

UNIVERSITÉ PARIS –EST

ANNÉE 2013

# THÈSE

Pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST

Spécialité : **Mécanique**

Préparée au

**Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle**

Rattaché à l'École Doctorale **SIE**

Présentée par

**Mourad IDJERI**

Titre :

**Sur l'analyse des déformations homogènes et hétérogènes des structures en  
élastomères**

Soutenue publiquement le 29 avril 2013

Devant le jury composé de

Mr VERRON Erwan	Rapporteur
Mme CANTOURNET Sabine	Rapporteur
Mme DIANI Julie	Examineur
Mr DESCELIERS Christophe	Examineur
Mr MONTEIRO Eric	Examineur
Mr CHEVALIER Luc	Directeur de thèse



---

## Résumé

L'identification du comportement des polymères et notamment des élastomères reste un problème délicat. Dans ce travail, nous proposons une méthode d'identification qui associe la mesure de champ de déformation par analyse d'images avec l'optimisation d'un champ de contraintes adapté à l'essai. L'essai retenu est un étirage biaxial réalisé sur une éprouvette en forme de croix. L'approche proposée transforme l'inconvénient de l'hétérogénéité en avantage puisqu'il permet de réaliser l'identification simultanée sur plusieurs états de déformation : typiquement traction uniaxiale, plane et biaxiale. Le champ de contrainte est approché par la somme d'un champ homogène et d'un champ complémentaire vérifiant les conditions de bords libres et qui décroît lorsqu'on pénètre dans l'échantillon. La longueur caractéristique de la décroissance est optimisée de telle sorte que le champ approché vérifie au mieux les équations d'équilibre. En combinant l'analyse d'images avec le champ de contrainte optimisé, on identifie le potentiel hyperélastique  $W$  en calculant explicitement les deux dérivées  $f = \partial W / \partial I_1$  et  $g = \partial W / \partial I_2$  où  $I_1$  et  $I_2$  sont les deux 1<sup>er</sup> invariants du tenseur de Cauchy droit. Enfin, un algorithme spécifique est mis en oeuvre par éléments finis pour une simulation 2D des matériaux hyperélastiques incompressibles. Cet algorithme est utilisé pour valider l'identification en comparant les résultats de la simulation et ceux de l'expérience.

### Mots-clés

Essais multiaxiaux, potentiel hyperélastique, élastomères, corrélation d'image numérique

---

## Abstract

The identification of the polymer's behaviour and especially rubber-like materials remains a challenging task. In this work, we propose a method for the identification which combines strain field obtained by digital image analysis and the optimisation of an approximated stress field adapted to the specimen geometry. A biaxial stretching test is performed on a crosshair rubber specimen. With the proposed approach, heterogeneity of the strain field during this equi-biaxial tension test becomes an advantage. It allows the simultaneous identification of several strain states: uniaxial, biaxial and planar elongations as well as shear. The stress field is approximated by the sum of a homogeneous field and an additional field. The latter, checking the boundary conditions on the free edge is decreasing when entering the sample. The characteristic decreasing length is optimized so that the approximate field verifies the equilibrium equations. Combining image analysis with an optimized stress field, we manage the identification the hyperelastic potential by calculating explicitly the two derivatives  $f=\partial W/\partial I_1$  and  $g=\partial W/\partial I_2$  and conclude on their dependence on  $I_1$  and  $I_2$  the two first invariants of the righth Cauchy-Green tensor. Finally, a specific finite element algorithm has been developed to simulate a 2D-incompressible hyperelastic material. This algorithm is used to validation the identification potentiel by comparing simulation results and experimental data.

### Keywords

Multiaxial testing; hyperelastic potential; rubber-like material; digital image correlation

# Table des matières

Table des matières.....	vii
-------------------------	-----

<b>Introduction : Sur l'identification de lois de comportement hyperélastique des élastomères.....</b>	<b>1</b>
--	----------

<b>I. Théorie de Grandes Transformations et Loi de Comportement.....</b>	<b>5</b>
--	----------

1.1 Introduction.....	5
-----------------------	---

1.2 Mécanique des milieux continus en grandes transformations.....	5
--	---

1.2.1 Déformation et tenseur des déformations.....	5
--	---

1.2.2 Tenseurs des contraintes.....	8
-------------------------------------	---

1.2.3 Equations d'équilibre.....	9
----------------------------------	---

1.2.3.1 Configuration eulérienne.....	9
---------------------------------------	---

1.2.3.1 Configuration lagrangienne.....	10
---	----

1.2.4 Lois de comportement hyperélastique.....	10
--	----

1.2.4.1 Cadre thermodynamique : Inégalité de Clausius Duhem.....	11
--	----

1.2.4.2 Modélisations d'un matériau hyperélastique .....	11
--	----

1.2.4.3. Prise en compte de la condition d'incompressibilité.....	13
---	----

1.3 Application à des cas simples de sollicitation.....	15
---	----

1.3.1 Extension simple.....	15
-----------------------------	----

1.3.2 Compression uniaxiale.....	16
----------------------------------	----

1.3.3 Cisaillement pur.....	16
-----------------------------	----

1.3.4 Cisaillement simple.....	17
--------------------------------	----

1.3.5 Extension équibiaxiale.....	19
-----------------------------------	----

1.3.6 Traction biaxiale .....	20
-------------------------------	----

1.4 Quelques exemples d'énergie de déformation.....	22
---	----

1.5 Quelques méthodes d'identification de lois de comportement à partir de la mesures de champs.....	26
--	----

1.5.1 Le recalage par éléments finis.....	26
1.5.2 La méthode l'erreur en relation de comportement.....	27
1.5.3 La méthode de l'écart à l'équilibre.....	28
1.5.4 La méthode de l'écart à la réciprocité.....	28
1.5.5 La Méthode des Champs Virtuels (MCV).....	29
1.6 Conclusion .....	30
<b>II. Essai traction bi-axiale hétérogène et analyse d'image .....</b>	<b>31</b>
2.1. Les dispositifs de traction biaxiale .....	31
2.2. Essai traction bi-axiale hétérogène.....	34
2.2.1. Dispositif du mécanisme.....	34
2.2.2. Les éprouvettes de traction biaxiale.....	36
2.2.2. L'expérience .....	36
2.3. Corrélation d'images numériques.....	37
2.3.1. La Corrélation d'Images Numériques (CIN) à travers la littérature.....	37
2.3.2. Théorie générale de la Corrélation d'Images Numériques.....	38
2.3.3. Principe du logiciel CORRELIGD.....	39
2.4 Mesure du champ cinématique 2D.....	42
2.4.1 Différentes étapes de CORRELIGD.....	42
2.4.2. Résultat et discussions .....	43
2.4.2.1 Champs de déplacement.....	43
2.4.2.2 Hétérogénéité de l'essai biaxial.....	48
2.4.2.3 Caractérisation de l'hétérogénéité par les invariants .....	50
2.5 Conclusion .....	53
<b>III. Présentation de la méthode d'identification du comportement hyper élastique à partir d'essais hétérogènes.....</b>	<b>55</b>
3.1. Loi de comportement hyperélastique .....	55
3.2. Etude du champ de contrainte.....	56
3.2.1 Traitement des images.....	57
3.2.2 Construction du champ de contraintes .....	59
3.2.3 Fonctionnelle d'optimisation de champ de contraintes .....	60
3.2.4 Optimisation de champ de contraintes .....	62
3.3 Identification de la loi de comportement.....	64

3. 3. 1 Construction de relation contraintes-déformations.....	64
3. 3. 2 Identification des fonctions $f$ et $g$ .....	66
3.4 Résultats et discussion .....	68
3.5 Validation du modèle de Mooney Revlin.....	70
3.6 Conclusion.....	71
<b>IV. Validation des résultats d'identification par une simulation numérique .....</b>	<b>73</b>
4. 1. Formulation variationnelle du problème d'équilibre. ....	73
4. 1. 1. Equations d'équilibre. ....	74
4.1.2 Principe des travaux virtuels. ....	74
4.1.3 Condition d'incompressibilité .....	76
4.1.4 Réduction de modèle : Contraintes planes.....	77
4.2 Linéarisation du problème.....	78
4.2.1 Linéarisation de la forme variationnelle.....	79
4.3 Discrétisation par élément finis.....	80
4.3.1 Discrétisation géométrique : maillage. ....	80
4.3.2 Imposition des conditions aux limites.....	81
4.3.3 Approximation nodale des déplacements .....	82
4.3.4 Construction du système matriciel.....	82
4.3.5 Calcul de la matrice tangente et les intégrales élémentaires. ....	84
4.4 Simulation numérique et discussions des résultats. ....	85
4.4.1 Validation du code de calcul.....	85
4.4.2 Résultats de la simulation.....	86
4.5 Conclusion .....	91
<b>Conclusions et Perspectives.....</b>	<b>93</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>95</b>





# **Introduction : Sur l'identification de lois de comportement hyperélastique des élastomères**

Les élastomères sont des matériaux polymères communément appelés caoutchoucs, rappelant ainsi l'origine du précurseur des élastomères, à savoir le caoutchouc naturel. Le terme élastomère, plus moderne, est parfois employé pour désigner les matériaux de synthèse ayant des propriétés caoutchoutiques. Dans la suite de ce rapport, les termes caoutchouc et élastomère seront souvent utilisés à la place l'un de l'autre.

Les matériaux élastomères sont fortement répandus dans les secteurs industriels, tels que l'industrie automobile, l'aéronautique, l'industrie du textile. Le bâtiment, l'industrie électromécanique et le secteur médical représentent aussi quelques domaines où l'utilisation de ce matériau ne cesse de se développer. Le succès incontesté de ces matériaux provient de leurs caractéristiques mécaniques très intéressantes. En effet, leur facilité à subir des déformations importantes tout en restant dans le domaine élastique, leur caractère plus ou moins amortissant, leur faible masse volumique font des caoutchoucs des matériaux à part. De plus, leur facilité de mise en oeuvre ainsi que leurs formulations multiples permettent un grand choix d'élastomères répondant aux critères désirés.

L'identification du comportement de ces élastomères est un problème délicat de part la nature complexe de la microstructure de ce type de matériaux et de part les grandes déformations impliquées. En effet, il est bien connu que l'identification de modèles de comportement réalisée à partir d'essais uni axiaux est insuffisante pour représenter le comportement sous des sollicitations multiaxiales qui peuvent être appliquées sur ces matériaux que l'on trouve généralement sous forme de plaques ou coques.

Depuis [Mooney, 1940 \[16\]](#) ; [Rivlin, 1948 \[79\]](#); [Tréloar, 1944 \[13\]](#), de nombreux modèles de comportement ont été proposés pour les matériaux élastomères. Un certain

nombre de modèles (Wang et al., 1953; Treolar [13], 1975; Arruda et al., 1993 [83]) sont proposés pour prédire le comportement mécanique dans le régime quasi-statique. Pour y parvenir ces auteurs combinent les concepts sur la structure moléculaire, les principes de la thermodynamique et l'hypothèse de la déformation affine. D'autres auteurs (Mooney-Rivlin, 1948 [79]; Alexander H. S. [14], 1968; Ogden, 1984 [1]; Diani et al. 1999 [95]) ont développé des approches phénoménologiques en postulant l'existence d'un potentiel hyperélastique dans le cadre de la mécanique du continu. Dans notre travail on se limite aux modèles phénoménologiques. Même en se limitant à ces types de modèles de comportement, il est particulièrement délicat de reconnaître celui qui décrit le mieux le comportement du matériau pour différents chargements. Les différentes formes de potentiel proposées par Mooney, Mark, 1982 [80], Gent et al, 1958 [81], Hart-Smith, 1966 [82], Alexander, 1968 [83], et même plus récemment par Lambert-Diani et Rey, 1999 [95]), postulent toutes un découplage des dérivées partielles du potentiel  $W$  par rapport aux deux premiers invariants du tenseur de Cauchy droit  $f = \partial W / \partial I_1$  et  $g = \partial W / \partial I_2$ . L'identification de ces fonctions se fait généralement dans le cadre des grandes déformations et à part l'essai uniaxial, les effets de bords induisent une hétérogénéité difficilement quantifiable et qui impacte les valeurs identifiées comme le montre Chevalier et al, 2002 [94].

Afin de compléter cette caractérisation uniaxiale, la mise au point d'essais multi axiaux sur éprouvettes planes est donc pertinente. Plusieurs auteurs ont mis au point des appareils pour réaliser des essais de traction biaxiale sur des caoutchoucs. Ces essais présentent habituellement des hétérogénéités qui conduisent à des difficultés dans la procédure de l'identification où bien de coupler essais et calculs mais cela nécessite de connaître *a priori* la forme de la loi de comportement (Voir Promma et al. [85] par exemple). Mahnken et Stein, 1996 [99], par exemple, ont utilisé des essais de traction hétérogènes pour obtenir les coefficients de lois de comportement, en utilisant comme données d'entrée pour l'analyse inverse, des mesures de champ de déformation fournies par un système de corrélation d'images. Plus récemment, Amiot et al., 2007 [96], ont présenté une étude utilisant la mesure de champs et la méthode des éléments finis. Dans cette étude, nous proposons une méthode d'identification alternative aux éléments finis. Notre objectif est d'utiliser l'hétérogénéité du champ de déformation lors d'un essai de traction équi-biaxiale comme un avantage en vue de développer la procédure d'identification.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce manuscrit qui présente une étude réalisée dans le cadre d'un accord-programme entre l'université Abderrahmane Mira de Bejaia et l'université Paris-Est Marne-la-Vallée. Il regroupait le Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi-

Echelle (MSME UMR 8208 CNRS) et le Laboratoire physique théorique (Béjaïa, Algérie). Il porte, d'une part, sur le développement d'un essai de traction équi-biaxiale sur un mécanisme spécifique développé au sein de PIMM Arts et Métiers ParisTech (Brieu et al., 2007 [69]). Les mors de serrage ne sont pas aussi performants que celui de Meissner, 1987 [97] où l'homogénéité est assurée même sous un chargement biaxial. Ici la fixation de l'éprouvette est beaucoup plus facile, mais le champ de déformation est hétérogène. Nous verrons plus loin que c'est loin d'être un inconvénient, mais plutôt un grand avantage pour l'identification.

Dans cette étude, nous proposons une méthode d'identification qui associe la mesure de champ de déformation par analyse d'images, déjà appliquée aux grandes déformations par Chevalier et al. [98] pour des mesures sur des polymères, avec l'optimisation d'un champ de contraintes adapté à la géométrie de l'éprouvette testée. Elle permet de passer analytiquement des efforts mesurés aux contraintes locales. Par voie de conséquence, on peut s'affranchir des problèmes liés aux conditions aux limites (fixation des éprouvettes). La base de données est ainsi enrichie car un seul essai donne accès à autant de données que de points d'étude dans la plaque sollicitée. En construisant un champ de contrainte représentatif de l'état réel du matériau, cela nous permet d'identifier la loi de comportement sans faire aucune hypothèse sur la forme du potentiel. C'est là la différence majeure avec la plupart des procédures d'identifications classiques, voir par exemple Promma et al., 2009 [85]

Ce mémoire s'organise en quatre chapitres :

Le premier chapitre de cette étude concerne la définition d'un cadre général de travail pour exprimer les équations de la mécanique des milieux continus en grandes transformations. Ce cadre général repose sur une description de la position d'un point d'un solide, en fonction des coordonnées matérielles entraînées. L'intérêt de l'usage de ces coordonnées dans la méthode des éléments finis est mis en valeur si les coordonnées matérielles entraînées sont celles de l'élément de référence. Les méthodes d'identification des lois de comportement sont également abordées.

Le deuxième chapitre présente le dispositif expérimental utilisé pour la réalisation d'essai équi-biaxial sur une éprouvette en caoutchouc. Les notions de la méthode de mesure de champ de déformation par corrélation d'images sont abordées ainsi que le traitement de l'hétérogénéité de l'essai par Correli<sup>GD</sup>.

Dans le troisième chapitre, nous développerons une méthode d'identification des paramètres de la loi de comportement hyperélastique où on fait intervenir une approximation analytique du champ de contraintes et l'hétérogénéité du champ de déformation.

Dans la dernière partie de cette étude, nous développerons une simulation numérique d'essai équi-biaxial. Disposant de la loi constitutive hyperélastique, d'une simulation fondée sur la méthode des éléments finis et de bases de données expérimentales, ce quatrième chapitre validera les résultats issus de l'identification en les comparant avec ceux issus de la simulation numérique.

# Chapitre I

## Théorie des Grandes Transformations et Loi de Comportement

### 1.1 Introduction

Lorsque les déformations dans une structure sont petites au sens des petites perturbations, c'est-à-dire lorsque l'état actuel peut être confondu avec l'état de référence, on utilise classiquement les déformations linéarisées et le tenseur des contraintes de Cauchy pour décrire le comportement d'un matériau. Dans notre cas, les déformations sont plus importantes et les états actuel et de référence ne peuvent plus être confondus. L'objectif de ce chapitre est donc dans un premier temps de rappeler les différentes grandeurs de la mécanique des milieux continus en grandes transformations qui seront nécessaires par la suite. Il s'agira également d'introduire les notions principales d'hyperélasticité et de développer les solutions analytiques de cas simples de chargement correspondant aux essais classiques de caractérisation. Une fois ces rappels effectués, on décrit de façon succincte plusieurs méthodes d'identification adaptées au traitement des mesures de champs cinématiques à des fins d'identification des paramètres pilotant des lois de comportement.

### 1.2 Mécanique des milieux continus en grandes transformations

#### 1.2.1 Déformation et tenseur des déformations

Nous considérons un solide déformable  $S$  occupant dans un espace orthogonal  $\mathfrak{R}$ , à l'instant initial  $t_0$ , une configuration  $\Omega_0$  dont la frontière est notée  $\partial\Omega_0$ . Cet état supposé naturel, c'est-à-dire libre de contraintes, est appelé ci-après configuration de référence ou configuration initiale. Soumis à des forces extérieures et/ou à des déplacements sur sa

frontière, le solide se déplace et se déforme de sorte qu'il occupe l'instant  $t$  un nouveau domaine de  $\mathfrak{R}$  noté  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Ce domaine correspond à la configuration déformée ou actuelle. Chaque point matériel  $M_0 \in \Omega_0$  est repéré par le vecteur position  $\mathbf{X}$ . Cette même particule occupe après déformation un point  $M$  de  $\Omega$  repéré par le vecteur position  $\mathbf{x}$  dans la configuration déformée  $\Omega$  (Figure 1.1). La relation permettant de relier les deux configurations est définie par la transformation  $\chi$  :

$$\chi : \begin{cases} \Omega_0 \rightarrow \Omega \\ \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \end{cases} \quad 1.1$$

où la fonction vectorielle  $\chi$  est une fonction vectorielle continûment différentiable et inversible.

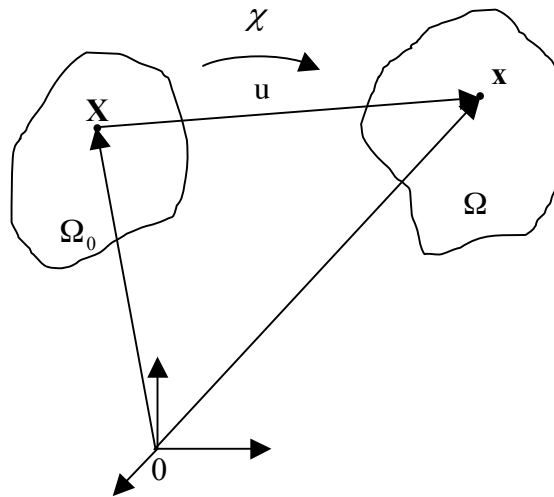


Figure 1.1. Cinématique des milieux continus

Il est habituel d'introduire le vecteur déplacement, défini sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad 1.2$$

Mais, contrairement au cadre des petites perturbations (HPP), le déplacement ne pourra pas être supposé petit et on ne pourra pas assimiler la configuration de référence à la configuration déformée. C'est là une des difficultés en grandes déformations. Les équations devront être écrites dans l'une ou l'autre des configurations. De même, chaque grandeur sera définie soit dans  $\Omega_0$  soit dans  $\Omega$ . Cependant, certaines sont définies à cheval sur les deux.

La grandeur qui caractérise la transformation linéarisée au voisinage de la particule est définie par :

$$F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u} \quad 1.3$$

appelée tenseur gradient de la transformation où  $\mathbf{I}$  et  $\nabla_{\mathbf{x}}$  désignent respectivement le tenseur identité et l'opérateur gradient par rapport à la configuration initiale. De même, on définit la variation de volume entre une configuration et une autre par le jacobien de la transformation de  $\Omega_0$  dans  $\Omega$ . Il est toujours positif en vertu du principe de non-interpénétration de la matière :

$$J = \det(F) \quad 1.4$$

A partir du tenseur  $F$ , on introduit deux tenseurs primordiaux pour formuler les lois de comportement. Selon la configuration privilégiée, on définit le tenseur de Cauchy-Green droit  $C$  et gauche  $B$  par :

$$C = F^T F \quad \text{et} \quad B = F F^T \quad 1.5$$

Le premier permet de décrire les déformations par rapport à la configuration de référence tandis que le second les décrit par rapport la configuration déformée. Les deux tenseurs de déformation liés sont définis respectivement par :

$$E = \frac{1}{2}(C - \mathbf{I}) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - B^{-1}) \quad 1.6$$

où  $\mathbf{I}$  représente le tenseur identité.  $E$  est le tenseur des déformation de Green Lagrange et  $A$  celui d'Euler-Almansi. Chaque tenseur de déformation ainsi défini est symétrique, défini positif et possède donc six composantes indépendantes dans la base donnée.

Si l'on introduit le vecteur déplacement,  $E$  s'exprime en fonction du gradient des déplacements de la manière suivante :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad 1.7$$

Pour plus de précisions sur la définition de ces quantités cinématiques le lecteur pourra consulter par exemple [Ogden \[1\]](#) et [Ciarlet \[2\]](#)

### 1.2.2 Tenseurs des contraintes

Une fois les grandeurs cinématiques définies, il convient de s'intéresser aux grandeurs mécaniques traduisant la notion d'efforts internes de cohésion. Elles peuvent être décrites de différentes manières. Ainsi, nous considérons une coupe fictive de  $\Omega_0$  et un élément de surface  $dS$  de cette coupe de normale  $N$ , appelé facette. Cette facette se transforme par  $\chi$  en une facette  $ds$  de normale  $n$ . Les efforts de cohésion  $df$  exercés sur la surface  $ds$  sont caractérisés par une densité surfacique. Elle est linéairement dépendante de  $n$ .

$$df = \sigma nds \quad 1.8$$

L'application  $\sigma$  s'appelle le tenseur des contraintes de Cauchy, il est symétrique. Comme en grandes déformations, la configuration déformée n'est pas connue, il est souvent plus simple de transporter  $\sigma$  dans la configuration initiale, ce qui conduit à définir d'autres tenseurs de contraintes.

Dans un premier temps, si on choisit de transporter l'élément de  $\Omega$  vers  $\Omega_0$ , il vient par la formule de Nason:

$$df = \sigma JF^{-t} \cdot NdS = \pi NdS \quad 1.9$$

On définit ainsi un nouveau tenseur de contrainte  $\pi$ , appelé tenseur de Piola-Kirchhoff de premier espèce (PK1). Ce tenseur est qualifié de mixte non symétrique. Il peut être relié au tenseur des contraintes de Cauchy par

$$\pi = J\sigma F^{-t} \quad 1.10$$

On peut également définir dans la configuration de référence, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $S$  (PK2), défini uniquement à partir des quantités lagrangiennes en transportant de nouveau les efforts de cohésion de  $\Omega$  vers  $\Omega_0$ , tel que :

$$df_0 = F^{-1} \cdot df = S \cdot NdS \quad 1.11$$

$S$  n'a aucune signification physique mais il est symétrique et purement lagrangien. On a la relation suivante entre le tenseur de Cauchy et le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 :

$$J\sigma = FSF^t \quad 1.12$$



### 1. 2.3 Equations d'équilibre

La modélisation des efforts conduit, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, aux équations du mouvement qui gouvernent la réponse de la structure. Si l'on désigne par  $V(M,t)$  la vitesse eulérienne de la particule  $M \in \Omega$ , alors la quantité de mouvement d'un volume élémentaire quelconque  $\omega \in \Omega$  (configuration déformée) est :

$$\int_{\omega} \rho V(M,t) dv \quad 1.13$$

où  $\rho$  est la masse volumique en un point quelconque  $M \in \omega \subset \Omega$

La schématisation classique des efforts indique que les forces agissant sur  $\omega$  sont de deux types :

- Les efforts volumiques  $f_v$  imposés à l'ensemble de  $\omega$ ,
- Les densités surfaciques d'efforts internes  $f_s$  imposées sur le bord  $\partial\omega$  de  $\omega$  où  $n$  étant la normale extérieure unitaire à  $\partial\omega$  au point  $M$ .

Les résultats de ces efforts sont données par :

$$\int_{\omega} f_v dv + \int_{\partial\omega} f_s ds \quad 1.14$$

Le principe fondamental de la dynamique (conservation de la quantité de mouvement), appliquée à  $\omega$ , permet d'obtenir deux équations. La première équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho V dv = \int_{\omega} \rho \frac{dV}{dt} dv = \int_{\omega} f_v dv + \int_{\partial\omega} f_s ds \quad 1.15$$

Quant à la deuxième équation, elle représente l'équation des moments et permet de montrer la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  [1].

Comme nous l'avons vu, la déformation de la structure peut être représentée dans les deux configurations distinctes. Traduisant alors l'Equation Eq. 1.15 dans chacune d'entre elles.

#### 1.2.3.1 Configuration eulérienne

En utilisant le tenseur des contraintes de Cauchy (Eq. 1.8), on montre, grâce au théorème de la divergence que l'équation (Eq. 1.15) équivaut, sous forme locale à :

$$\rho \gamma = f_v + \text{div}_x \sigma, \quad \forall M \in \omega \subset \Omega \quad 1.16$$

avec  $\gamma = \frac{dV}{dt}$  l'accélération eulérienne au point  $M$  et  $div_x$  l'opérateur divergence par rapport aux variables eulériennes.

L'inconvénient majeur de l'équation du mouvement [Eq. 1.16](#) est qu'elle est exprimée dans la configuration eulérienne qui est a priori inconnue. Cette équation est très difficilement exploitable, et il est parfois plus simple de l'exprimer dans la configuration initiale qui est connue.

### 1.2.3.2 Configuration lagrangienne

Etant donné la relation qui existe entre la configuration lagrangienne  $\omega_0 \subset \Omega_0$  et la configuration eulérienne  $\omega \in \Omega$ , on montre que l'équation ([Eq. 1.15](#)) équivaut, sous forme locale, à :

$$\rho_0 \gamma_0 = div_x (J \cdot \sigma \cdot F^{-t}) + f_{v_0} \quad \forall M_0 \in \omega_0 \subset \Omega_0 \quad 1.17$$

où  $div_x$  l'opérateur divergence par rapport aux variables lagrangiennes,  $\rho_0$  la masse volumique lagrangienne,  $\gamma_0$  l'accélération au point  $M_0$ , exprimée en variables lagrangiennes et  $f_{v_0} = JF^{-1}f_v$  les efforts volumiques imposés dans la configuration lagrangienne.

En utilisant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, on a

$$\rho_0 \gamma_0 = div_x T + f_{v_0} \quad \forall M_0 \in \omega_0 \subset \Omega_0 \quad 1.18$$

Pour des compléments sur les grandeurs mécaniques et les équations d'équilibre le lecteur peut se référer à [Ciarlet \[3\]](#), [Holzapfel \[4\]](#) et [ogden \[1\]](#)

### 1.2.4 Lois de comportement hyperélastique

A ce stade, les équations établies ne suffisent pas à résoudre le problème mécanique étudié. Il est nécessaire d'établir une relation liant les contraintes aux déformations, c'est-à-dire la loi de comportement qui caractérise le matériau. Cette loi doit, en outre, obéir aux critères suivants :

- Le principe d'objectivité ou d'indifférence matérielle : la loi de comportement doit être invariante par tout changement de référentiel,

- La compatibilité avec les symétries matérielles : dans le cas d'un matériau isotrope, la loi de comportement doit être invariante dans toute rotation de la configuration de référence

#### 1.2.4.1 Cadre thermodynamique : Inégalité de Clausius Duhem

Le comportement des élastomères ou de tout autre matériau doit satisfaire les équations classiques de la thermodynamique et plus particulièrement l'inégalité de Clausius Duhem. Cette inégalité est obtenue en utilisant le premier principe de la thermodynamique (bilan d'énergie mécanique et thermique du système) puis le second principe de la thermodynamique (inégalité fondamentale du bilan d'entropie). En introduisant ensuite l'énergie libre spécifique de HELMHOLTZ  $\psi$ , on obtient l'expression de l'inégalité de Clausius Duhem qui traduit la positivité de la dissipation ( $\Phi_0$  ou  $\Phi$ ) et s'écrit selon le mode de description [5]:

$$\text{Description eulérienne ;} \quad \Phi = \sigma : D - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0 \quad 1.19\text{-a}$$

$$\text{Description lagrangienne ;} \quad \Phi_0 = \mathbf{S} : \dot{E} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0 \quad 1.19\text{-b}$$

$$\text{Description mixte ;} \quad \Phi_0 = \pi : \dot{F} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_x T \geq 0 \quad 1.19\text{-c}$$

où l'on note  $(:)$  le produit doublement contracté.  $s, T, D$  sont respectivement l'entropie, la température et le tenseur taux des déformations et  $q, Q$  sont les flux de chaleur respectivement de la configuration actuelle et initiale.

#### 1.2.4.2 Modélisations d'un matériau hyperélastique

Un matériau élastique est dit hyperélastique si le tenseur des contraintes dérive d'une fonction d'énergie du matériau. Ceci implique que le travail mis en jeu pour aller d'un état de déformation à un autre ne dépend pas du chemin suivi. Pour écrire une loi de comportement hyperélastique, on postule l'existence d'une énergie libre  $\psi$  définie par unité de volume dans la configuration de référence. Pour respecter le principe d'objectivité énoncé plus haut, on montre que l'énergie peut toujours être considérée comme une fonction du tenseur des déformations  $E$ . Si de plus le matériau est isotrope (la loi de comportement doit être invariante par rotation de la configuration de référence), on pourra exprimer  $\psi$  en fonction

des invariants des tenseurs  $C$  ou  $B$ . L'obtention de la loi de comportement à partir des équations (Eq. 1.19) se fait comme suit :

- On écrit que la dissipation interne est nulle (le matériau est élastique).
- On néglige les effets thermiques (on ne s'intéresse qu'au comportement mécanique).

