

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse (INSA de Toulouse)

---

**Présentée et soutenue par :**

**Emilie PEYNAUD**

le vendredi 21 juin 2013

**Titre :**

Rayonnement sonore dans un écoulement subsonique complexe en régime harmonique : analyse et simulation numérique du couplage entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques

---

**École doctorale et discipline ou spécialité :**

ED MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques appliquées

**Unité de recherche :**

CERFACS, Toulouse

**Directeur(s) de Thèse :**

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia

**Jury :**

Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, directrice de thèse

Bruno Després, examinateur

Stéphane Lanteri, rapporteur

Grégory Lielens, examinateur

Denis Matignon, examinateur

Franck Nicoud, rapporteur

Sébastien Pernet, co-directeur

Emmanuel Perrey-Debain, examinateur



Institut National des Sciences Appliquées (INSA Toulouse)  
135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4.

École doctorale Mathématiques Informatique Télécommunications (ED MITT 475)  
Université Toulouse III - Paul Sabatier, Bâtiment 1R1 - RDC, 31062 Toulouse Cedex 9.

Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique (CERFACS)  
42 Avenue Gaspard Coriolis, 31057 Toulouse Cedex 01.



# Remerciements

Je voudrais d'abord remercier Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia pour avoir encadré ce projet de thèse et pour avoir poursuivi cet encadrement de qualité avec rigueur et bienveillance jusqu'à son aboutissement. Je remercie de même Sébastien Pernet qui a également encadré cette thèse et qui a largement contribué à la réalisation de ces travaux. Je lui suis reconnaissante pour les compétences en analyse numérique qu'il a su me transmettre.

J'adresse mes remerciements à Stéphane Lanteri et Franck Nicoud qui se sont associés à mon travail en rédigeant un rapport sur ce mémoire. Mes remerciements vont également à Bruno Després, Grégory Lielens, Denis Matignon et Emmanuel Perrey-Debain qui ont participé à mon jury de thèse et qui ont manifesté, par leurs questions, un vif intérêt pour mes travaux.

Merci à Nolwenn Balin, Guillaume Sylvand et Jean-Yves Suratteau qui m'ont fait l'honneur d'assister à ma soutenance.

Je remercie Jean-François Mercier qui a pris part à cette thèse en étant porteur du projet ANR AEROSON auquel ma thèse fait partie. Je le remercie pour sa relecture précise du manuscrit et ses éclaircissements sur la propagation acoustique en écoulement.

Je tiens ensuite à exprimer toute ma gratitude envers Florence Millot qui m'a encouragée à faire cette thèse et qui m'a ensuite accompagnée au quotidien au CERFACS pendant les années qui ont suivies. Je la remercie pour son soutien autant sur les aspects numériques qu'administratifs et humains.

Je veux aussi remercier les équipes EMA, puis Algo-EMA du CERFACS qui m'ont accueillie pendant ces années de thèse. Je salue les stagiaires, doctorants, post-doctorants et permanents que j'ai côtoyés au CERFACS. Je les remercie pour leur sympathie, avec une mention spéciale pour les filles de la partie Algo et le week-end à Bruxelles. Thank you for sharing your support, inspiration and friendship.

Je remercie chaleureusement mes proches, parents et amis qui m'ont fait le plaisir de venir m'encourager et m'écouter le jour de ma soutenance. Ma reconnaissance va tout particulièrement à mes parents qui me soutiennent depuis toujours.

Pour finir, je remercie l'ANR AEROSON et le CERFACS qui ont financé et ont permis la réalisation de ma thèse dans de bonnes conditions.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>Liste des symboles et notations</b>	<b>17</b>
<b>I L'équation de transport en régime harmonique</b>	<b>19</b>
<b>1 Le problème de transport continu</b>	<b>21</b>
1.1 Le problème de convection générique . . . . .	21
1.1.1 Position du problème . . . . .	21
1.1.2 Analyse de cas simples . . . . .	22
1.2 Quelques outils classiques pour l'analyse du problème continu . . . . .	26
1.2.1 Cadre fonctionnel . . . . .	26
1.2.2 La condition inf-sup pour l'équation d'advection-réaction . . . . .	30
1.3 Etude du problème de transport harmonique . . . . .	31
1.3.1 Nouvelle hypothèse : écoulement $\Omega$ -remplissant . . . . .	32
1.3.2 L'approche par lignes de courant . . . . .	34
1.3.3 Obtention d'une condition inf-sup : approche variationnelle . . . . .	37
<b>2 Schémas numériques pour le transport harmonique</b>	<b>41</b>
2.1 La méthode de Galerkin classique . . . . .	42
2.1.1 La formulation classique . . . . .	42
2.1.2 Exemples numériques . . . . .	42
2.1.3 Condition inf-sup en norme du graphe : stabilité non uniforme . . . . .	43
2.1.4 Analyse en norme dite énergie : stabilité uniforme mais estimation d'erreur sous-optimale . . . . .	47
2.2 La formulation de Petrov-Galerkin . . . . .	48
2.2.1 Formulation générale de l'approche Petrov-Galerkin . . . . .	49
2.2.2 Formulation LS : stabilisation indépendante du pas de maillage . . . . .	49
2.2.3 Formulation SUPG : paramètre de stabilisation en $\mathcal{O}(h)$ . . . . .	51
2.3 Méthodes de Galerkin discontinues . . . . .	53
2.3.1 Références bibliographiques . . . . .	53
2.3.2 La formulation naturelle : schéma centré . . . . .	54
2.3.3 La stabilisation : formulation décentrée (upwind) . . . . .	58
2.4 Analyse de dispersion et dissipation . . . . .	58
2.4.1 Analogie avec une onde : relation de dispersion . . . . .	59
2.4.2 Erreurs de dispersion et de dissipation . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Analyse de l'approximation de GD décentrée</b>	<b>67</b>
3.1	L'approximation GD upwind . . . . .	67
3.2	Estimations de base . . . . .	69
3.3	Stabilité et estimation d'erreur pour l'advection-réaction . . . . .	73
3.3.1	Stabilité . . . . .	73
3.3.2	Estimation d'erreur . . . . .	75
3.4	Stabilité et estimation d'erreur pour le transport harmonique . . . . .	76
3.4.1	Définition d'un projecteur sur $W_h^k$ . . . . .	76
3.4.2	Le résultat de stabilité . . . . .	78
3.4.3	Estimation d'erreur . . . . .	80
3.5	Extension à des écoulements non $\Omega$ -remplissants . . . . .	80
3.5.1	Écoulement recirculant : exemple de la couronne . . . . .	80
3.5.2	Les points d'arrêt : l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	82
<b>II</b>	<b>Application à la résolution de l'équation de Galbrun</b>	<b>87</b>
<b>4</b>	<b>Équation de Galbrun et éléments finis : historique d'une reformulation</b>	<b>89</b>
4.1	L'équation de Galbrun . . . . .	89
4.1.1	Les équations linéarisées de l'aéroacoustique . . . . .	89
4.1.2	Le cas de l'écoulement uniforme . . . . .	90
4.1.3	Le cas de l'écoulement cisailé . . . . .	91
4.1.4	Les avantages comparés des équations de Galbrun et d'Euler . . . . .	91
4.2	La formulation augmentée en écoulement uniforme . . . . .	92
4.2.1	Le processus d'augmentation . . . . .	92
4.2.2	Relation entre augmentation et phénomènes hydrodynamiques . . . . .	94
4.3	La formulation augmentée en écoulement quelconque . . . . .	95
4.4	Le modèle augmenté avec couches PML . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Analyse et discrétisation du modèle couplé</b>	<b>99</b>
5.1	Position du problème . . . . .	99
5.1.1	Cas 1 : la perturbation géométrique . . . . .	99
5.1.2	Cas 2 : le jet analytique . . . . .	100
5.1.3	Les équations du problème en domaine infini . . . . .	100
5.1.4	Les couches PML . . . . .	102
5.2	Caractère bien posé du problème couplé continu . . . . .	103
5.2.1	Le problème en $\psi$ (ou à $\mathbf{u}$ fixé) . . . . .	105
5.2.2	Le problème en $\mathbf{u}$ (ou à $\psi$ fixé) . . . . .	109
5.2.3	Le problème couplé en $(\mathbf{u}, \psi)$ . . . . .	110
5.3	Analyse numérique de la méthode d'approximation . . . . .	112
5.3.1	Schéma d'approximation du problème acoustique . . . . .	112
5.3.2	Caractère bien posé et estimation d'erreur . . . . .	113
5.4	Résultats numériques . . . . .	115
5.4.1	Rayonnement acoustique dans le cas 1 . . . . .	115
5.4.2	Rayonnement acoustique dans le cas 2 . . . . .	117
<b>6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>123</b>
6.1	Les cas tests de validation . . . . .	124
6.1.1	Cas 1 : l'écoulement potentiel au dessus d'une surface rigide . . . . .	124
6.1.2	Cas 2 : l'écoulement rotationnel du jet analytique . . . . .	124
6.1.3	Les sources acoustiques et sources tourbillonnaires . . . . .	126
6.2	Validations de la méthode en écoulement potentiel . . . . .	126

6.2.1	Cas de l'écoulement uniforme . . . . .	126
6.2.2	La formulation en potentiel . . . . .	127
6.2.3	Comparaisons avec la formulation de Galbrun . . . . .	130
6.3	Validations en écoulement rotationnel . . . . .	131
6.3.1	Source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel . . . . .	131
6.3.2	Rayonnement en écoulement rotationnel . . . . .	134
6.4	Rayonnement en écoulement rotationnel : pourrait-on se contenter d'un calcul po- tentiel ? . . . . .	135
6.5	Extension à des configurations plus complexes . . . . .	137
6.5.1	Validité dans le cas d'instabilités . . . . .	138
6.5.2	Écoulements numériques . . . . .	142
6.5.3	Écoulements non $\Omega$ -remplissants . . . . .	143
6.5.4	Vers des configurations 3D . . . . .	144
<b>Conclusion</b>		<b>147</b>
<b>A Jacobien du changement de variable</b>		<b>149</b>
<b>B Identité sur la somme des intégrations sur les bords des éléments de maillage pour la discrétisation DG</b>		<b>151</b>
<b>C Résultats sur l'interpolation par des éléments finis</b>		<b>153</b>
C.1	Erreur d'interpolation locale . . . . .	153
C.2	Inégalité inverse locale . . . . .	153
C.3	Inégalité de trace locale . . . . .	154
<b>D Écoulement potentiel 2D autour d'un disque</b>		<b>155</b>
<b>E Évaluation numérique de la condition inf-sup associée à une méthode de dis- crétisation par éléments finis</b>		<b>159</b>
E.1	Motivations . . . . .	159
E.2	Écriture matricielle de la condition inf-sup . . . . .	160
E.3	Déterminer la condition inf-sup : résolution d'un problème aux valeurs propres . . . . .	160
<b>F Relation de dispersion des schémas numériques pour le transport harmonique</b>		<b>163</b>
F.1	Schémas de Galerkin continus . . . . .	163
F.1.1	Le schéma de Galerkin classique en domaine infini . . . . .	163
F.1.2	Le schéma des moindres carrés en domaine infini . . . . .	164
F.1.3	Les schémas SUPG en domaine infini . . . . .	164
F.1.4	Relations de dispersion des schémas de Galerkin continus $\mathbb{P}^1$ . . . . .	165
F.2	Les schémas de Galerkin discontinus . . . . .	166
F.2.1	Ecriture des schémas DG en domaine infini . . . . .	166
F.2.2	Relation de dispersion numérique des schémas DG $\mathbb{P}^1$ . . . . .	167
<b>G L'inconnue déplacement Lagrangien</b>		<b>169</b>
G.1	Descriptions eulerienne et lagrangienne . . . . .	169
G.2	Description de petites perturbations du fluide . . . . .	170
<b>Bibliographie</b>		<b>173</b>



# Introduction

**La densification du trafic** aérien a contraint les gouvernements à renforcer les normes de certifications acoustiques et, par conséquent, oblige les industriels à s'investir massivement en faveur de la réduction des nuisances sonores. Ces préoccupations environnementales concernent par exemple les abords des infrastructures de transport telles que les aéroports ou les échangeurs routiers, et visent en particulier à protéger les riverains du bruit occasionné par les véhicules. L'acoustique s'intéresse à ces phénomènes physiques et a pour objectifs principaux l'identification des sources de bruit, les mécanismes de la propagation du son ainsi que l'impact sur le milieu environnant. De nos jours, la simulation numérique est un des outils essentiels mis à la disposition des physiciens et ingénieurs pour réaliser ces objectifs. Ce type d'outil est par exemple systématiquement utilisé lors de la phase de conception d'un véhicule. Il permet en effet une définition optimisée des caractéristiques du produit ainsi qu'une réduction des coûts de réalisation.

La complexité des phénomènes mis en jeu et des structures à concevoir requiert une amélioration constante des outils existants ainsi que le développement de nouvelles méthodes. La démarche scientifique permettant d'atteindre cet objectif est constituée de deux étapes principales : 1- proposer ou choisir un modèle mathématique permettant de décrire au mieux les phénomènes physiques que l'on désire étudier et 2- mettre en place des méthodes numériques efficaces adaptées à ce modèle. La première étape est cruciale car elle va fixer les limites de ce que l'on va pouvoir modéliser mais a aussi un impact indirect sur le coût de la méthode. En effet, plus le modèle sera riche, plus il conduira généralement à une résolution numérique coûteuse. Par exemple dans le cas qui nous intéresse ici, la propagation du son en écoulement, le système des équations de Navier-Stokes est l'un des modèles les plus riches en terme de description des phénomènes. Néanmoins, ce type d'approche n'est pas forcément adapté aux problèmes de propagation acoustique. Il y a en effet une grande disparité d'échelles entre les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques tous deux contenus dans le modèle de Navier-Stokes : l'intensité acoustique est de plusieurs ordres inférieure à celle de l'hydrodynamique. En particulier, les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations ne permettent pas de capter correctement l'acoustique à un coût de calcul raisonnable. Ceci est d'autant plus vrai, lorsque l'on veut simuler la propagation du son sur de longues distances car dans ce cas, le comportement généralement dissipatif des schémas numériques en CFD (computational fluid dynamics) devient rédhibitoire. Il est donc nécessaire de développer des modèles et des méthodes numériques spécifiques aux problèmes de propagation acoustique.

En acoustique linéaire, les phénomènes sont considérés comme de faibles perturbations d'un écoulement moyen. En effet, la propagation d'une onde acoustique dans l'air se traduit par de petites variations autour d'un état moyen des quantités physiques décrivant le milieu. Il s'agit par exemple de faibles variations de pression que perçoit l'oreille humaine (dont l'amplitude est très faible par rapport à la pression de portance ou de propulsion). Ainsi, les modèles de propagation acoustique usuels sont obtenus par linéarisation des équations de la mécanique des fluides et considèrent l'écoulement comme une donnée du problème. La complexité des systèmes d'équations obtenus dépend des hypothèses faites sur l'écoulement. En particulier, la prise en compte d'écoulements généraux complexifie les modèles car elle s'accompagne de couplages qui ont lieu entre l'acoustique et les phénomènes hydrodynamiques [5] et qui se traduisent par des systèmes d'équations vectorielles. Les équations d'Euler linéarisées forment, dans ce cadre, le

système de référence. Cependant il existe d'autres approches basées par exemple sur les équations de Navier-Stokes linéarisées, ou encore sur l'équation de Galbrun [71] qui permet aussi de prendre en compte les effets de l'écoulement moyen sur la propagation acoustique.

Les problèmes de propagation acoustique ont généralement lieu en espace infini. Le choix de dispositif pour borner le domaine de calcul constitue souvent un obstacle intervenant dans la mise en place des modèles. Il s'agit d'une problématique très spécifique aux problèmes de propagation. Comme l'amplitude du son est peu atténuée sur la distance de propagation, le signal qui arrive sur les bords du domaine de calcul est non nul (contrairement aux problèmes d'aéronautique par exemple). Il faut par conséquent imposer des conditions de bords dites transparentes, c'est-à-dire des conditions qui font sortir l'onde du domaine sans qu'il y ait de réflexions parasites venant modifier la solution à l'intérieur. L'écriture de ces conditions peut devenir très vite complexe et même rendre impossible l'utilisation de certains systèmes d'équations dans des cas d'écoulements compliqués.

De nombreuses études concernent le bruit de jet généré par l'écoulement de fluide qui est provoqué par la poussée des turboréacteurs d'avion. Elles font l'objet de recherches dans le domaine de l'aéroacoustique numérique (CAA). Ce bruit se caractérise par un spectre de large bande (une large gamme de fréquence intervient). Il convient alors de résoudre les équations régissant la propagation acoustique en régime transitoire. En revanche, lorsqu'il est possible de décomposer le son en harmoniques de Fourier, il est intéressant d'analyser la propagation en régime fréquentiel. Par exemple, des mesures montrent que les principales nuisances sonores causées par les turboréacteurs d'avion, appelées bruit de raies (ou bruit tonal), se caractérisent par des spectres ayant des pics d'amplitude à des fréquences isolées correspondant aux harmoniques de la fréquence de passage des aubes. La détermination du rayonnement acoustique pour ces fréquences spécifiques représente de toute évidence un enjeu pour la réduction des nuisances sonores. De plus, un des dispositifs mis en place pour atténuer le bruit de raies consiste à recouvrir les parois des nacelles de matériaux absorbants. Ceux-ci se caractérisent, d'un point de vue de la modélisation, par une impédance complexe qui est fonction de la fréquence des perturbations. L'écriture de ces conditions aux limites est alors facilitée par le passage en régime harmonique.

Les méthodes numériques développées pour l'acoustique dépendent largement du modèle physique considéré. Rappelons que pour la propagation de bruit de large bande spectrale, les équations d'Euler linéarisées sont résolues en régime temporel. La méthode de choix proposée dans [80] et largement exploitée par la suite [7, 78] consiste à utiliser des schémas aux différences finies d'ordre élevé de type DRP (dispersion relation preserving). Ces schémas ont spécialement été conçus pour préserver une erreur de dispersion faible sur tout le domaine de propagation. En effet, l'une des spécificités des problèmes de propagation acoustique est que les domaines mesurent plusieurs longueurs d'onde. Des approches sur maillages non structurés ont également été développées. Par exemple une technique de type Galerkin discontinue d'ordre élevé est proposée dans [16, 41]. Cependant, pour résoudre ce système en temporel, il persiste plusieurs difficultés propres à la propagation d'onde en écoulement. Citons par exemple l'écriture des conditions de bords transparents [39, 53] et de bords impédants et les problèmes d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Ces instabilités apparaissent pour des écoulements parallèles cisailés à fort gradient de vitesse et correspondent à des modes dont l'amplitude croît en temps de façon exponentielle et qui peuvent gêner la convergence des schémas [1]. Les solutions adaptées en régime temporel consistent alors à négliger des termes de gradient de l'écoulement [85, 81] ou à ajouter des termes non linéaires [20]. La résolution du problème en régime harmonique pourrait être aussi vue comme un remède possible à ces principaux inconvénients [5].

Pour la propagation en régime fréquentiel, des approches basées sur la résolution du système d'Euler linéarisé ont été envisagées mais les références disponibles sont beaucoup plus rares qu'en régime temporel. Par exemple [68] adapte au cas fréquentiel des schémas aux différences finies de type DRP. Sur maillage non structuré, l'approximation de Galerkin classique n'étant pas stable [4], il convient d'utiliser des méthodes stabilisées de type SUPG ou des approches de Galerkin

discontinues [57, 72, 47]. Notons cependant que les équations résolues dans ces travaux ont une forme simplifiée : des termes de gradient de l'écoulement ont été négligés afin de limiter les coûts de calcul. Mais surtout, le traitement de domaines infinis est toujours sujet à des difficultés car la présence d'un écoulement non uniforme (et notamment l'existence de modes de vorticité et d'entropie) dissymétrise le problème : les conditions doivent savoir gérer différemment les bords amont et les bords aval, ce qui rend l'écriture de condition de rayonnement complexe.

Notons aussi que la plupart des outils numériques commerciaux traitant le régime harmonique, se place dans des cas d'écoulements simples. Ils supposent que la vitesse de l'écoulement porteur est à rotationnel nul (on parle d'écoulement irrotationnel ou potentiel). On peut alors montrer que les équations d'Euler linéarisées se simplifient en une unique équation scalaire portant sur le potentiel de vitesse. Il s'agit de l'équation de Helmholtz convectée. Un avantage important concerne les conditions de rayonnement qui peuvent être déterminées de façon explicite si l'écoulement est uniforme loin de la source. Dans ce cas, l'équation se ramène par transformation de Lorentz à l'équation de Helmholtz standard et un couplage avec une méthode intégrale permet alors de faire rayonner la solution à l'infini [42]. L'analyse de cette approche est bien maîtrisée [35] mais son domaine de validité est très restreint. En particulier, elle ne s'applique qu'aux situations où les phénomènes hydrodynamiques sont absents.

Le modèle de Galbrun [49] apparaît comme une alternative intéressante au système d'Euler linéarisé et comme une approche améliorée par rapport à celle de Helmholtz convectée. Il s'agit d'un modèle vectoriel permettant également la prise en compte du couplage avec l'hydrodynamique. Obtenu par un processus de linéarisation décrit dans [71] et [63], cette équation vectorielle porte uniquement sur la perturbation du déplacement qui est une inconnue lagrangienne que l'on observe selon un point de vue eulérien (c'est-à-dire à un instant donné et en un point de l'écoulement porteur non perturbé), on parle de représentation mixte Euler-Lagrange. Cette équation aux dérivées partielles du second ordre présente des similarités avec les équations des ondes traitées en électromagnétisme et se prête bien à l'écriture d'une formulation variationnelle. Cependant, il est maintenant connu qu'en régime fréquentiel, une discrétisation par éléments finis de Lagrange est instable [70]. Deux stratégies de résolution alternatives ont été proposées.

Une première alternative exposée dans [84] consiste en une formulation mixte en pression et déplacement approchée par une méthode d'éléments finis. En absence d'écoulement, une condition inf-sup est démontrée et assure ainsi la convergence de la méthode mais ce résultat ne peut pas être étendu dans le cas d'un écoulement non nul. Une étude de stabilité et de dispersion du schéma a cependant été faite dans [48] et ce modèle a par exemple été exploité pour des applications dans des guides à parois traitées avec écoulement cisailé [67]. En domaine infini par contre, cette formulation rencontre des difficultés pour la mise en place de condition de radiation pour borner le domaine de calcul. En particulier, l'usage de couches PML (perfectly matched layer) conduit à des solutions erronées même pour un écoulement uniforme [12].

Une autre manière de résoudre l'équation de Galbrun proposée dans [23] se base sur une méthode de régularisation inspirée de l' lectromagn tisme. Elle consiste à ajouter à l'équation un terme qui ne change pas la valeur de la solution mais qui rend possible l'utilisation d'éléments finis nodaux pour la détermination du déplacement. Cette nouvelle écriture dite formulation augmentée fait intervenir une inconnue supplémentaire : le rotationnel du déplacement lagrangien appelé, par abus de langage, inconnue hydrodynamique ou vorticité. La formulation de Galbrun augmentée a fait l'objet de deux thèses successives dans des cas d'écoulement simplifiés pour lesquels l'inconnue vorticité peut être déterminée soit de façon exacte, soit par un calcul préalable. La première thèse [63] pose le cadre théorique permettant de prouver la stabilité de l'approximation par éléments finis nodaux et montre un résultat d'existence et d'unicité dans le cas d'un écoulement uniforme dans un guide. Le domaine de calcul est borné par des couches PML et la convergence exponentielle de la méthode, en fonction de l'épaisseur des couches, est démontrée. La deuxième thèse [40] étend cette étude au cas d'écoulement parallèle cisailé dans un guide d'onde. Une formule de convolution le long des lignes de courant relie alors l'inconnue vorticité au déplacement

[22, 21]. Cette formule a l'inconvénient de devenir fortement oscillante lorsque l'écoulement est lent. Dans ce cas, un modèle approché a aussi été proposé, qui consiste à remplacer l'expression exacte de la vorticité par une formule approchée locale : il s'agit de l'approximation dite faible Mach [24].

Le succès des travaux que nous venons de mentionner invite à s'investir plus largement dans la compréhension et l'analyse numérique du modèle de Galbrun augmenté. Notre objectif est d'étendre ces travaux aux cas d'écoulements plus généraux, pour lesquels il n'est plus possible d'obtenir l'inconnue hydrodynamique par une formule simple. Dans le cas général, il a été établi dans [24] que la vorticité satisfait une relation appelée équation hydrodynamique, qui est le carré d'une équation de transport avec un terme source faisant intervenir le déplacement lagrangien. La technique de régularisation conduit alors à un système couplé de deux équations à deux inconnues. La difficulté pour résoudre ce système vient du fait que les deux équations sont de natures très différentes : une équation des ondes d'une part et une équation de transport d'autre part.

**L'objectif** de cette thèse est de mettre en place une méthode numérique basée sur la résolution du système de Galbrun augmenté pour traiter la propagation acoustique en régime harmonique et dans le cadre de géométries complexes. Il est donc nécessaire de privilégier une approche utilisant des maillages non structurés. De plus, en géométrie complexe, l'écoulement ne peut pas être supposé simple. L'outil numérique doit donc être capable à la fois de déterminer l'inconnue vorticité de manière précise et aussi de traiter la résolution du problème de Galbrun augmenté comme un système couplé d'inconnues déplacement et vorticité. La démarche adoptée se décompose en deux étapes qui font chacune l'objet d'une partie de ce manuscrit. Dans un premier temps, nous déterminons une méthode adaptée à la résolution de l'équation hydrodynamique indépendamment du problème acoustique couplé. Dans un second temps, nous résolvons le problème couplé de propagation acoustique en espace infini dans un domaine borné par des couches PML.

Le manuscrit comporte six chapitres de styles volontairement assez différents. Ainsi, les résultats les plus techniques sont rassemblés dans les chapitres trois et cinq, en partie dans le premier chapitre. Ils s'adressent aux lecteurs intéressés par les détails des démonstrations mathématiques. Les chapitres deux et quatre ont quant à eux pour objectif de présenter aussi simplement que possible les idées principales du travail en les positionnant par rapport à l'état de l'art. Nous espérons qu'ils sont de ce fait accessibles à des lecteurs non mathématiciens.

**La première partie** est dédiée à l'étude du problème de transport en régime harmonique (qui est la brique de base pour la résolution de l'équation hydrodynamique). L'objectif est de trouver une méthode numérique stable pour résoudre ce problème sur maillage non structuré. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles (EDP) d'ordre un à laquelle une condition de Dirichlet est classiquement adjointe et qui décrit le transport d'une quantité physique par un écoulement porteur donné. L'originalité de notre travail est que nous considérons cette équation en régime fréquentiel et non en temps. Il est alors naturel de s'inspirer des nombreuses références bibliographiques qui traitent de l'équation très similaire d'advection-réaction. Mais nous verrons que le cas que nous traitons est plus délicat. En effet, d'une part, les difficultés connues pour l'équation d'advection-réaction sont amplifiées dans le cas de l'équation de transport en régime harmonique, car cette dernière n'est pas dissipative. D'autre part, du point de vue théorique, nous verrons que l'estimation fondamentale de stabilité est plus difficile à établir et requiert des conditions particulières sur l'écoulement (comme l'absence de zones de recirculation par exemple). Cette équation présente à nos yeux un grand intérêt pédagogique car bien que très simple en apparence, elle permet d'aborder de nombreux aspects liés à la résolution des EDP d'ordre un. Enfin, son étude est un préalable à l'étude de tous les modèles d'aéroacoustique prenant en compte les phénomènes hydrodynamiques.

La première partie se décompose en trois chapitres.

Au premier chapitre, nous étudions le problème de transport continu. Il est naturel de consi-

dérer ce problème comme une famille d'équations différentielles ordinaires d'ordre un le long des lignes de courant. Tant que la régularité de l'écoulement porteur nous permet de définir les lignes de courants alors le problème de transport est bien posé. Cette approche par courbes caractéristiques convient pour montrer un résultat sur le problème continu. Cependant, nous ne voulons pas perdre de vue le problème acoustique général pour lequel les approximations sont basées sur des maillages non-structurés et pour lequel l'écoulement porteur est donné par exemple en chaque point du maillage. Autrement dit, pour la résolution numérique, il n'est pas envisageable de déterminer les lignes caractéristiques. Nous voulons au contraire mettre en place une approximation basée sur les méthodes d'éléments finis. Dans ce cas, il convient d'adopter une approche variationnelle. C'est pour cette raison que nous ne nous limitons pas à l'analyse par courbes caractéristiques. Dans ce cadre, nous établissons également une condition de stabilité de type inf-sup pour le problème continu. Dans le cas du régime harmonique, la démonstration nécessite des manipulations supplémentaires dont le principe sera réinvesti pour l'analyse de l'approximation de Galerkin discontinue proposée au troisième chapitre.

Le deuxième chapitre est dédié au choix d'une méthode numérique stable. Nous explorons les techniques de résolution usuelles afin de soulever les difficultés liées à l'approximation par éléments finis des équations aux dérivées partielles d'ordre un. L'équation d'advection-réaction offre un cadre d'étude simplifié sur lequel nous nous appuyons. Il est bien connu qu'une discrétisation directe des problèmes d'EDP d'ordre un par éléments finis de Lagrange est instable. Nous montrons que les techniques de stabilisation habituelles telles que les méthodes SUPG et moindres carrés sont particulièrement inappropriées à la résolution du problème harmonique car elles conduisent à des schémas fortement dissipatifs. Ce constat nous amène à considérer des méthodes plus sophistiquées de type Galerkin discontinu (GD). Les résultats obtenus ainsi qu'une analyse de dispersion et de dissipation nous permettent de sélectionner la formulation GD upwind.

Au troisième chapitre, nous menons une analyse approfondie de la formulation de Galerkin discontinu décentré (upwind) pour l'approximation du problème de transport. Nous mettons en évidence les points délicats dans le cadre du régime harmonique et nous démontrons des résultats de stabilité et de convergence de la méthode. Notre approche se base sur le choix d'un champ test particulier permettant d'obtenir une condition de stabilité de type inf-sup. Ce résultat constitue un des principaux apports de la thèse.

**La deuxième partie** s'intéresse à la résolution du problème de propagation acoustique en écoulement et en régime harmonique. Le modèle mathématique considéré est un problème couplé comprenant l'équation de Galbrun augmentée et l'équation hydrodynamique de type transport. L'objectif est de mettre en place et d'analyser une méthode numérique permettant de résoudre ce problème couplé dans des configurations générales nécessitant la prise en compte des phénomènes hydrodynamiques. La méthode d'approximation proposée fait suite aux travaux réalisés par le laboratoire POEMS sur le modèle de Galbrun augmenté. Elle consiste à approcher l'équation de Galbrun par des éléments finis de Lagrange. La nouveauté réside dans l'approximation de l'équation hydrodynamique par la méthode de Galerkin discontinue ainsi que dans son couplage avec la résolution de l'équation de Galbrun augmentée. Cette deuxième partie s'appuie donc largement à la fois sur les résultats de la partie I et sur les travaux de l'équipe POEMS. Notre démarche s'articule en trois étapes qui font l'objet des trois derniers chapitres de la thèse :

Le quatrième chapitre fait un bilan sur les travaux antérieurs et offre une vision synthétique sur l'approche de Galbrun augmentée. Il permet d'aborder les aspects essentiels sans entrer dans les détails techniques de la régularisation. Ce chapitre revient également sur le principe des couches PML que nous utilisons pour borner le domaine de calcul.

Le cinquième chapitre traite le problème de propagation de façon précise. Il propose une analyse complète du problème couplé et de sa discrétisation. L'objectif est de prouver le caractère bien posé et la convergence de la méthode d'approximation mixte éléments finis de Lagrange et approche de Galerkin discontinue. Nous définissons un cadre fonctionnel en nous appuyant sur

les résultats de la première partie ainsi que sur les travaux antérieurs sur le modèle de Galbrun augmenté. L'obtention de résultats dans ce cas est délicate car nous ne connaissons pas de théorie générale directement applicable à notre problème couplé (en particulier, le problème n'est pas coercif plus compact). Une manipulation équivalente à une élimination formelle de l'inconnue vorticité permet cependant d'aboutir à un résultat d'existence et d'unicité du problème couplé sous des conditions que nous jugeons aujourd'hui trop restrictives. Ces résultats sont accompagnés d'illustrations numériques.

Le sixième chapitre est entièrement consacré aux simulations numériques. Les cas d'écoulements pour lesquels le chapitre précédent nous assure la convergence de la méthode sont très limités. En outre, la validation numérique apparaît comme un point d'autant plus délicat que nous n'avons pas de solution de référence (analytique ou numérique) à notre disposition en écoulement véritablement complexe (c'est-à-dire un écoulement qui ne soit ni potentiel, ni cisaillé) et sortant du cadre théorique. Toutefois, dans le cas d'écoulements irrotationnels, la comparaison avec les solutions issues d'un code potentiel valide notre approche. Les résultats obtenus montrent que le modèle de Galbrun augmenté sait retrouver la solution de problèmes purement acoustiques (c'est-à-dire dans des configurations potentielles classiques traitées par la plupart des codes commerciaux). Pour les écoulements rotationnels, un indicateur d'erreur a posteriori simple de type résiduel et intrinsèque à la méthode de Galbrun augmentée permet de vérifier la qualité de la solution approchée. Les tests réalisés mettent en évidence les phénomènes hydrodynamiques qui sont selon les cas induits soit par le second membre source, soit par l'écoulement. Nous vérifions aussi que la méthode est robuste y compris dans le cas d'écoulements instables : la discrétisation de l'inconnue hydrodynamique impose au système un sens amont/aval, ce qui permet de sélectionner la vorticité causale et garantit ainsi le bon fonctionnement des couches PML. La validation par comparaison reste cependant difficile parce que les références en écoulements rotationnels et régime harmonique sont rares et aussi parce que la construction de sources équivalentes entre notre modèle (qui est en représentation mixte Euler/Lagrange) et les modèles classiques (en représentation d'Euler) est très complexe en présence d'écoulement quelconque.

Cette thèse, réalisée au CERFACS, a été dirigée par d'Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et Sébastien Pernet. Le travail a été réalisé dans le cadre du projet ANR AEROSON (dont le porteur était Jean-François Mercier), qui portait sur la simulation numérique du rayonnement sonore dans des géométries complexes en présence d'écoulements réalistes.

# Liste des symboles et notations

## Notations propres à la première partie

- $\alpha$  Coefficient de réaction pour le transport  
 $\psi$  Inconnue du problème de transport  
 $\varphi$  Fonction test pour le problème de transport  
 $\mathbf{v}_0$  Champ de vecteur (vitesse de l'écoulement)

## Notations propres à la deuxième partie

- $\alpha$  Coefficient dans les couches PML  
 $\xi$  Champ de déplacement lagrangien perturbé (avec la dépendance en temps)  
 $\mathbf{u}$  Champ spatial de déplacement lagrangien perturbé  
 $\mathbf{v}$  Champ de vitesse eulérienne  
 $\omega$  La pulsation  
 $\phi$  Potentiel de vitesse eulérienne  
 $\psi$  Inconnue hydrodynamique (ou vortacité, par abus) définie comme le rotationnel du déplacement lagrangien perturbé  
 $\rho$  Densité  
 $c$  Célérité du son  
 $f_0$  La grandeur  $f$  associée à l'écoulement porteur  
 $p$  Champ de pression

## Autres notations

- $a \preccurlyeq b$  Il existe  $C$  une constante positive indépendante du pas de maillage  $h$  et telle que  $a \leq C b$   
 $a \succcurlyeq b$  Il existe  $C$  une constante positive indépendante du pas de maillage  $h$  et telle que  $a \geq C b$



Première partie

L'équation de transport en régime  
harmonique



# Chapitre 1

## Le problème de transport continu

### 1.1 Le problème de convection générique

#### 1.1.1 Position du problème

Soit  $\Omega$  un sous-domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ) de frontière  $\partial\Omega$  Lipschitzienne et de normale sortante  $\mathbf{n}$ . Soit un champs de vecteur  $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfaisant les hypothèses suivantes

$$\mathbf{v}_0 \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \quad (1.1)$$

et

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (1.2)$$

**Remarque 1.1.** Cette hypothèse nous permet de simplifier les estimations dans les démonstrations à suivre en évitant des termes en  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0$ . Un simple changement d'inconnue permet de se ramener à l'hypothèse physique d'incompressibilité du fluide traduite par l'équation  $\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$  où  $\rho_0$  est la densité du l'écoulement porteur.

Nous définissons de plus les frontières à flux entrant et à flux sortant respectivement par

$$\Gamma^- = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) < 0\} \quad (1.3)$$

$$\Gamma^+ = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0\} \quad (1.4)$$

et les bords glissants par

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega; \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (1.5)$$

Soient  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\Gamma^-)$ . Enfin, notons  $\alpha$  un paramètre complexe non nul tel que  $\alpha = a + i\omega$  avec  $a$  et  $\omega$  réels. Nous considérons le problème suivant :

*Trouver  $\psi$  une fonction à valeurs complexes définie dans  $\Omega$  telle que*

$$\mathcal{P}_\alpha \begin{cases} \alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi = f & \text{dans } \Omega \\ \psi = g & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (1.6)$$

Le problème qui nous intéresse particulièrement correspond au cas où  $\alpha = -i\omega$  avec  $\omega$  un paramètre réel positif. Nous le noterons  $\mathcal{P}_\omega$  et nous l'appellerons problème de transport harmonique. Dans le cas où la partie imaginaire de  $\alpha$  est nulle, nous avons  $\alpha = a$  et nous notons le problème  $\mathcal{P}_a$ , il s'agit alors du problème d'advection-réaction classiquement traité dans la littérature. Pour un même écoulement  $\mathbf{v}_0$ , la signification physique du problème varie selon la nature (réelle ou complexe) et le signe de  $\alpha$ . Avant de rentrer dans les détails, regardons l'allure de la solution de  $\mathcal{P}_\alpha$  pour des cas d'écoulement simples.

### 1.1.2 Analyse de cas simples

Dans le cas d'un écoulement simple, il est possible de calculer analytiquement la solution du problème  $\mathcal{P}_\alpha$ . Par exemple, considérons un écoulement bi-dimensionnel dirigé selon  $\mathbf{e}_{x_1}$  et dont le module dépend uniquement de  $x_2$ . Ainsi,  $\mathbf{v}_0$  s'écrit

$$\mathbf{v}_0(x_1, x_2) = v_0(x_2) \mathbf{e}_{x_1}$$

De plus, supposons qu'il occupe un domaine rectangulaire  $\Omega = ]0, L[ \times ]0, \ell[$  de sorte que la frontière à flux entrant soit  $\Gamma^- = \{(0, x_2); 0 < x_2 < \ell\}$ . Le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  se ramène alors à trouver une

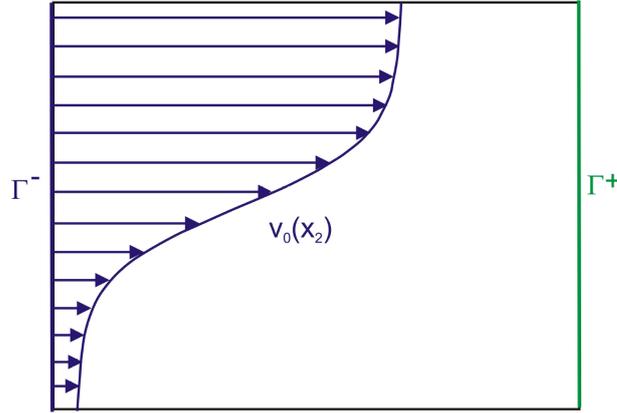


FIG. 1.1: Schéma du domaine rectangulaire.

fonction  $\psi$  telle que

$$\begin{cases} \alpha\psi + v_0(x_2) \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = f & \text{dans } \Omega \\ \psi = g & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (1.7)$$

Si  $\mathbf{v}_0$  ne s'annule pas, il s'agit d'une équation différentielle ordinaire d'ordre un en  $x_1$  à coefficients paramétrés par  $x_2$ . La solution est donnée par l'expression suivante

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{v_0(x_2)} \int_0^{x_1} f(s, x_2) e^{-\frac{\alpha}{v_0(x_2)}(x_1-s)} ds + g(x_2) e^{-\frac{\alpha}{v_0(x_2)}x_1} \quad (1.8)$$

Notons que l'expression (1.8) n'est a priori pas définie pour  $v_0(x_2) = 0$ . Plus généralement, nous avons affaire à un problème dit de "perturbation singulière" si  $v_0(x_2) = 0$  est proche de zéro.

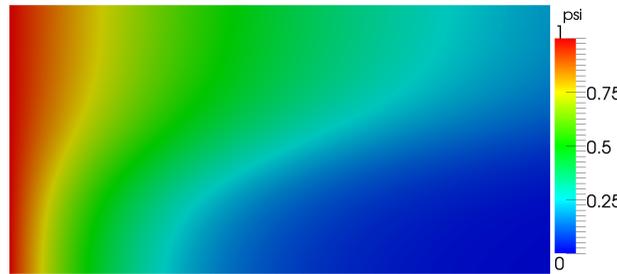
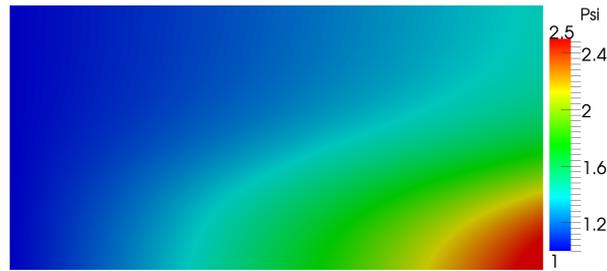
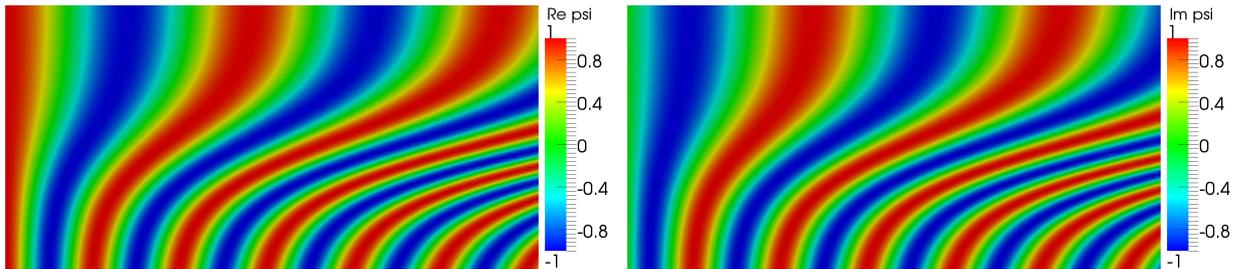
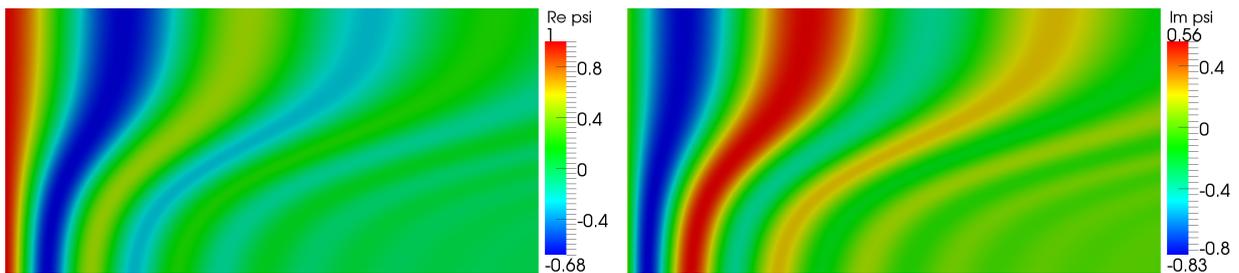
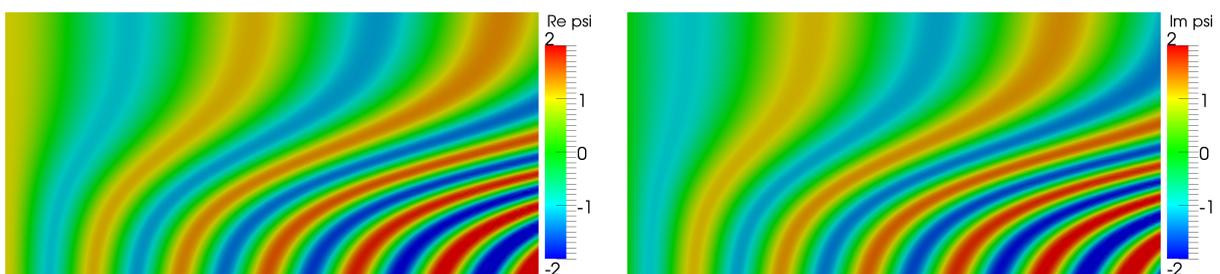


FIG. 1.2: Isovaleurs de la solution pour  $f = 0$ ,  $g = 1$  et  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Les figures 1.2 à 1.6 montrent les isovaleurs de  $\psi$  solution de (1.7) pour plusieurs valeurs de  $\alpha$  dans le cas particulier où  $f = 0$  et  $g = 1$ . Bien que les problèmes  $\mathcal{P}_\omega$  et  $\mathcal{P}_a$  semblent être fortement analogues, notons qu'ils traduisent cependant deux types de phénomènes très différents.

FIG. 1.3: Isovaleurs de la solution pour  $f = 0$ ,  $g = 1$  et  $\alpha = -\frac{1}{10}$ .FIG. 1.4: Solution pour  $f = 0$ ,  $g = 1$  et  $\alpha = 4i$  : partie réelle (gauche) et imaginaire (droite).FIG. 1.5: Solution pour  $f = 0$ ,  $g = 1$  et  $\alpha = \frac{1}{2} + 4i$  : partie réelle (gauche) et imaginaire (droite).FIG. 1.6: Solution pour  $f = 0$ ,  $g = 1$  et  $\alpha = -\frac{1}{10} + 4i$  : partie réelle (gauche) et imaginaire (droite).

En effet, l'advection-réaction correspond à la dissipation d'une quantité selon l'écoulement porteur pour  $a > 0$ . La figure 1.2 montre clairement ce comportement. Au contraire, pour le transport harmonique, il n'y a pas de phénomènes dissipatif. En fait, l'inconnue  $\psi$  est transportée sans perte dans le sens de l'écoulement. De plus, la solution a un comportement oscillatoire induit par le régime harmonique dont la longueur d'onde est  $\frac{2\pi v_0(x_2)}{\omega}$  (soit la longueur parcourue par une particule convectée par l'écoulement pendant une période). Comme le montre la figure 1.4, plus la vitesse du fluide  $v_0$  est faible, plus les oscillations sont rapides. L'énergie de la solution ne

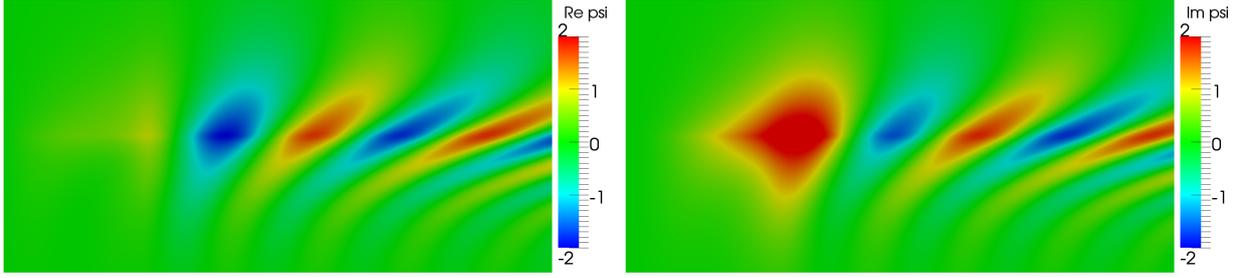


FIG. 1.7: Solution avec source  $f \neq 0$ ,  $g = 0$  et  $\alpha = -4i$  : partie réelle (gauche) et imaginaire (droite).

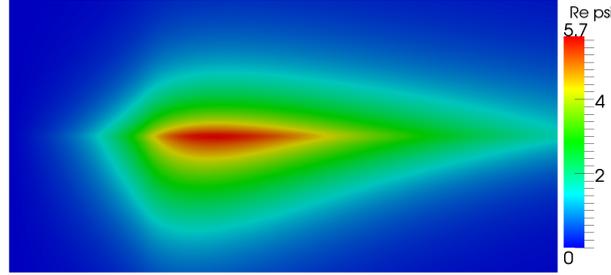


FIG. 1.8: Solution du problème avec source  $f \neq 0$  et  $g = 0$  pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

reste pas confinée dans un domaine fermé autour de la source ici constituée par la condition de Dirichlet sur  $\Gamma^-$ , à la différence du problème d'advection-réaction  $\mathcal{P}_a$  (où  $\omega = 0$  et  $a > 0$ ). Aussi, dans les cas où  $a < 0$  (figures 1.3 et 1.6) l'amplitude de la solution croit exponentiellement selon l'écoulement. Enfin, les figures 1.7 et 1.8 représentent la solution du problème où  $g = 0$  sur  $\Gamma^-$  et  $f$  est non nulle. Le second membre est une fonction à support compact centrée en  $(x_1^s, x_2^s)$  et de rayon  $r^s$ . Son expression analytique est donnée par

$$f(x_1, x_2) = e^{-\frac{|x_1 - x_1^s|^2 + |x_2 - x_2^s|^2}{r^s{}^2}} \text{ si } (x_1 - x_1^s)^2 + (x_2 - x_2^s)^2 \leq 10r^s{}^2 \quad (1.9)$$

et zero ailleurs. Pour le problème de transport harmonique, nous retrouvons le comportement oscillatoire de la solution ainsi que le transport sans perte du signal le long de l'écoulement. Dans le cas de l'advection-réaction avec  $a$  positif, la solution s'écrase progressivement à l'aval de la source.

Considérons maintenant un domaine de  $\mathbb{R}^2$  ayant la forme d'une couronne. En coordonnées polaires, ce domaine s'écrit  $\Omega = \{(r, \theta); r_1 < r < r_2 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\}$  où  $0 < r_1 < r_2$ . Supposons de plus qu'il est occupé par un fluide caractérisé par la vitesse

$$\mathbf{v}_0 = v(r)\mathbf{e}_\theta$$

où  $v$  est une fonction à valeurs réelles strictement positive. La frontière à flux entrant est alors réduite à  $\Gamma^- = \emptyset$  (en effet  $\partial\Omega = \Gamma_0$ ) et le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  consiste à trouver  $\psi$  vérifiant

$$\alpha\psi + \frac{v(r)}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = f \text{ dans } \Omega \quad (1.10)$$

et satisfaisant la condition de continuité

$$\psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi), \forall r \in ]r_1, r_2[. \quad (1.11)$$

Pour  $f = 0$ , les fonctions de la forme

$$\psi_0(r, \theta) = A_0(r)e^{-\frac{\alpha r \theta}{v(r)}}, \quad (1.12)$$

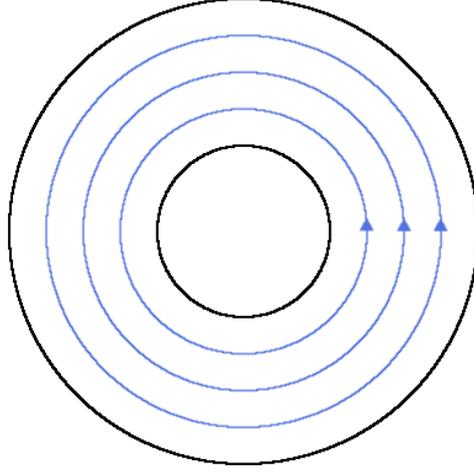


FIG. 1.9: Schéma du domaine circulaire.

satisfont l'équation (1.10) où  $A_0(r)$  ne dépend pas de  $\theta$ . La condition (1.11) impose à  $A_0$  de vérifier

$$A_0(r)(1 - e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}}) = 0. \quad (1.13)$$

Deux cas sont alors possibles :

- Soit  $A_0(r) = 0$  et l'unique solution du problème sans source est la solution triviale  $\psi_0(r, \theta) \equiv 0$ .
- Soit  $e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}} = 1$ . C'est-à-dire  $\frac{\alpha r}{v(r)} = 0$  et  $\frac{r\omega}{v(r)} \in \mathbb{Z}$  où nous rappelons les notations  $a = \Re \alpha$  et  $\omega = \Im \alpha$ .

Lorsque  $\alpha$  est complexe à partie réelle non nulle, l'unique solution du problème homogène est la solution triviale. De même, si  $\alpha$  est un réel non nul l'unique solution est  $\psi_0(r, \theta) \equiv 0$ . Par contre, dans le cas du problème de transport harmonique  $\mathcal{P}_\omega$  où  $a = 0$  et  $\omega \neq 0$ , il y a une infinité de solutions. Remarquons enfin que le problème d'advection pure  $\mathcal{P}_0$  est sous-déterminé.

Considérons maintenant le problème avec second membre non nul et cherchons une solution particulière de la forme

$$\psi_1(r, \theta) = A_1(r, \theta)e^{-\frac{\alpha r \theta}{v(r)}}.$$

Pour que  $\psi_1$  vérifie l'équation (1.10), il faut que

$$\frac{\partial A_1}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{r}{v(r)} f(r, \theta) e^{\frac{\alpha r \theta}{v(r)}}.$$

Nous déduisons alors l'expression de  $\psi_1$

$$\psi_1(r, \theta) = \frac{r}{v(r)} \int_0^\theta f(r, \tau) e^{\frac{\alpha r}{v(r)}(\tau - \theta)} d\tau.$$

Enfin, la solution analytique totale s'écrit  $\psi(r, \theta) = \psi_0(r, \theta) + \psi_1(r, \theta)$  soit encore

$$\psi(r, \theta) = A(r) e^{-\frac{\alpha r \theta}{v(r)}} + \frac{r}{v(r)} \int_0^\theta f(r, \tau) e^{\frac{\alpha r}{v(r)}(\tau - \theta)} d\tau.$$

Pour finir, la condition (1.11) donne

$$A(r) \left(1 - e^{-\frac{2\pi \alpha r}{v(r)}}\right) = \frac{r}{v(r)} \int_0^{2\pi} f(r, \tau) e^{\frac{\alpha r}{v(r)}(\tau - 2\pi)} d\tau.$$

D'où l'expression de la solution analytique :

$$\psi(r, \theta) = \frac{r}{v(r)} \int_0^\theta f(r, \tau) e^{(\tau-\theta) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau + \frac{r}{v(r)} \frac{e^{-\theta \frac{\alpha r}{v(r)}}}{\left(1 - e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}}\right)} \int_0^{2\pi} f(r, \tau) e^{(\tau-2\pi) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau. \quad (1.14)$$

Nous constatons que

- si  $e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}} = 1$  et  $\int_0^{2\pi} f(r, \tau) e^{(\tau-2\pi) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau \neq 0$  alors le problème n'a pas de solution,
- si  $e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}} = 1$  et  $\int_0^{2\pi} f(r, \tau) e^{(\tau-2\pi) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau = 0$  alors le problème admet une infinité de solution.

Dans les autres cas, le problème est bien posé.

**Remarque 1.2.** Lorsque  $\alpha$  est nul, les solutions sont données par l'expression

$$\psi(r, \theta) = \frac{r}{v(r)} \int_0^\theta f(r, \tau) d\tau + A_0(r)$$

où  $A_0$  est une fonction de  $r$  continue et dérivable sur  $\Omega$ . Et la condition (1.11) impose

$$\frac{r}{v(r)} \int_0^{2\pi} f(r, \tau) d\tau = 0.$$

En fin de compte, lorsque  $\alpha$  est réel, le problème d'advection-réaction  $\mathcal{P}_a$  avec  $a > 0$  posé dans la configuration particulière de la couronne 2D admet toujours une unique solution. De même, si  $\alpha$  est un complexe choisi tel que  $a \neq 0$  ou  $\frac{2r\omega}{v(r)} \notin \mathbb{Z}, \forall r \in ]r_1, r_2[$  alors le problème est bien posé. Par contre, il existe des cas pour lesquels le problème de transport harmonique  $\mathcal{P}_\omega$  est mal posé ou admet une infinité de solution. Ces observations qualitatives sur les solutions dans des cas simples nous laissent penser que l'analyse du problème de transport requiert un effort supplémentaire pour  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  par rapport au cas où  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## 1.2 Quelques outils classiques pour l'analyse du problème continu

### 1.2.1 Cadre fonctionnel

Nous précisons l'espace fonctionnel dans lequel la solution de  $\mathcal{P}_\alpha$  est recherchée. Le second membre de l'équation  $f$  étant choisi dans  $L^2(\Omega)$ , l'approche naturelle consiste à définir l'espace du graphe

$$H(\Omega, \mathbf{v}_0) := \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (1.15)$$

Nous définissons ensuite la norme du graphe

$$\|\varphi\|_H^2 = |\alpha|^2 \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega}^2. \quad (1.16)$$

**Lemme 1.3.** *Équipé de la norme (1.16), l'espace  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  est un espace de Hilbert. (cf [38])*

Il faut maintenant donner un sens à la condition aux limites dans (1.6). Nous traitons d'abord le cas du problème homogène  $g \equiv 0$ . Les résultats qui suivent vont nous permettre de définir la trace des éléments de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  sur les bords du domaine  $\Omega$  et d'utiliser une formule d'intégration par parties. Un premier résultat peut être obtenu en s'appuyant sur les propriétés de l'espace

$$H_{div} := \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\}. \quad (1.17)$$

En effet, d'après l'hypothèse (1.2), nous avons  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi = \operatorname{div}(\psi \mathbf{v}_0)$ . Donc, si  $\psi$  appartient à  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$ , alors  $\psi \mathbf{v}_0$  est dans  $H_{div}$ . Ainsi,  $\psi \mathbf{v}_0$  admet une trace normale  $\psi \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}$  dans l'espace de Sobolev  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et nous avons la formule de Green

$$\forall \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0), \forall \varphi \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi) \bar{\psi} = - \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) + \int_{\partial\Omega} \varphi \bar{\psi} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\gamma \quad (1.18)$$

où l'intégration sur  $\partial\Omega$  correspond au produit de dualité  $(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))$ .

Cette formule va nous permettre de donner un sens à la trace sur  $\Gamma^{\pm}$  dans les espaces  $L^2$  à poids [45]

$$L^2(\Gamma^{\pm}, |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|) = \left\{ \varphi \in L^2(\Gamma^{\pm}); \int_{\Gamma^{\pm}} |\varphi|^2 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| d\gamma < \infty \right\}. \quad (1.19)$$

Pour cela, introduisons deux hypothèses supplémentaires.

$$\text{L'espace } \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d) \text{ est dense dans } H(\Omega, \mathbf{v}_0) \quad (1.20)$$

$$\text{Les frontières de } \Omega \text{ à flux entrant et sortant sont bien séparées, i.e. } \operatorname{dist}(\Gamma^+, \Gamma^-) > 0 \quad (1.21)$$

**Remarque 1.4.** L'hypothèse (1.21) de séparation des frontières est nécessaire pour assurer l'existence de la trace des fonctions de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  sur  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$ . Nous donnons deux contre-exemples afin d'illustrer cette hypothèse. Considérons un domaine triangulaire  $\Omega$  donné par

$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\}.$$

L'écoulement  $\mathbf{v}_0$  est choisi unitaire et orienté selon  $\mathbf{e}_{x_1}$  de sorte que les frontières à flux entrant et sortant, représentées sur la figure 1.10, sont respectivement données par

$$\Gamma^- = \{(0, x_2); 0 \leq x_2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma^+ = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ et } x_2 = 1 - x_1\}.$$

Remarquons que  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  ne sont pas séparées. Soit  $\varphi$  une fonction dépendant uniquement de la variable  $x_2$  :

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_2).$$

Avec ce choix, il vient que  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi = 0$  sur  $\Omega$  et pour que  $\varphi$  soit dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$ , il faut que

$$\|\varphi\|_{\Omega,0} = \int_0^1 (1 - x_2) |f(x_2)|^2 dx_2$$

soit fini. Cela n'implique pas que

$$\|\varphi\|_{\Gamma^-,0} = \int_{\Gamma^-} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\varphi| d\gamma = - \int_0^1 |f(x_2)|^2 dx_2$$

soit fini. Par exemple [38], si  $\varphi(x_2) = x_2^p$  et  $p > \frac{1}{2}$  alors  $\|\varphi\|_{\Omega,0}$  est fini mais pas  $\|\varphi\|_{\Gamma^-,0}$ . Le deuxième contre-exemple est représenté sur la figure 1.11. Il s'agit d'une couche de cisaillement. Le domaine considéré  $\Omega$  est maintenant rectangulaire et s'écrit

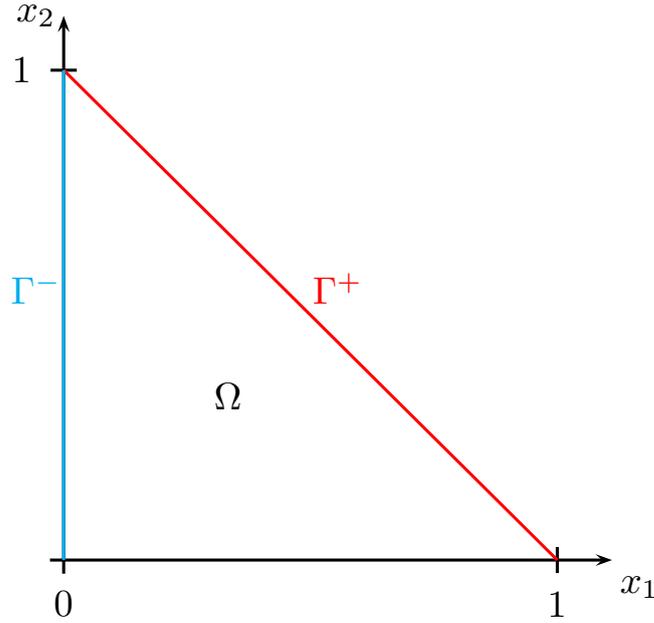
$$\Omega = \{(x_1, x_2); 0 \leq x_1 \leq \ell \text{ et } -h \leq x_2 \leq h\}$$

où  $\ell$  et  $h$  sont deux réels strictement positifs. L'écoulement est supposé vérifier l'expression

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = x_2 \mathbf{e}_{x_1}.$$

Il y a annulation et changement de sens du champ  $\mathbf{v}_0$  en  $x_2 = 0$ . Avec ce choix, la frontière à flux entrant s'exprime

$$\Gamma^- = \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^-$$

FIG. 1.10: Domaine triangulaire avec  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{e}_{x_1}$ .

où

$$\Gamma_1^- = \{(0, x_2); 0 \leq x_2 \leq h\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2^- = \{(\ell, x_2); -h \leq x_2 \leq 0\}$$

alors que la frontière à flux sortant s'écrit

$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$$

avec

$$\Gamma_1^+ = \{(0, x_2); -h \leq x_2 \leq 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2^+ = \{(\ell, x_2); 0 \leq x_2 \leq h\}.$$

Il est clair que  $\Gamma^+$  et  $\Gamma^-$  ne sont pas séparés. Comme précédemment, considérons  $\varphi$  une fonction de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  dépendant uniquement de la variable  $x_2$  telle que  $\varphi(x_1, x_2) = f(x_2)$ . Ainsi, nous avons

$$\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi\|_{0,\Omega}^2 = 0$$

et

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx = \ell \int_{-h}^h |f(x_2)|^2 dx_2$$

est fini puisque  $\varphi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0)$ . Cela ne garantit pas que l'intégrale

$$\|\varphi\|_{0,\Gamma^+}^2 = \int_{\Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+} |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\varphi|^2 dx = 2 \int_0^h x_2 |f(x_2)|^2 dx_2$$

soit finie.

Sous les hypothèses (1.20) et (1.21), il est possible de montrer [38] le lemme

**Lemme 1.5.** *Il existe une constante  $C$  telle que*

$$\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^d), \int_{\partial\Omega} |\varphi|^2 |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| d\gamma \leq C \|\varphi\|_H^2. \quad (1.22)$$

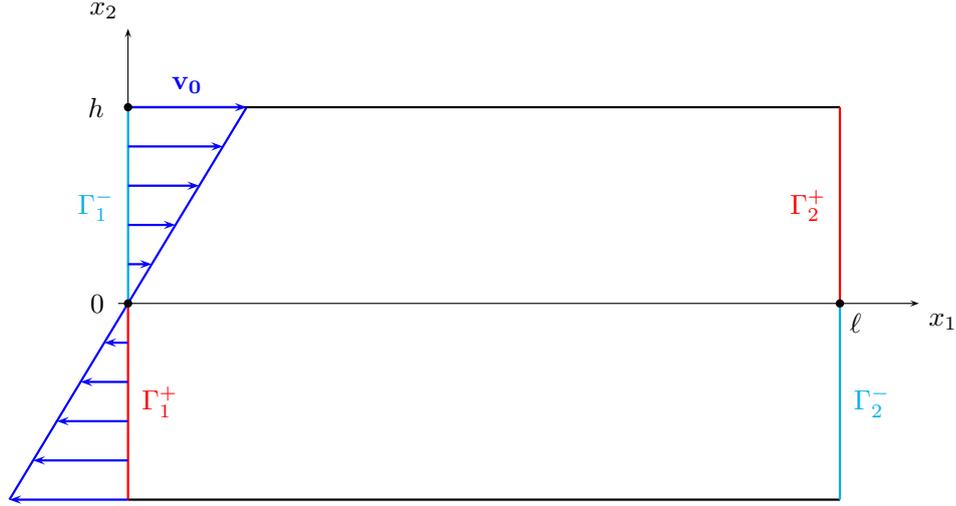


FIG. 1.11: Couche de cisaillement.

