1997.

- [Win83] Jean-Pierre WINTENBERGER : Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(1):59–89, 1983.

Les nombres de Tamagawa des courbes elliptiques apparaissent dans la formulation de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer comme certains facteurs locaux. Bloch et Kato (1990) ont trouvé une vaste généralisation de cette définition classique en termes de la théorie de Hodge  $p$ -adique. Ils ont associé un nombre de Tamagawa  $\text{Tam}(T)$  à tout réseau  $T$  de représentations  $p$ -adiques de de Rham au sens de J-M Fontaine. Ces nombres interviennent dans les conjectures de Bloch et Kato sur les valeurs spéciales des fonctions  $L$  des motifs.

J-M Fontaine et B. Perrin-Riou ont formulé une conjecture reliant  $\text{Tam}(T)$  et le nombre de Tamagawa  $\text{Tam}(T^*(1))$  de la représentation duale. Cette conjecture est connue pour les représentations cristallines ce qui permet de calculer explicitement les nombres de Tamagawa des représentations cristallines dont les poids de Hodge-Tate sont tous positifs. En revanche, dans la plupart des autres cas, nous n'avons pas de méthode de calcul explicite. Cette thèse a pour but de donner un encadrement des nombres de Tamagawa des représentations absolument cristallines le long de la tour cyclotomique sans hypothèses supplémentaires sur les poids de Hodge-Tate.

Le premier chapitre de cette thèse est dédié à des rappels sur la théorie de Hodge  $p$ -adique, la classification de Fontaine des représentations  $p$ -adique de corps locaux via la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, sur la cohomologie galoisienne, sur les modules de Wach ou sur la cohomologie d'Iwasawa.

Le second chapitre est la partie technique de la thèse. Il est dédié à l'exponentielle de Bloch and Kato. Seront rappelées sa définition et sa construction en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Cette dernière construction permet de généraliser deux résultats de D. Benois et L. Berger qui relient l'exponentielle aux modules de Wach et qui permet de décrire des objets qui apparaissent naturellement dans l'étude des nombres de Tamagawa.

Le dernier chapitre est le cœur de cette thèse. Nous commencerons en définissant les nombres de Tamagawa  $\text{Tam}(T)$  et en donnant certaines propriétés et résultats déjà connus.

Nous énonçons ensuite le théorème final qui donne un encadrement des nombres de Tamagawa d'une représentation absolument cristalline  $V$ . Y sont également donnés certains cas d'égalité qui permettent de retrouver des formules connues — lorsque  $V$  est positive ou lorsqu'elle provient d'une courbe elliptique et plus généralement d'un groupe formel de dimension 1 et de hauteur 2.

Pour prouver ces résultats, nous écrivons les nombres de Tamagawa sous forme d'un indice généralisé dans lequel apparaissent les objets étudiés dans le chapitre précédent. La thèse se termine avec l'étude de plusieurs cas particuliers qui permettent de retrouver des résultats déjà connus



Tamagawa numbers of elliptic curves appear in the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture as local factors. Bloch and Kato generalized the definition using  $p$ -adic Hodge theory in 1990. Indeed they associated a number  $\text{Tam}(T)$  to each lattice  $T$  of de Rham representation in the sense of J-M Fontaine. These Tamagawa numbers are used in the conjectures of Bloch and Kato on the special values of  $L$ -functions of motives.

J-M Fontaine and B. Perrin-Riou expressed a conjecture linking  $\text{Tam}(T)$  to the Tamagawa number  $\text{Tam}(T^*(1))$  of the dual representation. This conjecture is now well known for crystalline representations. This yields an explicit formula for Tamagawa number of crystalline  $p$ -adic representations having positive Hodge-Tate weights.

On the other hand, we have no explicit formula for Tamagawa numbers of most of the crystalline representations. The purpose of the thesis is to give bounds of Tamagawa numbers of crystalline  $p$ -adic representations of unramified local field along the cyclotomic tower without further conditions on the Hodge-Tate weights.

The first chapter of this thesis is dedicated to reminders on  $p$ -adic Hodge-Tate theory, Fontaine's classification of  $p$ -adic representations of local fields via  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, Galois and Iwasawa cohomology, Wach modules etc.

The second chapter is the technical part of this thesis; it is dedicated to the Bloch and Kato's exponential map. We recall its definition and its construction in terms of  $(\varphi, \Gamma)$ -modules due to D. Benois. This construction leads to the generalization of two results of D. Benois and L. Berger which link the exponential map and Wach modules and give a good description of the objects which naturally appear in the study of Tamagawa numbers.

The last chapter is the heart of the thesis. We begin by giving a definition of Tamagawa number  $\text{Tam}(T)$  and some first properties and results on these numbers.

We next express the main theorems which give bounds of Tamagawa numbers of crystalline  $p$ -adic representations of unramified local field along the cyclotomic tower. We also give equality conditions. This allows us to recover already known results such as Tamagawa numbers of positive crystalline representations or of representations coming from elliptic curves.

To prove these results, Tamagawa numbers can be written as a generalized index of the modules defined in terms of Wach modules. These modules have been deeply studied in the second chapter of this thesis.

---

## Résumé

Nous étudions les nombres de Tamagawa. Plus précisément nous donnons un encadrement — ainsi que des conditions d'égalité — des nombres de Tamagawa des représentations absolument cristallines le long de la tour cyclotomique sans hypothèses supplémentaires sur les poids de Hodge-Tate. Ces conditions d'égalité permettront en particulier de retrouver des formules déjà connues notamment pour les représentations absolument cristallines strictement négatives, pour les représentations provenant de courbes elliptiques ayant bonne réduction supersingulière.

Pour cela, nous traduisons la définition originelle de S. Bloch et K. Kato en termes de modules de Wach. Cela ramène l'étude des nombres de Tamagawa à celle d'un indice généralisé exprimé en termes de modules de Wach. L'étude de cet indice permet d'obtenir les principaux résultats de cette thèse.

**Mots-clefs :** représentations  $p$ -adiques de corps locaux,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, modules de Wach, théorie de Hodge  $p$ -adique, nombre de Tamagawa, exponentielle de Bloch et Kato, théorie d'Iwasawa.

## Abstract

We study Tamagawa numbers. More precisely we give bounds — and conditions of equality — of Tamagawa numbers of  $p$ -adic crystalline representations of an unramified local field along the cyclotomic tower without any conditions on Hodge-Tate weights. These conditions of equality lead in particular to well-known formulae such as Tamagawa numbers of negative  $p$ -adic crystalline representations or Tamagawa numbers of  $p$ -adic representations coming from elliptic curves with good supersingular reduction.

We translate the original definition of Tamagawa numbers given by S. Bloch et K. Kato in terms of Wach modules. This links the study of Tamagawa numbers with that of a generalized index expressed with Wach modules. The analysis of this index allows us to find the main results of this thesis.

**Keywords :**  $p$ -adic representations of local fields,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, Wach modules,  $p$ -adic Hodge theory, Tamagawa number, Bloch and Kato's exponential map, Iwasawa theory.