En exprimant alors le potentiel de dissipation dans les différentes configurations (lagrangienne, mixte, eulérienne) on en déduit la loi de comportement dans chacune de ces configurations par dérivation de l'énergie de déformation volumique [7, 8, 9].

$$\text{En eulérienne : } \Phi = \sigma : D - \rho\psi = \left( \sigma - 2\rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \right) : D = 0 \Leftrightarrow \sigma = 2\rho B \frac{\partial \psi}{\partial B} \quad 1.20\text{-a}$$

$$\text{En lagrangienne ; } \Phi_0 = \mathbf{S} : \dot{E} - \rho_0\psi = \left( \mathbf{S} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial E} \right) : \dot{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial E} \quad 1.20\text{-b}$$

$$\text{En mixte ; } \Phi_0 = \pi : \dot{F} - \rho_0\psi = \left( \pi - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial F} \right) : \dot{F} = 0 \Leftrightarrow \pi = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial F} \quad 1.20\text{-c}$$

On considérant la densité d'énergie de déformation  $\rho_0\psi$ , souvent notée  $W$  dans la littérature, et en introduisant le tenseur de KIRCHHOFF, les formes générales de la loi de comportement hyperélastique s'écrivent respectivement en eulérien, lagrangien et mixte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 2B \frac{\partial W}{\partial B} \\ \mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial E} = 2 \frac{\partial W}{\partial C} \\ \pi = \frac{\partial W}{\partial F} \end{array} \right. \quad 1.21$$

Lorsque le matériau possède des propriétés d'isotropie, la densité d'énergie de déformation s'écrit en fonction des invariants des tenseurs de Cauchy-Green  $C$  ou  $B$  notés  $I_i, (i = 1,2,3)$ , soit :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad 1.22$$

Sachant que  $C$  et  $B$  ayant les mêmes valeurs propres; ces invariants s'expriment de la manière suivante

$$\begin{cases} I_1 = \text{tr}(\overline{\overline{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( \left( \text{tr}(\overline{\overline{C}}) \right)^2 - \text{tr}(\overline{\overline{C}^2}) \right) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \\ I_3 = \text{Det}(\overline{\overline{C}}) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases} \quad 1.23$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  correspondent aux élongations dans les directions principales de  $C$  et  $B$ . La relation contrainte déformation est alors obtenue en dérivant ces invariants par rapport aux tenseurs  $C$  et  $B$ . On a

$$\begin{cases} \frac{\partial I_1}{\partial C} = \mathbf{I} \\ \frac{\partial I_2}{\partial C} = I_1 \mathbf{I} - C \\ \frac{\partial I_3}{\partial C} = I_2 C^{-1} \end{cases} \quad 1.24$$

D'où, en injectant (1.24) dans (1.21)

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial C} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial C} \quad 1.25$$

En configuration eulérienne, la relation contrainte déformation est obtenue en utilisant la relation de passage (1.12)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) B - \frac{\partial W}{\partial I_2} B^2 - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{I} \right] \quad 1.26$$

#### 1.2.4.3. Prise en compte de la condition d'incompressibilité

Nous avons mentionné parmi les propriétés à prendre en compte, la quasi incompressibilité des élastomères. En effet, les valeurs du coefficient de poisson  $\mu$  données par la littérature [101] sont de 0.49989 pour le caoutchouc naturel (sigle NR) non chargé et de 0.49969 pour du NR chargé de noirs de carbone à 33% en masse (le rapport entre le coefficient de dilatation volumique et le coefficient de cisaillement est de l'ordre de 1000).

Les déformations se font ainsi à volume presque constant. Si les élastomères subissent une contrainte hydrostatique, les variations de volume sont négligeables devant les grandes déformations subies par l'échantillon. On pourra, pour les modéliser, faire l'hypothèse d'incompressibilité. La conservation de volume au cours de la déformation se traduit par la relation suivante.

$$J = \det(F) = 1 \quad \text{ou} \quad \text{div}V = \text{trac}(\text{grad}_x V) = 0 \quad 1.27$$

La condition d'incompressibilité peut être introduite de façon directe dans l'écriture de l'énergie de déformation en écrivant celle ci sous la forme :

$$W = W(C) - p(J - 1) \quad 1.28$$

Seuls interviennent, dans  $\Psi$ , les deux premiers invariants du tenseur des déformations (puisque  $I_3 = 1$ ). On a ainsi  $W(C) = W(I_1, I_2)$ .  $p$  est un multiplicateur de Lagrange indéterminé, qui peut être identifié à la pression hydrostatique. Par dérivation de l'énergie de déformation, on obtient alors:

$$\Phi_0 = \left( \pi - \frac{\partial W}{\partial F} + pF^{-T} \right) : \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \pi = 2F \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} C \right] - pF^{-T} \quad 1.29$$

De manière analogue, on retrouve la forme de la relation contrainte déformation en formulation lagrangienne, dans le cas isotrope incompressible

$$\mathbf{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} C \right] - pC^{-1} \quad 1.30$$

En formulation eulérienne, on a alors

$$\sigma = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) B - \frac{\partial W}{\partial I_2} B^2 \right] - p\mathbf{I} \quad 1.31$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton, on a  $B^3 - I_1 B^2 + I_2 B = \mathbf{I}$ . L'équation 1.31 peut s'écrire alors sous la forme classique suivante

$$\sigma = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} B - \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{-1} \right] - p\mathbf{I} \quad 1.32$$

$$\text{avec } P = 2I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} - p \quad 1.33$$

Ces expressions peuvent également s'écrire en fonction des directions principales des tenseurs des contraintes. Par exemple, en formulant l'hypothèse de contraintes planes dans la direction de l'axe 3 ( $\sigma_3 = 0$ ),  $\sigma$  s'écrirait :

$$\sigma_i = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \lambda_i^2 - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda_i^2} - P \quad (i=1,2 \text{ ou } 3) \quad 1.34$$

Dans ce cas, l'indétermination sur  $P$  peut être levée en écrivant la différence  $\sigma_i - \sigma_3$  ( $i=1,2$ ) :

$$\sigma_i = 2 \left[ (\lambda_i^2 - \lambda_3^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} - \left( \frac{1}{\lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_3^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.35$$

Dans la suite, il est question d'utiliser le formalisme introduit dans ce paragraphe afin d'exprimer les solutions analytiques de cas simples de sollicitation.

### 1.3 Application à des cas simples de sollicitation.

#### 1.3.1 Extension simple

Ce mode de déformation consiste à étirer un échantillon sur lequel la partie utile peut être supposée en état de déformation uniaxiale (Figure. 1.2). Les contraintes dans la largeur et dans l'épaisseur de l'éprouvette sont considérées nulles.

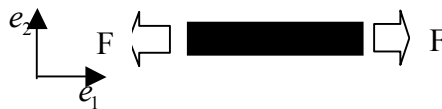


Fig 1.2: Expérience de traction

Dans le repère lié à l'éprouvette, où l'axe  $\vec{e}_1$  représente la direction d'extension, la matrice  $[F]$  du tenseur gradient de déformation  $F$  est alors de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & 1/\sqrt{\lambda} & \\ & & 1/\sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \quad 1.36$$

Les invariant de  $C$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad 1.37a$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \quad 1.37b$$

$$I_3 = 1 \quad 1.37c$$

La contrainte  $\sigma$  est alors donnée par l'équation :

$$\sigma = \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial W}{\partial I_1} - \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad 1.38$$

où  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  représentent les dérivées partielles de la fonction  $W$  lorsque celle-ci est écrite sous la forme  $W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

### 1.3.2 Compression uniaxiale

La compression uniaxiale est un cas particulier d'extension simple. L'éprouvette est alors comprimée au lieu d'être étirée. La forme analytique est donc la même que pour l'extension simple et les courbes de compression et de traction uniaxiale doivent se prolonger en suivant la relation Eq.1.38. Dans l'équation Eq.1.36, on a alors  $\lambda < 1$ .

### 1.3.3 Cisaillement pur

Cet essai consiste à pincer un échantillon de membrane rectangulaire sur ses bords les plus longs et à appliquer un effort perpendiculairement à ces bords (Figure. 1.3), la contrainte hors plan est alors nulle. Les bords verticaux de l'éprouvette ne restent pas parallèles.

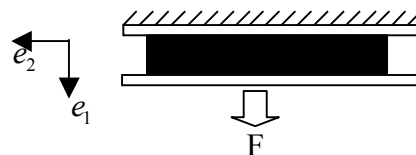


Figure 1.3 : Expérience de cisaillement pur



Cependant, si l'éprouvette est suffisamment large, on peut négliger les effets de bord et supposer que l'état de déformation de l'échantillon est celui au centre de l'éprouvette. Cette hypothèse permet alors d'écrire le tenseur gradient de déformation sous la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1/\lambda \end{bmatrix} \quad 1.39$$

Les invariants de  $C$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda^2} + 1 \quad 1.40a$$

$$I_2 = I_1 \quad 1.40c$$

$$I_3 = 1 \quad 1.40c$$

La composante du tenseur des contraintes de Cauchy dans la direction de la force appliquée est alors :

$$\sigma = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.41$$

La contrainte  $\pi$  dévient alors :

$$\pi = \frac{F}{S_0} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.42$$

### 1.3.4 Cisaillement simple

Cette expérience est généralement réalisée sur un bloc de matière sur lequel sont collés deux inserts plus rigides de part et d'autre du bloc. L'éprouvette ainsi réalisée est ensuite étirée comme l'indique la [Figure 1.4](#). Cette expérience est souvent réalisée avec des éprouvettes dites « quatre blocs », où le bloc cisailé est répété symétriquement afin d'assurer le parallélisme des faces collées à des plaques métalliques beaucoup plus rigides que le matériau étudié [\[6,7,8\]](#).

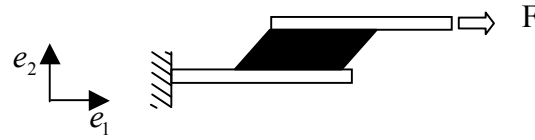


Figure 1.4 : Expérience de cisaillement simple

Cette expérience a l'inconvénient de générer une déformation des blocs où toutes les faces du bloc ne restent pas droites. Les faces libres présentent de légères courbures. On peut cependant, comme dans le cas du cisaillement pur, faire l'hypothèse que les effets de bord sont négligeables. On considère alors l'éprouvette en état de déformation uniforme. Le tenseur gradient de la transformation est de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad 1.43$$

où  $\gamma$  est le glissement donné par  $\gamma = u/h_0$ ,  $u$  étant le déplacement du support dans la direction de l'effort et  $h_0$  la hauteur du bloc constante au cours de l'expérience du fait de l'incompressibilité. En termes d'invariants, le cisaillement simple correspond aux invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  donnés par :

$$I_1 = 3 + \gamma^2 \quad 1.44a$$

$$I_2 = 3 + \gamma^2 \quad 1.44b$$

$$I_3 = 1 \quad 1.44c$$

Après calcul, nous obtenons l'expression de la contrainte de cisaillement de Cauchy en terme d'invariants :

$$\tau = 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \gamma \quad 1.45$$

### 1.3.5 Extension équi-biaxiale

L'extension équi-biaxiale consiste à étirer un échantillon simultanément dans deux directions avec la même valeur d'extension, tandis que la troisième direction est libre. On utilise, en général, une membrane sur laquelle on applique le même effort  $F$  sur chacun de ses côtés dans les deux directions du plan de la membrane (Figure 1.5).

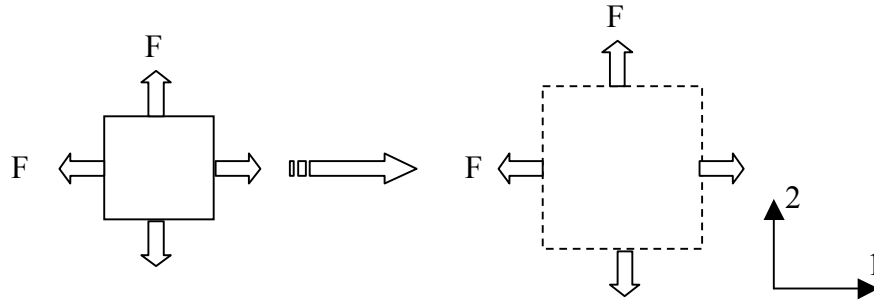


Figure 1.5 : Expérience de traction équi-biaxiale

Soit un élément de membrane de côté  $l_0$  dans sa configuration non déformée se transformant en un élément de côté  $l$ . On note  $\lambda$  le rapport  $l/l_0$ . Le tenseur gradient de déformation est alors de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad 1.46$$

Les invariant de  $C$  sont donnés par les relations :

$$I_1 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} \quad 1.47a$$

$$I_2 = \frac{2}{\lambda^2} + \lambda^4 \quad 1.47b$$

$$I_3 = 1 \quad 1.47c$$

Les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy sont alors

$$\sigma_1 = 2 \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.48a$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \quad 1.48b$$

$$\sigma_3 = 0 \quad 1.48c$$

et la contrainte  $\pi = \pi_1 = \pi_2$  devient :

$$\pi = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.49$$

Une autre façon de mesurer un état de contrainte en extension équibiaxiale consiste à gonfler une membrane circulaire encastrée sur ses bords de telle sorte qu'elle prenne la forme d'une bulle [9]. On utilise alors la propriété qu'au voisinage du pôle de la bulle la membrane est en extension équibiaxiale. Dans un repère dont le troisième axe est normal à la surface au pôle de la bulle, on mesure alors l'extension de la membrane entre deux marques tracées sur un cercle, le rayon de courbure au pôle  $r$  et la pression  $p$  insufflée

$$p = 2 \frac{T}{r} \quad 1.50$$

où  $T$  est la tension radiale au pôle de la bulle, c'est-à-dire la force membranaire par unité de longueur de membrane déformée. En reprenant les notations de la figure I.5, la tension  $T$  est reliée à  $F$  par :

$$T = \frac{F}{l} \quad 1.51$$

et la contrainte  $\pi$  est reliée à  $T$  par :

$$\pi = \frac{F}{h_0 l_0} = \frac{\lambda p r}{2 h_0} \quad 1.52$$

ou  $h_0$  est l'épaisseur initiale de membrane.

### 1.3.6 Traction biaxiale

Les matériaux hyperélastiques étant en général considérés incompressibles, les extensions principales sont liées entre elles par la relation Eq. 1.27. La traction biaxiale où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  peuvent prendre des valeurs quelconques constitue le mode de déformation le plus général. La Figure 1.6 illustre le schéma de principe du montage expérimental de la traction biaxiale exercée sur une membrane. L'échantillon est tenu en quelques points le long de ses bords par des lames glissantes sur des rails dont l'écartement permet de contrôler l'extension de

l'échantillon suivant deux directions. Les forces s'exerçant sur la membrane sont alors les efforts permettant de maintenir l'écartement des rails.

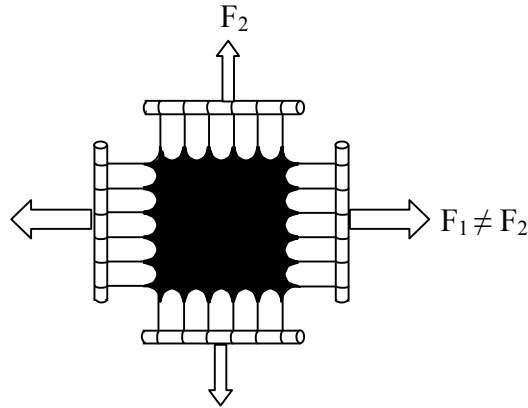


Figure 1.6 : Expérience de traction biaxiale

Les déformations sont en général mesurées par l'intermédiaire d'une grille régulière tracée sur la membrane ou par la mesure de l'écartement des rails [10,11,12]. Le gradient des déformations dans la partie utile de l'éprouvette est alors supposé de la forme :

$$[F] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \quad 1.53$$

d'où les invariants:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} \quad 1.54a$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \quad 1.54b$$

$$I_3 = 1 \quad 1.54c$$

La contrainte hors plan étant nulle, on peut écrire :

$$\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_3 \quad 1.55a$$

$$\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_3 \quad 1.55b$$

d'où le résultat suivant

$$\sigma_1 = 2 \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.56a$$

$$\sigma_2 = 2 \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.56b$$

ou encore :

$$\pi_1 = 2 \left( \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.57a$$

$$\pi_2 = 2 \left( \lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^3} \right) \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad 1.57b$$

Enfin nous notons que l'extension équi-biaxiale est un cas particulier d'extension biaxiale

#### 1.4 Quelques exemples d'énergie de déformation

De nombreuses formes de l'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature. Certaines se basent sur une théorie statistique (Treolar [13] ; Arruda et Boyce [14] ; Diani et Gilormini, [15]), d'autres sont purement phénoménologiques (Mooney [16] ; Rivlin [17] ; Alexander [18] ; Ogden [1]; Lambert-Diani et Rey [19]). Il existe plusieurs manières de classer les différentes énergies de déformation. On peut par exemple séparer celles qui s'expriment en fonction des invariants, et celles qui s'expriment en fonction des élongations principales. Une autre manière d'établir une séparation est de considérer celles dont les coefficients interviennent sous forme linéaire (c'est le cas notamment pour le modèle de Rivlin généralisé) et celles dont les coefficients interviennent sous forme de lois puissance (comme par exemple pour le modèle d'Ogden [1]). Nous ne présentons dans cette partie que les énergies de déformations polynomiales. Elles figurent parmi les énergies de déformation les plus utilisées.

Le modèle de Rivlin généralisé [17], implanté dans la plupart des codes de calcul éléments finis, est donné par le développement en série suivant :

$$W = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad 1.58$$

où  $C_{ij}$  sont des paramètres constants.  $N$  peut prendre des valeurs infinies, cependant un nombre élevé de paramètres conduit à des difficultés numériques d'identification et nécessite de disposer de données expérimentales suffisantes (pour  $N=3$ , on a généralement une bonne corrélation avec les mesures expérimentales). Ce type de loi est le plus utilisé.

En pratique, la plupart des lois polynomiales utilisées correspondent à un cas particulier du développement de Rivlin. Par exemple, en ne gardant que le premier terme du développement, on obtient la loi Néo Hookéenne

$$W = C_{10}(I_1 - 3) \quad 1.59$$

où  $C_{10}$  est le paramètre du modèle liant au module de cisaillement  $G$  par la relation  $G = 2C_{10}$ . Le modèle Néo Hookéen permet d'avoir une bonne corrélation pour des taux de déformation modérés, mais n'est pas adapté à la prise en compte des grandes déformations.

Le second cas particulier du développement de Rivlin correspond au modèle phénoménologique de Mooney Rivlin, très employé dans de nombreux codes de calculs par éléments finis comme ABAQUS, ANSYS et SAMCEF. On prend alors les 2 premiers termes du développement de Rivlin, ce qui permet d'écrire

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad 1.60$$

Cette fois, on obtient une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux jusqu'à des taux de déformation de l'ordre de 150%. Par contre, dans le cas d'élastomères chargés en noir de carbone, son utilisation peut donner de moins bonnes corrélations.

Le modèle phénoménologique de Yeoh [20], appliqué à des élastomères chargés en noir de carbone, est issu de la constatation expérimentale que  $\partial W / \partial I_2$  est négligeable dans le cas de ces mélanges. Yeoh a alors fait l'hypothèse simplificatrice  $\partial W / \partial I_2 = 0$ , et a proposé une énergie de déformation à 3 coefficients, où le second invariant n'apparaît pas. L'énergie de déformation proposée s'écrit alors :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad 1.61$$

Construire une loi de comportement hyperélastique revient à donner une forme particulière à la fonction  $W$ . Cependant, une loi de comportement sera d'autant mieux adaptée à un matériau donné qu'elle sera susceptible de reproduire le comportement du matériau quel que soit le mode de déformation considéré. En pratique, les matériaux sont testés sur quelques

modes simples permettant l'identification des constantes matérielles à partir de relations contraintes-déformations établies analytiquement. Nous proposons ici de répertorier les essais classiques rencontrés dans la littérature et de rappeler les formes analytiques des réponses du matériau en fonction du mode de déformation considéré.

### **Remarque sur l'utilisation de ces lois de comportement**

Les différentes lois présentées précédemment n'ont pas les mêmes domaines de validité. Il faut donc vérifier que le domaine de validité de la loi de comportement considérée est compatible avec les niveaux locaux de sollicitation. En guise d'exemple, [Marckmann \[21\]](#) utilise, entre autres, la loi de Mooney pour prédire les résultats expérimentaux de [Treloar \[13\]](#) d'essais réalisés sur un caoutchouc naturel. Ils sont présentés par la [Figure 1.7](#) Pour des élongations  $\lambda$  modérées (inférieures à 4), cette loi permet de simuler la réponse de l'élastomère pour les trois essais simples de chargement (Traction uniaxiale, Traction équi-biaxiale, Cisaillement). Il apparaît, en revanche, que pour des élongations supérieures, la modélisation s'éloigne de la mesure expérimentale. Ceci justifie que par la suite, le dépouillement des essais se fera jusqu'à des élongations principales maximales de 4 en traction simple si l'identification se fait avec la loi de Mooney.



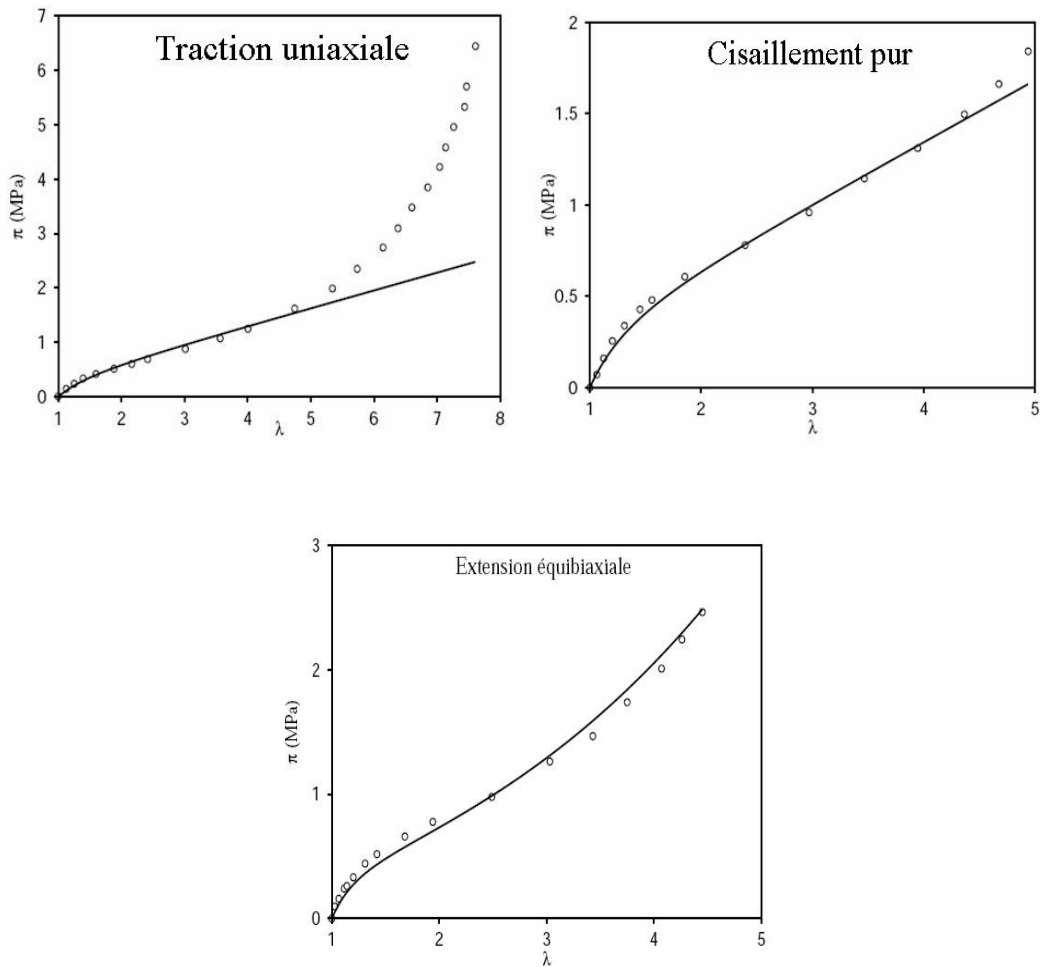


Figure 1.7 Essais de Treloar sur caoutchouc naturel pour des déformations modérées, d'après la thèse de Gilles MARCKMANN [1] – Comparaison entre mesure et modèle de Mooney (1940) pour les trois essais.

## 1.5 Quelques méthodes d'identification de lois de comportement à partir de la mesures de champs

### 1.5.1 Le recalage par éléments finis

Le recalage par éléments finis est l'une des premières méthodes qui a été proposée. Elle consiste à résoudre le problème inverse en utilisant de façon itérative l'outil numérique développé spécifiquement pour résoudre le problème direct. La procédure consiste à construire une fonction-coût entre les mesures cinématiques disponibles et les valeurs données aux mêmes points par un logiciel de calcul par éléments finis. Cette fonction-coût est ensuite minimisée par des méthodes numériques nécessitent de nombreuses itérations. On utilise à chaque pas l'outil prévu pour résoudre le problème direct, qui est dans le cas le plus général la méthode des éléments finis.

Cette méthode a été utilisée avec succès pour caractériser divers types de matériaux, ceci avec différents types de données. Mauvoisin [22] a caractérisé des plaques composites à partir de champs de flèches. Un exemple de caractérisation de composite peut également être trouvé dans la référence [23]. Le Magourou [24] s'est quant à lui intéressé à l'identification de propriétés visco-élastiques du bois. Il a également cherché à optimiser des configurations d'essais en jouant sur la localisation du chargement appliqué aux éprouvettes testées. Les propriétés élasto-plastiques de métaux ont été caractérisées avec ce type d'approche par Meuwissen et al. [25] et Lecompte et al. [26]. Divers exemples de caractérisation de matériaux biologiques comme la peau sont également disponibles dans [27, 28]. Vu le cadre de notre étude dédiée aux matériaux élastomères, il est intéressant d'indiquer qu'une loi hyperélastique de type Mooney-Rivlin a été caractérisée avec ce type d'approche dans [29,30].

De façon générale, cette méthode présente l'avantage de pouvoir fournir des résultats avec des données qui peuvent être en nombre réduit et en surface des éprouvettes testées seulement puisqu'elle fonctionne sans que des mesures de champs soient indispensables. Elle a également été éprouvée pour une grande variété de lois de comportement. Le fait de pouvoir calculer la sensibilité de la fonction coût à divers paramètres du modèle permet également d'envisager une optimisation des conditions d'essai.

La nécessité de conduire des calculs itératifs constitue incontestablement un inconvénient puisque les temps de calcul peuvent s'avérer très longs, surtout dans le cas de lois non-linéaires. Le modèle éléments finis nécessite également l'introduction d'une distribution d'efforts alors que seule la résultante est connue en général. Enfin, le choix initial des paramètres pour lancer la procédure est également posé puisqu'il affecte directement la durée des calculs et qu'il peut conduire à des convergences vers des minima locaux.

### 1.5.2 La méthode l'erreur en relation de comportement

L'erreur en relation de comportement a été introduite initialement pour qualifier des solutions de problèmes de mécanique obtenues par éléments finis [31]. Elle est basée sur l'estimation d'un écart  $E$  entre un champ de contraintes statistiquement admissible noté  $\sigma$  et un autre champ de contraintes calculé en utilisant une loi de comportement. Par exemple, une loi élastique linéaire représentée par le tenseur des rigidités  $\mathbf{C}$  ( $\sigma = \mathbf{C} : \varepsilon$ ) avec  $\varepsilon = \varepsilon(u)$  où  $u$  un champ de déplacement cinématiquement admissible [32] :

$$E(u, \sigma, \mathbf{C}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma - \mathbf{C} : \varepsilon(u)) : \mathbf{C}^{-1} : (\sigma - \mathbf{C} : \varepsilon(u)) dV \quad 1.62$$

La solution  $(u, \sigma)$  du problème mécanique vérifie les équations suivantes [31, 33] :

$$(u, \sigma) = \arg_{(\vartheta, \rho) \in C \times S} \min E(\vartheta, \rho, \mathbf{C}) \text{ et } E(\vartheta, \rho, \mathbf{C}) = 0 \quad 1.63$$

où  $C$  et  $S$  représentent l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissible et les champs de contraintes statiquement admissibles, respectivement. Si le tenseur  $\mathbf{C}$  est considéré comme inconnu, on peut le déterminer en écrivant qu'il vérifie

$$\mathbf{C} = \arg_{\mathbf{C}^* \in \tilde{C}} \min J(\mathbf{C}^*) \text{ avec } J(\mathbf{C}^*) = \min_{(\vartheta, \rho) \in C \times S} E(\vartheta, \rho, \mathbf{C}^*) \quad 1.64$$

où  $\tilde{C}$  représente l'espace des tenseurs d'élasticité admissibles, c'est à dire qui vérifient les symétries classiques des tenseurs du 4ème ordre de l'élasticité. En pratique, la minimisation de  $E$  s'effectue en combinant alternativement une minimisation par rapport à  $u$  et  $\sigma$  à  $\mathbf{C}^*$  fixé et une minimisation par rapport à  $\mathbf{C}^*$  à  $u$  et  $\sigma$  fixés. Cette approche est intéressante car on peut aussi l'appliquer dans le cas où  $\mathbf{C}^*$  est variable spatialement et dans le cas de lois de comportement non-linéaires définies par sous-domaines. Cette approche ne nécessite pas forcément comme données d'entrée des données qui soient des champs de mesures. Un inconvénient réside cependant dans le nombre des calculs à réaliser pour parvenir à la solution. Cette méthode a été utilisée initialement à des fins d'identification en dynamique [31, 34, 35], puis pour caractériser des matériaux élastiques linéaires [36, 37, 38] et, plus récemment, des matériaux élasto-plastiques [39] à partir de mesures de champs.

### 1.5.3 La méthode de l'écart à l'équilibre

La méthode de l'écart à l'équilibre [41, 40] est basée sur l'écriture de l'équilibre local qui est vérifié en tout point d'une éprouvette. Cet équilibre est écrit en pratique sur les côtés de sous-domaines de forme carrée. On y introduit la loi de comportement et les déformations locales. Ces dernières sont considérées comme constantes par morceaux et exprimées en fonction des déplacements sur les côtés. Cette approche a été introduite initialement pour caractériser la distribution spatiale d'un endommagement. En considérant l'ensemble des sous-domaines, on aboutit alors à un système permettant de déterminer cette distribution. Une particularité de cette méthode est qu'elle fournit des champs de contrastes locaux de rigidités. Ces dernières sont donc connues à un coefficient multiplicatif près. Cette méthode a d'abord été appliquée pour caractériser l'endommagement dans une éprouvette en matériau composite soumise à un essai de traction biaxial [40], puis à la caractérisation de micro-poutres [42, 43, 44, 45]. Elle a également été étendue à l'identification de conductivités thermiques [46].