Par l'hypothèse de densité (1.20), le lemme précédent s'étend à  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$ . Autrement dit, les applications traces  $\gamma : \varphi \rightarrow \varphi|_{\Gamma^\pm}$  sont continues de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  dans  $L^2(\Gamma^\pm, |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)$ . La formule (1.18) est alors vraie sur  $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$  et à nouveau par densité elle s'étend à  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$ . Finalement, nous pouvons définir le noyau de l'application trace

$$H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^\pm) := \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma^\pm \right\} \quad (1.23)$$

qui est un sous-espace fermé de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  et donc un espace de Hilbert. Nous avons de plus

$$\forall \psi, \varphi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^\pm), \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi) \bar{\psi} = - \int_{\Omega} \varphi (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) + \int_{\Gamma^\mp} \varphi \bar{\psi} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) ds \quad (1.24)$$

Considérons maintenant le problème avec condition de Dirichlet non-homogène, c'est-à-dire pour lequel nous imposons

$$\psi = g \text{ sur } \Gamma^-.$$

Comme l'application trace définie plus haut est surjective [45] de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  dans  $L^2(\Gamma^\pm, |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|)$ , pour tout  $g \in L^2(|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|; \Gamma^\pm)$ , il existe  $\psi_g$  dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0)$  telle que  $\psi_g = g$  sur  $\Gamma^-$ . En posant  $\tilde{\psi} = \psi - \psi_g$ , le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  devient

$$\tilde{\mathcal{P}}_\alpha \begin{cases} \alpha \tilde{\psi} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \tilde{\psi} = \tilde{f} & \text{dans } \Omega \\ \tilde{\psi} = 0 & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (1.25)$$

avec  $\tilde{f} = f - (\psi_g + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_g)$ . Nous nous sommes ramené au problème avec condition de Dirichlet homogène. Par la suite, nous considérons uniquement ce problème. En outre, le cadre fonctionnel développé plus haut nous amène à l'écrire, en omettant les tildes, sous la forme

$$\text{Trouver } \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-) \text{ telle que } \alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi = f \text{ dans } \Omega \quad (1.26)$$

où  $f$  est choisie dans  $L^2(\Omega)$ . La formulation variationnelle associée s'écrit

$$p(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} f \bar{\varphi} dx, \forall \varphi \in L^2(\Omega) \quad (1.27)$$

avec

$$p(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} (\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \bar{\varphi} dx, \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (1.28)$$

### 1.2.2 La condition inf-sup pour l'équation d'advection-réaction

Lorsque le coefficient de réaction  $\alpha$  est à partie réelle strictement positive, nous montrons de façon classique la stabilité du problème variationnel. Nous commençons par démontrer la proposition

**Proposition 1.6.**  $\forall \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ ,

$$\Re \left( \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \bar{\psi} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} |\psi|^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\gamma$$

*Démonstration.* La proposition découle directement de la formule de Green (1.24) puisque

$$\int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \bar{\psi} dx + \int_{\Omega} \psi (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) dx = 2 \Re \left( \int_{\Omega} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \bar{\psi} dx \right).$$

□

Il vient alors le corollaire

**Corollaire 1.7.** Soit  $\psi$  une fonction de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Les deux égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Re p(\alpha; \psi, \psi) &= \Re \alpha \int_{\Omega} |\psi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} |\psi|^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\gamma \\ \Re p(\alpha; \psi, \alpha \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) &= \frac{|\alpha|^2}{2} \int_{\Gamma^+} |\psi|^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\gamma + \Re \alpha \int_{\Omega} |\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi|^2 dx \end{aligned}$$

En utilisant ce corollaire, nous pouvons établir le résultat de stabilité suivant

**Proposition 1.8.** Si  $\Re \alpha > 0$ , la forme bilinéaire  $p$  vérifie la condition inf-sup

$$\inf_{\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)} \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)} \frac{\Re p(\alpha; \psi, \varphi)}{\|\psi\|_H \|\varphi\|_{0,\Omega}} \geq \frac{\Re \alpha}{|\alpha|} \quad (1.29)$$

*Démonstration.* Soit  $\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Prenons  $\varphi = |\alpha|^2 \psi + \alpha \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$ . Par le corollaire (1.7), nous obtenons

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) = \Re \alpha \|\psi\|_H^2 + |\alpha|^2 \int_{\Gamma^+} |\psi|^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) d\gamma$$

Le terme de droite est positif puisque, par définition  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} > 0$  sur  $\Gamma^+$ , ainsi nous avons

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) \geq \Re \alpha \|\psi\|_H^2 \quad (1.30)$$

D'autre part, par inégalité triangulaire nous pouvons écrire l'estimation

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}^2 \leq 2|\alpha|^2 \|\psi\|_H^2 \quad (1.31)$$

En combinant (1.30) et (1.31), il vient

$$\frac{\Re p(\alpha; \psi, \varphi)}{\|\varphi\|_{0,\Omega}} \geq \frac{\Re \alpha}{|\alpha|} \|\psi\|_H, \quad \forall \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$$

En introduisant à la borne supérieure sur tous les  $\varphi$  de  $L^2(\Omega)$ , puis en passant à l'infimum sur les  $\psi$  de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ , nous obtenons la proposition. □

**Remarque 1.9.** Il y a un lien étroit entre la frontière (à flux entrant ou sortant) où l'on impose la condition de Dirichlet et le signe de  $\alpha$ . Cette dépendance est particulièrement visible lorsque nous donnons un signe à

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) = \Re \alpha \|\psi\|_H^2 + \frac{1}{2}(1 + |\alpha|^2) \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} |\psi|^2 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma$$

où  $\varphi = |\alpha|^2 \psi + \alpha \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$  dans la démonstration précédente. Si  $\Re \alpha > 0$ , il faut annuler  $\psi$  sur  $\Gamma^-$  où le produit  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}$  est négatif pour assurer la positivité du second terme (puisque  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} > 0$  sur  $\Gamma^+$ ). Par contre si  $\Re \alpha < 0$  alors imposer  $\psi = 0$  sur  $\Gamma^+$  permet de garder uniquement une intégration sur  $\Gamma^-$  à valeurs négatives.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  est bien posé lorsque  $\Re \alpha > 0$ . Dans ce cas, nous avons le théorème

**Théorème 1.10.** *Sous les hypothèses (1.1) et (1.2), le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  est bien-posé si  $\Re \alpha > 0$ . Il existe alors une constante positive  $C$  telle que*

$$\|\psi\|_H \leq C \|f\|_{0,\Omega}$$

*Démonstration.* Considérons l'opérateur  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}$  défini de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  dans  $L^2(\Omega)$  par  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0} \psi = \alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$ . Par la proposition 1.8 il vient que  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}$  est injectif et d'image fermée. Pour montrer la surjectivité, remarquons que l'adjoint  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#$  de  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}$  qui est défini de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  dans  $L^2(\Omega)$  par  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\# \psi = \bar{\alpha} \psi - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$  est aussi injectif puisque  $\Re \bar{\alpha} = \Re \alpha > 0$  (par un argument similaire) de sorte que l'image de  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}$  est dense.  $\square$

Les résultats obtenus dans cette partie par approche variationnelle ne nous permettent pas de traiter le cas où la partie réelle du coefficient de réaction est négative ou nulle. A ce stade, nous pourrions penser que la difficulté est simplement technique et que nous ne savons pas choisir correctement la fonction test permettant de dériver une condition inf-sup. Cependant, lorsque la partie réelle du coefficient de réaction est négative, les solutions analytiques dans les cas présentés plus haut explosent (*cf* figures 1.3 et 1.6). De plus, lorsque  $\Re \alpha = 0$ , nous avons vu que pour le cas test de la couronne, il y a des configurations pour lesquelles le problème est mal posé. Il semble donc bien que les difficultés liées à l'obtention d'un résultat de stabilité ne soient pas seulement d'ordre technique. Ceci va nous conduire à introduire dans le paragraphe suivant une nouvelle hypothèse.

### 1.3 Etude du problème de transport harmonique

Nous proposons ici d'adopter une approche par courbes caractéristiques ou lignes de courant. A partir de chaque point du bord à flux entrant, nous construisons la trajectoire de la particule de fluide convectée par l'écoulement et se trouvant en ce point de  $\Gamma^-$  à l'instant initial. Nous considérons ensuite la solution de  $\mathcal{P}_\alpha$  sur chacune de ces courbes caractéristiques. Si toutes les lignes partent de  $\Gamma^-$  et atteignent  $\Gamma^+$  en remplissant le domaine  $\Omega$  et qu'elles sont suffisamment régulières, alors nous pouvons contrôler la solution dans tout le domaine. En fait, nous effectuons un changement de variables entre les coordonnées spatiales et les paramètres des lignes de courant. Le problème se ramène alors à une famille d'équations différentielles ordinaires (une par ligne). Cette démarche appelle naturellement deux questions en relation avec les hypothèses faites sur l'écoulement. La première concerne le changement de variable. Nous voulons que ce soit un  $C^1$ -difféomorphisme. Par des résultats classiques d'analyse d'équations différentielles ordinaires nous avons ce résultat pour des écoulements  $C^1(\bar{\Omega})$ . La deuxième question consiste à montrer que le problème sur chaque ligne de courant est bien posé. Il faut alors imposer à l'écoulement d'être  $\Omega$ -remplissant.

### 1.3.1 Nouvelle hypothèse : écoulement $\Omega$ -remplissant

Pour assurer le caractère bien-posé du problème quelque soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$ , nous introduisons une hypothèse supplémentaire sur l'écoulement porteur.

$$\text{L'écoulement } \mathbf{v}_0 \text{ est } \Omega\text{-remplissant.} \quad (1.32)$$

L'objet de ce paragraphe est de définir la notion d'écoulement "domaine-remplissant". Pour cela, nous utilisons le problème aux caractéristiques donné par la définition suivante.

**Définition 1.11** (Le problème aux caractéristiques). Trouver  $\Phi$  solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = \mathbf{v}_0(\Phi(s, \mathbf{b})) \\ \Phi(0, \mathbf{b}) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.33)$$

où

$$(s, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega} := \left\{ (s, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \Gamma^- \text{ et } s \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

L'équation différentielle (1.33) est dite autonome car  $\mathbf{v}_0$  ne dépend pas de  $s$ . Il s'agit d'un problème classique derrière lequel une large théorie a été développée. L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \tilde{\Omega} &\longrightarrow \Omega \\ (s, \mathbf{b}) &\longmapsto \Phi(s, \mathbf{b}) = (\Phi_i) \end{aligned}$$

est appelée flot de l'équation différentielle (1.33) associée au champ de vecteur  $\mathbf{v}_0$ . Elle décrit les trajectoires des particules de fluide : portée par l'écoulement  $\mathbf{v}_0$ , la particule se trouvant au point  $\mathbf{b}$  du bord entrant à l'instant initial atteint le point  $\mathbf{x} = \Phi(s, \mathbf{b})$  de  $\Omega$  à l'instant  $s$ .

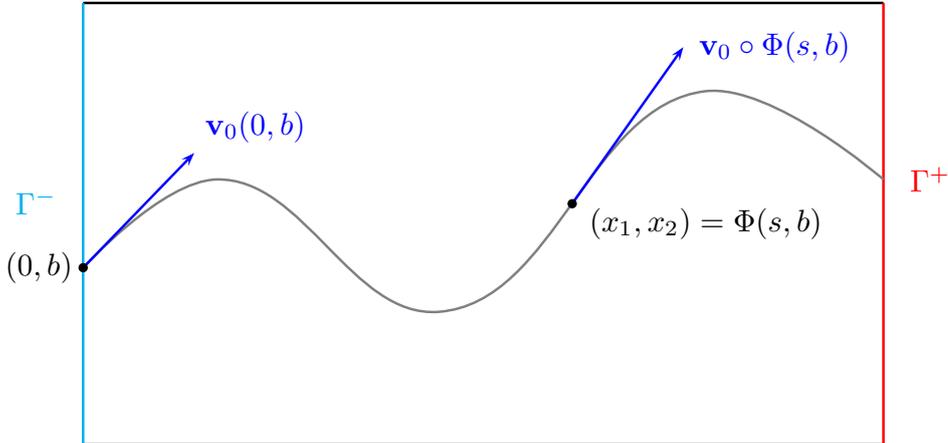


FIG. 1.12: Une courbe caractéristique associée à  $\mathbf{v}_0$ .

**Remarque 1.12.** En régime stationnaire, les lignes de courant et trajectoires d'une particule de fluide sont confondues. Ici, nous ne faisons pas la distinction.

Sous les hypothèses (1.1) et (1.2), le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de montrer qu'il existe une solution unique au voisinage de tout point  $\mathbf{b}$  et que cette solution s'étend en une solution maximale unique. On parle alors de flot global du champ  $\mathbf{v}_0$ . De plus, comme  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{C}^1(\tilde{\Omega})$ , l'application  $\Phi$  définit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\Omega$ .

Nous pouvons maintenant énoncer la définition de  $\Omega$ -remplissant de la même manière que dans [6].

**Définition 1.13** ( $\Omega$ -remplissant). Un écoulement est dit  $\Omega$ -remplissant s'il existe  $t^* > 0$  tel que pour tout point  $\mathbf{x} \in \Omega$ , il existe  $s < t^*$  et  $\mathbf{b} \in \Gamma^-$  tels que  $\mathbf{x} = \Phi(s, \mathbf{b})$ , où  $\Phi(s, \mathbf{b})$  est l'unique solution du problème aux caractéristiques (1.33).

Autrement dit, les caractéristiques du champ de vitesse issues du bord entrant atteignent le bord à flux sortant en un temps fini borné, sauf éventuellement en un ensemble de mesure nulle. Ou encore, chaque point  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$  est atteint par une courbe caractéristique issue d'un point  $\mathbf{b}$  de  $\Gamma^-$  en un instant  $s$  borné par une constante fixe. Nous pouvons en outre définir le temps de  $\Omega$ -parcours de chaque courbe caractéristique.

**Définition 1.14** (le temps de  $\Omega$ -parcours). Soit  $\mathbf{v}_0$  un écoulement  $\Omega$ -remplissant. Soit  $\mathbf{b}$  un point de  $\Gamma^-$ . Le temps de  $\Omega$ -parcours  $\tau_{\mathbf{b}}$  est le temps que met la ligne de courant issue de  $\mathbf{b}$  pour sortir du domaine  $\Omega$  (ou atteindre  $\Gamma^+$ ).

Avec cette définition, l'espace  $\tilde{\Omega}$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  :

$$(s, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega} := \{(s, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \Gamma^- \text{ et } s \in [0, \tau_{\mathbf{b}}]\}.$$

Si  $\mathbf{v}_0$  est  $\Omega$ -remplissant alors il existe  $\tau < +\infty$  tel que

$$\sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} \tau_{\mathbf{b}} \leq \tau$$

et  $\Omega$  est l'image de  $\tilde{\Omega}$  par  $\Phi$ .

Tous les écoulements ne sont pas  $\Omega$ -remplissants, nous pouvons donner deux contre-exemples.

- Les zones de recirculation comme celles représentées sur la figure 1.13 sont exclues. En particulier, l'exemple de la couronne 2D de la figure 1.9 n'entre pas dans le cadre  $\Omega$ -remplissant.

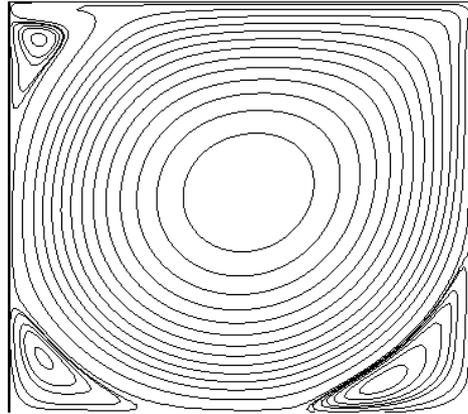


FIG. 1.13: Lignes de courant dans le cas d'un écoulement recirculant.

- L'hypothèse (1.32) interdit également les points d'arrêt liés à la présence d'un obstacle dans l'écoulement. Ils sont caractérisés par l'annulation du vecteur vitesse  $\mathbf{v}_0$  en un point du domaine. Considérons l'exemple de l'écoulement potentiel autour d'un disque représenté sur la figure 1.14. Il s'agit d'un domaine rectangulaire  $R = [-L; L] \times [-H; H]$  avec  $(L, H) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$  occupé par un disque rigide  $D$  de rayon  $R$  positif et de centre  $(0, 0)$ . L'expression de  $\mathbf{v}_0$  défini autour du disque dans le domaine  $\Omega = R \setminus D$  est connue et rappelée en annexe D. Cet écoulement n'est pas  $\Omega$ -remplissant. En effet, il existe deux points  $(-R, 0)$  et  $(R, 0)$ , aussi appelés points d'arrêt, pour lesquels la vitesse  $\mathbf{v}_0$  est nulle. En conséquence, la particule de fluide qui se déplace sur la ligne de courant issue du point de  $\Gamma^-$  de coordonnées  $(-L, 0)$  met un temps infini pour atteindre le point d'arrêt  $(-R, 0)$ . De même, cette particule met

un temps infini pour partir du point  $(R, 0)$ . De façon plus générale, pour tout  $T$  réel positif, il existera toujours un  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que la ligne de courant issue de  $(-L, \varepsilon)$  mette un temps  $\tau_{(-L, \varepsilon)}$  supérieur à  $T$  pour atteindre la frontière  $\Gamma^+$ .

Ces deux situations apparaissent dans le théorème de Poincaré-Bendixson comme les deux alternatives possibles lorsqu'une courbe caractéristique est bornée. D'après ce théorème, valable en  $2D$ , si une solution maximale du problème (1.33) reste bornée alors il y a deux possibilités : soit elle converge vers une limite (point d'arrêt), soit elle adopte un comportement asymptotique périodique (recirculation).

### 1.3.2 L'approche par lignes de courant

Soit  $\Phi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$  un changement de variable. Posons

$$\tilde{\psi}(s, \mathbf{b}) = \psi \circ \Phi(s, \mathbf{b}), \forall \mathbf{b} \in \Gamma^- \quad (1.34)$$

où  $\psi$  est solution de  $\mathcal{P}_\alpha$  et où  $s$  est un paramètre réel positif appartenant à un intervalle à préciser. Si  $\tilde{\psi}$  est différentiable sur  $\tilde{\Omega}$ , nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(s, \mathbf{b})}{\partial s} = \frac{\partial \Phi(s, \mathbf{b})}{\partial s} \cdot [\nabla \psi \circ \Phi(s, \mathbf{b})] \quad (1.35)$$

Si  $\Phi$  est l'unique solution du problème aux caractéristiques (1.33) alors  $\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \circ \Phi(s, \mathbf{b})$  et le changement de variable (1.34) appliqué à  $\mathcal{P}_\alpha$  réalise un redressement local du flot et nous donne le problème défini pour chaque ligne de courant par

$$\tilde{\mathcal{P}}_\alpha \begin{cases} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = \tilde{f}(s, \mathbf{b}) - \alpha \tilde{\psi}(s, \mathbf{b}) \\ \tilde{\psi}(0, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}), \forall \mathbf{b} \in \Gamma^- \end{cases} \quad (1.36)$$

où  $\mathbf{b}$  est un point de  $\Gamma^-$  et désigne le pied de la courbe caractéristique considérée (celle qui atteint  $\Phi(s, \mathbf{b})$  à l'instant  $s$ ) et  $\tilde{f}(s, \mathbf{b}) = f \circ \Phi(s, \mathbf{b})$ . Avec ce choix, l'espace  $\tilde{\Omega}$  est donné par

$$\tilde{\Omega} = \{(s, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \Gamma^- \text{ et } s \in [0, \tau_{\mathbf{b}}]\} \quad (1.37)$$

où  $\tau_{\mathbf{b}}$  est le temps que la ligne de courant partant de  $\mathbf{b}$  met pour sortir du domaine  $\Omega$ .

**Proposition 1.15.** *Sous les hypothèses sur  $\mathbf{v}_0$  (1.1), (1.2) et (1.32), le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  est bien posé dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-) \forall \alpha \in \mathbb{C}$ . En particulier,*

$$\|\psi\|_{0, \Omega}^2 \leq C \|f\|_{0, \Omega}^2 \quad (1.38)$$

où

$$C = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & \text{si } a = 0 \\ \frac{1}{2a} \left( \tau + \frac{e^{-2a\tau} - 1}{2a} \right) & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

avec  $\tau = \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} \tau_{\mathbf{b}}$  et  $a = \Re \alpha$ .

*Démonstration.* Considérons le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  dans le cas où la condition à la limite est telle que  $g = 0$  sur  $\Gamma^-$ . Notons  $\alpha = a + i\omega$ . Montrons que la solution  $\psi$  est dans  $L^2(\Omega)$ . Le second membre de l'équation  $f$  étant aussi dans  $L^2(\Omega)$ , nous pourrions ainsi déduire que  $\psi$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Supposons d'abord que le second membre  $f$  est régulier. Appliquons au problème  $\mathcal{P}_\alpha$  le changement de variable (1.34) où  $\Phi$  est la solution du problème aux caractéristiques (1.33).

La solution du problème  $\widetilde{\mathcal{P}}_\alpha$  obtenu après transformation peut alors s'écrire de façon explicite sur chacune des lignes de courant. Dans le cas d'une condition à la limite homogène, nous avons

$$\widetilde{\psi}(s, \mathbf{b}) = \int_0^s f \circ \Phi(t, \mathbf{b}) e^{\alpha(t-s)} dt. \quad (1.39)$$

D'autre part, la norme  $L^2(\Omega)$  de  $\psi$  s'exprime

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega |\psi|^2 d\mathbf{x} = \int_{\widetilde{\Omega}} |\mathbf{J}_\Phi| |\widetilde{\psi}|^2 d\widetilde{\mathbf{x}}$$

où  $\mathbf{J}_\Phi$  est le déterminant de la jacobienne du changement de variable  $\Phi$ . Par exemple, pour  $d = 2$ ,  $\mathbf{J}_\Phi$  s'écrit

$$\mathbf{J}_\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} \end{vmatrix}.$$

En utilisant l'expression (1.39) de  $\widetilde{\psi}$ , nous pouvons écrire la majoration suivante

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_0^s |f \circ \Phi(t, \mathbf{b}) e^{\alpha(t-s)}| dt \right)^2 ds d\mathbf{b}.$$

En outre  $|e^{\alpha(t-s)}| = e^{a(t-s)}$  avec  $a = \Re \alpha$ , d'où la nouvelle majoration

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_0^s |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})| e^{a(t-s)} dt \right)^2 ds d\mathbf{b}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_0^s |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt \right) \left( \int_0^s e^{2a(t-s)} dt \right) ds d\mathbf{b}.$$

Ensuite, il est clair que  $\int_0^s |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt \leq \int_0^{\tau_{\mathbf{b}}} |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt$ , d'où

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Gamma^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt \right) \left( \int_{t=0}^s e^{2a(t-s)} dt \right) ds d\mathbf{b}.$$

De façon générale, on peut montrer que (voir annexe A)

$$\frac{d\mathbf{J}_\Phi}{ds}(s, \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b}). \quad (1.40)$$

Puisque  $\mathbf{v}_0$  est à divergence nulle selon l'hypothèse (1.2), le jacobien ne dépend pas de la variable  $s$ . En outre, le terme  $\int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt$  ne dépend pas non plus de  $s$ . Nous pouvons donc réorganiser les termes de la façon suivante

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_{\Gamma^-} \left( \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt \right) \left( \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} \left( \int_{t=0}^s e^{2a(t-s)} dt \right) ds \right) d\mathbf{b}.$$

Notons  $I_{\mathbf{b}} = \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} \int_{t=0}^s e^{2a(t-s)} dt ds$ . Une nouvelle majoration nous donne alors

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} I_{\mathbf{b}} \right) \int_{\Gamma^-} \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| |f \circ \Phi(t, \mathbf{b})|^2 dt d\mathbf{b},$$

c'est-à-dire

$$\|\psi\|_{0,\Omega}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} I_{\mathbf{b}} \right) \|f\|_{0,\Omega}^2.$$

Le calcul de  $I_{\mathbf{b}}$  conduit à

$$I_{\mathbf{b}} = \begin{cases} \frac{\tau_{\mathbf{b}}^2}{2} & \text{pour } a = 0 \\ \frac{1}{2a} \left( \tau_{\mathbf{b}} + \frac{e^{-2a\tau_{\mathbf{b}}} - 1}{2a} \right) & \text{pour } a \neq 0 \end{cases}$$

Comme  $\mathbf{v}_0$  est  $\Omega$ -remplissant, nous avons alors

$$\sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} I_{\mathbf{b}} = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & \text{pour } a = 0 \\ \frac{1}{2a} \left( \tau + \frac{e^{-2a\tau} - 1}{2a} \right) & \text{pour } a \neq 0 \end{cases}$$

où  $\sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} \tau_{\mathbf{b}} = \tau < \infty$ . Quand  $a = \Re e \alpha$  est nul, le coefficient  $\sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} I_{\mathbf{b}}$  de l'estimation (1.38) croît en  $\tau^2$  lorsque  $\tau$  augmente. Pour  $a$  positif ce coefficient est meilleur puisqu'il croît linéairement avec  $\tau$ . Par contre, l'estimation (1.38) se dégrade avec une croissance exponentielle selon  $\tau$  dans le cas où  $a$  est négatif.

Supposons maintenant que le second membre  $f$  soit une fonction quelconque de  $L^2(\Omega)$ . Par densité des fonctions  $C^\infty(\bar{\Omega})$  dans  $L^2(\Omega)$ , il existe une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  de  $C^\infty(\bar{\Omega})$  telle que

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Considérons  $n$  un entier naturel positif et cherchons  $\psi_n$  vérifiant le problème

$$\mathcal{P}_\alpha^n \begin{cases} \alpha \psi_n + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_n = f_n & \text{dans } \Omega \\ \psi_n = 0 & \text{sur } \Gamma^- \end{cases} \quad (1.41)$$

Étant donné que  $f_n$  est régulière, d'après la première partie de la démonstration, le problème  $\mathcal{P}_\alpha^n$  est bien posé dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  et la solution  $\psi_n$  satisfait

$$\|\psi_n\|_H^2 \leq C \|f_n\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+. \quad (1.42)$$

Montrons maintenant que la suite  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  converge dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  lorsque  $n$  tend vers plus l'infini. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels positifs. D'après l'estimation (1.42), nous avons

$$\|\psi_p - \psi_q\|_H \leq C \|f_p - f_q\|_{0,\Omega}.$$

Puisque  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  est une suite de Cauchy de  $L^2(\Omega)$ , nous avons

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+ \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_{0,\Omega} < \frac{\varepsilon}{C}.$$

Nous déduisons alors que

$$\|\psi_p - \psi_q\|_H \leq \varepsilon$$

et donc  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$  est une suite de Cauchy dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Elle converge donc dans cet espace (puisque'il s'agit d'un Hilbert pour la norme  $\|\cdot\|_H$ ) vers une fonction notée  $\psi$  :

$$\psi := \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-).$$

Ensuite, montrons que  $\psi$  est solution de  $\mathcal{P}_\alpha$  dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Comme  $\psi_n$  est solution de  $\mathcal{P}_\alpha^n$ , nous avons facilement que

$$\|f - (\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi)\|_{0,\Omega} \leq |\alpha| \|\psi_n - \psi\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla (\psi_n - \psi)\|_{0,\Omega} + \|f - f_n\|_{0,\Omega}$$

et donc  $\psi$  vérifie  $\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi = f$  dans  $\Omega$ . Enfin, la continuité de la trace permet de montrer que la trace de  $\psi$  est nulle presque partout sur  $\Gamma^-$ .  $\square$

### 1.3.3 Obtention d'une condition inf-sup : approche variationnelle

La proposition 1.15 signifie que l'opérateur de convection  $P_{\alpha, \mathbf{v}_0}$  défini par

$$P_{\alpha, \mathbf{v}_0} \psi := \alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$$

est un isomorphisme de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  dans  $L^2(\Omega)$  quelque soit  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$  et qu'il existe une constante strictement positive  $\tilde{c}$  telle que

$$\|\psi\|_H \leq \tilde{c} \|P_{\alpha, \mathbf{v}_0} \psi\|_{0, \Omega}.$$

Ceci fournit directement une condition inf-sup. En effet, pour tout  $\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ , si on pose  $\varphi = P_{\alpha, \mathbf{v}_0} \psi$ , il vient

$$p(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx \geq \frac{1}{\tilde{c}} \|\varphi\|_{0, \Omega} \|\psi\|_H,$$

d'où l'on déduit une condition inf-sup de la forme

$$\inf_{\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)} \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)} \frac{p(\alpha; \psi, \varphi)}{\|\psi\|_H \|\varphi\|_{0, \Omega}} \geq \varpi > 0 \quad (1.43)$$

avec  $\varpi = \frac{1}{\tilde{c}}$ . Malheureusement, nous verrons qu'il est souvent difficile d'appliquer une technique similaire au niveau discret. En particulier, pour démontrer la convergence du schéma de Galerkin Discontinu dans le cas  $\alpha = -i\omega$ , nous nous inspirerons du calcul suivant. On remarque tout d'abord que sous les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.32), le problème adjoint de  $\mathcal{P}_\alpha$ , noté  $\mathcal{P}_\alpha^\#$  défini par : *Trouver*  $\theta \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  *tel que*

$$P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\# \theta := \bar{\alpha} \theta - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \theta = f \in L^2(\Omega) \quad (1.44)$$

est bien posé. De plus,

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{0, \Omega}^2 &\leq C \|f\|_{0, \Omega}^2 \\ &\leq C \|P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\# \theta\|_{0, \Omega}^2 \end{aligned} \quad (1.45)$$

où  $C$  est la constante introduite dans la propriété 1.15 et rappelée ici

$$C = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} & \text{pour } a = 0 \\ \frac{1}{2a} \left( \tau + \frac{e^{-2a\tau} - 1}{2a} \right) & \text{pour } a \neq 0 \end{cases}$$

où  $\tau = \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma^-} \tau_{\mathbf{b}}$  et  $a = \Re \alpha$ . L'idée qui sera reprise dans 3.4 est de poser pour tout  $\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-) \subset L^2(\Omega)$ ,

$$\varphi = (P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi$$

de sorte qu'avec la formule de Green (1.24), il vienne

$$p(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} P_{\alpha, \mathbf{v}_0} \psi \overline{(P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi} dx = \|\psi\|_{0, \Omega}^2.$$

La proposition 1.16 est obtenue en utilisant cette technique.

**Proposition 1.16.** *Sous les hypothèses (1.1), (1.2) et (1.32), la forme bilinéaire  $p$  vérifie une condition inf-sup de la forme (1.43) avec  $\varpi = \frac{1}{2\sqrt{2(1+|\alpha|^2C)}}$  où  $C$  est la constante d'estimation de stabilité introduite dans la propriété 1.15 et rappelée plus haut.*

*Démonstration.* Pour tout  $\psi$  dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ , testons  $p$  par la fonction

$$\varphi = |\alpha|^2 (\mathbf{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi.$$

Nous avons alors en utilisant la formule de Green (1.24) et par définition de  $(\mathbf{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi$  que

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) = \Re \left( |\alpha|^2 \|\psi\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}^2 + \alpha \int_{\Omega} \psi (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi}) dx \right),$$

d'où

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) \geq |\alpha|^2 \|\psi\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}^2 - |\alpha| \|\psi\|_{0, \Omega} \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}.$$

Et ensuite,

$$\Re p(\alpha; \psi, \varphi) \geq \frac{1}{2} \left( |\alpha|^2 \|\psi\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}^2 \right) = \frac{1}{2} \|\psi\|_H^2. \quad (1.46)$$

D'autre part, grâce à l'inégalité (1.45) nous pouvons alors écrire l'estimation

$$\|\varphi\|_{0, \Omega} \leq C^{1/2} |\alpha|^2 \|\psi\|_{0, \Omega} + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}.$$

Après avoir élever l'expression précédente au carré, une nouvelle majoration donne

$$\|\varphi\|_{0, \Omega}^2 \leq 2(1 + |\alpha|^2 C) \|\psi\|_H^2. \quad (1.47)$$

En combinant (1.46) et (1.47), il vient

$$\frac{\Re p(\alpha; \psi, \varphi)}{\|\varphi\|_{0, \Omega}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2(1 + |\alpha|^2 C)}} \|\psi\|_H, \quad \forall \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-).$$

Nous en déduisons alors la condition inf-sup recherchée.  $\square$

**Remarque 1.17.** Le cas du problème d'advection pure pour lequel  $\alpha = 0$  est traité par Azerad dans [6]. Une inégalité de Poincaré courbe de la forme

$$\|\psi\|_{0, \Omega} \leq \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}, \quad \forall \psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$$

est démontrée, également sous l'hypothèse d'un écoulement  $\Omega$ -remplissant. Une condition inf-sup sur  $p(0; \cdot, \cdot)$  peut alors en être déduite en remplaçant la norme  $\|\psi\|_H^2$  par  $\|\psi\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0, \Omega}^2$ .

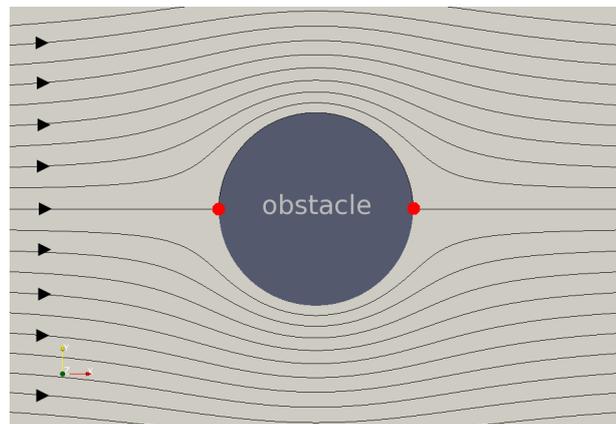


FIG. 1.14: Lignes de courant autour d'un cercle.



## Chapitre 2

# Schémas numériques pour le problème de transport harmonique

L'objectif de ce chapitre est d'appréhender les difficultés de l'approximation des équations aux dérivées partielles d'ordre un et de sélectionner l'approche la plus pertinente pour traiter l'équation de transport harmonique. Pour les besoins de nos applications en acoustique, nous voulons que cette méthode calcule la solution approchée sur un maillage non structuré et pour un écoulement  $\mathbf{v}_0$  arbitraire obtenu au préalable et donné par exemple sur les noeuds du maillage. Il est donc préférable d'écarter l'approche par courbes caractéristiques qui pourtant nous a permis d'obtenir le principal résultat d'analyse du chapitre précédent. Nous envisageons plutôt une méthode d'approximation de type éléments finis et nous abordons alors le problème de façon variationnelle.

Nous nous focalisons sur l'équation d'advection qui met facilement en évidence la nécessité d'utiliser des techniques de stabilisation. L'analyse théorique des schémas pour l'équation de transport harmonique n'est pas immédiate, elle est reportée au chapitre 3. A notre connaissance, il n'existe pas de référence traitant spécifiquement cette équation. Par contre, le problème voisin d'advection-réaction est fréquemment abordé. Nous nous appuyons sur son analyse afin de dresser les premières conclusions quant à la pertinence des schémas numériques envisagés pour les équations de transport. Cependant, il ne faut pas perdre de vue une des caractéristiques du problème de transport harmonique qu'est le comportement fortement oscillatoire de sa solution et qui n'existe pas pour l'advection-réaction. L'évaluation des schémas en terme de dispersion et de dissipation apparaît intéressante pour notre problème.

La méthode de Galerkin continue, une approche par éléments finis des plus classiques, n'est pas appropriée pour les équations aux dérivées partielles d'ordre un. L'analyse de l'erreur a priori que nous faisons pour le transport met effectivement en évidence la sous-optimalité de ce schéma. Celle-ci se traduit numériquement par l'apparition de signaux parasites dans la solution approchée.

Une parade couramment employée consiste à stabiliser la formulation de Galerkin en introduisant de la dissipation dans le schéma. Nous faisons un état de l'art succinct sur ces techniques de stabilisation également appelées méthodes de Galerkin-Petrov et nous nous intéressons en particulier aux formulations SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) et moindres carrés (LS pour least-square) pour lesquelles le caractère elliptique de la formulation est restauré en ajoutant à la fonction test un terme de dérivée convective. Les résultats d'analyse montrent en effet des améliorations au niveau de la stabilité des schémas numériques. Néanmoins, l'utilisation de ce type d'approche est réhibitoire pour le transport harmonique. En effet, la dissipation induite par ces schémas nécessite généralement l'utilisation de maillages fins générant ainsi un coût de calcul prohibitif.

Enfin, nous envisageons de mettre en place une approche de Galerkin discontinue, approche classiquement adaptée aux problèmes de transport, et qui a également fait ses preuves pour les

phénomènes de propagation d'ondes (en électromagnétisme par exemple). Après avoir dressé un bref état de l'art dans le cas de l'advection-réaction, nous construisons la formulation naturelle qui correspond à un schéma centré. Les illustrations numériques montrent qu'il est nécessaire de stabiliser la formulation. Nous introduisons alors la formulation décentrée dite upwind qui nous donne des résultats numériques satisfaisants. L'analyse complète est faite au chapitre suivant. Après avoir illustré les caractéristiques des schémas, nous les évaluons en terme de dispersion et dissipation afin de mettre en évidence les qualités de la formulation DG par rapport aux formulations de type Petrov-Galerkin.

## 2.1 La méthode de Galerkin classique

Dans cette section, nous commençons par écrire le problème approché par la méthode de Galerkin classique. Ensuite, nous montrons par des exemples numériques que cette méthode n'est pas appropriée pour notre problème. Une analyse du schéma en terme d'erreur de convergence met alors en évidence la sous optimalité de cette méthode.

### 2.1.1 La formulation classique

La méthode de Galerkin consiste à chercher la solution dans un espace d'approximation qui est inclus dans l'espace continu  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  et qui est constitué de fonctions continues sur  $\Omega$  et polynomiales sur chaque élément  $K$  du maillage  $\mathcal{T}_h$  de pas  $h$ . Cet espace s'exprime

$$V_{h,0} = \{v_h \in C_0(\bar{\Omega}); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathbb{P}^k \text{ et } v_h|_{\Gamma^-} = 0\}, \quad (2.1)$$

où  $\mathbb{P}^k$  est l'ensemble des fonctions polynomiales d'ordre supérieur ou égal à  $k$  avec  $k \in \mathbb{N}^+$ . Afin d'obtenir un problème discret comprenant autant d'équations que d'inconnues, les fonctions tests sont également prises dans cet espace d'approximation. Notons que ceci n'est pas naturel puisque la fonction test n'est pas dérivée et pourrait être choisie moins régulière que l'inconnue (discontinue d'un élément à l'autre par exemple). On parle alors de formulation Galerkin-Budnov. Le problème approché s'exprime à l'aide de la forme bilinéaire continue

$$p(\alpha; \cdot, \cdot) : W \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

$$(\psi, \varphi) \longmapsto p(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} (\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi)\bar{\varphi} \, dx$$

de la façon suivante : Trouver  $\psi_h$  dans  $V_{h,0}$  tel que

$$p(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \ell(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in V_{h,0}, \quad (2.2)$$

où  $W$  désigne pour simplifier l'espace  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  défini au chapitre précédent.

### 2.1.2 Exemples numériques

Nous définissons maintenant deux configurations du problème de transport dont nous nous servons au cours de ce chapitre pour tester les méthodes d'approximation envisagées. Prenons un domaine  $\Omega$  rectangulaire tel que  $\Omega = ]-L, L[ \times ]-H, H[$  avec  $L$  et  $H$  deux réels positifs. L'écoulement porteur est pris horizontal et orienté de la gauche vers la droite. Le profil de vitesse, représenté sur la figure 2.1, dépend uniquement de  $x_2$  de sorte que

$$\mathbf{v}_0 = v_0(x_2)\mathbf{e}_{x_1}, \text{ avec } v_0(x_2) > v_0 > 0 \quad \forall x_2 \in ]-H, H[.$$

Nous déterminons la solution approchée du problème

$$\begin{cases} \alpha\psi + v_0(x_2)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = f & \text{sur } \Omega \\ \psi = g & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

dans le cas de l'advection-réaction ( $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ) et dans le cas du transport harmonique ( $\alpha = -i\omega$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ ). Nous nous intéressons à deux configurations différentes :

- Cas 1 : le terme source  $f$  est nul et la condition à la limite sur  $\Gamma^-$  est non nulle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ g(x_2) &= 1 \quad \forall x_2 \in \Gamma^-. \end{aligned}$$

- Cas 2 :  $f$  est non nul et la condition à la limite sur  $\Gamma^-$  est homogène, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_s(x_1, x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ g(x_2) &= 0 \quad \forall x_2 \in \Gamma^- \end{aligned}$$

avec  $f_s(x_1, x_2) = A_s \exp\left(-\frac{|x_1 - x_{1s}| + |x_1 - x_{2s}|}{r_s}\right)$  où  $(x_{1s}, x_{2s})$  et  $r_s$  sont respectivement le centre et le rayon de la source  $f_s$  et  $A_s$  est un paramètre réel.

Dans les deux cas, la solution exacte du problème est connue. Son expression analytique, déjà donnée au chapitre précédent, s'écrit

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{v_0(x_2)} \int_0^{x_1} f(s, x_2) e^{-\frac{\alpha}{v_0(x_2)}(x_1-s)} ds + g(x_2) e^{-\frac{\alpha}{v_0(x_2)}x_1}.$$

Les figures 2.2 et 2.3 représentent la solution exacte des problèmes d'advection-réaction et de transport harmonique obtenues dans chacun des deux cas. Remarquons que dans le cas 1 la solution exacte est très régulière ( $H^2(\Omega)$ ) alors que dans le cas 2, elle est moins que  $H^2(\Omega)$  (à cause des valeurs absolues dans l'expression de  $f_s$ ).

Les simulations numériques réalisées montrent que la méthode de Galerkin classique a des difficultés à restituer la solution lorsque celle-ci n'est pas suffisamment régulière. En effet, pour le transport harmonique dans les cas 1 et 2, la solution approchée est entachée de signaux parasites comme le montre la figure 2.4. Nous observons pareillement ce genre de pollution sur la solution approchée du problème d'advection-réaction mais seulement dans le cas 2. Dans le cas 1, elle est obtenue avec très peu d'erreur. Nous ne l'avons pas représenté ici car la visualisation est similaire à la solution exacte de la figure 2.2. Cependant, nous pourrions voir que la prise en compte d'une condition à la limite discontinue de la forme

$$g(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 < 0 \\ 0 & \text{si } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

conduit de nouveau à l'apparition de signaux pollués comme ceux de la figure 2.5.

**Remarque 2.1.** Les résultats numériques montrent qu'aucune des méthodes d'approximation étudiées dans ce chapitre n'a de difficulté à restituer la solution du problème d'advection-réaction dans le cas 1. Les difficultés éventuelles se manifestent par exemple pour une condition à la limite discontinue. Dans la suite, nous ne reviendrons pas sur ce test.

### 2.1.3 Condition inf-sup en norme du graphe : stabilité non uniforme

A  $h$  fixé, le problème approché par la méthode de Galerkin classique est bien posé. En effet, pour  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ , on montre dans [44] que la forme bilinéaire  $p$  du problème 1D vérifie sur  $V_{h,0} \times V_{h,0}$  une relation de stabilité en  $\mathcal{O}(h)$  de la forme

$$\varpi_h := \inf_{\psi_h \in V_{h,0}} \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_H \|\varphi_h\|_{0,\Omega}} = \mathcal{O}(h) > 0 \quad (2.3)$$

où  $\|\cdot\|_H$  désigne la norme du graphe définie par  $\|\psi_h\|_H = \|\psi_h\|_{0,\Omega} + \|\nabla \psi_h \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}$ . En outre, nous pouvons vérifier, par détermination numérique de la constante inf-sup, que ce résultat est

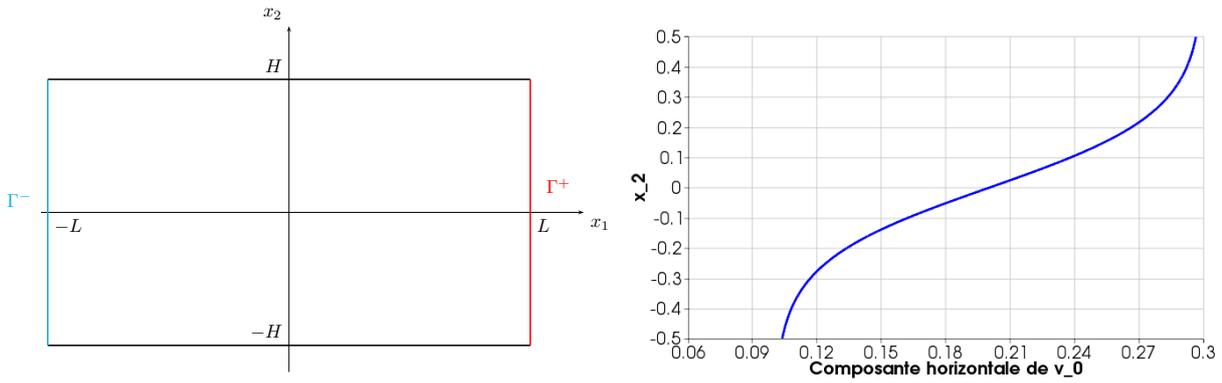


FIG. 2.1: Définition du domaine  $\Omega$  et profil de l'écoulement porteur  $v_0$ .

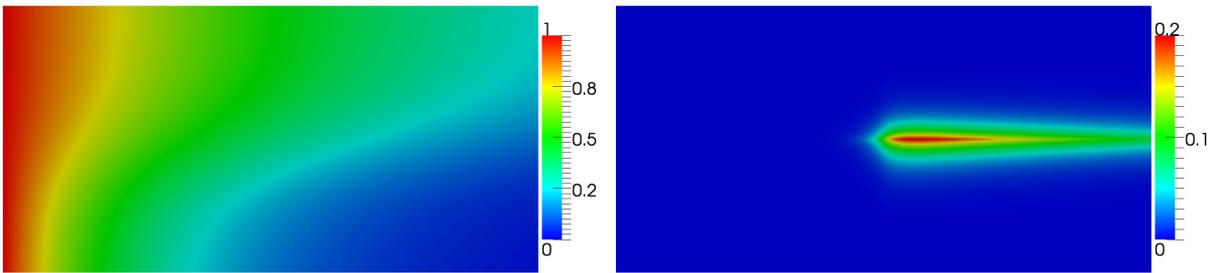


FIG. 2.2: Solution exacte du problème d'avection réaction ( $\alpha = \frac{1}{5}$ ) dans le cas 1 (à gauche) et le cas 2 (à droite).

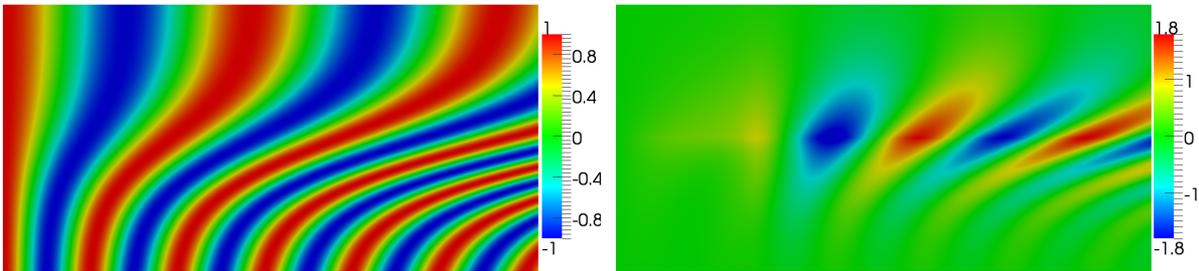


FIG. 2.3: Partie réelle de la solution exacte du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) dans le cas 1 (à gauche) et le cas 2 (à droite).

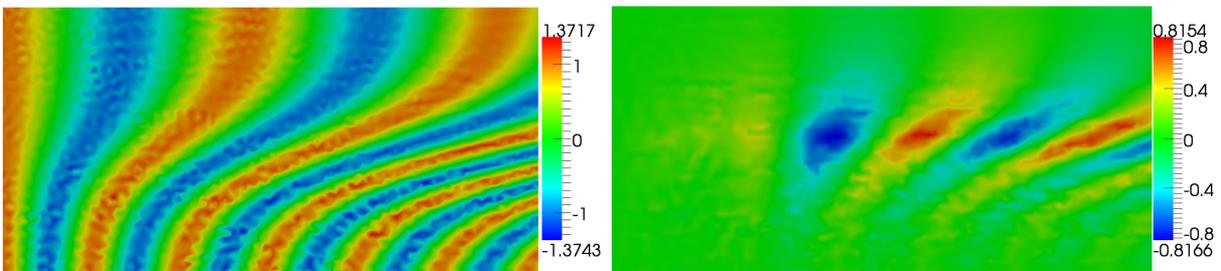


FIG. 2.4: Exemple de signaux parasites obtenus sur la solution du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) calculée par les schémas de Galerkin classique et Galerkin discontinu centré dans le cas 1 (à gauche) et 2 (à droite).

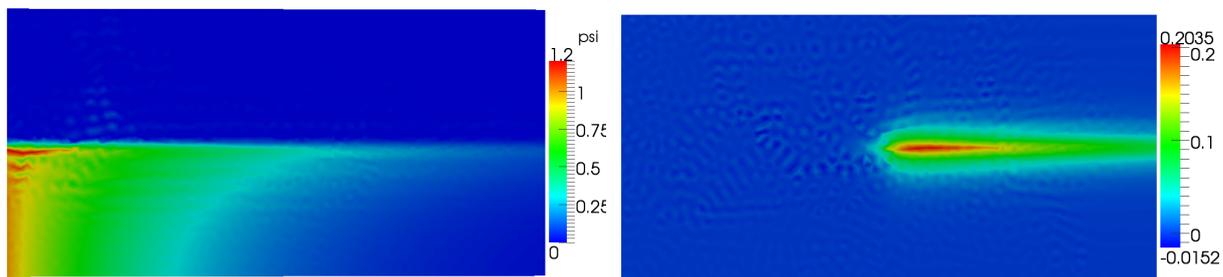


FIG. 2.5: Exemple de signaux parasites sur les solutions du problème d'advection-réaction ( $\alpha = \frac{1}{5}$ ) obtenues par les schémas de Galerkin classique et Galerkin discontinu centré dans le cas 1 avec condition à la limite discontinue (à gauche) et dans le cas 2 (à droite).

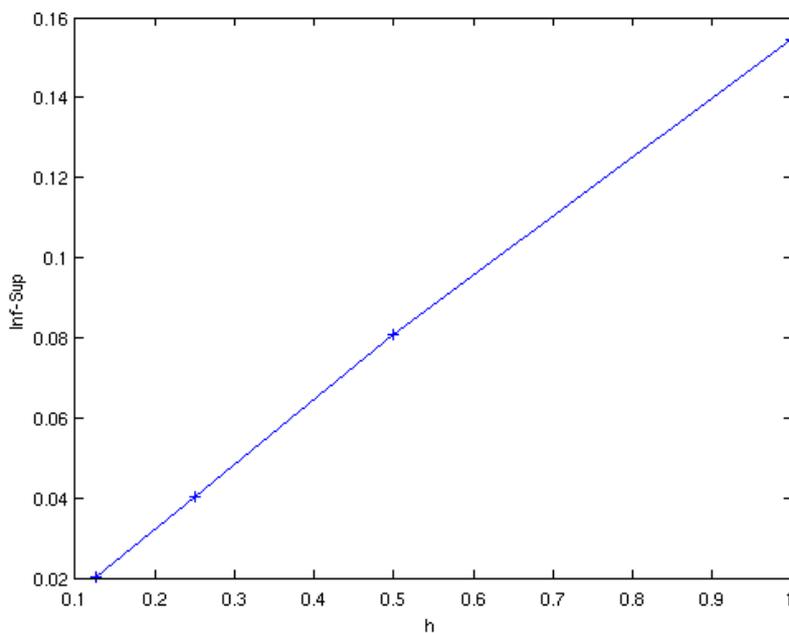


FIG. 2.6: Constante inf-sup en fonction du pas de maillage  $h$  pour le problème de transport harmonique.

également valide en  $2D$  et dans le cas du transport harmonique. Le calcul est détaillé en annexe E. Il s'agit en fait de la résolution numérique d'un problème aux valeurs propres généralisées [10] que nous réalisons pour une famille de maillages. Nous obtenons la figure 2.6 qui représente la condition inf-sup exprimée en norme du graphe en fonction du pas de maillage  $h$ . La condition inf-sup décroît proportionnellement à  $h$  lorsqu'on raffine le maillage. Autrement dit, elle se comporte en  $\mathcal{O}(h)$ . Nous pouvons alors vérifier que

$$\|\psi_h\|_H \leq \frac{1}{\varpi_h} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.4)$$

En effet, d'après la relation (2.3), si  $\psi_h$  est solution de (2.2), il vient

$$\|\psi_h\|_H \leq \frac{1}{\varpi_h} \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}} = \frac{1}{\varpi_h} \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re \int_{\Omega} f \varphi_h dx}{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}} = \frac{1}{\varpi_h} \|f\|_{0,\Omega}.$$

Lorsque  $h$  devient petit, le second membre de (2.4) explose ce qui annonce un problème de stabilité de la méthode.

De plus, l'estimation d'erreur en norme  $\|\cdot\|_H$  est sous-optimale. Considérons  $\Pi_h$  le projecteur de  $W = H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$  dans  $V_{h,0}$  optimal pour la norme du graphe  $\|\cdot\|_H$ . De même par la relation (2.3), nous avons

$$\varpi_h \leq \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_H \|\varphi_h\|_{0,\Omega}}, \quad \forall \psi_h \in V_{h,0}.$$

En particulier, l'erreur discrète  $e_h := \Pi_h \psi - \psi_h$  est dans  $V_{h,0}$ , d'où

$$\varpi_h \|\Pi_h \psi - \psi_h\|_H \leq \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \Pi_h \psi - \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}}, \quad \forall \psi_h \in V_{h,0}.$$

Par consistance de l'approximation, nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} \varpi_h \|\Pi_h \psi - \psi_h\|_H &\leq \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \Pi_h \psi - \psi + \psi - \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}} \\ &= \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \Pi_h \psi - \psi, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\varpi_h \|\Pi_h \psi - \psi_h\|_H \leq \|\alpha(\Pi_h \psi - \psi) + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\Pi_h \psi - \psi)\|_{0,\Omega} \leq C \|\Pi_h \psi - \psi\|_H.$$

D'où, par l'inégalité triangulaire

$$\|\psi - \psi_h\|_H \leq \|\psi - \Pi_h \psi\|_H + \|\Pi_h \psi - \psi_h\|_H,$$

il vient l'estimation d'erreur

$$\|\psi - \psi_h\|_H \leq \left(1 + \frac{C}{\varpi_h}\right) \inf_{w_h \in V_h} \|\psi - w_h\|_H$$

qui est sous-optimale car  $\varpi_h$  est en  $\mathcal{O}(h)$ . Lorsque le pas de maillage devient petit, nous avons un mauvais contrôle de l'erreur exprimée avec la norme  $\|\cdot\|_H$ . Nous pouvons imaginer que ce sont les oscillations parasites observées sur les figures précédentes qui alimentent la dégradation de l'erreur.

Même si l'analyse est menée dans une norme moins forte que la norme  $\|\cdot\|_H$ , nous aboutissons également à la sous-optimalité de la méthode. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 2.1.4 Analyse en norme dite énergie : stabilité uniforme mais estimation d'erreur sous-optimale

D'après le corollaire 1.7, lorsque  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ , la forme bilinéaire  $p$  satisfait la relation :  $\forall \psi_h \in V_{h,0}$ ,

$$\Re p(\alpha; \psi_h, \psi_h) = |\alpha| \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2} \psi_h\|_{0,\Gamma^+}^2, \quad (2.5)$$

puisque  $V_{h,0}$  est inclus dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^-)$ . Cette relation nous fournit l'expression d'une nouvelle norme ne faisant pas intervenir la dérivée convective :

$$\|\psi_h\|_E^2 := |\alpha| \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2} \psi_h\|_{0,\Gamma^+}^2.$$

Nous l'appellerons ici norme énergie. La méthode de Galerkin classique est uniformément stable avec cette norme. En effet :

**Proposition 2.2.** *Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ . La forme bilinéaire  $p$  est uniformément stable pour la norme  $\|\cdot\|_E$ , plus précisément la condition inf-sup suivante est vérifiée*

$$\inf_{\psi_h \in V_{h,0}} \sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_E \|\varphi_h\|_E} \geq \varpi > 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\psi_h \in V_{h,0}$ . Pour tout  $\varphi_h$  de  $V_{h,0}$ , nous avons d'après la relation (2.5)

$$\sup_{\varphi_h \in V_{h,0}} \frac{\Re p(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_E} \geq \frac{\Re p(\alpha; \psi_h, \psi_h)}{\|\psi_h\|_E} \geq \|\psi_h\|_E, \quad \forall \psi_h \in V_{h,0}. \quad (2.6)$$

L'inégalité précédente est en particulier vraie pour l'inf sur les  $\psi_h$  de  $V_{h,0}$ . □

**Remarque 2.3.** Nous aurions pu aussi obtenir la même condition inf-sup dans le cas du problème de transport harmonique. Cependant, la démonstration aurait demandé de construire un champ test particulier en utilisant le problème adjoint ainsi qu'un opérateur de projection sur l'espace discret. Nous avons déjà parlé de cette manipulation supplémentaire à la fin du chapitre 1 et nous la détaillerons complètement au chapitre 3 pour le schéma de Galerkin discontinu.

Afin d'estimer l'erreur en norme énergie, il faut un résultat de continuité exprimé avec cette même norme :

**Proposition 2.4.** *La forme bilinéaire  $p$  vérifie sur  $W \times V_{h,0}$  l'estimation suivante :*

$$|p(\alpha; \psi, \varphi_h)| \leq C_E \|\psi\|_E \left( \|\varphi_h\|_E^2 + \|\nabla \varphi_h \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad \forall (\psi, \varphi_h) \in W \times V_{h,0}. \quad (2.7)$$

*Démonstration.* Soient  $(\psi, \varphi_h) \in W \times V_{h,0}$ . Une intégration par parties permet d'écrire

$$p(\alpha; \psi, \varphi_h) = \int_{\Omega} \psi (\alpha \overline{\varphi_h} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \overline{\varphi_h}) dx + \int_{\Gamma^+} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \psi \overline{\varphi_h} d\gamma.$$

Le résultat est ensuite obtenu par inégalité de Cauchy-Schwarz. □

L'estimation d'erreur en norme énergie est sous-optimale :

**Proposition 2.5.** *L'approximation de Galerkin classique (2.2) vérifie une estimation d'erreur en norme énergie de la forme :*

$$\|\psi - \psi_h\|_E \leq C_E \left( 1 + \frac{C(\mathbf{v}_0)}{h^2} \right)^{1/2} \inf_{v_h \in V_{h,0}} \|\psi - v_h\|_E.$$

*Démonstration.* Soit  $\Pi_h$  le projecteur optimal pour la norme  $\|\cdot\|_E$ . Par inégalité triangulaire, nous avons

$$\|\psi - \psi_h\|_E \leq \|\psi - \Pi_h\psi\|_E + \|\Pi_h\psi - \psi_h\|_E. \quad (2.8)$$

Déterminons un contrôle de l'erreur discrète en norme énergie. La relation de coercivité (2.5) donne

$$\begin{aligned} \|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E^2 &= \Re p(\alpha; \psi_h - \Pi_h\psi, \psi_h - \Pi_h\psi) \\ &= \Re p(\alpha; \psi_h - \psi + \psi - \Pi_h\psi, \psi_h - \Pi_h\psi). \end{aligned}$$

Ensuite, par consistance de la méthode, il vient

$$\|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E^2 = p(\alpha; \psi - \Pi_h\psi, \psi_h - \Pi_h\psi).$$

En utilisant la propriété de continuité (2.7) de  $p$ , nous avons l'estimation

$$\|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E^2 \leq C_E \|\psi - \Pi_h\psi\|_E \left( \|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E^2 + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\psi_h - \Pi_h\psi)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Ensuite, lorsque  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  est une famille régulière de maillages affines du domaine  $\Omega$ , nous avons l'inégalité inverse suivante vérifiée pour toute fonction  $\varphi_h$  de  $V_{h,0}$

$$\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C(\mathbf{v}_0) \frac{\|\varphi_h\|_{0,\Omega}^2}{h^2} \quad (2.9)$$

avec  $C(\mathbf{v}_0)$  indépendant de  $h$ . Avec cette inégalité inverse, l'estimation précédente devient

$$\|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E^2 \leq C_E \left( 1 + \frac{C(\mathbf{v}_0)}{h^2} \right)^{1/2} \|\psi - \Pi_h\psi\|_E \|\psi_h - \Pi_h\psi\|_E$$

où un terme en  $h$  intervient au dénominateur de la constante. Enfin, la propriété résulte de la combinaison de l'estimation précédente avec la relation (2.8).  $\square$

La condition inf-sup exprimée avec la norme énergie est certes uniforme. Mais elle est exprimée en norme énergie et donc ne fait pas intervenir la norme de la dérivée convective. En conséquence, l'inégalité inverse utilisée pour avoir la norme adéquate sur la propriété de continuité fait apparaître un terme en  $h^{-1}$  dans l'estimation d'erreur. De nouveau, nous aboutissons à la sous-optimalité de la méthode de Galerkin classique.

En fait, il est bien connu que les méthodes de type Galerkin-Budnov conduisent à des approximations sous-optimales des problèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre un. Il y a alors, dans certains cas, apparitions d'oscillations parasites dans les solutions calculées comme vu précédemment et parfois même non convergence pour des données peu régulières. Pour éviter ces phénomènes, une approche classique consiste à utiliser une formulation stabilisée de la méthode Galerkin classique. C'est l'objet du prochain paragraphe.

## 2.2 La formulation de Petrov-Galerkin

Les méthodes de stabilisation de la formulation de Galerkin, aussi appelées approches de Petrov-Galerkin, ont été conçues pour traiter des problèmes de mécanique des fluides pour lesquels des termes de convection sont dominants. En particulier, les équations d'advection-réaction-diffusion et advection-diffusion [77, 59] avec advection dominante ainsi que l'équation de la neutro- nique ont motivé de nombreuses études sur les méthodes de stabilisation. Elles consistent à récupérer de l'ellipticité par l'ajout de termes de convection dans la formulation. Les approches Galerkin-Petrov se caractérisent également par le choix de deux espaces discrets différents pour l'espace des

fonctions tests et l'espace des solutions. Par exemple, les méthodes DPG [37] consistent à choisir l'espace des fonctions tests de façon à ce qu'il permette d'aboutir à des estimations d'erreurs optimales. Une revue détaillée des méthodes de Petrov-Galerkin est proposée dans [46]. Certes ces formulations améliorent la stabilité, mais les schémas numériques obtenus ont un comportement fortement dissipatif. Pour les problèmes hyperboliques purs ne faisant pas intervenir de terme de diffusion, cette forte dissipation n'est pas acceptable. Dans cette section, nous présentons la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) et la méthode des moindres carrés (ou LS pour least square) qui sont deux formulations de Galerkin-Petrov fréquemment utilisées.

### 2.2.1 Formulation générale de l'approche Petrov-Galerkin

Cette formulation consiste à tester la forme bilinéaire avec une fonction de  $L^2(\Omega)$  exprimée à l'aide d'un isomorphisme  $\mathcal{P}$  d'ordre un tel que

$$\mathcal{P} : W \longrightarrow L^2(\Omega).$$

La formulation Petrov-Galerkin du problème de transport s'exprime alors à l'aide de cet opérateur sous la forme suivante :

Trouver  $\psi_h$  dans  $V_{h,0} \subset W$  tel que

$$p(\alpha; \psi_h, \mathcal{P}\varphi_h) = \ell(\mathcal{P}\varphi_h), \forall \varphi_h \in V_{h,0} \quad (2.10)$$

où quelle que soit la fonction  $\varphi_h$ , la fonction test  $\mathcal{P}\varphi_h$  est dans un espace d'approximation  $T_{h,0} \subset L^2(\Omega)$  différent de l'espace des solutions  $V_{h,0}$ .

En outre, l'introduction dans le schéma de la dissipation le long des lignes de courant est réalisée par l'opérateur  $\mathcal{P}$  grâce à un terme d'advection. La formulation SUPG, introduite par Brooks et Hughes dans [29], s'exprime avec

$$\mathcal{P}_{\text{SUPG}} : \varphi_h \longmapsto \varphi_h + \delta_h \nabla \varphi_h \cdot \mathbf{v}_0$$

où  $\delta_h$  est le paramètre de stabilisation permettant de contrôler la quantité de dissipation introduite dans le schéma et d'ajuster sa stabilité. Pour la formulation moindres carrés [18, 19],  $\mathcal{P}$  est choisi égal à l'opérateur de transport :

$$\mathcal{P}_{\text{LS}} : \varphi_h \longmapsto \alpha \varphi_h + \nabla \varphi_h \cdot \mathbf{v}_0.$$

Dans la suite, nous étudions succinctement chacune de ces deux formulations afin d'évaluer leur pertinence pour le problème de transport.

### 2.2.2 Formulation LS : stabilisation indépendante du pas de maillage

Nous considérons le problème variationnel suivant  
Trouver  $\psi$  dans  $W$  tel que

$$\int_{\Omega} (\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \overline{(\alpha \varphi + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_0)} dx = \int_{\Omega} f \overline{(\alpha \varphi + \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_0)} dx, \forall \varphi \in W. \quad (2.11)$$

Notons  $p_{\text{LS}}$  la forme bilinéaire associée à ce problème. Nous avons en fait

$$p_{\text{LS}}(\alpha; \psi, \varphi) = p(\alpha; \psi, \alpha \varphi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi), \forall \psi, \varphi \in W.$$

En utilisant les propriétés de  $p$ , nous montrons de façon immédiate que la forme  $p_{\text{LS}}$  est coercive et continue sur  $W \times W$  et entre ainsi dans le cadre du théorème de Lax-Milgram. Ce résultat est obtenu avec une norme fournissant le contrôle du terme convectif.

**Proposition 2.6.** *Pour  $\alpha$  complexe non nul, la forme définie par*

$$\|\varphi\|_{LS}^2 := p_{LS}(\alpha; \varphi, \varphi)$$

*est une norme sur  $W$ . Plus précisément, il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que*

$$c_1 \|\varphi\|_H \leq \|\varphi\|_{LS} \leq c_2 \|\varphi\|_H, \forall \varphi \in W. \quad (2.12)$$

*En conséquence, le problème (2.11) est bien posé dans  $W$  et la solution vérifie la relation de stabilité*

$$\|\psi\|_{LS} \leq \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.13)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 1.16,  $p$  vérifie une condition inf-sup de la forme (1.43). Nous avons alors  $\forall \psi \in W$

$$\varpi \|\psi\|_H \leq \sup_{\varphi \in L^2(\Omega)} \frac{p(\alpha; \psi, \varphi)}{\|\varphi\|_{0,\Omega}} = \|\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|_{LS}, \quad (2.14)$$

et par définition de  $\|\psi\|_{LS}$ , il vient directement  $\|\psi\|_{LS} \leq \|\psi\|_H$ . Donc la forme bilinéaire associée  $p_{LS}$  est un produit scalaire sur  $W$ . En conséquence, elle est continue et coercive sur  $W \times W$  par l'inégalité (2.12). D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème (2.11) admet une unique solution dans  $W$ . De plus sa solution est stable, en effet l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$\|\psi\|_{LS}^2 = p_{LS}(\alpha; \psi, \psi) = \int_{\Omega} f \overline{(\alpha\psi + \nabla\psi \cdot \mathbf{v}_0)} dx \leq \|f\|_{0,\Omega} \|\alpha\psi + \nabla\psi \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega},$$

d'où l'inégalité (2.13).  $\square$

La solution approchée  $\psi_h$  est recherchée dans l'espace d'approximation  $V_{h,0}$  définie par la relation (2.1) et le problème discret s'écrit

Trouver  $\psi_h$  dans  $V_{h,0} \subset W$  tel que

$$p_{LS}(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \int_{\Omega} f \overline{(\alpha\varphi_h + \nabla\varphi_h \cdot \mathbf{v}_0)} dx, \forall \varphi_h \in V_{h,0}. \quad (2.15)$$

Par application du lemme de Céa, nous avons la

**Proposition 2.7.** *L'estimation d'erreur associée au problème (2.15) est quasi-optimale et l'estimation*

$$\|\psi - \psi_h\|_{LS} \leq (1 + C) \inf_{w_h \in V_{h,0}} \|w_h - \psi\|_{LS}$$

*est vérifiée avec  $C$  une constante positive.*

La formulation  $LS$  semble d'autant plus appropriée que cette estimation d'erreur optimale est exprimée en norme  $\|\cdot\|_{LS}$ . Nous contrôlons non seulement l'erreur  $L^2(\Omega)$  sur la solution mais aussi sur sa dérivée convective. Pourtant, les résultats numériques n'apportent pas entière satisfaction. En effet, le schéma obtenu s'avère avoir un comportement fortement dissipatif, en particulier pour  $\alpha = -i\omega$ .

Nous résolvons par cette méthode les cas tests 1 et 2 présentés au paragraphe 2.1.2 sur deux maillages différents, l'un de pas  $h$  et l'autre plus raffiné de pas  $h/4$ . Il n'y a pas de signaux parasites dans les résultats obtenus mais la comparaison de la solution calculée avec la solution exacte montrent des défauts d'amplitude visibles sur les figures 2.7 et 2.8. Pour le transport harmonique avec le maillage de pas  $h$ , le caractère elliptique du schéma est encore plus pénalisant puisqu'il entraîne même une remontée du signal vers l'amont du terme source  $f$  : le schéma ne sait pas privilégier un sens de convection plutôt que l'autre. Nous pourrions obtenir une approximation acceptable, mais pour cela il faudrait raffiner, et donc augmenter la taille du système à inverser, de façon drastique.

### 2.2.3 Formulation SUPG : paramètre de stabilisation en $\mathcal{O}(h)$

Afin de choisir la quantité de diffusion introduite dans le schéma, nous pondérons le terme advectif de la fonction test par un paramètre. Partant du constat que la dissipation du schéma  $LS$  est d'autant plus forte que le maillage est grossier, nous prenons un paramètre de stabilisation  $\delta_h$  réel proportionnel à  $h$  le pas de maillage. Nous utilisons l'opérateur

$$\mathcal{P}_{\text{SUPG}} : \varphi_h \longmapsto \varphi_h + \delta_h \nabla \varphi_h \cdot \mathbf{v}_0$$

pour exprimer le problème variationnel :  
Trouver  $\psi$  dans  $W$  tel que

$$\int_{\Omega} (\alpha \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \overline{(\varphi + \delta_h \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_0)} dx = \int_{\Omega} f \overline{(\varphi + \delta_h \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_0)} dx, \forall \varphi \in W. \quad (2.16)$$

L'approximation conforme associée s'exprime de façon analogue à (2.15) par  
Trouver  $\psi_h$  dans  $V_{h,0} \subset W$  tel que

$$p_{\text{supg}}(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \int_{\Omega} f \overline{(\varphi_h + \delta_h \nabla \varphi_h \cdot \mathbf{v}_0)} dx, \forall \varphi_h \in V_{h,0}. \quad (2.17)$$

La forme bilinéaire  $p_{\text{supg}}$  de ce nouveau schéma vérifie aussi une estimation de stabilité. Mais celle-ci est obtenue dans une norme moins forte que la norme  $\|\cdot\|_H$ . Il y a affaiblissement du contrôle du terme convectif.

**Proposition 2.8.** *La forme bilinéaire  $p_{\text{supg}}$  vérifie pour toute fonction  $\psi$  de  $W$  la relation de coercivité suivante :*

$$p_{\text{supg}}(\alpha; \psi, \psi) \geq C \|\psi\|_{H,\delta_h}^2$$

où  $C$  est une constante positive et où la norme  $\|\psi\|_{H,\delta_h}^2$  dépend du paramètre de stabilisation et est définie par

$$\|\psi\|_{H,\delta_h}^2 := \|\alpha^{1/2} \psi\|_{0,\Omega}^2 + \|(\delta_h)^{1/2} \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}^2 + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2} \psi\|_{0,\Gamma^+}^2.$$

*Démonstration.* Soit  $\psi$  dans  $W$ . Nous avons

$$\Re p_{\text{supg}}(\alpha; \psi, \psi) = \int_{\Omega} \alpha |\psi|^2 + \delta_h |\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) |\psi|^2 d\gamma + \Re \left( \alpha \delta_h \int_{\Omega} \psi \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\psi} dx \right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Re p_{\text{supg}}(\alpha; \psi, \psi) &\geq \|\alpha^{1/2} \psi\|_{0,\Omega}^2 + \|(\delta_h)^{1/2} \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2} \psi\|_{0,\Gamma^+}^2 \\ &\quad - \|\alpha^{1/2} \psi\|_{0,\Omega} \|(\delta_h)^{1/2} \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement

$$\Re p_{\text{supg}}(\alpha; \psi, \psi) \geq \frac{1}{2} \left( \|\alpha^{1/2} \psi\|_{0,\Omega}^2 + \|(\delta_h)^{1/2} \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0\|_{0,\Omega}^2 + \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2} \psi\|_{0,\Gamma^+}^2 \right).$$

□

De façon classique, nous avons une relation de continuité exprimée à l'aide de la norme  $\|\cdot\|_{H,\delta_h}$ .

**Proposition 2.9.** *La forme bilinéaire  $p_{\text{supg}}$  est continue sur  $W \times W$  et*

$$|p_{\text{supg}}(\alpha; \psi, \varphi)| \leq \|\psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H,\delta_h},$$

avec  $\|\psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}}^2 := \|\psi\|_{H,\delta_h}^2 + \|\delta_h^{-1/2} \psi\|_{0,\Omega}^2$ .

*Démonstration.* Nous avons,  $\forall(\psi, \varphi) \in W \times W$

$$p_{supg}(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} (\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi)\bar{\varphi} dx + \int_{\Omega} \delta_h(\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi)\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\bar{\varphi} dx.$$

Par intégration par parties sur le premier terme, il vient

$$p_{supg}(\alpha; \psi, \varphi) = \int_{\Omega} \psi(\alpha\bar{\varphi} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\bar{\varphi}) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})\psi\bar{\varphi} d\gamma + \int_{\Omega} \delta_h(\alpha\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi)\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\bar{\varphi} dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'obtenir le résultat suivant

$$|p_{supg}(\alpha; \psi, \varphi)| \leq C \left( \|\alpha\|^{1/2} \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \|\delta_h^{-1/2}\psi\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2}\psi\|_{0,\Gamma^+}^2 + \|\delta_h^{1/2}\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2} \\ \left( \|\alpha\|^{1/2} \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \|\delta_h^{1/2}\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2}\varphi\|_{0,\Gamma^+}^2 \right)^{1/2}.$$

□

Nous pouvons alors estimer l'erreur en norme  $\|\cdot\|_{H,\delta_h}$ .

**Proposition 2.10.** *L'estimation d'erreur associée au problème (2.17) est quasi-optimale pour la norme  $\|\cdot\|_{H,\delta_h}$  :*

$$\|\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h} \leq (1 + C) \inf_{w_h \in V_{h,0}} \|w_h - \psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}}$$

avec  $C$  une constante positive. Si de plus  $\psi \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$  et  $\delta_h = \delta h$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$ , il vient

$$\|\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h} \preccurlyeq h^{k+1/2} \|\psi\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)}.$$

*Démonstration.* Soit  $\Pi_h$  le projecteur de  $W$  dans  $V_{h,0}$  optimal pour la norme  $\|\cdot\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}}$ . La proposition 2.8 ainsi que la consistance de la formulation SUPG conduisent à

$$\|\Pi_h\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h}^2 \leq p_{supg}(\alpha; \Pi_h\psi - \psi, \Pi_h\psi - \psi_h).$$

La relation de continuité de la proposition 2.9 donne alors

$$\|\Pi_h\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h}^2 \leq C \|\Pi_h\psi - \psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}} \|\Pi_h\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h}.$$

Nous avons donc par inégalité triangulaire

$$\|\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h} \leq \|\psi - \Pi_h\psi\|_{H,\delta_h} + \|\Pi_h\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h} \\ \leq \|\psi - \Pi_h\psi\|_{H,\delta_h} + \|\Pi_h\psi - \psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}},$$

d'où la première inégalité de la proposition, par définition du projecteur optimal. Notons  $\mathcal{I}_h^k$  l'interpolateur de Lagrange sur  $V_{h,0}$ . Nous avons

$$\|\psi - \psi_h\|_{H,\delta_h} \leq (1 + C) \inf_{w_h \in V_{h,0}} \|\psi - w_h\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}} \leq (1 + C) \|\psi - \mathcal{I}_h^k\psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Si  $\psi \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$ , nous pouvons, à l'aides des propositions C.1, C.2 et C.4, majorer chacun des termes de  $\|\psi - \mathcal{I}_h^k\psi\|_{H,\delta_h, \frac{1}{2}}$  :

$$\|\psi - \mathcal{I}_h^k\psi\|_{0,\Omega} \preccurlyeq h^{k+1} \|\psi\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} \\ \|\delta_h^{1/2}\mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\psi - \mathcal{I}_h^k\psi)\|_{0,\Omega} \preccurlyeq \delta_h^{1/2} h^k \|\psi\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)} \\ \|(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^{1/2}(\psi - \mathcal{I}_h^k\psi)\|_{0,\Gamma^+} \preccurlyeq h^{k+1/2} \|\psi\|_{\mathbf{H}^{k+1}(\Omega)}.$$

Il vient alors, pour  $\delta_h = \delta h$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$ , la deuxième inégalité de la proposition.

□

**Remarque 2.11.** Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour le problème de transport harmonique. Les démonstrations ne sont pas faites ici pour les raisons énoncées par la remarque 2.3.

La formulation SUPG est coercive et nous avons pu obtenir une estimation d'erreur quasi-optimale. Cependant, il est intéressant de noter que la norme de l'estimation d'erreur fait intervenir  $\delta_h$  en facteur de la dérivée convective. Or, l'expérience montre que pour limiter la dissipation du schéma il faut prendre  $\delta_h$  proportionnel au pas de maillage  $h$ . En conséquence, par rapport au schéma des moindres carrés (LS), il y a affaiblissement du contrôle sur l'erreur commise en norme de la dérivée convective.

Les tests numériques réalisées dans les cas 1 et 2 montrent en outre que le paramètre  $\delta_h$  permet de contrôler le caractère dissipatif ainsi que la stabilité du schéma SUPG. Les simulations présentées sont réalisées pour  $\delta_h$  tel que

$$\delta_h = \delta \frac{|\alpha|}{|\mathbf{v}_0|} h, \delta \in \mathbb{R}$$

avec plusieurs valeurs de  $\delta$ . La figure 2.9 concerne le problème de transport harmonique dans le cas 2. Les mêmes observations peuvent être faites dans le cas 1 ainsi qu'avec le problème d'advection-réaction. Afin de mieux visualiser l'influence de  $\delta$ , les solutions sont tracées le long de la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$ . Nous remarquons d'abord que le schéma SUPG est clairement moins dissipatif que le schéma des moindres carrés. Ensuite, nous constatons que la solution approchée est d'autant plus dissipative que la valeur du paramètre  $\delta$  est grande. Dans certains cas, lorsque  $\delta$  est trop petit, la solution peut même être de nouveau polluée par des oscillations parasites. En fait, pour de faibles valeurs de  $\delta_h$ , le contrôle de l'erreur sur la dérivée convective est trop affaibli et le schéma retrouve un comportement semblable à celui du schéma de Galerkin classique. Finalement, le paramètre de stabilisation réalise un compromis entre l'approximation Galerkin classique et la formulation des moindres carrés. La détermination de la valeur de  $\delta_h$  représente un des principaux enjeux pour la méthode SUPG car il dépend du problème traité et les choix possibles sont infinis. La détermination de sa valeur optimale a fait l'objet de nombreux travaux mais reste une question ouverte [46]. Ce choix constitue l'un des inconvénients majeurs des méthodes de Petrov-Galerkin.

## 2.3 Méthodes de Galerkin discontinues

Dans cette section, nous commençons par rappeler succinctement les principales références traitant des méthodes de Galerkin discontinues (GD) pour les problèmes hyperboliques et en particulier pour l'équation d'advection-réaction. Nous construisons ensuite la formulation de façon naturelle en réalisant, pour chaque élément de maillage, une intégration par parties sur le terme de dérivée convective puis en réorganisant les termes d'intégration de bords. L'approximation obtenue consiste en un schéma centré, stable uniquement pour la norme  $L^2(\Omega)$ . Il n'y a pas de contrôle de la dérivée convective. Comme dans le cas de l'approximation de Galerkin continue, il faut stabiliser la formulation [27]. Nous obtenons alors, pour une valeur particulière du paramètre de stabilisation, la formulation DG décentrée (ou upwind) initialement proposée dans [74]. Des tests numériques permettent de valider le choix de cette formulation pour l'approximation du problème de transport harmonique. L'analyse de la convergence, qui constitue l'un des apports de la thèse, sera faite au chapitre suivant.

### 2.3.1 Références bibliographiques

Les premières références traitant des méthodes de Galerkin discontinues datent du début des années soixante-dix. Depuis, ces méthodes ont connu un fort développement, que ce soit pour des problèmes elliptiques [3] ou hyperboliques [27] et plus généralement pour les systèmes de Friedrichs [45, 58]. Une revue complète est faite dans [34].

La formulation de Galerkin discontinue a pour la première fois été introduite en 1973 par Reed et Hill pour résoudre une équation de transport de neutrons. Il s'agit d'une équation de transport scalaire pour laquelle le coefficient de réaction  $\alpha$  est un nombre réel et le vecteur de convection  $\mathbf{v}_0$  est supposé constant et unitaire. LeSaint et Raviart proposent une première analyse de cette formulation, aussi appelée formulation upwind, en 1974 [64]. Ils montrent la convergence de la méthode en  $h^k$  sur des maillages triangulaires et en  $h^{k+1}$  sur maillages cartésiens où  $h$  est le pas de maillage et  $k$  l'ordre des polynômes d'interpolation. Ils montrent également qu'il est possible de calculer l'approximation DG élément par élément, sans inverser un système matriciel global. En 1986, Johnson et Pitkäranta améliorent l'analyse dans [60]. Ils choisissent un vecteur de convection constant mais considèrent que le coefficient de réaction est une fonction à valeurs réelles. Une convergence en  $h^{k+1/2}$  est obtenue sur maillage triangulaire et avec une norme dépendant de  $h$ .

D'autres études ont ensuite été menées dans le but de démontrer une estimation d'erreur optimale ou quasi-optimale. Il est possible d'obtenir de tels résultats [75] en norme  $L^2$  mais sous des conditions très spécifiques sur l'orientation de l'écoulement  $\mathbf{v}_0$  par rapport au maillage. Sur maillage quelconque, cette estimation n'est pas vérifiée [69]. Pour des écoulements porteurs variables, il faut attendre les travaux de Bey et Oden en 1996. Dans [17], une première analyse  $hp$  de la méthode est faite pour  $\mathbf{v}_0$  non constant. Ces travaux sont ensuite étendus pour  $\alpha \in C^0(\bar{\Omega})$  et  $\mathbf{v}_0 \in C^0(\bar{\Omega})^2$  non constant dans [52].

Depuis les années 2000, de nombreux auteurs s'intéressent aux méthodes DG. Elles sont en effet particulièrement adaptées pour la mise en oeuvre de techniques de raffinement de maillage car elles autorisent l'utilisation de maillages non-conformes. Il s'agit par exemple d'adapter le maillage selon un critère de précision dans des zones où la solution présente des singularités et au contraire relâcher la précision du maillage là où la solution varie peu. Une des problématiques sous-jacentes concerne la conception de critères efficaces pour sélectionner les éléments à raffiner ou dé-raffiner. On parle d'estimateurs d'erreur a posteriori ou encore de méthodes "goal-oriented" [30, 62, 61]. Avec les méthodes DG, il est également possible d'augmenter localement l'ordre des polynômes d'interpolation. Ceci donne lieu à l'étude des méthodes dites  $hp$  qui consistent, à la fois, à raffiner le maillage ( $h$ ) et augmenter l'ordre des polynômes ( $p$ ) de façon locale [33]. Enfin, notons que les méthodes DG sont parallélisables mais leur inconvénient majeur reste la taille importante des systèmes à inverser en terme de nombre de degrés de liberté.

### 2.3.2 La formulation naturelle : schéma centré

La méthode de Galerkin discontinue consiste à rechercher la solution approchée dans un espace discret autorisant des discontinuités à la traversée des faces entre les éléments du maillage, d'où l'appellation de méthode discontinue. Plus précisément, l'espace d'approximation est un sous espace de  $L^2(\Omega)$  à la différence des méthodes de Galerkin classiques pour lesquelles l'espace d'approximation est inclus dans  $C^0(\bar{\Omega})$ . La solution est en fait cherchée dans un sous-espace des fonctions continues par morceaux (les morceaux étant les éléments du maillage).

Admettons que nous sachions que la solution recherchée est continue sur tout le domaine  $\Omega$  et qu'elle vérifie une condition aux limites sur  $\partial\Omega$ . Il faut donner un moyen au schéma numérique de rétablir la continuité et tenir compte de la condition aux limites. Pour cela, nous choisissons l'approximation de la forme bilinéaire de telle sorte qu'elle impose cette continuité ainsi que la condition à la limite par le biais de termes supplémentaires. Nous disons qu'elles sont imposées faiblement. C'est là qu'intervient la notion de flux de la solution à travers les faces des éléments du maillage. Ce flux est approché par une expression combinant le saut et la moyenne des valeurs de la solution de part et d'autre des interfaces entre éléments. Il existe de nombreuses façons de choisir ces flux. Il s'agit d'un paramètre important des méthodes de Galerkin discontinues car les flux définissent la formulation DG et influent sur la stabilité de la méthode. Par la suite, nous déroulons de façon "naturelle" la construction de l'approximation GD de la forme bilinéaire. Nous verrons qu'elle conduit à l'utilisation de flux dit centrés donnant lieu à un schéma numérique instable.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une famille régulière de décompositions du domaine  $\Omega$  en éléments  $K_i$  (triangles) de sorte que

$$\Omega = \cup_{i=1}^N \overline{K_i} \text{ et } K_i \cap K_j = \emptyset, \forall i \neq j.$$

Notons en outre  $\mathcal{E}_h$  l'ensemble des faces ou bords des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Afin de simplifier les écritures, nous faisons l'hypothèse suivante

$$\exists k > 0 \text{ tel que } |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \geq k \text{ ou } \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \text{ sur chaque face } e \text{ de } \mathcal{E}_h. \quad (2.19)$$

Autrement dit, les bords des éléments sont soit à flux d'écoulement entrant, soit sortant, soit glissant. Il ne peut pas y avoir sur une même face une zone à flux entrant et une autre à flux sortant. Parmi les éléments de  $\mathcal{E}_h$ , nous distinguons :

- l'ensemble des faces appartenant à  $\partial\Omega$ , noté  $\mathcal{E}_h^b$ ,
- l'ensemble des faces intérieures au domaine  $\Omega$ , noté  $\mathcal{E}_h^i$ ,
- les ensembles des faces appartenant aux bords à flux entrant et sortant  $\Gamma^\pm$  définis par

$$\mathcal{E}_h^{b,\pm} = \{e \in \mathcal{E}_h^b : e \subset \Gamma^\pm\},$$

- l'ensemble des faces appartenant au bord glissant  $\Gamma^0$  défini par

$$\mathcal{E}_h^{b,0} = \{e \in \mathcal{E}_h^b : \mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\},$$

- les ensembles des faces intérieures sur lesquelles le flux de l'écoulement  $\mathbf{v}_0$  est soit non nul, soit nul, respectivement définis par

$$\mathcal{E}_h^{i,\pm} = \{e \in \mathcal{E}_h^i : \exists k > 0, |\mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n}| \geq k \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\},$$

et

$$\mathcal{E}_h^{i,0} = \{e \in \mathcal{E}_h^i : |\mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n}| \equiv 0 \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\}.$$

Pour construire la formulation GD, nous considérons le problème de transport défini sur chaque élément  $K_i$ . Pour tout  $K_i$ ,  $i = 1, N$ , nous cherchons  $\psi|_{K_i}$  la solution du problème de transport définie sur  $K_i$ . Comme pour le problème défini sur tout le domaine  $\Omega$ , nous demandons à  $\psi$  ainsi que sa dérivée convective  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi$  d'être dans  $L^2(K_i)$ . Nous introduisons alors l'espace brisé

$$\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \nabla \varphi \cdot \mathbf{v}_0|_{K_i} \in L^2(K_i) \text{ et } \varphi \in \mathbf{H}^{1/2+\varepsilon}(K_i), \forall K_i \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2.20)$$

avec  $\varepsilon$  un réel strictement positif. De façon analogue au problème de transport initial, il faut donner un sens à la trace des fonctions de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  sur les bords du domaine ici les faces des éléments. Comme  $\forall \varphi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  nous avons  $\varphi \in \mathbf{H}^{1/2+\varepsilon}(\mathcal{T}_h)$ , alors il vient

$$\forall \varphi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h), \forall e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \cup \mathcal{E}_h^{b,+} \cup \mathcal{E}_h^{i,\pm}, \varphi|_e \in L^2(e).$$

Ainsi, pour chaque  $K_i$  de  $\mathcal{T}_h$ , nous avons donné un sens aux fonctions de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  sur les  $e \subset \partial K_i$  à flux de  $\mathbf{v}_0$  non nul. Remarquons alors que pour chaque face intérieure, il y a deux traces de  $\varphi$  distinctes correspondant à chacun des deux éléments partageant cette face. Soit  $e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}$ , notons  $K_e^\pm$  les deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $e = K_e^+ \cap K_e^-$  et  $\mathbf{v}_0|_e$  est dirigé de  $K_e^-$  vers  $K_e^+$  comme représenté sur la figure 2.10. Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , notons également  $\varphi_e^+$  et  $\varphi_e^-$  ses deux traces sur  $e$ , l'une attachée à l'élément  $K_e^+$  et l'autre à  $K_e^-$ . Enfin, nous définissons le saut des fonctions  $\varphi$  de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  sur les faces intérieures à flux d'écoulement non nul de la façon suivante

$$[[\varphi]] = \varphi_e^+ - \varphi_e^-, \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}. \quad (2.21)$$

Sur les faces appartenant à la frontière de  $\Omega$ , nous prenons

$$[[\varphi]] = \varphi_e^+, \forall e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \text{ et } [[\varphi]] = -\varphi_e^-, \forall e \in \mathcal{E}_h^{b,+}. \quad (2.22)$$

Nous définissons aussi la moyenne de  $\varphi$  sur  $e$  par

$$\{\{\varphi\}\} = \frac{1}{2}(\varphi_e^+ + \varphi_e^-), \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}. \quad (2.23)$$

De plus, nous prenons

$$\{\{\varphi\}\} = \varphi_e^+, \forall e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \text{ et } \{\{\varphi\}\} = \varphi_e^-, \forall e \in \mathcal{E}_h^{b,+}. \quad (2.24)$$

Nous disposons maintenant des outils nécessaires à la construction de la formulation GD. Nous cherchons  $\psi$  dans  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \cap \mathbf{H}_{\text{conv}}(\Omega)$  et vérifiant l'équation de transport sur chaque élément de maillage. Comme  $\psi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\Omega)$ , il vient

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e [[\psi]] = 0, \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}. \quad (2.25)$$

Sur chaque élément de  $\mathcal{T}_h$  nous testons l'opérateur de transport par une fonction test  $\varphi$  de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Le choix de cet espace brisé garantit que les intégrations sur les bords des éléments ont un sens et nous pouvons effectuer une intégration par parties sur chaque triangle de sorte que

$$\begin{aligned} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\alpha \psi + \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0) \bar{\varphi} \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K \psi (\alpha \bar{\varphi} - \nabla \bar{\varphi} \cdot \mathbf{v}_0) \, dx + \int_{\partial K} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \psi \bar{\varphi} \, d\gamma \right\} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{n}$  normale unitaire de  $\partial K$  orientée vers l'extérieur de  $K$ . Au lieu de considérer une somme sur les éléments de maillage, écrivons plutôt les termes d'intégration de bords comme une somme sur les faces du maillage (voir aussi l'annexe B). La trace des fonctions de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  étant double sur les faces du maillage, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \psi \bar{\varphi} \, d\gamma &= \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e \left( (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) \psi_e^+ \bar{\varphi}_e^+ + (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^-) \psi_e^- \bar{\varphi}_e^- \right) \, d\gamma \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^- \psi_e^- \bar{\varphi}_e^- \, d\gamma + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+ \psi_e^+ \bar{\varphi}_e^+ \, d\gamma \end{aligned}$$

où  $\mathbf{n}_e^+$  et  $\mathbf{n}_e^-$  sont les deux normales unitaires de  $e$  orientées telles que  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+ < 0$  et  $\mathbf{n}_e^- = -\mathbf{n}_e^+$  selon la convention décrite figure 2.10. En utilisant l'identité

$$ab + cd = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) + \frac{1}{2}(a-c)(b-d)$$

ainsi que la définition de la moyenne et du saut sur  $e$ , nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} \psi \bar{\varphi} \, d\gamma = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) ([\psi] \{\{\bar{\varphi}\}\} + \{\{\psi\}\} [[\bar{\varphi}]]) \, d\gamma.$$

Finalement, après réorganisation des termes,  $\psi$  la solution exacte du problème  $\mathcal{P}_\alpha$  vérifie pour toute fonction test de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\alpha \psi + \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0) \bar{\varphi} \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \psi (\alpha \bar{\varphi} - \nabla \bar{\varphi} \cdot \mathbf{v}_0) \, dx \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) ([\psi] \{\{\bar{\varphi}\}\} + \{\{\psi\}\} [[\bar{\varphi}]]) \, d\gamma. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\psi$  vit dans l'espace  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . La donnée de Dirichlet et la continuité de  $\psi$  à la traversée des faces (2.25) ne sont pas incluses dans l'espace  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . C'est dans la formulation bilinéaire que nous allons tenir compte de ces informations sur la solution exacte. Nous modifions l'expression précédente en annulant les termes de sauts de  $\psi$  selon l'hypothèse (2.25) et en imposant  $\psi \equiv g$  sur  $e$  pour tout  $e$  de  $\mathcal{E}_h^{b,-}$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\alpha \psi + \nabla \psi \cdot \mathbf{v}_0) \bar{\varphi} \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \psi (\alpha \bar{\varphi} - \nabla \bar{\varphi} \cdot \mathbf{v}_0) \, dx \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) \{\!\! \{ \psi \}\!\!\} [\bar{\varphi}] \, d\gamma &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) g \bar{\varphi} \, d\gamma, \quad \forall \varphi \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h). \end{aligned}$$

Finalement, nous avons le problème suivant :

Trouver  $\psi$  dans  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  tel que

$$p_0(\alpha; \psi, \varphi) = \ell_0(\varphi), \quad \forall \varphi \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$$

avec

$$p_0(\alpha; \psi, \varphi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \psi (\alpha \bar{\varphi} - \nabla \bar{\varphi} \cdot \mathbf{v}_0) \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) \{\!\! \{ \psi \}\!\!\} [\bar{\varphi}] \, d\gamma \quad (2.26)$$

$$\text{et } \ell_0(\varphi) = \int_{\Omega} f \bar{\varphi} \, dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) g \bar{\varphi} \, d\gamma. \quad (2.27)$$

Cette formulation est équivalente au problème continu initial et nous pouvons montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.12.** *Le problème (2.26) est équivalent au problème de transport (1.6) défini au chapitre 1.*

*Démonstration.* Voir la démonstration de la proposition 3.1, chapitre 3.  $\square$

La méthode de Galerkin discontinue consiste à rechercher la solution approchée  $\psi_h$  dans  $W_h^k$  l'espace discret discontinu défini par

$$W_h^k := \{\varphi_h \in L^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h|_K \in \mathbb{P}^k(K)\}.$$

Remarquons que l'espace  $W_h^k$  est inclus dans  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , espace dans lequel vit la solution exacte, autrement dit, l'approximation est conforme. Le problème approché s'écrit finalement

Trouver  $\psi_h$  dans  $W_h^k$  telle que

$$p_0(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \ell_0(\varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in W_h^k. \quad (2.28)$$

Il s'agit de la formulation de Galerkin discontinue à flux centrés. En effet, le flux de la solution sur  $e$  est approché par  $(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) \{\!\! \{ \psi \}\!\!\}$  qui est proportionnel à la demi-somme de  $\psi$  à travers  $e$  (le schéma prend autant d'information de part et d'autre de  $e$ ). Cette formulation aboutit à un schéma numérique centré qui ne permet pas de privilégier un sens de convection plutôt qu'un autre à travers les faces du maillage. En outre, il est bien connu que pour la méthode des différences finies par exemple, les schémas centrés ne sont pas appropriés pour la résolution de problèmes hyperboliques. Il convient plutôt d'utiliser des schémas décentrés.

Les résultats numériques obtenus par cette méthode, avec  $\alpha = -i\omega$  où  $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$  ainsi qu'avec  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ , fournissent des solutions polluées par des signaux parasites de la même forme que ceux observés sur les figures 2.4 et 2.5. Ces oscillations parasites sont particulièrement visibles

sur la figure 2.11 où nous avons représenté la solution approchée le long de la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  du problème de transport harmonique pris dans le cas 1. Le schéma de Galerkin discontinu centré présente un comportement similaire au schéma de Galerkin classique, il est dit instable. En fait, on peut montrer que la stabilité est vérifiée seulement en norme  $L^2(\Omega)$  et non en norme du graphe [27]. Comme pour les schémas de Galerkin classiques, il faut stabiliser la formulation. Pour cela nous allons décentrer le schéma.

### 2.3.3 La stabilisation : formulation décentrée (upwind)

Afin de rétablir la stabilité du schéma dans une norme plus forte que la norme  $L^2(\Omega)$ , nous ajoutons à la formulation GD un terme de stabilisation. Ce terme est construit tel qu'il soit proportionnel à  $|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \rrbracket$  sur chaque interface de  $\mathcal{T}_h$ . Ainsi la quantité ajoutée est homogène à zéro puisque nous avons supposé précédemment que le flux de la solution exacte  $\psi$  est nul à la traversée des interfaces entre éléments (2.25). La nouvelle formulation contient finalement un terme de saut au carré équivalent à des termes de dérivées d'ordre deux. En effet, les sauts viennent de l'intégration par parties des termes d'ordre un. La formulation GD stabilisée s'écrit : Trouver  $\psi$  dans  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  tel que

$$p_{c_e}(\alpha; \psi, \varphi) = b_0(\varphi), \forall \varphi \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$$

avec

$$p_{c_e}(\alpha; \psi, \varphi) = p_0(\alpha; \psi, \varphi) + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e c_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+| \llbracket \psi \rrbracket \llbracket \varphi \rrbracket d\gamma,$$

où  $c_e$  est le paramètre de stabilisation. La stabilité est retrouvée dans une norme plus forte que la norme  $\|\cdot\|_{0,\Omega}$  si  $c_e$  est une fonction choisie telle que sur chaque  $e$  elle soit supérieure à une constante indépendante de  $e$  et  $h$  [27]. Avec cette nouvelle formulation, les flux de la solution à travers les interfaces deviennent

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+) \llbracket \psi \rrbracket + c_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+| \llbracket \psi \rrbracket = -|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+| \left( \left( \frac{1}{2} - c_e \right) \psi_e^+ + \left( \frac{1}{2} + c_e \right) \psi_e^- \right).$$

Il s'agit d'une demi-somme pondérée des valeurs amont et aval de la solution : le flux approché est maintenant décentré. Si  $c_e = \frac{1}{2}$ , le flux est approché par la valeur amont de la solution. Nous retrouvons alors la formulation GD dite upwind introduite par Reed et Hill [74]. La figure 2.11 montre, sur la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$ , la solution du problème de transport harmonique obtenue avec le schéma GD upwind. Il n'y a plus d'oscillations parasites. Nous n'avons pas représenté les isovaleurs des solutions approchées car elles sont semblables à celles des solutions exactes données par les figures 2.2 et 2.3. Nous proposerons dans le prochain chapitre une analyse de cette formulation.

## 2.4 Analyse de dispersion et dissipation

La solution du problème de transport en régime harmonique  $\mathcal{P}_\omega$  a un comportement périodique comparable à celui d'une onde. C'est pourquoi, il est intéressant d'évaluer la qualité des schémas numériques en terme de dispersion et de dissipation. Il s'agit d'un critère d'analyse classiquement utilisé pour l'étude des schémas de résolution de l'équation des ondes. Afin de réaliser une étude semblable, nous déterminons les modes des schémas pour le problème de transport harmonique que nous considérons sur un domaine 1D et pour une discrétisation  $\mathbb{P}^1$ . Les valeurs des modes obtenues illustrent bien, pour chacun des schémas, les conclusions que nous en avons dressées tout le long de ce chapitre.

### 2.4.1 Analogie avec une onde : relation de dispersion

Le domaine considéré est donné par  $\Omega = \mathbb{R}$  et nous nous intéressons au problème de transport harmonique  $\mathcal{P}_\omega$  pour lequel  $\alpha = -i\omega$  et  $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ . L'écoulement porteur supposé constant est donné par  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$  avec  $v_0 > 0$ . Nous cherchons les solutions du problème 1D suivant : Trouver  $\psi$  tel que

$$\mathcal{P}_\omega \begin{cases} -i\omega\psi + v_0\psi' = 0 & \text{dans } \Omega = \mathbb{R} \\ \psi(0) = \psi_0 & \text{en } x = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Les fonctions de la forme d'une onde plane

$$\psi(x) = \psi_0 e^{ikx}, \forall x \in \Omega \quad (2.30)$$

sont solutions du problème (2.29) si la relation

$$\omega = kv_0 \quad (2.31)$$

est vérifiée. Il s'agit de la relation de dispersion. Par analogie avec les ondes, nous appelons  $k$  le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation de l'onde.

Pour évaluer le caractère dispersif et dissipatif d'un schéma, nous considérons ce schéma, écrit avec un second membre nul, sur un domaine discrétisé infini

$$\Omega_h = \cup_{j \in \mathbb{Z}} [x_j; x_{j+1}]$$

tel que le pas de maillage soit uniforme c'est-à-dire  $h = |x_{j+1} - x_j|, \forall j \in \mathbb{Z}$ . Nous cherchons ensuite la relation satisfaite par  $k_h$  le nombre d'onde numérique pour que l'onde plane numérique

$$\psi_j = \psi_h(x_j) = e^{ijk_h h} \quad (2.32)$$

soit solution du schéma écrit sur  $\Omega_h$ . L'étude des écarts entre  $k_h h$  et  $kh$  donnera alors des informations sur la façon dont la solution numérique est propagée par les schémas. En particulier, l'écart entre les parties imaginaires de  $k_h h$  et  $kh$  traduit les erreurs d'amplitude alors que l'écart entre les parties réelles de  $k_h h$  et  $kh$  dénote des erreurs de phase puisque

$$\psi_j = e^{ijk_h h} = (e^{-\Im k_h h})^j (e^{i\Re k_h h})^j. \quad (2.33)$$

Pour chacun des schémas vus au cours de ce chapitre, nous établissons en annexe F la relation de dispersion numérique pour une discrétisation par éléments finis  $\mathbb{P}^1$ . Nous obtenons l'équation suivante

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (2.34)$$

où nous avons posé

$$X = e^{ik_h h}$$

et où les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont récapitulés par le tableau 2.1. Cette équation est du second ordre, elle admet donc deux solutions, sauf dans le cas du schéma DG pour lequel le coefficient  $A$  est nul. Au paragraphe suivant, nous proposons une analyse de dispersion et de dissipation basée sur la résolution de cette équation.

### 2.4.2 Erreurs de dispersion et de dissipation

Introduisons à présent les outils nécessaires pour notre analyse d'erreur de dispersion et de dissipation. Posons

$$\mathcal{Q}_h := \frac{\Re(k_h)}{k} \text{ et } \mathcal{D}_h := \frac{\Im(k_h)}{k}$$

	$A$	$B$	$C$
Galerkin classique	$\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}$	$-2i\frac{kh}{3}$	$-\bar{A}$
Moindres carrés	$\frac{(kh)^2}{6} - 1 + ikh$	$2\left(\frac{(kh)^2}{3} + 1\right)$	$\bar{A}$
SUPG, $\delta \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6} - \delta\left(1 - i\frac{kh}{2}\right)$	$2\left(-i\frac{kh}{3} + \delta\right)$	$-\overline{\left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right)} - \delta\overline{\left(1 - i\frac{kh}{2}\right)}$
DG centré	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right)$	$\left \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right ^2 - \frac{(kh)^2}{9} + \frac{1}{4}$	$\bar{A}$
DG upwind	0	$\left \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right ^2 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{3}\right)^2$	$-\left(\frac{1}{2} + i\frac{kh}{6}\right)$

TAB. 2.1: Coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  de l'équation (2.34).

où  $k_h$  est déterminé en résolvant l'équation (2.34). Ces deux quantités permettent de mesurer respectivement la dispersion et la dissipation introduite par le schéma numérique. De plus, nous définissons

$$K_{EF} = \frac{kh}{2\pi r} \text{ et } K_{GD} = \frac{kh}{2\pi(r+1)}.$$

$K_{EF}$  et  $K_{GD}$  représentent l'inverse du nombre de points par longueur d'onde pour, respectivement, une approximation par des éléments finis continus ou une approximation de type Galerkin discontinus. Dans la suite  $K$  désignera en fonction de la situation  $K_{EF}$  ou  $K_{GD}$ . Il est facile de voir que  $\mathcal{Q}_h$  et  $\mathcal{D}_h$  peuvent être vus comme des fonctions de  $K$ . L'onde discrète physique est alors définie par

$$\lim_{K \rightarrow 0^+} \mathcal{Q}_h(K) = 1 \text{ et } \lim_{K \rightarrow 0^+} \mathcal{D}_h(K) = 0.$$

Dans les autres cas, nous parlerons de modes ou d'ondes parasites, c'est-à-dire des modes qui n'approchent pas la relation de dispersion continue. Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement au comportement des modes physiques pour les différents schémas. Nous spécifierons néanmoins la présence ou non de modes parasites. Par contre, leur contribution sur la qualité de la solution numérique ainsi que la stabilité de la méthode ne sont pas investiguées ici. Nous renvoyons par exemple à la thèse de Nathalie Torjman [83] pour ce type d'étude.

Pour étudier les quantités  $\mathcal{Q}_h$  et  $\mathcal{D}_h$  associées aux modes physiques, nous considérons le développement limité de ces quantités en  $K = 0$  que l'on exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{Q}_h(K) = 1 + C_q K^q + \mathcal{O}(K^{q+1}),$$

$$\mathcal{D}_h(K) = C_d K^q + \mathcal{O}(K^{q+1}).$$

La table 2.2 répertorie les résultats obtenus pour les différents schémas présentés dans cette thèse. Les conclusions sont :

- Le schéma de Galerkin classique est peu dispersif comme nous l'avons déjà vu sur les résultats numériques précédents. Nous n'avons pas d'information sur la mauvaise stabilité de la méthode par cette analyse. Néanmoins, il y a la présence d'une onde parasite non dissipée.
- Nous faisons le même constat pour le schéma GD centré, qui toutefois est un peu plus dispersif que le premier.
- Il y a confirmation du caractère très dissipatif du schéma LS. De plus, le passage à un opérateur elliptique du second ordre fait apparaître une racine double physique.

- L'étude confirme la faible erreur de dispersion et de dissipation du schéma GD décentré. De plus, il n'est entaché d'aucun mode parasite.
- Nous obtenons peu d'informations supplémentaires sur le comportement de la méthode SUPG : plus  $\delta$  est grand, plus le schéma dissipe et plus  $\delta$  est petit, plus le schéma s'approche du schéma GC. En particulier, nous n'avons pas d'information sur la meilleure valeur de  $\delta$  à choisir. De plus, nous remarquons que ces schémas sont entachés d'ondes parasites.

	Onde physique				Onde parasite
	Dispersion		Dissipation		Existence
	$p$	$C_q$	$q$	$C_d$	
Galerkin Classique	4	-8.68	-	-	Oui
LS	2	6.57	1	1.81	Non
	2	6.57	1	-1.81	
DG centré	2	3.28	-	-	Oui
DG upwind	4	92.35	3	27.56	Non
SUPG $\delta = 0.1$	4	-7.35	3	2.6	Oui
SUPG $\delta = 1$	4	121.21	3	20.67	Oui
SUPG $\delta = 10$	4	$1.28 \times 10^4$	3	$2.04 \times 10^2$	Oui
SUPG $\delta = 100$	4	$1.30 \times 10^6$	3	$2.07 \times 10^3$	Oui

TAB. 2.2: Comparaison des schémas en terme de dispersion et dissipation.

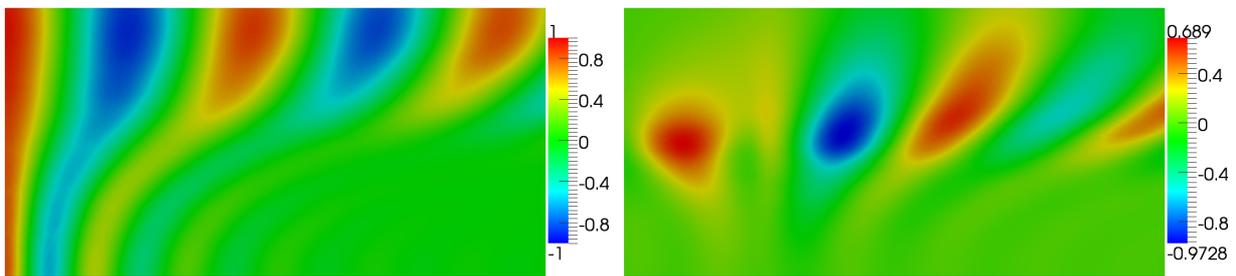
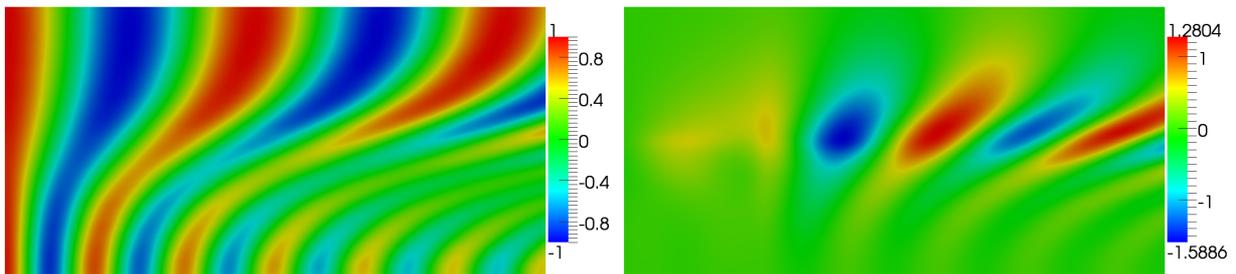
Maillage de pas  $h$ Maillage de pas  $h/4$ 

FIG. 2.7: Partie réelle de la solution du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) calculée par le schéma des moindres carrés dans le cas 1 (à gauche) et 2 (à droite).

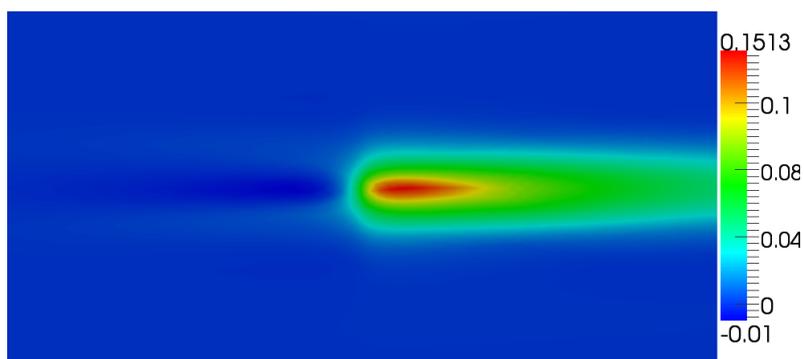
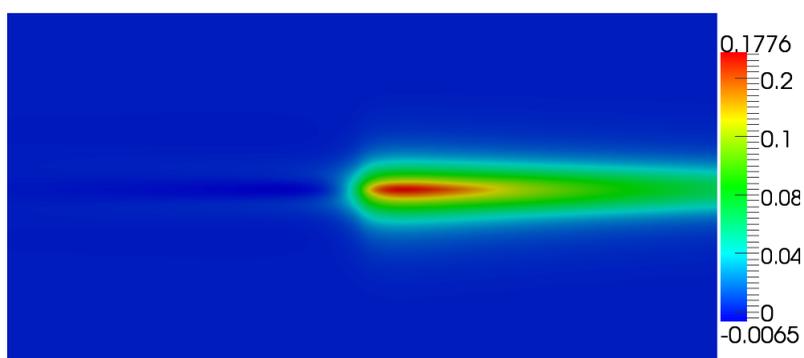
Maillage de pas  $h$ Maillage de pas  $h/4$ 

FIG. 2.8: Solution du problème d'advection-réaction approchée par le schéma des moindres carrés dans le cas 2.

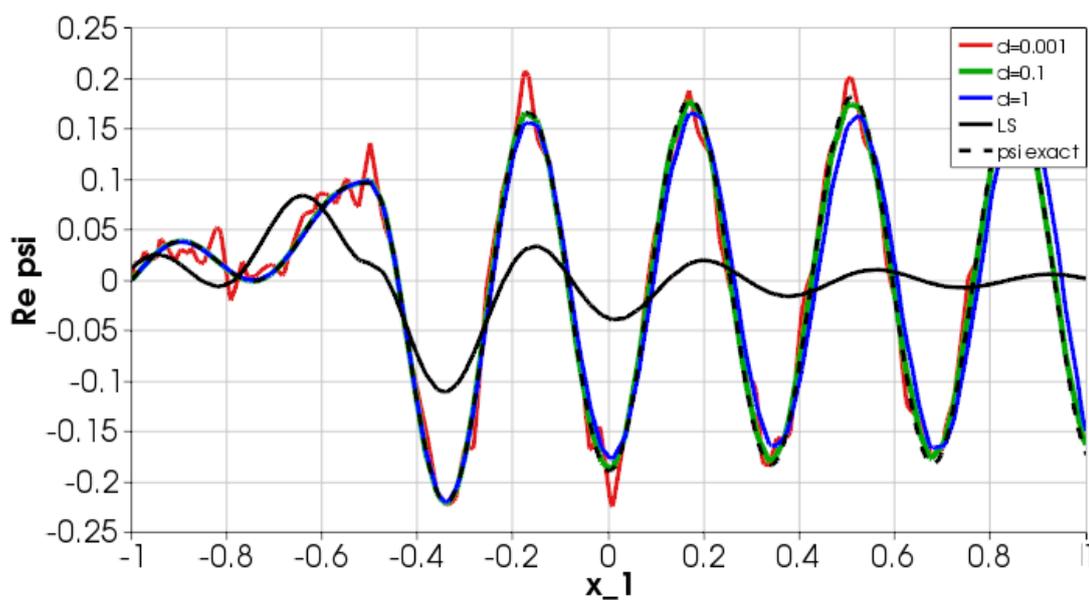


FIG. 2.9: Valeurs sur la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  de la solution du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) dans le cas 2 approchée par le schéma SUPG avec plusieurs valeurs de  $\delta$ .

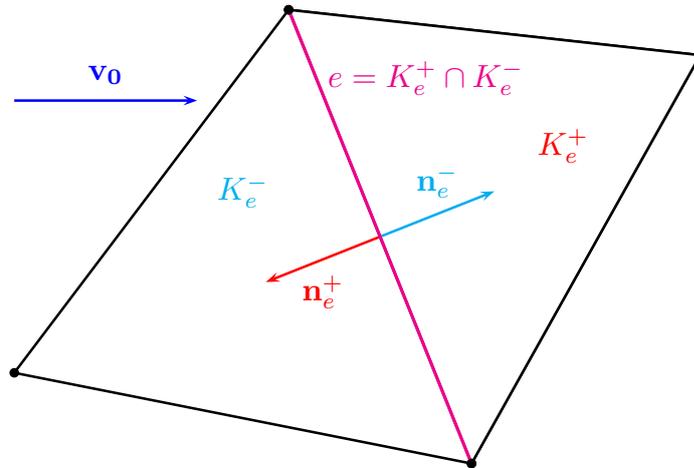


FIG. 2.10: Convention sur l'orientation des normales et notations pour les approximations de Galerkin discontinues.

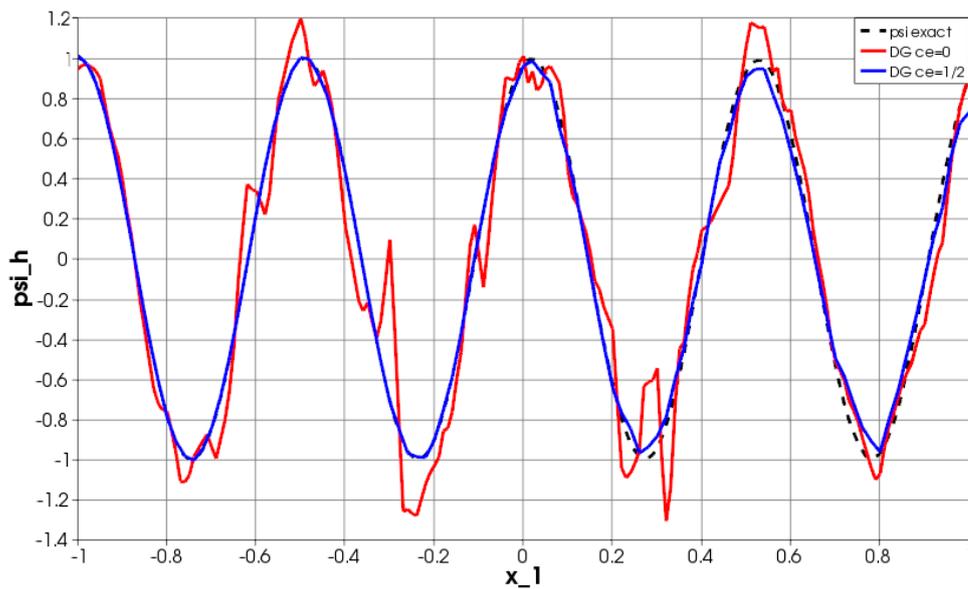


FIG. 2.11: Valeurs sur la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  de la solution du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) approchée par les schémas DG centré ( $c_e = 0$ ) et DG upwind ( $c_e = \frac{1}{2}$ ) pour le cas 1.

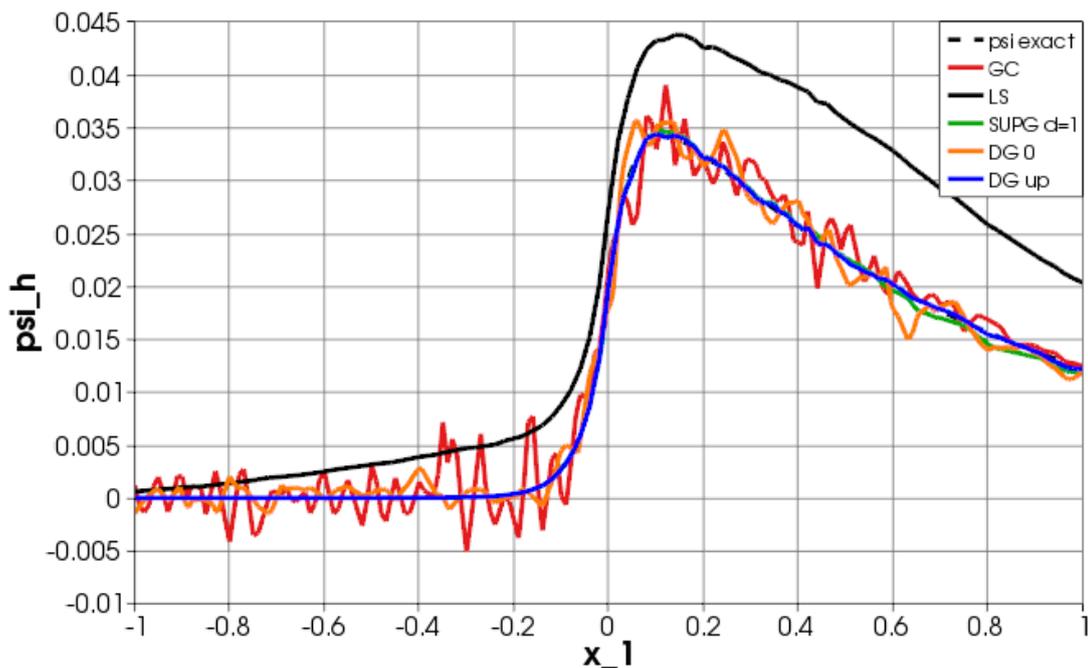


FIG. 2.12: Valeurs sur la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  de la solution du problème d'advection réaction ( $\alpha = \frac{1}{5}$ ) dans le cas 2 approchée par les schémas de Galerkin classique (GC), moindres carrés (LS), SUPG (avec  $\delta = 1$ ), Galerkin discontinu centré (DG 0) et décentré (DG up).

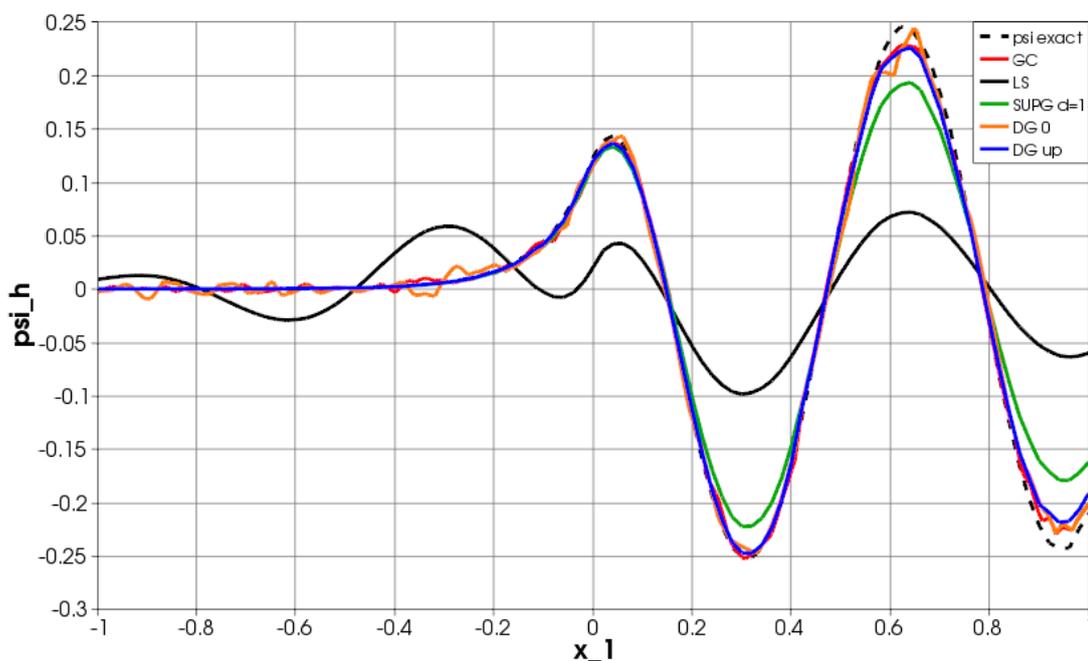


FIG. 2.13: Valeurs sur la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  de la solution du problème de transport harmonique ( $\alpha = -2i$ ) dans le cas 2 approchée par les schémas de Galerkin classique (GC), moindres carrés (LS), SUPG (avec  $\delta = 1$ ), Galerkin discontinu centré (DG 0) et décentré (DG up).



## Chapitre 3

# Analyse de l'approximation de Galerkin discontinue décentrée pour le transport harmonique

Dans ce chapitre, nous analysons la formulation DG upwind introduite au chapitre précédent. Plus précisément, l'objectif est d'étendre au problème de transport harmonique ( $\alpha \in i\mathbb{R}^*$ ) les résultats de stabilité et d'estimation d'erreur déjà connus pour l'advection-réaction ( $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ).

La première difficulté (commune aux cas  $\alpha \in -i\mathbb{R}^{+*}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ) est liée au caractère hyperbolique du problème et au fait que la forme bilinéaire DG est différente de celle associée au problème continu. On ne peut pas, à partir des propriétés du problème variationnel continu, déduire directement des résultats sur la formulation approchée. A la différence des problèmes entrant dans le cadre du théorème de Lax-Milgram, il faut démontrer de nouveaux résultats directement sur la forme bilinéaire DG. En particulier, une grande partie de l'analyse est dédiée à l'obtention d'une condition inf-sup discrète. Dans un premier temps, nous nous limiterons à l'étude de la stabilité du schéma dans le cas classique du problème d'advection-réaction. Nous montrerons également la convergence de la méthode par l'établissement d'une estimation d'erreur quasi-optimale.

La deuxième difficulté concerne l'extension de l'analyse au problème de transport harmonique. Lorsque la partie réelle de  $\alpha$  est nulle, le contrôle de la norme  $L^2(\Omega)$  par la forme bilinéaire approchée n'est pas immédiat. Cette situation est similaire à celle rencontrée avec la forme bilinéaire continue étudiée au chapitre 1. Mais, cette fois, l'approche par courbes caractéristiques n'est pas appropriée pour l'étude du problème approché. Nous allons plutôt adapter la démarche évoquée à la fin du chapitre 1 qui consistait à tester la forme bilinéaire avec la solution du problème adjoint. La deuxième partie du chapitre sera consacrée à cette extension. Nous montrerons que les résultats de stabilité et de convergence obtenus pour l'advection-réaction sont aussi vérifiés dans le cas du problème de transport harmonique.

### 3.1 L'approximation GD upwind

Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$  avec  $h$  le pas de maillage défini comme

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$$

où  $h_K$  désigne le diamètre de l'élément  $K$ . La formulation variationnelle sur l'espace brisé  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  construite au chapitre 2 se réécrit sous la forme :

Trouver  $\psi$  dans  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \cap H^s(\mathcal{T}_h)$  tel que

$$p_h(\alpha; \psi, \varphi) = \ell_h(\varphi), \forall \varphi \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \quad (3.1)$$

avec

$$p_h(\alpha; \psi, \varphi) = (\alpha\psi + \nabla\psi \cdot \mathbf{v}_0, \varphi)_{0, \mathcal{T}_h} + (|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \rrbracket, \varphi_e^+)_{0, \mathcal{E}_h^{i, \pm} \cup \mathcal{E}_h^{b, -}}$$

$$\text{et } \ell_h(\varphi) = (f, \varphi)_{0, \Omega} + (|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| g, \varphi)_{0, \mathcal{E}_h^{b, -}}$$

où  $(u, v)_{0, X_h} = \sum_{K \in X_h} (u, v)_{0, K}$  et  $\mathbf{n}$  représente une normale unitaire aux faces des éléments. Nous rappelons également que  $\mathcal{E}_h$  représente l'ensemble des faces ou bords des éléments de  $\mathcal{T}_h$ . Notons que la formulation (3.1) est obtenue en faisant l'hypothèse (2.19) introduite au chapitre 2. Selon cette hypothèse, les faces des éléments du maillage sont soit à flux d'écoulement entrant, soit sortant, soit glissant. Cette distinction nous permet de définir :

- l'ensemble des faces appartenant à  $\partial\Omega$ , noté  $\mathcal{E}_h^b$ ,
- l'ensemble des faces intérieures au domaine  $\Omega$ , noté  $\mathcal{E}_h^i$ ,
- les ensembles des faces appartenant au bord à flux entrant et sortant  $\Gamma^\pm$  définis par

$$\mathcal{E}_h^{b, \pm} = \{e \in \mathcal{E}_h^b : e \subset \Gamma^\pm\},$$

- l'ensemble des faces appartenant au bord glissant  $\Gamma^0$  défini par

$$\mathcal{E}_h^{b, 0} = \{e \in \mathcal{E}_h^b : \mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\},$$

- les ensembles des faces intérieures sur lesquelles le flux de l'écoulement  $\mathbf{v}_0$  est non nul et nul respectivement définis par

$$\mathcal{E}_h^{i, \pm} = \{e \in \mathcal{E}_h^i : \exists k > 0, |\mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n}| \geq k \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\},$$

et

$$\mathcal{E}_h^{i, 0} = \{e \in \mathcal{E}_h^i : \mathbf{v}_0|_e \cdot \mathbf{n} \equiv 0 \text{ sur } e \text{ avec } \mathbf{n} \text{ une normale unitaire de } e\}.$$

Rappelons aussi les conventions de notations résumées par la figure 3.1 avec lesquelles nous avons défini sur les faces des éléments les sauts et moyennes des fonctions de  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Soit  $e$  un élément

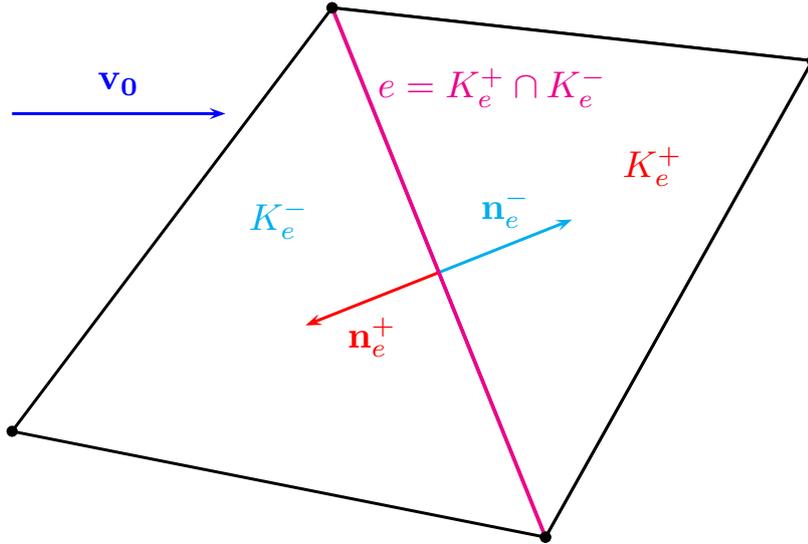


FIG. 3.1: Convention et notations.

de  $\mathcal{E}_h$ . Si  $e$  est aussi dans  $\mathcal{E}_h^{i, \pm}$ , nous notons  $K_e^\pm$  les deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $e = K_e^+ \cap K_e^-$  et

$\mathbf{v}_0|_e$  est dirigé de  $K_e^-$  vers  $K_e^+$ . Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , notons également  $\varphi_e^+$  et  $\varphi_e^-$  ses deux traces sur  $e$ , l'une attachée à l'élément  $K_e^+$  et l'autre à  $K_e^-$ . Sur les interfaces  $e$  incluses dans  $\Gamma^+$  ou  $\Gamma^-$ , la trace est unique et sans ambiguïté nous pouvons noter

$$\varphi_e^+ = \varphi \text{ si } e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \text{ et } \varphi_e^- = \varphi \text{ si } e \in \mathcal{E}_h^{b,+}$$

et par convention, nous posons

$$\varphi_e^- = 0 \text{ si } e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \text{ et } \varphi_e^+ = 0 \text{ si } e \in \mathcal{E}_h^{b,+}.$$

Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , le saut de  $\varphi$  sur les faces  $e$  à flux d'écoulement non nul est donné par

$$[[\varphi]] = \varphi_e^+ - \varphi_e^-, \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm} \quad (3.2)$$

et la moyenne est définie par

$$\{\{\varphi\}\} = \frac{1}{2}(\varphi_e^+ + \varphi_e^-), \forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}. \quad (3.3)$$

De façon analogue aux traces de  $\varphi$  sur  $e$ ,  $\mathbf{n}_e^-$  et  $\mathbf{n}_e^+$  représentent respectivement les normales sortantes unitaires de  $K_e^-$  et  $K_e^+$ . Lorsqu'il n'est pas utile de faire la distinction entre les orientations des normales  $\mathbf{n}_e^-$  et  $\mathbf{n}_e^+$ , nous noterons simplement  $\mathbf{n}$  une normale unitaire de  $e$ .

**Proposition 3.1.** *Le problème (3.1) est équivalent au problème de transport (1.6) défini au chapitre 1.*

*Démonstration.* D'abord, la solution exacte du problème (1.6) vérifie par construction le problème (3.1).