### 1.5.4 La méthode de l'écart à la réciprocité

La méthode de l'écart à la réciprocité est adaptée à des situations pour lesquelles les mesures sont disponibles en surface seulement. Elle a été utilisée pour caractériser des fissures [47,48, 49], mais aussi pour identifier des distributions spatiales de modules élastiques [50]. Le principe repose sur l'écriture du principe de réciprocité de Maxwell-Betti entre deux états différents.

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u) : [\mathbf{C} - \mathbf{C}^*] : \varepsilon(u^*) dV = \int_{\partial\Omega} (\hat{T}.u^* - T\hat{u}) dS = R(\mathbf{C}^*; u^*, u) \quad 1.65$$

où  $(u, T)$  représentent le déplacement et le vecteur contrainte dont la distribution mesurée sur la frontière  $\partial\Omega$  est notée  $(\hat{u}, \hat{T})$ .  $u^*$  est un champ de déplacement qualifié d'adjoint qui découle de l'application de  $T^*$  sur  $\partial\Omega$ . Quel que soit le champ de déplacement adjoint  $u^*$ , l'écart à la réciprocité  $R(\mathbf{C}^*; u^*, u)$  doit être nul. On peut donc écrire

$$R(\mathbf{C}^*; \tilde{u}, u = 0) \forall t \quad 1.66$$

Généralement,  $u$  reste inconnu à l'intérieur du solide et doit être reconstruit par une procédure itérative, de même que  $\mathbf{C}$ . La procédure a également été appliquée pour identifier des rigidités de flexion de plaques [51].

### 1.5.5 La Méthode des Champs Virtuels (MCV)

Le dernière méthode est celle dite des champs virtuels. Introduite initialement dans le cadre de la flexion des plaques minces anisotropes élastiques [52], elle s'applique en fait à de très nombreux autres cas de chargement ou lois de comportement. Cette méthode est basée sur l'équilibre global de l'éprouvette testée. Cet équilibre est écrit avec le Principe des Travaux Virtuels (PTV) de la façon suivante :

$$\int_V \sigma : \varepsilon^* dV = \int_S T \cdot u^* dS \quad \forall u^*, \varepsilon^* \quad 1.67$$

où  $u^*$  et  $\varepsilon^*$  représentent respectivement un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible et le champ de déformation virtuel qui en découle. Le premier terme de cette égalité est le travail virtuel des efforts intérieurs et le deuxième le travail virtuel des efforts extérieurs.

Une propriété importante réside dans le fait que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tout champ de déplacement  $u^*$ . Cette propriété a été mise à profit pour identifier des paramètres de lois de comportement dans le cadre de la MCV. En effet, dans le cas d'une loi de comportement qui dépend linéairement des paramètres qui la pilote, on peut montrer que l'équation ci-dessus devient une équation linéaire en fonction des paramètres inconnus en question. Ecrire cette équation avec plusieurs champs virtuels cinématiquement admissibles (ou pas) différents et indépendants conduit à un système linéaire dont l'inversion conduit aux coefficients recherchés [53]. L'indépendance des équations du système est directement conditionnée par l'hétérogénéité du champ traité et par le choix des champs virtuels retenus. Un atout important de cette méthode est qu'elle est directe, ce qui évite les calculs itératifs du recalage par éléments finis ou de l'erreur en relation de comportement.

La question du choix optimum des champs virtuels a fait l'objet de plusieurs travaux qui ont d'abord abouti à la notion de champs virtuels dits spéciaux [54, 55] (ils rendent la matrice principale du système linéaire égale à la matrice identité), puis à la définition de champs virtuels spéciaux qui minimisent l'influence du bruit de mesure sur les paramètres identifiés [56].

Dans le cas de lois qui ne s'expriment plus linéairement en fonction des paramètres, on construit un résidu avec l'écart quadratique entre travaux virtuels des efforts intérieurs et extérieurs. Cet écart doit être nul pour tout champ cinématiquement admissible. La méthode consiste donc à minimiser cet écart en considérant les paramètres de la loi comme des inconnues, ceci pour des champs virtuels fixés a priori.

Cette méthode a été appliquée dans de nombreux cas, par exemple la flexion statique [57] et dynamique [58,59] de plaque composites. Elle a été étendue aux rigidités complexes, permettant ainsi de traiter la viscoélasticité [60]. Elle a également été utilisée pour caractériser des composites dans leur plan, que ce soit dans le domaine linéaire élastique [61] ou pour identifier un endommagement [62]. Plus récemment, elle a été appliquée à l'identification de paramètres élasto-plastiques de matériaux métalliques [63].

Un avantage de cette méthode est son aspect direct dans certains cas. On montre également que contrairement au recalage par éléments finis, on peut se contenter de la connaissance de la résultante des efforts appliqués, leur distribution spatiale sur la frontière pouvant rester inconnue.

### **1.6.Conclusion**

L'inventaire des méthodes d'identification adaptées à l'extraction de paramètres de lois de comportement à partir de la mesure de champs montre l'étendue de la palette disponible. L'objectif principal de ce travail est de développer une nouvelle méthode alternative aux précédentes, basée sur l'optimisation du champ de contraintes adapté à la géométrie de l'éprouvette, mais elle reste essentiellement liée à la quantité d'informations obtenues par la mesure du champ de déformations. La méthode de mesure de champs par corrélation d'images numériques s'impose comme étant la plus adaptée au cas des grandes déformations des caoutchoucs.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation du dispositif expérimental utilisé pour les essais équi-biaxiaux, puis nous présentons les principes de la corrélation d'image utilisée dans cette étude et sa mise en œuvre. La méthode d'identification et la validation par éléments finis fait l'objet des chapitres ultérieurs.

## Chapitre II

# Essai traction bi-axiale hétérogène et analyse d'image

Les essais de caractérisation classiquement utilisés posent des problèmes d'identification. D'une part, la multiplication des essais uniaxiaux est source de dispersion (voir par exemple Harth et al. 2004 [64]). D'autre part, l'identification des modèles réalisées à partir d'essais uniaxiaux est insuffisante pour représenter le comportement sous chargement multiaxial [14,18]. Les essais hétérogènes peuvent être intéressants pour la caractérisation des comportements de ces matériaux. En effet, l'hétérogénéité augmente la variété des situations d'identification et permet d'identifier plusieurs paramètres à partir d'un seul essai, mais malheureusement ces essais sont peu pratiqués en raison des difficultés trouvées dans le calcul des contraintes.

Dans ce chapitre, après avoir décrit rapidement quelques dispositifs biaxiaux proposés dans la littérature, nous présenterons notre dispositif expérimental utilisé pour la réalisation des essais sur des caoutchoucs non chargés. Puis, nous présenterons la technique de corrélation d'image utilisée pour la mesure de champ de déformation des essais réalisés.

### 2.1. Les dispositifs de traction biaxiale

Il existe un grand nombre de machines pour réaliser des essais de traction biaxiale, dont les avantages et les inconvénients sont liés à leur technologie. Les dispositifs les plus connus sont ceux à 4 vérins ou actionneurs, tel que celui développé par Kuwabara et al., 1998 [65] pour solliciter une éprouvette cruciforme (Voir Fig. 2.1). Un système de type pantographe reliant les mors opposés associé au dispositif, de sorte que les actionneurs ont des

déplacements opposés deux à deux. Les déformations sont mesurées à l'aide d'une jauge de déformation biaxiale placée au centre de l'éprouvette. Ce dispositif a permis de réaliser des trajets de chargement particuliers avec des changements de direction abrupte. La complexité du dispositif de traction et de l'éprouvette (rainures dans les bras de l'éprouvette pour garantir un état de contrainte uniforme au centre de l'éprouvette) illustre la complexité de ce type d'essais. La Figure 2.2 montre une autre machine développée à l'Université de Bruxelles (A. Smits et al., 2006 [66]). Dans ce dispositif le système de chargement est hydraulique, avec une capacité de 100 kN et une course de 150 mm dans chaque direction. Chaque cylindre est commandé indépendamment. Le champ de déformation de l'éprouvette est déterminé par corrélation d'images numériques.

Le principal inconvénient des dispositifs précédents est la nécessité de concevoir une machine spécifique, et donc leur coût élevé, incluant les vérins hydrauliques et la réalisation d'importants ensembles mécaniques.

Un autre type d'essais est utilisé pour obtenir un état de contrainte biaxiale. Il s'agit du gonflement des membranes. Cette méthode fut développée à l'origine en 1959 par J. W. Beams [67] sur des membranes circulaires afin de caractériser des films minces en or et en argent. La Figure 2.3 montre un gonflement d'une membrane circulaire, il consiste à appliquer une pression sur une membrane maintenue sur la circonférence d'un cylindre. Ce teste semble efficace, même si l'état de biaxialité n'est valable que dans la partie supérieure du disque gonflé, ce qui peut induire des problèmes de calcul des contraintes. Cependant, d'une part, un tel système ne permet pas d'effectuer un essai de traction biaxiale avec des intensités différentes de l'étirage dans les deux directions de traction; d'autre part, le maintien d'un disque sur sa circonférence requiert l'utilisation d'un système hydraulique spécifique et donc le coût des tests est important.

D'autres dispositifs cinématiques simples ont été proposés, qui permettent de transformer un déplacement dans une seule direction en un système de deux déplacements orthogonaux. Il est à noter que ces dispositifs sont réservés aux éprouvettes rigides. Ferron et Makinde, 1988[68] ont conçu un dispositif permettant, à l'aide d'un système de biellettes, de convertir le déplacement vertical obtenu en compression avec une machine d'essais conventionnelle en déplacements horizontaux dans deux directions perpendiculaires, conduisant à un allongement biaxial de l'éprouvette (Figure. 2.4).

Un autre dispositif, présenté par Brieu et al., 2007 [69], assure également la transformation d'un déplacement vertical en déplacement dans deux directions perpendiculaires. Il a été développé en collaboration avec l'équipe du laboratoire PIMM des



Arts et Métiers Paristech. L'inconvénient majeur de ce dispositif est la surface agressive des mors qui provoque la déchirure de l'éprouvette avant même d'atteindre un taux de déformation de 50%. Ce dispositif expérimental est choisi pour réaliser nos essais, néanmoins d'autres mors ont été conçus afin d'obtenir les taux de déformation nécessaires à la validation de la méthode d'identification proposée.

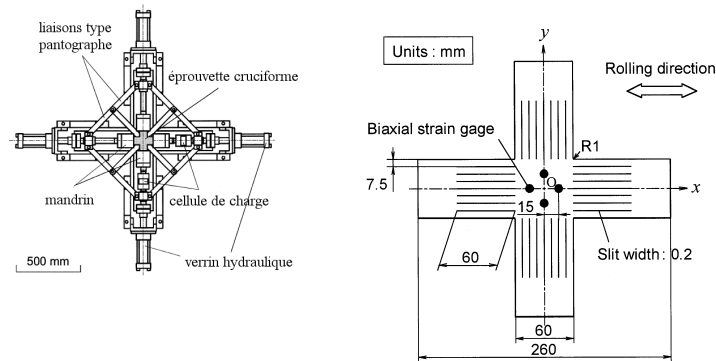


Fig. 2.1 Dispositif d'essais biaxiaux Kuwabara et al. (1998) et éprouvette cruciforme



Figure 2.2. Dispositif d'essais biaxiaux Smits et al., 2006

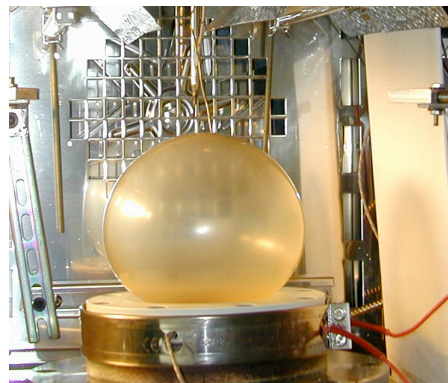


Figure 2.3. Gonflement d'une membrane circulaire

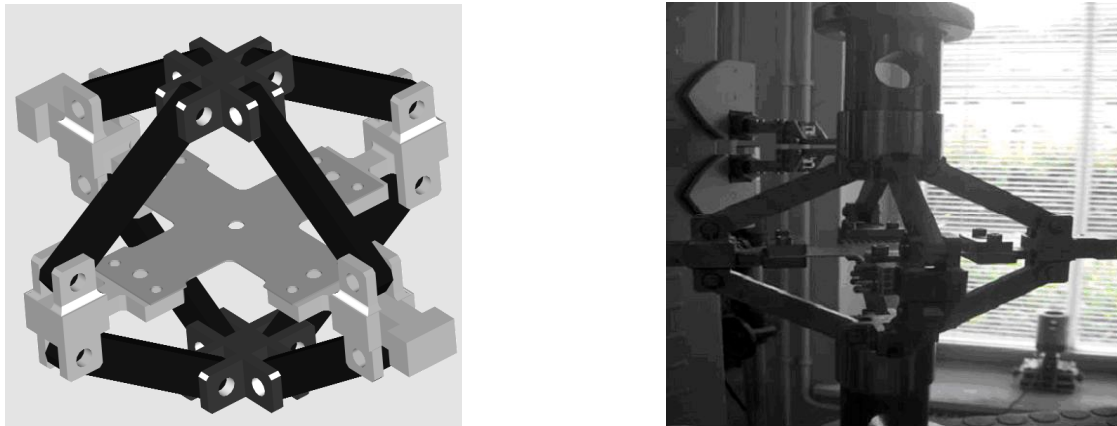


Figure 2.4. Dispositif d'essais biaxiaux Ferron, G., Makinde, A., 1988. a- Schéma du dispositif de traction biaxiale. b- Photo du dispositif en place sur la machine de traction.

## 2.2. Essai traction bi-axiale hétérogène

Le montage est conçu spécialement pour produire un état de contrainte biaxiale hétérogène sur des éprouvettes cruciformes de faible épaisseur. Il est principalement utilisé pour caractériser le comportement des caoutchoucs. De plus, ce mécanisme est adaptable à n'importe quelle machine de traction uniaxiale qu'on trouve plus généralement dans les laboratoires.

### 2.2.1. Dispositif du mécanisme

La base du mécanisme (pièce 1), comme le montre la Figure. 2.5 est fixée sur le châssis de la machine de traction, tandis que la moitié supérieure (pièce 2) est fixés sur la traverse mobile. Lorsque la traverse mobile se déplace, le mors verticale (pièce 4) fixé sur la partie supérieure du mécanisme se déplace avec, tandis que, le mors vertical inférieur, fixé sur la base, reste immobile. Les mors horizontaux sont fixés à deux barres de tractions horizontales (pièce 5) qui sont à leur tour liées aux deux traverses du mécanisme, supérieure et inférieure, avec quatre plaques (pièce 9) articulées au fond comme indiqué dans la Figure. 2.6.b. D'autre part, l'extrémité de chaque barre de traction glisse sur un guide incliné d'un angle  $\varphi$  (pièce 8) comme indiqué dans la Figure. 2.6.a. Grâce à l'inclinaison des deux guides d'un angle  $45^\circ$ , lorsque on impose un déplacement  $U$  à la traverse mobile, par conséquence au mors vertical supérieur, un déplacement  $U/2$  est obtenu pour chaque pièce de la paire de mors horizontale. Afin d'empêcher la mobilité des mors horizontaux, une barre (pièce 10) est ajouté pour aligner les pièces 5 et les mors horizontaux (Figure. 2.6.a. et 2.5.b)

La charge de test est mesurée avec une cellule de charge fixée entre la barre de traction verticale (pièce 3) et le mors vertical supérieur. La cellule permet d'obtenir une mesure directe de la force dans la direction verticale, tandis que la force horizontale dépend de l'angle de l'inclinaison des deux guides. Dans les essais réalisés l'inclinaison d'un angle  $45^\circ$  nous donne des forces égales dans chaque direction.

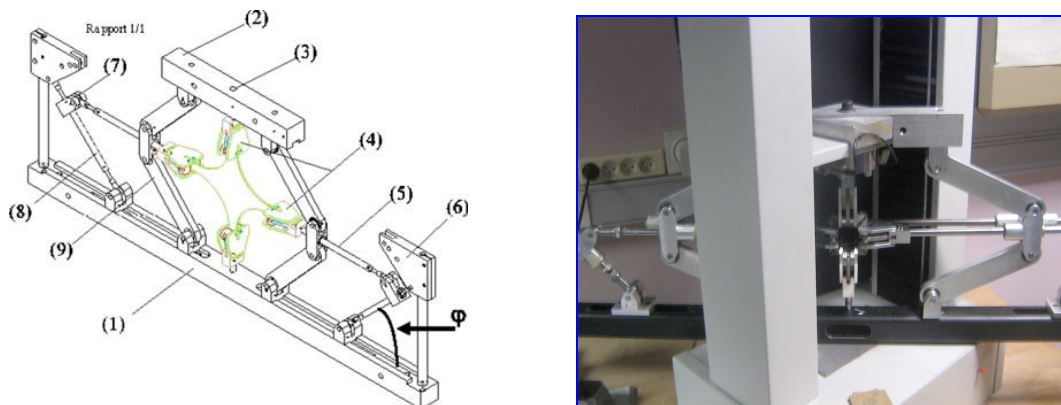


Fig 2.5 : Dispositif d'essai biaxial. (a) schéma du dispositif (b) dispositif positionné sur une machine de traction uniaxiale.

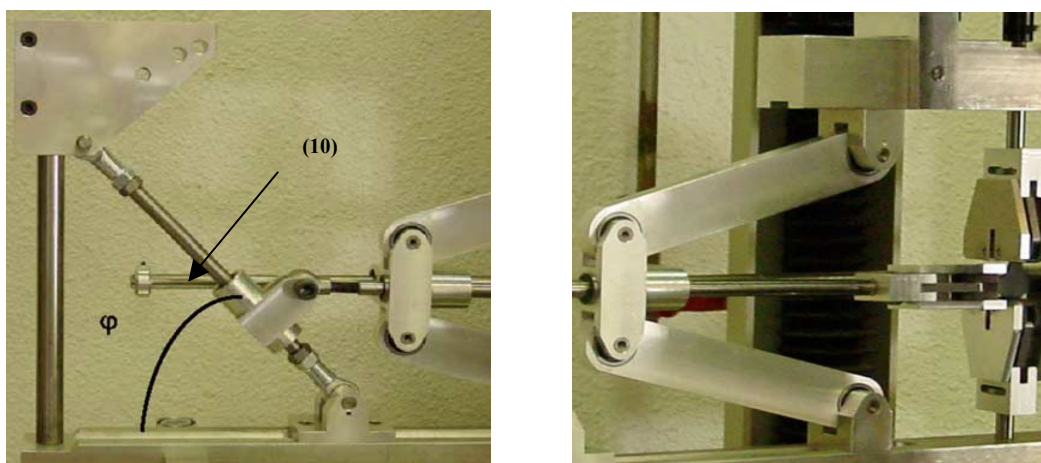


Fig 2.6 : (a) inclinaison du guide d'un angle  $\varphi$  (b) la translation de barres de tractions horizontales dans la liaison pivot des pièces 9.

### 2.2.2. Les éprouvettes de traction biaxiale

Pour réaliser ces essais biaxiaux on utilise une éprouvette cruciforme. Elle permet d'obtenir de grandes déformations biaxiales assez homogènes dans la partie centrale. Pour nos essais, nous avons utilisé une éprouvette carrée en caoutchouc de dimensions  $(60 \times 60 \times 3) \text{mm}^3$  entaillée d'un  $\frac{1}{4}$  de cercle de rayon  $R=10 \text{mm}$  au quatre coins et rallongée de 20 mm dans chaque côtés afin de faciliter la préhension de l'éprouvette (Fig. 2.7). Celle-ci est collée dans chaque côté à une paire de mordaches en aluminium qui permettent une fixation facile et rapide sur les mors du mécanisme. La colle utilisée est un adhésifs cyanoacrylate Permabond, il permet une résistance au cisaillement d'environ 20MPa. Grâce à un boulon, les deux mâchoires du mors serrent la paire de mordaches collée sur l'éprouvette. Il est important que le serrage soit le même sur les quatre bras de l'éprouvette.

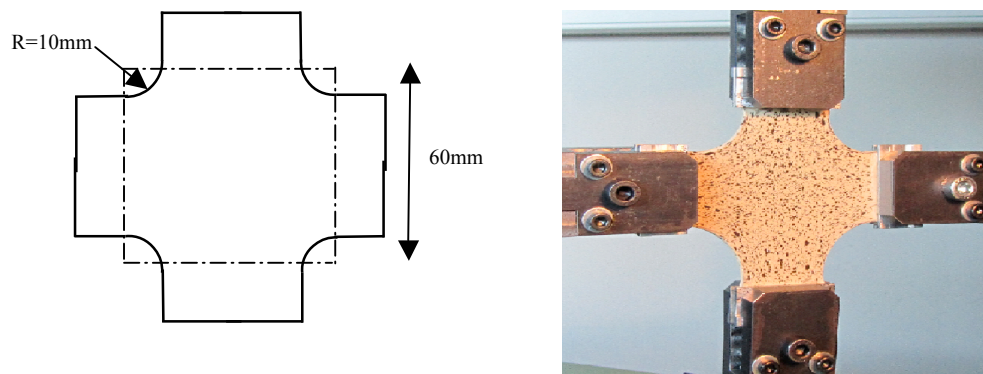


Fig 2.7 : (a) Eprouvette cruciforme utilisée pour les essais biaxiaux. (B) Fixation de l'éprouvette sur les mors

Un soin particulier est apporté à la préparation de la surface de l'éprouvette pour pouvoir appliquer la technique de corrélation d'image pour la mesure du champ cinématique 2D [14,18]. En effet, pour une bonne corrélation d'image un dépôt par pulvérisation de peinture permet la création d'un mouchetis nuancé en niveaux de gris sur la surface de l'éprouvette étudiée. L'avantage des mouchetis de peinture réside dans le fait que le contraste est élevé en tout point de la surface étudiée et que le dépôt donne une répartition aléatoire des taches facilitant la corrélation.

### 2.2.2. L'expérience

L'éprouvette est positionnée entre les mors du dispositif monté sur une machine de traction-compression universelle DELTALAB d'une capacité de 100KN, au sein du

Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle de l'Université Paris-Est Marne-La-Vallée (MSME). Le pilotage s'effectue en déformation imposée par un vérin à une vitesse fixée à 3mm/min. Le capteur d'effort utilisé pour ce type d'essai est un capteur d'une capacité de charge de 5KN située sur la traverse mobile et permettant une bonne précision des résultats dans le domaine d'effort dans lequel nous nous plaçons (d'ordre  $\pm 0.05\%$ ). Les mesures de déplacement et d'effort sont alors collectées via une carte d'acquisition d'un ordinateur sur lequel on peut visualiser en continu le cycle force-déplacement. Les déformations de l'éprouvette sont suivies à l'aide d'une caméra CCD (Charge Coupled Device) commandée par un logiciel. Une prise d'image se fait à chaque déplacement de 3mm et jusqu'à la rupture de l'éprouvette. Sur toutes les images obtenues, sauvegardées au format bmp, la première (prise au repos) est appelée « image de référence ». Les images prises par la suite, appelées « images déformées ».Elle seront comparées à l'image de référence via le logiciel de corrélation CORRELI, ce qui nous permet d'avoir le champ de déplacement à chaque étape du chargement. Dans ce qui suit, la technique de corrélation d'image sera présentée.

### **2.3. Corrélation d'images numériques**

La première étape de cette étude consiste au choix d'une technique expérimentale de mesure de champs de déformation dont les résultats sur l'éprouvette est le point de départ de la méthode d'identification. Notre choix est porté sur la technique optique sans contact de mesure de champ, qui est une méthode expérimentale alternative aux techniques classiques de mesures locales (jauges de déformation, capteurs de déplacement, ...etc.), en raison de ses avantages tels que l'absence de contact, et donc non intrusif, ses performances accrues, la souplesse de son adaptation. En plus, elle ne nécessite que peu de matériel : une caméra CCD, une carte d'acquisition et un ordinateur muni des logiciels/routines adaptés pour l'acquisition et du traitement des données.

#### **2. 3.1. La Corrélation d'Images Numériques (CIN) à travers la littérature**

Les origines de la corrélation d'images numériques datent des années 80, en particulier à travers une contribution de Peters et Ranson [70]. Cette dernière décrit l'utilisation d'images numériques d'ultrasons d'un solide, soumis à un chargement bi-dimensionnel, pour la détermination de la valeur moyenne des déplacements plans et des gradients de déformations de l'objet. Cette étude propose de parvenir à une mesure de champs en comparant le positionnement de petites zones de la surface d'un l'objet lors de différentes étapes du

chargement. L'application d'un algorithme de dérivation numérique permet, de surcroît, l'obtention de l'information de déformations sur cette même surface.

Au cours des années suivantes, de nombreuses améliorations ont été apportées aux concepts initiaux. En particulier, quatre étapes majeures se sont dégagées.

- Les travaux de Sutton *et al.* [71,72,73], au cours des années 80, présentent des évolutions sur l'algorithme de détection subpixel. Le choix du type d'interpolation pour l'évaluation du déplacement subpixel est notamment discuté ainsi que des méthodes d'optimisation pour la minimisation.
- Chu *et al.* [74], en 1985, décrivent la théorie de la méthode de corrélation d'images numériques. Ils détaillent les précisions expérimentales obtenues, notamment en déformations.
- Ensuite, l'utilisation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform FFT) pour la détermination des déplacements s'est avérée être une alternative intéressante, en particulier pour des applications où les déformations planes sont petites. La transformée de Fourier discrète est appliquée sur les figures d'intensité des zones originales et déformées pour calculer la fonction d'intercorrélation [75]. L'approche par la FFT s'est révélée rapide et précise dans la plupart des cas. Elle est utilisée par certains logiciels de corrélation [66].
- Enfin, les travaux de Chevalier *et al.* [18], en 2001, et de Hild *et al.*, 2002 [76, 77] présentent une évolution du traitement des images par la corrélation pour des analyses en très grandes déformations. En effet, une approche lagrangienne réactualisée est mise en place afin de suivre des champs de géométrie importants et pour augmenter le déplacement maximum détectable par rapport aux approches conventionnelles de corrélation. Une approche multi échelle est mise en point plus tard par Hild *et al.*, 2002 [76, 77]. Cette procédure est particulièrement bien adaptée aux textures pouvant varier au cours d'un chargement [78].

Malgré la jeunesse de cette technique de mesure de champs cinématiques, la multitude des domaines d'applications, la diversité des études et la multiplication des utilisateurs montrent à quel point cette méthode possède un fort potentiel à court, moyen et long termes. L'évolution continue du matériel technique pousse les expérimentateurs à optimiser tous les aspects de cette technique, d'où des améliorations perpétuelles.

### **2.3.2. Théorie générale de la Corrélation d'Images Numériques**

Le principe de base de la corrélation d'images numériques bi-dimensionnelles pour l'obtention d'une mesure de déplacement consiste à faire coïncider un point d'une image de la surface d'un objet au même point de l'image prise suite à un chargement. En supposant qu'il existe une correspondance entre les déformations de l'image enregistrée et celles de la surface

de l'objet (i.e. hypothèse de base), l'appariement point par point, entre l'image originale et celle déformée, permet de mesurer les déplacements. Deux conditions majeures doivent être respectées pour appliquer au mieux la corrélation d'images numériques bi-dimensionnelles. Tout d'abord, la surface étudiée doit présenter un motif aléatoire avec une dynamique de niveaux de gris maximum ; ensuite, le positionnement des systèmes d'observation et de numérisation doivent être parallèles à la surface de l'objet. L'appariement des points homologues se fait par maximisation d'une fonction d'intercorrélation calculée sur un voisinage de ces points. De ce fait, c'est un motif aléatoire qui rend possible la reconnaissance des points homologues les uns par rapport aux autres. La recherche de ce maximum passe par une procédure d'optimisation accompagnée d'une interpolation de la fonction d'intercorrélation permettant l'amélioration de la précision de la mesure à un niveau subpixel.

### 2.3.3. Principe du logiciel CORRELI<sup>GD</sup>

L'ensemble des applications de la corrélation d'images numériques qui sont présentées dans ce document ont été effectuées autour et avec le logiciel CORRELI<sup>GD</sup> [76,78], développé au Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) de Cachan. L'organigramme de la procédure de corrélation d'image par ce logiciel est décrit dans la Figure.2.8. Pour déterminer le champ de déplacement d'une image déformée par rapport à une image de référence, un sous-domaine (ROI) de l'image est découpé en zone carré (de centre  $(x,y)$  et de taille  $2n$ ,  $n$  étant un entier naturel), appelé zone d'intérêt (Zone Of Interest : ZOI). La procédure de corrélation d'images par CORRELI<sup>GD</sup> consiste à retrouver la correspondance de chaque ZOI entre deux images prises à des instants différents, comme l'illustre la Figure. 2.9. Le déplacement d'une ZOI par rapport à celle de l'image de référence correspond à un décalage de l'intensité du signal numérisé par une caméra CCD.

Pour estimer le décalage entre deux image, le signal de l'image déformée  $g(\xi,\zeta)$ , appelé niveau de gris, peut être écrit comme un décalage du signal de l'image de référence  $f(\xi - u, \zeta - v)$  perturbé.

$$g(\xi,\zeta) = f(\xi - u, \zeta - v) + b(\xi,\zeta) \quad (2.1)$$

où  $u, v$  sont les déplacements inconnus et  $b(\xi,\zeta)$  un bruit de mesure aléatoire (bruit de photo, bruit de numérisation, bruit d'obscurité pour les caméras CCD [100]). Pour évaluer les composantes  $u$  et  $v$  du déplacement, on a minimisé la norme de la différence entre les deux signaux  $f(\xi - u, \zeta - v)$  et  $g(\xi,\zeta)$  par rapport à  $x$  et  $y$ .

$$\min_U \|g - f(\cdot - x, \cdot - y)\|^2 \quad (2.2)$$

où ‘.’ Correspond à une variable muette. Lorsque l'on choisit la norme quadratique du type

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi, \zeta)|^2 d\xi d\zeta, \text{ le problème précédent peut être résolu par des techniques}$$

d'intercorrélation qui consiste à maximiser les superpositions de  $f$  translaté et  $g$ . En effet, la minimisation précédente est équivalente à maximiser la quantité  $h(x, y)$  :

$$h(x, y) = (g * f)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \zeta) g(\xi - x, \zeta - y) d\xi d\zeta \quad (2.3)$$

Le symbole \* indique l'opérateur d'intercorrélation. Cette fonctionnelle atteint sa valeur maximale lorsque  $\xi = u$  et  $\zeta = v$ . Donc la recherche du maximum du coefficient de corrélation permet de déterminer le déplacement d'un point  $(x, y)$ .