Réciproquement, soit  $\varphi \in \mathcal{D}(K)$  pour  $K \in \mathcal{T}_h$ . Nous obtenons immédiatement que  $\alpha\psi + \nabla\psi \cdot \mathbf{v}_0 = f$  presque partout sur  $K$ . Soient maintenant  $e = K_1 \cap K_2$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(K_1 \overset{\circ}{\cup} K_2)$ , nous montrons alors que  $[\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}][[\varphi]] = 0$  presque partout sur  $e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}$ . Finalement, en utilisant la même technique, il vient que  $\psi = g$  presque partout sur  $\Gamma^-$ . Donc  $\psi$  est solution de (1.6).  $\square$

Pour  $k \geq 1$ , nous considérons l'espace d'éléments finis des fonctions polynomiales discontinues par morceaux

$$W_h^k := \{\varphi_h \in L^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, \varphi_h|_K \in \mathcal{P}^k(K)\}$$

où  $\mathcal{P}^k(K)$  est l'espace des fonctions polynomiales de degré  $k$  au plus. L'espace  $W_h^k$  est inclus dans  $\mathbb{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  et l'approximation GD s'exprime alors

Trouver  $\psi_h$  dans  $W_h^k$  tel que

$$p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \ell_h(\varphi_h), \forall \varphi_h \in W_h^k. \quad (3.4)$$

Nous voulons montrer que le problème approché (3.4) est bien posé et nous voulons estimer l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

## 3.2 Estimations de base

Cette analyse requiert la manipulation de plusieurs normes dépendantes du maillage et définies sur l'espace brisé  $\mathbb{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Soit  $\varphi \in \mathbb{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0}^2 &= \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \varphi \rrbracket \right\|_{0,e}^2, \\
\|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\frac{1}{2}}^2 &= \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-1} \|\varphi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \varphi^+ \right\|_{0,e}^2, \\
\|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla}^2 &= \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi\|_{0,K}^2, \\
\|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla,\frac{1}{2}}^2 &= \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-1} \|\varphi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \varphi^+ \right\|_{0,e}^2
\end{aligned}$$

qui s'écrit aussi

$$\|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla,\frac{1}{2}}^2 = \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\frac{1}{2}}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi\|_{0,K}^2.$$

Par la suite,

- La notation  $a \preccurlyeq b$  signifie qu'il existe  $C$  une constante positive indépendante du pas de maillage  $h$  et telle que  $a \leq Cb$ .
- De même,  $a \succcurlyeq b$  signifie qu'il existe  $C$  une constante positive indépendante de  $h$  et telle que  $a \geq Cb$ .

**Lemme 3.2.** Soient  $\psi$  et  $\varphi$  deux fonctions de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , nous avons l'identité

$$\begin{aligned}
\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \psi \varphi \, d\gamma &= - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \varphi \rrbracket \, d\gamma \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \psi \varphi \, d\gamma - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \psi \varphi \, d\gamma, \\
&= - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \varphi \rrbracket \, d\gamma
\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $\partial K$ .

L'identité (3.5) est prouvée en annexe B.

**Lemme 3.3** (Continuité). La forme bilinéaire approchée  $p_h$  satisfait les relations de continuité suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall \psi, \varphi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h), |p_h(\alpha; \psi, \varphi)| &\preccurlyeq \|\psi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla} \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\frac{1}{2}}, \\
\forall \psi, \varphi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h), |p_h(\alpha; \psi, \varphi)| &\preccurlyeq \|\psi\|_{h,\mathbf{v}_0,\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

*Démonstration.* Soient  $\psi$  et  $\varphi$  dans  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
|p_h(\alpha; \psi, \varphi)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( |\alpha| \|\psi\|_{0,K} + h_K^{1/2} \frac{1}{h_K^{1/2}} \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0,K} \right) \|\varphi\|_{0,K} \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} 2 \left\| \frac{|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2}}{2} \llbracket \psi \rrbracket \right\|_{0,e} \left\| \frac{|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2}}{2} \varphi^+ \right\|_{0,e}.
\end{aligned}$$

Ensuite, par une deuxième majoration, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|p_h(\alpha; \psi, \varphi)| \preceq \left( \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi \rrbracket \right\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \\ \left( \|\varphi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-1} \|\varphi\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \varphi^+ \right\|_{0,e}^2 \right)^{1/2}.$$

Enfin, les normes souhaitées sont obtenues en ajoutant au second membre les termes manquants :

$$|p_h(\alpha; \psi, \varphi)| \preceq \|\psi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla} \|\varphi\|_{h,\mathbf{v}_0,\frac{1}{2}}$$

De la même façon, nous obtenons la deuxième relation en faisant au préalable une intégration par parties sur le terme de dérivée convective dans  $p_h$ .  $\square$

Il est naturel de tester la forme bilinéaire  $p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h)$  avec  $\varphi_h = \psi_h$  et  $\varphi_h$  égal à la dérivée convective brisée de  $\psi_h$ . C'est l'objet des deux propositions suivantes.

**Proposition 3.4.** *Pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re \alpha \geq \alpha_0 \geq 0$  la forme bilinéaire  $p_h$  vérifie le résultat de coercivité suivant :  $\forall \psi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ ,*

$$\Re p_h(\alpha; \psi, \psi) \geq \alpha_0 \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \frac{1}{2} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\llbracket \psi \rrbracket|^2 d\gamma,$$

qui s'écrit aussi

$$\Re p_h(\alpha; \psi, \psi) \geq \|\psi\|_{h,\mathbf{v}_0}^2.$$

Si  $\Re \alpha = 0$ , alors on a l'identité suivante :  $\forall \psi \in \mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ ,

$$\Re p_h(\alpha; \psi, \psi) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \frac{1}{2} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\llbracket \psi \rrbracket|^2 d\gamma. \quad (3.7)$$

*Démonstration.* Soient  $\psi$  et  $\varphi$  deux éléments de  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Testons  $p_h(\alpha; \psi, \varphi)$  par  $\varphi = \psi$ . Nous avons

$$p_h(\alpha; \psi, \psi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\alpha |\psi|^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi \bar{\psi}) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \rrbracket \bar{\psi}_e^+ d\gamma.$$

En prenant la partie réelle et en faisant une intégration par parties sur chaque élément de maillage  $K$ , il vient, de la même façon que la proposition 1.6, l'inégalité suivante

$$\Re p_h(\alpha; \psi, \psi) \geq \alpha_0 \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) |\psi|^2 d\gamma + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e \Re \left( \llbracket \psi \rrbracket \bar{\psi}_e^+ \right) |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| d\gamma \\ + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\psi|^2 d\gamma.$$

Cette dernière inégalité s'écrit aussi, en utilisant l'identité (3.5),

$$\Re p_h(\alpha; \psi, \psi) \geq \alpha_0 \|\psi\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e \left( \Re \left( \llbracket \psi \rrbracket \bar{\psi}_e^+ \right) - \frac{1}{2} \llbracket |\psi|^2 \rrbracket \right) |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| d\gamma + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| |\psi|^2 d\gamma.$$

En remarquant que  $\forall e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}$ ,

$$\begin{aligned} \Re \left( \llbracket \psi \rrbracket \overline{\psi_e^+} \right) - \frac{1}{2} \llbracket |\psi|^2 \rrbracket &= |\psi_e^+|^2 - \Re \left( \psi_e^- \overline{\psi_e^+} \right) - \frac{1}{2} |\psi_e^+|^2 + \frac{1}{2} |\psi_e^-|^2 \\ &= \frac{1}{2} |\psi_e^+|^2 - \Re \left( \psi_e^- \overline{\psi_e^+} \right) + \frac{1}{2} |\psi_e^-|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \psi_e^+ - \psi_e^- \right|^2 = \frac{1}{2} \llbracket |\psi|^2 \rrbracket \end{aligned}$$

et que  $\forall e \in \mathcal{E}_h^{b,\pm}$ ,

$$|\psi|^2 = |\psi_e^\mp|^2 = \llbracket |\psi|^2 \rrbracket$$

nous obtenons le résultat.  $\square$

**Proposition 3.5.** *Soit  $\psi_h$  une fonction de  $W_h^k$ . La relation suivante est vérifiée*

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 \preccurlyeq \Re p_h(\alpha; \psi_h, v_h) + \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e}^2 \quad (3.8)$$

pour  $v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \overline{\mathbf{v}_0}^K \cdot \nabla \psi_h$  avec  $\overline{\mathbf{v}_0}^K$  la valeur moyenne de  $\mathbf{v}_0$  sur un élément  $K$ .

*Démonstration.* Soit  $\psi_h$  une fonction de  $W_h^k$ .  $\forall K \in \mathcal{T}_h$ , nous considérons les fonctions tests

$$\pi_K = \begin{cases} \overline{\mathbf{v}_0}^K \cdot \nabla \psi_h & \text{sur } K \\ 0 & \text{à l'extérieur de } K \end{cases} \quad (3.9)$$

où  $\overline{\mathbf{v}_0}^K$  est la valeur moyenne de  $\mathbf{v}_0$  sur l'élément  $K$ . Comme  $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , alors l'estimation d'erreur suivante est vérifiée

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \|\mathbf{v}_0 - \overline{\mathbf{v}_0}^K\|_{\infty,K} \preccurlyeq h_K |\mathbf{v}_0|_{1,\infty,K}. \quad (3.10)$$

Supposons que le maillage satisfait les hypothèses détaillées dans l'annexe C. L'inégalité inverse (C.2) ainsi que l'inégalité (3.10) permettent de majorer  $\pi_K$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \|\pi_K\|_{0,\Omega} &= \|\overline{\mathbf{v}_0}^K \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} = \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h + (\overline{\mathbf{v}_0}^K - \mathbf{v}_0) \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} \\ &\leq \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} + \|\overline{\mathbf{v}_0}^K - \mathbf{v}_0\|_{\infty,K} |\psi_h|_{1,K} \\ &\preccurlyeq \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} + h_K |\mathbf{v}_0|_{1,\infty,K} h_K^{-1} \|\psi_h\|_{0,K} \\ &\preccurlyeq \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} + \|\psi_h\|_{0,K}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De plus,  $\pi_K$  vérifie l'inégalité de trace [44] suivante

$$\|\pi_K\|_{0,e} \preccurlyeq h_K^{-\frac{1}{2}} \|\pi_K\|_{0,K}, \quad e \subset \partial K. \quad (3.12)$$

Tester la forme bilinéaire  $p_h$  par  $\pi_K$  conduit à

$$\begin{aligned} p_h(\alpha; \psi_h, \pi_K) &= \int_K \alpha \psi_h \pi_K \, dx + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 \\ &\quad + \int_K \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h (\overline{\mathbf{v}_0}^K - \mathbf{v}_0) \cdot \nabla \overline{\psi_h} \, dx + \sum_{e \in \partial K \cap (\mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-})} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi_h \rrbracket \overline{\pi_K^+} \, d\gamma, \end{aligned} \quad (3.13)$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 &\leq \Re p_h(\alpha; \psi_h, \pi_K) + \|\alpha\|_\infty \|\psi_h\|_{0,K} \|\pi_K\|_{0,K} \\ &\quad + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} \left\| \mathbf{v}_0|_K - \overline{\mathbf{v}_0}^K \right\|_{\infty,K} |\psi_h|_{1,K} \\ &\quad + \sum_{e \in \partial K \cap (\mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-})} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \pi_K \right\|_{0,e}. \end{aligned}$$

En utilisant (3.11) et (3.12) ainsi que, de nouveau, l'inégalité inverse sur  $\psi_h$  donnée par l'annexe C, il vient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 &\leq \Re p_h(\alpha; \psi_h, \pi_K) + \|\psi_h\|_{0,K} (\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} + \|\psi_h\|_{0,K}) \\ &\quad + \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} \|\psi_h\|_{0,K} \\ &\quad + \sum_{e \in \partial K \cap (\mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-})} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e} h_K^{-\frac{1}{2}} (\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K} + \|\psi_h\|_{0,K}), \end{aligned} \tag{3.14}$$

d'où, par inégalité d'Young, il vient

$$\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 \leq \Re p_h(\alpha; \psi_h, \pi_K) + \|\psi_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \partial K \cap (\mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-})} \frac{h_K^{-1}}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e}^2.$$

Enfin, en multipliant cette inégalité par  $h_K$  et en sommant sur tous les éléments de  $\mathcal{T}_h$ , nous obtenons finalement l'estimation suivante où nous avons posé  $v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \pi_K$  :

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 \leq \Re p_h(\alpha; \psi_h, v_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\psi_h\|_{0,K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e}^2,$$

soit encore,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0,K}^2 \leq \Re p_h(\alpha; \psi_h, v_h) + \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket \psi_h \rrbracket \right\|_{0,e}^2.$$

□

### 3.3 Stabilité et estimation d'erreur pour le problème d'advection-réaction ( $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ )

#### 3.3.1 Stabilité

A ce stade, nous allons voir qu'il est facile de conclure quant à la convergence du schéma dans le cas de l'équation d'advection-réaction (et plus généralement pour  $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ ). En effet, en combinant les propositions 3.4 et 3.5, nous obtenons sans difficulté la condition inf-sup discrète suivante :

**Proposition 3.6.** *Si  $\Re \alpha \geq \alpha_0 > 0$ , alors il existe  $h_0 > 0$  et une constante  $\varpi > 0$  indépendante de  $h$  telle que  $\forall h < h_0$ ,*

$$\inf_{\psi_h \in \mathbb{W}_h^k} \sup_{\varphi_h \in \mathbb{W}_h^k} \frac{\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla} \|\varphi_h\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla}} \geq \varpi > 0 \tag{3.15}$$

*Démonstration.* Soit  $\psi_h \in W_h^k$ . Prenons, comme fonction test, une combinaison linéaire de  $\psi_h$  et  $v_h$  (où l'on rappelle que  $v_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \bar{\mathbf{v}}_0^K \cdot \nabla \psi_h$  avec  $\bar{\mathbf{v}}_0^K$  la valeur moyenne de  $\mathbf{v}_0$  sur un élément  $K$ ). Nous notons  $\varphi_h = \psi_h + v_h$ . D'après la proposition 3.4, nous avons

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \psi_h) \gtrsim \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0}^2. \quad (3.16a)$$

Cette estimation combinée à celle de la proposition 3.5 montre alors que

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \gtrsim \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2.$$

Pour conclure, il faut estimer la norme de  $\varphi_h$ . Nous avons

$$\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \leq \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 + \|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2, \quad (3.16b)$$

or

$$\|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 = \|v_h\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla v_h\|_{0, K}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, \pm} \cup \mathcal{E}_h^{b, \pm}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket v_h \rrbracket \right\|_{0, e}^2.$$

Avec les notations de la preuve de la proposition 3.5, nous avons d'abord

$$\|v_h\|_{0, \Omega} = \left\| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \pi_K \right\|_{0, K} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\pi_K\|_{0, K}.$$

Ensuite, nous avons l'inégalité,  $\forall K \in \mathcal{T}_h$

$$\|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla v_h\|_{0, K} \preceq h_K^{-1} \|v_h\|_{0, K} \preceq h_K^{-1} \|h_K \pi_K\|_{0, K} \preceq \|\pi_K\|_{0, K},$$

d'où

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla v_h\|_{0, K}^2 \preceq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\pi_K\|_{0, K}^2.$$

Enfin, l'inégalité (3.12) permet d'écrire que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, \pm} \cup \mathcal{E}_h^{b, \pm}} \frac{1}{2} \left\| |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|^{1/2} \llbracket v_h \rrbracket \right\|_{0, e}^2 \preceq \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i, \pm} \cup \mathcal{E}_h^{b, \pm}} h_K^2 \|\pi_K\|_{0, e}^2 \preceq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\pi_K\|_{0, K}^2.$$

Finalement, nous obtenons

$$\|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \preceq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\pi_K\|_{0, K}^2,$$

c'est-à-dire, avec l'estimation (3.11),

$$\|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \preceq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \left( \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0, K}^2 + \|\psi_h\|_{0, K}^2 \right),$$

d'où, à plus forte raison :

$$\|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \preceq \|\psi_h\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_h\|_{0, K}^2,$$

et donc

$$\|v_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \preceq \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2,$$

ce qui, combiné à (3.16a) et (3.16b), termine la preuve.  $\square$

**Remarque 3.7.** Ce théorème donne directement le caractère bien posé du problème discret. En effet, la condition inf-sup sur  $p_h$  est équivalente à l'injectivité de  $\mathcal{A}$  ( $\ker \mathcal{A} = \{0\}$ ) où  $\mathcal{A}$  est l'application linéaire associée à  $p_h$  et est définie de  $W_h^k$  dans  $W_h^k$ . Or, en dimension finie, il y a équivalence entre injectivité et surjectivité puisque, par le théorème du rang, l'injectivité donne  $\dim W_h^k = \text{rang } \mathcal{A}$ , c'est-à-dire la surjectivité de  $\mathcal{A}$ . Et donc  $\mathcal{A}$  est bijective de  $W_h^k$  dans  $W_h^k$ .

### 3.3.2 Estimation d'erreur

Nous pouvons alors classiquement établir le résultat de convergence suivant, en combinant le lemme 3.3 concernant la continuité de  $p_h$  et la proposition précédente :

**Théorème 3.8.** *Nous avons l'estimation d'erreur entre la solution exacte  $\psi$  et la solution approchée  $\psi_h$  suivante*

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq \inf_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \|\psi - \varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}. \quad (3.17)$$

*Démonstration.* De façon classique, l'erreur d'approximation exprimée avec la norme de la condition inf-sup (3.15) se décompose sous la forme :

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \leq \|\psi - w_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} + \|w_h - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}, \quad \forall w_h \in \mathbf{W}_h^k. \quad (3.18)$$

Cherchons d'abord à estimer  $\|w_h - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}$ . Comme la quantité  $w_h - \psi_h$  est dans  $\mathbf{W}_h^k$ , la condition de stabilité (3.15) implique que

$$\begin{aligned} \varpi \|w_h - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} &\leq \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{p_h(\alpha; w_h - \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}} \\ &\leq \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{p_h(\alpha; w_h - \psi + \psi - \psi_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}}. \end{aligned}$$

Par consistance de la méthode, nous avons  $p_h(\alpha; \psi - \psi_h, \varphi_h) = 0$ ,  $\forall \varphi_h \in \mathbf{W}_h^k$ , et donc l'estimation précédente devient

$$\varpi \|w_h - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \leq \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{p_h(\alpha; w_h - \psi, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}}.$$

La différence  $w_h - \psi$  étant dans  $\mathbf{H}_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ , la relation de continuité donnée par le lemme 3.3 donne ensuite

$$\|w_h - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq \|w_h - \psi\|_{h, \mathbf{v}_0, \frac{1}{2}}.$$

Enfin, la combinaison de cette estimation et de l'inégalité triangulaire (3.18) permet d'écrire

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq \|w_h - \psi\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}, \quad \forall w_h \in \mathbf{W}_h^k.$$

En particulier, cette relation est vérifiée lorsque  $w_h$  réalise la meilleure approximation de  $\psi_h$  pour la norme considérée :

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq \inf_{w_h \in \mathbf{W}_h^k} \|\psi - w_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}.$$

□

**Proposition 3.9.** *Supposons de plus que  $\psi \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ . Nous avons alors*

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq h^{k+\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \quad (3.19)$$

*Démonstration.* L'estimation d'erreur (3.17) peut être majorée en utilisant  $\mathcal{I}_h^k$  l'interpolateur de Lagrange sur  $W_h^k$  de la façon suivante :

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq \inf_{\varphi_h \in W_h^k} \|\psi - \varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}} \preceq \|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

Nous pouvons, à l'aides des propositions C.1, C.2 et C.4 données en annexe, majorer chacun des termes de  $\|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}$ . Nous avons ainsi  $\forall K \in \mathcal{T}_h$

$$\begin{aligned} \|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{0, K} &\preceq h_K^{k+1} |\psi|_{k+1, K}, \\ \|\mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\psi - \mathcal{I}_h^k \psi)\|_{0, K} &\preceq h_K^{-1} \|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{0, K}, \\ \|\|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}\|^{1/2} [\psi - \mathcal{I}_h^k \psi]\|_{0, e} &\preceq h_K^{-1/2} \|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{0, K}, \end{aligned}$$

où  $h_K = \text{diam}(K)$ . En combinant ces inégalités et en rassemblant les termes nécessaires pour former  $\|\psi - \mathcal{I}_h^k \psi\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}$ , nous obtenons l'estimation (3.19) où  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ .  $\square$

**Remarque 3.10.** L'opérateur de transport a des propriétés régularisantes uniquement dans la direction de l'écoulement. En effet, si la solution recherchée n'est pas suffisamment régulière dans le direction perpendiculaire à l'écoulement, il y a perte d'un ordre de convergence de la méthode.

### 3.4 Stabilité et estimation d'erreur pour le problème de transport harmonique

Notre objectif est d'étendre le résultat précédent au cas de l'équation de transport harmonique. La difficulté vient du fait que comme  $\Re \alpha = 0$ , la proposition 3.4 ne nous fournit que l'égalité (3.7). Le contrôle de la norme  $L^2(\Omega)$  de la solution n'est plus assuré. Pour le problème continu étudié au chapitre 1, cette difficulté avait été contournée grâce à la résolution quasi-explicite du problème, vu comme une équation différentielle le long des courbes caractéristiques. L'idée ici est de s'inspirer de la démarche présentée à la fin du chapitre 1, qui consistait à choisir comme fonction test la solution du problème adjoint de second membre  $\psi$ , c'est-à-dire

$$\varphi = (\mathbb{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi.$$

Mais si  $\psi = \psi_h$  appartient à l'espace discret  $W_h^k$ , ce n'est pas le cas de  $\varphi = (\mathbb{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi_h$  qui a priori appartient à l'espace continu  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ . Il nous faut donc projeter ce champ  $\varphi$  sur l'espace discret. Nous choisissons pour cela un opérateur  $\Pi_h$  de projection bien particulier, qui nous fournira aisément les estimations de  $\Pi_h \circ (\mathbb{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi_h$  nécessaires pour la suite.

#### 3.4.1 Définition d'un projecteur sur $W_h^k$

Tout d'abord, rappelons que l'opérateur de transport adjoint

$$\mathbb{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\# := \bar{\alpha} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla$$

est un isomorphisme de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  dans  $L^2(\Omega)$  et que  $\forall \psi \in L^2(\Omega)$ ,

$$\theta := (\mathbb{P}_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi,$$

la solution du problème adjoint  $\mathcal{P}_\alpha^\#$  ayant  $\psi$  comme second membre, vérifie l'estimation

$$\|\theta\|_{0, \Omega}^2 \leq C \|\psi\|_{0, \Omega}^2 \quad (3.21)$$

où  $C$  est la constante de la proposition 1.15.

Nous voulons définir un opérateur  $\Pi_h$  de projection sur  $W_h^k$ , qui s'applique en particulier aux fonctions de  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ . L'idée est de définir  $\Pi_h$  sur  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  qui contient  $W_h^k$  et  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  et que l'on munit de la forme bilinéaire  $b_h(\psi, \varphi)$  défini par

$$b_h : H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \times H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\psi, \varphi) \longmapsto b_h(\psi, \varphi)$$

avec  $\forall (\psi, \varphi) \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \times H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ ,

$$b_h(\psi, \varphi) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\psi - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \overline{\varphi} dx - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \rrbracket \overline{\varphi}_e d\gamma. \quad (3.22)$$

**Remarque 3.11.** La forme bilinéaire  $b_h$  est en fait l'approximation DG upwind des problèmes  $P_{1,\mathbf{v}_0}^\#$  et  $P_{1,-\mathbf{v}_0}$ , qui pour ces deux problèmes est identique. Nous aurions pu prendre un  $\alpha$  quelconque tel que  $\Re \alpha > \alpha_0 > 0$ , ce choix permet de conserver un contrôle  $L^2(\Omega)$  immédiat, similaire à celui donné dans la proposition 3.4.

L'existence de ce projecteur n'est pas immédiate car  $b_h$  n'est pas un produit scalaire sur  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Toutefois, un résultat d'existence peut être déduit du paragraphe précédent.

**Proposition 3.12.** *Soit  $\psi \in H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Le problème Trouver  $\psi^h$  dans  $W_h^k$  tel que*

$$b_h(\psi^h, \varphi_h) = b_h(\psi, \varphi_h), \quad \forall \varphi_h \in W_h^k$$

est bien posé. On note  $\Pi_h$  l'opérateur qui à  $\psi$  associe  $\psi^h$  de sorte que

$$\Pi_h : H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h) \longrightarrow W_h^k \\ \psi \longmapsto \psi^h = \Pi_h \psi$$

et

$$b_h(\Pi_h \psi - \psi, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in W_h^k. \quad (3.23)$$

L'estimation d'erreur suivante est vérifiée :

$$\|\psi - \Pi_h \psi\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla} \preceq \inf_{w_h \in W_h^k} \|\psi - w_h\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla, \frac{1}{2}}. \quad (3.24)$$

Si de plus  $\psi$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ , nous avons l'inégalité

$$\|\Pi_h \psi\|_{0,\Omega} \preceq \|\psi\|_H. \quad (3.25)$$

*Démonstration.* Le caractère bien posé du problème et l'estimation d'erreur (3.24) sont une conséquence directe des résultats présentés au paragraphe 3.3 pour l'advection-réaction. Supposons maintenant que  $\psi$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+) \subset H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$ . Par la relation de coercivité de la proposition 3.4 et par définition de l'opérateur  $\Pi_h$ , nous avons

$$\|\Pi_h \psi\|_{0,\Omega}^2 \preceq b_h(\Pi_h \psi, \Pi_h \psi) = b_h(\psi, \Pi_h \psi).$$

Comme  $\psi$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  les termes d'intégrations des sauts de  $b_h(\psi, \Pi_h \psi)$  s'annulent et il vient

$$\|\Pi_h \psi\|_{0,\Omega}^2 \preceq \int_{\Omega} (\psi - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi) \overline{\Pi_h \psi} dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet enfin d'écrire

$$\|\Pi_h \psi\|_{0,\Omega}^2 \preceq \|\psi - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi\|_{0,\Omega} \|\Pi_h \psi\|_{0,\Omega},$$

d'où l'inégalité (3.25). □

### 3.4.2 Le résultat de stabilité

**Proposition 3.13.** *Soit  $\psi_h$  une fonction de  $W_h^k$ . Il existe  $h_0$  strictement positif tel que pour tout  $h < h_0$  la relation*

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \geq \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2$$

est vérifiée avec

$$\varphi_h = \Pi_h \circ \theta_h \text{ et } \theta_h = (P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi_h$$

où  $\Pi_h$  est l'opérateur défini à l'aide de la proposition 3.12.

*Démonstration.* Soit  $\psi_h$  une fonction de  $W_h^k$ , posons  $\theta_h := (P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi_h$ . Testons la forme bilinéaire  $p_h$  par la fonction test  $\varphi_h = \Pi_h \circ \theta_h$ , puis réalisons une intégration par parties sur le terme de dérivée convective. Avec l'identité (3.5) et par définition de la forme bilinéaire  $b_h$  (3.22), nous pouvons écrire l'égalité

$$p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\alpha - 1) \int_K \psi_h \overline{\varphi_h} dx + \overline{b_h(\varphi_h, \psi_h)}, \forall \psi \in W_h^k.$$

Par définition du projecteur  $\Pi_h$ , il vient ensuite

$$p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\alpha - 1) \int_K \psi_h \overline{\varphi_h} dx + \overline{b_h(\theta_h, \psi_h)}, \forall \psi \in W_h^k. \quad (3.26)$$

D'après la définition de  $(P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1}$ ,  $\theta_h$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ , donc les termes d'intégration de bord de  $b_h(\theta_h, \psi_h)$  s'annulent. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{b_h(\theta_h, \psi_h)} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \overline{(\theta_h - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \theta_h) \psi_h} dx \\ &= (1 - \alpha) \int_\Omega \overline{\theta_h \psi_h} dx + \int_\Omega \overline{P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\# \theta_h \psi_h} dx. \end{aligned}$$

C'est-à-dire par définition de  $\theta_h$ ,

$$\overline{b_h(\theta_h, \psi_h)} = (1 - \alpha) \int_\Omega \overline{\theta_h \psi_h} dx + \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Donc, avec la relation (3.26), nous avons

$$p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) = (1 - \alpha) \int_\Omega \psi_h \overline{(\theta_h - \Pi_h \circ \theta_h)} dx + \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2.$$

En prenant la partie réelle de  $p_h$ , par inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient l'estimation

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \geq \|\psi_h\|_{0,\Omega}^2 - |1 - \alpha| \|\theta_h - \Pi_h \circ \theta_h\|_{0,\Omega} \|\psi_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.27)$$

Notons I l'opérateur identité sur  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ . Nous pouvons alors majorer le terme

$$\begin{aligned} \|\theta_h - \Pi_h \circ \theta_h\|_{0,\Omega} &= \|(I - \Pi_h) \circ \theta_h\|_{0,\Omega} \\ &\leq \|I - \Pi_h\| \|\theta_h\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

avec

$$\|I - \Pi_h\| = \sup_{\substack{\psi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+) \\ \|\psi\|_{0,\Omega} = 1}} \|\psi - \Pi_h \psi\|_{0,\Omega}.$$

Ensuite, la relation de stabilité (3.21) de l'opérateur  $(P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1}$  permet d'écrire

$$\|\theta_h - \Pi_h \circ \theta_h\|_{0, \Omega} \leq C \|\mathbb{I} - \Pi_h\| \|\psi_h\|_{0, \Omega}.$$

L'estimation (3.27) devient alors

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \geq (1 - C|1 - \alpha| \|\mathbb{I} - \Pi_h\|) \|\psi_h\|_{0, \Omega}^2.$$

En particulier pour  $\alpha \in -i\mathbb{R}^{+*}$ , nous avons

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \geq \left(1 - C(1 + \omega^2)^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{I} - \Pi_h\|\right) \|\psi_h\|_{0, \Omega}^2$$

où  $\alpha = -i\omega$ . Enfin, d'après l'estimation (3.24), il vient

$$\forall \psi \in \mathbf{H}(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+), \|\psi - \Pi_h \psi\|_{0, \Omega} \preccurlyeq \inf_{w_h \in \mathbf{W}_h^k} \|\psi - w_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}}. \quad (3.28)$$

Le caractère approximant de l'espace d'éléments finis  $\mathbf{W}_h^k$  qui s'écrit

$$\forall \psi \in \mathbf{H}(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+), \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \inf_{w_h \in \mathbf{W}_h^k} \|\psi - w_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}} \right) = 0,$$

permet alors de déduire que

$$\forall \psi \in \mathbf{H}(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+), \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\psi - \Pi_h \psi\|_{0, \Omega} = 0,$$

et donc en particulier

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathbb{I} - \Pi_h\| = 0,$$

d'où le résultat de la proposition.  $\square$

A ce stade, nous avons tous les éléments en main pour montrer que  $p_h$  vérifie, dans le cas du transport harmonique, une condition inf-sup de la forme (3.15). Le théorème énoncé ci-après étend le résultat de la proposition 3.6 au cas  $\alpha \in i\mathbb{R}^*$ .

**Théorème 3.14.** *Si  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , alors il existe  $h_0 > 0$  et une constante  $\varpi > 0$  indépendante de  $h$  telle que  $\forall h < h_0$ ,*

$$\inf_{\psi_h \in \mathbf{W}_h^k} \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}} \geq \varpi > 0. \quad (3.29)$$

*Démonstration.* La combinaison des propositions 3.4, 3.5 et 3.13 montre que

$$\Re p_h(\alpha; \psi_h, \varphi_h) \gtrsim \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \quad (3.30)$$

avec  $\varphi_h = \Pi_h \circ \theta_h + v_h + \psi_h$  où les fonctions  $v_h$  et  $\theta_h$  sont respectivement définies dans les propositions 3.5 et 3.13. D'autre part, nous savons par la preuve de la proposition 3.6 que

$$\|v_h + \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2 \preccurlyeq \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}^2. \quad (3.31)$$

Comme  $b_h$  est la forme bilinéaire approchée par méthode DG upwind d'un problème d'advection-réaction, elle satisfait d'après la proposition 3.6 une condition inf-sup de la forme (3.15). En particulier,  $\Pi_h \circ \theta_h$  est dans  $\mathbf{W}_h^k$  et par définition de  $\Pi_h$ , il vient

$$\|\Pi_h \circ \theta_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preccurlyeq \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{\Re b_h(\Pi_h \circ \theta_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}} = \sup_{\varphi_h \in \mathbf{W}_h^k} \frac{\Re b_h(\theta_h, \varphi_h)}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}}.$$

Comme  $\theta_h$  est dans  $H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$  les termes de saut de  $b_h(\theta_h, \varphi_h)$  s'annulent et nous obtenons par inégalité de Cauchy-Schwarz les estimations

$$\|\Pi_h \circ \theta_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq \|\theta_h - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \theta_h\|_{0, \Omega} \sup_{\varphi_h \in W_h^k} \frac{\|\varphi_h\|_{0, \Omega}}{\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}} \preceq \|\theta_h\|_H.$$

Selon la définition de  $\theta_h = (P_{\alpha, \mathbf{v}_0}^\#)^{-1} \psi_h$  et d'après la relation de stabilité (1.45) démontrée au chapitre 1, nous avons finalement

$$\|\Pi_h \circ \theta_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq \|\psi_h\|_{0, \Omega}. \quad (3.32)$$

Les estimations (3.31) et (3.32) conduisent ensuite à l'inégalité

$$\|\varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq \|\psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla}. \quad (3.33)$$

Enfin, la combinaison des relations (3.30) et (3.33) termine la preuve.  $\square$

### 3.4.3 Estimation d'erreur

Nous pouvons maintenant démontrer pour le problème de transport harmonique des estimations d'erreur analogues à celles du théorème 3.8 et de la proposition 3.9.

**Théorème 3.15.** *Pour  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , l'estimation d'erreur entre la solution exacte  $\psi$  et la solution approchée  $\psi_h$  suivante*

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq \inf_{\varphi_h \in W_h^k} \|\psi - \varphi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla, \frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

est satisfaite. Si de plus  $\psi \in H^{k+1}(\mathcal{T}_h)$ , alors nous avons

$$\|\psi - \psi_h\|_{h, \mathbf{v}_0, \nabla} \preceq h^{k+\frac{1}{2}} \|\psi\|_{H^{k+1}(\Omega)}. \quad (3.35)$$

La preuve de ces résultats est faite exactement comme pour le théorème 3.8 et la proposition 3.9 en utilisant cette fois la relation (3.29) au lieu de (3.15).

## 3.5 Extension à des écoulements non $\Omega$ -remplissants

Depuis le début, l'écoulement porteur  $\mathbf{v}_0$  est supposé  $\Omega$ -remplissant. Cette hypothèse sert uniquement à garantir le caractère bien posé du problème de transport adjoint dont nous nous servons pour obtenir le résultat de stabilité du paragraphe précédent. Donc, conformément à la définition d'écoulement  $\Omega$ -remplissant introduite au chapitre 1, l'analyse de l'approximation déroulée dans ce chapitre ne concerne pas les écoulements ayant des zones de recirculation ou des points d'arrêt. L'objectif de ce paragraphe est de vérifier de façon numérique la validité de l'approximation de Galerkin discontinue dans le cas d'écoulements non  $\Omega$ -remplissants. Nous nous intéressons à deux exemples précis. Le premier concerne l'écoulement recirculant dans une couronne dont nous avons déjà parlé au chapitre 1. Le deuxième exemple consiste en un écoulement autour d'un disque également introduit au premier chapitre.

### 3.5.1 Écoulement recirculant : exemple de la couronne

Considérons le domaine ayant la forme d'une couronne

$$\Omega = \{(r, \theta); r_1 < r < r_2 \text{ et } 0 < \theta < 2\pi\} \text{ avec } 0 < r_1 < r_2,$$

déjà introduit au chapitre 1 et représenté sur la figure 3.2. Supposons de plus qu'il est occupé par

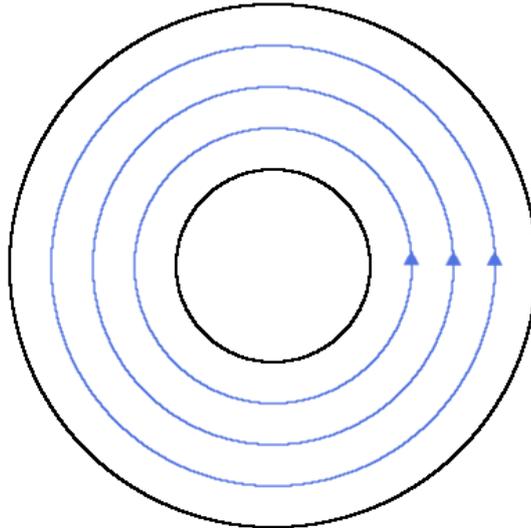


FIG. 3.2: Schéma du domaine circulaire.

un fluide en écoulement recirculant satisfaisant

$$\mathbf{v}_0 = v(r)\mathbf{e}_\theta$$

où  $v$  est une fonction à valeurs réelles strictement positive. Le problème  $\mathcal{P}_\alpha$  consiste à trouver  $\psi$  vérifiant

$$\begin{cases} \alpha\psi + \frac{v(r)}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = f & \text{dans } \Omega \\ \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi) & \forall r \in ]r_1, r_2[. \end{cases} \quad (3.36)$$

Pour un second membre  $f$  suffisamment régulier, nous avons vu au chapitre 1 que ce problème admet une unique solution lorsque

$$e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}} \neq 1 \quad (3.37)$$

et qui s'exprime

$$\psi(r, \theta) = \frac{r}{v(r)} \int_0^\theta f(r, \tau) e^{(\tau-\theta) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau + \frac{r}{v(r)} \frac{e^{-\theta \frac{\alpha r}{v(r)}}}{\left(1 - e^{-2\pi \frac{\alpha r}{v(r)}}\right)} \int_0^{2\pi} f(r, \tau) e^{(\tau-2\pi) \frac{\alpha r}{v(r)}} d\tau. \quad (3.38)$$

Nous pourrions montrer par la méthode des courbes caractéristiques que pour tout second membre  $f$  dans  $L^2(\Omega)$ , le problème (3.36) est bien posé dans

$$\left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \varphi \in L^2(\Omega) \text{ et } \varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi) \forall r \in ]r_1, r_2[ \right\} \quad (3.39)$$

si la relation (3.37) est vérifiée, c'est-à-dire si le problème avec second membre nul

$$\begin{cases} \alpha\psi + \frac{v(r)}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi(r, 0) = \psi(r, 2\pi) & \forall r \in ]r_1, r_2[ \end{cases} \quad (3.40)$$

admet comme unique solution la solution nulle. Sous cette hypothèse, nous aurions également le caractère bien posé du problème adjoint dans le même espace. Nous pourrions alors démontrer une condition inf-sup pour le problème continu selon la démarche employée au chapitre 1. Par suite, nous pourrions obtenir, comme au paragraphe précédent, le résultat de stabilité de l'approximation de Galerkin discontinue.

Pour le problème de transport harmonique  $\alpha = -i\omega$ , avec  $\omega \in \mathbb{R}$ , la condition (3.37) s'écrit

$$\frac{\omega r}{v(r)} \notin \mathbb{Z}. \quad (3.41)$$

Le problème peut alors être vu comme un problème aux valeurs propres : les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles le transport harmonique n'admet pas de solution unique sont dans le spectre de l'opérateur  $A = -i \frac{v(r)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ .

Nous testons la méthode de Galerkin discontinue pour deux valeurs du quotient  $\frac{\omega r}{v(r)}$ . L'écoulement porteur  $\mathbf{v}_0$  est choisi tel que

$$\mathbf{v}_0(r, \theta) = \frac{r}{2} \mathbf{e}_\theta \quad (3.42)$$

et nous calculons la solution approchée par méthode DG pour deux maillages de pas  $h$  et  $h/2$ . Le premier résultat représenté sur la figure 3.3 est obtenu pour  $\omega = \frac{7}{10}$ , c'est-à-dire  $\frac{\omega r}{v(r)} = \frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$ . La solution obtenue sur chacun des deux maillages est identique ce qui montre que la méthode converge vers une solution unique. Par contre, lorsque  $\omega = \frac{3}{2}$ , c'est-à-dire  $\frac{\omega r}{v(r)} = 3 \in \mathbb{Z}$  les deux maillages fournissent deux solutions différentes : la figure 3.4 montre que les valeurs minimales et maximales prises par la solution diffèrent d'un facteur dix d'un maillage à l'autre. Les deux calculs n'ont pas convergé vers la même solution, ceci signifie que la solution n'est pas unique. La valeur de  $\omega$  choisie correspond à une valeur propre du problème : la méthode restitue un mode propre et les solutions calculées sur chacun des maillages sont les mêmes à un facteur multiplicatif près.

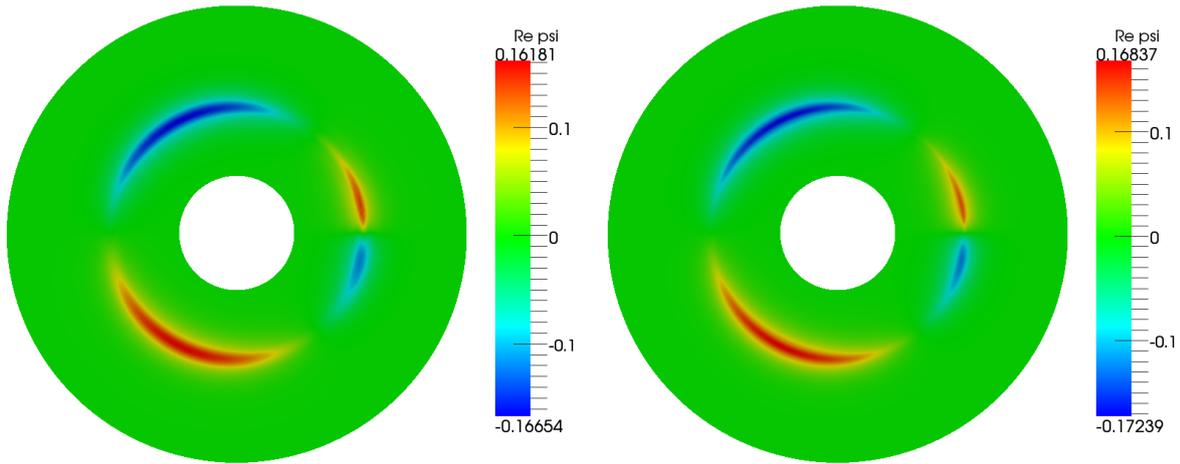


FIG. 3.3: Partie réelle de la solution du problème de transport harmonique obtenue pour  $\mathbf{v}_0 = \frac{r}{2} \mathbf{e}_\theta$  et  $\alpha = -\frac{7}{10}i$  avec des maillages de pas  $h$  (à gauche) et  $h/2$  (à droite).

### 3.5.2 Les points d'arrêt : l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre

Nous considérons un écoulement potentiel autour d'un disque de rayon  $R$  dont l'expression analytique de la vitesse  $\mathbf{v}_0$  est donnée en annexe D. Cet écoulement se déplace de la gauche vers la droite et contourne le disque rigide. La ligne de courant centrale présente deux points d'arrêt en  $(-R, 0)$  et  $(R, 0)$  représentés en rouge sur la figure 3.5. Nous avons déjà vu au chapitre 1 que cet écoulement n'est pas  $\Omega$ -remplissant. Les simulations numériques menées dans ce cas montrent que la méthode de Galerkin discontinue ne présente pas de difficulté à converger. La figure 3.6 représente la partie réelle de la solution de problème

$$\begin{cases} -i\omega\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi = f & \text{dans } \Omega \\ \psi = g & \forall r \in \Gamma^-. \end{cases} \quad (3.43)$$

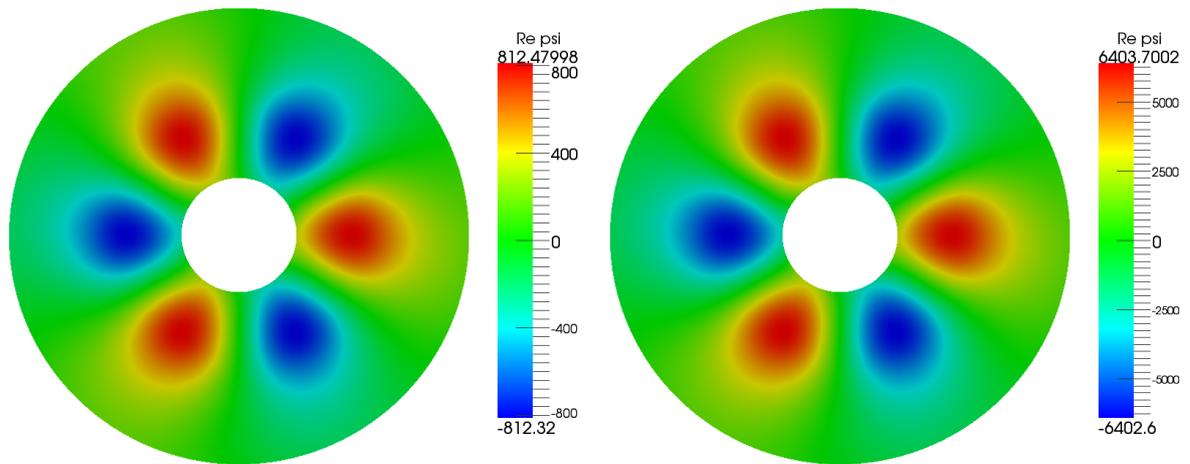


FIG. 3.4: Partie réelle de la solution du problème de transport harmonique obtenue pour  $\mathbf{v}_0 = \frac{r}{2} \mathbf{e}_\theta$  et  $\alpha = -\frac{3}{2}i$  avec des maillages de pas  $h$  (à gauche) et  $h/2$  (à droite).

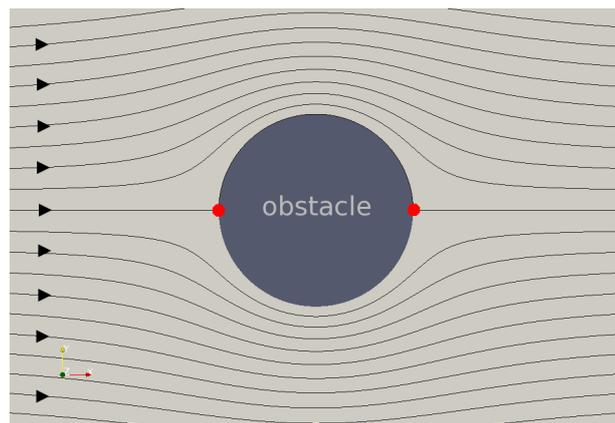


FIG. 3.5: Lignes de courant autour d'un cercle.

pris pour  $f \neq 0$  et  $g = 0$  avec  $\Omega = [-L, L] \times [-H, H]$  et  $\Gamma^- = \{(x_1, x_2) \in \Omega : x_1 = -L\}$ . Sur la figure 3.7, la valeur de  $\psi$  est imposée à un sur le bord à flux entrant et le terme source est nul, c'est-à-dire  $f = 0$  et  $g = 1$ . Dans les deux cas, nous observons le transport de la donnée d'entrée  $f$  ou  $g$  selon les lignes de courant avec un comportement oscillatoire. Nous remarquons le resserrement des oscillations à l'approche de la ligne de courant centrale. En regardant de plus près autour du cercle, nous pourrions voir que la solution oscille de plus en plus à l'approche des points où  $\mathbf{v}_0$  s'annule et que la restitution de cette partie du signal dépend de la finesse du maillage. Cependant, ces effets numériques restent locaux et ne perturbent pas la solution par ailleurs.

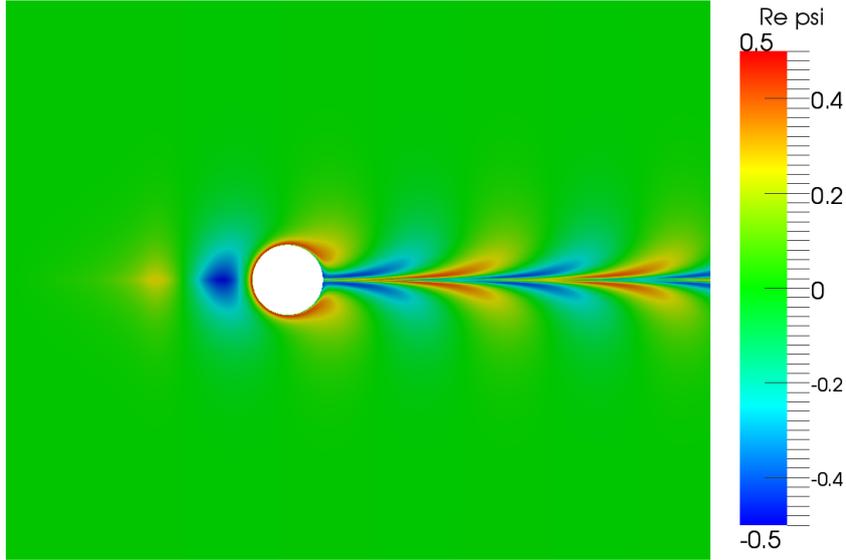


FIG. 3.6: Partie réelle de la solution pour  $\alpha = -2i$  et avec un terme source  $f$  non nul.

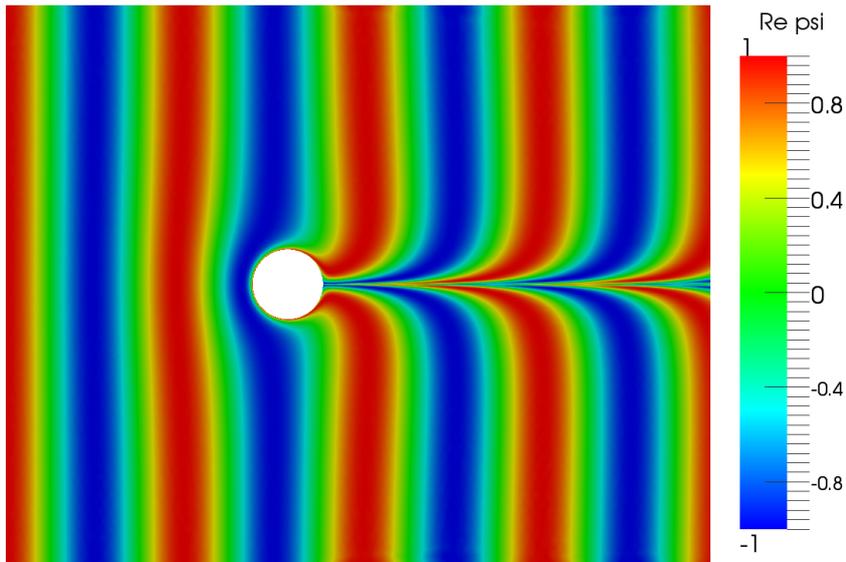


FIG. 3.7: Partie réelle de la solution pour  $\alpha = -2i$ ,  $f = 0$  et  $\psi$  imposé à 1 sur  $\Gamma^-$ .

La formulation de Galerkin discontinue décentrée constitue donc une méthode fiable pour la résolution de problèmes aux EDP du premier ordre et plus particulièrement pour le problème de transport harmonique. Le résultat de stabilité que nous avons obtenu concerne le cas restrictif des écoulements  $\Omega$ -remplissants, mais une extension aux écoulements recirculants est possible et les résultats numériques montrent que la méthode reste stable en présence de points d'arrêt. Nous pouvons donc aborder le problème de propagation acoustique et sa résolution par l'approche de Galbrun augmentée, puisque nous disposons maintenant d'un outil numérique pour la détermination de l'inconnue hydrodynamique. La partie suivante s'intéresse à la résolution du système couplant l'équation de Galbrun augmentée et l'équation hydrodynamique.



Deuxième partie

Application à la résolution de  
l'équation de Galbrun



## Chapitre 4

# Équation de Galbrun et éléments finis : historique d'une reformulation

Ce travail s'inscrit dans le prolongement de deux thèses qui ont été effectuées au laboratoire POEMS [63, 40]. Le but de ce chapitre est de donner une présentation synthétique et pédagogique de la démarche qui a été mise en place au cours de ces travaux. Nous nous attacherons à mettre en évidence les points clés sans nous attarder sur les détails précis de mathématiques. Nous renvoyons le lecteur intéressé au chapitre suivant où une présentation plus rigoureuse sera faite.

Ces travaux portent sur la modélisation et la simulation numérique de la propagation du son dans un écoulement. L'objectif est de développer une méthode d'éléments finis pour les équations linéarisées en régime fréquentiel. Typiquement il s'agit de simuler la propagation, dans un domaine non borné, du bruit de raie généré par un moteur d'avion.

L'originalité de l'approche suivie réside tout d'abord dans le choix des équations traitées : nous présenterons dans le premier paragraphe ces équations dues à Galbrun et nous donnerons les avantages qu'elles présentent comparativement au choix usuel des équations d'Euler linéarisées. La deuxième spécificité réside dans l'écriture d'une formulation augmentée (ou régularisée) de l'équation de Galbrun dont nous expliquerons les bénéfices pour la résolution numérique du problème dans le second paragraphe. Le processus d'augmentation nécessite d'introduire une inconnue supplémentaire de nature hydrodynamique que nous appellerons par abus de langage et anglicisme vorticité, et qui satisfait justement l'équation de transport qui a fait l'objet de la première partie de la thèse.

### 4.1 L'équation de Galbrun

#### 4.1.1 Les équations linéarisées de l'aéroacoustique

Soit un fluide en écoulement stationnaire subsonique arbitraire dans un domaine infini. Supposé parfait et en évolution adiabatique, ce fluide est caractérisé par ses champs non uniformes de pression  $p_0$ , vitesse  $\mathbf{v}_0$ , densité  $\rho_0$  et vitesse du son  $c_0$  qui vérifient les équations d'Euler stationnaires et l'équation d'état suivantes :

$$\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0,$$

$$\rho_0(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p_0 = 0, \tag{4.1}$$

$$p_0 = K \rho_0^\gamma \text{ et } c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \tag{4.2}$$

où  $K$  et  $\gamma$  sont des constantes. Nous nous intéressons à la propagation de perturbations acoustiques dans cet écoulement porteur. Comme nous l'avons vu plus haut, l'approche courante consiste à linéariser les équations d'Euler. On montre ainsi que les petites perturbations de pression et de

vitesse vérifient, en régime harmonique (dépendance en temps en  $e^{-i\omega t}$ ), les équations

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) &= 0, \\ \rho_0 \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \rho_0 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \rho (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p &= 0, \\ p &= c_0^2 \rho, \end{aligned} \tag{4.3}$$

où  $\frac{D}{Dt}$  désigne l'opérateur de transport qui en régime harmonique s'écrit

$$\frac{D}{Dt} = -i\omega + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla.$$

Il existe une équation alternative : l'équation de Galbrun [49]. Elle est obtenue par linéarisation des équations de conservation de la mécanique des fluides [71] et porte sur la perturbation du déplacement lagrangien  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$  définie en annexe G. En régime harmonique, nous définissons  $\mathbf{u}$  tel que

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) = \Re \mathbf{e} \left( \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t} \right).$$

et l'équation de Galbrun s'écrit

$$\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{u} \nabla p_0 - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla p_0 = 0, \tag{4.4}$$

où  $\mathbf{u}$  est la perturbation du déplacement en régime harmonique. Il est possible de vérifier (de façon non immédiate [63]) qu'à partir de la solution de l'équation de Galbrun nous retrouvons la solution des équations d'Euler en utilisant le lien

$$p = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p_0, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0. \tag{4.6}$$

Pour aborder de façon simple ces deux modèles, considérons deux cas particuliers : l'écoulement uniforme et l'écoulement cisailé.

### 4.1.2 Le cas de l'écoulement uniforme

Pour un écoulement uniforme de la forme

$$\mathbf{v}_0(x) = v_0 \mathbf{e}_{x_1},$$

avec  $v_0$  une constante strictement positive, les équations de l'écoulement porteur (4.1) donnent que  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $c_0$  sont uniformes. Les équations de l'acoustique se simplifient donc en

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{D}{Dt} p + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{4.7}$$

$$\rho_0 \frac{D}{Dt} \mathbf{v} + \nabla p = 0, \tag{4.8}$$

et l'équation de Galbrun devient

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - c_0^2 \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = 0. \tag{4.9}$$

En prenant successivement la divergence et le rotationnel de la relation (4.9), il est intéressant de remarquer que  $p = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}$  et  $\psi = \operatorname{rot} \mathbf{u}$  vérifient les deux équations découplées suivantes

$$\left( \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \Delta \right) p = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{D^2 \psi}{Dt^2} = 0. \quad (4.11)$$

La pression est solution d'une équation de Helmholtz convectée et la vortacité est solution d'une équation de transport au carré. L'équation de Galbrun modélise donc à la fois les phénomènes de propagation d'ondes et de convection hydrodynamique. Les mêmes conclusions peuvent être livrées dans le cas des équations d'Euler (4.7,4.8). En effet, on peut montrer de façon classique que  $\mathbf{v}$  vérifie (4.9), où  $\mathbf{u}$  est remplacé par  $\mathbf{v}$ , et que  $p$  satisfait (4.10). Autrement dit, la vitesse eulerienne vérifie l'équation de Galbrun en écoulement uniforme (ce qui ne sera plus vrai en écoulement variable). Notons enfin qu'en prenant le rotationnel de (4.8), nous obtenons

$$\frac{D}{Dt}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 \quad (4.12)$$

qui est l'analogie de (4.11) et modélise la convection des tourbillons. Le découplage entre acoustique et hydrodynamique que nous venons de mettre en évidence pour un écoulement uniforme n'est plus vrai en écoulement quelconque où les deux phénomènes sont alors couplés. Ce couplage constitue la principale difficulté lorsqu'il s'agit de traiter des problèmes de propagation d'onde en présence d'écoulement. Nous allons l'illustrer dans le cas de l'écoulement cisailé.

### 4.1.3 Le cas de l'écoulement cisailé

Pour un écoulement cisailé tel que

$$\mathbf{v}_0(x) = v_0(x_2) \mathbf{e}_1,$$

les équations de l'écoulement porteur (4.1) donnent là encore que  $p_0$ ,  $\rho_0$  et  $c_0^2$  sont uniformes et les équations d'Euler se simplifient en

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.13)$$

$$\rho_0 \frac{D}{Dt} \mathbf{v} + \rho_0 v_2 v_0' \mathbf{e}_1 + \nabla p = 0, \quad (4.14)$$

où  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Nous voyons apparaître dans l'équation (4.14) un terme supplémentaire par rapport à (4.8) où intervient la dérivée de l'écoulement. C'est ce terme qui, responsable du couplage entre acoustique et hydrodynamique, est à l'origine de nombreuses difficultés mathématiques et numériques. Contrairement aux équations d'Euler, l'équation de Galbrun en écoulement cisailé reste inchangée par rapport au cas uniforme (4.9) car la dérivée de l'écoulement n'apparaît pas.

### 4.1.4 Les avantages comparés des équations de Galbrun et d'Euler

Les équations d'Euler sont de loin plus populaires que l'équation de Galbrun. Elles ont l'avantage de porter sur les inconnues physiques "naturelles" que sont la vitesse et la pression, quantités que l'on peut mesurer en pratique. Quel est donc l'intérêt d'une approche reposant sur l'équation de Galbrun ? Nous voyons au moins deux avantages significatifs à cette approche inhabituelle.

- Le premier concerne l'écriture des conditions aux limites. L'inconnue de Galbrun est mieux adaptée que les inconnues d'Euler pour écrire les conditions aux limites et de transmission pour les problèmes avec impédance et de couplage fluide-structure, car ce sont la pression et le déplacement normal qui se raccordent naturellement. Cependant, dans ce manuscrit

nous ne faisons pas bénéfice de cela puisque nous considérons seulement des bords rigides pour lesquels les conditions à la limite en variable de Lagrange et en variable d'Euler sont semblables ( $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ).

- Le second avantage est lié à notre principal objectif qui est la résolution par éléments finis du problème harmonique. Tout d'abord, le modèle de Galbrun compte a priori une inconnue scalaire de moins que le système d'Euler. De plus, équation de Galbrun est du second ordre et est très proche d'une équation de Helmholtz convectée ( $\nabla \operatorname{div}$  au lieu de  $\Delta$ ). Comme nous le verrons, elle s'écrit facilement sous forme variationnelle et semble donc adaptée à une résolution par éléments finis. En revanche, les équations d'Euler prennent la forme de deux équations de transport couplées. Par conséquent, une résolution des équations d'Euler nécessiterait d'utiliser les outils développés dans les chapitres précédents. En particulier, nous pensons que la méthode de Galerkin continu ne fonctionnerait pas.

Nous verrons par la suite que le processus d'augmentation de l'équation de Galbrun conduit à nuancer ces avantages.

## 4.2 La formulation augmentée en écoulement uniforme

Comme vu précédemment, l'équation de Galbrun se prête à l'écriture d'une formulation variationnelle et donc semble adaptée à l'utilisation d'éléments finis continus. Cependant, dès le cas simple de l'écoulement uniforme, la discrétisation par éléments finis de Lagrange conduit à une solution numérique parasitée [63]. Cette équation souffre en fait d'un manque d'ellipticité ( $\nabla \operatorname{div}$  au lieu de  $\Delta$ ). Plusieurs équipes de recherche ont proposé aux cours des 15 dernières années des méthodes alternatives permettant de contourner ce défaut de coercivité. D'une part l'équipe de Compiègne [84, 48] a constaté qu'une formulation mixte combinée à l'utilisation d'éléments finis d'ordre élevé conduit à une solution numérique stable. D'autre part, l'équipe POEMS a développé la technique d'augmentation que nous allons détailler maintenant dans la cas simple de l'écoulement uniforme.

Notre objectif dans cette section est de présenter le principe d'augmentation proposé dans [63] pour l'équation de Galbrun en vue de restaurer l'ellipticité. Afin de faciliter la présentation, nous considérons d'abord un écoulement uniforme, pour lequel les phénomènes hydrodynamiques et acoustiques sont découplés.

### 4.2.1 Le processus d'augmentation

Dans le cas simple du fluide au repos et en l'absence de source, l'équation de Galbrun prend la forme suivante

$$-\omega^2 \mathbf{u} - c_0^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4.15)$$

En prenant le rotationnel de cette équation, il vient que les solutions  $\mathbf{u}$  vérifient

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0.$$

Le procédé d'augmentation consiste à remplacer le terme en  $\nabla \operatorname{div}$  par un Laplacien en ajoutant formellement à l'équation (4.15) le terme

$$c_0^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}) \quad (4.16)$$

qui s'identifie à zéro. Ainsi, par l'identité

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}) - \nabla(\operatorname{div}) = -\Delta, \quad (4.17)$$

le champ  $\mathbf{u}$  solution de (4.15) vérifie une équation elliptique (l'équation de Helmholtz vectorielle) de la forme

$$-\omega^2 \mathbf{u} - c_0^2 \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (4.18)$$

Pour un fluide en écoulement uniforme, nous verrons au paragraphe suivant que (4.9) implique encore  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$  et l'équation augmentée est alors donnée par

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} + c_0^2 (-\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{rot } \text{rot } \mathbf{u}) = 0, \quad (4.19)$$

et se développe sous la forme

$$-\omega^2 \mathbf{u} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + v_0^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + c_0^2 (-\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \mathbf{rot } \text{rot } \mathbf{u}) = 0. \quad (4.20)$$

Pour analyser cette équation augmentée écrivons la formulation variationnelle associée :

$$\int -\omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} + (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \bar{\mathbf{v}})) = 0, \quad (4.21)$$

où  $\mathbf{v}$  est une fonction test à support compact. Les apports de cette nouvelle formulation par rapport au problème initial résident dans la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine polygonal borné. La forme bilinéaire*

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left( \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 ((\text{div } \mathbf{u})(\text{div } \bar{\mathbf{v}}) + (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \bar{\mathbf{v}})) \right) dx \quad (4.22)$$

est coercive sur  $V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)^2 \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  pour un écoulement subsonique.

*Démonstration.* La démonstration s'appuie sur l'identité de Costabel [36] valable pour tout  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  dans  $V$  et en domaine polygonal

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\text{div } \bar{\mathbf{v}}) + (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \bar{\mathbf{v}}) dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \bar{\mathbf{v}} dx \quad (4.23)$$

avec laquelle, nous avons

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( |\mathbf{u}|^2 - v_0^2 \left| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right|^2 + c_0^2 |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) dx \geq \min(1, c_0^2 - v_0^2) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (4.24)$$

□

Ce théorème permet de montrer que le problème augmenté avec la condition aux limites de bords rigides  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$  relève de l'alternative de Fredholm car les termes de (4.21) autres que la forme bilinéaire  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  constituent une perturbation compacte de cette dernière.

**Remarque 4.2.** – Il est important de noter que le théorème n'est pas valable si l'on remplace  $V$  par l'espace  $\mathbf{H}^1(\Omega)^2$  car l'identité de Costabel requiert la condition aux limites de bords rigides. Ainsi, on ne saurait pas traiter la condition aux limites de bords libres  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ .

– Une difficulté se pose si la géométrie du problème présente des coins entrants dans le domaine de calcul. Dans ce cas la solution de l'équation initiale peut être singulière au voisinage du coin et ne pas appartenir à  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . Le problème augmenté admet quant à lui une solution dans  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  mais qui est à rotationnel non nul, c'est pourquoi ce n'est pas une solution du problème initial. Ces difficultés sont délicates tant du point de vue physique que mathématique. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les démonstrations à [63, 40].

### 4.2.2 Relation entre augmentation et phénomènes hydrodynamiques

Nous venons de voir qu'il est intéressant de remplacer l'équation (4.9) par la formulation augmentée (4.19), mais ceci n'est possible que si la solution de (4.9) satisfait  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ . Nous pouvons alors nous demander quoi faire dans le cas où la solution recherchée n'est pas à rotationnel nul. Prenons  $\mathbf{u}$  une solution de l'équation initiale (4.9) et posons

$$\psi = \text{rot } \mathbf{u}.$$

En appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation (4.9), nous montrons que  $\psi$  vérifie

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{D\psi}{Dt} \right) = 0.$$

D'après le chapitre 1,  $\psi$  est complètement déterminé par les conditions imposées à  $\psi$  et  $\frac{D\psi}{Dt}$  sur la frontière du domaine de calcul à flux entrant notée  $\Gamma^-$ . Ces conditions dépendent de la configuration physique choisie. En particulier pour des conditions homogènes

$$\psi = \frac{D\psi}{Dt} = 0 \text{ sur } \Gamma^-,$$

qui signifient qu'il n'y a pas de tourbillons qui entrent dans le domaine de calcul, nous avons bien  $\psi = 0$ . Sinon,  $\psi$  pourra être non nul mais sera entièrement déterminé par les conditions aux limites. Nous pouvons donc déterminer  $\psi$  a priori puis remplacer l'équation (4.19) par

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} + c_0^2 (-\nabla(\text{div } \mathbf{u}) + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{u} - \psi)) = 0. \quad (4.25)$$

La formulation variationnelle associée fera alors apparaître  $\psi$  au second membre de l'équation :

$$\int -\omega^2 \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} + (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \bar{\mathbf{v}})) = c_0^2 \int \psi \text{ rot } \bar{\mathbf{v}}.$$

**Remarque 4.3.** Au départ, l'écriture de la formulation augmentée a été introduite pour pallier à des problèmes d'oscillations numériques. Il s'avère a posteriori que l'introduction de  $\psi$  dans le problème se justifie par des raisons plus profondes liées à la nature physique du problème traité. L'introduction de  $\psi$  et en particulier la condition aux limites sur  $\Gamma^-$  permet de gérer les aspects de transport hydrodynamique en donnant un sens amont/aval au système.

Jusqu'à présent, nous avons uniquement parlé de l'équation de Galbrun prise sans second membre. Supposons maintenant que le second membre  $\mathbf{f}$  est non nul :

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - c_0^2 \nabla(\text{div } \mathbf{u}) = \mathbf{f}. \quad (4.26)$$

A nouveau, en appliquant l'opérateur rotationnel à l'équation de Galbrun, nous montrons que  $\psi$  satisfait

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{D\psi}{Dt} \right) = \text{rot } \mathbf{f}. \quad (4.27)$$

Pour une source acoustique, correspondant à un second membre  $\mathbf{f}$  tel que  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ , nous sommes ramenés au cas précédent. Dans le cas général, si le rotationnel de  $\mathbf{f}$  ainsi que la donnée de  $\psi$  et  $\frac{D\psi}{Dt}$  sur  $\Gamma^-$  sont connus, alors  $\psi$  peut être obtenu a priori par inversions successives de l'opérateur  $\frac{D}{Dt}$ . Nous pourrions alors, pour déterminer  $\mathbf{u}$ , considérer le problème faible suivant

$$\int -\omega^2 \mathbf{u} \bar{\mathbf{v}} - 2i\omega v_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \bar{\mathbf{v}} - v_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x_1} + c_0^2 (\text{div } \mathbf{u} \text{ div } \bar{\mathbf{v}} + (\text{rot } \mathbf{u})(\text{rot } \bar{\mathbf{v}})) = \int \mathbf{f} \bar{\mathbf{v}} + c_0^2 \psi \text{ rot } \bar{\mathbf{v}} \quad (4.28)$$

où  $\psi$  satisfait désormais (4.27) et où  $\mathbf{f}$  apparaît au second membre.

### 4.3 La formulation augmentée en écoulement quelconque

Nous avons vu au paragraphe précédent comment obtenir une formulation augmentée de l'équation de Galbrun dans le cas d'un écoulement uniforme. Nous allons voir comment étendre cette idée au cas d'un écoulement quelconque. De façon similaire, nous posons

$$\psi = \text{rot } \mathbf{u},$$

et la formulation augmentée s'écrit

$$\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \text{div } \mathbf{u}) + \text{div } \mathbf{u} \nabla p_0 - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla p_0 + \text{rot} \left( \rho_0 c_0^2 (\text{rot } \mathbf{u} - \psi) \right) = \mathbf{f}. \quad (4.29)$$

La difficulté réside dans le fait que pour un écoulement général, le rotationnel de  $\mathbf{u}$  est non nul et l'inconnue  $\psi$  ne peut pas être déterminée *a priori*. De plus,  $\psi$  ne vérifie pas une équation aussi simple que dans le cas uniforme. En effet, lorsqu'on applique l'opérateur rotationnel à l'équation de Galbrun, on ne peut plus faire permuter celui-ci avec l'opérateur  $\frac{D}{Dt}$  comme c'était le cas en écoulement uniforme. Considérons pour commencer l'exemple académique d'un écoulement parallèle cisailé c'est-à-dire  $\mathbf{v}_0(x_1, x_2) = v_0(x_2)\mathbf{e}_{x_1}$ . L'application du rotationnel à l'équation (4.9) conduit alors à

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{D\psi}{Dt} \right) = \text{rot } \mathbf{f} + 2v_0' \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right). \quad (4.30)$$

Nous constatons que  $\psi$  est à nouveau solution d'une équation de transport au carré mais cette fois,  $\mathbf{u}$  intervient dans le terme de droite. Il n'est donc plus possible de calculer  $\psi$  a priori. En effet, les phénomènes acoustiques et hydrodynamiques sont couplés et les inconnues  $\psi$  et  $\mathbf{u}$  doivent être déterminées simultanément comme solution d'un problème couplé.

**Remarque 4.4.** La formulation augmentée nous amène à nuancer certains avantages de l'équation de Galbrun sur l'équation d'Euler que nous avons donnés au début de ce chapitre. D'une part l'équation de transport sur la vorticit e fait apparaître la d eriv ee du profil de l' ecoulement et d'autre part le processus d'augmentation n ecessite d'introduire une inconnue scalaire suppl ementaire en  $2D$  et trois inconnues scalaires suppl ementaires en  $3D$ .

Pour un  ecoulement g en eral, l'application de l'op erateur rotationnel  a l' equation de Galbrun initiale conduit  a la relation

$$\frac{D^2 \psi}{Dt^2} = -2 \frac{D}{Dt} (\mathcal{B}\mathbf{u}) - \mathcal{C}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \text{rot } \mathbf{f}, \quad (4.31)$$

avec

$$\mathcal{B}\mathbf{u} = \sum_{j=1}^2 \nabla v_{0,j} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}, \quad (4.32)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathbf{u} = & \sum_{j,k=1}^2 \left( \frac{\partial v_{0,k}}{\partial x_j} \nabla v_{0,j} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} - v_{0,j} \nabla \frac{\partial v_{0,k}}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \right) \\ & + \frac{1}{\rho_0} \sum_{j=1}^2 \left( \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \nabla p_0 - \nabla \left( \frac{\partial p_0}{\partial x_j} \right) \right) \wedge \nabla u_j. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Les op erateurs  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  font intervenir des gradients de l' ecoulement et prennent des formes tr es simplifi ees en  ecoulement parall ele cisailée. Nous avons

$$\mathcal{B}\mathbf{u} = - \frac{\partial v_{0,1}}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (4.34)$$

$$\mathcal{C}\mathbf{u} = 0 \quad (4.35)$$

car dans ce cas  $v_{0,1}$  ne d epend que de  $x_2$ ,  $v_{0,2} = 0$  et  $\nabla p_0 = 0$ . Nous retrouvons bien les termes de l' equation (4.30).

**Remarque 4.5.** Nous appelons parfois (abusivement)  $\psi = \text{rot } \mathbf{u}$  la vorticité. Rappelons qu'usuellement, la vorticité, caractéristique des phénomènes hydrodynamiques, est représentée par la quantité  $\text{rot } \mathbf{v}$  où  $\mathbf{v}$  est la vitesse eulerienne. En écoulement uniforme, le lien entre ces deux quantités est simple car  $\frac{D\psi}{Dt} = \text{rot } \mathbf{v}$ , ce qui n'est plus vrai en écoulement variable. Ainsi, dans le cas d'un écoulement potentiel non uniforme, pour une source acoustique ( $\text{rot } \mathbf{f} = 0$ ), on peut montrer que  $\text{rot } \mathbf{v} = 0$  alors que  $\psi \neq 0$ . On peut dans ce cas se ramener à un problème scalaire sur le potentiel des vitesses ( quation de Helmholtz convectée). Le chapitre 6 présente des exemples pour lesquels l'acoustique ne génère pas de tourbillon hydrodynamique alors que notre approche pour le même cas trouve un  $\psi$  non nul.

Nous verrons par la suite comment résoudre le problème augmenté couplé avec l'équation hydrodynamique.

## 4.4 Le modèle augmenté avec couches PML

Les problèmes qui nous intéressent sont généralement posés dans des domaines non bornés, ou plus exactement dans des domaines très grands devant la zone d'intérêt (le voisinage du réacteur de l'avion par exemple) de sorte qu'il est préférable de les considérer infinis. On suppose de plus que l'écoulement devient "simple"   une distance finie de la zone d'intérêt qui contient quant à elle toutes les perturbations (de géométrie et d'écoulement). Un " coulement simple" signifie un écoulement uniforme ou un écoulement parallèle cisailé.

L'objectif est alors de réduire le calcul à la zone d'intérêt, et d'imposer au bord du domaine de calcul des conditions qui rendent compte le mieux possible du caractère non-borné du domaine de propagation. On veut en particulier éviter, ou limiter, les réflexions d'ondes parasites générées par les bords fictifs du domaine de calcul. Pour les problèmes d'acoustique dans un fluide au repos, il existe de nombreuses techniques pour réaliser ce type de conditions, dites "transparentes" (couplage avec une représentation intégrale, représentation en série de Fourier de l'opérateur DtN ou couches absorbantes parfaitement adaptées - PML - pour ne citer que les principales d'entre elles). Pour le problème qui nous intéresse ici, la situation est beaucoup plus compliquée, du fait de la présence des phénomènes hydrodynamiques. Comme nous l'avons vu dans la première partie de la thèse, le traitement de ces derniers requiert de distinguer les frontières d'entrée et de sortie du domaine de calcul, c'est-à-dire les parties de la frontière où l'écoulement entre dans le domaine de calcul ou sort de celui-ci. Or il est difficile de prendre en compte cette distinction dans une formulation variationnelle classique, telle que la formulation variationnelle de l'équation de Galbrun initiale (non régularisée). On peut citer en revanche la méthode proposée par Gw nael Gabard [47] qui montre qu'il est possible de prendre en compte des conditions transparentes dans une formulation DG des équations d'Euler linéarisées.

La méthode que nous avons retenue pour notre part, dans la suite des thèses de Guillaume Legendre et d'Eve-Marie Duclairoir, consiste à utiliser des couches PML. Cela peut paraître surprenant car de nombreuses difficultés ont été relevées dans la littérature lors de l'utilisation de PML en aéroacoustique [13, 39, 53, 54, 79]. En fait, si les PML fonctionnent dans notre cas, c'est d'une part parce que nous utilisons une formulation augmentée de l'équation de Galbrun et d'autre part parce que nous considérons le régime périodique établi.

Commençons par rappeler brièvement comment fonctionne la méthode des PML. Supposons pour fixer les idées que le domaine de propagation est infini dans la direction  $x_1$ , toutes les perturbations étant quant à elles contenues dans la zone  $|x_1| < R$ . L'idée des PML est d'effectuer dans la zone  $|x_1| > R$  une "dilatation complexe", au sens où une inconnue  $\varphi(x_1, x_2)$  est remplacée par la nouvelle inconnue dilatée

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi\left(\frac{x_1 \pm R}{\alpha}, x_2\right)$$

où  $\alpha \in \mathbb{C}$ , avec  $-\pi/2 < \text{Arg}(\alpha) < 0$ .  $\alpha$  est un paramètre de la méthode qui devra être choisi par l'utilisateur. Si  $\varphi$  se comporte en  $\pm\infty$  comme  $e^{i\beta x_1}$ , alors la nouvelle inconnue  $\tilde{\varphi}$  se comportera comme  $e^{i(\beta/\alpha)x_1}$ . Ainsi une onde propagative ( $\beta \in \mathbb{R}$ ) devient évanescente en  $+$  ou  $-$  l'infini. Plus exactement, une onde de vitesse de phase positive ( $\beta > 0$ ) devient évanescente en  $+\infty$ , et inversement, une onde de vitesse de phase négative ( $\beta < 0$ ) devient évanescente en  $-\infty$ . C'est la magie des PML puisqu'on espère ainsi que les ondes sortantes deviennent exponentiellement décroissantes à l'infini. On pourra alors tronquer le domaine de calcul en ne produisant qu'une erreur exponentiellement petite.

Une première difficulté vient du fait que le sens de l'onde n'est pas toujours donné par le signe de  $\beta$ . En effet, celui-ci indique le signe de la vitesse de phase  $\omega/\beta$  alors que le sens de l'onde est donné par le signe de la vitesse de groupe  $d\omega/d\beta$ . C'est pourquoi les ondes dites amont-inverse (qui se propagent dans le sens de l'écoulement bien que leur vitesse de phase soit de signe opposé à l'écoulement) génèrent des instabilités numériques lorsque l'on utilise des PML pour résoudre les équations d'Euler en régime temporel. Mais il est montré dans [11] que cette difficulté disparaît en régime harmonique. En effet, en présence de modes amont-inverse, la solution obtenue croît dans la PML sans altérer la solution calculée dans le domaine physique d'intérêt.

Une seconde difficulté est liée à la présence des phénomènes hydrodynamiques. En effet, on vérifie aisément (cf. section 5.5 de [12]) que les PML ne fonctionnent pas pour l'équation de transport au carré. En effet, au lieu de calculer une approximation de la solution physique du problème (nulle à l'amont), on calcule une solution des équations qui dépend fortement de la longueur des couches. On n'observe ni instabilité ni convergence. Le résultat est simplement faux.

Dans notre cas, les PML fonctionnent car nous les appliquons à l'équation de Galbrun augmentée, couplée à l'équation hydrodynamique qui permet la prise en compte de la condition d'entrée à l'amont, pour la vorticité. Autrement dit, on impose directement la nullité de la vorticité à l'amont. Les PML se chargent quant à elles de laisser sortir les ondes acoustiques.



## Chapitre 5

# Analyse et discrétisation du modèle couplé en déplacement/vorticité

Nous avons vu au chapitre précédent que le problème acoustique consiste à résoudre un système couplé d'inconnues  $\mathbf{u}$  et  $\psi$  de la forme

$$\begin{pmatrix} A_{\mathbf{u}\mathbf{u}} & A_{\mathbf{u}\psi} \\ A_{\psi\mathbf{u}} & A_{\psi\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \text{rot } \mathbf{f} \end{pmatrix}.$$

A  $\psi$  fixé, le problème en  $\mathbf{u}$  a de bonnes propriétés mathématiques : il relève de l'alternative de Fredholm. De même à  $\mathbf{u}$  fixé, les techniques de la première partie fournissent un cadre adapté pour le problème en  $\psi$ . Dans cette configuration où  $A_{\mathbf{u}\mathbf{u}}$  et  $A_{\psi\psi}$  sont inversibles, l'idée de ce chapitre est de mener l'analyse en éliminant l'inconnue  $\psi$ . L'équation en  $\mathbf{u}$  devient alors

$$\left( A_{\mathbf{u}\mathbf{u}} - A_{\mathbf{u}\psi} A_{\psi\psi}^{-1} A_{\psi\mathbf{u}} \right) \mathbf{u} = \mathbf{f} - A_{\mathbf{u}\psi} A_{\psi\psi}^{-1} \text{rot } \mathbf{f}.$$

Si la perturbation  $A_{\mathbf{u}\psi} A_{\psi\psi}^{-1} A_{\psi\mathbf{u}}$  est compacte ou petite en norme, nous pouvons de nouveau montrer que ce problème relève de l'alternative de Fredholm et montrer la convergence de l'approximation mixte choisie. Egaleme nt étudiée dans ce chapitre, celle-ci consiste à discrétiser l'inconnue  $\mathbf{u}$  à l'aide d'éléments finis de Lagrange et à approcher l'inconnue  $\psi$  par une méthode de Galerkin Discontinue.

Ce chapitre propose ainsi deux configurations académiques particulières pour lesquelles cette démarche par élimination de  $\psi$  est possible. Cette approche induit certaines restrictions dont nous n'avons pas su nous affranchir, mais elle permet d'aller jusqu'au bout d'une démonstration complète sur le caractère bien posé du problème couplé et de son approximation. Au chapitre suivant, nous traiterons des cas tests qui sortent de ce cadre théorique et nous verrons que la méthode d'approximation mixte fournit des résultats également satisfaisants.

## 5.1 Position du problème

### 5.1.1 Cas 1 : la perturbation géométrique

Le domaine de propagation est un sous espace de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$\Omega_\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 > h(x_1)\}$$

où  $h$  est une fonction continue positive telle qu'il existe  $r$  positif pour lequel  $h(x_1) = 0, \forall |x_1| > r$  comme représenté sur la figure 5.1. Nous supposons que  $\Omega_\infty$  est occupé par un fluide en écoulement subsonique et que la frontière

$$\Gamma_\infty = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = h(x_1)\}$$

est rigide. La variation de  $h$  perturbe l'écoulement dans une zone incluse dans  $B_R \cap \Omega_\infty$  où  $B_R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}; |x_1| < R \text{ et } |x_2| < R\}$  avec  $R > 0$ . En dehors de ce domaine de perturbation, l'écoulement est supposé uniforme : le champ de vitesse est choisi parallèle à  $\mathbf{e}_1$  et orienté dans le sens des  $x_1$  positifs c'est-à-dire  $\mathbf{v}_0 = v_\infty \mathbf{e}_1$  dans  $\Omega_\infty \setminus B_R$  avec  $v_\infty \geq 0$ .

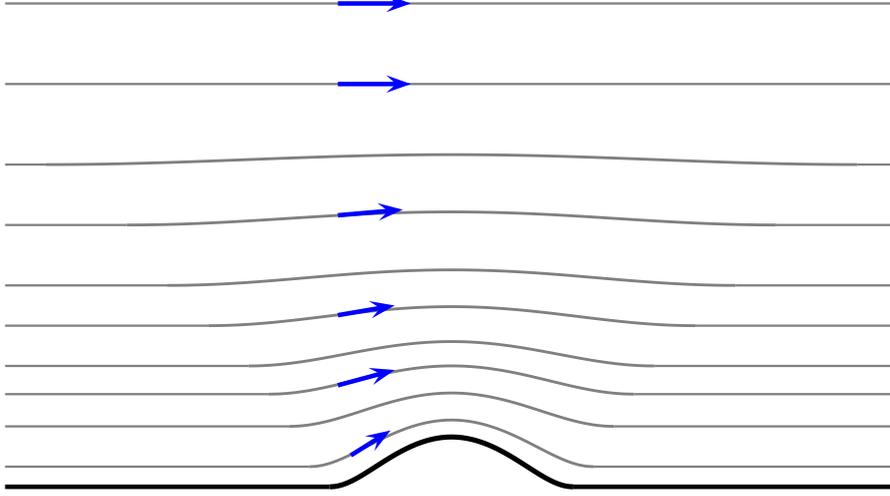


FIG. 5.1: Schéma de l'écoulement perturbé par une variation de la géométrie (cas 1).

### 5.1.2 Cas 2 : le jet analytique

Le domaine de propagation  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2$  est occupé par un fluide dont le champ de vitesse est subsonique et dirigé selon la direction  $\mathbf{e}_1$ . La composante horizontale de  $\mathbf{v}_0$  est connue analytiquement et dépend uniquement de la variable verticale  $x_2$  :

$$\mathbf{v}_0 = v_1(x_2)\mathbf{e}_1, \quad (5.1)$$

où  $v_1(x_2) \geq 0, \forall x_2 \in \mathbb{R}$ . Nous supposons également qu'en dehors du domaine de perturbation

$$\{(x_1, x_2); |x_2| < R\}$$

l'écoulement est uniforme. La figure 5.2 nous propose une représentation schématique de cet écoulement que nous appellerons jet analytique.

### 5.1.3 Les équations du problème en domaine infini

Pour un écoulement quelconque caractérisé par la donnée de  $(\rho_0, p_0, c_0, \mathbf{v}_0)$ , la formulation augmentée de l'équation de Galbrun s'écrit

$$\rho_0 \frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{rot}(\rho_0 c_0^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi)) + \operatorname{div} \mathbf{u} \nabla p_0 - {}^t \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} \quad (5.2)$$

où la dérivée convective  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$  est définie par

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -i\omega \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0.$$

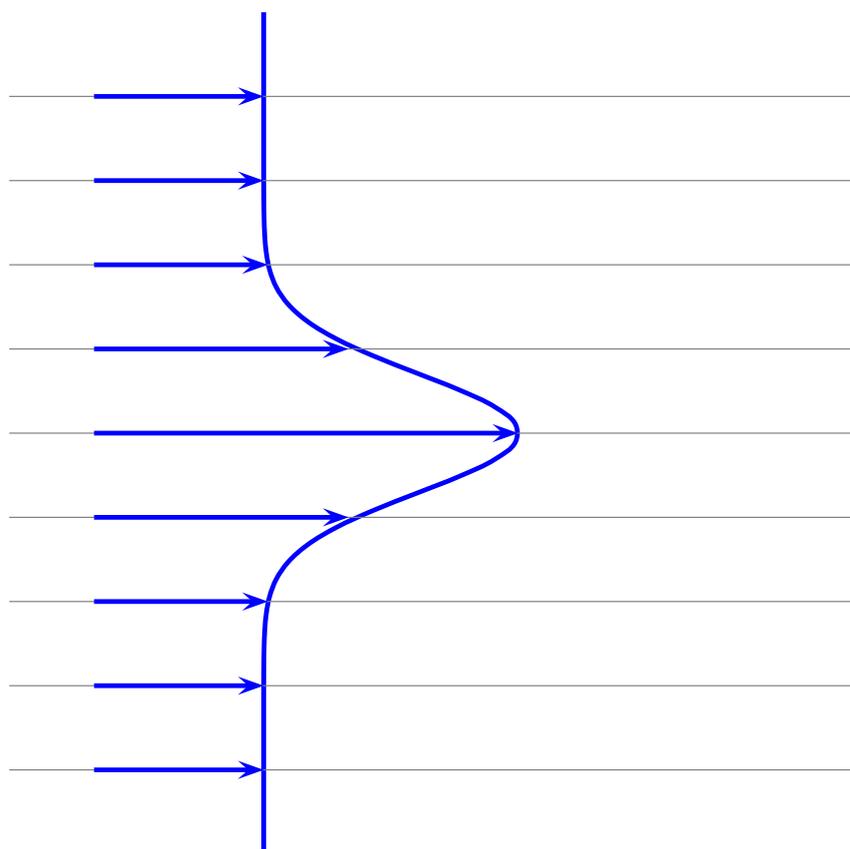


FIG. 5.2: Schéma du jet analytique (cas 2).

Le second membre  $\mathbf{f}$ , pris tel que  $\text{rot } \mathbf{f} \in L^2(\Omega_\infty)$ , est un terme source à support dans  $B_R \cap \Omega_\infty$  avec  $R > 0$  choisi de sorte que  $B_R$  contienne à la fois la zone de perturbation de l'écoulement et la source  $\mathbf{f}$ . Dans le cas 1, la composante normale de l'inconnue  $\mathbf{u}$  s'annule sur les surfaces rigides :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_\infty. \quad (5.3)$$

L'inconnue hydrodynamique vérifie l'équation suivante :

$$\frac{D^2 \psi}{Dt^2} = -2 \frac{D}{Dt} (\mathcal{B} \mathbf{u}) - \mathcal{C} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \text{rot } \mathbf{f} \quad (5.4)$$

avec  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  les opérateurs définis au chapitre précédent par les relations (4.32) et (4.33).

**Remarque 5.1.** Les équations précédentes prennent dans certains cas des formes simplifiées.

- En dehors de la zone des perturbations, l'équation (5.2) devient

$$\frac{D^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - c_\infty^2 \nabla(\text{div } \mathbf{u}) + c_\infty^2 \text{rot}((\text{rot } \mathbf{u} - \psi)) = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \setminus B_R \quad (5.5)$$

où  $c_\infty$  est la célérité du son dans le fluide à l'infini. Le second membre est nul puisque nous supposons que le support de la source est inclus dans la zone des perturbations.

- L'opérateur  $\mathcal{C}$  s'annule dès que le champ de vitesse  $\mathbf{v}_0$  est parallèle et  $\mathcal{B}$  s'annule lorsque  $\mathbf{v}_0$  est uniforme. En dehors de la zone des perturbations, l'équation (5.4) se réduit alors, dans le cas 1, à

$$\frac{D\psi}{Dt} = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \setminus B_R. \quad (5.6)$$

Dans le cas 2, (5.4) s'écrit

$$\frac{D\psi}{Dt} = -2\mathcal{B} \mathbf{u} \text{ dans } \Omega_\infty \setminus B_R \quad (5.7)$$

$$\text{avec } \mathcal{B} \mathbf{u} = -\frac{dv_1}{dx_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

Pour que le problème couplé (5.2, 5.3, 5.4) soit équivalent au problème de Galbrun initial, il faut ajouter au système la condition aux limites suivantes [25]

$$\text{rot } \mathbf{u} - \psi = 0 \text{ sur } \partial B_R. \quad (5.8)$$

Enfin, il est nécessaire d'adjoindre une condition de radiation au problème (5.2, 5.3, 5.4, 5.8) afin d'assurer l'unicité de la solution.

#### 5.1.4 Les couches PML

Nous recherchons la solution sortante  $(\mathbf{u}, \psi)$  du problème couplé (5.2, 5.3, 5.4, 5.8). Nous utilisons des couches absorbantes de type PML dont le principe est succinctement présenté au paragraphe 4.4. Nous écrivons le problème avec couches PML sur l'inconnue  $\mathbf{u}$  dans l'équation (5.2). Afin de respecter la consistance du problème, nous faisons de même avec (5.3), (5.4) et (5.8). Le domaine de calcul est alors défini par  $\Omega_L = B_L \cap \Omega_\infty$  où  $B_L$  est le domaine rectangulaire donné par

$$B_L = \{(x_1, x_2); |x_1| < R + L \text{ et } |x_2| < R + L\}$$

avec  $L$  la largeur de la couche PML. De plus,  $\Omega_R = B_R \cap \Omega_\infty$  désigne le domaine physique, c'est-à-dire le domaine de calcul privé des couches PML. Le modèle avec couche PML fait intervenir un paramètre  $\alpha$  tel que  $\Re(\alpha) > 0$  et  $\Im(\alpha) < 0$  et consiste à modifier les opérateurs de dérivation selon la substitution

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec  $\alpha_i$  défini par

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_i| < R \\ \alpha & \text{si } |x_i| > R. \end{cases} \quad (5.9)$$

Les opérateurs obtenus après substitution seront notés avec un indice  $\alpha$ . Par exemple,

$$\operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} = \alpha_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \alpha_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Sur les bords externes des PML, nous imposons à  $\mathbf{u}$  une condition de bord rigide. L'inconnue  $\psi$ , est de nature différente (ce n'est pas une onde). D'après l'étude de l'équation de transport menée partie I, il est naturel d'imposer la valeur de  $\psi$  sur le bord à flux d'écoulement entrant  $\Gamma_L^-$  défini par

$$\Gamma_L^- = \{(x_1, x_2) \in \Omega_L; x_1 = -(R + L)\}.$$

D'autre part, il n'y a pas de raison pour que la vorticité  $\psi$  associée à l'onde sortante soit non nulle à l'amont de la zone de perturbation [12] puisque nous avons supposé lorsque nous avons défini l'onde sortante qu'il n'y a pas de source à l'infini. En fait, les tourbillons hydrodynamiques sont produits par la source et par le couplage entre l'acoustique et l'hydrodynamique due à un écoulement non uniforme, et sont ensuite transportés à l'aval par le fluide. Il apparaît alors naturel l'imposer  $\psi = \frac{D\psi}{Dt} = 0$  sur  $\Gamma_L^-$ , assurant ainsi la causalité de  $\psi$ .

Finalement, le problème à résoudre s'écrit

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D_\alpha^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla_\alpha (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u}) + \operatorname{rot}_\alpha (\rho_0 c_0^2 (\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \psi)) \\ + \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \nabla p_0 - {}^t \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} & \quad \text{dans } \Omega_L \\ \frac{D_\alpha^2 \psi}{Dt^2} = -2 \frac{D_\alpha}{Dt} (\mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}) - \mathcal{C} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \mathbf{f} & \quad \text{dans } \Omega_L \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \psi = 0 & \quad \text{sur } \partial\Omega_L \\ \psi = \frac{D_\alpha \psi}{Dt} = 0 & \quad \text{sur } \Gamma_L^- \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\Gamma_L^-$  est le bord du domaine de calcul à flux entrant. Les figures 5.3 et 5.4 représentent le domaine de calcul avec couche PML dans les cas 1 et 2.

**Remarque 5.2.** Le système (5.10) prend une forme simplifiée dans la zone des couches PML.

- Pour le cas 1, les opérateurs  $\mathcal{B}_\alpha$  et  $\mathcal{C}$  s'annulent dans les couches PML et l'équation sur  $\psi$  devient

$$\left( -i\omega + \alpha_1 v_{0,1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi = 0 \quad \text{dans } \Omega_L \setminus \Omega_R, \quad (5.11)$$

où  $\alpha_1$  est défini selon (5.9).

- Pour le cas 2, la deuxième équation de (5.10) s'écrit

$$\left( -i\omega + \alpha_1 v_{0,1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi = 2\alpha_1 \frac{\partial v_{0,1}}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{dans } \Omega_L \setminus \Omega_R. \quad (5.12)$$

- Nous écrivons  $\nabla p_0$  au lieu de  $\nabla_\alpha p_0$  dans la première équation de (5.10) car  $\nabla p_0$  s'annule dans les PML. De même pour  $\operatorname{rot} \mathbf{f}$  et  $\mathcal{C}$ .

## 5.2 Caractère bien posé du problème couplé continu

D'une part, nous considérons le problème pour  $\mathbf{u}$  donné et en utilisant les résultats de la partie I, nous montrons que le problème en  $\psi$  est bien posé sous certaines conditions qui seront précisées. D'autre part, nous nous intéressons au problème pris pour  $\psi$  fixé. Nous montrons alors comme dans [24] que le problème en  $\mathbf{u}$  est de type Fredholm dans  $H^1(\Omega_L)^2$ . Enfin, nous pourrions traiter le problème couplé.

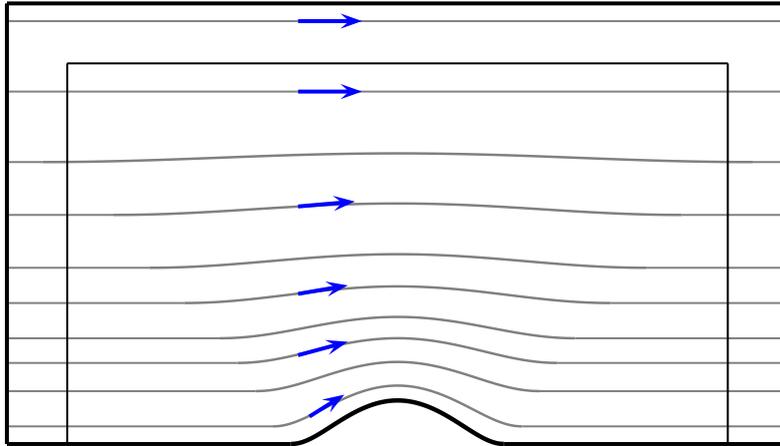


FIG. 5.3: Domaine de calcul avec couche PML pour l'écoulement perturbé par une variation de la géométrie (cas 1).

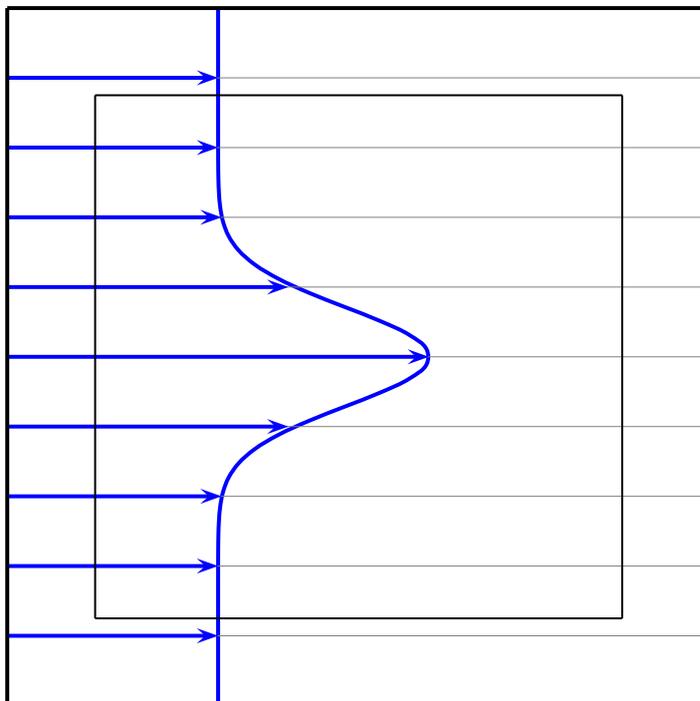


FIG. 5.4: Domaine de calcul avec couche PML pour le jet analytique (cas 2).

### 5.2.1 Le problème en $\psi$ (ou à $\mathbf{u}$ fixé)

Supposons d'abord que  $\mathbf{u}$  est donné et considérons le problème d'inconnue  $\psi$  suivant, faisant partie du problème (5.10)

$$\begin{aligned} \frac{D_\alpha^2 \psi}{Dt^2} &= -2 \frac{D_\alpha}{Dt} (\mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}) - \mathcal{C} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_L \\ \psi &= \frac{D_\alpha \psi}{Dt} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^- \end{aligned} \quad (5.13)$$

Cette équation fait intervenir l'opérateur de dérivée convective  $\frac{D_\alpha}{Dt}$  très voisin de l'opérateur de transport étudié dans la partie I. Cependant, les résultats de cette partie nécessitent d'être étendus pour pouvoir les réinvestir sur le problème (5.13). En effet, l'étude menée dans la partie I suppose que  $\mathbf{v}_0$  est à divergence nulle. Or, d'après les équations d'Euler, les données du problème vérifient  $\operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$  et non  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ . De plus, l'usage des couches PML s'accompagne d'un changement de variable qui modifie l'opérateur de transport harmonique.

Par linéarité, la solution du problème (5.13) est donnée par  $\psi = \psi_{\mathcal{B}} + \psi_{\mathcal{C}} + \psi_{\mathbf{f}}$  où  $\psi_{\mathcal{B}}$  est une solution de

$$\begin{aligned} \frac{D_\alpha \psi_{\mathcal{B}}}{Dt} &= -2 \mathcal{B}_\alpha \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_L \\ \psi_{\mathcal{B}} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^- \end{aligned} \quad (5.14)$$

et  $\psi_{\mathcal{C}}$  et  $\psi_{\mathbf{f}}$  vérifient respectivement les systèmes d'équations suivants

$$\begin{aligned} \frac{D_\alpha^2 \psi_{\mathcal{C}}}{Dt^2} &= -\mathcal{C} \mathbf{u} \quad \text{dans } \Omega_L \\ \psi_{\mathcal{C}} &= \frac{D_\alpha \psi_{\mathcal{C}}}{Dt} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^-, \end{aligned} \quad (5.15)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{D_\alpha^2 \psi_{\mathbf{f}}}{Dt^2} &= \frac{1}{\rho_0} \operatorname{rot} \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_L \\ \psi_{\mathbf{f}} &= \frac{D_\alpha \psi_{\mathbf{f}}}{Dt} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_L^-. \end{aligned} \quad (5.16)$$

D'après les relations (5.12) et (5.11), en divisant les équations (5.14), (5.15) et (5.16) par  $\alpha_1$  le paramètre caractérisant les couches PML, nous obtenons un problème faisant intervenir un nouvel opérateur de transport pour lequel le terme de convection ne tient pas compte des couches PML et dont le coefficient de réaction est de la forme

$$A(\mathbf{x}) = -i \frac{\omega}{\alpha_1},$$

où  $\alpha_1$  est défini par (5.9). En conséquence, afin de prendre en compte les PML et un écoulement de vitesse à divergence non nulle, nous proposons une extension du résultat du chapitre 1 en montrant le caractère bien posé du problème suivant :

*Trouver  $\psi \in \mathbf{H}(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-)$  tel que*

$$\mathcal{P}_A \begin{cases} A(\mathbf{x})\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi = f & \text{dans } \Omega_L \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_L^- \end{cases} \quad (5.17)$$

où nous supposons que  $A$  est une fonction à valeurs complexes telle que

$$A \in L^\infty(\Omega_L), \quad (5.18)$$

$$\mathbf{v}_0 \in \mathcal{C}^1(\Omega_L) \text{ et } \mathbf{v}_0 \text{ est } \Omega_L\text{-remplissant}, \quad (5.19)$$

$$f \in L^2(\Omega_L). \quad (5.20)$$

Sous ces hypothèses, nous pouvons appliquer l'approche par courbes caractéristiques utilisée dans la partie I. A l'aide du champ  $\mathbf{v}_0$ , définissons le changement de variable

$$\Phi : \tilde{\Omega}_L \longrightarrow \Omega_L \quad (5.21)$$

$$(s, \mathbf{b}) \longmapsto \Phi(s, \mathbf{b}) = \mathbf{x} \quad (5.22)$$

où  $\Phi$  est la solution du problème aux caractéristiques

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = \mathbf{v}_0(\Phi(s, \mathbf{b})) \\ \Phi(0, \mathbf{b}) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (5.23)$$

avec

$$(s, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega}_L := \left\{ (s, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \Gamma_L^- \text{ et } s \in [0, \tau_{\mathbf{b}}] \right\}$$

et  $\tau_{\mathbf{b}}$  le temps de  $\Omega_L$ -parcours associé au champ  $\mathbf{v}_0$  et au point  $\mathbf{b}$  (voir définition 1.14). Le résultat de la proposition 1.15 sur le caractère bien posé du problème de transport s'étend au cas d'un coefficient de réaction variable et d'un écoulement à divergence non nulle :

**Proposition 5.3.** *Si les hypothèses (5.18), (5.19) et (5.20) sont vérifiées alors le problème  $\mathcal{P}_A$  est bien posé dans  $H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-)$ . En particulier, il vient l'estimation*

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq C(A, \mathbf{v}_0) \|f\|_{0, \Omega_L}^2 \quad (5.24)$$

où

$$C(A, \mathbf{v}_0) = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} \exp(2\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty), & \text{si } a = 0, \\ \frac{\tau}{2a} \exp(2\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty), & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

avec  $\tau = \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} \tau_{\mathbf{b}}$  et  $a = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega_L} \Re e A(\mathbf{x})$ .

*Démonstration.* Considérons le problème  $\mathcal{P}_A$  et montrons que la solution  $\psi$  est dans  $L^2(\Omega_L)$ . Le second membre de l'équation  $f$  étant choisi dans  $L^2(\Omega_L)$ , nous pourrions ainsi déduire que  $\psi$  est dans  $H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-)$ . Supposons d'abord que le second membre  $f$  est régulier. Appliquons à  $\mathcal{P}_A$  le changement de variable (5.21). La solution du problème  $\tilde{\mathcal{P}}_A$  obtenu après transformation peut alors s'écrire de façon explicite sur chacune des lignes de courant comme

$$\tilde{\psi}(s, \mathbf{b}) = \int_0^s \tilde{f}(t, \mathbf{b}) e^{\left( \int_0^t \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau - \int_0^s \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right)} dt \quad (5.25)$$

avec  $\tilde{f}(t, \mathbf{b}) = f \circ \Phi(t, \mathbf{b})$  et  $\tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) = A \circ \Phi(\tau, \mathbf{b})$ . La norme  $L^2(\Omega_L)$  de  $\psi$  s'exprime

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 = \int_{\Omega_L} |\psi|^2 d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |J_\Phi(s, \mathbf{b})| |\tilde{\psi}(s, \mathbf{b})|^2 ds d\mathbf{b}$$

où  $J_\Phi$  est la jacobienne du changement de variable  $\Phi$ . D'après l'annexe A,  $J_\Phi$  satisfait

$$\frac{dJ_\Phi}{ds}(s, \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{v}_0 \cdot J_\Phi(s, \mathbf{b}). \quad (5.26)$$

La solution de (5.26) s'écrit  $\forall (s, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega}_L$ ,

$$J_\Phi(s, \mathbf{b}) = J_\Phi(0, \mathbf{b}) \exp \left( \int_0^s (\operatorname{div} \mathbf{v}_0) \circ \Phi(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right), \quad (5.27)$$

d'où nous déduisons les estimations  $\forall (s, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega}_L$ ,

$$|\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \geq |\mathbf{J}_\Phi(0, \mathbf{b})| e^{-s \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty}, \quad (5.28)$$

$$|\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \leq |\mathbf{J}_\Phi(0, \mathbf{b})| e^{s \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty} \quad (5.29)$$

qui nous serviront par la suite. En utilisant l'expression (5.25), une première majoration donne

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 &\leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_0^s |\tilde{f}(t, \mathbf{b})| \exp \left\{ \int_0^t \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau - \int_0^s \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right\} dt \right)^2 ds d\mathbf{b} \\ &\leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_{t=0}^s |\tilde{f}(t, \mathbf{b})| \exp \left\{ - \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right\} dt \right)^2 ds d\mathbf{b}, \end{aligned}$$

puisque

$$\begin{aligned} \left| \exp \left\{ \int_0^t \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau - \int_0^s \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right\} \right| &= \exp \left\{ \Re \left( \int_0^t \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau - \int_0^s \tilde{A}(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

car  $0 \leq t \leq s$  avec  $\tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) = \Re \tilde{A}(\tau, \mathbf{b})$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz, donne ensuite

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_{t=0}^s |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 dt \right) \left( \int_{t=0}^s e^{-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau} dt \right) ds d\mathbf{b}.$$

Sans changer l'inégalité précédente, nous pouvons introduire le déterminant de la Jacobienne dans l'intégrale de  $\tilde{f}$  de la façon suivante

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b})| \left( \int_{t=0}^s |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 \frac{|\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})|}{|\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})|} dt \right) \left( \int_{t=0}^s e^{-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau} dt \right) ds d\mathbf{b}.$$

Les estimations (5.28) et (5.29) permettent alors d'écrire

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} e^{s \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty} \left( \int_{t=0}^s |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| e^{t \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty} dt \right) \left( \int_{t=0}^s e^{-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau} dt \right) ds d\mathbf{b}.$$

Comme  $0 \leq t \leq s \leq \tau_{\mathbf{b}}$ , il vient l'estimation

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \int_{\Gamma_L^-} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty} \left( \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| dt \right) \left( \int_{t=0}^s e^{-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau} dt \right) ds d\mathbf{b}$$

qui devient, après réorganisation des termes, l'inégalité suivante

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \int_{\Gamma_L^-} \left( \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| dt \right) I_{\mathbf{b}} d\mathbf{b}$$

où nous avons noté

$$I_{\mathbf{b}} = e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} \int_{t=0}^s e^{-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau} dt ds.$$

Nous obtenons alors

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} I_{\mathbf{b}} \right) \int_{\Gamma_L^-} \left( \int_{t=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} |\tilde{f}(t, \mathbf{b})|^2 |\mathbf{J}_\Phi(t, \mathbf{b})| dt \right) d\mathbf{b},$$

c'est-à-dire

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \left( \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} I_{\mathbf{b}} \right) \|f\|_{0, \Omega_L}^2. \quad (5.30)$$

Cherchons maintenant une estimation de  $\sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} I_{\mathbf{b}}$ . Comme  $\exp\left(-2 \int_t^s \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b}) d\tau\right) \leq \exp(-2a(s-t))$

où  $a = \inf_{(\tau, \mathbf{b}) \in \tilde{\Omega}_L} \tilde{A}_r(\tau, \mathbf{b})$ , nous avons

$$I_{\mathbf{b}} \leq e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}} \int_{s=0}^{\tau_{\mathbf{b}}} \int_{t=0}^s e^{-2a(s-t)} dt ds.$$

Le calcul de la double intégrale permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} \text{si } a = 0, I_{\mathbf{b}} &\leq \frac{\tau_{\mathbf{b}}^2}{2} e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}}, \\ \text{si } a \neq 0, I_{\mathbf{b}} &\leq \frac{e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}}}{2a} \left( \tau_{\mathbf{b}} + \frac{e^{-2a\tau_{\mathbf{b}}} - 1}{2a} \right) \leq \frac{\tau_{\mathbf{b}}}{2a} e^{2\tau_{\mathbf{b}} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}}. \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{v}_0$  est  $\Omega_L$ -remplissant, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{si } a = 0, \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} I_{\mathbf{b}} &\leq \frac{\tau^2}{2} e^{2\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}} \\ \text{si } a \neq 0, \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} I_{\mathbf{b}} &\leq \frac{\tau}{2a} e^{2\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_{\infty}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons enfin étendre par densité l'estimation (5.30) aux fonctions  $f$  de  $L^2(\Omega_L)$  comme cela a été fait dans la preuve de la proposition 1.15.  $\square$

Lorsque  $\mathbf{v}_0$  est à divergence nulle et que  $A$  est une constante, nous retrouvons une constante dans l'estimation (5.24) ayant un comportement semblable à celle obtenue au chapitre 1 par la proposition 1.15. La constante suit une croissance polynômiale d'ordre 2 si  $a = 0$  et d'ordre 1 si  $a \neq 0$  lorsque  $\tau$  le temps d' $\Omega_L$ -parcours augmente. Pour  $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 \neq 0$ , l'estimation est moins favorable car la constante se dégrade alors avec une croissance exponentielle selon  $\tau$  quel que soit  $a$  positif.

**Remarque 5.4.** Une autre manière d'étendre aux écoulements vérifiant  $\operatorname{div}(\mathbf{v}_0 \rho_0) = 0$  les résultats de la partie I consiste à multiplier le problème de transport harmonique par  $\rho_0$  et à considérer l'équation

$$-i\omega \rho_0 \psi + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla \psi = \rho_0 f,$$

où  $\mathbf{V}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_0$ . En précisant des hypothèses de régularité sur  $\rho_0$ , le caractère bien posé du problème peut ainsi être obtenu dans l'espace  $H(\Omega_L, \mathbf{v}_0 \rho_0, \Gamma_L^-)$  par la méthode des courbes caractéristiques. Le résultat obtenu, analogue à celui de la proposition 5.3, fait alors intervenir le temps d' $\Omega_L$ -parcours associé au champ  $\mathbf{V}_0 = \rho_0 \mathbf{v}_0$  (et non  $\mathbf{v}_0$ ) qui n'est pas homogène à un temps.

La proposition 5.3 prouve alors l'existence de  $\psi_{\mathcal{B}}$  et  $\psi_{\mathcal{C}}$  ( $\psi_{\mathcal{F}}$  peut être traité comme  $\psi_{\mathcal{C}}$ ). En particulier, la relation (5.24) fournit des estimations de  $\psi_{\mathcal{B}}$  et  $\psi_{\mathcal{C}}$  faisant intervenir  $C(-i\frac{\omega}{\alpha_1}, \mathbf{v}_0)$  la constante de la proposition 5.3 prise pour  $A(\mathbf{x}) = -i\frac{\omega}{\alpha_1}$ . Dans ce cas, nous avons  $\Re A(\mathbf{x}) = -\omega \frac{\Im \alpha_1}{|\alpha_1|^2}$  et  $a = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega_L} \Re A(\mathbf{x}) = 0$  car  $\Im \alpha_1 \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_L$  et  $\Im \alpha_1 = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_R$ . D'après la proposition précédente, pour  $a = 0$ , nous avons

$$\|\psi_{\mathcal{B}}\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \tilde{C}(\tau, \mathbf{v}_0) \left\| -2 \frac{\mathcal{B}_{\alpha} \mathbf{u}}{\alpha_1} \right\|_{0, \Omega_L}^2, \quad (5.31)$$

$$\|\psi_{\mathcal{C}}\|_{0, \Omega_L}^2 \leq \tilde{C}(\tau, \mathbf{v}_0)^2 \left\| -\frac{\mathcal{C} \mathbf{u}}{\alpha_1} \right\|_{0, \Omega_L}^2, \quad (5.32)$$

où  $\tilde{C}(\tau, \mathbf{v}_0) = \frac{\tau^2 e^{2\tau} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty}{2}$ . Nous en déduisons l'existence de  $\psi$  solution de (5.13) ainsi que l'estimation :

$$\|\psi\|_{0, \Omega_L} \leq \tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1) \left( \tau^{-1} \|\mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} + \|\mathcal{C} \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} + \|\operatorname{rot} \mathbf{f}\|_{0, \Omega_L} \right) \quad (5.33)$$

avec  $\tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1) = \frac{1}{|\alpha_1|} \max(\tilde{C}(\tau, \mathbf{v}_0), \tau \tilde{C}(\tau, \mathbf{v}_0)^{1/2}) = \frac{\tau^2}{|\alpha_1|} \max\left(\frac{e^{2\tau} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty}{2}, \sqrt{\frac{e^{2\tau} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty}{2}}\right)$ .

La dépendance de cette constante en  $\tau$  est donc en  $\tau^2 e^\tau$ .

### 5.2.2 Le problème en $\mathbf{u}$ (ou à $\psi$ fixé)

Le champ  $\mathbf{u}$  solution du problème (5.10) est recherché dans l'espace fonctionnel

$$V = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega_L)^2; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_L\}.$$

Supposons que  $\psi$  est donné dans  $H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-)$  et considérons le problème

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que, } \forall \psi \in H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-), \\ & \rho_0 \frac{D_\alpha^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla_\alpha (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u}) + \operatorname{rot}_\alpha (\rho_0 c_0^2 (\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \psi)) \\ & + \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \nabla p_0 - {}^t \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} + \operatorname{rot}_\alpha (\rho_0 c_0^2 \psi_f) \quad \text{dans } \Omega_L \\ & \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \psi = \psi_f \quad \text{sur } \partial\Omega_L \\ & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_L. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Le problème (5.34) s'écrit sous la forme variationnelle suivante

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v})$$

où

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} \left( c_0^2 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + c_0^2 \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{v}} \right) \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \frac{-\rho_0 \omega}{\alpha_1 \alpha_2} (2i (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} + \omega \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega_R} (\operatorname{div} \mathbf{u} \nabla p_0 - {}^t \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla p_0) \bar{\mathbf{v}}, \\ \ell(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_R} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} (\psi + \psi_f) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

**Théorème 5.5.** *Le problème (5.34) est de type Fredholm si*

$$\inf_{x \in \Omega_L} \left( 1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) > 0, \quad (5.35)$$

*c'est-à-dire si l'écoulement est subsonique.*

*Démonstration.* Tout d'abord, remarquons que, selon des arguments classiques, la forme bilinéaire  $b$  est associée à un opérateur compact sur  $V$ . Nous montrons ensuite que l'opérateur associé à la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  admet une décomposition en une partie coercive et une partie compacte sur  $V$ . Une généralisation de l'inégalité de Costabel [36] proposée dans [24] fournit l'égalité

$$\int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} (\operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla_\alpha \bar{\mathbf{v}} + d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

avec  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_L} \left( \frac{\partial(\rho_0 c_0^2)}{\partial x_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} - \frac{\partial(\rho_0 c_0^2)}{\partial x_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) \times \bar{\mathbf{v}} - \int_{\partial\Omega_L} \rho_0 c_0^2 [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{n} \times \mathbf{n}] (\mathbf{n} \times \bar{\mathbf{v}})$ . La forme  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  étant compacte, il reste à montrer la coercivité des termes restants. Celle-ci est déduite de l'inégalité

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u} \in V, & \left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} \left( c_0^2 \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla_\alpha \bar{\mathbf{u}} - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{u}} \right) \right| \\ & \geq \min \left( \Re e \alpha, \Re e \frac{1}{\alpha} \right) \int_{\Omega_L} \rho_0 (c_0^2 - |\mathbf{v}_0|^2) |\nabla \mathbf{u}|^2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

ainsi, lorsque  $\mathbf{v}_0$  et  $c_0$  vérifient (5.35) le problème (5.34) est de type Fredholm.  $\square$

### 5.2.3 Le problème couplé en $(\mathbf{u}, \psi)$

En utilisant les estimations sur l'inconnue hydrodynamique obtenues plus haut ainsi que le théorème 5.5, nous montrons que le problème couplé (5.10) est de type Fredholm sous des hypothèses que nous précisons plus loin. Introduisons l'opérateur  $\mathcal{T}$  défini de  $V$  dans  $L^2(\Omega_L)$  tel que  $\mathcal{T} \mathbf{u} = \psi_{\mathcal{B}} + \psi_{\mathcal{C}}$ . Alors la solution  $\psi$  de (5.13) est donnée par

$$\psi = \mathcal{T} \mathbf{u} + \psi_{\mathbf{f}} \quad (5.37)$$

D'après les relations (5.31) et (5.32),  $\mathcal{T}$  est un opérateur borné satisfaisant

$$\|\rho_0^{1/2} c_0 \mathcal{T} \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} \leq \tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1) \left( \tau^{-1} \|\mathcal{B}_\alpha\| + \|\mathcal{C}\| \right) \|\rho_0^{1/2} c_0 \nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} \quad (5.38)$$

où  $\tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1)$  est la constante de l'estimation (5.33) et où les normes des opérateurs  $\mathcal{B}_\alpha$  et  $\mathcal{C}$  sont définies par

$$\|\mathcal{B}_\alpha\| = \sup_{\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\rho_0^{1/2} c_0 \mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}}{\|\rho_0^{1/2} c_0 \nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{C}\| = \sup_{\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0} \frac{\|\rho_0^{1/2} c_0 \mathcal{C} \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}}{\|\rho_0^{1/2} c_0 \nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}}.$$

#### Remarque 5.6.

1. Les poids  $\rho_0^{1/2} c_0$  seront un choix approprié pour la suite.
2. Les normes des opérateurs  $\mathcal{B}_\alpha$  et  $\mathcal{C}$  ainsi définies existent et sont bien finies. En effet, d'après les expressions (4.32) et (4.33), nous avons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} & \leq \max_{j=1,2} (\|\nabla v_{0,j}\|_{\infty, \Omega_L}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}, \\ \|\mathcal{C} \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L} & \leq \max_{j,k=1,2} (\|\nabla v_{0,j}\|_{\infty, \Omega_L} \|\nabla v_{0,k}\|_{\infty, \Omega_L}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}. \end{aligned}$$

Maintenant en utilisant (5.37), nous pouvons éliminer  $\psi$  dans le problème (5.10) qui s'écrit alors

Trouver  $\mathbf{u} \in V$  tel que :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{D_\alpha^2 \mathbf{u}}{Dt^2} - \nabla_\alpha (\rho_0 c_0^2 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u}) + \mathbf{rot}_\alpha (\rho_0 c_0^2 (\operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \mathcal{T} \mathbf{u})) \\ + \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \nabla p_0 - {}^t \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p_0 = \mathbf{f} + \mathbf{rot}_\alpha (\rho_0 c_0^2 \psi_{\mathbf{f}}) \quad \text{dans } \Omega_L \\ \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} - \mathcal{T} \mathbf{u} = \psi_{\mathbf{f}} \quad \text{sur } \partial\Omega_L. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Le problème (5.39) prend la forme variationnelle suivante

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ tel que } \forall \mathbf{v} \in V, \quad A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$$

où

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} \left( c_0^2 \operatorname{div}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{div}_\alpha \bar{\mathbf{v}} + c_0^2 \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{v}} \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} \mathcal{T} \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega_R} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} \psi_{\mathbf{f}} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

et  $b$  a déjà été définie au paragraphe précédent.

**Théorème 5.7.** *Supposons que  $\mathbf{v}_0$  soit  $\Omega$ -remplissant. Le problème (5.39) est de type Fredholm si*

$$\inf_{x \in \Omega_L} \left( 1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) > \frac{\tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1)}{K_\alpha} \left( \tau^{-1} \|\mathcal{B}_\alpha\| + \|\mathcal{C}\| \right) \quad (5.40)$$

où  $K_\alpha = \min(1, |\alpha|) \min(\Re \alpha, \Re \frac{1}{\alpha})$  et où  $\tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1)$  est la constante de l'estimation (5.38) dont l'expression est rappelée ici :

$$\tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1) = \frac{1}{|\alpha_1|} \max(\tilde{\mathcal{C}}(\tau, \mathbf{v}_0), \tau \tilde{\mathcal{C}}(\tau, \mathbf{v}_0)^{1/2}) \text{ avec } \tilde{\mathcal{C}}(\tau, \mathbf{v}_0) = \frac{\tau^2 e^{2\tau} \|\operatorname{div} \mathbf{v}_0\|_\infty}{2}$$

et  $\tau = \sup_{\mathbf{b} \in \Gamma_L^-} \tau_{\mathbf{b}}$ .

*Démonstration.* Le forme bilinéaire  $A$  s'exprime à l'aide de la forme bilinéaire du paragraphe précédent par

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} \mathcal{T} \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}.$$

D'après le théorème 5.5,  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se décompose sous la forme

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla_\alpha \bar{\mathbf{v}} - \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{v}} + d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

où  $d$  est la forme compacte explicitée dans la démonstration du théorème 5.5. Les formes  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  étant associées à des opérateurs compacts sur  $V$ , il reste à montrer la coercivité des autres termes. Autrement dit, le théorème requiert l'existence d'une constante  $\delta > 0$  telle que  $\forall \mathbf{u} \in V$

$$\left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla_\alpha \bar{\mathbf{u}} - \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{u}} - \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} \mathcal{T} \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}} \right| \geq \delta \int_{\Omega_L} \rho_0 c_0^2 |\nabla \mathbf{u}|^2.$$

L'existence de  $\delta$  positif est obtenue sous l'hypothèse (5.40) en utilisant (5.38) ainsi que l'inégalité (5.36). En effet, la combinaison de (5.36) et (5.38) fournit

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{u} \in V, & \left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1 \alpha_2} \nabla_\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla_\alpha \bar{\mathbf{u}} - \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha) \bar{\mathbf{u}} - \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} \mathcal{T} \mathbf{u} \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{u}} \right| \\ & \geq \left( \min \left( \Re \alpha, \Re \frac{1}{\alpha} \right) \inf_{x \in \Omega_L} \left( 1 - \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2} \right) - \tilde{c}(\tau, \mathbf{v}_0, \alpha_1) \frac{\tau^{-1} \|\mathcal{B}_\alpha\| + \|\mathcal{C}\|}{\min(1, |\alpha|)} \right) \|\rho_0^{1/2} c_0 \nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}, \end{aligned}$$

puisque  $\max(1, \frac{1}{|\alpha|}) = \frac{1}{\min(1, |\alpha|)}$ . La positivité de la constante devant  $\|\rho_0^{1/2} c_0 \nabla \mathbf{u}\|_{0, \Omega_L}$  est réalisée si et seulement si l'hypothèse (5.40) est satisfaite.  $\square$

Le théorème 5.7 prouve le caractère bien posé du problème couplant l'équation de Galbrun augmentée avec l'équation de type transport en présence de couches PML. Mais il semble que les hypothèses nécessaires à l'établissement de ce résultat soient restrictives. D'abord, l'écoulement doit être  $\Omega_L$ -remplissant. Nous avons déjà vu dans la partie I que cette hypothèse exclut beaucoup d'écoulements réalistes. Ensuite, l'hypothèse (5.40) semble également plus restrictive que l'hypothèse d'écoulement subsonique : la gamme des écoulements qui vérifient (5.40) est plus réduite que l'ensemble des écoulements subsoniques. En effet, cette relation impose à la vitesse de ne pas être trop grande. Et, d'après le membre de droite, l'hypothèse devient encore plus restrictive si  $\tau$  augmente puisque  $\tilde{c}$  croît exponentiellement selon  $\tau$ . De plus, on s'attend à ce que  $\|\mathcal{B}_\alpha\|$  et  $\|\mathcal{C}\|$  augmentent avec la taille du domaine et avec les gradients de l'écoulement (selon les expressions (4.32) et (4.33) de  $\mathcal{B}_\alpha$  et  $\mathcal{C}$ ). Finalement, notre résultat concerne des écoulements lents ayant de faibles gradients de vitesse. En faisant des estimations plus fines dans les démonstrations, nous aurions peut-être pu avoir un résultat tenant compte d'écoulements plus généraux.

### 5.3 Analyse numérique de la méthode mixte éléments finis/Galerkin discontinue

#### 5.3.1 Schéma d'approximation du problème acoustique

L'approximation du problème couplé est obtenue en combinant l'usage d'éléments finis classiques pour la discrétisation de (5.2) et d'une approche Galerkin discontinue pour l'inconnue hydrodynamique solution de (5.4). Considérons  $\mathcal{M}_h$  une triangulation du domaine de calcul  $\Omega_L$ . L'approximation du problème couplé s'appuie sur les espaces d'approximation

$$\begin{aligned} V_h^k &:= \{\mathbf{v}_h \in V : \forall K \in \mathcal{M}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in (\mathbb{P}^k(K))^2\}, \\ W_h^k &:= \{\varphi_h \in L^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{M}_h, \varphi_{h|K} \in \mathbb{P}^k(K)\} \end{aligned}$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  et où  $\mathbb{P}^k(K)$  désigne l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $k$ .

La formulation approchée s'écrit alors sous la forme : trouver  $\mathbf{u}_h \in V_h^k$  tel que  $\forall \mathbf{v}_h \in V_h^k$ ,

$$A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L_h(\mathbf{v}_h) \quad (5.41)$$

où  $A_h$  et  $L_h$  sont définies comme les formes  $A$  et  $L$  en remplaçant l'opérateur  $\mathcal{T}$  par un opérateur approché  $\mathcal{T}_h$  et  $\psi_f$  par une approximation  $\psi_{f,h}$ .

L'opérateur discret  $\mathcal{T}_h$  et la fonction  $\psi_{f,h}$  sont obtenus par résolutions successives du problème de transport harmonique

$$\begin{cases} \frac{D_\alpha \psi}{Dt} = f \text{ dans } \Omega_L \\ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_L^- \end{cases} \quad (5.42)$$

en utilisant la méthode de Galerkin discontinue étudiée au chapitre 3. En présence de couches PML, l'approximation du problème (5.42) par cette méthode s'écrit : Trouver  $\psi_h$  dans  $W_h^k$  tel que

$$p_h(-i\omega; \psi_h, \varphi_h) = \ell_{h,f}(\varphi_h), \forall \varphi_h \in W_h^k \quad (5.43)$$

où

$$\begin{aligned} p_h(-i\omega; \psi_h, \varphi_h) &= \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} (-i\omega \psi_h + \nabla_\alpha \psi_h \cdot \mathbf{v}_0), \varphi_h \right)_{0, \mathcal{M}_h} + \left( |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_\alpha| [\![\psi_h]\!] , \varphi_e^+ \right)_{0, \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,-}} \\ \text{et } \ell_{h,f}(\varphi_h) &= \left( \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} f, \varphi_h \right)_{0, \Omega} \end{aligned}$$

où  $(u, v)_{0, X_h} = \sum_{K \in X_h} (u, v)_{0, K}$  et  $\mathbf{n}_\alpha = \frac{1}{\alpha_{1e}^+ \alpha_{2e}^+} (\alpha_{1e}^+ n^1 + \alpha_{2e}^+ n^2)$  avec  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix}$  une normale unitaire des faces des éléments. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 pour la définition des notations spécifiques à la discrétisation de Galerkin discontinue.

### 5.3.2 Caractère bien posé et estimation d'erreur

En nous appuyant sur des résultats classiques d'analyse, nous vérifions ici que le problème (5.41) est bien posé. Plus précisément, nous montrons que le schéma satisfait une relation de stabilité de type condition inf-sup sous les hypothèses du théorème 5.7.

**Proposition 5.8.** *Il existe  $\varpi > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que  $\forall h \in ]0, h_0]$ ,*

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^k} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k} \frac{|A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \varpi > 0 \quad (5.44)$$

où  $\|\cdot\|_V$  désigne une norme sur  $V$ . En particulier, le problème (5.41) est bien posé.

Pour la démonstration de ce résultat, nous considérons le problème intermédiaire suivant  
Trouver  $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^k \subset V$  tel que  $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k$ ,

$$A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h) \quad (5.45)$$

où  $A$ ,  $b$  et  $L$  sont définies comme pour la forme variationnelle du problème (5.39). Il s'agit d'une approximation conforme du problème (5.39) qui, d'après ce qui précède, est de type Fredholm. Selon des résultats classiques sur le théorie des éléments finis [32], le problème (5.45) vérifie une relation de stabilité donnée par la

**Proposition 5.9.** *Il existe  $\gamma > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que  $\forall h \in ]0, h_0]$ ,*

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h^k} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^k} \frac{|A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \gamma > 0. \quad (5.46)$$

En particulier, le problème (5.45) est bien posé.