Le calcul d'un produit d'intercorrélation est conduit dans l'espace d'étude réel (espace de référence) ou dans l'espace de Fourier, par utilisant d'une transformée de Fourier rapide TFR (Fast Fourier Transform : FFT). L'équation Eq.2.3 devient alors :

$$g * f = 2^n TFR^{-1} (TFR[\underline{g}] \overline{TFR[f]}) \quad (2.4)$$

où le complexe conjugué est surligné et  $n$  est un entier qui définit la taille de la ZOI.

Pour évaluer les déplacements subpixels, la fonction d'intercorrélation est interpolée. Dans le cas de CORRELI<sup>GD</sup>, une interpolation bi-cubique est utilisée. La particularité de cette application, *i.e.* CORRELI<sup>GD</sup>, par rapport à la plupart des programmes de corrélation d'image numérique, réside dans le fait que les traitements sont effectués dans l'espace de Fourier permettant, entre autres, une exécution rapide des corrélations.



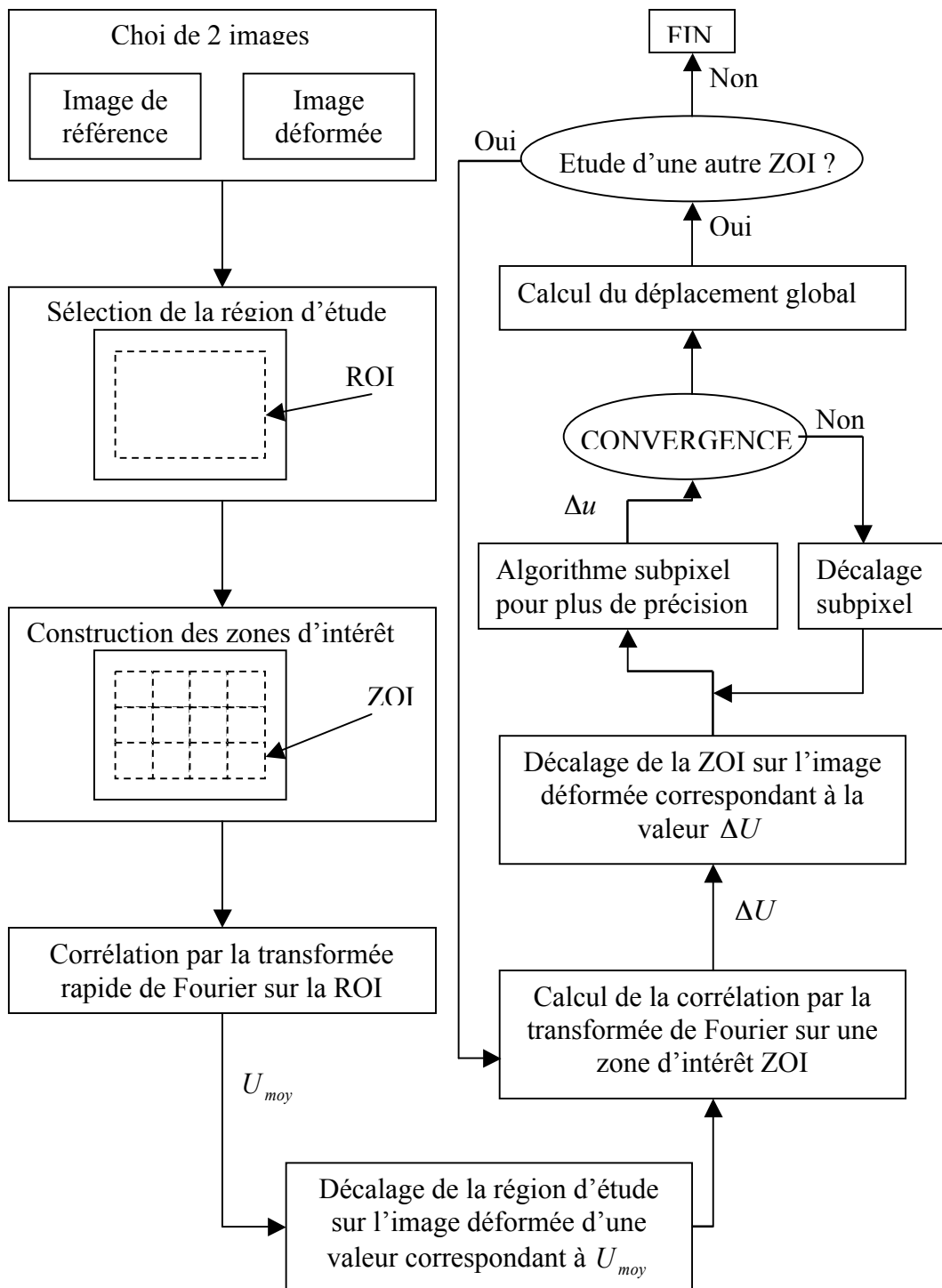


Fig. 2.8 – Organigramme de la procédure de corrélation mise en place dans CORRELI<sup>GD</sup>

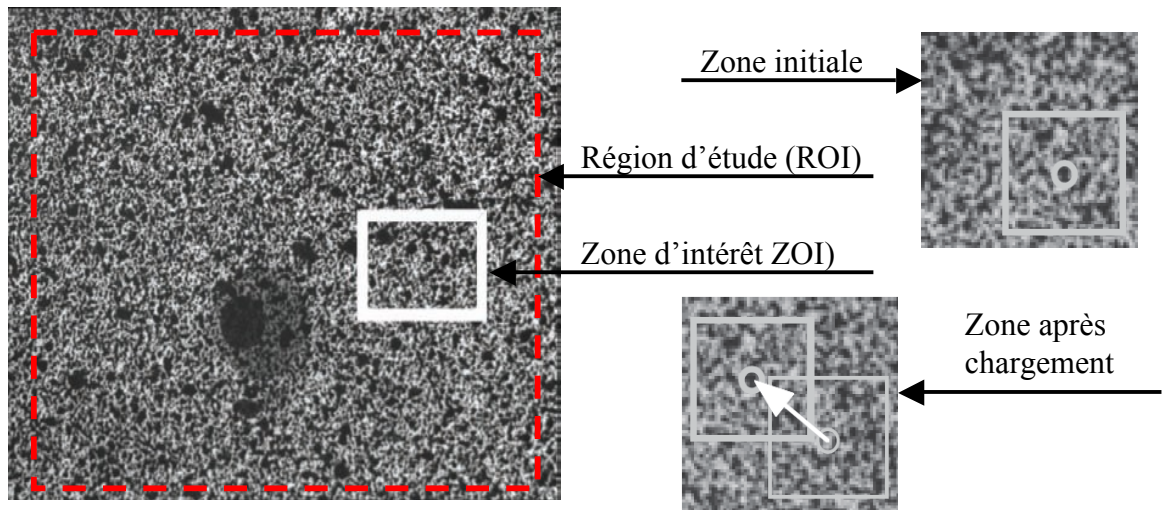


Fig. 2.9 – Illustration du principe de la corrélation d'images numériques

## 2.4 Mesure du champ cinématique 2D

Une fois que l'essai est mené jusqu'à la rupture et que les images représentatives des différents états mécaniques sont numérisées, le champ de déplacement est extrait grâce à CORRELI<sup>GD</sup>.

L'application du traitement par CORRELI<sup>GD</sup> [70, 71] peut être décrite suivant 5 étapes :

- Etape 1 : Chargement de l'image de référence ;
- Etape 2 : Choix des paramètres de la corrélation (e.g. taille de la zone d'intérêt  $n$ , distance de séparation) ;
- Etape 3 : Choix du type de précision (pixel ou subpixel) ;
- Etape 4 : Choix de la région d'étude (Region Of Interest : ROI) (i.e. zone de l'image à traiter pour l'obtention des déplacements) ;
- Etape 5 : Traitement et enregistrement des résultats.

### 2.4.1 Différentes étapes de CORRELI<sup>GD</sup>

Au lancement de CORRELI<sup>GD</sup> une boîte de dialogue nous invite à choisir entre l'exécution (une nouvelle analyse d'image) et la visualisation des résultats. Ensuite une autre fenêtre nous invite à choisir les paramètres pour un calcul de corrélation.

- La distance minimum entre deux centres de ZOI, i.e. pas entre masques. Pour obtenir un grand nombre de points d'étude on a choisi un pas petit ( 8pixel). Il apparaît aussi que les meilleurs résultats sont obtenus quand le pas est petit.

- La taille de la zone d'intérêt, i.e.  $n$  taille des masques : plusieurs valeurs sont proposées :  $2^4$ ,  $2^5$  et  $2^9$  pixels. Cette distribution est liée à la texture du matériau qui doit présenter une variation large de la répartition des niveaux de gris afin que les ZOI considérées avant et après déplacement puissent être appariées. Dans le cas étudié, la taille des masques nécessaire pour arriver à convergence est  $2^4$
- Définir le nombre d'images déformées.

Une fois les paramètres sont définis, on choisit la région d'étude (ROI), en sélectionnant par le curseur de la souris deux points sur la surface à analyser. Ce paramètre permet la mise en place des ZOI au sein de l'image (Fig.2. 10-a) et la détermination des coordonnées initiales ( $x$ ,  $y$ ) de chaque noeud. Une fois la zone ROI est définie, les images déformées sont chargées l'une après l'autre, ainsi les résultats du traitement sont obtenus et une base de données plus complète est alors à disposition pour identifier le comportement du matériau étudié.

### 2.4 2. Résultat et discussions

#### 2.4 2. 1 Champs de déplacement

Après exécution de CORRELI, on dispose des valeurs des champs de déplacement à chaque instant, mesurées dans la région d'étude. Grâce à CORRELI on peut les visualiser, soit sous forme d'une grille, appelée grille déformée Fig.2. 10-b, soit sous forme de vecteur qui représente le déplacement des points de la grille entre deux instants Fig.2. 10-c De même, on peut visualiser les isovaleurs des déplacements dans chaque direction. La Fig.2. 10-d et e représente les iso valeurs respectivement dans les directions 1 et 2.

Dans un premier temps, nous présentons sur les Figures 2.11a et b un champ de déplacements horizontal et vertical obtenu pour l'élongation globale maximale, dont les points situés à l'extérieur de la surface de l'éprouvette sont éliminés. Les valeurs de déplacement sont exprimées en mm. On remarque que les valeurs ne sont pas en bon accord avec les commandes imposées au niveau du pilotage de la machine d'essai. Cette différence est due au glissement enregistré à partir de la 26<sup>ème</sup> image (elle correspond à un déplacement de 78mm). On reconnaît très clairement la partie centrale et les quatre branches de l'éprouvette. Par ailleurs, on observe une rotation de  $90^\circ$  entre les champs U et V, ce qui montre bien le caractère symétrique de l'essai.

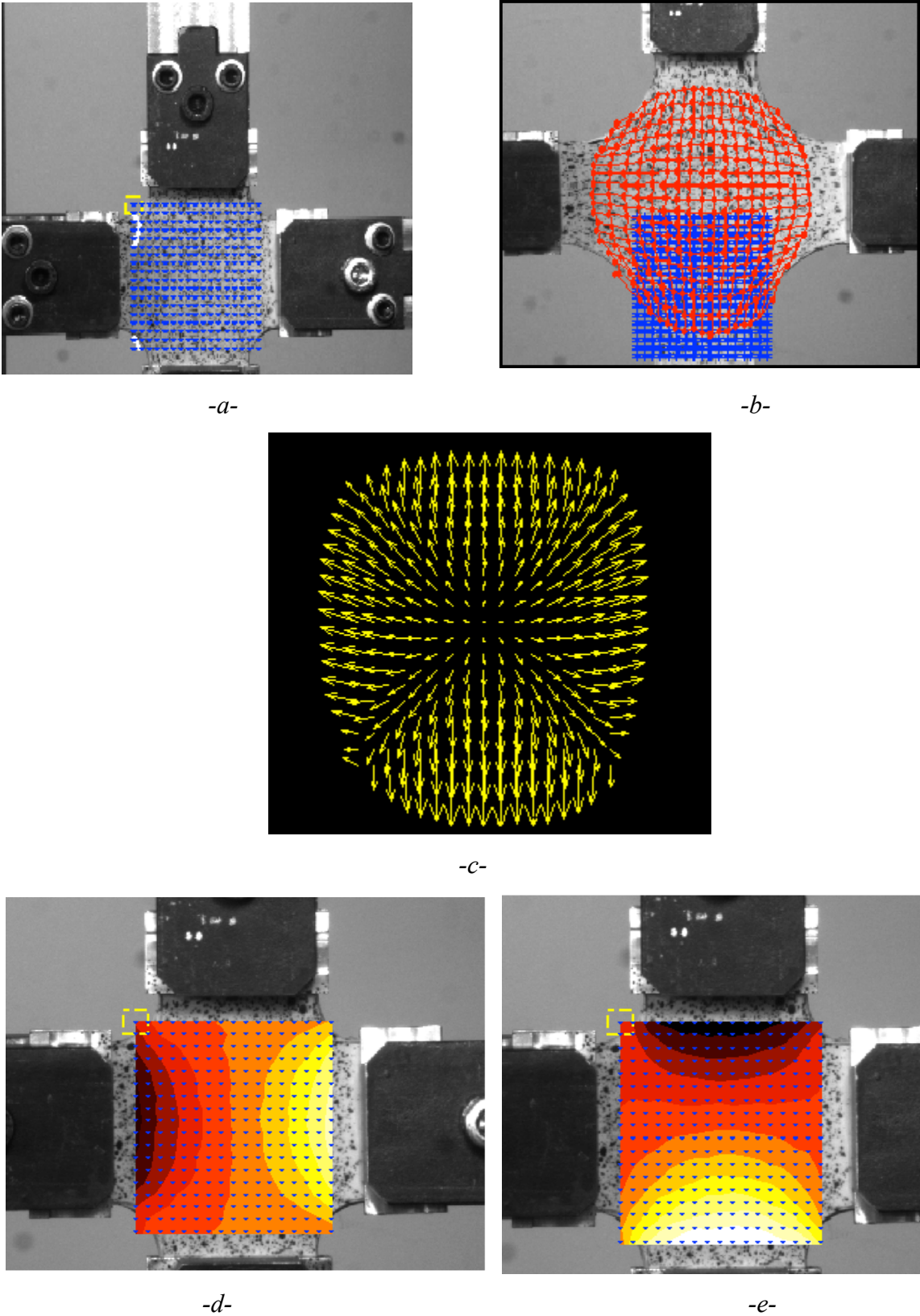


Figure 2.10 : Champ de déplacement entre deux instants. (a) Grille initiale. (b) Grille déformée (rouge). (c) Vecteurs des déplacements (d et e) Isovaleurs des déplacements

Notons cependant que les déplacements horizontaux et verticaux présentent localement des légères ondulations qui sont dues aux erreurs cumulées lors de la corrélation. Ces erreurs peuvent être gênantes lorsque l'on calcule les gradients de déplacements pour déterminer les déformations. C'est effectivement ce qui est observé sur la Fig 2.12. Même si l'allure globale est similaire au champ de déplacements, le champ gradient est très bruité, ceci pouvant engendrer des perturbations également pour l'identification des paramètres matériaux. Notons que les champs de gradients sont calculés à partir des champs de déplacements au moyen d'un schéma de différences finies centrées et implémenté dans la fonction gradient du logiciel Matlab.

Afin de pallier au problème précédent, nous avons choisi de lisser les champs de déplacements avec un ajustement polynomial dont les variables sont les coordonnées  $x$  et  $y$ . Le champ obtenu pour l'élongation globale maximale est présenté sur la Fig 2.13a et b pour le déplacement horizontal et vertical respectivement. L'allure des surfaces est la même que précédemment mais les ondulations et autres imperfections ont disparu.

On peut maintenant en déduire les champs de gradients à partir des champs de déplacements lissés en utilisant toujours la fonction gradient du logiciel Matlab. Ces champs sont présentés dans la Fig. 2.14. Ils sont maintenant beaucoup plus propres. Par ailleurs, on a bien les champs  $\partial U / \partial X$  et  $\partial V / \partial Y$  qui sont symétriques, les champs  $\partial U / \partial Y$  et  $\partial V / \partial X$  étant quant à eux très proches.

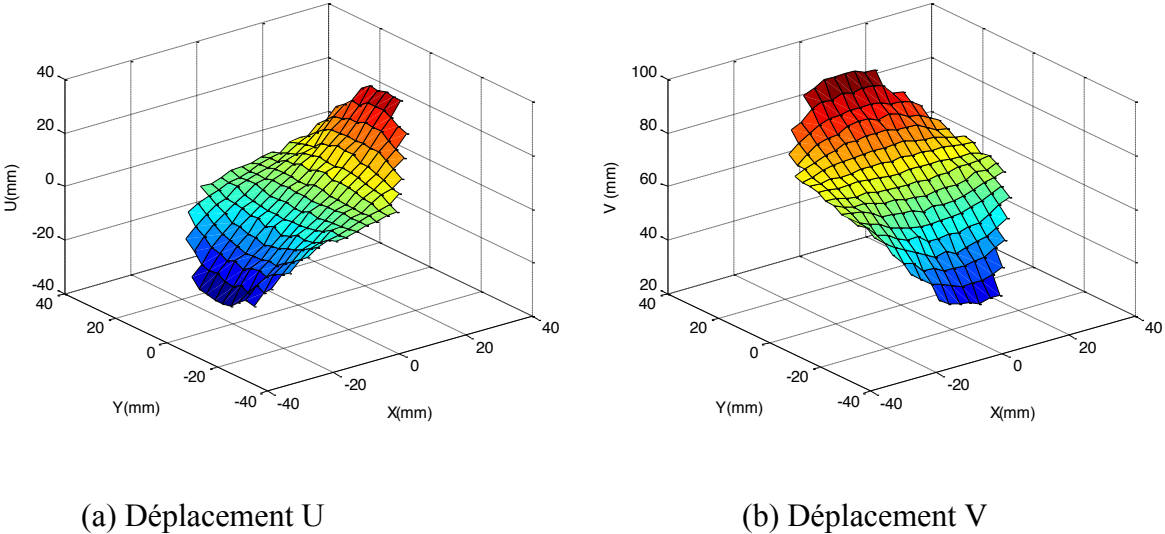


Figure 2. 11: Visualisation des déplacements  $u$  et  $v$  sur la région d'étude (ROI) à elongation globale maximale.

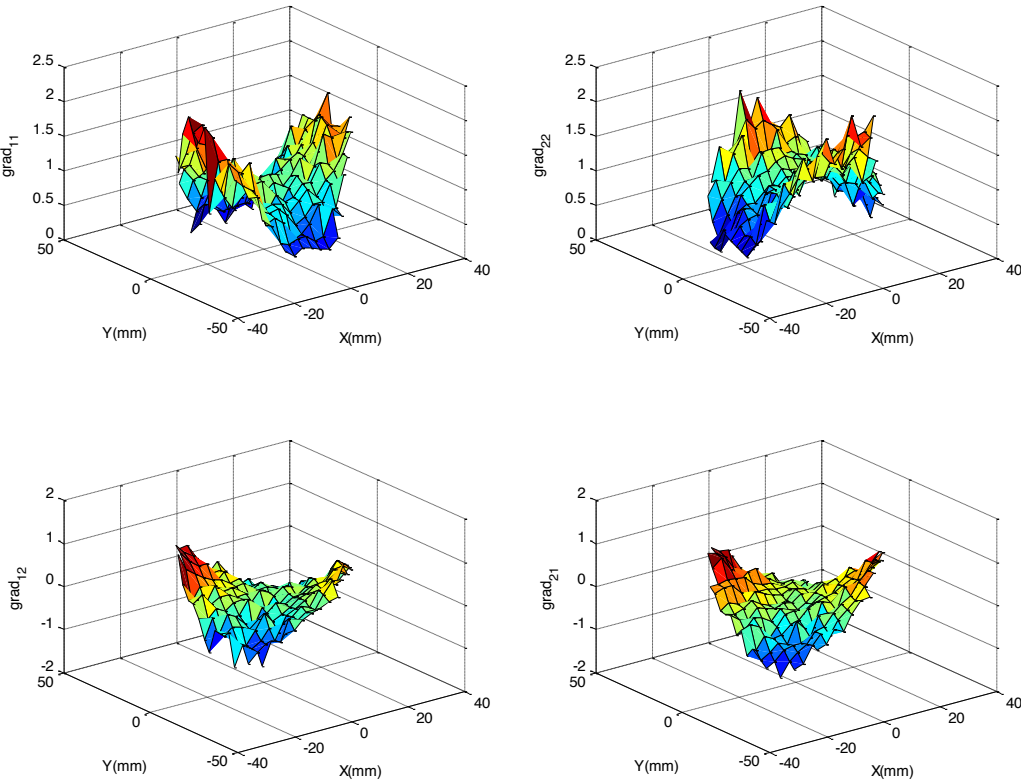


FIG. 3.12 – Visualisation des gradients

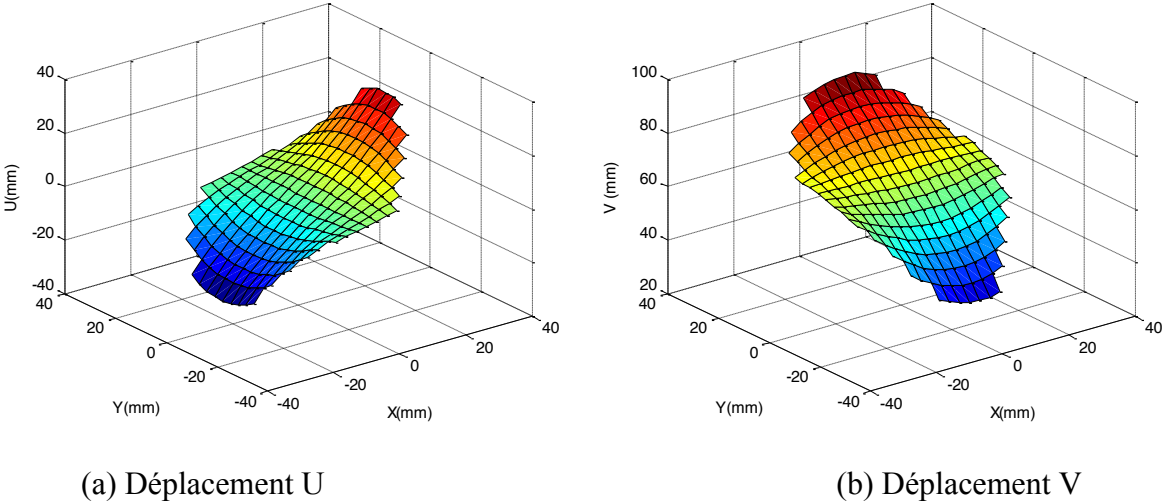


Fig 2.13 Champ des déplacements lissés de l'essai équi-biaxial à éléngation globale maximale

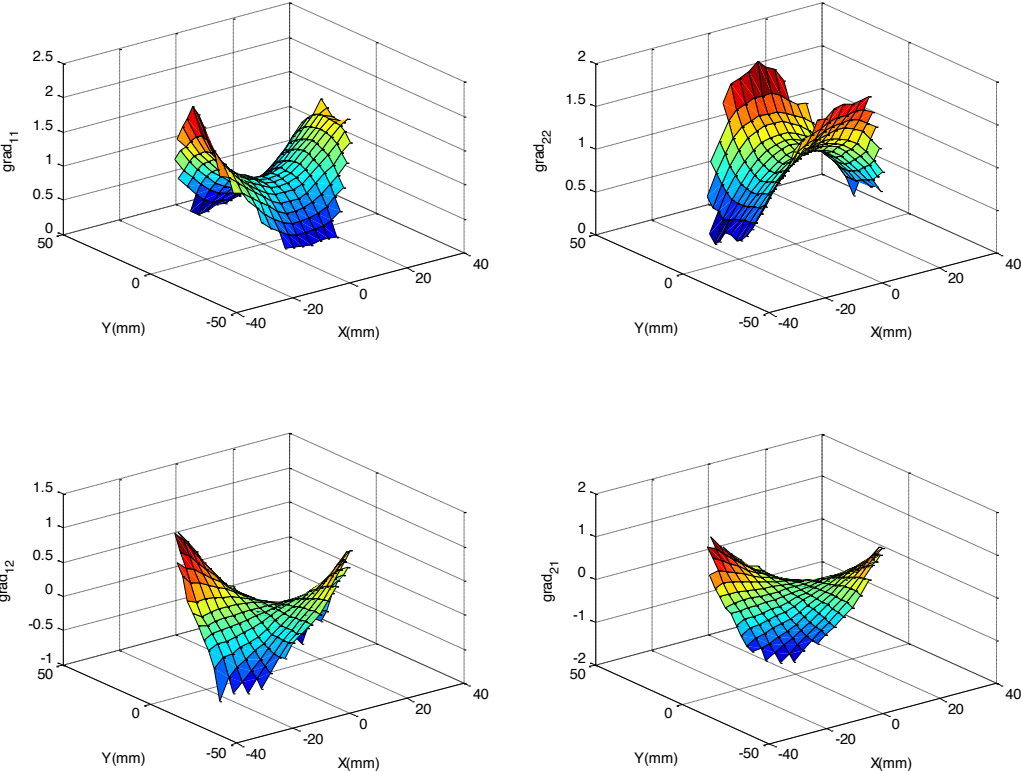


FIG. 3.14 – Champ des gradients

### 2.4 2. 2 Hétérogénéité de l'essai biaxial

L'objectif de ce paragraphe est d'observer le caractère hétérogène de l'essai réalisé. En effet, à partir des vecteurs de déplacement  $U$  et  $V$  on peut estimer les dérivées dans les directions  $X$  et  $Y$  et calculer les composantes du tenseur Green-Lagrange  $E_{ij}$ . La Fig. 2.15 montre le résultat de l'état de déformation dans la zone centrale de l'éprouvette. On remarque que la déformation dans le sens 1 est quasi identique à la déformation dans le sens 2 ( $E_{11} \approx E_{22} \approx 1.6$ ) qui suivent pratiquement une droite à  $45^\circ$ , sauf pour les dernières images ou on a eu des glissements. La différence peut s'expliquer aussi par le manque de rigidité du mécanisme. De même, on remarque que la composante  $E_{12}$  reste nulle au cours de l'essai. En conclusion, l'état de contrainte obtenu au centre de l'éprouvette est équi-biaxial avec un  $\lambda \approx 2$  au centre qui donne des valeurs d'ordre 9 pour l'invariant  $I_1$  et d'ordre 20 pour l'invariant  $I_2$ .

Dans la Fig. 3.16, on visualise les composantes du tenseur de déformation de Green Lagrange mesurés à proximité du mors horizontal. On peut remarquer que la composante  $E_{22}$  est presque le double que celle mesurée dans la zone centrale alors que le  $E_{11}$  est très faible (moins de 3.8% dans le sens 1). De même la composante  $E_{12}$  reste proche de zéro, donc un cisaillement très faible. L'état de déformation dans cette zone peut être considéré comme une déformation plane, cela est justifié par le fait que la déformation dans le sens 2 ( $\lambda \approx 3$ ) est très grand devant celle dans le sens 1 ( $\lambda \approx 0.38$ ). A partir de ces résultats, on peut conclure que l'état de déformation est clairement hétérogène.

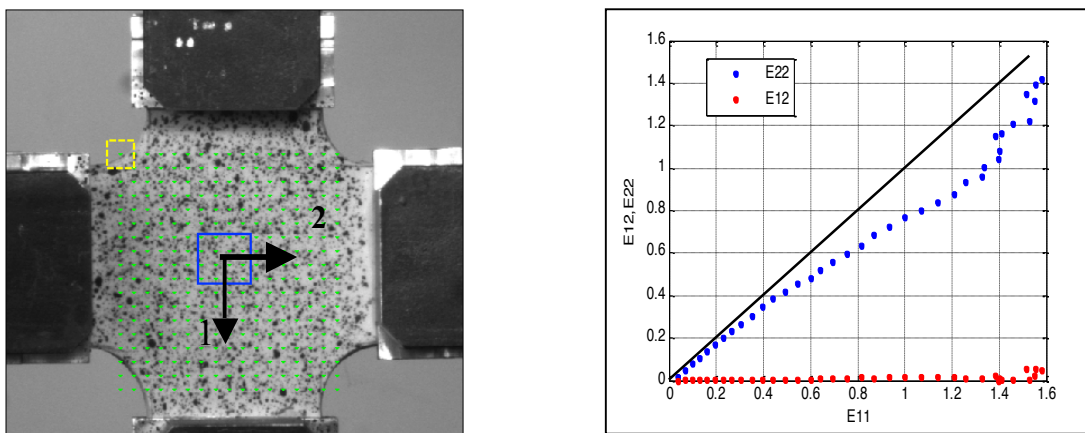


Figure 2. 15: visualisation de composantes du tenseur de déformation de Green Lagrange au centre de l'éprouvette



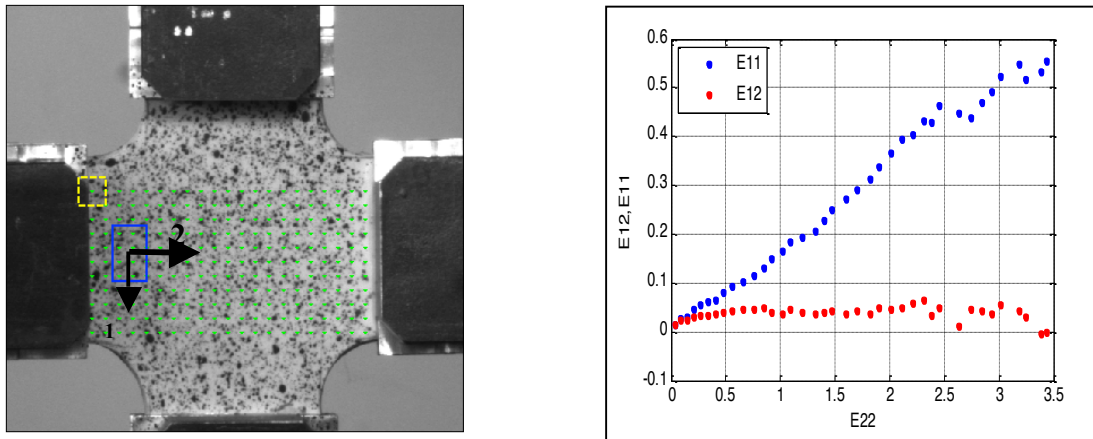


Figure 2. 16: visualisation de composantes du tenseur de déformation de Green Lagrange a proximité des mors

Les conditions aux limites sur le bord libre conduisent à un état de déformation, dans cette région, équivalent à une traction simple. La Fig. 3.17 montre un résultat typique de cette région: Compte tenu des nouveaux axes 1 et 2 qui suivent le bord, on peut voir que la déformation dans le sens 1 est très grande, la valeur de  $E_{11}$  atteint 4, tandis que  $E_{22}$  reste négatif, donc il y a bien un effet de poison dans cette direction. Les points suivent la courbe théorique d'une traction simple. La déformation perpendiculaire à la traction tant vers une valeur de -0.5.

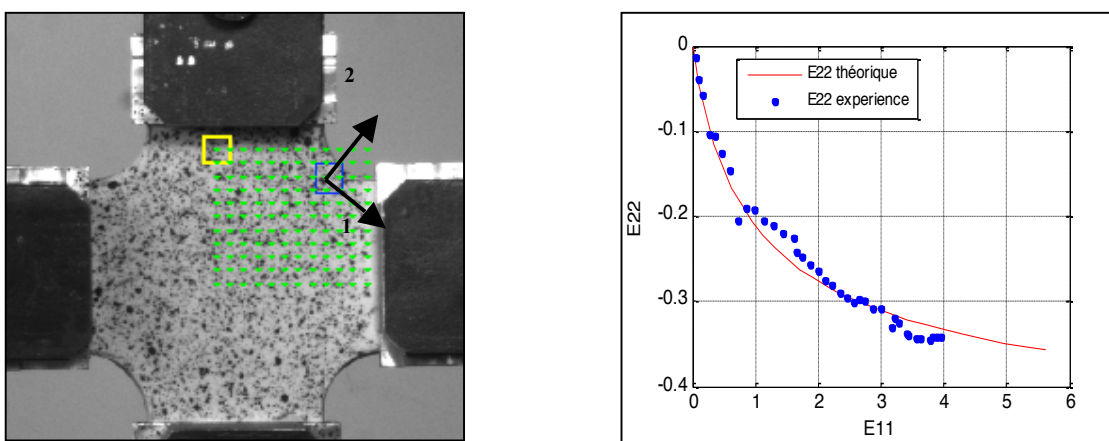


Figure 2. 17: visualisation de composantes du tenseur de déformation de Green Lagrange a proximité du bord libre

### 2.4 2. 3 Caractérisation de l'hétérogénéité par les invariants

Classiquement, l'identification des paramètres matériau des lois hyperélastiques s'opère au travers de plusieurs essais simples, dites homogènes. Il est admis qu'avec la traction uniaxiale, la traction équi-biaxiale et le cisaillement pur, il est possible de décrire le domaine des trajets possibles de chargement [78]. Cette analyse est habituellement menée sur le plan  $(I_1, I_2)$ . La Figure 2.18 montre trois courbes particulières dans ce plan. Elles représentent les trois états de sollicitation particuliers (traction uniaxiale TU, traction équi-biaxiale TEQ et cisaillement pur C) pour lesquels les équations paramétrées en fonction de l'élongation  $\lambda$  ont été développées dans le chapitre précédent. Avec une telle représentation, un état de sollicitation quelconque correspond à un point entre les courbes TU et TEQ.

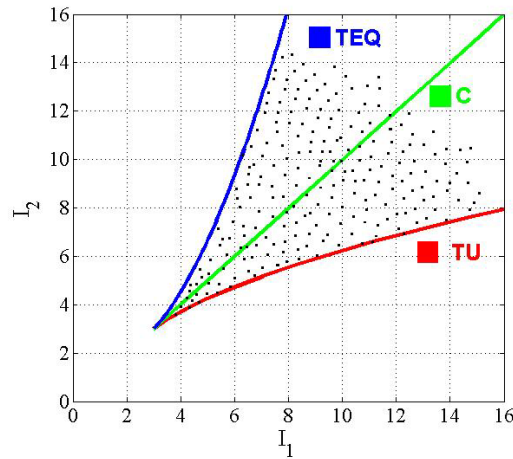


Fig. 2.18 – Représentation dans le plan  $(I_1, I_2)$  de l'hétérogénéité d'un essai – Illustration pour une hétérogénéité « idéale ».

Lorsque l'essai est hétérogène, la nature de l'hétérogénéité peut être observée dans ce plan. En partant de la base des données obtenues par la corrélation d'image, nous pouvons calculer les invariants. En effet, les champs de déplacement  $(U, V)$  dans le plan de l'éprouvette sont considérés bilinéaires sur un élément de la grille. On en déduit le tenseur gradient de déformation  $F$  sur cet élément.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda_x & \gamma_x & 0 \\ \gamma_y & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

On note que  $\lambda_x, \lambda_y, \gamma_x, \gamma_y$  proviennent de l'analyse d'images alors que  $\lambda_z$  vient de la condition d'incompressibilité. Cette condition se traduit par :

$$Det F = 1 \Rightarrow \lambda_z = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y - \gamma_x \gamma_y} \quad (2.6)$$

Si on approxime le champ de déplacement comme linéaire au voisinage d'un point  $M$  (Fig. 2.19) on pourra exprimer les déplacements en fonction de  $x$  et  $y$ . On a alors

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_A}{\Delta} x + \frac{u_B}{\Delta} y \\ v &= \frac{v_A}{\Delta} x + \frac{v_B}{\Delta} y \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ce qui nous donne un tenseur gradient de déformation :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u_A}{\Delta} & \frac{u_B}{\Delta} \\ \frac{v_A}{\Delta} & 1 + \frac{v_B}{\Delta} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Ou encore :

$$\lambda_x = 1 + \frac{u_A}{\Delta}, \quad \lambda_y = 1 + \frac{v_B}{\Delta}, \quad \lambda_x = \frac{u_B}{\Delta}, \quad \gamma_y = \frac{v_A}{\Delta} \quad (2.9)$$

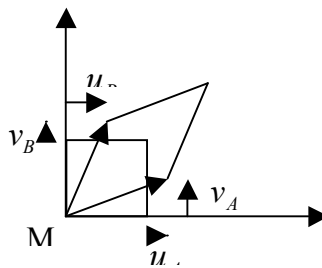


Figure 3.6 : Le champ de déplacement au voisinage de  $M$

Dans notre cas, les équations 2.5 et 2.9 conduisent à une forme développée des invariants

$$\begin{aligned}
 I_1(B) &= \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \lambda_z^2 \\
 I_2(B) &= (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \gamma_x^2 + \gamma_y^2)\lambda_z^2 + (\lambda_x^2 + \gamma_x^2)(\lambda_y^2 + \gamma_y^2) - (\lambda_x\gamma_x + \lambda_y\gamma_y)^2 \\
 I_3(B) &= 1
 \end{aligned}
 \tag{III.30}$$

Pour chaque noeuds de la grille, les valeurs des invariants sont calculées. On rassemble les valeurs de chaque zone dans la figure 3. 9.. On peut voir que les nœuds de la zone 1 se situent sur la ligne limite supérieure qui correspond à un état de déformation équi-biaxial (figure 3. 9-c) tandis que les nœuds de la zone 4 se situent sur la ligne limite inférieure qui correspond à une déformation uniaxiale (figure 3. 9-b). Les nœuds des zones deux, trois et le reste de la surface sont représentés par la même couleur (figure 3. 9-d). Tous le points se situent entre les deux lignes théoriques. Donc on peut conclure que l'état des contraintes varie d'une tension biaxiale, dans la zone centrale, à une tension uniaxiale près des bords et plus ou moins une traction plane dans les zones près des mors et que le positionnement des noeuds est conforme à la prévision de la théorie (Fig. 3. 8). On peut noter que quand les déformations sont petites les invariants  $I_1$  et  $I_2$  se superposent sur une ligne à  $45^\circ$ .

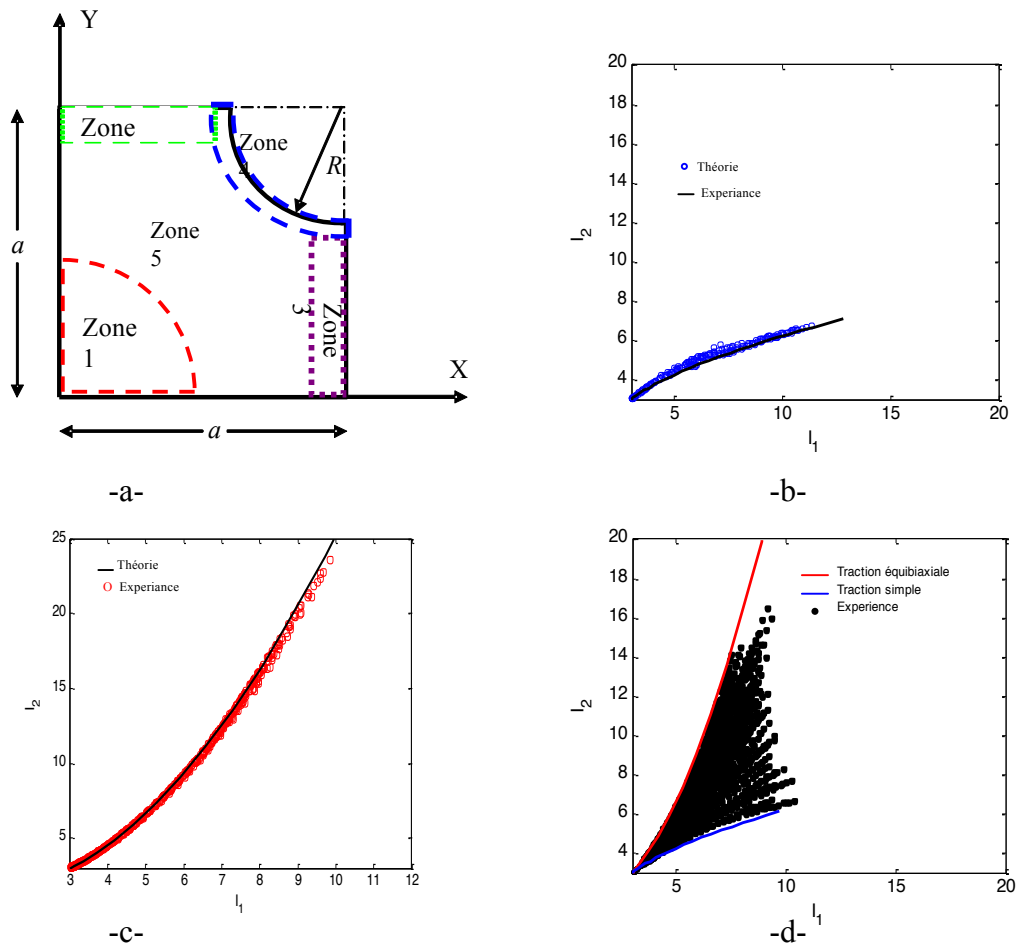


Fig.3.9. Variation des invariants

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, grâce aux modifications apportés au niveau du système de fixation des éprouvettes du mécanisme développé à l'ENSAM, nous avons réalisé des essais biaxiaux sur des éprouvettes cruciformes coupé sur des plaque en caoutchouc. Une colle résistante au cisaillement nous a permis d'atteindre un taux de déformations supérieur à 100% : un taux suffisant pour la validation de la méthode d'identification proposée dans le chapitre qui suit. Au niveau numérique, nous avons appliqué la corrélation d'images, implémentée dans CORRELI<sup>GD</sup>, aux images obtenues au cours de l'essai afin d'extraire les déformations planes qui nous servent de base de données pour l'identification de comportement du matériau étudié.



## Chapitre III

# Présentation de la méthode d'identification du comportement hyper élastique à partir d'essais hétérogènes

Ce chapitre est consacré à l'identification de paramètres constitutifs de matériaux élastomères à partir de mesures de champs cinématiques. L'intérêt de cette méthode d'identification est d'identifier les paramètres de la loi de comportement à partir d'un seul essai suffisamment hétérogène. La principale originalité de cette méthode est d'associer la mesure de champ de déformation par analyse d'images avec l'optimisation d'un champ de contraintes adapté à la géométrie de l'éprouvette et qui permet de passer analytiquement des efforts mesurés aux contraintes locales. Par voie de conséquence, on peut s'affranchir des problèmes liés aux conditions aux limites (fixation des éprouvettes).

### 3.1. Loi de comportement hyperélastique

Nous avons vu que dans le cadre de l'hyperélasticité, le tenseur des contraintes dérive d'un potentiel énergétique  $W$  et la plupart des matériaux hyperélastiques, comme les élastomères, sont incompressibles. Il est donc possible d'écrire le potentiel hyperélastique en fonction des invariants  $I_1$  et  $I_2$  Rivlin R. S.,[79].

$$W = W(I_1, I_2) - p(J - 1) \quad (3.1)$$

où  $p$  est le multiplicateur de Lagrange (ou pression hydrostatique).

Avec un tel potentiel, en utilisant une formulation dans le cadre de la thermodynamique, la relation contraintes-déformations est donnée par relation suivante :

$$\sigma = 2 \left( B \frac{\partial W}{\partial I_1} - B^{-1} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - p \mathbf{I} \quad (3.2)$$

Lors de la représentation théorique du comportement des matériaux élastomères, la difficulté réside donc dans la définition de la fonctionnelle  $W$  ou précisément, d'après les équations précédentes, dans la détermination des dérivées partielles de la fonctionnelle par rapport aux invariants  $I_1$  et  $I_2$ , notées :

$$f(I_1, I_2) = \frac{\partial W}{\partial I_1} \quad \text{et} \quad g(I_1, I_2) = \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (3.3)$$

Habituellement, les fonctions  $f$  et  $g$  sont découplées c'est-à-dire  $f$  ne dépend que de  $I_1$  tandis que  $g$  ne dépend que de  $I_2$ . C'est ce que Mooney [16], Mark, 1982 [80], Gand et al., 1958[81], Hart-Smith, 1966), [82] Alexander, 1968[84], ont déjà démontré et plus récemment Diani et al., 1999.[84] et chevalier et al. 2000[94] Partant de cette hypothèse, on procédera dans les paragraphes qui suivent à l'identification des dérivées partielles et en mesurera l'importance de l'influence des invariants sur les fonctions identifiées.

### 3.2. Etude du champ de contrainte

Compte tenu de la symétrie de la géométrie, l'étude du champ de contrainte s'effectuera sur le  $\frac{1}{4}$  d'un échantillon testé en traction bi-axiale. On considère qu'à chaque instant la géométrie est représentée par une portion carrée de côté  $a_i$  entaillée d'une  $\frac{1}{4}$  de cercle de rayon  $R_i$  (Fig. 3.1).  $a_i$  et  $R_i$  sont des grandeurs qui évoluent au cours de l'essai et qu'il est possible de mesurer sur chacune des images utilisées pour la mesure du champ à l'aide d'un logiciel de traitement d'image.



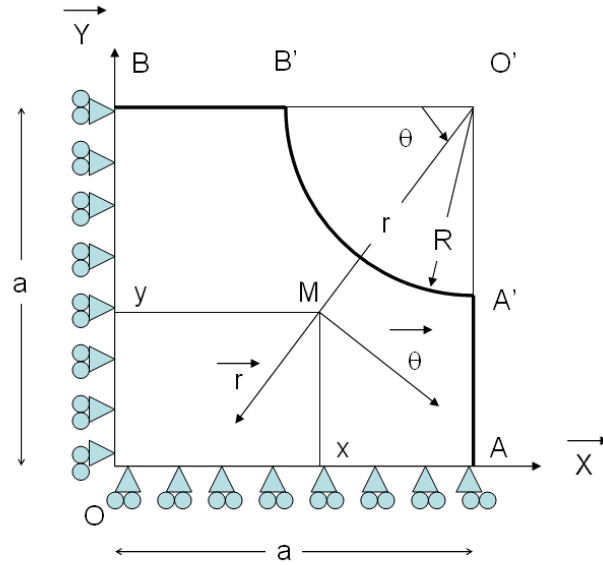


Figure 3.1 : Le  $\frac{1}{4}$  d'échantillon testé

### 3.2. 1 Traitement des images

La procédure suivie dans l'estimation des grandeurs  $(a_i, R_i)$  consiste à tracer dans chaque image numérisée un carré qui englobe le  $\frac{1}{4}$  de la surface de l'éprouvette. Une fois le carré positionné du centre de l'éprouvette jusqu'aux limites des mors, la longueur de ses côtés nous donne la valeur de  $a_i$ . A partir du sommet situé à l'extérieur de l'échantillon on trace  $\frac{1}{4}$  d'un cercle qui passe par le profil du bord libre. Son rayon nous donne une estimation de  $R_i$ . La Figure. 3. 2 illustre le traitement de quelques images avec *PHOTOSHOP*. Dans le tableau 3.1 on récapitule les valeurs de ces grandeurs.

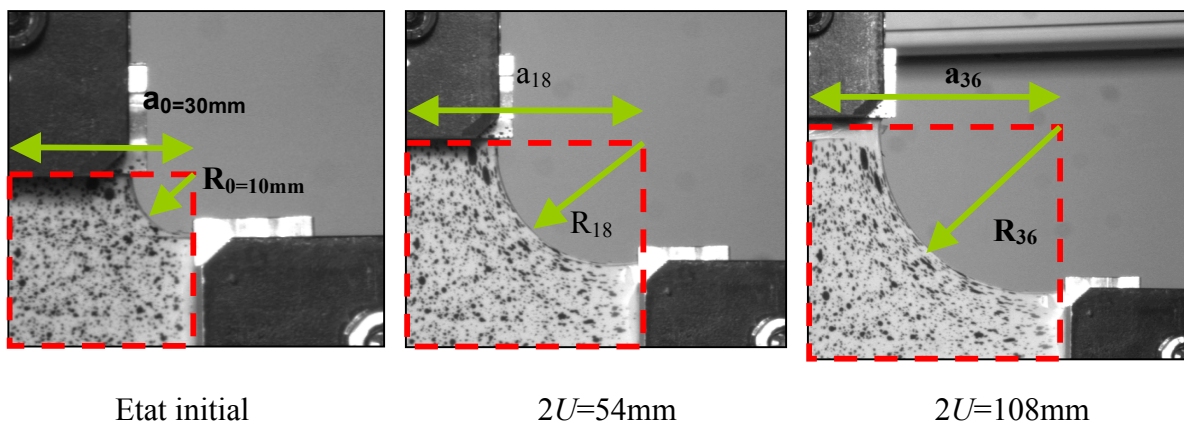


Figure 3.2 : Estimation des paramètres  $a$  et  $R$  par *PHOTOSHOP*

Numéro d'image	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_i(mm)$	33.28	34.56	35.97	37.32	38.7	40.09	41.48	42.91	44.26	45.69
$R_i(mm)$	12.72	13.67	14.64	16.39	18.15	19.09	20.32	21.08	23.16	24.65
$R_i/a_i$	0.382	0.396	0.407	0.439	0.469	0.476	0.490	0.491	0.523	0.539
$F_i(N)$	11.8	23.55	33.65	42.05	48.75	53.8	62.2	65.55	68.95	74

Image number	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$a_i(mm)$	47.12	48.51	49.9	51.48	52.77	54.06	55.5	56.93	58.32	59.71
$R_i(mm)$	26.27	27.34	28.96	30.04	31.66	33.02	33.83	35.73	36.81	37.89
$R_i/a_i$	0.558	0.563	0.580	0.583	0.600	0.611	0.610	0.628	0.631	0.635
$F_i(N)$	80.7	84.05	89.1	88.95	92.45	95.85	100.8	105.9	109.3	112.6

Image number	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$a_i(mm)$	61.05	62.44	63.49	65.02	66.36	67.66	68.85	70.28	71.67	72.01
$R_i(mm)$	39.24	40.59	41.41	42.76	43.84	45.03	46.55	48.18	49.80	50.61
$R_i/a_i$	0.642	0.650	0.652	0.658	0.661	0.666	0.676	0.686	0.695	0.703
$F_i(N)$	117.7	122.7	124.4	129.4	134.5	134.5	139.5	134.5	139.5	139.5

Image number	31	32	33	34	35	36	37	38
$a_i(mm)$	74.45	75.64	76.98	77.94	79.66	80.81	82.1	83.38
$R_i(mm)$	53.59	54.13	55.48	56.29	58.19	53.81	60.90	62.52
$R_i/a_i$	0.720	0.716	0.72	0.722	0.73	0.666	0.742	0.75
$F_i(N)$	136.1	136.1	144.6	147.9	147.9	146.2	149.6	154.6

Tableau 3.1 Résultats du traitement des images de l'échantillon déformé par PHOTOSHOP et la force  $F$  mesurée correspondante

La Figure. 3.3 donne l'évolution du rapport  $R_i/a_i$ , tracée à partir du tableau 3.1. On remarque que les grandeurs  $a_i$  et  $R_i$  augmentent régulièrement mais  $R_i$  plus vite que  $a_i$  ainsi le rapport  $R/a$  varie entre 0.38 et 0.75.

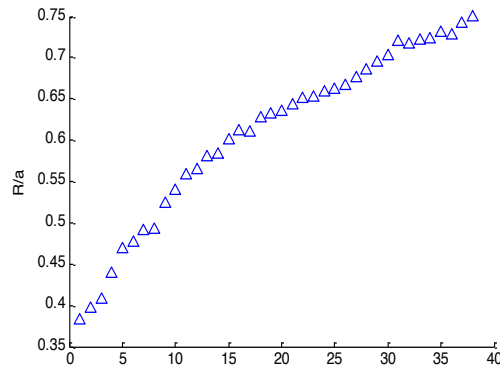


Figure 3.3 L'évolution du rapport  $R/a$  au cours de l'essai

### 3. 2. 2 Construction du champ de contraintes

Afin de construire un champ de contrainte qui représente le plus fidèlement l'état de déformation observé sur le  $\frac{1}{4}$  de l'échantillon, on choisi d'additionner un champ équi-biaxial, représentatif de l'état de contrainte au centre de l'échantillon, avec un champ complémentaire qui assure les conditions de bord libre sur le  $\frac{1}{4}$  du cercle. En effet, l'état de contrainte au centre peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_B = \begin{pmatrix} \sigma_B & 0 \\ 0 & \sigma_B \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Cet état de contrainte vérifie évidemment les équations d'équilibre et les conditions de symétrie sur les axes  $OX$  et  $OY$ , par contre il ne vérifie pas les conditions au bord libre. Par conséquent, une certaine hétérogénéité apparaît qui rend difficile l'estimation de la contrainte dans la région centrale de l'éprouvette. Dans cette région, l'analyse d'image donne les valeurs de déformation, mais sans estimation de la contrainte, ce qui rend l'identification directe de la loi de comportement impossible.

Pour ce faire, on choisit un champ de contrainte complémentaire, qui décroît rapidement dès qu'on pénètre dans l'échantillon pour que le centre soit en tension équi-biaxiale. Pour cela, on retient une fonction exponentielle avec une variable d'ajustement  $L$ , nommée longueur caractéristique ou d'ajustement, qui assure la décroissance et la disparition du champ complémentaire au centre de l'échantillon. Ce champ doit être tel que :

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{r} = \left( \underline{\underline{\sigma}}_B + \underline{\underline{\sigma}}_{comp} \right) \vec{r} = \vec{0} \quad \text{en} \quad r = R \quad (3.5)$$

Puisque ce champ varie, les équations d'équilibre ne sont plus trivialement vérifiées et si la décroissance n'est pas suffisamment rapide, les conditions de symétrie sur les axes OX et OY peuvent être perturbées aussi par un cisaillement impossible sur l'axe de symétrie de l'échantillon qui sont axes principaux des contraintes. En utilisant les coordonnées polaires introduites sur la Figure. 3. 1, une forme générale du champ complémentaire est donnée comme suite:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_B + \sigma_{rr}(r, \theta) & \sigma_{r\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) & \sigma_B + \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

A partir des conditions de bord libre, on déduit :

$$\sigma_{rr}(r = R) = -\sigma_B \quad \text{et} \quad \sigma_{r\theta}(r = R) = 0 \quad \text{pour tout } \theta \quad (3.7)$$

Ces conditions nous poussent à retenir un champ complémentaire simple de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}_{comp} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r) & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(r) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi  $\sigma_{\theta\theta} = 0$  et  $\sigma_{rr}$  comme une fonction décroissante à partir de  $r = R$  :

$$\sigma_{rr}(r) = \sigma_B \exp\left(-\frac{r - R}{L}\right) \quad (3.9)$$

Si le champ ainsi défini satisfait bien les conditions aux limites sur le bord  $A'B'$  et a une forme licite sur les bords  $AA'$  et  $BB'$ , en revanche il ne satisfait pas l'équilibre en tout point du domaine  $\Omega$ , ni la propriété  $\sigma_{xy} = 0$  sur les deux axes de symétrie OX et OY qui doivent être des directions principales de contrainte.

### 3. 2. 3 Fonctionnelle d'optimisation de champ de contraintes

Pour donner une distribution réaliste des contraintes dans la plaque à un instant donné défini par  $(a_t, R_t)$ , on doit trouver la meilleure valeur de  $L$  qui minimise la fonctionnelle suivante :

$$J(L) = a \iint_{\Omega} \overline{div}^2 \sigma . dS + \int_{BOA} \left( \overline{y}(\overline{\sigma x}) \right)^2 . ds \quad (3.10)$$

Le premier terme est équivalent à l'équation d'équilibre, elle est satisfaite en tout point quand il est égal à zéro. Le second terme représente le cisaillement sur l'axe de symétrie ; il est minimum lorsque aucun cisaillement n'est enregistré. Donc la minimisation de la fonctionnelle  $J(L)$  conduit à la meilleure valeur de  $L$  qui satisfait les deux conditions en même temps.

Compte tenu du caractère analytique du champ proposé, les calculs peuvent se mener explicitement et on obtient une fonctionnelle dont les seules inconnues sont  $\sigma_B$  et  $L$  :

$$\begin{aligned} J(L) = a \sigma_B^2 \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{L} - \frac{1}{r} \right]^2 \exp^2 \left( -\frac{r-R}{L} \right) r dr d\theta \\ + \sigma_B^2 \int_{OA} \exp^2 \left( -\frac{r-R}{L} \right) \cos^2(\theta) \sin(\theta) r d\theta \\ + \sigma_B^2 \int_{OB} \exp^2 \left( -\frac{r-R}{L} \right) \cos(\theta) \sin^2(\theta) r d\theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'après l'Equation 3.13, la minimisation de la fonctionnelle  $J(L)$  ne dépend pas de  $\sigma_B$ , ce qui nous facilite la minimisation car seules les valeurs de la force  $F$  sont connues à cette étape. On peut également remarquer qu'une forme adimensionnelle de la fonctionnelle  $J(L)$  peut être obtenue en rendant les paramètres sans dimension. En effet, on peut poser :

$$r = \rho a ; R = \alpha a \text{ et } L = \beta a \quad (3.12)$$

au final on obtient la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J(\beta) = \frac{J(L)}{a \sigma_B^2} = \frac{1}{\alpha} \iint_{\Omega/a^2} \left[ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\rho} \right]^2 \exp^2 \left( -\frac{\rho-\alpha}{\beta} \right) \rho d\rho d\theta \\ + \int_{OA/a} \exp^2 \left( -\frac{\rho-\alpha}{\beta} \right) \cos^2(\theta) \sin(\theta) \rho d\theta \\ + \int_{OB/a} \exp^2 \left( -\frac{\rho-\alpha}{\beta} \right) \cos(\theta) \sin^2(\theta) \rho d\theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

Une fois les longueurs caractéristiques des images instantanées de l'éprouvette sont déterminées, il nous reste le calcul des intégrales à effectuer. D'une part, on peut évaluer l'intégrale de l'équilibre sur un ensemble de facettes, réalisées à partir de la construction d'un

nuage de points sur la surface de l'éprouvette. L'intégrale est alors estimée par la somme des valeurs ainsi calculées sur chaque facettes. L'erreur d'estimation peut être réduite en les calculant simplement sur des facettes infinitésimales. D'autre part, l'intégrale sur les bords  $AA'$  et  $BB'$  est calculé par la somme de cette intégrale sur des segments infinitésimaux.

### 3. 2. 4 Optimisation de champ de contraintes

La procédure de minimisation numérique consiste à générer, pour chaque valeur de  $R/a$  comprise entre 0.38 et 0.75, des valeurs de  $\beta$  puis l'estimer la fonction objectif pour chaque valeur injectée. Les valeurs de  $J(\beta)$  sont stockées dans un tableau qui nous permettra de déduire la meilleure valeur de  $\beta$  qui permet de satisfaire le critère de minimisation. En ce sens, un programme sous l'environnement Matlab est développé.

La Figure. 3.4-a représente l'estimation de la fonctionnel  $J(\beta)$  pour  $R/a = 0.5$  et met en évidence la valeur optimale de  $\beta$  de 0.67. Dans la Figure. 3.4-b on a tracé les différentes valeurs de  $\beta_{opt}$  qui correspondent aux différents rapports  $R/a$ . On remarque que quand le rapport augmente la valeur optimale augmente et la contrainte complémentaire décroît moins vite.