En remarquant que la forme bilinéaire discrète  $A_h$  s'exprime à l'aide de  $A$  par

$$A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} (\mathcal{T} \mathbf{u}_h - \mathcal{T}_h \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_h, \quad (5.47)$$

la proposition 5.9 ainsi que les propriétés de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_h$  nous permettent de faire la

*Démonstration de la proposition 5.8.* Fixons  $\mathbf{u}_h$  dans  $\mathbf{V}_h$ , nous déduisons de la relation (5.47) l'estimation suivante

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{|A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} - \delta_h, \quad (5.48)$$

où nous avons posé

$$\delta_h := \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{\left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} (\mathcal{T} \mathbf{u}_h - \mathcal{T}_h \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_h \right|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V}.$$

D'après la proposition 5.9, il existe  $\gamma > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que  $\forall h \in ]0, h_0]$ ,

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \gamma - \delta_h. \quad (5.49)$$

Pour obtenir le résultat de la proposition, il suffit de montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \delta_h = 0$ . Notons  $\mathcal{D}_h$  l'opérateur défini de  $L^2(\Omega_L)$  dans  $W_h^k$  par

$$\mathcal{D}_h f = \psi_h \quad (5.50)$$

où  $\psi_h$  est la solution de (5.43). L'opérateur  $\mathcal{T}_h$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_h : L^2(\Omega_L) &\longrightarrow W_h^k \\ \mathbf{u}_h &\longmapsto \mathcal{T}_h \mathbf{u}_h = -2\mathcal{D}_h \circ \mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}_h - \mathcal{D}_h \circ \mathcal{D}_h \circ \mathcal{C} \mathbf{u}_h. \end{aligned}$$

De la même manière, définissons  $\mathcal{D}$  l'opérateur défini de  $L^2(\Omega_L)$  dans  $H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-)$  par

$$\mathcal{D} f = \psi \quad (5.51)$$

où  $\psi$  est la solution de (5.42). L'opérateur  $\mathcal{T}$  s'exprime

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^2(\Omega_L) &\longrightarrow H(\Omega_L, \mathbf{v}_0, \Gamma_L^-) \\ \mathbf{u}_h &\longmapsto \mathcal{T} \mathbf{u}_h = -2\mathcal{D} \circ \mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}_h - \mathcal{D} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{C} \mathbf{u}_h. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} (\mathcal{T} \mathbf{u}_h - \mathcal{T}_h \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_h \right| \leq \frac{1}{|\alpha_1|} \left\| \rho_0^{1/2} c_0 (\mathcal{T} - \mathcal{T}_h) \mathbf{u}_h \right\|_{0, \Omega_L} \left\| \rho_0^{1/2} c_0 \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{v}_h \right\|_{0, \Omega_L}. \quad (5.52)$$

D'une part, il est clair que le second facteur dans le second membre de (5.52) vérifie

$$\left\| \rho_0^{1/2} c_0 \operatorname{rot}_\alpha \mathbf{v}_h \right\|_{0, \Omega_L} \preccurlyeq \left\| \rho_0^{1/2} c_0 \nabla_\alpha \mathbf{v}_h \right\|_{0, \Omega_L}. \quad (5.53)$$

D'autre part, en utilisant les propriétés des opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}_h$ , nous pouvons obtenir une majoration du premier facteur. En effet, celui-ci s'écrit également comme

$$\begin{aligned} &\left\| \rho_0^{1/2} c_0 (\mathcal{T} - \mathcal{T}_h) \mathbf{u}_h \right\|_{0, \Omega_L} \\ &= \left\| \rho_0^{1/2} c_0 (-2(\mathcal{D} - \mathcal{D}_h) \circ \mathcal{B}_\alpha \mathbf{u}_h - ((\mathcal{D} - \mathcal{D}_h) \circ \mathcal{D} + \mathcal{D}_h \circ (\mathcal{D} - \mathcal{D}_h)) \circ \mathcal{C} \mathbf{u}_h) \right\|_{0, \Omega_L}. \end{aligned}$$

Par continuité des opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}_h$  et en utilisant la définition des normes de  $\mathcal{B}_\alpha$  et  $\mathcal{C}$ , il vient

$$\left\| \rho_0^{1/2} c_0 (\mathcal{T} - \mathcal{T}_h) \mathbf{u}_h \right\|_{0, \Omega_L} \preccurlyeq \| \mathcal{D} - \mathcal{D}_h \|_{L^2 \rightarrow L^2} (\| \mathcal{B}_\alpha \| + \| \mathcal{C} \|) \left\| \rho_0^{1/2} c_0 \nabla_\alpha \mathbf{u}_h \right\|_{0, \Omega_L}, \quad (5.54)$$

où

$$\| \mathcal{D} - \mathcal{D}_h \|_{L^2 \rightarrow L^2} = \sup_{\substack{g \in L^2(\Omega_L) \\ \| \varphi \|_{0, \Omega_L} = 1}} \| (\mathcal{D} - \mathcal{D}_h) g \|_{0, \Omega_L}.$$

La combinaison de (5.53) et (5.54) dans (5.52) donne alors

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0 c_0^2}{\alpha_1} (\mathcal{T} \mathbf{u}_h - \mathcal{T}_h \mathbf{u}_h) \operatorname{rot}_\alpha \bar{\mathbf{v}}_h \right| \\ &\preccurlyeq \frac{1}{|\alpha_1|} \| \mathcal{D} - \mathcal{D}_h \|_{L^2 \rightarrow L^2} (\| \mathcal{B}_\alpha \| + \| \mathcal{C} \|) \left\| \rho_0^{1/2} c_0 \nabla_\alpha \mathbf{u}_h \right\|_{0, \Omega_L} \left\| \rho_0^{1/2} c_0 \nabla_\alpha \mathbf{v}_h \right\|_{0, \Omega_L}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Nous en déduisons la majoration de  $\delta_h$  suivante

$$\delta_h \preccurlyeq \frac{1}{|\alpha_1|} \| \mathcal{D} - \mathcal{D}_h \|_{L^2 \rightarrow L^2} (\| \mathcal{B}_\alpha \| + \| \mathcal{C} \|). \quad (5.56)$$

D'après le théorème 3.15 et selon les définitions de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}_h$ , nous avons

$$\forall g \in L^2(\Omega_L), \|\mathcal{D} - \mathcal{D}_h\|_{0,\Omega_L} \preceq \inf_{\varphi_h \in W_h^k} \|\mathcal{D}g - \varphi_h\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla,\frac{1}{2}}. \quad (5.57)$$

Comme  $\mathcal{D}g \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+)$ , le caractère approximant de l'espace  $W_h^k$  qui s'écrit

$$\forall \varphi \in H(\Omega, \mathbf{v}_0, \Gamma^+), \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \inf_{\varphi_h \in W_h^k} \|\varphi - \varphi_h\|_{h,\mathbf{v}_0,\nabla,\frac{1}{2}} \right) = 0,$$

permet alors de déduire que

$$\forall g \in L^2(\Omega_L), \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathcal{D} - \mathcal{D}_h\|_{0,\Omega_L} = 0$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|\mathcal{D} - \mathcal{D}_h\|_{L^2 \rightarrow L^2} = 0.$$

Il existe alors  $h_1 > 0$  tel que  $\forall h \in ]0, h_1]$ ,  $\delta_h \leq \frac{\gamma}{2}$ , d'où nous obtenons, avec (5.49), le résultat  $\forall h \in ]0, \min(h_0, h_1)]$ ,

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in V_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{|A_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{u}_h\|_V \|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \frac{\gamma}{2} > 0. \quad (5.58)$$

□

Finalement, l'application d'un lemme classique de Strang [44] conduit à l'estimation d'erreur de la

**Proposition 5.10.** *Si  $\mathbf{u} \in H^{k+1}(\Omega_L)$  alors*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega_L} \preceq h^k |\mathbf{u}|_{k+1,\Omega_L}.$$

Nous avons donc montré que, sous les hypothèses du théorème 5.7, le problème approché à l'aide d'une méthode d'éléments finis mixtes continus-discontinus est bien posé. Pour des solutions de régularité  $H^{k+1}(\Omega_L)$  la méthode converge à l'ordre  $k$ .

## 5.4 Résultats numériques

L'analyse numérique faite dans ce chapitre nous assure de la convergence de la méthode dans les cas 1 et 2. Les expérimentations numériques menées confortent ce résultat. Nous vérifions effectivement que les solutions numériques ont convergé. De plus, un indicateur d'erreur a posteriori permet de vérifier que la solution obtenue satisfait bien le problème de Galbrun initial.

### 5.4.1 Rayonnement acoustique dans le cas 1

Nous considérons tout d'abord le cas test 1 schématisé par la figure 5.1. Nous simulons le rayonnement d'une source acoustique à support compact localisée à proximité de la zone où l'écoulement est perturbé. Cette source, centrée en  $(x_{1,s}, x_{2,s})$  et de rayon  $r_s$  a pour expression

$$\mathbf{f}_1(x_1, x_2) = \nabla \exp \left( -\frac{(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2}{r_s^2} \right), \quad (5.59)$$

si  $(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2 \leq 10r_s^2$  et est nulle ailleurs. La vitesse de l'écoulement porteur et ses dérivées sont également connues de façon analytique. Il s'agit de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre centré en  $(0,0)$  et de rayon  $R_0$  dont l'expression est donnée en annexe D. Cette

annexe propose aussi une représentation des champs de vitesse et de pression de l'écoulement obtenus pour le cas 1. A l'infini, l'écoulement est uniforme et de module  $v_\infty$ . Les calculs sont réalisés sur un domaine, représenté sur la figure 5.3, comprenant une zone physique de hauteur  $H$  et de largeur  $2R$  entourée par des couches PML de largeur  $L$ . Nous visualisons la solution  $(\mathbf{u}, \psi)$  du système de Galbrun augmenté obtenue pour une pulsation  $\omega = 8$ , ainsi que pour les paramètres de la source et de l'écoulement suivants :

$$(x_{1,s}, x_{2,s}) = (-1, 1), r_s = 0.2, v_\infty = 0.45, R_0 = 0.5,$$

et pour

$$R = 3, H = 4, L = 2 \text{ et } \alpha = (0.65, -0.65).$$

Les simulations sont effectuées en prenant  $c_0 = \rho_0 = 1$  et  $\mathcal{C}\mathbf{u} = 0$ . Ces approximations donnent seulement lieu à une erreur en  $\frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2}$  (Mach au carré).

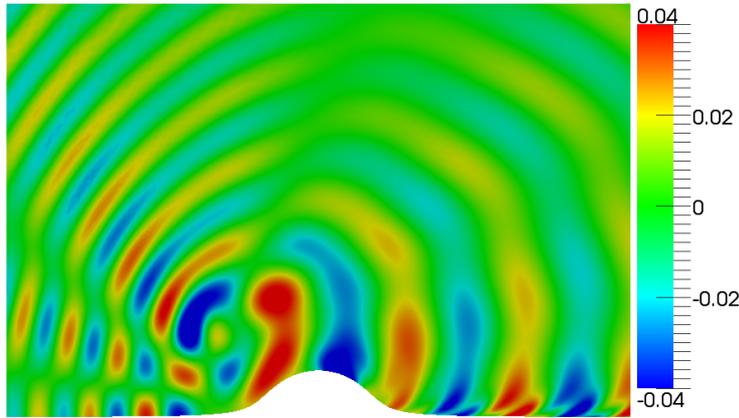


FIG. 5.5: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 1 : isovaleurs de  $\Re u_1$ .

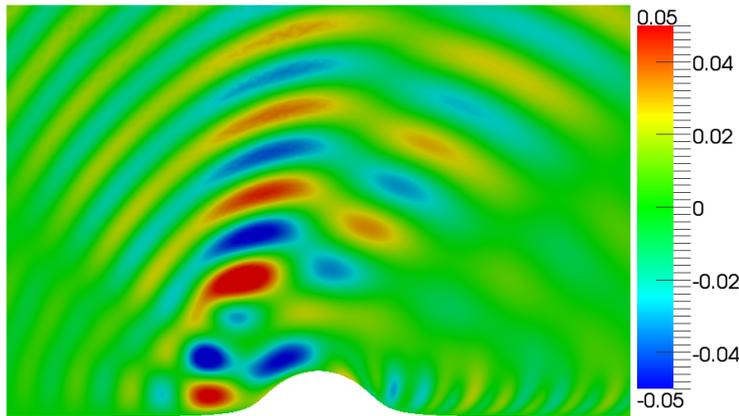


FIG. 5.6: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 1 : isovaleurs de  $\Re u_2$ .

Les figures 5.5 et 5.6 montrent les composantes horizontales et verticales de  $\mathbf{u}$  dans le domaine privé des couches PML. Nous observons la propagation de plusieurs fronts d'onde. La longueur de l'onde qui remonte l'écoulement est plus courte que celle qui redescend. Il s'agit d'un effet de convection dû à l'écoulement (qui s'apparente à l'effet Doppler). Le bord rigide provoque de plus le guidage de l'onde : nous remarquons un effet de confinement de l'onde acoustique le long

de ce bord. Nous voyons aussi que la perturbation géométrique en forme de bosse produit une modification de la directivité de l'onde. A l'aval de la source, la forme du signal de  $\mathbf{u}$  dénote un couplage avec l'inconnue  $\psi$ . La figure 5.7 montre effectivement que celle-ci est non nulle dans cette zone, ce à quoi nous nous attendions puisque le second membre de l'équation en  $\psi$  dépend du gradient de l'écoulement et de  $\mathbf{u}$ . Nous observons en outre le transport harmonique de  $\psi$  selon les lignes de courant avec une longueur de périodicité spatiale de  $\lambda = \frac{2\pi|\mathbf{v}_0|}{\omega}$ .

De plus, nous vérifions sur la figure 5.8 que le signal est atténué dans les couches PML et il n'y a pas de réflexion parasite dans le domaine de calcul. Nous constatons que la décroissance du signal dans les couches PML est très rapide : nous aurions pu prendre une épaisseur  $L$  plus petite afin de diminuer le nombre de degrés de liberté sans changer la qualité du résultat.

Ensuite, le système de Galbrun augmenté fournit un indicateur intrinsèque à la méthode de régularisation qui permet de vérifier que la solution numérique obtenue correspond bien à la solution de l'équation de Galbrun initiale. Rappelons que l'inconnue  $\psi$  est définie comme le rotationnel de  $\mathbf{u}$ . Un test simple consiste à calculer la quantité  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$ . Nous déterminons  $\text{rot } \mathbf{u}$  à l'aide d'une méthode de reconstitution de gradient [76]. La figure 5.9 montre que les valeurs de  $\tilde{\epsilon}$  sont très proches de l'erreur machine sauf sur la frontière rigide. Cette légère différence peut s'expliquer par une mauvaise approximation de la surface courbe.

Enfin, plusieurs simulations ont été réalisées. Elles montrent que la solution reste stable quand on diminue le pas de maillage et quand on change les paramètres des PML, ce qui prouve la convergence de la méthode.

### 5.4.2 Rayonnement acoustique dans le cas 2

Nous considérons maintenant le cas du jet analytique introduit au paragraphe 5.1.2 et schématisé par la figure 5.2. La vitesse de l'écoulement porteur est déterminée de façon analytique. Son expression s'écrit sous la forme

$$v_{0,1}(x_1, x_2) = v_\infty + A_0 \exp\left(-\frac{x_2^2}{r_0^2}\right), \quad (5.60)$$

et  $v_{0,2}(x_1, x_2) = 0$ . La courbe de la figure 5.10 représente le profil de la composante horizontale de  $\mathbf{v}_0$ . D'après la relation (5.60), le rotationnel de  $\mathbf{v}_0$  est non nul, il s'agit d'un écoulement non potentiel. Il satisfait également  $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$  et donc, selon les relations (4.1), la pression  $p_0$ , la densité  $\rho_0$  ainsi que la célérité du son  $c_0$  associées à ce fluide sont constantes. Pour les simulations, nous prenons  $c_0 = \rho_0 = 1$ .

Dans un domaine de calcul représenté figure 5.4, nous simulons le rayonnement d'une source acoustique positionnée en  $(x_{1,s}, x_{2,s})$  et de rayon  $r_s$  dont l'expression est

$$\mathbf{f}_2(x_1, x_2) = \frac{1}{r_s} \nabla \left( (x_1 - x_{1,s})(x_2 - x_{2,s}) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2}{r_s^2}\right) \right), \quad (5.61)$$

si  $(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2 \leq 10r_s^2$  et est nulle ailleurs. Le domaine de calcul est un rectangle de longueur  $2R_1$  et de largeur  $2R_2$ . Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus avec une pulsation de valeur  $\omega = 9$ . Les paramètres de l'écoulement sont choisis tels que

$$v_\infty = A_0 = 0.3, r_0 = 0.4, p_0 = \rho_0 = c_0 = 1.$$

Les valeurs caractérisant le terme source sont

$$(x_{1,s}, x_{2,s}) = (0, 0.5), r_s = 0.3,$$

et le domaine de calcul avec couches PML est tel que

$$R_1 = 4.5, R_2 = 3, L = 1.5 \text{ et } \alpha = (0.65, -0.65).$$

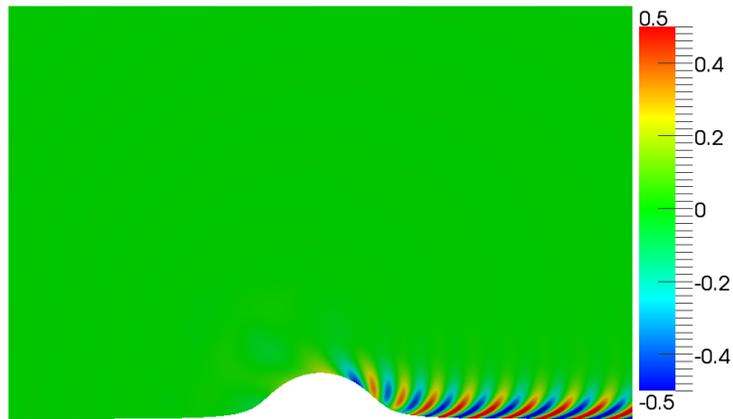


FIG. 5.7: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 1 : isovaleurs de  $\Re \psi$ .

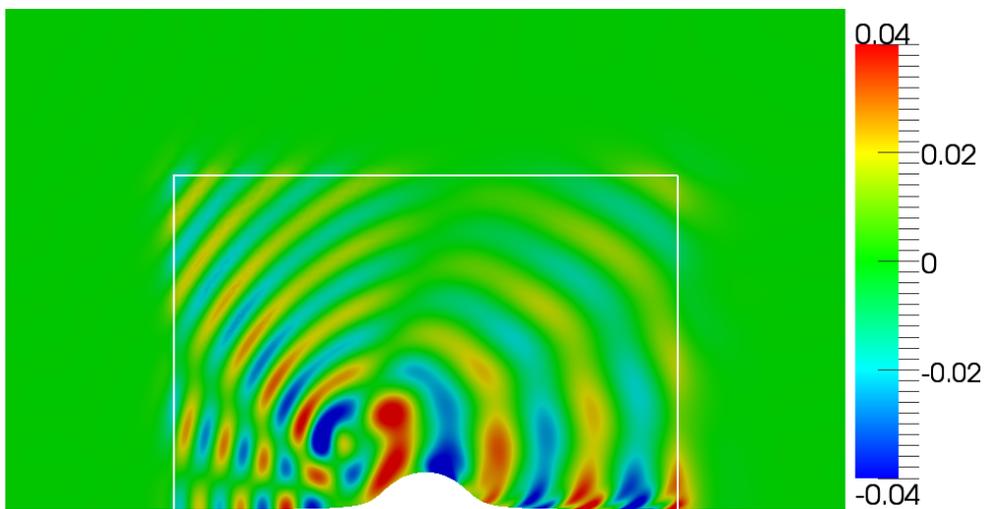


FIG. 5.8: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 1 : isovaleurs de  $\Re u_1$  dans le domaine de calcul avec couches PML.

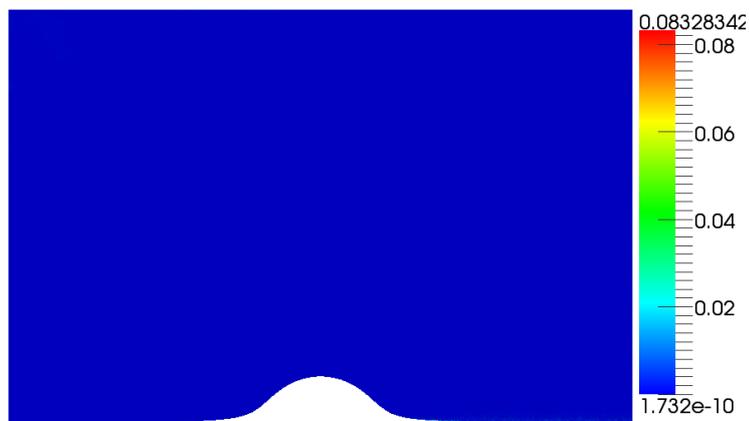


FIG. 5.9: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 1 : indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$ .

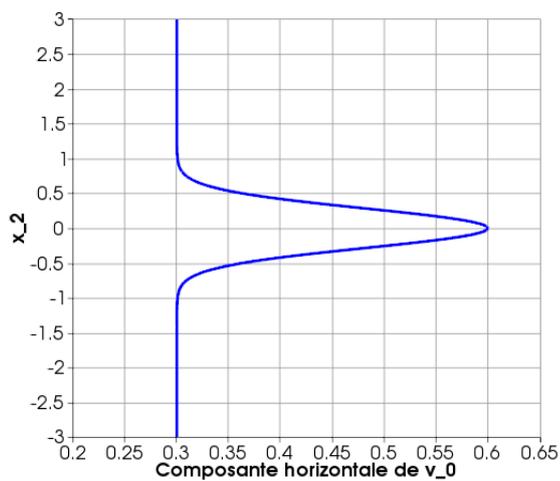


FIG. 5.10: Profil de la vitesse de l'écoulement  $v_1(x_2)$  pour le cas 2.

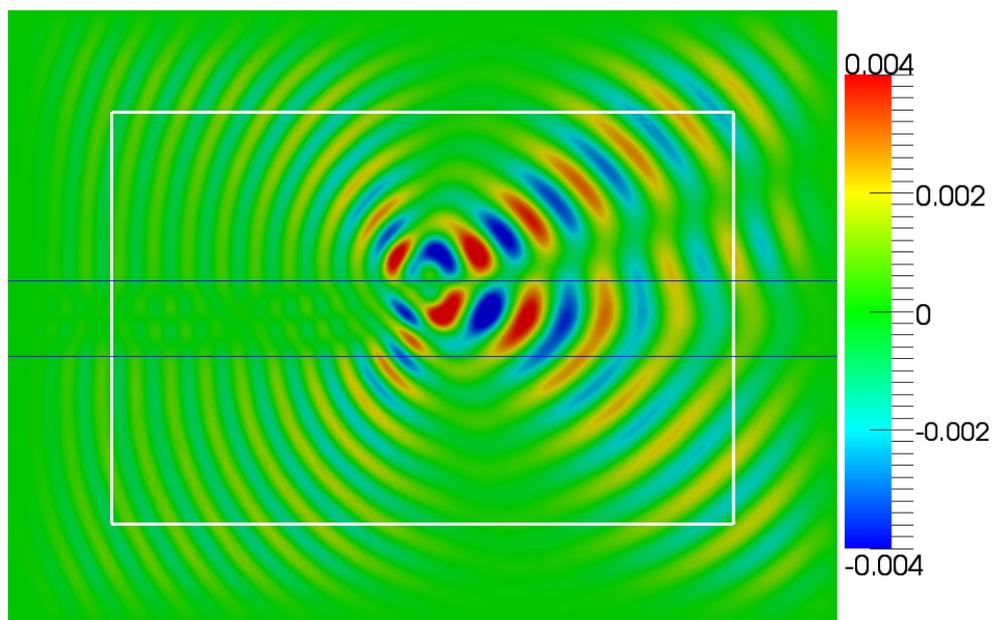


FIG. 5.11: Rayonnement acoustique dans un écoulement jet (cas 2) : isovaleurs de  $\Re u_1$  dans le domaine avec couches PML délimitées par les lignes blanches. Les lignes bleues matérialisent la zone dans laquelle  $\mathbf{v}_0$  est variable.

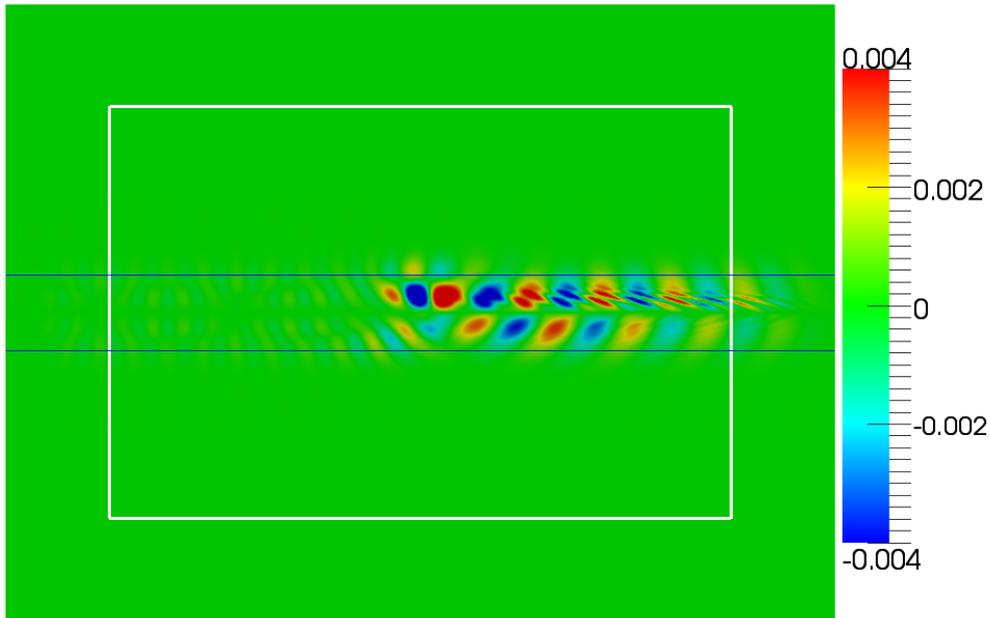


FIG. 5.12: Rayonnement acoustique dans un écoulement jet (cas 2) : isovaleurs de  $\Re \psi$  dans le domaine avec couches PML délimitées par les lignes blanches. Les lignes bleues matérialisent la zone dans laquelle  $\mathbf{v}_0$  est variable.

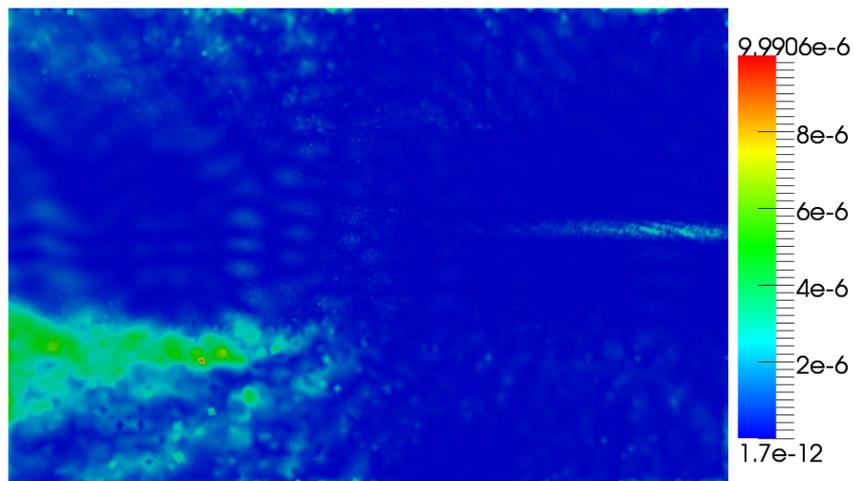


FIG. 5.13: Rayonnement d'une source acoustique dans le cas 2 : valeurs de  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  l'indicateur *a posteriori* dans le domaine physique.

Les figures 5.11 et 5.12 représentent respectivement  $\Re u_1$  et  $\Re \psi$  obtenues dans le domaine de calcul total. Le rectangle blanc décrit la limite entre les couches PML et le domaine physique. Les deux droites horizontales délimitent la zone dans laquelle se situe le jet et en dehors de laquelle l'écoulement est uniforme. La source acoustique émet quatre fronts d'onde dont deux se propagent vers l'amont tandis que les deux autres partent vers l'aval de la source. D'abord, nous remarquons que la taille de la longueur d'onde du signal qui remonte l'écoulement est plus courte que celle qui se dirige vers l'aval. Il s'agit de l'effet de convection déjà rencontré dans le cas 1. Ensuite, nous constatons que le signal de  $\mathbf{u}$  n'est pas symétrique par rapport à l'axe  $x_2 = x_{2,s}$  horizontal coupant le centre de la source. Ceci s'explique par la présence du jet qui provoque une modification des deux fronts d'onde inférieurs. Pour chacun des deux, la direction de propagation est déviée par réfraction de l'onde. Pour le front d'onde aval, il y a également une réflexion qui donne naissance à un cinquième front d'onde.

L'inconnue  $\psi$  vit uniquement dans la zone de l'écoulement à l'aval de la source et consiste en un signal qui est transporté par l'écoulement. Les oscillations de  $\psi$  résultent d'un couplage complexe entre la longueur d'onde du signal de  $\mathbf{u}$  et de la périodicité spaciae propre au phénomène de transport harmonique. Ensuite, bien que l'écoulement est variable dans la zone du jet qui est à l'amont de la source,  $\psi$  est nul à cet endroit car il n'y a pas de front d'onde en  $\mathbf{u}$  qui s'y propage ( $\mathcal{B}\mathbf{u}$  au second membre de l'équation en  $\psi$  est nul).

Enfin, comme pour le cas 1, nous vérifions d'une part que les couches PML fonctionnent correctement puisque le signal qui arrive aux extrémités de celles-ci est bien nul et les calculs menés avec d'autres paramètres de PML conduisent à la même solution. D'autre part, l'indicateur a posteriori  $\tilde{\epsilon}$  tracé sur la figure 5.13 est bien de l'ordre de l'erreur numérique. En outre, la solution reste stable lorsqu'on raffine le maillage, d'où la convergence de la méthode.

Les résultats numériques montrent donc que la formulation de Galbrun couplée avec le transport et discrétisée avec des éléments finis mixtes continus et discontinus avec couche PML est bien posée et la discrétisation converge. Nous renvoyons le lecteur au chapitre suivant pour des résultats plus avancés concernant ces deux tests.



## Chapitre 6

# Résultats numériques : validations et mise en évidence du couplage acoustique et hydrodynamique

Au chapitre précédent, nous avons proposé une méthode d'approximation pour le problème de propagation acoustique couplant l'équation de Galbrun augmentée avec l'équation hydrodynamique de type transport dans un domaine infini borné par des couches PML. L'approche choisie consiste à utiliser des éléments finis classiques pour approcher la première inconnue  $\mathbf{u}$  qui est la perturbation du déplacement lagrangien, et des éléments finis discontinus pour la deuxième inconnue  $\psi$  qui est définie comme le rotationnel de la première. Nous avons montré le caractère bien posé et la convergence du problème approché sous certaines hypothèses sur l'écoulement porteur. Nous avons implémenté cette méthode et les deux premiers résultats numériques présentés à la fin du chapitre 5 confirment la convergence de la méthode dans les cas traités.

Les objectifs principaux de ce chapitre sont d'une part de poursuivre la validation de notre approche et d'autre part de mettre en évidence le couplage entre l'acoustique et l'hydrodynamique. Ce dernier est naturellement pris en compte par notre modèle mais pas, à notre connaissance, par les codes d'acoustiques linéaires commerciaux. Nous tenterons aussi de montrer la pertinence de notre approche dans des cas d'écoulements complexes qui ne vérifient pas, en particulier, les hypothèses nécessaires à l'établissement des résultats théoriques du chapitre 5.

La phase de validation est un point délicat car nous ne connaissons pas de solutions de référence directement exprimées à l'aide des variables  $\mathbf{u}$  et  $\psi$  et dans des cas d'écoulements véritablement complexes. Notre démarche de validation s'appuie sur l'utilisation des cas d'écoulements présentés au chapitre précédent. Nous rappelons leurs définitions précises en début de ce chapitre. Le premier cas fournit une configuration pour la validation en écoulement potentiel alors que le deuxième est un jet dont la vitesse est à rotationnel non nul.

Nous utilisons trois critères de validation. Le premier est analytique et consiste à vérifier que les longueurs des ondes acoustiques sont en accord avec les valeurs théoriques. Nous connaissons effectivement l'expression théorique de ces longueurs en fonction de la pulsation et de la vitesse de l'écoulement en écoulement uniforme. De même, pour les modes hydrodynamiques, il existe une relation liant leurs longueurs d'onde à  $\omega$  et  $\mathbf{v}_0$ .

Le deuxième critère est une comparaison avec la solution numérique obtenue par une méthode éprouvée en écoulement potentiel. Dans ce cas d'écoulement, pour des sources purement acoustiques, il est possible de résoudre le problème de propagation acoustique grâce à l'approche potentielle que nous présenterons succinctement dans ce chapitre. Celle-ci consiste en un modèle scalaire qui permet de calculer le potentiel de vitesse. La vitesse peut ensuite être calculée en prenant le gradient de ce potentiel. Par ailleurs, nous connaissons l'expression de la vitesse (et de la pression acoustique) en fonction de  $\mathbf{u}$ . Ainsi, après post-traitement des solutions du modèle potentiel et de notre modèle, nous pourrions valider notre approche par comparaison des résultats

des deux méthodes.

L'indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  introduit dans la section 5.4 constitue enfin le troisième critère sur lequel nous nous appuyons pour vérifier la cohérence des solutions numériques en écoulement quelconque.

Ensuite, des simulations numériques nous permettent de mettre en évidence les phénomènes hydrodynamiques et leurs effets sur la propagation acoustique. Nous considérerons deux exemples rotationnels particuliers. D'abord, nous traitons le cas d'une source tourbillonnaire. Puis nous observerons le couplage dans le cas d'écoulements de jet.

Enfin, nous voulons également tester la robustesse de la méthode dans des cas d'écoulements plus complexes, qui par exemple ne sont pas connus analytiquement mais donnés par un code résolvant les équations régissant le fluide. Nous aborderons aussi les problématiques des écoulements instables, points d'arrêt et recirculations qui peuvent éventuellement entraîner des complications.

## 6.1 Les cas tests de validation

Notre démarche s'appuie sur l'exploitation de deux cas tests numériques que nous avons déjà introduits au chapitre précédent. Pour la clarté de l'exposé, nous rappelons la définition des cas 1 et 2 qui consistent respectivement en un écoulement potentiel au dessus d'une surface rigide ayant la forme d'une bosse et en un jet analytique.

### 6.1.1 Cas 1 : l'écoulement potentiel au dessus d'une surface rigide

Nous considérons une surface rigide  $\Gamma_\infty$  au dessus de laquelle s'écoule un écoulement potentiel de la gauche vers la droite comme représenté sur la figure 6.1. Le domaine infini au dessus de la surface est noté  $\Omega_\infty$ . Le domaine de calcul total noté  $\Omega_L$  est délimité par la surface rigide et par les extrémités des couches PML. Le domaine physique (sans les couches PML) est de hauteur  $H$  et de largeur  $2R$ . Les zones PML sont de largeur  $L$ . La vitesse de l'écoulement porteur  $\mathbf{v}_0$  et ses dérivées sont connues de façon analytique. Il s'agit de l'écoulement potentiel autour d'un cylindre centré en  $(0, 0)$  et de rayon  $R_0$  dont l'expression est donnée en annexe D. Cette annexe propose aussi une représentation des champs de vitesse et de pression de l'écoulement obtenus pour ce cas 1. A l'infini, l'écoulement est uniforme et de module  $v_\infty$ . En particulier, l'écoulement est uniforme dans les zones PML. Pour les simulations, nous faisons les approximations suivantes :  $c_0 = \rho_0 = 1$  et  $\mathcal{C}\mathbf{u} = 0$ . L'erreur commise est alors en  $\frac{|\mathbf{v}_0|^2}{c_0^2}$ .

### 6.1.2 Cas 2 : l'écoulement rotationnel du jet analytique

Nous considérons maintenant le domaine infini  $\Omega_\infty = \mathbb{R}^2$  dans lequel s'écoule un fluide de la gauche vers la droite parallèlement à  $\mathbf{e}_1$  et dont la composante horizontale dépend uniquement de l'altitude. Il s'agit du cas du jet analytique introduit au paragraphe 5.1.2. Le domaine de calcul, schématisé sur la figure 6.2 est un rectangle  $[R_1, R_2] \times [-H, H]$  entouré de couches PML de largeur  $L$ . La vitesse de l'écoulement porteur est donnée de façon analytique :

$$v_{0,1}(x_1, x_2) = v_\infty + A_0 \exp\left(-\frac{x_2^2}{r_0^2}\right), \quad (6.1)$$

$$v_{0,2}(x_1, x_2) = 0, \quad (6.2)$$

où  $A_0$  et  $r_0$  sont des paramètres réels et  $v_\infty$  est la vitesse à l'infini. La courbe de la figure 6.13 représente le profil de la composante horizontale de  $\mathbf{v}_0$ . D'après la relation (6.1), le rotationnel de  $\mathbf{v}_0$  est non nul, il s'agit d'un écoulement non potentiel. Il satisfait également  $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$  et donc, selon les relations (4.1), la pression  $p_0$ , la densité  $\rho_0$  ainsi que la célérité du son  $c_0$  associées à cet écoulement sont constantes. Pour les simulations, nous prenons  $c_0 = \rho_0 = 1$ .

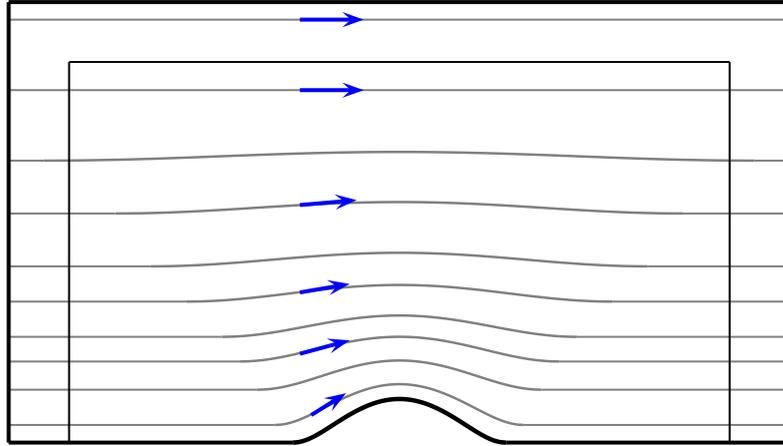


FIG. 6.1: Domaine de calcul avec couche PML pour l'écoulement potentiel au dessus d'une bosse (cas 1).

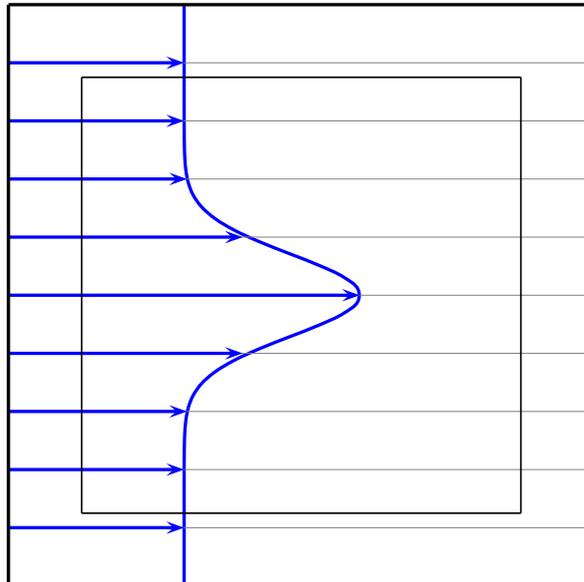


FIG. 6.2: Domaine de calcul avec couche PML pour l'écoulement rotationnel de jet (cas 2).

### 6.1.3 Les sources acoustiques et sources tourbillonnaires

Les perturbations acoustiques sont générées par des sources elles-mêmes modélisées par des fonctions à support compact que nous mettons au second membre de l'équation de Galbrun augmentée. Il s'agit du terme  $\mathbf{f}$  dans l'équation (5.2). Nous distinguons deux types de sources : les sources acoustiques qui vérifient  $\text{rot } \mathbf{f} = 0$  et les sources tourbillonnaires qui vérifient  $\text{rot } \mathbf{f} \neq 0$ . Pour construire de telles sources, nous utilisons une fonction scalaire  $g$  dont le support est contenu dans un disque. Pour avoir une source acoustique, nous posons

$$\mathbf{f}_{ac}(x_1, x_2) = \nabla g(x_1, x_2). \quad (6.3)$$

Les sources tourbillonnaires sont données par

$$\mathbf{f}_{rot}(x_1, x_2) = s_1 \nabla g(x_1, x_2) + s_2 \mathbf{rot} g(x_1, x_2), \quad (6.4)$$

avec  $s_1$  et  $s_2$  des paramètres réels strictement positifs. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été obtenus en utilisant différentes expressions pour la fonction  $g$ . Les sources sont définies non nulles sur un disque centrées en  $(x_{1,s}, x_{2,s})$  et de rayon  $\sqrt{10}r_s$  par les expressions suivantes :

$$g_1(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2}{r_s^2}\right), \quad (6.5)$$

$$g_2(x_1, x_2) = \frac{1}{r_s} (x_1 - x_{1,s})(x_2 - x_{2,s}) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2}{r_s^2}\right), \quad (6.6)$$

$$g_3(x_1, x_2) = (x_2 - x_{2,s}) \exp\left(-\frac{(x_1 - x_{1,s})^2 + (x_2 - x_{2,s})^2}{r_s^2}\right). \quad (6.7)$$

Ces fonctions sont prolongées par zéro en dehors de ce disque.

## 6.2 Validations de la méthode en écoulement potentiel

Afin de valider notre approche dans des cas d'écoulements potentiels, nous réalisons des tests numériques dans le cas d'un écoulement uniforme et ensuite dans le cas 1 détaillé plus haut. Comme nous avons vu au chapitre 4, en écoulement potentiel ( $\text{rot } \mathbf{v}_0 = 0$ ) et avec une source acoustique, il n'y a pas de couplage entre l'acoustique et les phénomènes hydrodynamiques. Cette configuration est bien maîtrisée. En effet, il est possible dans ce cas de calculer une solution numérique de référence du problème acoustique par l'approche potentielle qui est une méthode beaucoup plus simple que la résolution de notre système. La comparaison de nos résultats avec cette méthode constitue un bon test de validation car l'hypothèse d'un écoulement potentiel n'entraîne pas de modification dans le système de Galbrun augmenté. Même si  $\text{rot } \mathbf{v}_0 = 0$ , l'inconnue hydrodynamique  $\psi$  est non nulle. Nous testons d'abord notre méthode en écoulement uniforme qui est un écoulement potentiel simple. Nous vérifions la validité du résultat en mesurant les longueurs d'onde de la solution calculée. Ensuite, nous considérons l'écoulement du cas 1 introduit au chapitre 5. Après avoir brièvement présenté le modèle potentiel, nous comparons les résultats obtenus par notre approche avec la solution donnée par notre code potentiel.

### 6.2.1 Cas de l'écoulement uniforme

Le cas d'écoulement potentiel le plus simple, après l'écoulement nul, est l'écoulement parallèle uniforme. Dans ce cas, les gradients de l'écoulement étant nuls, le terme source de l'équation hydrodynamique est nul et par conséquent, la méthode doit restituer  $\psi$  égal à zéro. Il s'agit d'une configuration simple mais qui constitue un premier test de validation pertinent. Nous simulons, dans un écoulement uniforme  $\mathbf{v}_0(x_1, x_2) = v_0 \mathbf{e}_1$  se déplaçant de la gauche vers la droite, la

propagation acoustique générée par la source acoustique  $\mathbf{f}_{ac}$ . L'expression (6.3) de cette source est construite à l'aide de la fonction  $g_2$  définie par (6.6). Le centre et le rayon de la source sont choisis tels que

$$(x_{1,s}, x_{2,s}) = (0, 0.5), r_s = 0.3.$$

Les résultats présentés sont obtenus pour  $v_0 = 0.3$ ,  $\rho_0 = c_0 = 1$  et pour une pulsation  $\omega = 9$ . Le domaine considéré  $\Omega_R$  est rectangulaire de longueur  $2R_1$  et de largeur  $2R_2$  entouré de couches PML de largeur  $L$  avec

$$R_1 = 4.5, R_2 = 3, L = 1.5 \text{ et } \alpha = (0.65, -0.65).$$

La figure 6.3 représente les valeurs de la partie réelle de la composante horizontale de  $\mathbf{u}$  calculées par notre code. Nous observons la propagation de quatre fronts d'onde de façon symétrique par rapport à l'axe des abscisses. La longueur d'onde du front qui se propage dans le sens de l'écoulement est plus longue que celle qui remonte l'écoulement. Il s'agit de l'effet de convection d'onde par l'écoulement que nous avons déjà constaté dans le cas du jet au chapitre précédent. Ce phénomène s'apparente à l'effet Doppler.

Pour valider notre approche, nous mesurons la longueur d'onde de ces fronts et nous la comparons à la valeur théorique qui est connue en écoulement uniforme. En effet, il est possible de déterminer de façon analytique les modes de l'équation de Galbrun dans un conduit rigide bi-dimensionnel en présence d'écoulement uniforme (voir [63], annexe C). Les modes acoustiques guidés s'expriment en fonction du nombre d'onde  $k$ , de  $v_0$  la vitesse de l'écoulement et de  $h$  la hauteur du guide. En faisant tendre  $h$  vers l'infini dans cette expression, nous obtenons le nombre d'onde des modes acoustiques amont  $\beta^+$  et aval  $\beta^-$  dans un domaine infini :

$$\beta^+ = \frac{k}{1 + M} \text{ et } \beta^- = \frac{-k}{1 - M}, \quad (6.8)$$

avec  $k = \frac{\omega}{c_0}$  et  $M = \frac{v_0}{c_0}$ . La longueur d'onde associée est

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\beta|}. \quad (6.9)$$

A l'aide des figures 6.4 et 6.5, nous vérifions que les longueurs d'onde de la solution approchée par notre méthode satisfont les relations (6.9) et (6.8). Les graphiques donnés par ces figures représentent les valeurs de  $\Re u_1$  selon les demi-droites d'origine  $(x_{1,s}, x_{2,s})$  et d'équation  $x_2 = a^\pm x_1$  avec  $a^\pm > 0$ . Les positions de ces courbes relativement aux fronts d'onde sont dessinées sur les images de gauche des figures 6.4 et 6.5. Par lecture graphique de la longueur d'onde, nous obtenons  $\lambda^- \approx 0.5$  pour l'onde amont (en bleue) et  $\lambda^+ \approx 0.9$  pour l'onde aval (en rouge). Ces valeurs correspondent bien aux valeurs obtenues par les relations (6.9) et (6.8) avec les paramètres de simulation choisis, ce qui valide le résultat numérique obtenu.

### 6.2.2 La formulation en potentiel

Les équations du modèle potentiel sont obtenues à partir des équations d'Euler en supposant que l'écoulement total est irrotationnel, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel. L'équation de conservation de la masse peut alors s'écrire sous la forme de l'équation de Bernoulli dont l'inconnue est le potentiel de vitesse. Ce potentiel se décompose comme la somme du potentiel de l'écoulement moyen  $\phi_0$  et du potentiel lié à la perturbation acoustique  $\phi$ . Les vitesses associées vérifient naturellement :

$$\mathbf{v}_0 = \nabla \phi_0 \text{ et donc } \text{rot } \mathbf{v}_0 = 0,$$

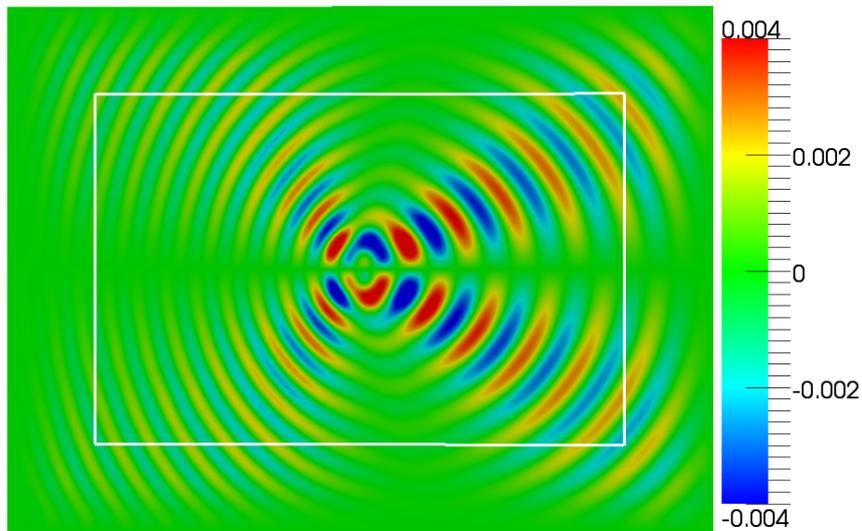


FIG. 6.3: Rayonnement acoustique en écoulement uniforme : isovalues de  $\Re u_1$  obtenues dans le domaine avec couches PML.

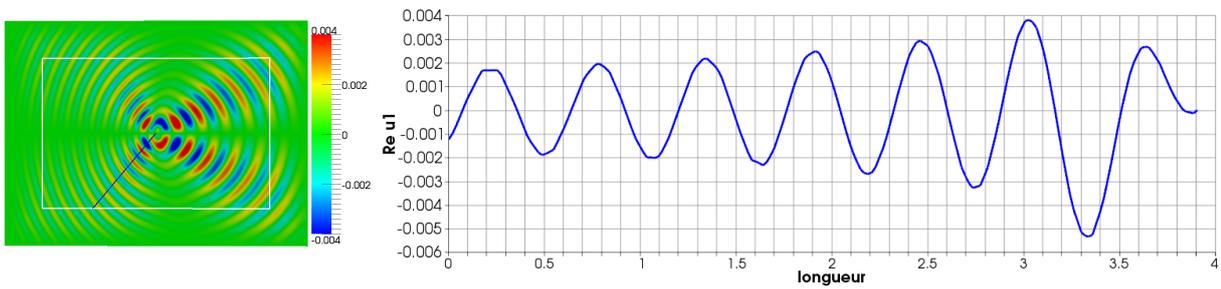


FIG. 6.4: Rayonnement acoustique en écoulement uniforme : onde acoustique amont. Valeurs de  $\Re u_1$  (à droite) obtenues le long de la droite représentée en bleu sur l'image de gauche.

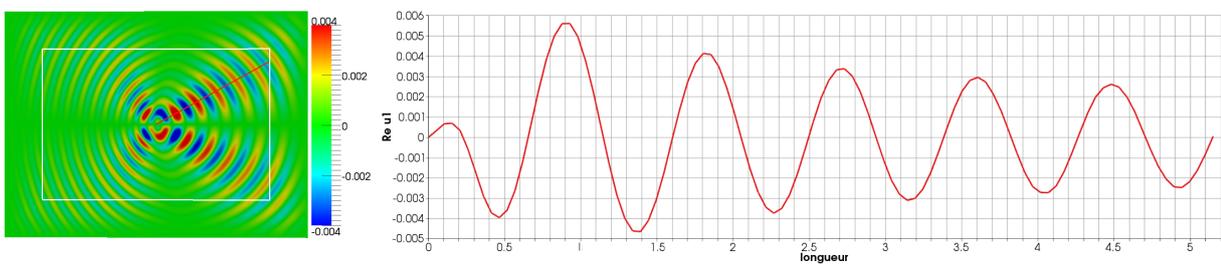


FIG. 6.5: Rayonnement acoustique en écoulement uniforme : onde acoustique aval. Valeurs de  $\Re u_1$  (à droite) obtenues le long de la droite représentée en rouge sur l'image de gauche.

et

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \text{ et donc } \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

En supposant que la contribution de l'acoustique est faible devant celle de l'écoulement moyen, la linéarisation à l'ordre un des équations du fluide aboutit alors, selon un procédé décrit dans [42], sur une équation satisfaite par le potentiel de vitesse acoustique :

$$\text{div} \left( \rho_0 (\nabla\phi - \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\phi) \mathbf{v}_0) \right) + \text{div} \left( i\rho_0 \frac{\omega}{c_0} \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \phi \right) + \rho_0 \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi + i\rho_0 \frac{\omega}{c_0} \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \cdot \nabla\phi = -f, \quad (6.10)$$

où  $f$  est un terme source à support dans  $\Omega_\infty$ . Sur les frontières rigides  $\Gamma_\infty$  quand il y en a, la dérivée normale de  $\phi$  s'annule :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0. \quad (6.11)$$

La résolution de problèmes acoustiques par cette équation constitue une approche classique qui est désormais une référence dans l'industrie [42, 31].

Afin de sélectionner l'onde sortante et de borner le domaine de calcul, nous utilisons le modèle de couches PML que nous avons introduit au paragraphe 5.1.4. Avec les notations du chapitre précédent, le problème à résoudre s'écrit dans  $\Omega_L$  :

$$\begin{aligned} & \text{div}_\alpha \left( \rho_0 (\nabla_\alpha\phi - \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha\phi) \mathbf{v}_0) \right) + \text{div}_\alpha \left( i\rho_0 \frac{\omega}{c_0} \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \phi \right) \\ & + \rho_0 \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi + i\rho_0 \frac{\omega}{c_0} \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \cdot \nabla_\alpha\phi = f && \text{dans } \Omega_L, \\ & \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 && \text{sur } \partial\Omega_L \cap \Gamma_\infty, \\ & \phi = 0 && \text{sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma_\infty. \end{aligned} \quad (6.12)$$

La solution du problème (6.12) est recherchée dans l'espace fonctionnel

$$W = \left\{ \phi \in H^1(\Omega_L); \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_L \setminus \Gamma_\infty \right\}.$$

Ce problème s'écrit sous la forme variationnelle suivante

$$\text{Trouver } \phi \in W \text{ tel que } \forall \varphi \in W, \quad a(\phi, \varphi) = \ell(\varphi), \quad (6.13)$$

où la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est définie par

$$a(\phi, \varphi) = b(\phi, \varphi) + c(\phi, \varphi),$$

avec

$$\begin{aligned} b(\phi, \varphi) &= \int_{\Omega_L} \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} \left( \nabla_\alpha\phi \cdot \nabla_\alpha\bar{\varphi} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi \bar{\varphi} - \frac{1}{c_0^2} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha\phi) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_\alpha\bar{\varphi}) \right), \\ c(\phi, \varphi) &= - \int_{\Omega_L} \frac{2}{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi \bar{\varphi} + i \frac{\omega}{c_0} \frac{\rho_0}{\alpha_1 \alpha_2} \left( \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \cdot \nabla_\alpha\phi \bar{\varphi} - \phi \frac{\mathbf{v}_0}{c_0} \cdot \nabla_\alpha\bar{\varphi} \right), \\ \ell(\varphi) &= \int_{\Omega_L} f \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Si l'écoulement est subsonique, on peut montrer que  $b(\phi, \varphi)$  est coercive et que la forme  $c(\phi, \varphi)$  est compacte. Autrement dit, l'opérateur associé à  $a(\cdot, \cdot)$  admet une décomposition en une partie coercive et une partie compacte. Le problème (6.12) est donc de type Fredholm. Sa solution peut donc être approchée par une méthode d'éléments finis de Lagrange. Celle-ci a été implémentée et nous donne accès à  $\mathbf{v}$  par  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  mais pas à  $\mathbf{u}$  et  $\psi$ .

### 6.2.3 Comparaisons avec la formulation de Galbrun

Nous pouvons à partir des solutions du système de Galbrun obtenir les quantités eulériennes. D'après les relations données au chapitre 4, la vitesse et la pression acoustique s'expriment en fonction de  $\mathbf{u}$  par

$$p = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p_0, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}_0. \quad (6.15)$$

De même pour l'approche potentielle, en prenant le gradient du potentiel solution de (6.12), nous pouvons calculer la vitesse acoustique eulérienne associée. Une comparaison sera alors possible à condition que les paramètres de simulation choisis soient équivalents d'un modèle à l'autre. Le choix de la source mérite une attention particulière. D'après la relation (6.15), nous pouvons, si l'écoulement est parallèle uniforme  $\mathbf{v}_0(x_1, x_2) = v_0 \mathbf{e}_1$ , construire des sources équivalentes en prenant le second membre de l'équation potentielle de la forme :

$$f_{pot}(x_1, x_2) = -i\omega g(x_1, x_2) + v_0 \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2), \quad (6.16)$$

et celui de l'équation de Galbrun sous la forme :

$$\mathbf{f}_{gal}(x_1, x_2) = \nabla g(x_1, x_2), \quad (6.17)$$

où  $g$  est une fonction scalaire à support compact. Avec des écoulements plus complexes, il est plus compliqué d'établir une relation d'équivalence entre les sources du modèle de Galbrun et du modèle potentiel. Afin de rendre possible les comparaisons entre ces deux modèles, nous nous assurerons de placer le support de la source dans des zones où l'écoulement est uniforme.

Nous simulons le rayonnement acoustique dans le cas 1 qui concerne l'écoulement potentiel au dessus de la surface rigide. Nous prenons les mêmes paramètres que ceux utilisés dans le même cas au chapitre 5. Ceux-ci reviennent à prendre la fonction  $g_1$  définie par (6.5) dans les expressions des sources (6.16) et (6.17) avec  $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (-1, 1)$ ,  $r_s = 0.2$ . Les paramètres de l'écoulement et du domaine de calcul définis au paragraphe 6.1.1 sont tels que  $v_\infty = 0.45$ ,  $R_0 = 0.5$ ,  $R = 3$ ,  $H = 4$ ,  $L = 2$  et le paramètre qui caractérise les PML est  $\alpha = 0.65 - 0.65i$ .

Les solutions du système de Galbrun ont été données au chapitre précédent par les figures 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 et 5.9. Nous avons alors vérifié que les PML sont efficaces puisque la solution est bien nulle aux extrémités de celles-ci et la solution n'est pas polluée par des réflexions parasites. Nous nous étions assurés que les solutions ont bien convergé car elles restent stables si on change le pas de maillage et les paramètres des couches PML. De plus, afin de contrôler que la méthode a convergé vers la bonne solution, c'est-à-dire celle qui satisfait le problème de Galbrun, nous avons calculé les valeurs de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\operatorname{rot} \mathbf{u} - \psi|^2$  et nous les avons tracées sur la figure 6.6. Cette image a été obtenue en saturant la borne supérieure de l'échelle des couleurs : nous l'avons volontairement choisie inférieure à la valeur maximale de  $\tilde{\epsilon}$ . Ainsi nous pouvons mieux cartographier les écarts commis entre  $\operatorname{rot} \mathbf{u}$  et  $\psi$ . Dans la majeure partie du domaine,  $\tilde{\epsilon}$  est de l'ordre de  $1 \times 10^{-10}$ , ce qui confirme la validité de la solution obtenue. A proximité du bord rigide et à l'aval de la bosse, les valeurs de  $\tilde{\epsilon}$  sont moins favorables. Il faudrait raffiner le pas de maillage dans cette zone afin d'améliorer les valeurs de l'indicateur. Nous avons effectivement vu sur la figure 5.7 que, dans cette zone, l'inconnue  $\psi$  est transportée par l'écoulement avec une période spatiale très courte. Un pas de maillage plus fin que celui utilisé est nécessaire pour pouvoir la restituer avec moins d'erreur.

Maintenant, nous calculons la vitesse eulérienne d'une part à partir de  $\mathbf{u}$  et d'autre part à partir de  $\phi$  la solution de l'équation potentielle. La comparaison des vitesses ainsi obtenues de la figure 6.7 montre que le modèle de Galbrun et le modèle potentiel restituent deux solutions semblables. De plus, la représentation de la solution calculée le long de la droite horizontale

passant par le centre de la source sur la figure 6.8 montre un bon accord entre les deux courbes. Nous voyons seulement une petite erreur d'amplitude et un léger décalage de phase à l'aval de la source entre le modèle de Galbrun et le code potentiel visible principalement sur la composante verticale de  $\mathbf{v}$ .

Ensuite, nous déterminons l'écart relatif en norme  $L^2(\Omega_R)$  entre  $\mathbf{v}_{gal}$  et  $\mathbf{v}_{pot}$  les vitesses issues respectivement du code de Galbrun et du code potentiel

$$\delta = 2 \frac{\|\mathbf{v}_{gal} - \mathbf{v}_{pot}\|_{0,\Omega_R}}{\|\mathbf{v}_{gal} + \mathbf{v}_{pot}\|_{0,\Omega_R}}. \quad (6.18)$$

Le calcul fournit un écart  $\delta \approx 0.0782$ , soit une erreur de moins de 10%. Sur la figure 6.7, nous constatons effectivement de légères différences entre les deux solutions dans la zone proche du bord rigide, ce qui peut s'expliquer par un traitement différent de la condition à la limite d'une méthode à l'autre. Une autre raison possible de ces écarts est liée aux termes sources  $\mathbf{f}_{gal}$  et  $f_{pot}$  qui ne sont peut-être pas dans une zone où l'écoulement est complètement uniforme. Rigoureusement, les relations (6.16) et (6.17) ne sont valables qu'en écoulement uniforme.

Finalement, ce test montre que notre approche est capable de retrouver correctement la solution du problème de propagation dans la configuration d'un écoulement potentiel avec source acoustique.

## 6.3 Validations en écoulement rotationnel

Nous voulons maintenant tester notre méthode dans des configurations rotationnelles, c'est-à-dire dans des configurations où l'acoustique est couplée avec des effets tourbillonnaires. Le premier objectif de ce paragraphe est de valider notre approche dans de telles situations. Nous voyons deux façons d'introduire de la rotationnalité dans le système, soit en choisissant une source à rotationnel non nul, soit en considérant un écoulement non potentiel. Dans le premier cas, les tourbillons sont directement introduits pas la source. Par contre lorsque l'écoulement est rotationnel, un couplage complexe a lieu entre la propagation acoustique et les effets hydrodynamiques, comme nous l'avons déjà vu auparavant. Nous n'avons pas à notre disposition d'autres méthodes capables de traiter ce type de situation et sur lesquelles nous pourrions nous appuyer pour valider notre approche. Néanmoins, l'indicateur *a posteriori* permet de contrôler la validité des résultats. De plus, la mesure des longueurs d'ondes acoustiques et hydrodynamiques et leurs comparaisons avec les valeurs théoriques donnent de l'information sur la cohérence des solutions numériques.

### 6.3.1 Source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel

Nous considérons l'écoulement potentiel du cas 1. Le but de ce paragraphe est d'une part de valider notre approche dans le cas d'une source tourbillonnaire, et d'autre part d'observer l'impact d'une telle source sur la solution obtenue. Pour cela, nous simulons, le rayonnement de la source  $\mathbf{f}_{rot}$  qui, contrairement aux tests précédents, n'est pas purement acoustique. Son expression est donnée par la formule (6.4) où nous avons pris  $g(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$  avec  $g_2$  définie par (6.6). Elle vérifie donc  $\text{rot } \mathbf{f}_{rot} \neq 0$ . L'écoulement associé au cas test 1 étant potentiel, le choix de cette source tourbillonnaire permet d'introduire de la vorticité dans le système.

Les résultats présentés sur les figures 6.9, 6.10, 6.11 et 6.12 sont obtenus pour une pulsation  $\omega = 3$ . Le domaine de calcul et les paramètres de l'écoulement sont pris identiques à ceux choisis au paragraphe 6.2.3 sauf la valeur de la vitesse à l'infini qui vaut maintenant  $v_\infty = 0,4$ . La source est centrée en  $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (-1, 1)$  et son rayon vaut  $r_s = 0.3$ . Les paramètres  $s_1$  et  $s_2$  valent  $s_1 = 10$  et  $s_2 = 0.1$ . Ce choix de paramètres rend possible la visualisation simultanée du signal acoustique et du signal tourbillonnaire.

Tout d'abord, nous avons validé le résultat numérique fourni par notre méthode. Nous avons vérifié que la solution est bien nulle à l'extrémité des couches PML et que celles-ci ne renvoient pas

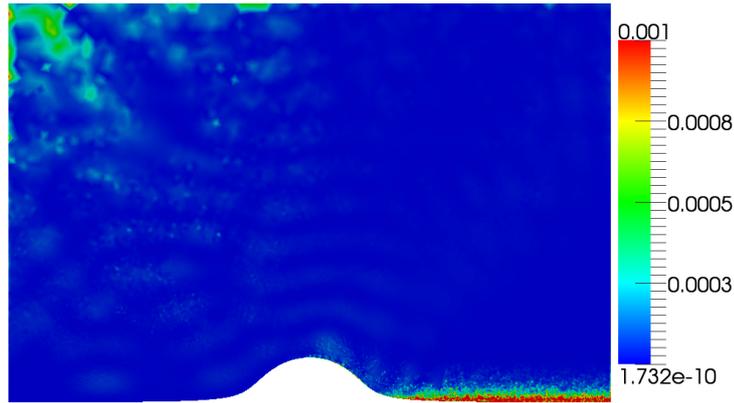


FIG. 6.6: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement potentiel (cas 1) : valeurs de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{e} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  (où la borne supérieure de l'échelle des couleurs est saturée : on a  $1.7 \times 10^{-10} \leq \tilde{e} \leq 8.3 \times 10^{-2}$ ).

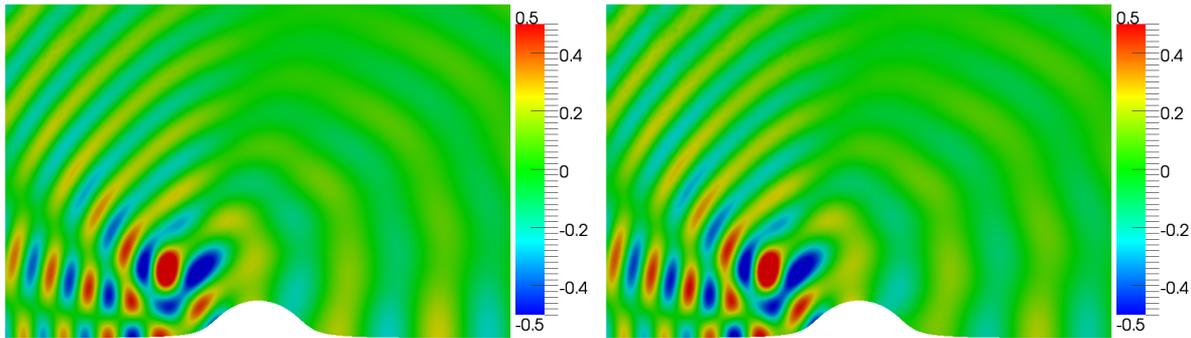


FIG. 6.7: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement potentiel (cas 1) : isovaleurs de  $\Re v_1$  à partir du modèle de Galbrun (gauche) et du modèle potentiel (droite).

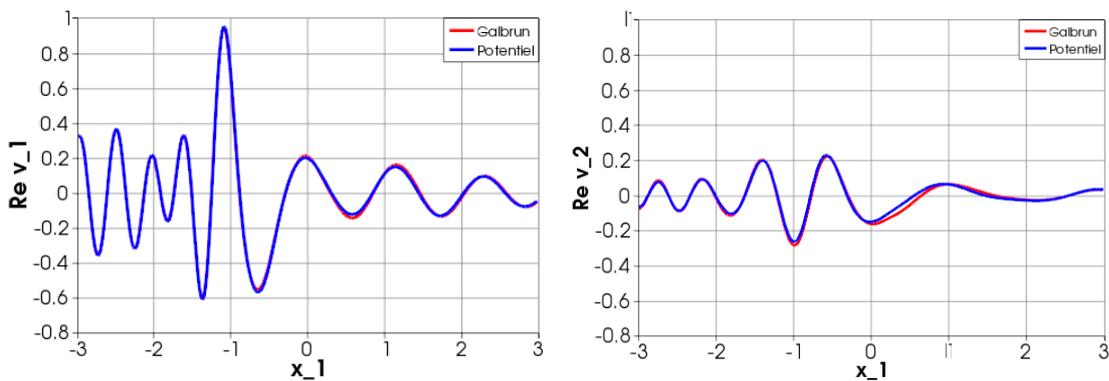


FIG. 6.8: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement potentiel (cas 1) : comparaison des valeurs de  $\Re v_1$  et  $\Re v_2$  obtenues par la méthode de Galbrun augmentée et par le code potentiel le long de la droite horizontale passant par le centre de la source ( $x_2 = x_{2,s}$ ).

de signal parasite dans le domaine physique. Nous avons aussi vérifié que la solution reste stable si on diminue le pas de maillage et si on change les paramètres des PML. Enfin,  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  l'indicateur *a posteriori*, que nous avons représenté sur la figure 6.9, prend globalement des valeurs proches du zéro machine ce qui montre que nous avons bien obtenu la solution du problème de Galbrun initial. Nous remarquons que les écarts entre  $\text{rot } \mathbf{u}$  et  $\psi$  se creusent dans le sillage de la source. Dans cette zone, la longueur d'onde n'est pas beaucoup plus petite que celle des modes acoustiques et ne nécessite pas *a priori* de raffiner la maillage (contrairement au cas du paragraphe précédent où  $\psi$  oscillait beaucoup). Cependant l'amplitude du sillage qui arrive dans la couche PML aval est élevée par rapport à l'onde acoustique (les échelles de couleurs de la figure 6.10 ont été saturées). Le maillage dans les PML doit être très fin pour pouvoir absorber proprement ce signal sur la courte épaisseur de la PML. Il faudrait donc pour cette raison diminuer le pas de maillage dans le sillage de la source et dans la PML à l'aval. Ces observations nous permettent néanmoins de valider notre approche dans le cas d'une source tourbillonnaire.

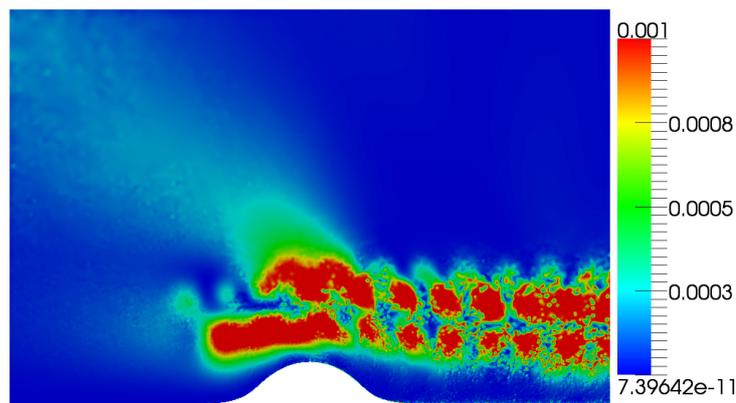


FIG. 6.9: Rayonnement d'une source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel : valeurs de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  (où la borne supérieure de l'échelle des couleurs est saturée : on a  $7.4 \times 10^{-11} \leq \tilde{\epsilon} \leq 0.11$ ).

Maintenant, observons le comportement de la solution calculée. La figure 6.10 représente les composantes horizontales et verticales de  $\mathbf{u}$ . Nous remarquons d'une part l'onde acoustique amont qui se propage vers la gauche. Les axes gradués permettent de vérifier que, loin de  $\Gamma_\infty$  dans la zone où l'écoulement est pratiquement uniforme, la longueur d'onde mesure 1.25 unités et vérifie bien les relations (6.8) et (6.9). Le mode aval n'est pas visible sur la figure car sa longueur d'onde mesure environ la moitié de la taille du domaine (et son amplitude est peut-être négligeable par rapport à celle des autres modes).

D'autre part, nous voyons un signal qui part de la source et qui est transporté vers l'aval par l'écoulement. Il s'agit d'un sillage hydrodynamique induit par la source. En effet, nous constatons sur l'image que la longueur d'onde de cette partie du signal est approximativement égale à 0.8, ce qui correspond à la longueur théorique de l'onde de vorticit e donn ee ponctuellement par

$$\lambda_{vort} = \frac{2\pi|\mathbf{v}_0|}{\omega}. \quad (6.19)$$

De plus, la vitesse eul erienne d ecrit un ph enom ene semblable avec cependant une amplitude du mode hydrodynamique un peu plus faible. L'image de gauche de la figure 6.11 montre clairement la convection des tourbillons introduits par la source. L'image de droite prouve que nous sommes bien en pr esence de ph enom enes de vorticit e puisque dans le sillage des tourbillons le rotationnel de  $\mathbf{v}$  est non nul.

Enfin, nous pouvons montrer que le code potentiel ne permet pas de prendre en compte cette contribution rotationnelle. Nous calculons la vitesse eul erienne par cette m ethode en prenant

comme second membre la partie acoustique de la source, c'est-à-dire

$$f_{pot}(x_1, x_2) = -i\omega g_2(x_1, x_2) + v_0 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x_1, x_2),$$

où  $g_2$  est la fonction définie par (6.6). La vitesse obtenue par le code potentiel est représentée par la première image de la figure 6.12. Elle contient uniquement le mode acoustique. La comparaison avec la vitesse issue du modèle de Galbrun (figure 6.11) montre que même la forme de l'onde acoustique est légèrement différente dans la zone où se trouve le support de la source. De plus, l'amplitude du front d'onde amont (celui qui se propage vers la gauche) est un peu plus faible.

La deuxième image représente la différence entre les composantes horizontales de la vitesse calculée à l'aide du modèle de Galbrun et du modèle potentiel. Cette différence est presque nulle sauf dans la zone du sillage tourbillonnaire de la source où nous retrouvons la convection du mode hydrodynamique propre à la solution de Galbrun. L'apport du modèle de Galbrun réside donc dans ce mode de vorticité que le modèle potentiel ne peut pas prendre en compte.

Ce résultat numérique nous a donc permis de valider l'approche de Galbrun dans le cas d'une source tourbillonnaire. Il propose également une illustration des phénomènes hydrodynamiques qui consistent en la convection de modes hydrodynamiques.

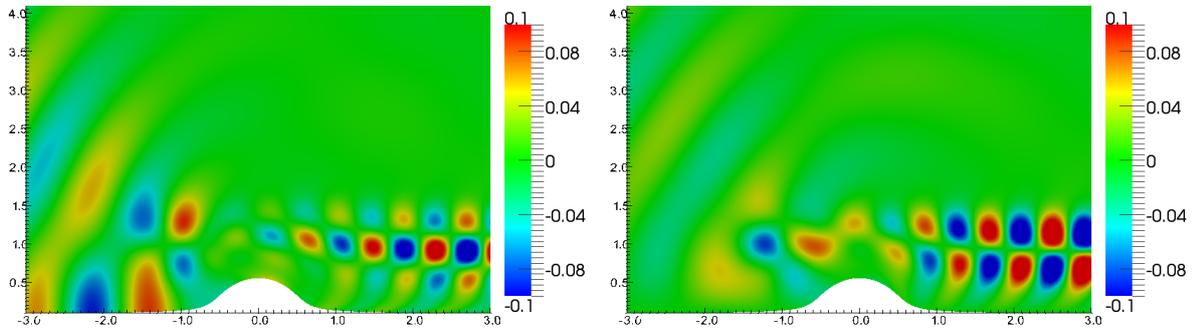


FIG. 6.10: Rayonnement d'une source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel : isovaleurs des champs  $\Re u_1$  et  $\Re u_2$  obtenus par le modèle de Galbrun.

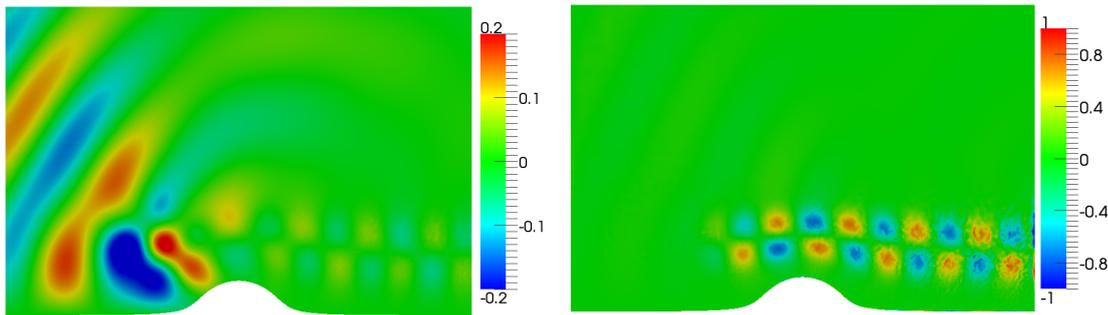


FIG. 6.11: Rayonnement d'une source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel : isovaleurs de  $\Re v_2$  (  gauche) et  $\Re \text{rot } \mathbf{v}$  (  droite) obtenus à partir du modèle de Galbrun.

### 6.3.2 Rayonnement en écoulement rotationnel

Une deuxième façon d'introduire de la vorticité consiste à prendre en compte un écoulement dont la vitesse est à rotationnel non nul. Le cas du jet analytique qui a déjà été introduit au

paragraphe 5.1.2 reste une configuration simple, en effet la densité  $\rho_0$  ainsi que la célérité sont prises constantes et le terme  $\mathcal{C}\mathbf{u}$  de l'équation hydrodynamique s'annule. Ce test permet cependant d'aborder la difficulté supplémentaire de la non potentialité de l'écoulement.

Nous avons déjà validé notre approche avec ce cas d'écoulement au chapitre précédent. Les résultats obtenus dans ce cas et donnés par les figures 5.11, 5.12 et 5.13 concernent le rayonnement d'une source acoustique dans l'écoulement de jet de la figure 6.13. Ce profil est donné par (6.1) avec  $v_\infty = A_0 = 0.3$  et  $r_0 = 0.4$ . La source d'expression (6.3) est construite à l'aide de la fonction (6.6) avec  $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (0, 0.5)$  et  $r_s = 0.3$ . Le domaine physique est rectangulaire  $\Omega_R = [-4.5; 4.5] \times [-3; 3]$  et entouré de couches PML de largeur  $L = 1.5$  et  $\alpha = 0.65 - i0.65$ . La pulsation vaut  $\omega = 9$ .

Bien que cette simulation ait été réalisée en écoulement rotationnel, nous n'observons pas la convection de modes hydrodynamiques. Seuls les modes acoustiques amont et aval sont visibles sur la figure 5.11. Pourquoi ne voit-on pas de modes hydrodynamiques alors que l'écoulement considéré est non potentiel ?

Nous réalisons maintenant deux nouvelles simulations en changeant seulement la valeur de la pulsation. Nous prenons  $\omega = 4$  puis  $\omega = 2$ . La partie réelle de la première composante du déplacement obtenue dans chacun des cas est dessinée sur la figure 6.14. Comme précédemment, nous vérifions la validité des solutions grâce à  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  l'indicateur *a posteriori* et grâce à la mesure de la longueur d'onde acoustique dans les zones où l'écoulement est uniforme. Nous vérifions aussi que les PML fonctionnent correctement.

Pour  $\omega = 4$ , nous remarquons la propagation du mode acoustique amont. Le mode aval, d'amplitude trop faible, n'est pas visible sur l'image. Mais aussi, nous voyons, dans la zone du jet et à l'aval de la source, un signal formant des stries obliques et dont la longueur d'onde est plus courte que l'onde acoustique. Il s'agit de modes hydrodynamiques qui sont convectés par l'écoulement de manière semblable à ceux observés au paragraphe 6.3.1.

Pour  $\omega = 2$ , l'amplitude de l'onde acoustique est plus faible alors que celle du mode hydrodynamique est plus grande que pour  $\omega = 4$ . En outre, la longueur du mode hydrodynamique est aussi plus longue. En traçant la solution selon une droite horizontale passant dans la zone du jet, nous pouvons mesurer la période spatiale de ces modes comme cela a été fait au paragraphe 6.2.1. Cette mesure, réalisée pour  $\omega = 4$  et  $\omega = 2$ , fournit des valeurs proches de celles prévues par la formule théorique (6.19). Cette observation confirme que les stries correspondent bien aux modes hydrodynamiques et ne sont pas dûs à un artefact numérique.

La comparaison entre  $\omega = 4$  et  $\omega = 2$  montre de plus que l'amplitude des modes hydrodynamiques est inversement proportionnelle à la pulsation. Donc, dans le cas où  $\omega = 9$ , l'amplitude de ces modes est encore plus faible que pour  $\omega = 4$ . De même, d'après la relation (6.19) leur longueur est encore plus courte que pour  $\omega = 4$ . Nous voyons maintenant deux raisons pour lesquelles les modes de vorticit e ne sont pas visibles quand  $\omega = 9$ . D'une part, le pas de maillage n'est peut-être pas suffisamment fin pour les restituer. D'autre part, leur amplitude est peut-être négligeable face à celle des modes acoustiques.

## 6.4 Rayonnement en écoulement rotationnel : pourrait-on se contenter d'un calcul potentiel ?

La résolution du système de Galbrun est coûteuse comparée à celle du modèle potentiel. Face à ce constat, on peut être tenté de réaliser les simulations en écoulement rotationnel avec un code potentiel même si ce calcul est fondamentalement faux puisque les hypothèses vérifiées par ce modèle ne tiennent pas compte de la rotationnalité de l'écoulement. Les expériences montrent que dans les cas peu rotationnels, un code potentiel peut donner une bonne approximation de la propagation acoustique. Par contre, quand la rotationnalité est prépondérante, un tel code ne suffit pas. Pour illustrer cela, nous réalisons une simulation dans le cas du jet analytique avec une source acoustique.

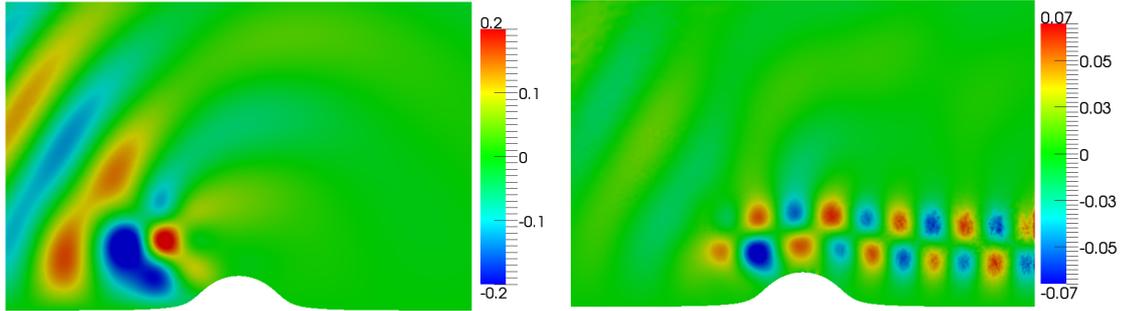


FIG. 6.12: Rayonnement d'une source tourbillonnaire dans un écoulement potentiel. A gauche : isovaleurs de  $\Re v_2$  obtenues à partir du code potentiel avec la source  $f_{pot}$ . A droite : différence entre les parties réelles des composantes verticales des vitesses eulériennes obtenues avec le modèle de Galbrun et le code potentiel.

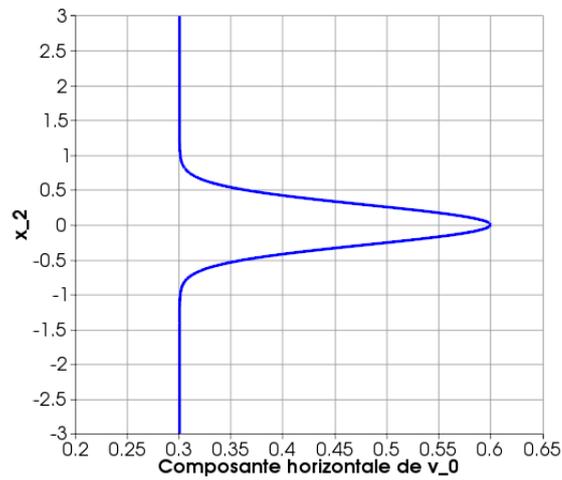


FIG. 6.13: Écoulement rotationnel (cas 2) : profil de la vitesse du jet  $v_1(x_2)$ .

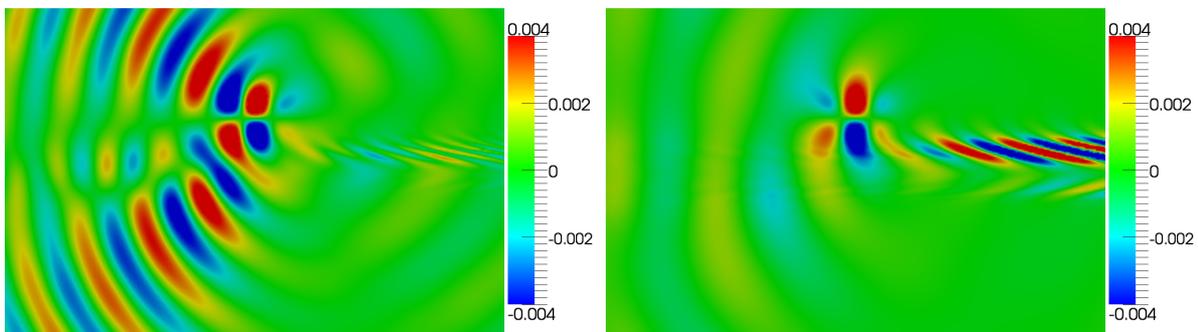


FIG. 6.14:  $\Re u_1$  pour le rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet (cas 2) : apparition du mode hydrodynamique dans la zone du jet pour  $\omega = 4$  (à gauche) et  $\omega = 2$  (à droite).

Pour cette simulation, nous avons pris le profil de vitesse (6.1) avec  $v_\infty = 0$ ,  $A_0 = 0.3$  et  $r_0 = 0.5$ . La source acoustique est construite selon l'expression (6.3) à l'aide de la fonction  $g_3$  qui est définie par (6.7) avec  $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (-0.5, 1)$  et  $r_s = 0.5$ . Pour la pulsation, nous avons pris  $\omega = 12$ .

La figure 6.15 propose une comparaison entre la vitesse issue du modèle de Galbrun et celle obtenue par notre code potentiel. Les modes hydrodynamiques ne sont pas visibles sur l'image obtenue par le modèle de Galbrun car la valeur de la pulsation est élevée (voir paragraphe précédent) et parce que c'est la vitesse qui est représentée ici et non le déplacement (nous avons effectivement vu au paragraphe 6.3.1 que les modes de vorticité sont moins marqués sur  $\mathbf{v}$  que sur  $\mathbf{u}$ ). Pourtant, nous observons des différences dans la forme du front d'onde qui est réfléchi sur la droite du domaine. Ceci prouve que les phénomènes hydrodynamiques induits par le jet provoquent une modification de la directivité de l'onde. Il est possible de restituer ce comportement avec le modèle de Galbrun augmenté mais pas avec le code potentiel.

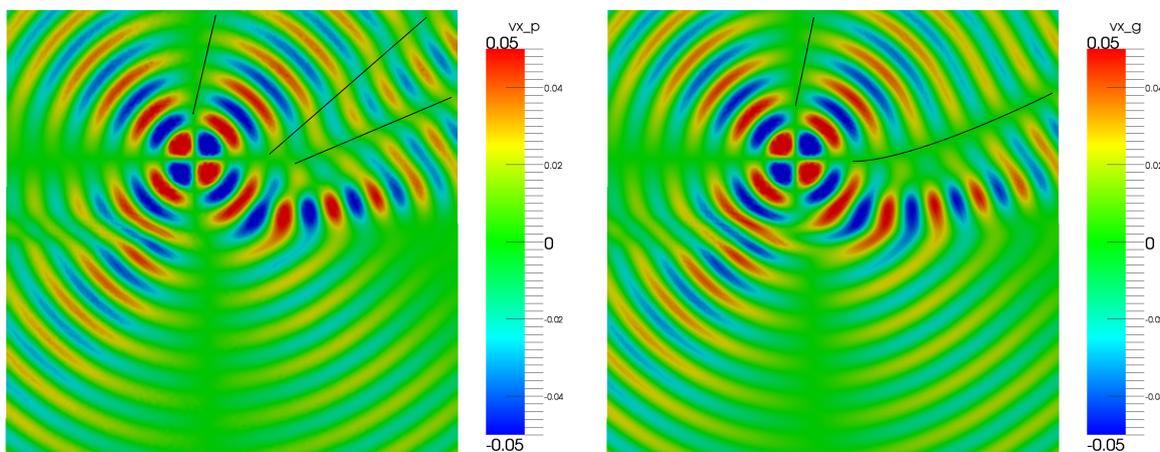


FIG. 6.15: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet (cas 2) : vitesses obtenues par le modèle potentiel (  gauche) et le modèle de Galbrun augmenté (  droite).

## 6.5 Extension à des configurations plus complexes

Les cas traités jusqu'à présent concernent soit un écoulement potentiel soit un jet sans obstacle. En particulier, nous n'avons pas traité d'écoulement ayant de forts gradients de vitesse. Or, il est connu que de tels écoulements peuvent induire des instabilités (physiques). Il n'est pas clair que le modèle avec couches PML soit capable de gérer cette situation.

Par ailleurs, pour pouvoir traiter des configurations acoustiques plus concrètes, nous sommes intéressés aux écoulements rotationnels avec obstacle. En pratique pour obtenir des écoulements rotationnels, il faut prendre en compte la viscosité du fluide et utiliser un code résolvant les équations de Navier-Stokes. Le maillage considéré pour déterminer l'écoulement pouvant être diff rent de celui pris pour étudier la propagation acoustique, nous avons été amenés à développer des outils d'interpolation de maillages.

En outre, le traitement d'obstacle soulève aussi la problématique des points d'arrêt et des écoulements recirculants. Il s'agit d'écoulements non  $\Omega$ -remplissants que nous avons présentés dans la partie I. L'analyse du système de Galbrun menée au chapitre 5 ne tient pas compte de ce type de configurations qui pourtant sont classiques dès que l'on souhaite traiter des cas non académiques. Ce paragraphe propose des tests numériques qui illustrent ces différentes problématiques et explore des éléments de réponses basés sur l'observation des résultats numériques. Les preuves théoriques restent à faire. Nous traitons d'abord les écoulements instables, ensuite nous proposons un exemple d'écoulement qui est déterminé au préalable de façon numérique,

puis nous abordons les écoulements non  $\Omega$ -remplissants. Enfin, nous examinons les voies possibles pour l'extension à des configurations en trois dimensions.

### 6.5.1 Validité dans le cas d'instabilités

Les écoulements cisailés dont le profil de vitesse présente un ou des points d'inflexion sont des écoulements instables au sens où la solution du problème linéarisé peut devenir exponentiellement croissante vers l'aval de l'écoulement. Cette situation est fréquente, on la rencontre par exemple dans des cas de jets ou de couches de mélange. Ensuite, comme la solution est exponentiellement croissante, le signal qui arrive dans les couches PML est d'amplitude élevée. Notre question est alors la suivante : les couches PML permettent-elles dans ce cas de calculer correctement la solution ? Nous nous attendons à ce que ce soit plus difficile car la couche PML aval doit faire décroître une solution exponentiellement croissante. Nous savons par ailleurs qu'en régime harmonique, l'usage des couches PML peut conduire dans certains cas au calcul d'une solution qui n'est pas physique (solution non sortante). Afin de donner des éléments de réponse, nous nous appuyons sur deux cas tests numériques : le premier concerne un écoulement de jet en domaine infini, le deuxième consiste en un écoulement cisailé dans un guide.

Tout d'abord, nous réalisons la simulation du rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet (cas 2). Afin de montrer que l'approche de Galbrun augmentée avec couches PML permet de restituer les modes exponentiellement croissants, nous choisissons un profil de vitesse ayant de forts gradients. Le profil utilisé pour la simulation est représenté sur la figure 6.16. Remarquons que la courbe de  $v_1(x_2)$  dans ce cas est beaucoup plus raide que celle prise pour les simulations précédentes, figure 6.13. Les valeurs de  $\mathbf{u}$  obtenues sont représentées sur les figures 6.17 et 6.18. Selon notre procédé de validation en écoulement rotationnel, nous avons vérifié que la solution est inchangée lorsqu'on raffine le maillage et lorsqu'on change les paramètres des PML. Nous vérifions de plus que le signal est nul aux extrémités des couches PML comme le montrent les figures 6.17 et 6.18. Sur la figure 6.19, les valeurs faibles (voisines du zéro machine), de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  prouvent en outre que la solution numérique obtenue est bien la solution du problème de Galbrun. Dans la région du jet, à l'aval de la source, les valeurs de l'indicateur sont plus mauvaises. Les images 6.17 et 6.18 montrent en effet qu'à cet endroit,  $\mathbf{u}$  oscille avec une période spatiale très courte. L'indicateur nous montre qu'il faudrait raffiner le maillage dans cette zone afin d'améliorer la précision de la solution obtenue. Enfin, la mesure des longueurs d'onde (dont nous ne donnons pas de détail ici car la démarche a déjà été présentée plus haut dans ce chapitre) fournit des valeurs en accords avec les longueurs d'onde théoriques des relations (6.8), (6.9) et (6.19). Ces critères permettent d'affirmer que la solution calculée est cohérente.

Maintenant, regardons le comportement de la solution obtenue. Nous observons d'une part les fronts d'ondes acoustiques amont et aval. D'autre part, il y a dans la zone du jet, des stries correspondant à l'expression des modes hydrodynamiques. La représentation de la solution le long de la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  de la figure 6.17 montre que l'enveloppe du signal de  $\Re u_1$  croît lorsqu'il se propage vers l'aval. Bien qu'elle semble linéaire, cette croissance suit bien une progression exponentielle qui en est à son démarrage (et qui est éventuellement ralentie par le maillage). De même sur la figure 6.18, l'enveloppe du signal de  $\Re u_2$  croît spatialement vers l'aval, avec une croissance qui s'estompe un peu pour  $x_1 > 4$ . Nous ne connaissons pas le spectre associé à ce problème et nous ne savons pas non plus quels sont les modes qui sont excités par la source choisie. Nous savons seulement que la solution obtenue est une combinaison linéaire des modes du problème. Il est possible que la croissance observée sur les courbes des figures 6.17 et 6.18 soit due à l'excitation d'un mode instable. S'il s'agit bien d'un mode instable, l'exemple du jet montre que l'approche de Galbrun avec PML sait le traiter correctement. Pour confirmer l'existence de modes instables, il faudrait déterminer le spectre du problème.

Afin d'avoir de l'information sur les modes du problème, nous proposons de traiter l'exemple d'un écoulement en conduit. Dans ce cas, il est possible de déterminer le spectre du problème et

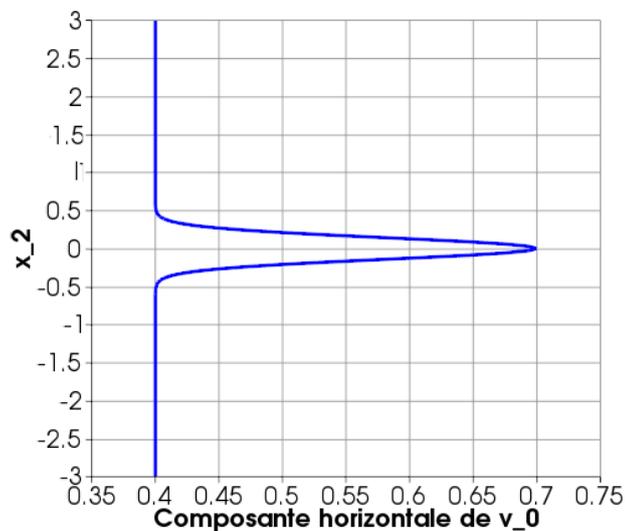


FIG. 6.16: Écoulement de jet analytique instable : profil de la composante horizontale de la vitesse  $v_1(x_2)$ .

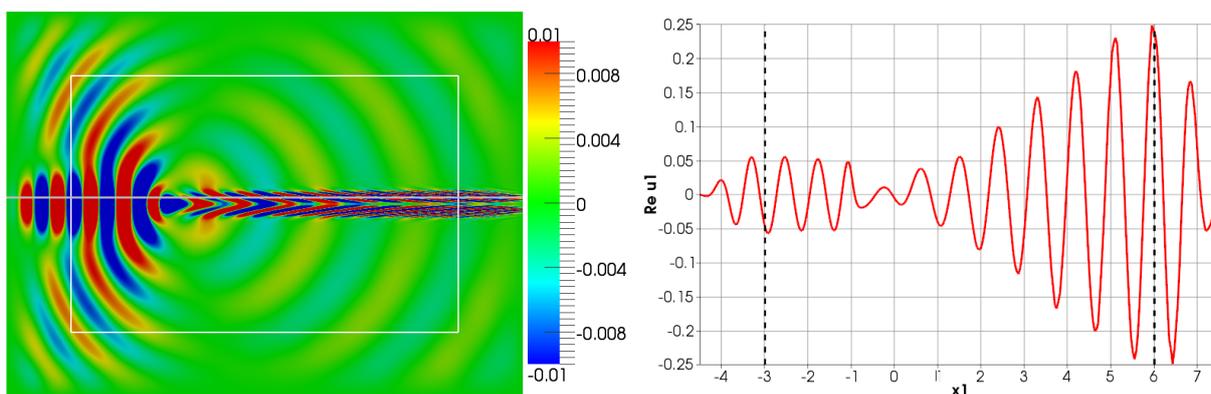


FIG. 6.17: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet analytique instable. A gauche : isovaleurs de  $\Re u_1$  calculées dans le domaine avec couches PML délimitées par le rectangle blanc. A droite : valeurs de  $\Re u_1$  (courbe rouge) obtenues le long de la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  et représentée en gris sur l'image de gauche. Les droites en pointillés d'équation  $x_1 = -3$  et  $x_1 = 6$  délimitent la zone PML.

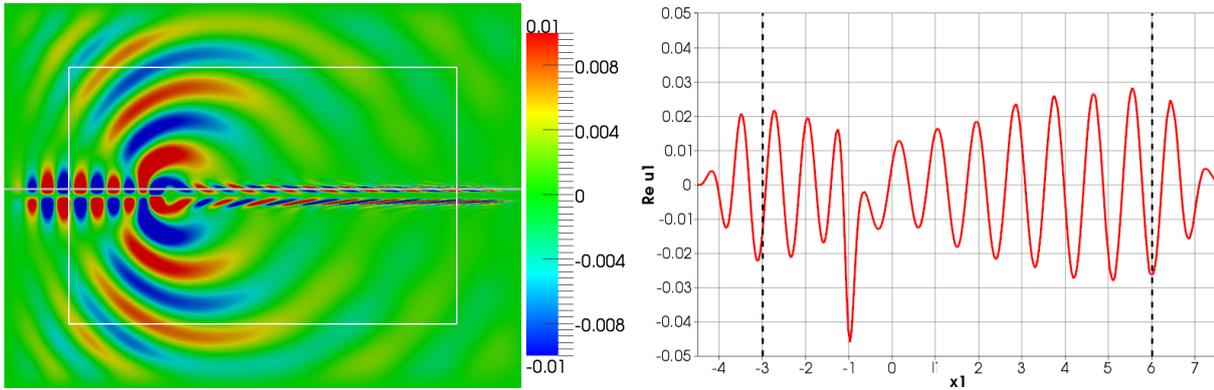


FIG. 6.18: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet analytique instable. A gauche : isovaleurs de  $\Re u_2$  calculées dans le domaine avec couches PML délimitées par le rectangle blanc. A droite : valeurs de  $\Re u_2$  (courbe rouge) obtenues le long de la droite d'équation  $x_2 = \text{constante}$  et représentée en gris sur l'image de gauche. Les droites en pointillés d'équation  $x_1 = -3$  et  $x_1 = 6$  délimitent la zone PML.

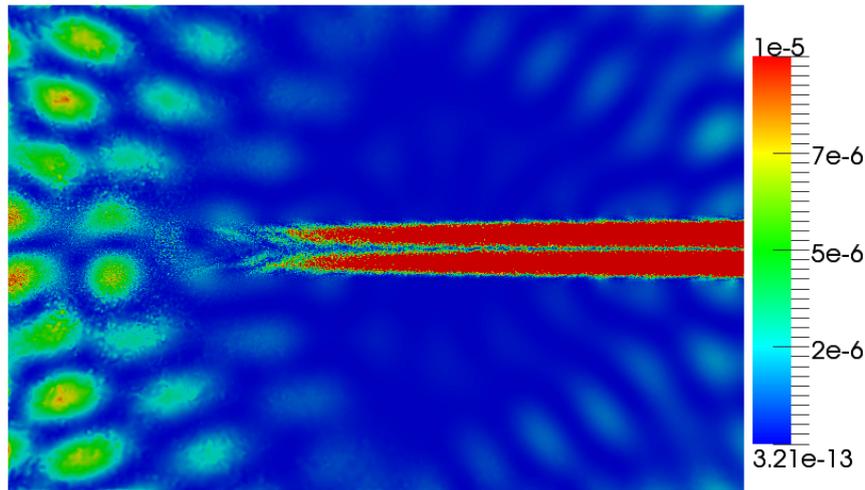


FIG. 6.19: Rayonnement d'une source acoustique dans un écoulement de jet analytique instable : valeurs de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{e} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  (où l'échelle des couleurs est saturée : on a  $3.21 \times 10^{-13} \leq \tilde{e} \leq 0.98$ ).

la présence de modes instables est alors facile à mettre en évidence par analyse modale.

Nous proposons de tester la méthode de Galbrun augmentée dans un guide infini et en présence d'un écoulement instable. Nous considérons un guide infini dans lequel vit un écoulement parallèle cisailé  $\mathbf{v}_0 = v_0(x_2) \mathbf{e}_1$ . Son profil de vitesse, tracé sur la figure 6.20, s'exprime

$$v_0(x_2) = \frac{1}{2} \left( v_m + v_M + (v_M - v_m) \tanh\left(\tau \frac{x_2 - x_{2,0}}{h - x_{2,0}}\right) \right),$$

où  $h$  est la hauteur du guide,  $v_m$  et  $v_M$  sont les valeurs minimales et maximales de  $v_0(x_2)$ ,  $x_{2,0}$  est l'ordonnée du point d'inflexion et  $\tau$  est proportionnel à la pente de  $v_0$  au point d'inflexion. Les valeurs des paramètres pris pour cette simulation sont  $h = 1$ ,  $v_m = 0.1$ ,  $v_M = 0.4$ ,  $\tau = 4$  et  $x_{2,0} = 0.5$ . Comme nous allons le voir ces valeurs fournissent un écoulement instable.

Nous pouvons, de façon numérique, déterminer le spectre associé à ce problème acoustique. La méthode, présentée dans [40], consiste à déterminer les modes de pression de l'équation de Pridmore-Brown par collocation spectrale de Chebyshev. Le spectre obtenu pour  $\omega = 1$  est décrit par la figure 6.20. D'après la description modale faite dans [40], nous identifions dans ce spectre

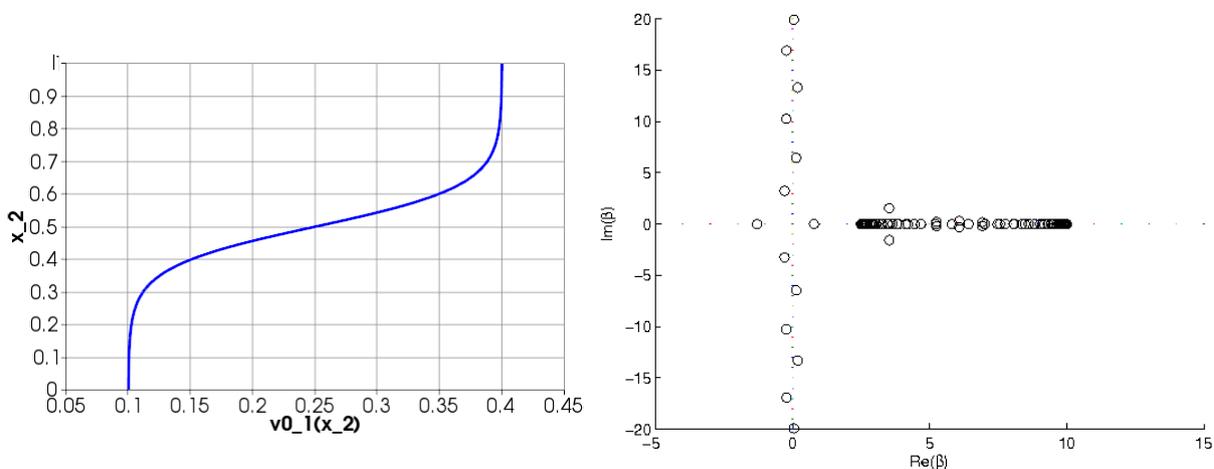


FIG. 6.20: Écoulement instable dans un guide infini de hauteur  $h = 1$  : profil de vitesse et spectre associé pour  $\omega = 1$ .

trois types de modes différents. Sur les axes des abscisses et des ordonnées, nous reconnaissons le spectre discret correspondant aux modes acoustiques. L'ensemble de mode sur l'axe des abscisses formant un spectre continu représente les modes hydrodynamiques caractéristiques d'un écoulement variable. Enfin, nous observons deux modes  $\beta_0$  et  $\bar{\beta}_0$  conjugués l'un de l'autre qui se détachent de l'axe des réels. D'après le critère de Briggs [28], ce sont des modes avals (ils se propagent dans le sens de l'écoulement) : si on introduit de l'absorption, c'est-à-dire si on remplace la pulsation  $\omega$  par  $\omega + i\varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  assez grand, alors  $\beta_0(\omega + i\varepsilon)$  et  $\bar{\beta}_0(\omega + i\varepsilon)$  se déplacent dans le demi-plan supérieur ( $\Im \beta > 0$ ) et donc  $\beta_0$  et  $\bar{\beta}_0$  sont évanescents pour  $x_1 \rightarrow +\infty$ . Ainsi le mode dont la partie imaginaire est négative est instable car il s'agit d'un mode aval ayant une partie imaginaire négative : l'amplitude associée à ce mode croit lorsqu'il se propage vers les  $x_1$  positifs. L'écoulement choisi est donc instable.

Pour prouver que le changement de variable associé aux couches PML rend tous les modes évanescents, y compris les modes instables, la méthode classique consiste à décomposer la solution sur la base des modes guidés [63]. En écoulement uniforme, ces modes forment une base mais dans le cas général (dès l'écoulement cisailé), cet outil de décomposition sur les modes du guide ne s'applique plus. En conséquence, le test fiable permettant de savoir si les PML fonctionnent en présence d'instabilités consiste à vérifier que le signal est bien nul à l'extrémité des PML.

Remarquons que cette vérification est faite dans tous les cas, même si l'écoulement n'est pas instable.

Toutefois, notons que dans les couches PML, les modes  $\beta$  du spectre de la figure 6.20 deviennent  $\beta/\alpha$  (voir section 4.4). Nous pouvons nous assurer que, par cette transformation et avec la valeur de  $\alpha$  choisie, tous les modes se déplacent dans la demi-plan supérieur, y compris le mode instable. Ils sont donc tous évanescents dans la PML située à l'aval. Ce constat est plutôt rassurant même si l'outil de décomposition sur la base modale ne s'applique pas.

Nous réalisons plusieurs simulations avec cet écoulement dans un guide de longueur  $\ell = 2$ . Pour la source (6.3) centrée en  $(x_{1,s}, x_{2,s}) = (0.5, 0.3)$  et de rayon  $r_s = 0.05$  avec  $g = g_2$  et pour des couches PML choisies telles que  $L = 1$  et  $\alpha = 0.65 - 0.65i$  la solution obtenue est donnée par la figure 6.21. D'une part, le processus de validation en écoulement rotationnel permet de montrer que la solution a convergé, qu'elle est physiquement cohérente et que les couches PML ont absorbé la totalité du signal. De plus, les valeurs faibles de  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$ , non représentées ici, montrent que la solution calculée est bien solution du problème de Galbrun. D'autre part, la représentation des valeurs de  $\mathbf{u}$  en fonction de  $x_1$  selon une droite d'équation  $x_2 = x_{2,0}$  permet de constater que la solution est effectivement exponentiellement croissante. Le mode instable a donc été excité et notre méthode a été capable de le restituer sans problème.

Ces deux exemples montrent finalement que notre méthode est capable de restituer la solution du problème dans le cas d'un écoulement instable. La preuve de ce résultat reste à ce jour une question ouverte.

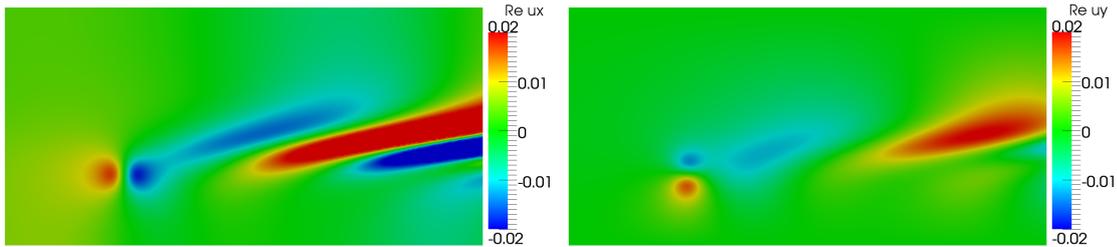


FIG. 6.21: Rayonnement acoustique dans un guide avec écoulement instable : partie réelle de  $u_1$  et  $u_2$ .

### 6.5.2 Écoulements numériques

Les écoulements associés à des configurations acoustiques réalistes en présence d'obstacle ne sont pas connus analytiquement. Nous proposons de tester notre approche dans le cas d'un écoulement déterminé numériquement. Nous considérons un corps rigide immergé dans un fluide en écoulement. L'objet rigide représenté en blanc sur les figures 6.22 et 6.23 schématise grossièrement une nacelle de turboréacteur. Les données de l'écoulement porteur sont obtenues par résolution numérique des équations de Navier-Stokes. Nous remarquons sur la deuxième image de 6.22 que les zones où l'écoulement est fortement rotationnel se limitent au sillage de la nacelle et correspondent donc à une faible portion du domaine total. Afin de rendre la comparaison possible, nous plaçons la source dans une zone où l'écoulement est uniforme pour avoir des sources équivalentes selon les relations (6.16) et (6.17). A l'aide de l'indicateur *a posteriori*  $\tilde{\epsilon} = |\text{rot } \mathbf{u} - \psi|^2$  qui n'est pas représenté ici, nous avons contrôlé la validité de la solution obtenue par notre modèle. Nous avons par ailleurs calculé la solution du problème acoustique à l'aide de la méthode potentielle. La figure 6.23, qui représente la composante horizontale des vitesses eulériennes, montre que les solutions des modèles de Galbrun et potentiel diffèrent l'une de l'autre dans des zones proches du sillage de la nacelle. Comme la rotationnalité de l'écoulement est faible partout ailleurs, l'approximation donnée par le code potentiel n'est pas trop éloignée de la solution du problème de

Galbrun. Cet exemple numérique permet d'illustrer le fait que le code développé est capable d'intégrer des données issues d'un code CFD.

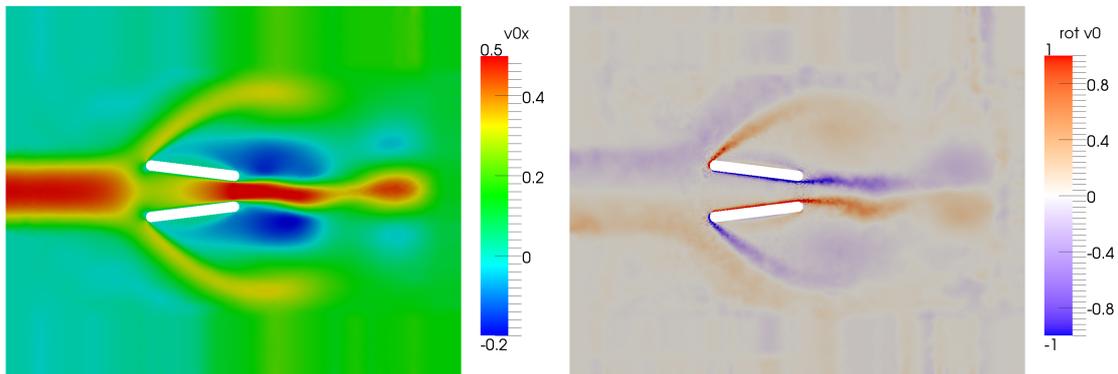


FIG. 6.22: Écoulement autour de la nacelle simplifiée : valeurs de la composante horizontale de la vitesse (à gauche) et vorticité de l'écoulement (à droite).

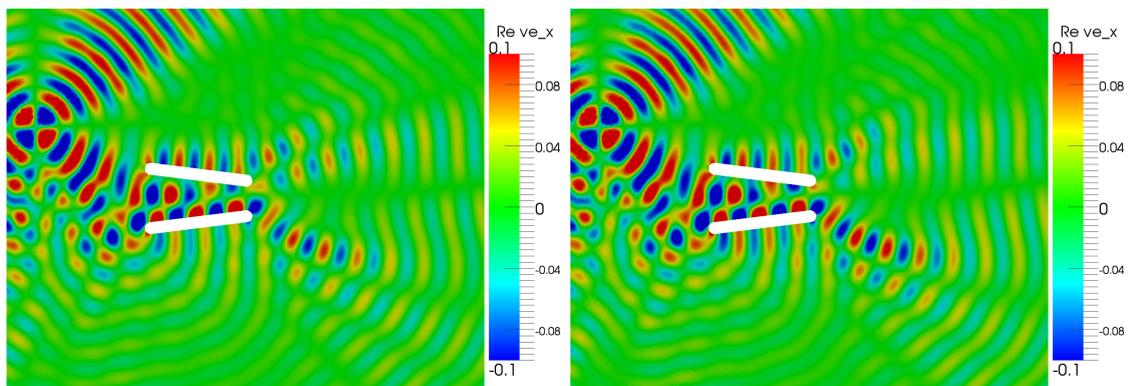


FIG. 6.23: Rayonnement acoustique dans l'écoulement autour de la nacelle simplifiée : vitesse eulérienne obtenue avec le modèle de Galbrun (à gauche) et le modèle potentiel (à droite).

### 6.5.3 Écoulements non $\Omega$ -remplissants

L'analyse du chapitre 5 n'est valable qu'en écoulement  $\Omega$ -remplissant et sous l'hypothèse (5.40) que nous jugeons plutôt restrictive. Dans la partie I, nous avons rencontré une situation similaire avec le problème de transport harmonique : les démonstrations concernent uniquement les écoulements  $\Omega$ -remplissants. Cependant, nous avons pu vérifier que la méthode peut être étendue aux cas avec zones de recirculation et points d'arrêts. Est-ce que l'analyse du problème de Galbrun couplé avec l'équation de transport peut aussi être étendue à ces configurations ? Le test de la nacelle traité précédemment constitue un exemple d'écoulement ayant des points d'arrêt et des zones de recirculations pour lequel la méthode converge et fournit un résultat cohérent. En outre, nous supposons que l'extension aux zones de recirculation proposée à la fin du chapitre 3 pour le transport s'applique aussi au problème de Galbrun. Il aurait été intéressant de simuler la propagation acoustique dans la configuration de la couronne détaillée au paragraphe 3.5.1. Il se peut que ce problème admette des fréquences de résonance comme dans le cas du problème de transport harmonique.

Pour conclure, les expérimentations numériques réalisées montrent que les extensions envisagées ne semblent pas poser de problème particulier. Bien que des preuves théoriques soient

nécessaires pour appuyer nos conclusions, notre modèle n'a pas de difficulté avec les couches PML à traiter des écoulements instables. De plus, la prise ne compte d'écoulement numérique a été mise en oeuvre et fournit des résultats cohérents. Il serait maintenant utile de s'intéresser aux problématiques liés à l'interpolation des données de l'écoulement pour le code d'acoustique. Mise à part notre interrogation sur l'existence de fréquences de résonance dans la configuration de la couronne, les écoulements recirculants semblent être bien gérés par notre modèle. De même, nous avons vu que les points d'arrêts ne présentent pas de difficulté.

#### 6.5.4 Vers des configurations 3D

Pour aller plus loin, il semble que l'étape suivante dans le déploiement de notre méthode à des cas encore plus réalistes est maintenant de l'éprouver sur des configurations en trois dimensions. Nous nous attendons à ce que les effets hydrodynamiques soient plus marqués qu'en 2D car en 3D l'inconnue hydrodynamique  $\psi$  devient vectorielle. Le couplage entre  $\mathbf{u}$  et  $\psi$  concerne alors deux composantes supplémentaires.

Par ailleurs, la taille du système linéaire à résoudre est considérablement augmentée, pas seulement à cause du passage à une dimension supérieure, mais aussi à cause du fait que  $\psi$  est désormais une inconnue vectorielle qui est approchée par des éléments finis discontinus. Par exemple, pour une discrétisation avec des polynômes d'ordre 1, le nombre de degrés de liberté passe de  $2 \times$  nombre de nœuds +  $3 \times$  nombre de triangles du maillage à  $3 \times$  nombre de nœuds +  $3 \times 3 \times$  nombre de triangles. La méthode est face à un enjeu numérique d'ampleur : la taille considérable du système rend quasiment impossible l'inversion séquentielle directe de la matrice associée. La mise en place de stratégies de résolution s'avère alors inévitable. L'établissement de telles méthodes est d'autant plus difficile que notre modèle couple deux types de phénomènes physiques : la propagation d'onde d'une part et les convections hydrodynamiques d'autre part. Ceci conduit à des disparités (non homogénéités) dans la matrice du système linéaire à inverser. Plusieurs voies sont alors envisageables.

- L'utilisation d'un préconditionneur permet de ramener la résolution du système linéaire à l'inversion d'une matrice proche de l'identité. La construction d'un bon préconditionneur peut s'avérer difficile. En effet, l'équation de Galbrun augmentée est proche d'une équation d'Helmholtz. En outre, il est connu que l'approximation de ce type de problème mène à des matrices mal conditionnées et la construction d'un préconditionneur efficace est une question encore ouverte. Une approche prometteuse consiste à chercher un préconditionneur pour un problème perturbé dissipatif (c'est-à-dire un problème pour lequel la pulsation est complexe  $\omega + i\varepsilon$ ). En effet, la détermination d'un préconditionneur efficace pour ce type de problème est plus aisée [51]. Une autre problématique concerne le stockage en mémoire du préconditionneur.
- La résolution par méthode itérative pose la question du choix du solveur adapté à notre problème. Avec les équations de type onde, les méthodes itératives ne sont pas envisageables sans préconditionneur. Ceci nous renvoie aux problématiques liées à la conception d'un préconditionneur efficace et peu coûteux en terme de construction et de stockage.
- Il est également envisageable de s'orienter vers des méthodes de type décomposition de domaine. Deux familles d'approche sont possibles : les méthodes basées sur la physique du problème (par exemple, découpage du domaine physique en sous domaines et résolution en parallèle sur chacun d'eux [9]) et les méthodes algébriques basées sur la matrice elle-même [2]. Les premiers travaux conduits selon cette deuxième approche fournissent des résultats prometteurs [65].

Pour finir, nous avons montré, dans ce dernier chapitre, que l'approche de Galbrun augmentée couplée avec le transport harmonique fournit des résultats satisfaisants en écoulement potentiel mais aussi dans des cas rotationnels. En outre, la méthode reste fiable en présence d'écoulements plus complexes tels que les écoulements instables, les écoulements déterminés numériquement et les écoulements non  $\Omega$ -remplissants. De plus, nous avons mis en évidence que notre modèle restitue

les effets de vorticité et prend en compte le couplage entre l'acoustique et l'hydrodynamique. Finalement, notre travail ouvre de nombreuses perspectives pour la simulation de la propagation acoustique en écoulement et en régime harmonique. Notre travail montre en effet la faisabilité du couplage entre l'équation de transport harmonique et le modèle de Galbrun augmenté et propose une méthode de résolution par éléments finis mixtes continus/discontinus avec l'usage de couches PML. Ce couplage avec le transport hydrodynamique pourrait désormais être envisagé pour des modèles de propagation acoustique autres que le modèle de Galbrun augmenté.



# Conclusion

Lors de cette thèse, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique, en régime harmonique, de la propagation du son dans un fluide en écoulement quelconque et en domaine infini. Contrairement au cas classique où le fluide est au repos et où il est possible de choisir un modèle scalaire, le problème considéré est vectoriel car la présence de l'écoulement conduit généralement au couplage de deux phénomènes différents : la propagation acoustique et la convection hydrodynamique. L'approche choisie s'appuie sur la résolution d'un système équivalent aux équations d'Euler linéarisées : le modèle de Galbrun. Ce modèle repose sur une représentation mixte Lagrange-Euler et aboutit à une équation dont l'unique inconnue est la perturbation du déplacement lagrangien. Ce modèle vectoriel permet la prise en compte des couplages complexes qui ont lieu entre l'acoustique et les phénomènes hydrodynamiques. Une des difficultés de l'approche de Galbrun est qu'une discrétisation directe de cette équation par une méthode d'éléments finis standard n'est pas stable. Un moyen de contourner cet obstacle est d'écrire une équation augmentée en ajoutant une nouvelle inconnue, le rotationnel du déplacement, appelée par abus vorticité. Cette approche conduit à un système qui couple une équation de type équation des ondes avec une équation de transport en régime fréquentiel. Cette approche a fait l'objet de deux précédentes thèses réalisées au laboratoire POEMS. Ces travaux concernaient le cas où l'écoulement est uniforme ou parallèle, connu analytiquement. Il était alors possible de déterminer la vorticité sans avoir à résoudre l'équation hydrodynamique. Il a été montré que cette méthode permet l'utilisation de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) pour borner le domaine de calcul. Lorsque l'écoulement devient plus complexe, il est impossible d'obtenir la vorticité par un simple calcul analytique. Il est alors nécessaire de résoudre de manière explicite l'équation hydrodynamique et de réaliser son couplage avec la deuxième équation de type équation des ondes. Les travaux de thèse présentés ici ont consisté en une étude approfondie de l'équation de transport d'une part, et d'autre part en une analyse poussée du système couplé constitué des deux équations.

La première partie a ainsi porté sur l'équation de transport harmonique et sur la détermination d'une méthode numérique stable pour résoudre ce problème sur maillage non structuré. Cette équation aux dérivées partielles d'ordre un avec condition de Dirichlet décrit le transport d'une quantité physique par un écoulement porteur donné. Il nous a semblé naturel de nous inspirer des nombreuses références bibliographiques qui traitent de l'équation très similaire d'advection-réaction. Cependant le cas que nous avons étudié était plus délicat. En effet notre équation, est posée non pas dans un cadre temporel ou stationnaire mais dans le cadre du régime fréquentiel et de plus, elle n'est plus dissipative. D'un point de vue théorique, l'estimation fondamentale de stabilité a été plus difficile à établir et a requis des conditions particulières sur l'écoulement. Ce travail a en outre exploré les techniques de résolution usuelles et a soulevé les difficultés liées à l'approximation par éléments finis des équations aux dérivées partielles d'ordre un. Ce constat nous a conduit à considérer la méthode de Galerkin discontinu (GD). Nous avons démontré la stabilité et la convergence de cette méthode. Notre approche se base sur le choix d'un champ test particulier permettant d'obtenir une condition de stabilité de type inf-sup. Notre étude préalable approfondie de l'équation de transport harmonique mais aussi sa discrétisation par approche de type Galerkin Discontinu constitue un des principaux apports de cette thèse.

Une fois cette étape franchie, nous nous sommes intéressés à la résolution du problème couplé de propagation acoustique en écoulement et en régime harmonique. La méthode mise en place

consiste à approcher l'équation de Galbrun par des éléments finis de Lagrange. La nouveauté réside dans l'approximation de l'équation hydrodynamique par la méthode de Galerkin discontinue ainsi que dans son couplage avec la résolution de l'équation de Galbrun augmentée. Des couches PML permettent de borner le domaine de calcul. Une étude complète du problème continu a été entreprise. Le caractère bien posé de ce problème continu a été démontré moyennant certaines conditions assez restrictives sur l'écoulement porteur. Une analyse complète du problème discret a ensuite été menée. Sous les mêmes conditions que celles évoquées précédemment, nous avons démontré que le problème était bien posé. La convergence du schéma discret a ensuite été analysée. Enfin, une mise en œuvre numérique a été effectuée et nous avons obtenu plusieurs résultats. Dans un premier temps, nous avons validé notre approche en particulier grâce à une comparaison avec le cas où l'écoulement est potentiel. Dans un second temps, nous avons testé des cas d'écoulements plus complexes. Nous avons alors mis en évidence le couplage entre l'acoustique et l'hydrodynamique. Enfin, nous avons aussi montré que cette approche permet de prendre en compte le cas d'écoulements dits instables.

L'étape suivante dans le déploiement de notre méthode à des cas encore plus réalistes est maintenant de l'éprouver sur des configurations en trois dimensions. Nous nous attendons à ce que les effets hydrodynamiques soient alors plus marqués qu'en 2D. Le passage en 3D constitue un enjeu numérique d'envergure. En effet, la taille du système linéaire à résoudre devient d'autant plus grande qu'en 3D l'inconnue vorticité  $\psi$  n'est plus scalaire mais vectorielle. En plus, elle est discrétisée avec des éléments finis discontinus. L'inversion séquentielle directe du système s'avère alors prohibitive et la mise en place de stratégies de résolutions itératives ou par décomposition de domaine est indispensable.

Finalement, le travail réalisé dans cette thèse offre des perspectives encourageantes concernant le couplage de modèle de propagation d'onde avec l'équation de transport harmonique pour la prise en compte des phénomènes hydrodynamiques en acoustique linéaire. Nous avons sélectionné et étudié une méthode d'approximation adaptée au transport harmonique (méthode de Galerkin discontinue). De plus, nous avons montré la faisabilité du couplage avec le modèle de Galbrun augmenté, y compris avec des couches PML. Ce couplage pourrait désormais être envisagé pour d'autres modèles de propagation acoustique peut-être moins coûteux à résoudre que le système de Galbrun augmenté.

## Annexe A

# Jacobien du changement de variable

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^d$  occupé par un écoulement  $\Omega$ -remplissant  $\mathbf{v}$  tel que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  sur  $\Omega$ . Notons  $\Gamma^-$  le bord de  $\Omega$  à flux entrant. Soit  $\mathbf{b}$  un point de  $\Gamma^- \subset \mathbb{R}^{d-1}$  et notons  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1,d-1}$ . Considérons le changement de variable

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \tilde{\Omega} &\longrightarrow \Omega \\ (s, \mathbf{b}) &\longmapsto \Phi(s, \mathbf{b}) = (\Phi_i)_{i=1,d}. \end{aligned}$$

Le vecteur  $\Phi$  représente les coordonnées à l'instant  $s$  du point où se trouve la particule qui, portée par le fluide, était en  $\mathbf{b}$  à l'instant initial. C'est-à-dire  $\Phi$  est solution du problème aux caractéristiques suivant :

Trouver  $\Phi$  solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = \mathbf{v} \circ \Phi(s, \mathbf{b}) \\ \Phi(0, \mathbf{b}) = \mathbf{b} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\tilde{\Omega} := \{(s, \mathbf{b}) : \mathbf{b} \in \Gamma^- \text{ et } s \in [0, \tau]\},$$

où  $\tau$  est le temps au bout duquel toutes les courbes caractéristiques parties de  $\Gamma^-$  atteignent le bord à flux sortant. Considérons en outre la Jacobienne  $\mathcal{J}_\Phi$  du changement de variable  $\Phi$ . L'objectif de cette annexe est de vérifier que le déterminant de  $\mathcal{J}_\Phi$  noté  $J_\Phi$  satisfait la relation suivante [6, 8]

$$\frac{\partial J_\Phi}{\partial s}(s, \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mathbf{J}_\Phi(s, \mathbf{b}). \quad (\text{A.2})$$

En dimension  $d = 2$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{b} = b \in \mathbb{R}$  et la Jacobienne s'écrit

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la première colonne de  $\mathcal{J}_\Phi$  est égale au vecteur  $\mathbf{v} \circ \Phi$  puisque  $\Phi$  vérifie le problème (A.1) :

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{pmatrix} v_1 \circ \Phi & \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \\ v_2 \circ \Phi & \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien est alors donné par l'expression

$$J_\Phi(s, b) = \left( v_1 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} - v_2 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \right) (s, b).$$

En utilisant la formule de la chaîne, nous avons pour  $(i, j) = \{(1, 2), (2, 1)\}$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( v_i \circ \Phi \frac{\partial \Phi_j}{\partial b} \right) = \left( \frac{\partial v_i}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial v_i}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial b} + v_i \circ \Phi \left( \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial s \partial b} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial s \partial b} \right).$$

La fonction  $\Phi$  est différentiable (on peut inverser les dérivées partielles dans le deuxième terme) et comme  $\Phi$  vérifie (A.1) nous pouvons écrire

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( v_i \circ \Phi \frac{\partial \Phi_j}{\partial b} \right) = \left( \frac{\partial v_i}{\partial \Phi_1} v_1 \circ \Phi + \frac{\partial v_i}{\partial \Phi_2} v_2 \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial b} + v_i \circ \Phi \left( \frac{\partial v_j}{\partial \Phi_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} + \frac{\partial v_j}{\partial \Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} \right).$$

Nous pouvons alors, en mettant les termes  $\frac{\partial v_i}{\partial \Phi_j}$  en facteurs, exprimer la dérivée partielle par rapport à  $s$  du Jacobien comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\Phi}{\partial s} &= \frac{\partial v_1}{\partial \Phi_1} \left( v_1 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} - v_2 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial \Phi_2} \left( v_1 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} - v_2 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \right) \\ &\quad + \frac{\partial v_1}{\partial \Phi_2} \left( v_2 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} - v_2 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_2}{\partial b} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial \Phi_1} \left( v_1 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} - v_1 \circ \Phi \frac{\partial \Phi_1}{\partial b} \right). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la somme se factorisent par  $J_\Phi$ . Les deux derniers termes s'annulent et nous obtenons

$$\frac{\partial J_\Phi}{\partial s} = \operatorname{div} \mathbf{v} J_\Phi,$$

$$\text{où } \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial \Phi_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \Phi_2}.$$

## Annexe B

# Identité sur la somme des intégrations sur les bords des éléments de maillage pour la discrétisation DG

Considérons un domaine fermé  $\Omega$  occupé par un écoulement porteur  $\mathbf{v}_0$  satisfaisant les hypothèses détaillées dans la partie I. Soit  $\mathcal{T}_h$  une triangulation du domaine  $\Omega$ . Soient  $\psi$  et  $\varphi$  deux fonctions de  $H_{\text{conv}}(\mathcal{T}_h)$  **rappeler la def de  $H_{\text{conv}}$** . L'objectif de cette annexe est de réécrire la somme

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \psi \varphi d\gamma \quad (\text{B.1})$$

qui intervient lorsqu'on réalise une intégration par partie sur les éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$ . En

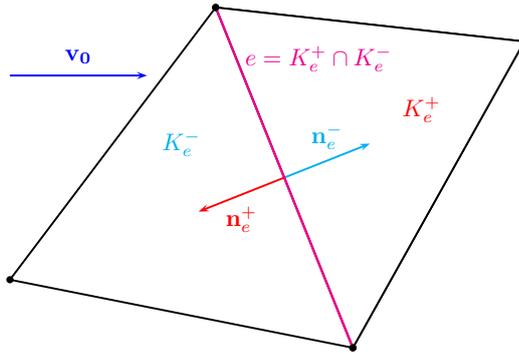


FIG. B.1: Convention et notations.

utilisant les notations des ensembles de faces introduites aux chapitres 2 et 3, nous pouvons reformuler la somme (B.1) comme une somme sur les faces des éléments (plutôt qu'une somme sur les éléments eux-mêmes). Rappelons d'abord les conventions de notations choisies. Pour  $e$  une face appartenant à l'ensemble  $\mathcal{E}_h^{i,\pm}$ , nous notons  $K_e^+$  et  $K_e^-$  les éléments de  $\mathcal{T}_h$  tels que  $e = K_e^+ \cup K_e^-$ . Par rapport à l'écoulement  $\mathbf{v}_0$

- $K_e^+$  est le triangle à l'aval de  $e$ ,
- $K_e^-$  est le triangle à l'amont de  $e$ .

En outre, conformément à la figure B.1,  $n_e^+$  et  $n_e^-$  représentent respectivement les normales sortantes sur le bord  $e$  des triangles  $K_e^+$  et  $K_e^-$ . Avec ces notations, il vient sur  $e$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^+ = -|\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|$$

et

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}_e^- = |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}|$$

où  $\mathbf{n}$  est une des deux normales unitaires de  $e$ . Nous pouvons alors récrire la somme (B.1) comme

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \psi \varphi \, d\gamma &= - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| (\psi_e^+ \varphi_e^+ - \psi_e^- \varphi_e^-) \, d\gamma \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,+}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \psi_e^- \varphi_e^- \, d\gamma - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{b,-}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \psi_e^+ \varphi_e^+ \, d\gamma. \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous reconnaissons les sauts du produit  $\psi \varphi$  sur les faces  $e$ , ce qui nous donne finalement,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) \psi \varphi \, d\gamma = - \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \cup \mathcal{E}_h^{b,\pm}} \int_e |\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}| \llbracket \psi \varphi \rrbracket \, d\gamma$$

avec

$$\llbracket \varphi \rrbracket = \begin{cases} \varphi_e^+ - \varphi_e^- & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^{i,\pm} \\ \varphi_e^+ & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^{b,-} \\ -\varphi_e^- & \text{si } e \in \mathcal{E}_h^{b,+}. \end{cases}$$

## Annexe C

# Résultats sur l'interpolation par des éléments finis

Lors de l'analyse de l'approximation par méthode de Galerkin discontinue faite au chapitre 3, nous faisons appel à des résultats sur l'interpolation par éléments finis. Nous les énonçons dans cette annexe. Il s'agit de résultats classiques en théorie des éléments finis dont on peut trouver des démonstrations dans [44, 26] par exemple.

Soit  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  une famille de triangulation d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que cette famille est régulière, c'est-à-dire  $\exists \sigma_0 > 0$  tel que

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0$$

où  $h_K = \text{diam}(K)$  et  $\rho_K$  est le diamètre de cercle inscrit dans  $K$ . A chaque triangle  $K$ , nous associons un élément finis de Lagrange dont les fonctions de bases sont dans  $\mathcal{P}^k(K)$  l'espace des fonctions polynomiales de degré  $k$  au plus.