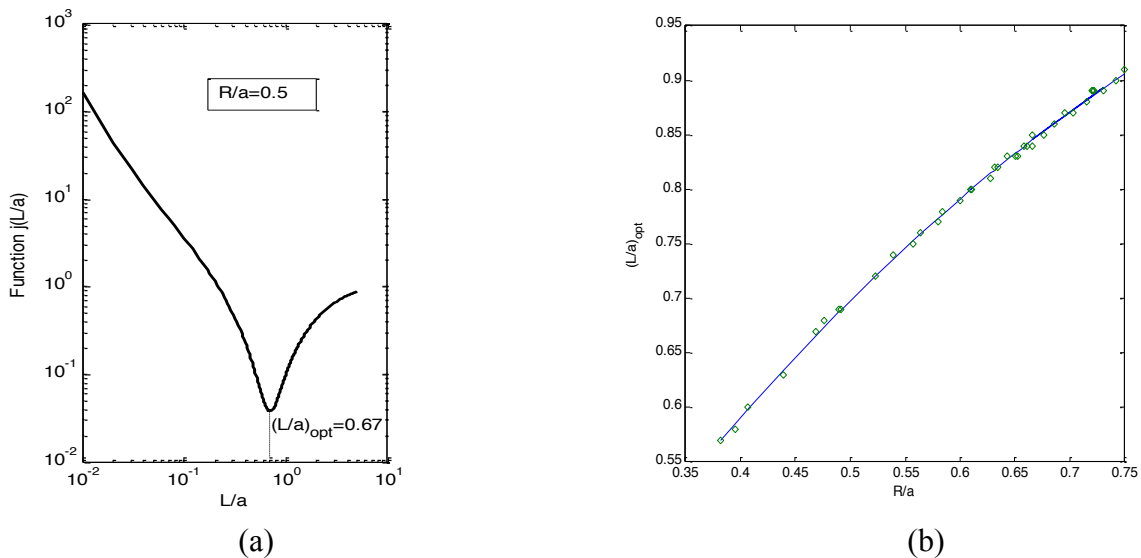


Fig. 3.4. Minimisation de la fonctionnel

Une fois que les paramètres et les valeurs optimales sont déduits, on peut reconstruire les trois composantes des contraintes, nommées *contraintes optimisées*, pour chaque point d'étude. Dans le plan de l'éprouvette, en coordonnées cartésiennes on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \sigma_B \left( 1 - \cos^2 \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right) \right) \\
 \sigma_{xy} &= -\sigma_B \cos \theta \sin \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right) \\
 \sigma_{yy} &= \sigma_B \left( 1 - \sin^2 \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

On peut vérifier, suivant la valeur de  $L$  obtenue, qu'au centre de l'échantillon ( $\theta = \pi/4, r = \sqrt{2}a$ ) la contrainte  $\sigma_{xy}$  est quasi nulle et que les deux composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  valent  $\sigma_B$  avec un écart extrêmement faible :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= \sigma_B - \frac{\sigma_B}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}a-R}{L}\right) \approx \sigma_B \\
 \sigma_{xy} &= -\frac{\sigma_B}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}a-R}{L}\right) \approx 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La Figure 3.5 représente une reconstruction des contraintes optimisées pour un jeu de paramètres ( $a = 50\text{mm}, R = 22\text{mm}$ ) et une valeur de  $\sigma_B = 1\text{MPa}$ . On remarque clairement que la valeur de  $\sigma_{xy}$  est quasi nulle, et que la valeur de  $\sigma_{xx}$  ou  $\sigma_{yy}$  est d'ordre de  $0.9\text{MPa}$  qui peut être considérée égale à  $\sigma_B$  au centre.

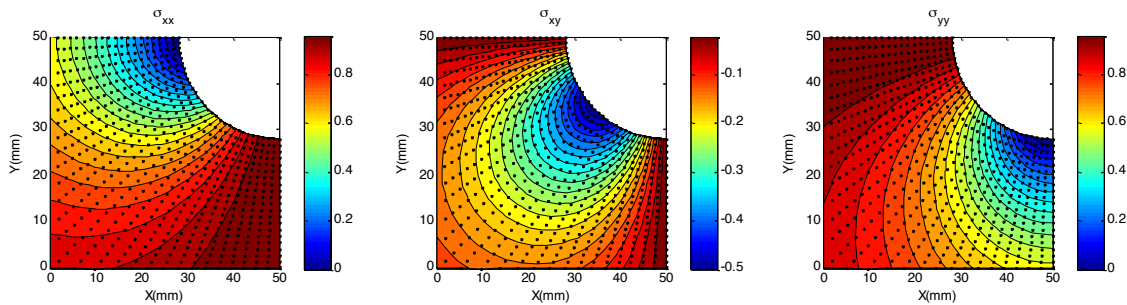


Fig. 3.5. Estimation de contraintes optimisées

Pour donner une estimation très fine de  $\sigma_B$  en fonction de l'effort de traction  $F$  mesuré sur les quatre bras de l'échantillon, on utilise la caractéristique du champ de contrainte observé. En effet, l'observation des champs de déplacement pour ce type d'essai montre qu'ils ne sont évidemment pas homogènes, il n'est donc pas possible d'évaluer une déformation locale à partir des déplacements des mors. Cependant, on observe que la déformation de Green-Lagrange est quasi-homogène suivant la diagonale AB, de normale  $\vec{n}(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$

(Figure. 3.6). En supposant que les composantes du tenseur des contraintes sont homogènes sur cette section AB, nous pouvons estimer la contrainte de Cauchy à partir des efforts biaxiaux

$$\sigma_B = \frac{\sqrt{2}F}{2e(AB)} = \frac{F}{2e\left(a - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)} \quad (3.16)$$

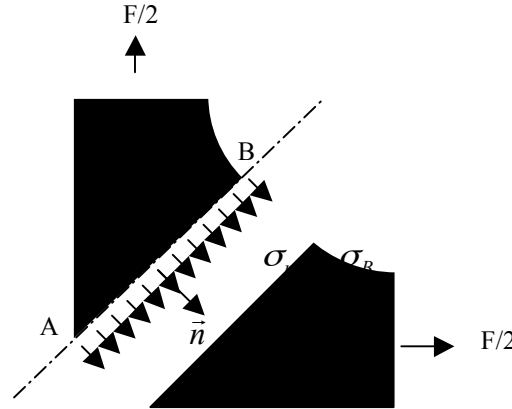


Fig. 3.6 Analyse du chargement biaxial équilibré

Ainsi, les contraintes optimisées sont gouvernées par les relations suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{F}{2e\left(a - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)} \left(1 - \cos^2 \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right)\right) \\ \sigma_{xy} &= -\frac{F}{2e\left(a - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)} \cos \theta \sin \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{F}{2e\left(a - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)} \left(1 - \sin^2 \theta \exp\left(-\frac{r-R}{L}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

En définitive la fonction 3.17 ainsi obtenue permet le calcul des composantes de la matrice des contraintes en chaque point de l'échantillon.

### 3.3 Identification de la loi de comportement

#### 3.3.1 Construction de relation contraintes-déformations

A ce stade, les équations établies ne suffisent pas à résoudre le problème mécanique étudié. Il est nécessaire de préciser la relation liant les contraintes aux déformations, c'est-à-



dire la loi de comportement qui caractérise le matériau. Partant des Equations 3. 2 et 3.3, on peut écrire la relation de comportement hyperélastique sous la forme générale :

$$\sigma = 2(Bf(I_1)) - B^{-1}g(I_2)) - P\mathbf{I} \quad (3.18)$$

où P est le multiplicateur de Lagrange (ou pression hydrostatique) et  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité.

On peut tirer également de l'Equation 2.5 les composantes de tenseur de CAUCHY-GREEN gauche B définit par :

$$B = FF^t = \begin{pmatrix} \lambda_x^2 + \gamma_x^2 & \lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x & 0 \\ \lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x & \lambda_y^2 + \gamma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\text{ou } \lambda_z^2 = \frac{1}{(\lambda_x^2 + \gamma_x^2)(\lambda_y^2 + \gamma_y^2) - (\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x)^2} \quad (3.20)$$

de même :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} |B|^t = \begin{pmatrix} \lambda_z^2(\lambda_y^2 + \gamma_y^2) & -\lambda_z^2(\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x) & 0 \\ -\lambda_z^2(\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x) & \lambda_z^2(\lambda_x^2 + \gamma_x^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_z^2} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

En chaque point d'étude de l'échantillon testé, la relation de comportement donne alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\left[(\lambda_x^2 + \gamma_x^2)f(I_1, I_2) - \lambda_z^2(\lambda_y^2 + \gamma_y^2)g(I_1, I_2)\right] - P \\ \sigma_{yy} &= 2\left[(\lambda_y^2 + \gamma_y^2)f(I_1, I_2) - \lambda_z^2(\lambda_x^2 + \gamma_x^2)g(I_1, I_2)\right] - P \\ \sigma_{zz} &= 2\left[\lambda_z^2 f(I_1, I_2) - 2\lambda_z^{-2} g(I_1, I_2)\right] - P \\ \sigma_{xy} &= 2\left[(\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x)f(I_1, I_2) + \lambda_z^2(\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x)g(I_1, I_2)\right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

L'hypothèse des contraintes planes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) permet de calculer la pression hydrostatique en fonction des deux fonctions inconnues  $f$  et  $g$  et de la troisième composante du tenseur gradient de déformation.

$$P = 2\left[\lambda_z^2 f(I_1, I_2) - \lambda_z^{-2} g(I_1, I_2)\right] \quad (3.23)$$

En conclusion, dans chaque point d'étude la relation de comportement donne trois équations qui s'écrivent sous forme d'un système matriciel  $\sigma = Hx$  :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (\lambda_x^2 + \gamma_x^2 - \lambda_z^2) & (\lambda_y^2 + \gamma_y^2)\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_z^2} \\ (\lambda_y^2 + \gamma_y^2 - \lambda_z^2) & (\lambda_x^2 + \gamma_x^2)\lambda_z^2 - \frac{1}{\lambda_z^2} \\ (\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x) & (\lambda_x\gamma_y + \lambda_y\gamma_x)\lambda_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(I_1, I_2) \\ g(I_1, I_2) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Considérant que  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sont connus à partir du champ de l'optimisation du champs de contraintes et que  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont connus à partir de la corrélation d'images, on est alors capable de résoudre le système d'Equation 3.24 pour estimer les fonctions  $f$  et  $g$ .

### 3. 3. 2 Identification des fonctions f et g

Le système d'équations obtenu est composé de 3 équations ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ), indépendantes l'une de l'autre, pour deux variables  $f$  et  $g$ . à déterminer Donc le problème est mal posé, on ne peut pas satisfaire les trois équations parfaitement. Cela conduit à résoudre le système par des méthodes d'approximations. En effet, la meilleure estimation de  $f$  et  $g$  fait apparaître une erreur notée  $[err]$ , on peut écrire alors :

$$[\sigma] = H[X] + [err] \quad (3.25)$$

Si on compose avec  $[err]^T$  on obtient le carré des écarts :

$$[err]^T [err] = [\sigma]^T [\sigma] + [X]^T H^T H [X] - 2[\sigma]^T H [X] \quad (3.26)$$

Pour déterminer le meilleur jeu de valeurs de  $f$  et  $g$  (composantes de  $[X]$ ), on minimise le carré des écarts par rapport à ces composantes. Ce qui donne :

$$X = (H^T H)^{-1} H^T [\sigma] \quad (3.27)$$

En définitif, l'estimation des valeurs de  $f$  et  $g$  est obtenue en combinant l'analyse d'image et le champ de contrainte optimisée précédemment. Les différentes étapes de la procédure d'identification des dérivées partielles sont résumées dans l'organigramme suivant.

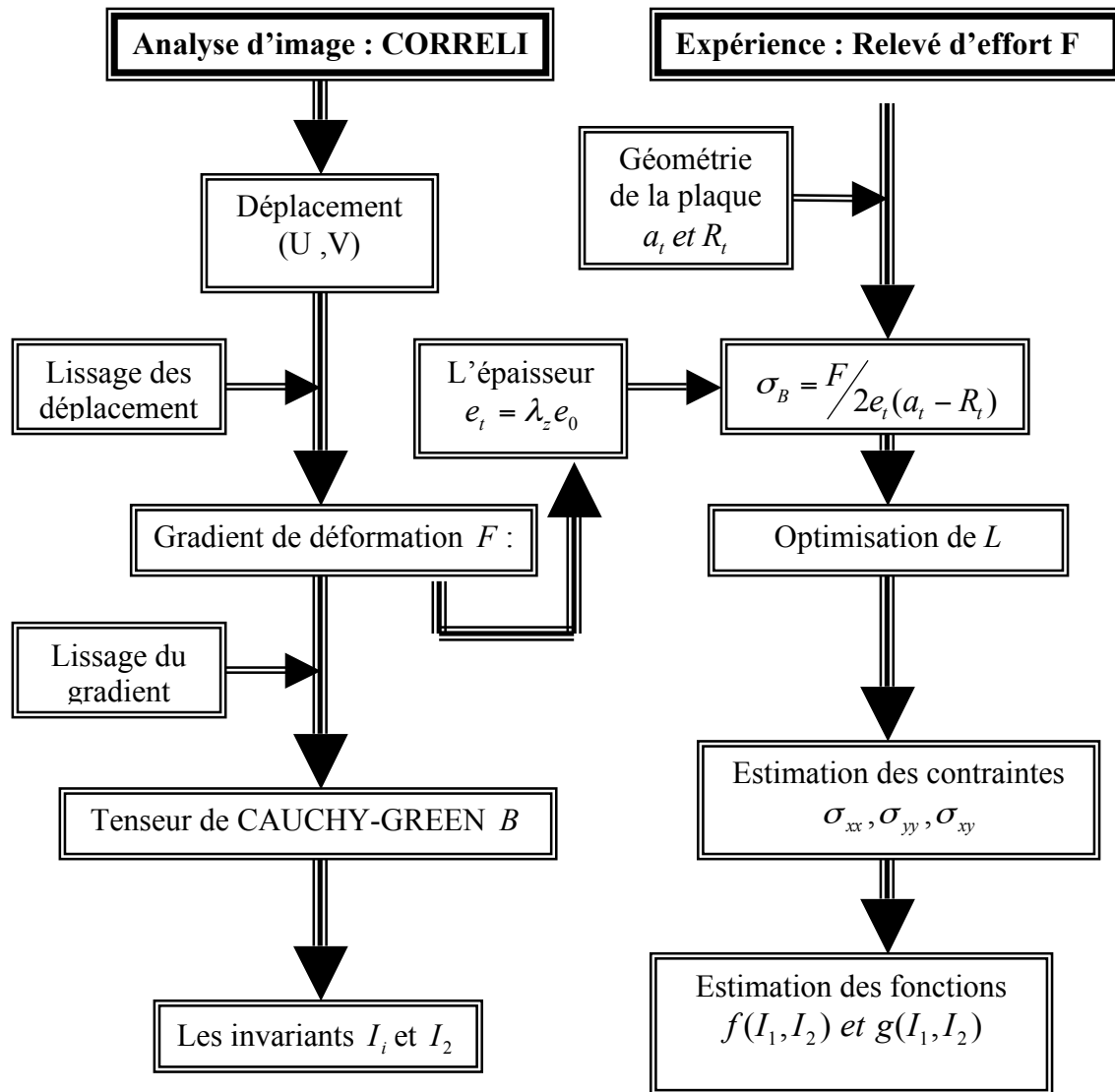


Figure 3.7 : Organigramme de la procédure d'identification des dérivées  $\frac{\partial W}{\partial I_1}$  et  $\frac{\partial W}{\partial I_2}$  du

potentiel du matériau étudié

### 3.4 Résultats et discussion

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats de l'application de la procédure d'identification des paramètres de la loi de comportement à partir des 38 images prises. Cependant, afin de mettre en évidence l'hypothèse «  $f$  ne dépend que de  $I_1$  et  $g$  que de  $I_2$  », il convient de tracer en premier lieu  $f$  et  $g$  en fonction des deux invariants  $I_1$  et  $I_2$ . Les Figures 3.8a et b présentent respectivement les surfaces  $f(I_1, I_2)$  et  $g(I_1, I_2)$ . Chaque plan correspond à un élément de la grille de la zone d'étude. Les valeurs des sommets de chaque élément correspondent aux valeurs de  $f$  et  $g$  de l'élément de la grille déformée. On peut voir sur les deux figures que la dispersion se produit la plupart du temps sur la branche tension biaxiale. Cela peut s'expliquer par le fait que les deux premières équations du système d'Equation 3.24 sont identiques dans le sens X et Y, donc les résultats son sensible à l'expérience. Il convient de noter que la dispersion est très importante pour la fonction  $f(I_1)$ . On observe aussi que les surfaces  $f(I_1, I_2)$  et  $g(I_1, I_2)$  sont assez plates dans la zone proche de la traction uniaxial. Cependant, dans la Figure 3.8-a les surfaces sont plates dans le sens  $I_2$  et dans la Figure. 3.8-b sont plates dans le sens  $I_1$ , cela veut dire que  $I_1$  n'influence pas considérablement  $g$ , contrairement à  $I_2$ . De même, on peut considérer que  $I_2$  n'influence pas considérablement  $f$ , par contre  $f$  dépend essentiellement de  $I_1$ . Il est donc raisonnable de penser que l'hypothèse d'indépendance ne peut pas être écartée. Cette hypothèse sera utilisée pour l'interpolation des fonctions  $f$  et  $g$ .

On s'intéresser maintenant à la représentation des fonctions  $f$  et  $g$  respectivement en fonction de  $I_1$  et  $I_2$  en chaque point de la grille de la zone d'étude. La Figure. 3.9 représente les résultats obtenus. On observe clairement une dispersion importante, en particulier pour les faibles valeurs de  $I_2$  et  $I_1$  (près de 3). Cela peut s'expliquer par le fait que quand les contraintes sont petites les invariants  $I_1$  et  $I_2$  se superposent l'un sur l'autre dans cette plage de contraintes. Donc la difficulté de la méthode d'identification se focalise sur cette marge de contraintes et les fonctions  $f$  et  $g$  sont très sensibles au bruit expérimental. Cette difficulté on la trouve aussi dans l'interpolation des fonctions  $f$  et  $g$ , où les valeurs de départ sont difficiles à évaluer correctement.

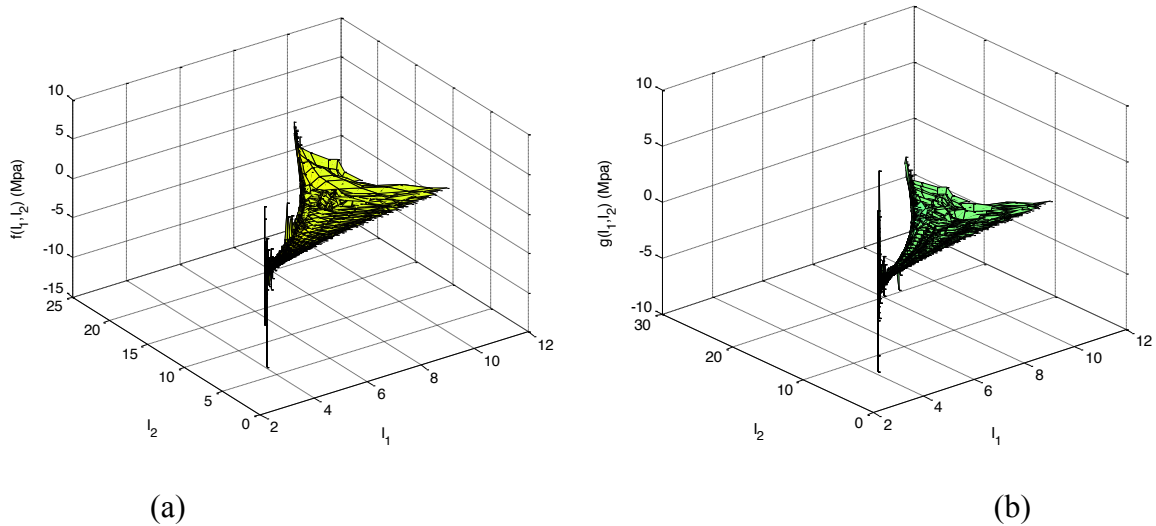


Fig. 3.8 Visualisation des dérivées du potentiel  $W$  en chaque point de la grille de la zone d'étude

Néanmoins, les valeurs des fonctions ont la tendance à être constantes. En effet, lorsque la déformation augmente la dispersion est fortement réduite et l'identification est plus facile. La fonction  $f(I_1)$  converge vers une valeur moyenne de 0,124 MPa, elle est 3 fois plus grande que la valeur moyenne de  $g(I_2)$  qui est égale à 0,0438 MPa. L'écart-type est d'ordre de 0,465 MPa pour  $f(I_1)$  et de 0,451 MPa pour  $g(I_2)$ . On note que l'écart-type est calculé une fois que les perturbations en petites déformations sont disparues.

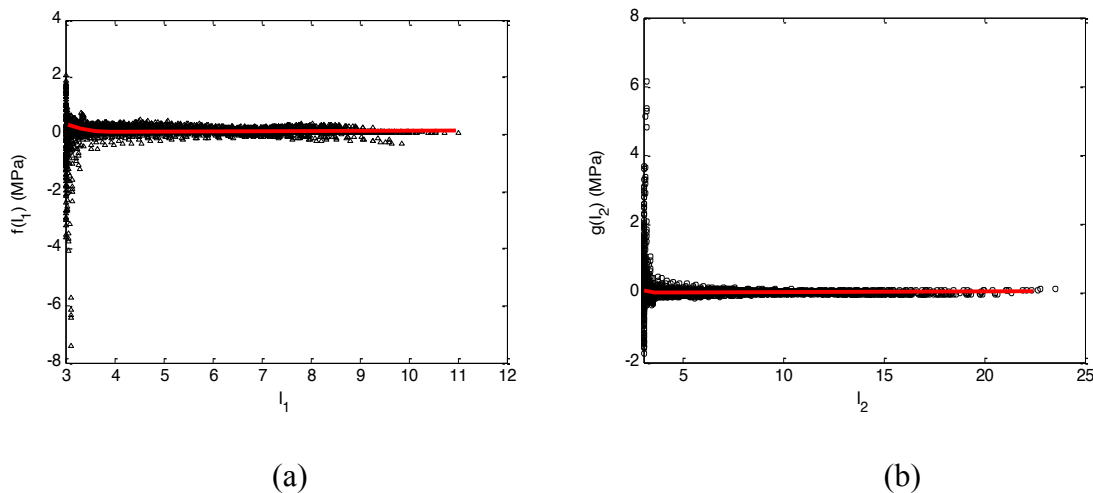


Fig. 3.9 Visualisation des dérivées du potentiel  $W$  (a)  $f$  en fonction de  $I_1$  (b)  $g$  en fonction de  $I_2$  en chaque point de la grille de la zone d'étude

Une interpolation des valeurs des fonctions  $f(I_1)$  et  $g(I_2)$  est réalisée en utilisant une fonction avec une décroissance exponentielle aux petites déformations et qui converge vers la valeur moyenne en grandes déformations. Les résultats d'interpolation sont donnés par l'Equation 3.28. Dans la Figure 3.9, les lignes rouges illustrent les fonctions d'interpolation.

$$\begin{aligned} f(I_1) &= 0.124 + 0.0557 \exp(0.1235(I_1 - 3)) \\ g(I_2) &= 0.0438 + 0.6019 \exp(-1.16(I_2 - 3)) \end{aligned} \quad \text{en MPa} \quad (3.28)$$

### 3.5 Validation du modèle de Mooney Revlin

Les deux valeurs moyennes de  $f$  et  $g$  peuvent être considérées comme des paramètres du modèle de Mooney ( $C_1$  et  $C_2$ ). En effet, l'utilisation du champ de déplacement correspondant à l'élongation maximale comme champ de déplacement virtuel dans la modélisation Mooney Rivlin, nous permet de tracer les valeurs des couples ( $C_1, C_2$ ) qui satisfont le principe des travaux virtuels suivants :

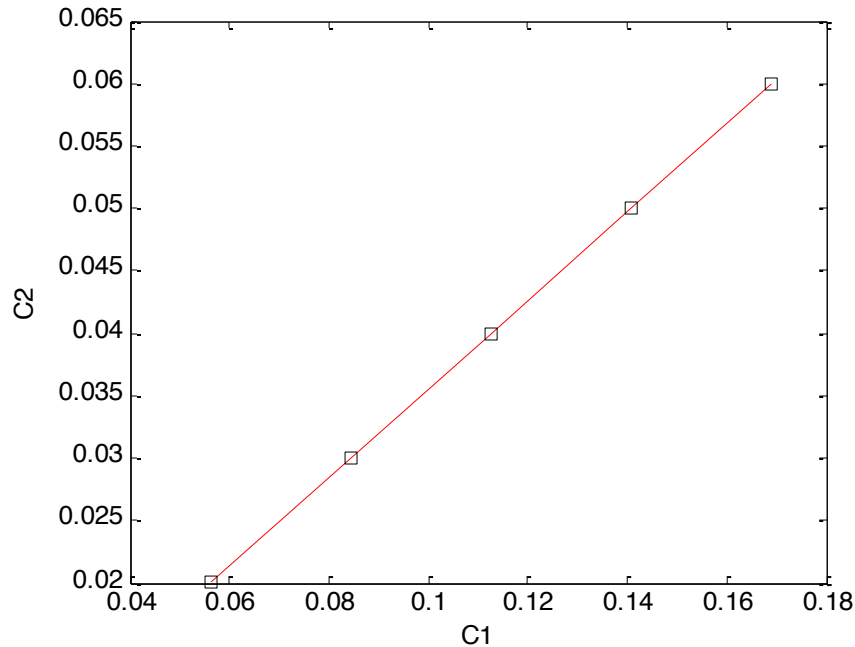
$$\int_{\Omega} \sigma : \dot{\varepsilon}^* dv = \int_{\partial\Omega} (\sigma.n) V^* ds \quad (3.29)$$

où nous choisissons le champ de déplacement mesuré à partir de la corrélation d'images comme champ cinématiquement admissible de telle sorte que la vitesse de déformation virtuelle est le tenseur des petites déformations calculées à partir du champ de déplacement numérique (même si les déplacements ne sont pas petits dans la réalité). Considérant le modèle Money-Rivlin, l'Equation 3.29 conduit à:

$$2C_1 \int_{\frac{1}{4}\Omega} B : \varepsilon dv - 2C_2 \int_{\frac{1}{4}\Omega} \sigma : B^{-1} dv = F \frac{\bar{U} + \bar{V}}{2e} \quad (3.30)$$

où  $F$  la force mesurée par la cellule de charge au cours de l'essai,  $e$  l'épaisseur de l'échantillon et  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  sont les valeurs moyennes des déplacements aux poignées, respectivement dans les directions X et Y. Les deux intégrales peuvent être calculées sur le quart de l'échantillon à partir de la base de données obtenue. Le couple ( $C_1, C_2$ ) des solutions de l'Equation 3.30 conduit à une ligne droite (voir Fig. 3.10), Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à Promma et al., 2009 [85]. On peut voir que les valeurs identifiées  $C_1 = 0.124MPa$  et  $C_2 = 0.0438MPa$  se situent sur cette ligne. On rappelle que le modèle de

Mooney-Rivlin est bien adaptée au domaine de déformations modérées des caoutchoucs naturels (<300%).



*Fig. 3.10 Les valeurs des coefficients ( $C_1, C_2$ ) qui minimisent le problème des travaux virtuels lorsque le champ de déplacement obtenu par corrélation d'images est choisi comme champ de déplacement virtuel.*

### 3.6 Conclusion

Ce chapitre a proposé une méthode numérique pour modéliser le comportement du caoutchouc naturel en extension biaxiale. Cette technique combine à la fois la mesure de champ cinématique par corrélation d'images numériques et la construction d'un champ de contrainte, superposition d'un champ biaxial homogène et d'un champ de contrainte complémentaire adapté à la géométrie spécifique de l'échantillon tout en tenant compte des conditions aux limites et des équations d'équilibre locales. À partir de ces données, nous avons pu identifier les deux dérivées du potentiel hyperélastique  $f = \partial W / \partial I_1$  et  $g = \partial W / \partial I_2$ .





## Chapitre IV

# Validation des résultats d'identification par une simulation numérique

Ce chapitre présente la simulation numérique de l'essai de traction équi-biaxial. Dans un premier temps, on écrit les équations d'équilibre du domaine matériel étudié dans lesquelles les grandeurs définies lors du chapitre précédent interviennent. Ensuite une formulation variationnelle des équations d'équilibre locales appliquée à la mécanique des grandes transformations est exprimée et permet, via le principe des puissances virtuelles, d'obtenir les équations discrétisées pour la méthode des éléments finis. Cette discrétisation aboutit à un système non-linéaire résolu à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. L'équilibre considéré est écrit dans le cadre de la statique, sans prendre en compte les forces volumiques.

Dans une seconde étape, les conditions limites réelles issues de la mesure du champ de déplacement sont appliquées à la simulation et à partir des fonctions  $f$  et  $g$  identifiées dans le chapitre 3, on remonte aux efforts de chargement et au champ de contrainte qu'on compare respectivement aux résultats mesurés par la cellule de charge et au champs de contrainte approché. Cette approche permet de valider le champ de contraintes approché et la procédure d'identification proposée dans ce travail.

### 4. 1. Formulation variationnelle du problème d'équilibre.

Afin de conduire une simulation par éléments finis, nous devons introduire des méthodes variationnelles qui mènent à une formulation du principe des travaux virtuels. Ce principe est la base de la méthode éléments finis. Pour une étude plus approfondie de la

méthode des éléments finis et ces principes de base, le lecteur est renvoyé aux ouvrages écrits par Ahrens, H. et Dinkler, D. [86], Zienkiewicz et Taylor [87], Wriggers [88] ou Bonet et Wood [67].

#### 4. 1. 1. Equations d'équilibre.

On considère le solide représenté, dans la configuration déformée, par un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ , décomposée en deux parties complémentaires et disjointes notées  $\partial\Omega_\sigma$  et  $\partial\Omega_u$  tel que  $\partial\Omega_\sigma \cup \partial\Omega_u = \partial\Omega$  et  $\partial\Omega_\sigma \cap \partial\Omega_u = \emptyset$ . Le solide est en équilibre, soumis à un chargement extérieur et à des conditions aux limites, le champ de contrainte doit satisfaire :

- Les équations d'équilibre dans  $\Omega$  sur la configuration courante

$$\operatorname{div}\sigma + f_v = 0 \quad 4.1$$

- Les conditions aux limites

$$\sigma n = \bar{t} \quad \text{sur } \partial\Omega_\sigma \quad 4.2$$

avec  $f_v$  les forces volumiques exercées dans  $\Omega$ ,  $n$  vecteur de la normale extérieure en un point du contour  $\partial\Omega_\sigma$

Le champ de déplacement doit satisfaire :

$$u = \bar{u} \quad \text{sur } \partial\Omega_u \quad 4.3$$

$\bar{u}$  est le déplacement imposé des particules de  $\partial\Omega_u$ . Ces équations sont écrites en configuration déformée, elles représentent le problème aux limites non linéaires

Une solution analytique du problème n'est possible que dans certains cas particuliers, par conséquent, les techniques de solution approximatives basées sur des principes variationnels, comme la méthode des éléments finis sont utilisés pour résoudre le problème.

#### 4.1.2 Principe des travaux virtuels.

En vue d'une résolution numérique, il convient de transformer cette forme locale en une forme intégrale en faisant appel au principe des travaux virtuels. Ce principe traduit l'équilibre entre le travail des forces extérieures et celui des forces internes. Ainsi, la forme

variationnelle associée à l'équation d'équilibre (Eq. 4.1) est obtenue à partir d'une formulation de type de Galerkin avec comme fonction de pondération un champ de déplacements virtuels  $\delta u$ , cinématiquement admissible, c'est-à-dire compatible avec les conditions aux limites en déplacement. Le principe des travaux virtuels conduit ainsi à la forme suivante :

$$\int_{\Omega} (\text{div} \sigma + f_v) \delta u \, dv = \int_{\Omega} \text{div} \sigma \cdot \delta u \, dv + \int_{\Omega} f_v \cdot \delta u \, dv = 0 \quad 4.4$$

En utilisant la propriété de divergence :

$$\text{div}(\sigma^T \cdot \delta u) = \text{div} \sigma \cdot \delta u + \sigma : \text{grad} \delta u \quad 4.5$$

Nous pouvons développer l'équation (4.4), on trouve ainsi

$$\int_{\Omega} (\text{div} \sigma + f_v) \delta u \, dv = \int_{\Omega} \text{div}(\sigma^T \cdot \delta u) \, dv - \int_{\Omega} \sigma : \text{grad} \delta u \, dv + \int_{\Omega} f_v \cdot \delta u \, dv = 0 \quad 4.6$$

On peut encore utiliser le théorème de la divergence

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma^T \delta u) \, dv = \int_{\partial \Omega} \sigma n \cdot \delta u \, ds \quad 4.7$$

Ce qui nous donne :

$$\int_{\Omega} (\text{div} \sigma + f_v) \delta u \, dv = \int_{\Omega} \sigma : \text{grad} \delta u \, dv - \int_{\partial \Omega} \sigma n \delta u \, ds - \int_{\Omega} f_v \cdot \delta u \, dv = 0 \quad 4.8$$

On obtient ainsi la forme variationnelle des équations d'équilibre suivante.

$$\int_{\Omega} \sigma : \text{grad} \delta u \, dv - \int_{\partial \Omega} \bar{t} \delta u \, ds - \int_{\Omega} f_v \cdot \delta u \, dv = 0 \quad 4.9$$

Le premier terme représente le travail virtuel intérieur et le travail des forces  $\bar{t}$  et  $f_v$  exprime le travail virtuel extérieur. On note ainsi :

$$\delta W_{\text{int}}(u, \delta u) = \int_{\Omega} \sigma : \text{grad} \delta u \, dv \quad 4.10$$

$$\delta W_{\text{ext}}(u, \delta u) = \int_{\partial \Omega} \bar{t} \delta u \, ds + \int_{\Omega} f_v \cdot \delta u \, dv \quad 4.11$$

### 4.1.3 Condition d'incompressibilité

Il est à noter que la modélisation du comportement des caoutchoucs par des méthodes numériques est souvent réalisée dans le cadre incompressible ou quasi-incompressible. Si l'on veut traiter exactement cette condition d'incompressibilité, nous l'avons vue, la contrainte n'est pas totalement déterminée à partir de la déformation (cf. Eq. 3.4.). Il est donc nécessaire d'utiliser une formulation mixte, c'est-à-dire d'introduire une autre inconnue au problème qui permettra de déterminer complètement le tenseur des contraintes. Plusieurs variantes sont possibles, la plus simple consistant à imposer la condition d'incompressibilité à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange qui est alors la pression  $p$ . Ce qui donne, pour tout champ de pression virtuel  $\delta p$ :

$$\int_{\Omega} \delta p (J(u) - 1) dv = 0 \quad 4.12$$

La forme variationnelle associée à l'équation d'équilibre peut alors être décrite en deux parties dépendant respectivement des variations virtuelles de déplacement et de pression : elle est appelée formulation mixte déplacement-pression

$$\begin{cases} R_u(u, p, \delta u) = \int_{\Omega} \sigma : grad \delta u dv - \int_{\partial\Omega} \bar{t} \delta u ds + \int_{\Omega} f_v \delta u dv = 0 \\ R_p(u, p, \delta p) = \int_{\Omega} \delta p (J(u) - 1) dv = 0 \end{cases} \quad 4.13$$

où  $(R)$  est appelé résidu. Notons que les dérivées dans cette expression sont effectuées par rapport à la configuration actuelle, c'est-à-dire par rapport aux variables  $(x_i)$  et que de plus, cette configuration est *a priori* inconnue. Nous allons ramener cette formulation variationnelle sur la configuration initiale  $\Omega_0$ . Le passage entre le tenseur de contraintes  $\sigma$  et le deuxième tenseur de Piola-Kirchoff s'effectue à travers la relation :

$$J\sigma = F S F^T \quad \text{ou encore} \quad S = JF^{-1} \sigma F^{-T} \quad 4.14$$

Pour obtenir une formulation variationnelle complète, il nous faut aussi transformer les intégrales (surfique et volumique) de la configuration déformée à la configuration initiale. En utilisant la formule de Nanson et un changement de variable classique, on obtient la formulation variationnelle sous sa forme Lagrangienne suivante [89].

$$\begin{cases} R_u(u, p, \delta u) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta E dV - \int_{\partial\Omega_0} \bar{t}_0 \delta u dS - \int_{\Omega_0} F_v \delta u dV = 0 \\ R_u(u, p, \delta p) = \int_{\Omega_0} \delta p (J(u) - 1) dV = 0 \end{cases} \quad 4.15$$

avec  $\bar{t}_0 = J\sigma F^{-T} N$  et  $N$  la normale à la configuration initiale.

Il est à noter que l'équilibre de notre domaine va faire intervenir aussi bien des forces de surface (associées aux vecteurs contraintes) que des forces de volume (associées aux efforts extérieurs). Toutefois, ces dernières faisant intervenir des éléments différentiels d'ordre supérieur, on peut les négliger devant les forces de surface si les dimensions de notre élément sont infinitésimales.

#### 4.1.4 Réduction de modèle : Contraintes planes

Dans une formulation mixte déplacement/pression, le choix des fonctions d'interpolation et de l'ordre d'interpolation est crucial [90,91]. Pour s'affranchir d'une telle contrainte, on retient l'hypothèse des contraintes planes pour exprimer la pression hydrostatique en fonction des composantes du tenseur de déformation Cauchy-Green gauche  $B$ , c'est-à-dire en fonction du champ de déplacement, ainsi elle permet d'éliminer la variable pression du système. En effet, dans le cas d'un matériau incompressible, la relation contraintes-déformations n'est pas biunivoque et la contrainte de Cauchy est déterminée à une pression près. Soit

$$\sigma = -p\mathbf{I} + 2fB - 2gB^{-1} \quad 4.16$$

Cette dernière relation nous permet de faire apparaître l'expression analytique de la pression. Elle peut être déterminée à partir de  $\sigma_{33} = 0$ , d'où :

$$p = 2fB_{33} - 2gB_{33}^{-1} \quad 4.17$$

Nous obtenons ainsi l'expression de la contrainte de Cauchy en fonction de multiplicateur de Lagrange suivante, noté  $\sigma(p, M)$  :

$$\sigma(p, M) = 2f(B - B_{33}\mathbf{I}) - 2g(B^{-1} - B_{33}^{-1}\mathbf{I}) \quad 4.18$$

Il est à noter qu'elle s'exprime en fonction des fonctions  $f$  et  $g$  identifiées dans le chapitre 3.

En introduisant la relation (Eq. 4.18) dans l'équation (Eq. 4.13), la forme variationnelle du problème à résoudre s'écrit a nouveau dans la configuration actuelle sous la forme suivante :

$$R(u, \delta u) = -2 \int_{\Omega} \sigma(p, M) : \text{grad} \delta u \, dv - \int_{\partial\Omega} \bar{t} \delta u \, ds - \int_{\Omega} f_v \delta u \, dv = 0 \quad 4.19$$

et en configuration initiale :

$$R(u, \delta u) = -2 \int_{\Omega_0} \mathbf{S}(p, M) : \delta E \, dV - \int_{\partial\Omega_0} \bar{t}_0 \delta u \, ds - \int_{\Omega_0} F_v \delta u \, dV = 0 \quad 4.20$$

Comme nous sommes dans le cas d'une déformation plane, Il est néanmoins possible d'utiliser que les composantes 2D. Ainsi en utilisant la relation locale d'incompressible, on peut écrire

$$\det B = (\det F)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad B_{33} = \frac{1}{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}} = \frac{1}{\det_{2D} B} \quad 4.21$$

où  $\det_{2D} B$  désigne le déterminant de la matrice de déformation 2D dans le plan  $(x, y)$  de l'éprouvette. On peut exprimer aussi les invariants du tenseur de Cauchy-Green, nécessaires à l'identification des fonctions  $f$  et  $g$ , en terme des composantes planes du tenseur  $B$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1^{2D} + \frac{1}{\det_{2D} B} \\ I_2 &= I_2^{2D} + \frac{1}{\det_{2D} B} \end{aligned} \quad 4.22$$

avec  $I_1^{2D}$  et  $I_2^{2D}$  correspondent aux composantes 2D

## 4.2 Linéarisation du problème

L'écriture de la forme variationnelle conduit généralement à une équation non-linéaire de la forme  $R(u) = 0$ . Cette non-linéarité est due aux non-linéarités géométriques (grandes déformations) et matérielles (hyperélasticité). Pour résoudre l'équation, on utilise généralement une méthode itérative qui tire parti du développement de Taylor de cette équation.

Dans ce travail, on opte pour la méthode de Newton-Raphson qui s'avère plus robuste que les autres algorithmes itératifs tels que les méthodes dites quasi-Newton. A l'étape  $k + 1$  de ce processus, on peut linéariser le problème autour d'un état connu  $u_k$ , tel que :

$$R(u_k + \Delta u) = R(u_k) + \left( D_{\Delta u} R(u) \Big|_{u=u_k} \right) \Delta u + o(\Delta u) \quad 4.23$$

où  $D_{\Delta u}$  représente l'opérateur de dérivation de Gâteaux défini par

$$D_{\Delta u} R(u) = \frac{d}{d\varepsilon} R(u_k + \Delta u) \Big|_{\varepsilon=0} \quad 4.24$$

Le développement de Taylor peut être poursuivi à un ordre supérieur mais dans la plupart des codes éléments finis, il se limite à l'ordre 1, pour des raisons de coût de calcul des dérivées d'ordres supérieurs.

#### 4.2.1 Linéarisation de la forme variationnelle

Sachant que la linéarisation de la forme variationnelle (Eq. 4.19) peut être obtenue à partir de la linéarisation de la forme variationnelle (Eq. 4.20) en utilisant les fonctions de passages, nous allons linéariser d'abord le principe des travaux virtuels dans un formalisme Lagrangien. Supposons que  $\bar{t}_0$  est une charge constante (indépendante de la déformation), la linéarisation du travail virtuel externe va donc disparaître.

$$D_{\Delta u} \delta W_{ext} = 0 \quad 4.25$$

et nous aurons seulement à linéariser le travail virtuel interne, à savoir

$$D_{\Delta u} R(u, \delta u) = D_{\Delta u} \int_{\Omega_0} \mathbf{S}(p, E(\delta u)) : \delta E dV \quad 4.26$$

où  $\mathbf{S}$  est une fonction du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $E$ , lui même est une fonction de champ de déplacement virtuel. La linéarisation du travail intérieur est donnée par :

$$D_{\Delta u} \delta W_{int} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_{\Omega_0} \mathbf{S}(p, E(\delta u + \varepsilon \Delta u)) : \delta E(\delta u + \varepsilon \Delta u) dV \right] \Big|_{\varepsilon=0} \quad 4.27$$

Quelques manipulations conduisent à l'écriture de l'expression de l'opérateur tangent du problème associé à la forme Lagrangienne [89].

$$D_{\Delta u} R(u, \delta u) = \int_{\Omega_0} (F^T Grad \delta u : \mathbf{C} : F^T Grad \Delta u + Grad \delta u : Grad \Delta u \mathbf{S}) dV \quad 4.28$$

où  $\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(p, E)}{\partial E}$  désigne l'opérateur d'élasticité tangent dans la configuration de référence associée au potentiel élastique et  $Grad$  désigne le tenseur gradient dans la configuration non déformée.

A présent, il ne reste plus qu'à utiliser les opérateurs de passage d'une configuration lagrangienne à une configuration eulérienne ainsi que le changement de variable classique pour obtenir l'opérateur tangent associé à la forme variationnelle (Eq. 4.19).

$$D_{\Delta u} R(u, \delta u) = \int_{\Omega} (grad \delta u : \mathbf{c} : grad \Delta u + grad \delta u : grad \Delta u \sigma) dv \quad 4.29$$

avec  $\mathbf{c}$  tenseur d'élasticité tangent du 4<sup>ème</sup> ordre et  $grad$  désigne le tenseur gradient dans la configuration déformée.

### 4.3 Discrétisation par élément finis

La mise en oeuvre d'une méthode d'éléments finis nécessite un certain nombre d'étapes génériques qui sont communes à de nombreux problèmes. Il existe de nombreux ouvrages qui détaillent cette méthode (voir par exemple Zienkiewicz et Taylor [87], Crisfield [92]), on se contentera donc d'en rappeler quelques étapes de la simulation afin de poser les notations.

#### 4.3.1 Discrétisation géométrique : maillage.

La première étape est la discrétisation spatiale du domaine : à l'aide du logiciel Partan nous avons effectué, après la création de la géométrie de l'éprouvette, un maillage triangulaire de la surface de l'éprouvette. Nous avons ainsi discrétisé le domaine  $\Omega$  en un nombre fini de sous-domaines  $\Omega_i^e$  (éléments finis) définis chacun à partir de noeuds d'interpolation de telle sorte qu'on ait  $\bigcup_{i=1}^{nel} \Omega_i^e = \Omega$  et  $\Omega_i^e \cap \Omega_j^e$  soit une arête ou une face si  $i \neq j$  (Figure 4.1). Cela



nous a permis de définir les coordonnées des nœuds et de construire le tableau de connectivité. Ce dernier est primordial pour réaliser l'assemblage des éléments.

Il est à noter que dans le cas des grandes déformations, ce maillage peut subir des distorsions suffisamment importantes pour mener à l'échec le calcul. C'est la raison pour laquelle nous avons mis en place un programme de remaillage. Cet algorithme permet d'affecter les données de l'ancien maillage vers le nouveau maillage. Deux types de variables à transporter doivent être distingués :

- Les variables nodales (déplacement). On cherche l'élément de l'ancien maillage contenant le nœud du nouveau maillage considéré. Les quantités physiques lui sont alors affectées par l'intermédiaire des fonctions de forme de l'élément. Cette opération est appelée interpolation inverse [93].
- Les variables stockées aux points de Gauss des éléments (contrainte, déformation, ...) sont extrapolées aux nœuds de l'ancien maillage. Pour chaque point de Gauss du nouveau maillage, on cherche alors l'élément de l'ancien maillage le contenant. Les quantités physiques sont ensuite affectées par interpolation inverse.

#### 4.3.2 Imposition des conditions aux limites

Une fois, qu'on a mis en œuvre le maillage, on impose les conditions aux limites reproduisant le chargement réalisé sur la machine. Pour cela, un déplacement d'extension de  $35\text{mm}$  est imposé sur les bords droit et haut tout en maintenant un déplacement nul sur les bords en vis-à-vis (gauche et bas) afin de satisfaire des conditions de symétrie. On note que l'extension est réalisée avec un pas de  $(0.1\text{mm})$ . Le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites, imposées en déplacement, sont représentés sur la (Figure 4.1).

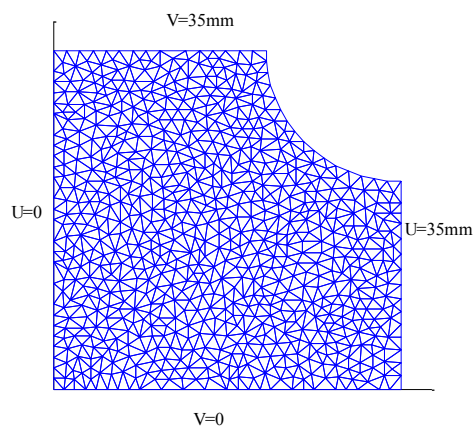


Figure 4.1 Le maillage utilisé et conditions aux limites parfaites

### 4.3.3 Approximation nodale des déplacements

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation des variables du champ  $u$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux noeuds de l'élément triangulaire à l'aide de fonctions d'interpolation. Dans notre cas le seul inconnu est le déplacement 2D, on obtient ainsi les formes discrétisées du déplacement et de la position suivantes.

$$u_x^e(\xi, \eta) = \sum_i^3 N_i^e(\xi, \eta) u_i^e, \quad u_y^e(\xi, \eta) = \sum_i^3 N_i^e(\xi, \eta) v_i^e \quad 4.30$$

$$x^e(\xi, \eta) = \sum_i^3 N_i^e(\xi, \eta) x_i^e, \quad y^e(\xi, \eta) = \sum_i^3 N_i^e(\xi, \eta) y_i^e \quad 4.31$$

$(\xi, \eta) \in [-1, 1]^2$  représentant une paramétrisation de l'élément de référence correspondant au triangle.  $N_i$  sont les polynômes d'interpolations de Lagrange, donné comme suite :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = \eta \quad 4.32$$

Les  $u_i^e$  et  $v_i^e$  sont les degrés de libertés (les coefficients interpolateurs) d'un élément et les  $x_i^e$  et  $y_i^e$  sont les positions des noeuds.

### 4.3.4 Construction du système matriciel

Afin de construire les formes matricielles sur chaque élément, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du Principe des Travaux Virtuels. Ainsi, l'introduction des fonctions d'interpolations dans le problème linéarisé combinée au fait que  $\delta u$  est arbitraire conduit au système matriciel suivant

$$[K(u)]\{\Delta u\} = -\{R\} \quad 4.33$$

où  $[K(u)]$  et  $\{R\}$  sont respectivement la matrice associée à l'opérateur tangent et le vecteur résidu associé. Le vecteur  $\{\Delta u\}$  contient tous les degrés de liberté du domaine de façon ordonnée. De plus, on a

$$[R] = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} [\tilde{B}^T] \{\sigma\} dv - \int_{\partial\Omega^e \cap \partial\Omega^e} [N^T] \{f\} ds \right) \quad 4.34$$

$$[K] = \sum_e \left( \int_{\Omega^e} ([\tilde{B}^T] [C] [\tilde{B}] - [B^T] [\sigma] [B]) dv \right) \quad 4.35$$

avec, pour un nœud  $i$  donné,

- $[N]$  la matrice contenant les fonctions de forme associées à I

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad 4.36$$

- $[B]$  la matrice permettant de calculer le gradient en notation de Voigt

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,1} & 0 & 0 \\ N_{i,2} & 0 & 0 \\ N_{i,3} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,1} & 0 \\ 0 & N_{i,2} & 0 \\ 0 & N_{i,3} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,1} \\ 0 & 0 & N_{i,3} \\ 0 & 0 & N_{i,3} \end{bmatrix} \quad 4.37$$

- $[\tilde{B}_i]$  la matrice associée à la partie symétrique de l'opérateur  $F^T \nabla_x$

$$[\tilde{B}_i] = \begin{bmatrix} F_{11}N_{i,1} & F_{21}N_{i,1} & F_{31}N_{i,1} \\ F_{12}N_{i,2} & F_{22}N_{i,2} & F_{32}N_{i,2} \\ F_{13}N_{i,3} & F_{23}N_{i,3} & F_{33}N_{i,3} \\ F_{12}N_{i,3} + F_{13}N_{i,2} & F_{22}N_{i,3} + F_{23}N_{i,2} & F_{32}N_{i,3} + F_{33}N_{i,2} \\ F_{11}N_{i,3} + F_{13}N_{i,1} & F_{21}N_{i,3} + F_{23}N_{i,1} & F_{31}N_{i,3} + F_{33}N_{i,1} \\ F_{11}N_{i,2} + F_{12}N_{i,1} & F_{21}N_{i,2} + F_{22}N_{i,1} & F_{31}N_{i,2} + F_{32}N_{i,1} \end{bmatrix} \quad 4.38$$

- $\{\sigma\}$  le vecteur colonne contenant les valeurs de  $\sigma$  en notation de Voigt

$$\{\sigma\} = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{12}]^T \quad 4.39$$

- $[\sigma]$  la matrice contenant les valeurs de  $\sigma$  ordonnées de manière à être compatible avec le gradient

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad 4.40$$

- $[C]$  la matrice associée au tenseur d'élasticité écrit dans la configuration de référence

$$C = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad 4.41$$

#### 4.3.5 Calcul de la matrice tangente et les intégrales élémentaires.

La résolution du système matriciel (Eq.4.33) nécessite de calculer les éléments de la matrice tangente élémentaires ainsi que les intégrales élémentaires de résidu définies dans l'équation (Eq 4.34). Afin d'éviter de calculer analytiquement la matrice tangente élémentaire, nous avons utilisé la méthode de perturbation [94]. Cette technique est couramment utilisée, elle est basée sur un schéma de différences finies. La matrice tangente calculée par la perturbation conduit souvent à des résultats numériques aussi bons que ceux obtenus avec une matrice tangente définie explicitement. A partir d'un état initial et d'un état final, on perturbe l'incrément de déformation en ajoutant un epsilon donné, puis on calcule les contraintes correspondant a cet état perturbe en utilisant l'équation 4.18 et en déduit la matrice de rigidité tangente.

Pour évaluer les intégrales élémentaires nous avons utilisé la méthode d'intégration numérique de Gauss, elle permet d'évaluer ces intégrales par la connaissance des valeurs des

différentes fonctions -  $\sigma : grad \delta u$  et  $\bar{t} \delta u$  - aux points d'intégration (ou points de Gauss). Ces fonctions étant définies par le biais de champ élémentaire de déplacement, les différentes formes intégrales peuvent alors être considérées comme des fonctions des déplacements aux points d'intégration.

#### 4.4 Simulation numérique et discussions des résultats.

A présent il est possible de procéder à une simulation de l'essai biaxial. Notre but est, à partir des fonctions  $f$  et  $g$  identifiées dans le chapitre 3, de calculer la force de chargement sur les mors, le rayon  $R$  et le champ de contrainte et de les comparer respectivement avec la force mesurée par la cellule de charge, le rayon mesure par Photoshop et le champs de contrainte optimisé afin de conclure sur la validité du modèle identifié. Pour y parvenir, nous avons réalisé un programme dans l'environnement Matlab où on a mis en place les différentes étapes d'un code éléments finis. L'objet de la simulation est le un quart de l'éprouvette utilisée dans l'expérience. On rappelle que la géométrie est représentée par une portion carrée de coté  $a = 30mm$  entaillée d'une  $\frac{1}{4}$  de cercle de rayon  $R = 10mm$  (cf. Fig. 3.1).

##### 4.4.1 Vérification du code de calcul

Avant de passer à l'étape de la simulation, nous avons besoin de tester la robustesse du programme éléments finis. Pour cela, nous avons réalisé des simulations d'essais de traction uniaxiale, traction plane et équi biaxiale sur une géométrie carrée. Nous avons utilisé les fonctions  $f$  et  $g$ , identifiées précédemment, pour tracer la contrainte de Cauchy en fonction de l'élongations. La figure 4.3 illustre les résultats de l'exécution du programme sur les trois cas de chargement. On remarque que les courbes reproduisent les solutions analytiques dans les trois états des déformations : cela nous a permis de valider le programme.

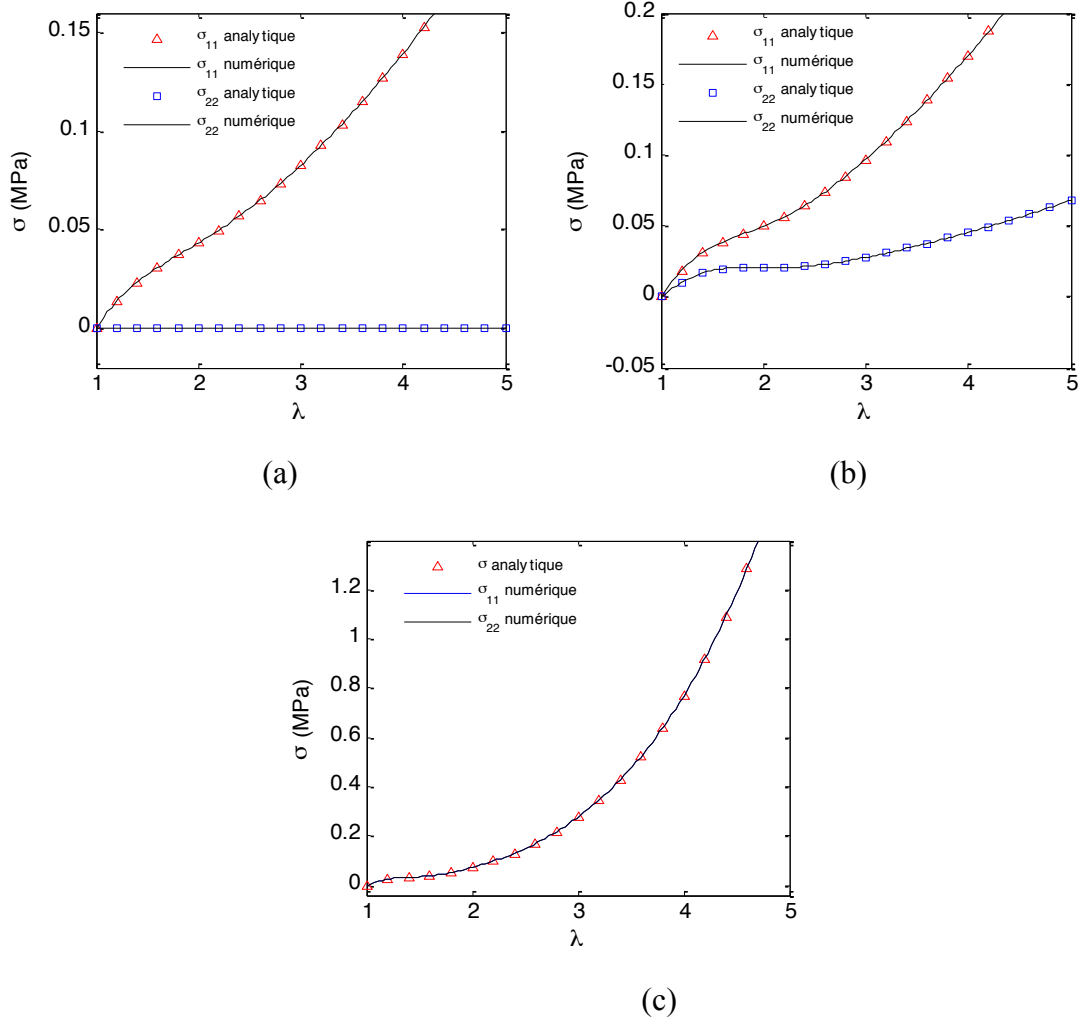


Figure 4.3 a- traction uniaxiale. B- traction plane. C- traction équi biaxiale

#### 4.4.2 Résultats de la simulation

La figure 4.4 donne la présentation de l'effort globale dans chacune des branches de l'échantillon en fonction du paramètre  $a$  (donné par le tableau 3.1). Chaque point de la figure correspond à un état défini par la mesure de la force de chargement à une valeur du coté donnée par un pas moyenne de 1.5mm. La simulation est effectuée jusqu'à une valeur  $a = 70mm$  en raison d'un important glissement de l'échantillon dans les mors, enregistré au cours de l'expérience à la 26<sup>ème</sup> images.

L'évolution des efforts sous les conditions aux limites « parfaites » imposées donne une erreur, entre le chargement donné par la simulation et celui mesuré lors de l'essai, inférieur à 1% en petite déformation. L'erreur augmente avec l'augmentation du déplacement et atteint une valeur d'enverrons 10%, ce qui n'est pas satisfaisant. De même, si on compare l'évolution du rayon, on remarque une grande différence entre celui mesuré pendant l'essai et sont évolution par la simulation. Cela peut s'expliquer pas le fait que les conditions imposés

ne sont pas totalement représentative de l'expérience. En effet, des petits glissements de l'échantillon dans les mors sont observés, ce qui rend délicat une analyse comparative. Nous montrerons dans la partie suivante comment dépouiller malgré tout cette simulation d'essai.

Des conditions aux limites issues de l'expérience et de la mesure des champs de déplacement par Correlli<sup>GD</sup> devaient être plus représentatives de l'essai. En effet, le champ de déplacement du bord permet de simuler un essai avec des conditions limites très proches de celles réellement appliquées à l'éprouvette. La Figure 4.5 illustre les conditions limites issues de la mesure des champs de déplacement. Le déplacement de chaque nœud des deux bords sont relevés et introduit comme le déplacement imposé de la simulation numérique. Les flèches représentent le déplacement global de chaque nœud du bord en déplacement. On remarque que les bords ne se déplacent pas en ligne droite, mais finissent en forme d'un arc.