### C.1 Erreur d'interpolation locale

Soit  $\mathcal{I}_K^k$  l'interpolateur de Lagrange sur  $K$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_K^k : L^2(K) &\longrightarrow \mathcal{P}^k(K) \\ \psi &\longmapsto \mathcal{I}_K^k \psi. \end{aligned}$$

**Proposition C.1.** *Soit un entier  $l$  tel que  $0 \leq l \leq k$ . Pour tout entier  $m \in \{0, \dots, l+1\}$ , nous avons*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \forall \psi \in H^{l+1}(K), |\psi - \mathcal{I}_K^k \psi|_{m,K} \lesssim k_K^{l+1-m} |\psi|_{l+1,K} \quad (\text{C.1})$$

où  $|\psi|_{r,K} = \sum_{|\beta|=r} \|\partial^\beta \psi\|_{0,\Omega}$ .

*Démonstration.* Voir [44], théorème 1.103. □

### C.2 Inégalité inverse locale

**Proposition C.2.** *Soit un entier  $l$  tel que  $0 \leq l \leq k$ . Pour tout entier  $m \in \{0, \dots, l\}$ , nous avons*

$$\forall \psi \in \mathcal{P}^k(K), |\psi|_{l,K} \lesssim h_K^{m-l} |\psi|_{m,K}. \quad (\text{C.2})$$

*Démonstration.* Voir [44], théorème 1.138. □

### C.3 Inégalité de trace locale

**Proposition C.3.** *Soit  $\psi$  dans  $H^1(K)$ . Nous avons alors*

$$\|\psi\|_{0,\partial K} \preccurlyeq \|\psi\|_{0,K}^{1/2} \|\psi\|_{1,K}^{1/2}. \quad (\text{C.3})$$

avec  $\|\psi\|_{1,K} = \sum_{l \leq 1} |\psi|_{l,K}$ .

*Démonstration.* Voir [26], théorème (1.6.6). □

**Proposition C.4.** *Soit  $\psi$  dans  $\mathcal{P}^k(K)$ . Nous avons alors*

$$\|\psi\|_{0,\partial K} \preccurlyeq h_K^{-1/2} \|\psi\|_{0,K}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition C.3, nous avons

$$\|\psi\|_{0,\partial K} \preccurlyeq \|\psi\|_{0,K}^{1/2} \|\psi\|_{1,K}^{1/2}.$$

Par ailleurs, la proposition C.2 donne

$$\|\psi\|_{1,K} \preccurlyeq h_K^{-1} \|\psi\|_{0,K}. \quad (\text{C.4})$$

Les deux précédentes inégalités permettent de déduire le résultat. □

## Annexe D

# Écoulement potentiel 2D autour d'un disque

Considérons un fluide bidimensionnel non visqueux en écoulement stationnaire autour d'un disque. Supposons qu'à l'infini la vitesse de l'écoulement soit uniforme de module  $v_\infty$  et dirigée selon le vecteur  $\mathbf{e}_1$ . Nous supposons que

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \text{constante}, \\ \text{rot } \mathbf{v}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Il s'agit d'un écoulement potentiel. Nous employons également le terme d'écoulement irrotationnel. Le champ  $\mathbf{v}_0$  satisfait aussi, d'après l'équation de conservation de la masse, la relation

$$\text{div } \mathbf{v}_0 = 0,$$

ainsi que l'équation de conservation de la quantité de mouvement (en utilisant la relation  $\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0 = \nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|^2 \right) - \mathbf{v}_0 \times \text{rot } \mathbf{v}_0$ ) :

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{v}_0|^2 \right) = -\nabla p_0.$$

Comme  $\text{rot } \mathbf{v}_0 = 0$ , la vitesse dérive d'un potentiel noté  $\phi$  et nous avons

$$\mathbf{v}_0 = -\nabla \phi.$$

Au point de coordonnées  $(x_1, x_2)$ , l'expression du potentiel complexe associé à cet écoulement est connue :

$$w(z) = -v_\infty R \left( \frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \text{ où } z = x_1 + ix_2.$$

La partie réelle et la partie imaginaire de  $w(z)$  donnent respectivement le potentiel de vitesse  $\phi$  et les fonctions de courant  $\psi$  :

$$\begin{aligned}\phi(x_1, x_2) &= -v_\infty x_1 \left( 1 + \frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2} \right), \\ \psi(x_1, x_2) &= -v_\infty x_2 \left( 1 - \frac{R^2}{x_1^2 + x_2^2} \right).\end{aligned}$$

Les courbes d'équations  $\psi(x_1, x_2) = \text{constante}$  donnent les lignes de courant de l'écoulement représentées sur la figure 1.14. Le calcul des dérivées partielles de  $\phi$  conduit à

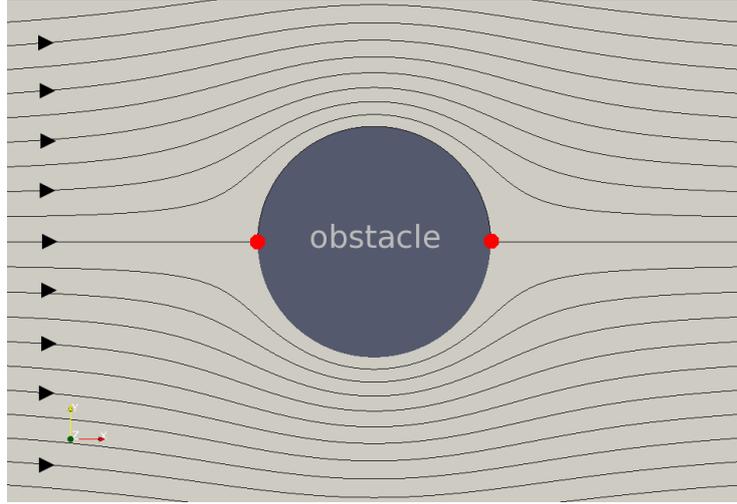


FIG. D.1: Lignes de courant autour d'un cercle.

$$v_1(x_1, x_2) = v_\infty \left( 1 + R^2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right),$$

$$v_2(x_1, x_2) = -2R^2 v_\infty \frac{x_2 x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Les dérivées partielles de la vitesse sont

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -\frac{\partial v_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2R^2 v_\infty \frac{x_1^2 - 3x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} x_1,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2R^2 v_\infty \frac{3x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} x_2.$$

D'après l'équation de conservation de la quantité de mouvement, la pression satisfait

$$p_0 = -\frac{1}{2} \rho_0 (v_1^2 + v_2^2) + \text{constante} \quad (\text{D.1})$$

Nous considérons maintenant le cas 1 introduit au chapitre 5. Nous proposons des visualisations des champs de vitesse, de pression et gradient de pression obtenus dans cette configuration à l'aide des expressions analytiques détaillées plus haut. La figure D.2 montrent les composantes horizontales et verticales de la vitesse. Sur la figure D.3 est représenté le champ de pression calculé à l'aide des expressions de  $v_1$  et  $v_2$  pour  $\rho_0 = 1$  et  $\text{constante} = 0$ . Le calcul du gradient de  $p_0$  par Paraview fournit la figure D.4. Les ordres de grandeurs du gradient de  $p_0$  sont comparables à ceux de la vitesse de la figure D.2.

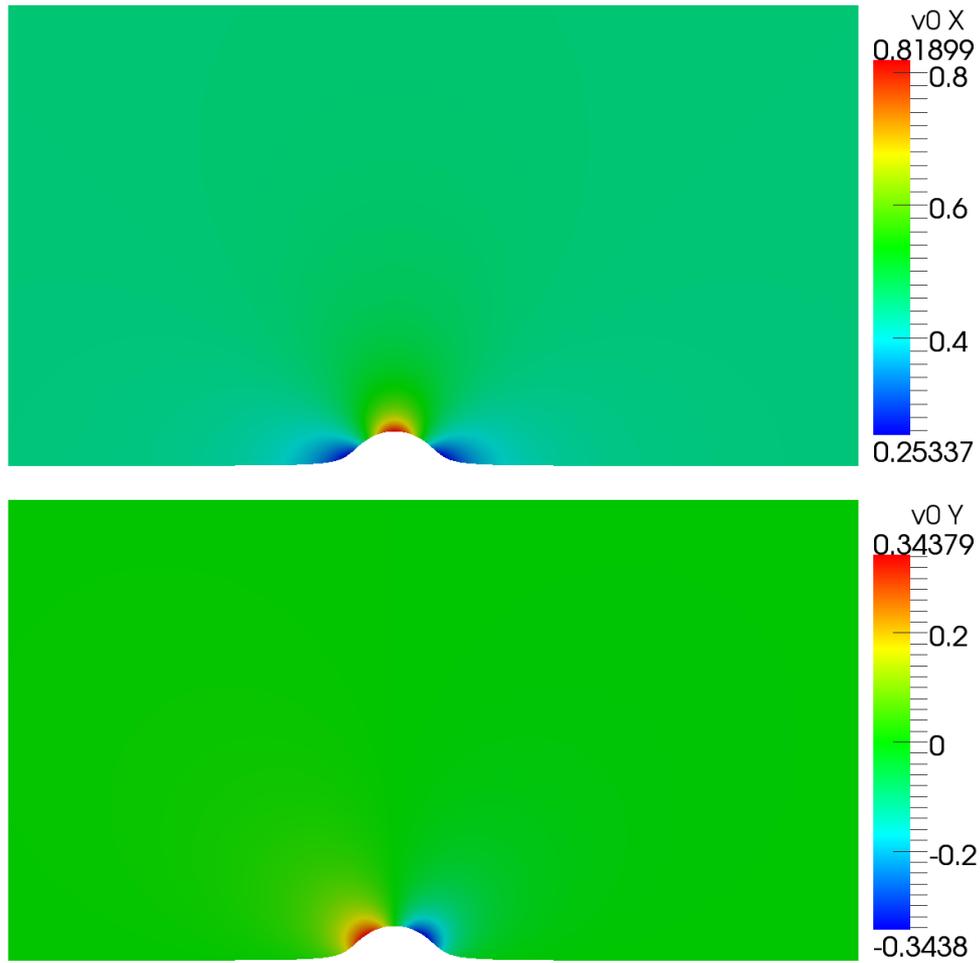
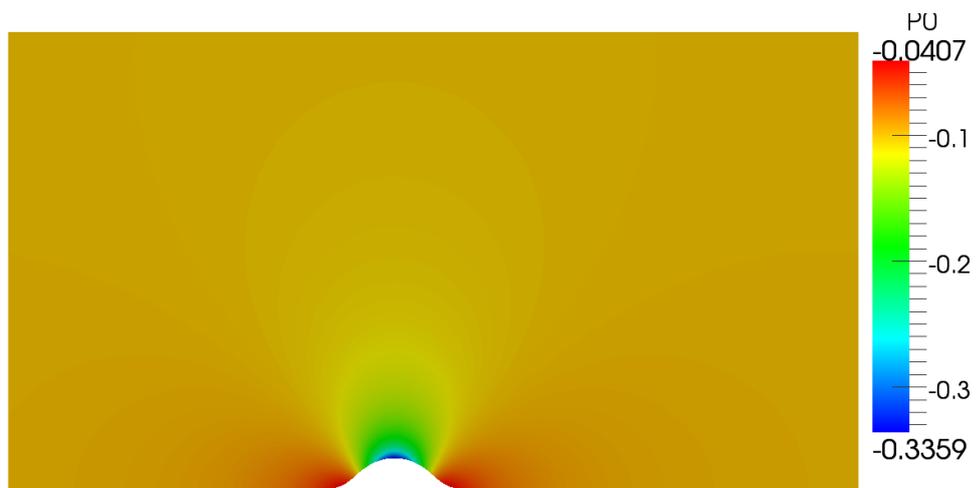
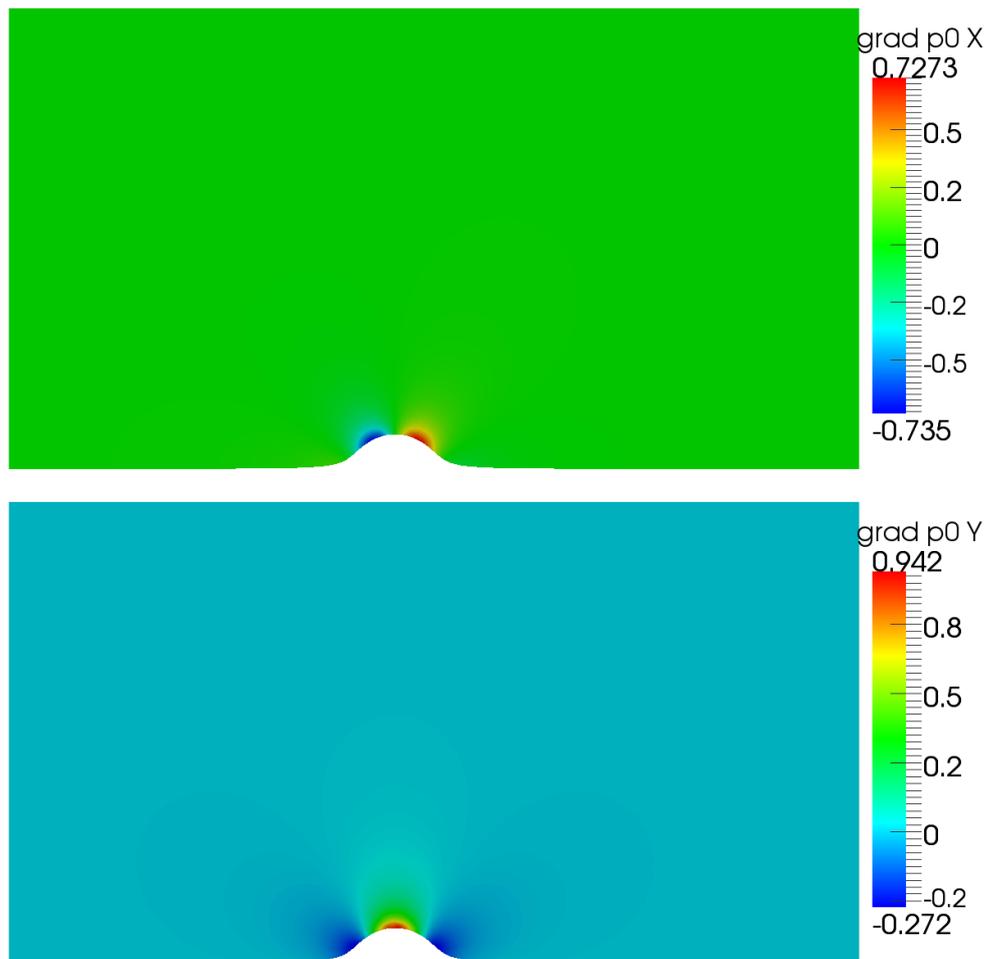
FIG. D.2: Vitesse de l'écoulement au dessus de la bosse ( $v_1, v_2$ )

FIG. D.3: Pression de l'écoulement.

FIG. D.4: Gradient de  $p_0$  au dessus de la bosse.

## Annexe E

# Évaluation numérique de la condition inf-sup associée à une méthode de discrétisation par éléments finis

### E.1 Motivations

Soit  $\psi$  la solution dans  $W$  du problème variationnel

$$p(\alpha; \psi, \varphi) = \ell(\varphi), \forall \varphi \in V \quad (\text{E.1})$$

où  $W$  et  $V$  sont deux espaces vectoriels équipés respectivement des normes  $\|\cdot\|_W$  et  $\|\cdot\|_V$ . Nous supposons que le problème (E.1) est bien posé et nous considérons le problème approché consistant à trouver  $\psi_h \in W_h$  tel que

$$p_h(\psi_h, \varphi_h) = \ell_h(\varphi_h), \forall \varphi_h \in V_h. \quad (\text{E.2})$$

Les espaces  $W_h$  et  $V_h$  sont des espaces d'éléments finis construits à partir d'une triangulation  $\mathcal{T}_h$  d'un domaine  $\Omega$ . Ils sont de même dimension

$$N = \dim V_h = \dim W_h$$

et sont respectivement munis des normes  $\|\cdot\|_{W_h}$  et  $\|\cdot\|_{V_h}$ . La forme bilinéaire  $p_h$  est définie et continue sur  $W_h \times V_h$  et  $\ell_h$  est linéaire continue sur  $V_h$ . Supposons en outre que l'approximation est conforme et consistante. Le problème (E.2) est bien posé si et seulement si  $p_h$  satisfait une relation de stabilité, aussi appelé condition inf-sup, de la forme

$$\inf_{\psi_h \in W_h} \sup_{\varphi_h \in V_h} \frac{p_h(\psi_h, \varphi_h)}{\|\psi_h\|_{W_h} \|\varphi_h\|_{V_h}} \geq \varpi_h > 0, \forall h > 0. \quad (\text{E.3})$$

Cette relation de stabilité est largement impliquée dans l'étude des méthodes de discrétisation des problèmes hyperboliques en particulier. Il s'agit en effet d'une condition nécessaire et suffisante pour avoir le caractère bien posé du problème approché. La borne  $\varpi_h$  traduit le comportement du schéma en terme de stabilité de la méthode de discrétisation. Mais surtout cette quantité influence la qualité de l'approximation en terme d'estimation d'erreur et intervient directement sur le caractère optimal ou sous-optimal de la méthode. En effet, supposons que  $p_h$  vérifie la relation de continuité suivante

$$|p_h(\psi, \varphi_h)| \leq C \|\psi\|_W \|\varphi_h\|_{V_h}, \forall \psi \in W, \forall \varphi_h \in W_h, \quad (\text{E.4})$$

nous pouvons alors démontrer l'estimation d'erreur suivante

$$\|\psi - \psi_h\|_{W_h} \leq \left(1 + \frac{C}{\varpi_h}\right) \inf_{w_h \in W_h} \|\psi - w_h\|_{W_h} \quad (\text{E.5})$$

où  $C$  et  $\varpi_h$  sont respectivement la constante de continuité (E.4) et la borne de la condition inf-sup dans la relation (E.3). Connaître la condition inf-sup (E.3) fournit donc un bon indicateur sur à la fois la stabilité et la précision de la méthode dans les normes considérées. Cependant, il est parfois difficile d'obtenir de façon analytique une relation de la forme (E.3), il est alors intéressant d'avoir un moyen de l'évaluer numériquement. L'objet de cette annexe est de détailler la méthode d'évaluation numérique de la condition inf-sup utilisée dans la référence [10].

## E.2 Écriture matricielle de la condition inf-sup

Soient  $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_N\}$  et  $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$  les bases respectives de  $W_h$  et  $V_h$ . La solution approchée  $\psi_h$  s'écrit dans la base  $\mathcal{W}$

$$\psi_h = \sum_{i=1}^N \Psi_i w_i,$$

où les  $\Psi_i$  sont les degrés de liberté associés à l'espace d'interpolation  $W_h$ . Sous forme vectorielle nous notons la solution approchée dans la base  $\mathcal{W}$

$$\Psi = (\Psi_i)_{1 \leq i \leq N}^T. \quad (\text{E.6})$$

Sous forme matricielle, le problème approché (E.2) s'écrit :  
Trouver  $\psi \in \mathbb{C}^N$  tel que

$$A\Psi = \mathcal{F} \quad (\text{E.7})$$

où  $A$  est la matrice des éléments finis donnée par

$$A_{ij} = p_h(w_j, v_i), \quad \forall i = 1, N \quad \forall j = 1, N$$

et  $\mathcal{F}$  est le vecteur second membre donné par

$$\mathcal{F}_i = \ell_h(v_i), \quad \forall i = 1, N.$$

De la même façon, la condition inf-sup E.3 s'écrit sous forme matricielle

$$\inf_{\Psi} \sup_{\Phi} \frac{\Phi^* A \Psi}{(\Psi^* S \Psi)^{1/2} (\Phi^* T \Phi)^{1/2}} \geq \varpi_h, \quad (\text{E.8})$$

avec  $S$  et  $T$  les matrices de norme sur l'espace des fonctions solutions  $W_h$  et l'espace des fonctions test  $V_h$ .

## E.3 Déterminer la condition inf-sup : résolution d'un problème aux valeurs propres

Posons

$$\rho(\Psi, \Phi) = \frac{\Phi^* A \Psi}{(\Psi^* S \Psi)^{1/2} (\Phi^* T \Phi)^{1/2}}. \quad (\text{E.9})$$

Comment calculer  $\rho(\Psi, \Phi)$ ? En procédant comme dans [10], nous posons

$$T = L^* L \quad \text{et} \quad \Xi = L \Phi.$$

Il vient alors

$$\rho(\Psi, \Xi) = \frac{\Xi^* L^{-*} A \Psi}{(\Psi^* S \Psi)^{1/2} (\Xi^* \Xi)^{1/2}}. \quad (\text{E.10})$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz, le numérateur de  $\rho(\Psi, \Xi)$  est majoré par

$$|\Xi^* L^{-*} A \Psi| \leq \|\Xi\|_2 \|L^{-*} A \Psi\|_2,$$

avec  $\|\Xi\|_2^2 = \sum_{i=1, N} |\Xi_i|^2 = \Xi^* \Xi$ . En particulier, pour  $\Xi = L^{-*} A \Psi$ , l'inégalité précédente devient une égalité :

$$\Xi^* L^{-*} A \Psi = (L^{-*} A \Psi)^* L^{-*} A \Psi = \|L^{-*} A \Psi\|_2^2 = \|\Xi\|_2 \|L^{-*} A \Psi\|_2,$$

et donc  $\rho(\Psi, \Xi)$  atteint sa borne supérieure pour  $\Xi = L^{-*} A \Psi$ . Donc,

$$\sup_{\Phi} \rho(\Psi, \Phi) = \frac{(\Psi^* A^* L^{-1} L^{-*} A \Psi)^{1/2}}{(\Psi^* S \Psi)^{1/2}}.$$

Nous remarquons ensuite que  $A^* L^{-1} L^{-*} A = A^* (L^* L)^{-1} A = A^* T^{-1} A$ , d'où

$$\sup_{\Phi} \rho(\Psi, \Phi) = \frac{(\Psi^* A^* T^{-1} A \Psi)^{1/2}}{(\Psi^* S \Psi)^{1/2}}. \quad (\text{E.11})$$

Nous reconnaissons le quotient de Rayleigh généralisé des matrices  $A^* T^{-1} A$  et  $S$  et associé au problème au valeurs propres suivant

$$(A^* T^{-1} A) \mathbf{X} = \lambda S \mathbf{X}. \quad (\text{E.12})$$

Nous déduisons alors que

$$\inf_{\Psi} \sup_{\Phi} \rho(\Psi, \Phi) = \lambda_{min}^{1/2}, \quad (\text{E.13})$$

où  $\lambda_{min}^{1/2}$  est la plus petite valeur propre du problème (E.12). Et donc, par la relation (E.8), nous avons

$$\lambda_{min}^{1/2} \geq \varpi_h. \quad (\text{E.14})$$

Donc, pour avoir de l'information sur la condition inf-sup, nous déterminons la plus petite valeur propre du problème (E.12). En notant  $C$  le facteur de Cholesky de la matrice  $S$  (c'est-à-dire  $S = C^* C$ ), le problème au valeur propre (E.12) s'écrit alors

$$C^{-*} A C^{-1} \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}. \quad (\text{E.15})$$

L'algorithme de la puissance itérée inverse appliqué à la matrice  $C^{-*} A C^{-1}$  permet alors de déterminer  $\lambda_{min}$ .



## Annexe F

# Relation de dispersion des schémas numériques pour le transport harmonique

Le domaine considéré est  $\Omega = \mathbb{R}$  et nous nous intéressons au problème de transport harmonique  $\mathcal{P}_\omega$  pour lequel  $\alpha = -i\omega$  et  $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ . L'écoulement porteur supposé constant est donné par  $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$  avec  $v_0 > 0$ . Soit à résoudre le problème 1D suivant :  
Trouver  $\psi$  tel que

$$\mathcal{P}_\omega \begin{cases} -i\omega\psi + v_0\psi' = 0 & \text{dans } \Omega = \mathbb{R} \\ \psi(0) = \psi_0 & \text{en } x = 0 \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

Nous considérons ensuite le domaine discrétisé infini

$$\Omega_h = \cup_{j \in \mathbb{Z}} [x_j; x_{j+1}]$$

tel que le pas de maillage est uniforme c'est-à-dire  $h = |x_{j+1} - x_j|, \forall j \in \mathbb{Z}$ . Dans cette annexe, nous écrivons, pour le problème (F.1), les schémas étudiés dans ce manuscrit sur le domaine  $\Omega_h$  et nous établissons pour chacun d'eux la relation de dispersion numérique.

### F.1 Schémas de Galerkin continus

#### F.1.1 Le schéma de Galerkin classique en domaine infini

Soit  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  la base des éléments finis continus dans laquelle est recherchée la solution du problème approchée. La solution approchée s'écrit alors

$$\psi_h(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \lambda_j(x), \forall x \in \Omega_h.$$

Testons la forme bilinéaire du problème discret avec  $\lambda_j$  une fonction de cette base d'éléments finis. Nous obtenons

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi_\ell \int_{\text{supp } \lambda_j} (-i\omega\lambda_\ell + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \lambda_\ell) \overline{\lambda_j} dx = 0, \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Pour une discrétisation avec des éléments finis  $\mathbb{P}^1$  (voir figure F.1), l'égalité précédente devient

$$\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \psi_\ell \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (-i\omega\lambda_\ell + v_0\lambda_\ell') \overline{\lambda_j} dx = 0. \quad (\text{F.2})$$

Après calcul des intégrales élémentaires, nous avons l'équation

$$A\psi_{j+1} + 2B\psi_j + C\psi_{j-1} = 0 \quad (\text{F.3})$$

avec

$$A = \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}, \quad B = -i\frac{kh}{3} \quad \text{et} \quad C = -\bar{A} \quad (\text{F.4})$$

où  $k$  est le nombre d'onde donné au chapitre 2 par  $k = \frac{\omega}{v_0}$ .

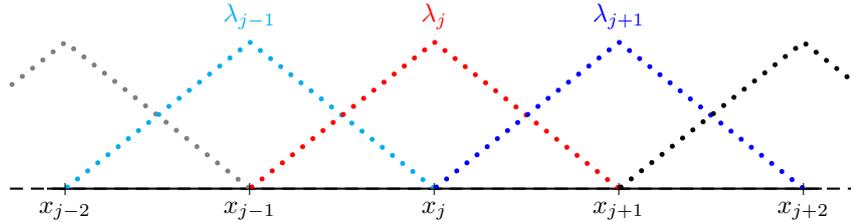


FIG. F.1: Éléments finis continus en domaine infini et fonctions de base  $\mathbb{P}^1$ .

### F.1.2 Le schéma des moindres carrés en domaine infini

Pour une base d'éléments finis  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  le schéma des moindres carrés s'écrit

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi_\ell \int_{\text{supp } \lambda_j} (-i\omega\lambda_\ell + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \lambda_\ell) \overline{(-i\omega\lambda_j + \nabla \lambda_j \cdot \mathbf{v}_0)} dx = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, avec les fonctions de base  $\mathbb{P}^1$  de la figure F.1, l'égalité précédente devient

$$\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \psi_\ell \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (-i\omega\lambda_\ell + v_0\lambda'_\ell) \overline{(-i\omega\lambda_j + v_0\lambda'_j)} dx = 0 \quad (\text{F.5})$$

et le calcul des intégrales élémentaires conduit à

$$A\psi_{j+1} + 2B\psi_j + C\psi_{j-1} = 0 \quad (\text{F.6})$$

avec

$$A = \frac{1}{6}(kh)^2 - 1 + ikh, \quad B = \left(\frac{1}{3}(kh)^2 + 1\right) \quad \text{et} \quad C = \bar{A}. \quad (\text{F.7})$$

### F.1.3 Les schémas SUPG en domaine infini

De la même façon, nous testons le forme bilinéaire discrète SUPG par une fonction test  $\lambda_j$  de la base des éléments finis continus  $\mathbb{P}^1$  :

$$\sum_{\ell=j-1}^{j+1} \psi_\ell \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} (-i\omega\lambda_\ell + v_0\lambda'_\ell) \overline{(\lambda_j + \delta_h v_0\lambda'_j)} dx = 0. \quad (\text{F.8})$$

Le calcul des intégrales élémentaires mène à

$$A\psi_{j+1} + 2B\psi_j + C\psi_{j-1} = 0 \quad (\text{F.9})$$

avec

$$A = \frac{1}{2} - \frac{i \omega h}{6 v_0} - \delta_h \left( \frac{v_0}{h} - i \frac{\omega}{2} \right), \quad B = \left( -\frac{i \omega h}{3 v_0} + \delta_h \frac{v_0}{h} \right) \quad (\text{F.10})$$

et  $C = -\left( \frac{1}{2} + \frac{i \omega h}{6 v_0} \right) - \delta_h \left( \frac{v_0}{h} + i \frac{\omega}{2} \right).$

Pour que les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  soient uniquement fonction du produit  $kh$ , nous choisissons  $\delta_h$  tel que

$$\delta_h = \frac{h}{v_0} \delta. \quad (\text{F.11})$$

Nous avons ainsi

$$A = \frac{1}{2} - \frac{i}{6} kh - \delta \left( 1 - \frac{i}{2} kh \right), \quad B = \left( -\frac{i}{3} kh + \delta \right) \quad (\text{F.12})$$

et  $C = -\left( \frac{1}{2} + \frac{i}{6} kh \right) - \delta \left( 1 + \frac{i}{2} kh \right).$

#### F.1.4 Relations de dispersion des schémas de Galerkin continus $\mathbb{P}^1$

Nous cherchons la relation satisfaite par  $k_h$  le nombre d'onde numérique pour que l'onde plane numérique

$$\psi_j = \psi_h(x_j) = e^{ijk_h h} \quad (\text{F.13})$$

soit solution du schéma considéré. Les schémas de Galerkin continus considérés ici s'écrivent sur  $\Omega_h$

$$A\psi_{j+1} + 2B\psi_j + C\psi_{j-1} = 0 \quad (\text{F.14})$$

où les  $\psi_j$  sont les degrés de liberté des éléments finis  $\mathbb{P}^1$  associés aux points  $x_j$  représentés sur la figure F.1 et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des polynômes en  $kh$  d'ordre inférieur ou égal à deux dont l'expression est rappelée dans le tableau F.1. Si l'onde plane numérique (F.13) est solution de (F.14), alors

	$A$	$B$	$C$
Galerkin classique	$\frac{1}{2} - i \frac{kh}{6}$	$-i \frac{kh}{3}$	$-\bar{A}$
Moindres carrés	$\frac{1}{6}(kh)^2 - 1 + ikh$	$\frac{1}{3}(kh)^2 + 1$	$\bar{A}$
SUPG	$\frac{1}{2} - \frac{i}{6} kh - \tilde{\delta}_h \left( 1 - \frac{i}{2} kh \right)$	$-\frac{i}{3} kh + \tilde{\delta}_h$	$-\overline{\left( \frac{1}{2} - \frac{i}{6} kh \right)} - \tilde{\delta}_h \overline{\left( 1 - \frac{i}{2} kh \right)}$

TAB. F.1: Coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  des schémas de Galerkin continus.

les degrés de liberté  $\psi_{j-1}$ ,  $\psi_j$  et  $\psi_{j+1}$  sont liés par les relations

$$\begin{aligned} \psi_{j+1} &= e^{ik_h h} \psi_j \\ \psi_j &= e^{ik_h h} \psi_{j-1}. \end{aligned}$$

En injectant ces relations dans l'écriture du schéma (F.14), il vient la relation de dispersion suivante

$$AX^2 + 2BX + C = 0 \quad (\text{F.15})$$

où nous avons posé

$$X = e^{ik_h h}. \quad (\text{F.16})$$

## F.2 Les schémas de Galerkin discontinus

### F.2.1 Ecriture des schémas DG en domaine infini

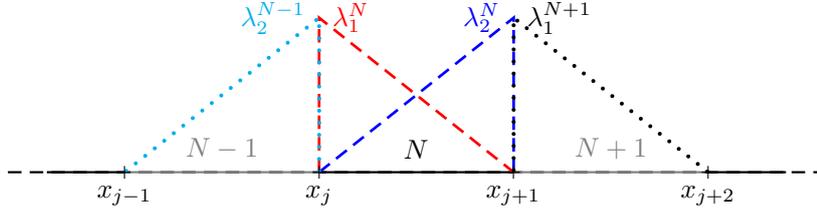


FIG. F.2: Domaine infini et fonction de base  $\mathbb{P}^1$  sur l'élément  $N$  pour la discrétisation DG.

La formulation DG prise pour un paramètre de stabilisation  $c_e$  réel s'écrit sur le  $N^{\text{ième}}$  élément de maillage  $[x_j; x_{j+1}]$  sous la forme  $\forall \psi_h \times \varphi_h \in W_h^k \times W_h^k$ ,

$$\begin{aligned} p_{c_e}(-i\omega; \psi_h, \varphi_h) &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} (-i\omega \psi_h + v_0 \psi_h') \overline{\varphi_h} dx \\ &+ v_0 \left( \frac{1}{2} + c_e \right) (\psi_h(x_j)|_N - \psi_h(x_j)|_{N-1}) \overline{\varphi_h}(x_j)|_N \\ &+ v_0 \left( \frac{1}{2} - c_e \right) (\psi_h(x_{j+1})|_{N+1} - \psi_h(x_{j+1})|_N) \overline{\varphi_h}(x_{j+1})|_N. \end{aligned}$$

Sur l'élément fini  $N$  représenté figure F.2, la solution approchée s'écrit dans la base des polynômes d'ordre  $p-1$  comme

$$\psi_h(x) = \sum_{k=1}^p \psi_k^N \lambda_k^N(x), \forall x \in [x_j; x_{j+1}]$$

où  $\psi_k^N$  et  $\lambda_k^N(x)$  sont respectivement les degrés de liberté et les fonctions de base attachés à l'élément  $N$ . En testant  $p_{c_e}$  par toutes les fonctions de la base  $(\lambda_\ell^N)_{\ell=1,p}$ , nous obtenons l'expression suivante du schéma  $\forall \ell = 1, p$ ,

$$\begin{aligned} &-i\omega \sum_{k=1}^p \psi_k^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \lambda_k^N(x) \lambda_\ell^N(x) dx + v_0 \sum_{k=1}^p \psi_k^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} \lambda_k^{N'}(x) \lambda_\ell^N(x) dx \\ &+ v_0 \left( \frac{1}{2} + c_e \right) \left( \sum_{k=1}^p \psi_k^N \lambda_k^N(x_j) - \sum_{k=1}^p \psi_k^{N-1} \lambda_k^{N-1}(x_j) \right) \lambda_\ell^N(x_j) \\ &+ v_0 \left( \frac{1}{2} - c_e \right) \left( \sum_{k=1}^p \psi_k^{N+1} \lambda_k^{N+1}(x_{j+1}) - \sum_{k=1}^p \psi_k^N \lambda_k^N(x_{j+1}) \right) \lambda_\ell^N(x_{j+1}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Notons  $\Psi_N$  le vecteur formé des  $p$  degrés de liberté  $\psi_k^N$  attachés à l'élément  $N$ , c'est-à-dire

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \psi_1^N \\ \vdots \\ \psi_p^N \end{pmatrix}$$

et  $\Lambda_j^N$  le vecteur composé des  $p$  valeurs au point  $x_j$  des fonctions de bases  $\lambda_k^N$  attachées à l'élément  $N$ , c'est-à-dire

$$\Lambda_N^j = \begin{pmatrix} \lambda_1^N(x_j) \\ \vdots \\ \lambda_p^N(x_j) \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, la relation (F.17) s'écrit alors sous forme matricielle comme

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{M}_p^N \Psi_N + \mathbf{C}_p^N \Psi_N + v_0 \left( \frac{1}{2} + c_e \right) \Lambda_N^j \left( (\Lambda_N^j)^T \Psi_N - (\Lambda_{N-1}^j)^T \Psi_{N-1} \right) \\ + v_0 \left( \frac{1}{2} - c_e \right) \Lambda_N^{j+1} \left( (\Lambda_{N+1}^{j+1})^T \Psi_{N+1} - (\Lambda_N^{j+1})^T \Psi_N \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.18})$$

où  $\mathbf{M}_p^N$  et  $\mathbf{C}_p^N$  sont respectivement les matrices de masse et de convection définies telles que

$$\left( \mathbf{M}_p^N \right)_{k,l} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \lambda_k^N(x) \lambda_l^N(x) dx \quad \text{et} \quad \left( \mathbf{C}_p^N \right)_{k,l} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_0 \lambda_k^{N'}(x) \lambda_l^N(x) dx.$$

En divisant la relation précédente par  $v_0$ , il vient

$$\begin{aligned} (-ikh\mathbf{M} + \mathbf{C}) \Psi_N + \left( \frac{1}{2} + c_e \right) \Lambda_N^j \left( (\Lambda_N^j)^T \Psi_N - (\Lambda_{N-1}^j)^T \Psi_{N-1} \right) \\ + \left( \frac{1}{2} - c_e \right) \Lambda_N^{j+1} \left( (\Lambda_{N+1}^{j+1})^T \Psi_{N+1} - (\Lambda_N^{j+1})^T \Psi_N \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

où  $k = \frac{\omega}{v_0}$  et où les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{C}$  sont données par

$$\mathbf{M} = \frac{1}{h} \mathbf{M}_p^N \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{v_0} \mathbf{C}_p^N.$$

Dans la base des éléments finis  $\mathbb{P}^1$  de la figure F.2,  $\Psi_N$  s'écrit

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \psi_1^N \\ \psi_2^N \end{pmatrix}.$$

De plus, nous avons

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi que

$$\Lambda_N^j = \Lambda_{N+1}^{j+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_N^{j+1} = \Lambda_{N-1}^j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le système (F.19) prend alors la forme suivante

$$\begin{pmatrix} c_e - i\frac{kh}{3} & \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6} & c_e - i\frac{kh}{3} \end{pmatrix} \Psi_N - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} + c_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_{N-1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - c_e & 0 \end{pmatrix} \Psi_{N+1} = 0. \quad (\text{F.20})$$

## F.2.2 Relation de dispersion numérique des schémas DG $\mathbb{P}^1$

Quelque soit l'élément de maillage  $N$ , les schémas de Galerkin discontinus sont donnés pour une discrétisation  $\mathbb{P}^1$  par l'expression (F.20). Pour que l'onde plane numérique soit solution, il faut imposer aux degrés de liberté  $\psi_1^N$ ,  $\psi_1^{N+1}$ ,  $\psi_2^N$  et  $\psi_2^{N-1}$  de vérifier les relations

$$\begin{aligned} \psi_1^{N+1} &= e^{ikh} \psi_1^N \\ \psi_2^N &= e^{ikh} \psi_2^{N-1}. \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

Les équations (F.20) et (F.21) conduisent au système suivant vérifié quelque soit l'élément  $N$

$$\mathbf{A}\Psi = 0$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -e^{ikh} & 0 & 1 & 0 \\ -(\frac{1}{2} + c_e) & c_e - i\frac{kh}{3} & \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6} & c_e - i\frac{kh}{3} & \frac{1}{2} - c_e \\ 0 & -e^{ikh} & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_2^{N-1} \\ \psi_1^N \\ \psi_2^N \\ \psi_1^{N+1} \end{pmatrix} \neq 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Nous en déduisons la relation de dispersion numérique

$$\det \mathbf{A} = 0, \tag{F.22}$$

qui après calcul du déterminant aboutit à l'équation du second ordre suivante

$$AX^2 + BX + C = 0 \tag{F.23}$$

où nous avons posé

$$X = e^{ikh}$$

et où les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  s'écrivent

$$\begin{aligned} A &= \left(c_e - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right), \\ B &= \left|\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right|^2 + \left(c_e - i\frac{kh}{3}\right)^2 - \left(c_e - \frac{1}{2}\right) \left(c_e + \frac{1}{2}\right), \\ C &= -\left(c_e + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + i\frac{kh}{6}\right). \end{aligned}$$

	$A$	$B$	$C$
DG centré ( $c_e = 0$ )	$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right)$	$\left \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right ^2 - \frac{(kh)^2}{9} + \frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + i\frac{kh}{6}\right)$
DG upwind ( $c_e = \frac{1}{2}$ )	0	$\left \frac{1}{2} - i\frac{kh}{6}\right ^2 + \left(\frac{1}{2} - i\frac{kh}{3}\right)^2$	$-\left(\frac{1}{2} + i\frac{kh}{6}\right)$

TAB. F.2: Coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  des schémas de Galerkin discontinus.

## Annexe G

# L'inconnue déplacement Lagrangien

Dans cette annexe, nous voulons éclaircir les notions de représentation mixte Euler/Lagrange et de perturbation du déplacement Lagrangien. Pour cela, nous allons revenir succinctement sur les étapes du processus de linéarisation détaillé dans [63] qui permet d'obtenir l'équation de Galbrun.

### G.1 Descriptions eulerienne et lagrangienne

Rappelons tout d'abord que pour décrire le mouvement d'un fluide deux techniques différentes peuvent être adoptées. Selon la représentation d'Euler, qui est la plus classique, l'observateur est à une position fixe et regarde passer les particules de fluide. A chaque point de l'espace  $\mathbf{x}$  et à chaque instant  $t$  sont associées les quantités physiques caractérisant l'écoulement :

$$(\mathbf{x}, t) \rightarrow f(\mathbf{x}, t)$$

où  $f$  peut représenter la vitesse, la pression, la densité, l'entropie, ce sont les inconnues d'Euler. Les coordonnées du point d'observation  $\mathbf{x}$  et le temps  $t$  sont dites variables d'Euler. C'est selon ce mode de représentation que sont données les équations classiques de la mécanique des fluides. Pour un fluide parfait en évolution adiabatique, il s'agit des équations d'Euler à partir desquelles le modèle de Galbrun est obtenu.

En description lagrangienne, l'observateur suit la particule de fluide dans son mouvement. Les particules de fluide sont identifiées par leurs positions en un instant de référence choisi arbitrairement et noté  $\mathbf{a}$ . A chaque particule  $m$  et à chaque instant  $t$  peut alors être associée la position  $\chi$  de la particule suivie :

$$(\mathbf{a}, t) \rightarrow \chi(\mathbf{a}, t).$$

Ainsi la position (ou fonction de placement), qui est l'inconnue de Lagrange, décrit la trajectoire de la particule, voir figure G.1. Les quantités physiques caractérisant le fluide sont donnée en fonction de  $\mathbf{a}$  et  $t$  les variables de Lagrange. Nous les notons avec un signe tilde :

$$(\mathbf{a}, t) \rightarrow \tilde{f}(\mathbf{a}, t).$$

En particulier, la vitesse de la particule  $m$  à l'instant  $t$  s'exprime en fonction de la fonction de placement par

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{a}, t). \quad (\text{G.1})$$

Au lieu d'utiliser la fonction position, on préfère employer le vecteur déplacement lagrangien qui est défini comme

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{a}, t) = \chi(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a}$$

et représenté schématiquement sur la figure G.1. Nous remarquons alors l'égalité

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, t) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t}(\mathbf{a}, t). \quad (\text{G.2})$$

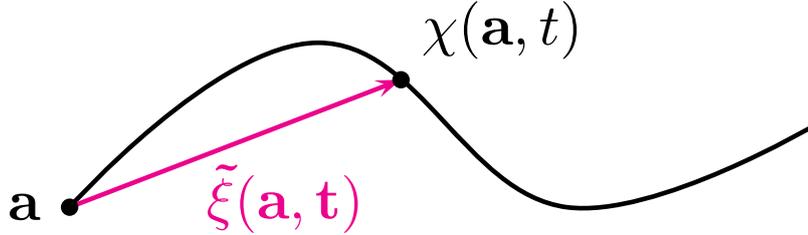


FIG. G.1: Représentation lagrangienne : position  $\chi(\mathbf{a}, t)$  et déplacement lagrangien  $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$  à l'instant  $t$  de la particule de fluide qui était en  $\mathbf{a}$  dans la configuration de référence.

Par le changement de variable

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{a}, t'); \quad \mathbf{a} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \text{ et } t = t'$$

les équations d'Euler peuvent être exprimées en variables de Lagrange  $(\mathbf{a}, t)$ .

## G.2 Description de petites perturbations du fluide

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, les phénomènes acoustiques sont considérés comme de petites perturbations de l'écoulement porteur. En représentation d'Euler, les quantités physiques associées à l'écoulement total se décomposent alors (à l'ordre un) sous la forme

$$f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon f_1^E(\mathbf{x}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où  $f_1^E$  est la perturbation d'ordre un de la grandeur  $f$  prise au point  $\mathbf{x}$  du fluide non perturbé et à l'instant  $t$ . Pour information, c'est selon cette décomposition que sont obtenues, à partir du système d'Euler, les équations classiques de l'acoustique linéaire connues sous le nom d'équation d'Euler linéarisées.

En représentation lagrangienne, nous considérons deux états d'un même écoulement : l'état perturbé et non perturbé définis à l'aide de la même configuration de référence comme sur la figure G.2. Nous regardons la différence entre les grandeurs physiques totales et non perturbées à l'instant  $t$  pour la particule  $m$  (caractérisée par sa position  $\mathbf{a}$  au temps de référence). Obtenir une équation pour les perturbations acoustiques consiste alors à écrire la linéarisation à l'ordre un autour de l'état non perturbé des quantités physiques exprimées en variables de Lagrange selon le développement :

$$\tilde{f}(\mathbf{a}, t) = \tilde{f}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \tilde{f}_1^L(\mathbf{a}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{G.3})$$

où  $\tilde{f}_1^L(\mathbf{a}, t)$  est la perturbation lagrangienne d'ordre un à l'instant  $t$  relative à la particule de fluide étant à  $\mathbf{a}$  à l'instant de référence. On peut également montrer que le déplacement lagrangien se décompose également à l'ordre un sous la forme :

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{a}, t) = \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \tilde{\boldsymbol{\xi}}_1^L(\mathbf{a}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

avec  $\tilde{\xi}_0(\mathbf{a}, t) = \chi(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a}$ , d'où

$$\chi(\mathbf{a}, t) = \chi_0(\mathbf{a}, t) + \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1^L(\mathbf{a}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

La figure G.2 illustre que la particule de fluide qui à l'instant  $t$  est en  $\mathbf{x}_0 = \chi_0(\mathbf{a}, t)$  dans la trajectoire non perturbée est au point  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{a}, t) + \boldsymbol{\xi}^L$  avec  $\boldsymbol{\xi}^L = \varepsilon \boldsymbol{\xi}_1^L(\mathbf{a}, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$  dans la trajectoire perturbée. Enfin, un choix classique consiste à exprimer les perturbations en fonction

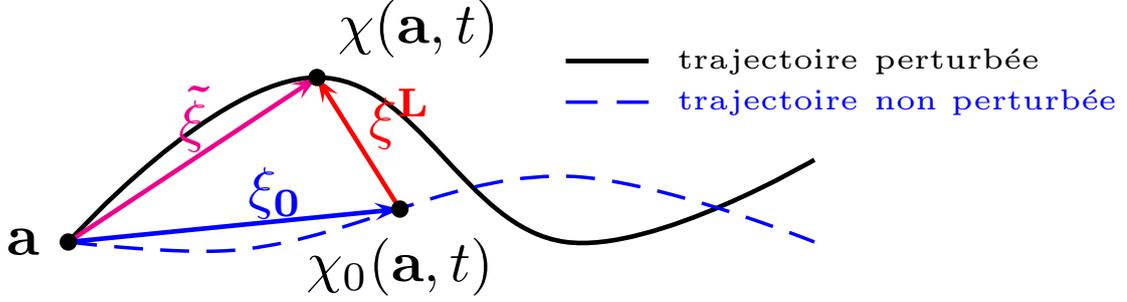


FIG. G.2: Perturbation du déplacement lagrangien.

des coordonnées eulériennes relatives à l'écoulement non perturbé. Le retour en variable d'Euler est alors réalisé par le changement de variable

$$\mathbf{x}_0 = \chi_0(\mathbf{a}, t'); \quad \mathbf{a} = \chi_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \text{ et } t = t'.$$

De longues manipulations algébriques permettent d'aboutir sur une unique équation, appelée équation de Galbrun et portant sur  $\boldsymbol{\xi}_1^L$  :

$$\rho_0 \frac{D^2 \boldsymbol{\xi}_1^L}{Dt^2} - \nabla(\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L) + \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L \nabla p_0 - \nabla \boldsymbol{\xi}_1^{LT} \cdot \nabla p_0 + \rho_0 \nabla(\nabla \phi_0) \cdot \boldsymbol{\xi}_1^L = 0.$$

On parle alors de représentation mixte Euler-Lagrange. En effet, nous nous intéressons aux quantités perturbées de Lagrange à l'instant  $t$  et à la position de la particule de l'écoulement porteur non perturbé. Il s'agit en fait d'observer des quantités lagrangiennes perturbées avec un point de vue eulérien (basé sur l'écoulement porteur).

Pour finir, les perturbations lagrangiennes et eulériennes d'ordre un de la grandeur physique  $f$  sont liées par la relation [63]

$$\varepsilon f_1^L(\mathbf{x}_0, t) = f_1^E(\mathbf{x}_0, t) + \boldsymbol{\xi}_1^L(\mathbf{x}_0, t) \cdot \nabla f_0(\mathbf{x}_0, t) + \varepsilon.$$

Il peut alors être montré que les perturbations eulériennes de densité, vitesse et pression d'ordre un s'expriment en fonction de la perturbation du déplacement lagrangien

$$\rho_1^E = -\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L - \boldsymbol{\xi}_1^L \cdot \nabla \rho_0, \quad (\text{G.4})$$

$$\mathbf{v}_1^E = \frac{D \boldsymbol{\xi}_1^L}{Dt} - \nabla \mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\xi}_1^L, \quad (\text{G.5})$$

$$p_1^E = -\rho_0 c_0^2 \operatorname{div} \boldsymbol{\xi}_1^L - \boldsymbol{\xi}_1^L \cdot \nabla p_0. \quad (\text{G.6})$$



# Bibliographie

- [1] A. Agarwal, P. Morris, and R. Mani. Calculation of sound propagation in non-uniform flows : suppression of instability waves. *AIAA Journal*, 42 :80–88, 2004.
- [2] E. Agullo, L. Giraud, A. Guermouche, and J. Roman. Parallel hierarchical hybrid linear solvers for emerging computing platforms. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences : Serie Mécanique*, 339(2-3) :96–103, 2011.
- [3] D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39 :1749–1779, 2002.
- [4] R. Astley, N. Walkington, and W. Eversman. Accuracy and stability of finite element schemes for the duct transmission problem. In *AIAA, Astrodynamics Specialist Conference*, volume 1, 1981.
- [5] R. J. Astley. Numerical methods for noise propagation in moving flows, with application to turbofan engines. *Acoustical science and technology*, 30(4) :227–239, 2009.
- [6] P. Azerad. *Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport*. PhD thesis, Université de Neuchâtel (Suisse), 1996.
- [7] C. Bailly and C. Bogey. An overview of numerical methods for acoustic wave propagation. In *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD*, P. Wesseling, E. Onate, J. Périaux (Eds), 2006.
- [8] C. Bardos. Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; applications à l'équation de transport. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3 :185–233, 1970.
- [9] J. M. Bart. Methode iterative de decomposition de domaine pour l'equation de galbrun. Technical Report WN/EMA/11/129, CERFACS, 2011.
- [10] K.-J. Bathe, D. Hendriana, F. Brezzi, and G. Sangalli. Inf-sup testing of upwind methods. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 48 :745–760, 2000.
- [11] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected helmholtz equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(1) :409–433, 2004.
- [12] E. Bécache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for time-harmonic acoustics in the presence of a uniform flow. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44 :1191–1217, 2006.
- [13] E. Bécache, S. Fauqueux, and P. Joly. Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves. *Journal of Computational Physics*, 188(2) :399–433, 2003.
- [14] J.-P. Bérenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 114(2) :185–200, 1994.
- [15] J.-P. Bérenger. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, 127(2) :363–379, 1996.
- [16] M. Bernacki and S. Piperno. A dissipation-free time-domain discontinuous galerkin method applied to three-dimensional linearized euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow. *Journal of Computational Acoustics*, 14(04) :445–467, 2006.

- [17] K. S. Bey and J. T. Oden. *hp*-version discontinuous galerkin methods for hyperbolic conservation laws. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 133 :259–286, 1996.
- [18] P. B. Bochev and J. Choi. Improved least-squares error estimates for scalar hyperbolic problems. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 1(159) :115–124, 2001.
- [19] P. B. Bochev and M. D. Gunzberger. *Least Squares Finite Element Methods*. Applied Mathematical Sciences, Vol. 166. Springer, 2009.
- [20] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized euler’s equations. *AIAA J.*, 40 :235–243, 2002.
- [21] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, E.-M. Duclairoir, G. Legendre, and J.-F. Mercier. Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow. *J. of Comp. and Appl. Math.*, 204(2) :428–439, 2007.
- [22] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, E.-M. Duclairoir, and J.-F. Mercier. Acoustic propagation in a flow : numerical simulation of the time-harmonic regime. *ESAIM Proceedings, Volume 22*, 2007.
- [23] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, and É. Lunéville. Analyse mathématique de l’équation de galbrun en écoulement uniforme. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 329(8) :601–606, 2001.
- [24] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier, F. Millot, and S. Pernet. A low Mach model for time harmonic acoustics in arbitrary flows. *J. of Comp. and Appl. Math.*, 234(6) :1868–1875, 2010.
- [25] A.-S. Bonnet-Ben Dhia, J.-F. Mercier, F. Millot, S. Pernet, and E. Peynaud. Time-harmonic acoustic scattering in a complex flow : a full coupling between acoustics and hydrodynamics. *Commun. Comput. Phys.*, 11(2) :555–572, 2012.
- [26] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Second Edition*. Texts in Applied Mathematics, Vol. 15. Springer, 2000.
- [27] F. Brezzi, L. D. Marini, and E. Süli. Discontinuous galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14 :1893–1903, 2004.
- [28] R. J. Briggs. *Electron-stream interaction with plasmas*, volume 121. MIT press Cambridge, MA, 1964.
- [29] A. Brooks and T. Hughes. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 32 :199–259, 1982.
- [30] E. Burman. A posteriori error estimation for interior penalty finite element approximations of the advection-reaction equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(5) :3584–3607, 2009.
- [31] F. Casenave, A. Ern, and G. Sylvand. A coupled boundary element/finite element method for the convected helmholtz equation with non-uniform flow in a bounded domain. *arXiv preprint arXiv :1303.6923*, 2013.
- [32] P. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 4 of *Studies in Mathematics ant its Applications*. North Holland, 1978.
- [33] B. Cockburn, B. Dong, and J. Guzman. Optimal convergence of the original dg method for the transport-reaction equation on special meshes. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 46(3) :1250–1265, 2008.
- [34] B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu. The development of discontinuous galerkin methods. In B. Cockburn, G. E. Karniadakis, and C.-W. Shu, editors, *Discontinuous Galerkin methods (Newport, RI, 1999)*, volume 11 of *Lect. Notes Compt. Sci. Eng.*, pages 3–50. Springer, Berlin, 2000.
- [35] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93. Springer, 1998.

- [36] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 157(2) :527–541, 1991.
- [37] L. Demkowicz and J. Gopalakrishnan. A class of discontinuous Petrov–Galerkin methods. Part i : The transport equation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24) :1558–1572, 2010.
- [38] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspect of Discontinuous Galerkin Methods*. Mathématiques et Applications, No. 69. Springer, 2012.
- [39] J. Diaz and P. Joly. A time domain analysis of pml models in acoustics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(29) :3820–3853, 2006.
- [40] E.-M. Duclairoir. *Rayonnement acoustique dans un écoulement cisailé : Une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique*. PhD thesis, Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique, 2007.
- [41] M. Dumbser and C.-D. Munz. Ader discontinuous galerkin schemes for aeroacoustics. *Comptes Rendus Mécanique*, 333(9) :683–687, 2005.
- [42] S. Duprey. *Analyse Mathématique et Numérique du Rayonnement Acoustique des Turboréacteurs*. PhD thesis, EADS-CRC ; Institut Elie Cartan-Université Poincaré Nancy, 2005.
- [43] G. Elias. Nouvelles expression pour l'énergie et l'intensité acoustique dans un écoulement non uniforme. Rapport technique RT 22/3641 PY, ONERA, 1996.
- [44] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and Practice of Finite Elements*. Applied Mathematical Sciences, No. 159. Springer, New-York, 2004.
- [45] A. Ern and J.-L. Guermond. Discontinuous galerkin Methods for Friedrichs' Systems. i. General Theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :753–778, 2006.
- [46] T.-P. Fries and H. G. Matthies. A review of petrov-galerkin stabilization approaches and an extension to meshfree methods. *Informatikbericht-Nr. 2004-01, TU Braunschweig*, 2004.
- [47] G. Gabard. Discontinuous Galerkin methods with plane waves for time-harmonic problems. *Journal of Computational Physics*, 225(2) :1961–1984, 2007.
- [48] G. Gabard, R. Astley, and M. Ben Tahar. Stability and accuracy of finite element methods for flow acoustics. ii : Two-dimensional effects. *International journal for numerical methods in engineering*, 63(7) :974–987, 2005.
- [49] H. Galbrun. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère et Théorie des zones de silence*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [50] O. Godin. Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid. *Wave Motion*, 25 :143–167, 1997.
- [51] E. Haber and S. MacLachlan. A fast method for the solution of the helmholtz equation. *J. Comput. Phys.*, 230 :4403–4418, 2011.
- [52] P. Houston, C. Schwab, and E. Süli. Stabilized *hp*-finite element methods for first-order hyperbolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37 :1618–1643, 2000.
- [53] F. Q. Hu. On absorbing boundary conditions for linearized euler equations by a perfectly matched layer. *Journal of Computational Physics*, 129(1) :201–219, 1996.
- [54] F. Q. Hu. A stable, perfectly matched layer for linearized euler equations in unsplit physical variables. *Journal of Computational Physics*, 173(2) :455–480, 2001.
- [55] T. Hughes, L. Franca, and G. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics : Viii. The Galerkin /Least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 73 :173–189, 1989.
- [56] A. Iob and R. Arina. Frequency-domain linearized Euler model for turbomachinery noise radiation through engine exhaust. *AIAA J.*, 48(4) :-, 2010.

- [57] A. Iob, R. Arina, and C. Schipani. Frequency-domain linearized euler model for turbomachinery noise radiation through engine exhaust. *AIAA journal*, 48(4) :848, 2010.
- [58] M. Jensen. *Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions*. PhD thesis, University of Oxford, 2004.
- [59] C. Johnson, U. Nävert, and J. Pitkäranta. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45 :285–312, 1984.
- [60] C. Johnson and J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, 46(173) :1–26, 1986.
- [61] D. Kuzmin and S. Korotov. Goal-oriented a posteriori error estimates for transport problems. *Maths. Comp. Sim.*, 80(8) :1674–1683, 2010.
- [62] D. Kuzmin and M. Möller. Goal-oriented mesh adaptation for flux-limited approximations to steady hyperbolic problems. *J. Comp. Appl. Maths*, 233(12) :3113–3120, 2010.
- [63] G. Legendre. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, Université Paris VI, 2003.
- [64] P. Lesaint and P.-A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (C. de Boor, ed.)*, pages 89–123, April 1974.
- [65] F. Madiot. Etude tridimensionnelle de la propagation d'une onde acoustique dans un écoulement quelconque, prise en compte des effets hydrodynamiques. Technical Report TR/EMA/12/47, CERFACS, 2012.
- [66] M. Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *J. Sound Vibration*, 71(3) :429–434, 1980.
- [67] B. Nennig, M. Ben Tahar, and E. Perrey-Debain. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(1) :42–51, 2011.
- [68] Y. Özyörük and S. Lidoine. Numerical analysis of noise radiation from a turbofan exhaust cowl with an extended liner in flight. *AIAA Paper 2008*, 2880, 2008.
- [69] T. E. Peterson. A note on the convergence of the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 :133–140, 1991.
- [70] C. Peyret and G. Élias. Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 110(2) :661–668, 2001.
- [71] B. Poirée. Les équations de l'acoustique linéaire et non-linéaire dans les fluides en mouvement. *Acoustica*, 57 :5–25, 1985.
- [72] P. P. Rao and P. J. Morris. Use of finite Element Methods in Frequency Domain Aeroacoustics. *AIAA J.*, 44(7) :1643–1652, July 2006.
- [73] P. R. Rao and P. J. Morris. Application of a generalised quadrature free discontinuous Galerkin method in aeroacoustics. In *AIAA paper 2003-3120*, May 2003.
- [74] W. Reed and T. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical Report Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [75] G. R. Richter. An optimal-order error estimate for the discontinuous galerkin method. *Math. Comp.*, 50 :75–88, 1988.
- [76] J. Ryan, C.-W. Shu, and H. Atkins. Extension of a post processing technique for the discontinuous galerkin method for hyperbolic equations with application to an aeroacoustic problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(3) :821–843, 2005.
- [77] M. Stynes. Steady-state convection-diffusion problems. *Acta Numer.*, 14 :445–508, 2005.
- [78] C. K. Tam. Computational aeroacoustics : an overview. Technical report, DTIC Document, 2003.

- 
- [79] C. K. Tam, L. Auriault, and F. Cambuli. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized euler equations in open and ducted domains. *Journal of Computational Physics*, 144(1) :213–234, 1998.
- [80] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comput. Phys.*, 107 :262–281, 1993.
- [81] B. J. Tester, G. Gabard, and Y. Özyörük. Influence of mean flow gradients on fan exhaust noise predictions. In *AIAA Paper 2008-2825*, May 2008.
- [82] L. L. Thompson. A review of finite element methods for time-harmonic acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 119(3) :1315–1330, 2005.
- [83] N. Tordjman. *Éléments finis d'ordre élevé avec condensation de masse pour l'équation des ondes*. PhD thesis, Université Paris IX, 1995.
- [84] F. Treysède, G. Gabard, and M. Ben Tahar. A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an eulerian-lagrangian description. *J. Acoust. Soc. Am.*, 113(2) :705–716, 2003.
- [85] X. Zhang, X. X. Chen, C. L. Morfey, and B. J. Tester. Computation of fan noise radiation through a realistic engine exhaust geometry with flow. In *AIAA Paper 2003-3267*, May 2003.





RAYONNEMENT SONORE DANS UN ÉCOULEMENT SUBSONIQUE COMPLEXE EN RÉGIME  
HARMONIQUE : ANALYSE ET SIMULATION NUMÉRIQUE DU COUPLAGE ENTRE LES PHÉNOMÈNES  
ACOUSTIQUES ET HYDRODYNAMIQUES

**Résumé :** La thèse porte sur la simulation, en régime fréquentiel, du rayonnement acoustique en écoulement subsonique quelconque et dans un domaine infini. L'approche choisie s'appuie sur la résolution d'un système équivalent aux équations d'Euler linéarisées : le modèle de Galbrun. Ce modèle repose sur une représentation mixte Lagrange-Euler et aboutit à une équation dont l'unique inconnue est la perturbation du déplacement Lagrangien. Une des difficultés de l'approche de Galbrun est qu'une discrétisation directe de cette équation par une méthode d'éléments finis standard n'est pas stable. Un moyen de contourner cet obstacle est d'écrire une équation augmentée en ajoutant une nouvelle inconnue liée au rotationnel du déplacement appelée par abus vorticité. Cette approche conduit à un système qui couple une équation de type équation des ondes avec une équation de transport en régime fréquentiel. Et elle permet l'utilisation de couches parfaitement adaptées (PML) pour borner le domaine de calcul. La première partie du manuscrit est dédiée à l'étude de cette équation de transport et de sa résolution numérique, en particulier par un schéma de type Galerkin discontinu. Un des points délicats est lié au caractère oscillant des solutions de l'équation. Une fois cette étape franchie, la résolution du problème de propagation acoustique a été abordée. Une approximation basée sur l'utilisation d'éléments finis mixtes continus-discontinus avec couches parfaitement adaptées (PML) a été étudiée. En particulier, les caractères bien posés des problèmes continu et discret ainsi que la convergence du schéma numérique ont été démontrés sous certaines conditions sur l'écoulement porteur. Enfin, une mise en œuvre a été effectuée. Les résultats montrent la validité de cette approche mais aussi sa pertinence dans le cas d'écoulements complexes, voire d'écoulements dits instables.

**Mots clés :** acoustique linéaire en écoulement, modèle de Galbrun, méthode d'éléments finis, méthode de Galerkin discontinue, équation de transport harmonique, couches absorbantes parfaitement adaptées.

SOUND RADIATION IN A COMPLEX SUBSONIC MEAN FLOW IN FREQUENCY REGIME : ANALYSIS  
AND NUMERICAL SIMULATIONS OF THE COUPLING BETWEEN ACOUSTIC AND HYDRODYNAMIC  
PHENOMENA

**Abstract:** This thesis deals with the numerical simulation of time harmonic acoustic propagation in an arbitrary mean flow in an unbounded domain. Our approach is based on an equation equivalent to the linearized Euler equations called the Galbrun equation. It is derived from a mixed Eulerian-Lagrangian formulation and results in a single equation whose only unknown is the perturbation of the Lagrangian displacement. A direct solution using finite elements is unstable but this difficulty can be overcome by using an augmented equation which is constructed by adding a new unknown, the vorticity, defined as the curl of the displacement. This leads to a set of equations coupling a wave like equation with a frequency regime transport equation which allows the use of perfectly matched layers (PML) at artificial boundaries to bound the computational domain. The first part of the thesis is a study of the time harmonic transport equation and its approximation by means of a discontinuous Galerkin scheme, noting the difficulties arising from the oscillating behaviour of its solutions. Once these difficulties have been overcome, it is possible to deal with the resolution of the acoustic propagation problem. The approximation method is based on a mixed continuous-Galerkin and discontinuous-Galerkin finite element scheme. The well-posedness of both the continuous and discrete problems is demonstrated and the convergence of the approximation under some mean flow conditions is proved. Finally a numerical implementation is completed and numerical results are given which confirm the validity of the method and also show that it is relevant in complex cases, even for unstable flows.

**Keywords:** linear acoustics in flows, Galbrun equation, finite element method, discontinuous Galerkin method, harmonic transport equation, perfectly matched layers.