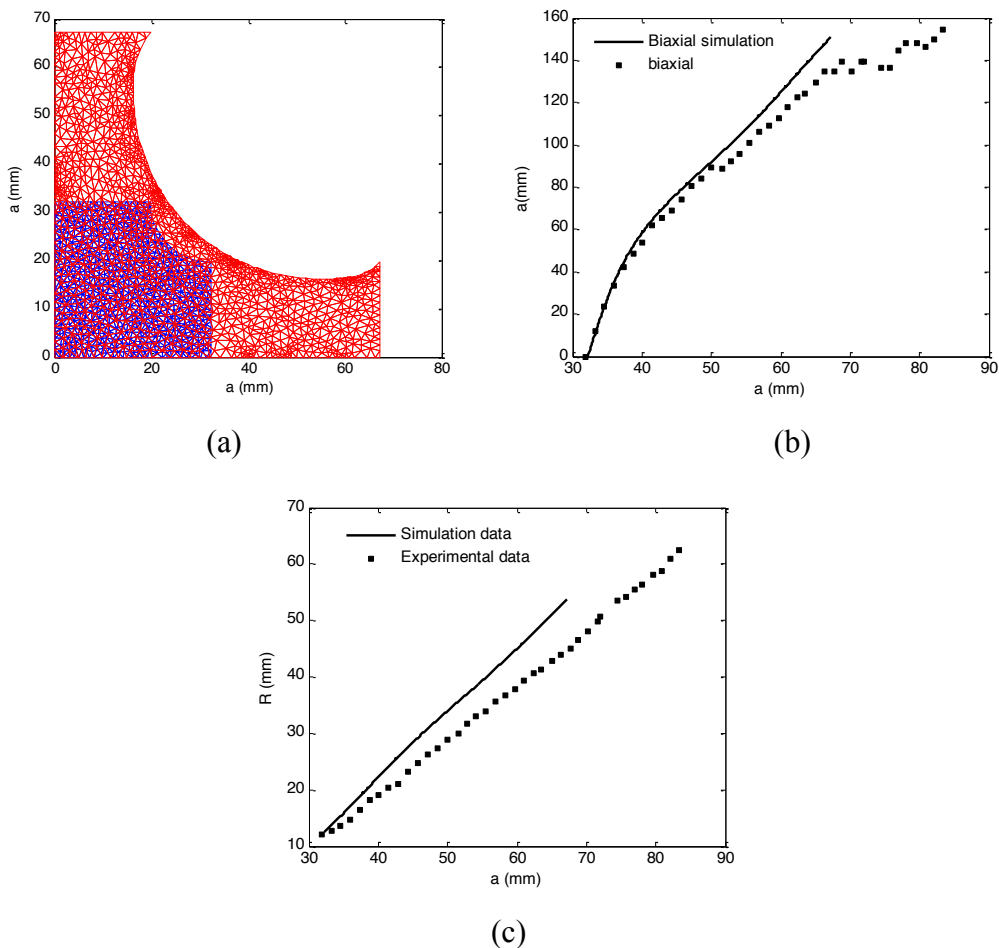


Figure 4.4 a- simulation numérique avec des conditions parfaites. b- Comparaison des résultats de la simulation numérique avec les données expérimentales. c- Comparaison du rayon de la simulation numérique celui de l'expérience

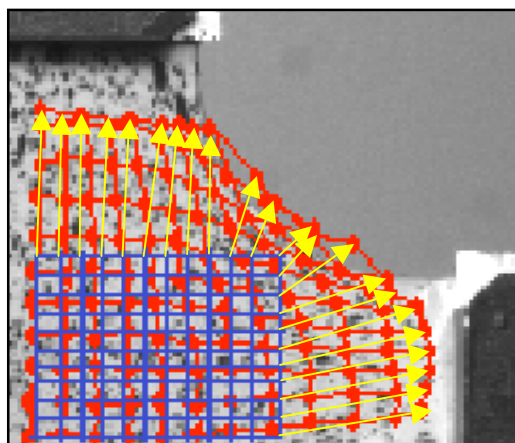


Figure 4.5 Condition aux limites issues du champ de déplacements

La Figure 4.6 (a) montre la simulation numérique de l'expérience équi biaxiale avec les conditions aux limites mesurées par Correli<sup>GD</sup>. On peut voir clairement la forme circulaire des bords à la fin de l'essai, une forme représentative des glissements de l'échantillon au cours de l'essai. On peut voir aussi que la forme du bord libre reste quasi circulaire à la fin de l'essai ce qui valide notre approche où une hypothèse importante a été faite sur la forme de l'échantillon. Cela nous permet de dire que la simulation est représentative de l'essai. La comparaison entre les forces obtenues numériquement et expérimentalement est tracée sur la Figure 4.6 (b). La force de charge est en très bon accord avec les données expérimentales jusqu'à l'enregistrement du glissement. En effet, l'erreur obtenue pour les petits déplacements et les grands déplacements est inférieure à 1%, ce qui nous permet de valider les résultats obtenus par la méthode d'identification proposée dans cette étude. La Figure 4.6 (c) montre l'évolution du rayon en fonction de l'évolution du côté (a). On voit un très bon accord entre l'évolution du rayon simulé et mesuré. Cette dernière comparaison peut sembler assez singulière au premier coup d'oeil, mais la loi de comportement a une grande influence sur l'évolution du rayon comme expliqué précédemment.

Dans la Figure 4.7, on compare les composantes du champ de contrainte de Cauchy de la simulation élément finis ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  sur le côté gauche) avec les composantes du champ de contraintes approchées, utilisées pour la procédure d'identification. L'amplitude de la contrainte de 0 à 3 MPa est identique pour la simulation élément finis et le champ de contrainte approchée. on voit aussi une symétrie l'un par rapport a l'autre. Les valeurs



maximales sont situées dans la même région à la fois pour  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . Dans la composante  $\sigma_{xy}$ , la valeur maximale est située au milieu du bord libre, elle est égale à 1,5 MPa. La comparaison n'est pas si bonne pour la valeur minimale et probablement un meilleur ajustement pourrait être obtenu avec un terme complémentaire de la composante  $\sigma_{xy}$ . On note aussi une bonne symétrie à une diagonal de  $45^\circ$ .

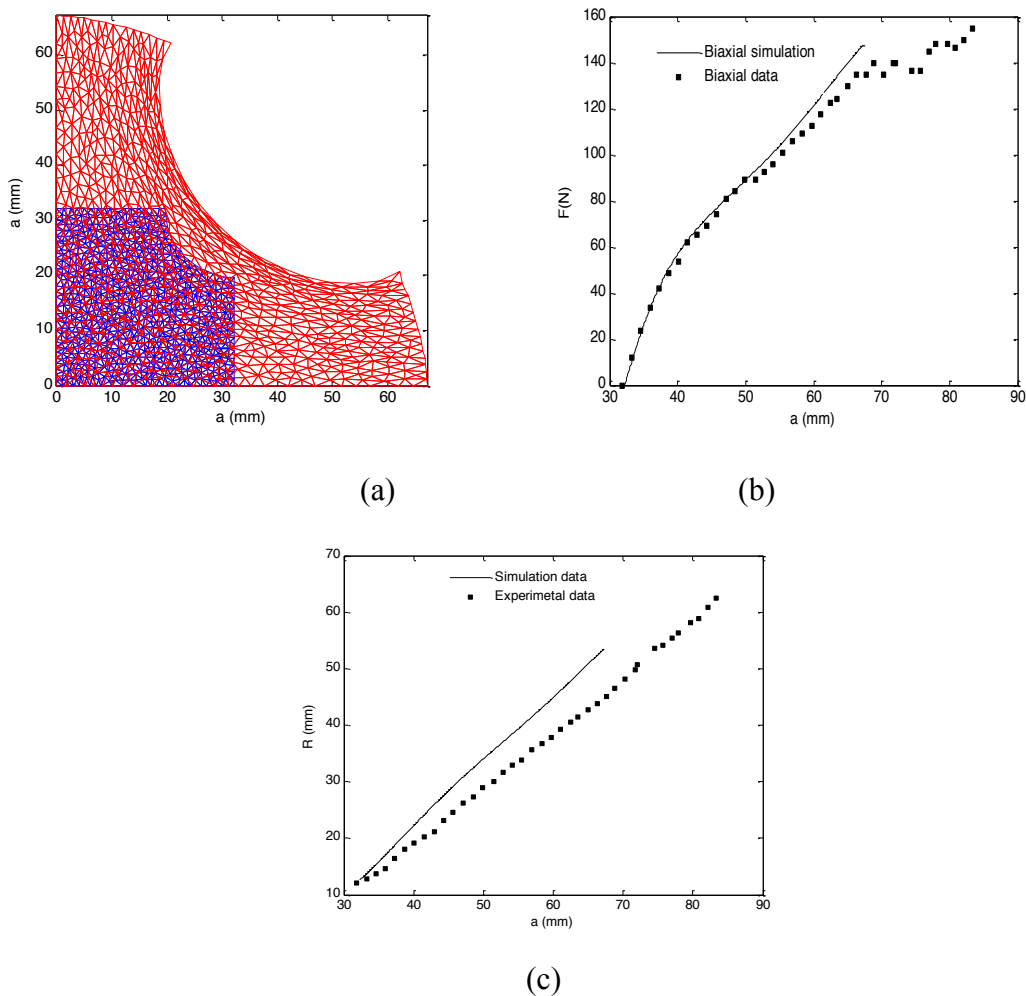


Figure 4.6 a- Simulations numériques de l'essai équi-biaxiale avec des conditions aux limites obtenues avec Correli. b- Comparaison des résultats de la simulation numérique avec les données expérimentales. c- Comparaison du rayon de la simulation numérique celui de l'expérience

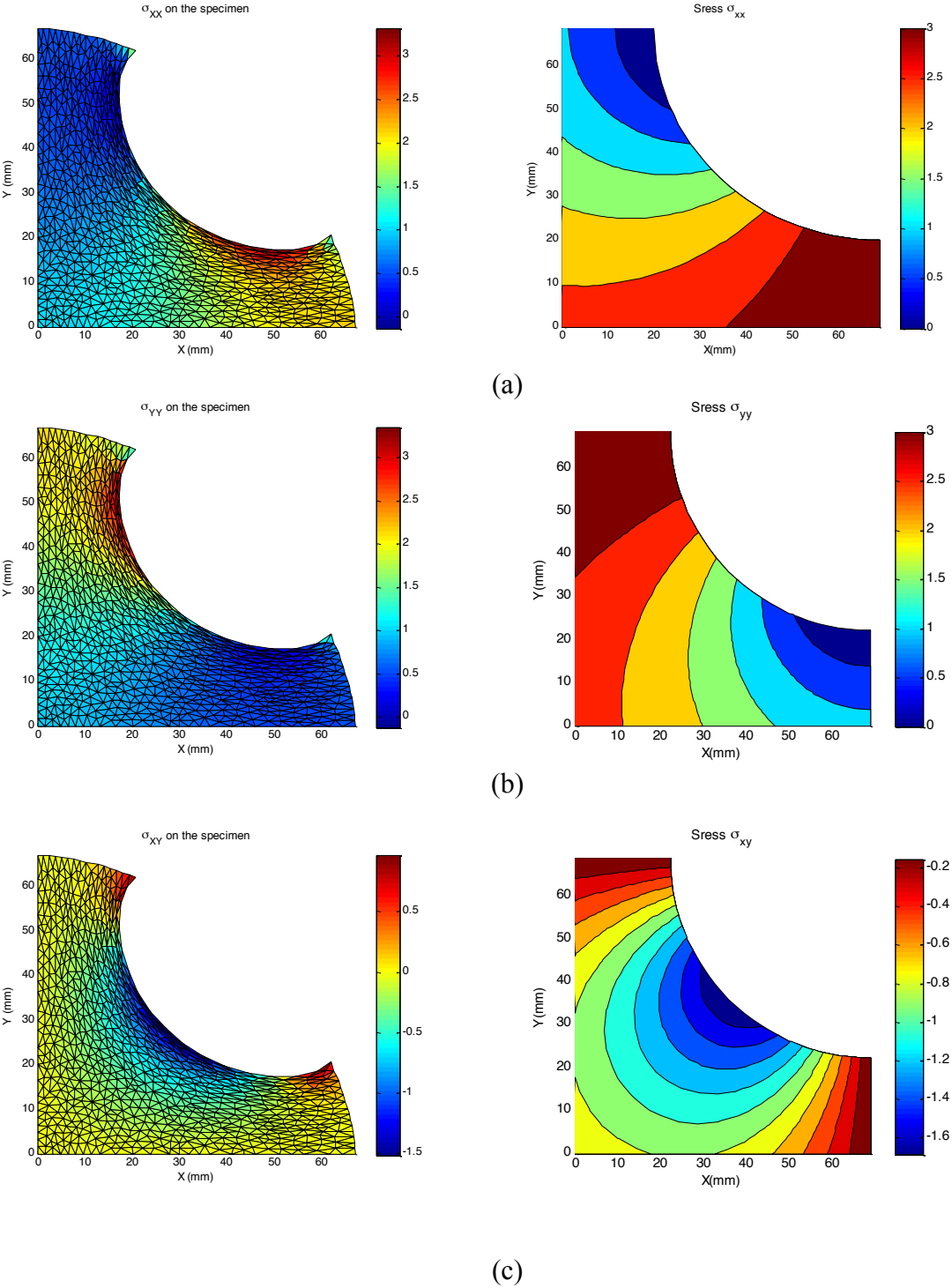


Figure 4.7. Comparaison des composantes du champ de contrainte de Cauchy de la simulation avec les composantes du champ de contraintes approchées

## **Conclusion**

Ce chapitre est une étape cruciale, il nous a permis de valider la méthode d'identification proposée au cours de cette thèse. En effet, à partir des résultats de l'identification de la loi de comportement, nous avons réalisé une simulation numérique de l'essai équi biaxial. On s'est d'abord intéressé à la formulation variationnelle du problème hyperélastique, puis on a appliqué la méthode des éléments finis pour résoudre le système matriciel tout en prenant soin d'introduire des conditions aux limites très proches de celles de l'expérience. Les résultats obtenus par simulation numérique reproduisent le chargement mesuré expérimentalement avec une marge d'erreur inférieure à 1%.



## Conclusions et Perspectives

Ce travail de thèse avait pour objectif principal de développer une méthode d'identification du comportement mécanique des élastomères en grandes déformations à partir de la mesure des champs de déformation hétérogènes. Dans ce contexte, nous avons utilisé un mécanisme conçu spécialement pour conduire des essais hétérogènes équi-biaxiaux sur des éprouvettes cruciformes en caoutchouc. Dans sa première version, parue dans [Brieu \*et al.\*, 2007 \[69\]](#), ces mors agressifs ne permettent pas d'atteindre un taux de déformation suffisant pour tirer avantage de l'hétérogénéité. Certes, ils peuvent empêcher le glissement de l'éprouvette mais provoquent un déchirement de celle-ci. C'est la raison pour laquelle des nouveaux mors ont été conçus pour assurer une bonne fixation des éprouvettes à l'aide d'une colle, caractérisée par sa résistance au cisaillement.

Ensuite, pour extraire les déformations planes qui nous servent de base de données pour l'identification du comportement mécanique du matériau étudié, la mesure de champs de déformation par corrélation d'images a été réalisée. Cette technique, bien adaptée aux grandes déformations, est implantée dans l'environnement Matlab dans un programme nommé CORRELI.

Comme on traite un essai hétérogène, l'état des contraintes observé varie d'une tension biaxiale, dans la zone centrale, à une tension uniaxiale près des bords et plus ou moins une compression plane dans les zones près des mors. Cette hétérogénéité est utilisée pour identifier avec un seul test le comportement du polymère. Pour cela, et afin de ne pas faire intervenir la méthode des éléments finis, il a fallu construire un champ de contrainte représentatif de l'état réel du matériau pour ce type de sollicitation et d'éprouvette. Ce champ de contraintes, composé d'un champ équi-biaxial représentatif de l'état de déformation au

centre de l'éprouvette et d'un champ complémentaire qui assure l'hétérogénéité des déformations, est construit par l'optimisation d'une fonctionnelle qui vérifie les équations d'équilibre, les conditions de symétrie ainsi que les conditions de bord libre. Puis, à partir du champ de contrainte optimisé et du champ de déformations mesuré par la corrélation d'images, on a calculé les deux dérivées du potentiel hyperélastique  $W$  par rapport aux deux 1<sup>er</sup> invariants du tenseur de Cauchy droit, à savoir  $f = \partial W / \partial I_1$  et  $g = \partial W / \partial I_2$ . Les valeurs identifiées présentent les mêmes ordres de grandeurs que celles qui étaient attendues pour le matériau élastomère traité.

Afin de valider les résultats obtenus, nous avons entrepris une simulation par la méthode des éléments finis. Le potentiel identifié est utilisé dans un code éléments finis 2D en grandes déformations, développé dans l'environnement Matlab, pour remonter à la charge appliquée et aux contraintes en vue d'une comparaison avec celle de l'expérience. La confrontation modèle/calcul a permis de vérifier la pertinence du potentiel identifié par la méthode originale utilisée dans ce travail. Les comparaisons sont également probantes.

Enfin, ce travail ouvre naturellement de nombreuses perspectives parmi lesquelles on pourra mentionner :

- Une étude expérimentale plus approfondie portant sur les limites des zones d'états de déformation observées. Ce travail nous permettra d'envisager un lien entre les dimensions caractéristiques de l'éprouvette en croix et le rayon de délimitation de la zone équi-biaxiale.
- Le développement de la méthode pour d'autres chargements multiaxiaux, à savoir chargement traction cisaillement par exemple ou de traction plane sur éprouvette percée. Il convient de noter que la difficulté dans cet essai réside dans la construction d'un champ de contrainte représentatif de l'état de déformation.

# Bibliographie

- [ 1] Ogden R. W.,1984. Non linear elastic deformations. Dover Publications Inc, New York, vulcanizates in finite deformation. J. of Polym. Sci., 8, 903.
- [ 2] Ciarlet P. G., 1986. Elasticité tridimensionnelle. Masson.
- [ 3] Ciarlet P. G., 1988. Mathematical elasticity. North-Holland.
- [ 4] Holzapfel G. A.,2001. Nonlinear solid mechanics. Wiley.
- [ 5] Lemaitre J., Chaboche J. L., 1984. Mécanique des Matériaux Solides. Dunod.
- [ 6] Khayat R. E. et Derdouri A.,1994. Inflation of hyperelastic cylindrical membranes as applied to blow moulding. part I. axisymmetric case”, Int. J. Num. Meth. Eng., 37, 3773–3791.
- [ 7] Yeoh O. H., 1990. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates”, Rubber. Chem. Technol., Vol. 63, No. 5, pp. 792–805.
- [ 8] Verron E., Khayat R., Derdouri A., et Peseux B.,1999. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes”, J. Rheol., 43, 1083–1097.
- [ 9] Joye D. D., Poehlein G. W., et Denson C. D., 1973. A bubble inflation technique for the measurement of viscoelastic properties in equal biaxial extensional flow. II. Trans. Soc. Rheol., 17(2), 287-302.
- [10] Rivlin R. S., Saunders, D. W., 1951. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 243, 251–288.
- [11] James A. G., Green A., Simpson G. M.1975. Strain energy functions of rubber. I. Characterization of gum vulcanizates. J. Appl. Polym. Sci., 19, 2033–2058.
- [12] Kawabata S., Matsuda M., Tei K., et Kawai H., 1981. Experimental survey of the strain energy density function of isoprene rubber vulcanizate. Macromolecules, 14, 154–162.
- [13] Treolar L.R.G., 1975. The physics of rubber elasticity. 3<sup>ème</sup> édition, Oxford University Press

- [14] Arruda E.M., Boyce M.C., 1993. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 41, 389–412.
- [15] Diani J., Brieu M., Gilormini P., 2006. Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastic behavior of a rubberlike material. *International Journal of Solids and Structures*, 43-10, 3044–3056.
- [16] Mooney M. A., 1940. Theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys*, 11, 582–592.
- [17] Rivlin R. S., 1948. Large elastic deformations of isotropic materials, I. Fundamental concepts. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A240, 459–490
- [18] Alexander H., 1971. Tensile instability on initially spherical balloons. *Int. J. Eng. Sci.*, 9, 549–563.
- [19] Diani J., Rey C., 1998. Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Séries II*, 326 :483–488.
- [20] Yeoh O. H., 1990. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 63, 792–805
- [21] Marckmann G., 2004. Contribution à l'étude des élastomères et des membranes soufflées. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- [22] Mauvoisin G., 1993. Développement et mise en œuvre d'une technique de moiré d'ombre quasi-hérodoyne de mesure de relief en vue de la détermination de lois de comportement élastique de matériaux orthotropes. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- [23] Silva G., Le riche R., Molimard J., Vautrin A., 2006. Integrated strategy for identification of plate stiffness components. In *Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France.
- [24] Le Magorou, L., Bos F., Rouger F., 2002. Identification of constitutive laws for woodbased panels by means of an inverse method. *Composite Science and Technology*, 62(4): 591–596.
- [25] Meuwissen M.H.H., Oomens C.W.J., Baaijens F.P.T., Peter R., 1998. Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, 75(1-3):204–211.
- [26] Lecompte D., Sol H., Vantomme J., Habraken A.M., 2006. Comparison between homogeneous and heterogeneous field information for plastic material identification. In *Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France.
- [27] Meijer R., Douven L.F.A., Oomens C.W.J., 1977. Characterization of anisotropic and non-linear behaviour of human skin in-vivo. *Comput. Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 1:13–27.



- [28] Oomens C.W.J., Van Ratingen M.R., Janssen J.D., Kok J.J., Handriks M.A.N. , 1993. A numerical-experimental method for a mechanical characterization of biological materials. *Journal of Biomechanics*, 26(4/5):617–621.
- [29] Genovese K., Lamberti L.; Pappalettere C., 2006. Mechanical characterisation of hyperelastic materials with fringe projection and optimisation techniques. *Optics and Lasers in Engineering*, 44:423–442.
- [30] Giton M., Caro-bretelle A.S. et Ienny P., 2006. Hyper-elastic behaviour identification by a forward problem resolution : application to a tear test of a silicone-rubber. *Strain*, 42:291–297.
- [31] Ladevèze P., Leguillon D., 1983. Error estimates procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 20:485–509.
- [32] Bonnet M., Constantinescu A., 2005: Inverse problems in elasticity. *Inverse problems*, 21(2):R1–R50.
- [33] Bonnet M., Bui H.D., Constantinescu A., 2003. Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité : Variational principles and exploitation of field measurements in elasticity. *Mécanique et Industrie*, 4(6):687–697.
- [34] Deraemaeker A., Ladevèze P., Leconte P., 2002. Reduced basis for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Compt. Methods. Appl. Mech. Eng.*, 191:2427–2444.
- [35] Ladevèze P., Reynier M., Nedjar D., 1993. Parametric correction of finite element models using modal tests. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 91–100.
- [36] Constantinescu A., 1995. On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, 1:293–315.
- [37] Geymonat G., Hild F., Pagano S., 2002. Identification of elastic parameters by displacement field measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330:403–408.
- [38] Geymonat G., Pagano S., 2003. Identification of mechanical properties by displacement field measurements : a variational approach. *Meccanica*, 38:535–545.
- [39] Latourte F., Chrysochoos A., Pagano S., Wattrisse B., 2007. Elastoplastic behaviour identification for heterogeneous loadings and materials. *Experimental Mechanics*, 48(4): 435–449.
- [40] Claire D., Hild F., Roux S., 2002. Identification of damage fields using kinematic measurements. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11):729–734.

- [41] Claire D., Hild F., Roux S., 2004. A finite formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 61(2):189–208.
- [42] Amiot F., Hild F., Roger J.P., 2005: Mesure de champs de déplacements pour des mems. In CFM 2005 - XVIIe Congrès français de mécanique, France.
- [43] Amiot F., Hild F., Roger J.P., 2007. Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9):2863–2887.
- [44] Amiot F., Hild F., Roger J.P., 2005. Model and parameter identification using non-contact loading and full-field measurement. In *Proceedings of the SEM Conference on Experimental and Applied Mechanics*, Oregon, USA,.
- [45] Garraud N., Amiot F., Hild F., Roger J.P. 2006. Full-field measurement of microcantilever displacement induced by molecule adsorption- identification of mechanical parameters. In *Photomechanics*, Clermont-Ferrand, France.
- [46] Claire D., Hild F., Roux S., 2003. Identification conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs : Identification of thermal conductivities and elastic properties by field analyses. *Mécanique and Industrie*, 4(6):655–665.
- [47] Ben Abda A., Ben Ameer H. Jaoua M., 1999. Identification of 2D cracks by boundary elastic measurements. *Inverse Problems*, 15:67–77.
- [48] Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D., 1997: Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, Sér. II(324):1431–1438*.
- [49] Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D. 1999: Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15:59–65.
- [50] Ikehata M., 1990.: Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50:1635– 1644.
- [51] Ikehata M., 1993. An inverse problem for the plate in the Love-Kirchhoff theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53:942–970.
- [52] Grédiac M., 1989. Principe des travaux virtuels et identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 309:1–5.
- [53] Grédiac M., Toussaint E., Pierron F., 2002. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2- application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2707–2730.

- [54] Grédiac M., Toussaint E., Pierron F., 2003. Principe de la méthode des champs virtuels avec champs spéciaux : Principle of the virtual fields method with special virtual fields. *Mécanique et Industrie*, 4:679–686.
- [55] Grédiac M., Toussaint E., Pierron F., 2002. Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–principle and definition. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10):2691–2705.
- [56] Avril, S. Grédiac M., Pierron F., 2004. Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6):439–452.
- [57] Grédiac M., Vautrin A. 1990. A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 57:964–968. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.
- [58] Grédiac M. et Paris P.A. Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : theoretical and numerical aspects. *Journal of Sound and Vibration*, 195(3):401–415. Academic Press.
- [59] Grédiac M., Fournier N., Paris P.A., Surrel Y. 1998. Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experiments and results. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5):645–659. Academic Press.
- [60] Giraudeau A., Guo B., Pierron F., 2006. Stiffness and damping identification from fullfield measurements on vibrating plates. *Experimental Mechanics*, 46(6):777–787.
- [61] Grédiac M., Pierron F., Surrel Y., 1999. Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a T-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39(2):142–149.
- [62] Chalal H., 2005. Identification numérique et expérimentale de lois de comportement nonlinéaire de matériaux composite à partir de mesures de champs cinématiques. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Châlons en Champagne, juillet .
- [63] Grédiac M., Pierron F., 2006. Applying the virtual fields method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *International Journal of Plasticity*, 22:602–627.
- [64] Harth T., Schwan S., Lehn J., Kollmann F.G., 2004. Identification of material parameters for inelastic constitutive models: statistical analysis and design of experiments. *International Journal of Plasticity* 20 1403–1440.
- [65] Kuwabara T., Ikeda S., Kuroda K., 1998. Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension. *Journal of Materials Processing Technology*, 80–81, 517–523

- [66] Smits, D. Van Hemelrijck, T.P. Philippidis, A. Cardon. 2006. Design of a cruciform specimen for biaxial testing of fibre reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, 66, 964–975.
- [67] Bonet, J. and Wood, R. D., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, New York,.
- [68] Ferron, G., Makinde, A., 1988. Design and development of a biaxial strength testing device. *Journal of Testing and Evaluation*, 16, 253-256.
- [69] Brieu M., Diani J., Bhatnagar N., 2007. A New Biaxial Tension Test Fixture for Uniaxial Testing Machine - A Validation for Hyperelastic Behavior of Rubber-like Materials. *Journal of Testing and Evaluation*, Vol. 35, No. 4
- [70] Peters W. H. and Ranson W. F., 1982. Digital imaging techniques in experimental stress analysis. *Optical Engineering*, 21 (3), 427-432.
- [71] Sutton M. A., Wolters W. J., Peters W. H., Ranson W. F. and McNeill S. R., 1983. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1 (3), 133-139.
- [72] Sutton M. A., Cheng M., McNeill S. R., Chao Y. J. and Peters W. H., 1986. Application of an optimized digital image correlation method to planar deformation analysis. *Image and Vision Computing*, 4 (3), 143-150.
- [73] Sutton M. A., McNeill S. R., Jang J. and Babai M., 1988. Effects of subpixel image restoration on digital correlation error estimates. *Optical Engineering*, 27 (10), 870-877.
- [74] Chu T. C., Ranson W. F., Sutton M. A. and Peters W. H., 1985. Applications of digital image correlation techniques to experimental mechanics. *Experimental Mechanics*, 25 (3), 232
- [75] Chen D. J., Chiang F. P., Tan Y. S. and Don H. S., 1993. Digital speckle displacement measurement using a complex spectrum method. *Applied optics*, 32 (11), 1839-1849.
- [76] Hild F., Périé J.-N. and Coret M., 1999. Mesure de champs de déplacements 2D par intercorrélation d'images : CORRELI2D, Internal report, 230, December LMT –Cachan.
- [77] Hild F., 2002. CORRELI<sup>LMT</sup> : A software for displacement field measurements by digital image correlation, Internal report, 254, January LMT-Cachan.
- [78] G'sell C., Coupard A., 1994. *Génie Mécanique des caoutchoucs et des élastomères thermoplastiques*. Appolor, Nancy.
- [79] Rivlin R. S., 1948. Large elastic deformations of isotropic materials, IV. Further developments in the general theory. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A241, 379–397.

- [86] Ahrens, H., Dinkler, D., 1996. FEM I/II", Scripte zur Vorlesung an der TU Braunschweig, Braunschweig .
- [87] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. The Finite Element Method. (Vol. 1 and 2). Butterworth Heinemann, London.
- [88] Wriggers, P., 2001. Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer Verlag, Berlin
- [89] Holzapfel G. A., 2000. Nolinear Solid Mechanics : A Continuum Approach for Engineering. Wiley, New York.
- [90] De Borst, R. Van den Bogert, P.A.J. Zeilmaier, J., 1988. Modelling and Analysis of Rubberlike Materials. Heron. 33(1)-57
- [91] Papoulia K. D., 1999. Mixed and selective reduced integration procedures in large strain hyperelastic analysis of nearly incompressible solids. Computational Mechanics, 23, 63-74
- [92] Crisfield, M. A., 1991. Non-linear finite element analysis of solids and structures, essentials (Vol. 1). JohnWiley & Sons.
- [93] Peric D., Vaz M., Owen D.R.J., 1999. On adaptative strategies for large deformation of elastoplastic solids at finite strains : computational issues and industrial application. Computational Methods Applied to Mechanics and Engeenering, 176 :279–312.
- [94] Chevalier, L., Marco, Y., 2002. Tools for Multiaxial Validation of Behavior laws Chosen for Modeling Hyper Elasticity of Rubber-Like Materials, Polymer Eng. Sci., 42, (2), 280- 298.
- [80] Mark, J.E., Lal., J., 1982. Elastomers and rubber elasticity. American Chernal Society, Washington, D.C.
- [81] Gent A.N., Thomas A.G., 1958. Forms for the Stored Energy Function for Vulcanized Rubber. J. Polymer Sci., 28, 625-628.
- [82] Hart-Smith L.S., 1966. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. Zanger Math. Phys., 17, 608.
- [83] Alexander, H., 1968. A constitutive relation for rubber-like materials. Int. J. of Eng. Sci. 6, 549-563
- [84] Drucker D.C. A., 1959. Definition of stable inelastic material. Journal of Applied Mechanics, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 26, 101–106.
- [85] Promma, N., Raka, B., Grédiac, M., Toussaint, E., Le Cam J.-B., Balandraud, X., Hild F., 2009. Application of the virtual fields method to mechanical characterization of elastomeric materials, International Journal of Solids and Structures. 46, 698–715.
- [95] Diani, J., Rey, C., 1999. New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. Eur. J. Mech. A/Solids 18, 1027–1043.

- [96] Amiot, F., Hild, F., Roger, J-P., 2007. Identification of elastic property and loading fields from full-field displacement measurements, *International Journal of Solids and Structures* 44, 2863–2887
- [97] Meissner, J., 1987. Polymer melt elongation-methods, results, and recent developments *Polym Eng. Sci.*, **27**,537-546.
- [98] Chevalier, L., Calloch, S., Hild, F., Marco, Y., 2001. Digital image correlation used to Analyze the Multiaxial Behavior of Rubber-like Materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* 20 (2), 169–187.
- [99] Mahnken,R., Stein,E., 1996. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer methods in applied mechanics engineering*. Vol.136, 225-258.
- [100] Holst, G., 1998. *CCD arrays, cameras and displays*. SPIE Engineering press, Washigton DC.
- [101] Gilles P., Michel B. 2008. *Matériaux caoutchouteux : Morphologies, formulations, adhérence, glissance et usure*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes,