



THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et applications

Ecole doctorale Matisse

présentée par

Thibaut Deheuvels

préparée à l'unité de recherche 6625 du CNRS : IRMAR
Institut de Recherche Mathématique de Rennes
UFR de Mathématiques

Contributions à l'étude
d'espaces de fonctions
et d'EDP dans une
classe de domaines
à frontière fractale
auto-similaire

**Thèse soutenue à Rennes
le 22 mars 2013**

devant le jury composé de :

Yves ACHDOU

Professeur Univ. Paris 7 / directeur

Alain DAMLAMIAN

Professeur Univ. Paris Est Créteil / rapporteur

Bertrand MAURY

Professeur Univ. Paris Sud / examinateur

Umberto MOSCO

Professeur Worcester Polytechnic Institute / rapporteur

Michel PIERRE

Professeur ENS Cachan (Bretagne) / examinateur

Christophe SABOT

Professeur Univ. Lyon 1 / examinateur

Nicoletta TCHOU

MCF Univ. Rennes 1 / directrice

Maria Agostina VIVALDI

Professeur Univ. La Sapienza (Roma) / examinatrice

Résumé en français	5
1.1 Ensembles fractals auto-similaires et domaines ramifiés	7
1.1.1 Les ensembles fractals et leur dimension	7
1.1.2 Ensembles auto-similaires et domaines ramifiés	9
1.1.3 Une classe de domaines ramifiés du plan	14
1.2 Éléments d'analyse dans les domaines irréguliers	18
1.2.1 Le cas régulier	19
1.2.2 Le cas des domaines lipschitziens	20
1.2.3 Domaines (ε, δ) et propriété de prolongement Sobolev	21
1.2.4 Domaines de John et inégalités de Poincaré	22
1.2.5 Trace sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n	23
1.2.6 Espaces de fonctions définies sur des fermés	24
1.3 Le cas des domaines ramifiés	32
1.3.1 Inégalité de Poincaré sur les domaines ramifiés	32
1.3.2 Prolongement et trace dans le cas sous-critique	34
1.3.3 Construction d'un opérateur de trace sur Γ^∞	34
1.3.4 Caractérisation de l'espace de trace	35
1.4 Étude d'EDP dans des domaines à frontière fractale	36
1.4.1 EDP dans des des domaines ramifiés ou des arbres fractals	36
1.4.2 Problèmes de transmission à travers une interface fractale	36
1.5 Résumé de la thèse	37
1.5.1 Comparaison des espaces $JLip$ et Besov	38
1.5.2 Propriété de prolongement Sobolev pour les domaines ramifiés	41
1.5.3 Comparaison des définitions de trace	43
1.5.4 Un problème aux limites dans $\Omega \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$	44

I Trace and extension theorems for a class of ramified domains with self-similar fractal boundary	45
1 <i>JLip</i> versus Sobolev spaces on a class of self-similar fractal foliages	47
1.1 Introduction	47
1.2 The Geometry	49
1.2.1 The similitudes f_1 and f_2 and the self-similar set Γ^∞	49
1.2.2 Ramified domains	57
1.3 Trace results in the ramified domains	60
1.3.1 Definition of $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ for $0 < t < 1$	61
1.3.2 Characterization of the traces on Γ^∞ of the function in $W^{1,p}(\Omega)$	61
1.4 Embedding of the <i>JLip</i> spaces in Sobolev spaces for $a = a^*$	63
1.4.1 Main results	63
1.4.2 Proof of Theorem 1.4.1	64
1.4.3 Proof of Theorem 1.4.2	74
1.5 Proofs of the geometrical lemmas	79
1.5.1 The case $m\theta > \pi/2$	79
1.5.2 The case $m\theta = \pi/2$	85
1.6 Another geometry	86
2 Sobolev extension property for tree-shaped domains with self-contacting fractal boundary	89
2.1 Introduction	89
2.2 The Geometry	91
2.3 Extension and trace results in $W^{1,p}(\Omega)$	93
2.3.1 Extension result in the case $a < a^*$	93
2.3.2 Characterization of the traces on Γ^∞ of functions in $W^{1,p}(\Omega)$	94
2.3.3 <i>JLip</i> versus Sobolev spaces on Γ^∞	95
2.4 The main extension result	95
2.4.1 The extension theorem	95
2.4.2 A density result	97
2.5 Proof of the lifting theorem.	97
2.5.1 Proof of point 1	97
2.5.2 Proof of point 2	105
2.6 Proof of the extension theorem	109
2.7 Proof of the geometrical results	115
2.7.1 Proof of the geometrical results from paragraph 2.5.1.b	115
2.7.2 Proof of the geometrical results from paragraph 2.5.2	118

3	Comparison of different definitions of traces for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries	121
3.1	Introduction	121
3.2	The ramified domains.	123
3.2.1	The self-similar set Γ^∞	123
3.2.2	The ramified domains	123
3.2.3	Ramified domains are two-sets.	124
3.3	Different definitions of boundary traces	125
3.3.1	The classical definition of traces.	125
3.3.2	A trace operator defined by self-similarity	126
3.4	Comparison of the two definitions of trace	126
3.4.1	Extension results for the ramified domains	126
3.4.2	Some results on the classically defined trace.	127
3.4.3	Self-similar strictly defined trace on Γ^∞	129
3.4.4	Comparison of the different traces	131
II	A numerical approach for a mixed transmission problem with a self-similar fractal interface	133
4	Une approche numérique d'un problème de transmission mixte avec une interface fractale auto-similaire	135
4.1	Introduction	135
4.2	Le problème aux limites dans $\Omega \cup \Omega_e$	137
4.2.1	Le problème avec interface fractale.	137
4.2.2	Le problème avec interface préfractale	138
4.3	Le problème extérieur homogène	140
4.3.1	Résolution du problème extérieur homogène.	140
4.3.2	Discrétisation et résolution numérique du problème extérieur	143
4.4	Le problème intérieur.	144
4.5	Résolution du problème aux limites dans $\Omega^m \cup \Omega_e^m$	145
4.5.1	Un exemple dans le cas $f^e = 0$	146
4.5.2	Le problème aux limites avec une source extérieure ponctuelle.	149
4.6	Résolution auto-similaire du problème intérieur	152
4.6.1	Approximation de la solution dans Ω^m	153
4.6.2	Application à la résolution numérique du problème intérieur.	156
4.7	Annexe : calcul explicite des intégrales.	157

Cette thèse porte sur l'étude d'espaces de fonctions définies dans des domaines du plan de type arborescent appelés domaines ramifiés, dont la frontière présente une partie fractale auto-similaire. Ce type d'objet fractal a été introduit par B. Mandelbrot dans [Man82], puis étudié dans l'article [MF99].

Ce manuscrit est consacré à des questions d'analyse en amont de la modélisation de structures arborescentes, comme des arbres ou des plantes, le poumon humain, des deltas de fleuves, etc. On se contente pour le moment d'envisager des modèles en deux dimensions seulement.

Nous nous intéressons dans ce travail à des propriétés de trace et de prolongement pour ces domaines. Nous considérons également des problèmes aux limites dans ces domaines et leur complémentaire.

Dans cette introduction, on commence par décrire la notion de fractalité et ses principales propriétés, on définit la classe des ensembles auto-similaires ainsi que celle des domaines ramifiés de \mathbb{R}^n .

On rappelle ensuite des outils d'analyse dont nous disposons dans les domaines dont la frontière n'est pas régulière. On s'intéresse en particulier aux résultats de trace sur la frontière de ces domaines, et aux résultats de prolongement à l'extérieur. On détaille la définition des espaces de fonctions jouant un rôle dans ces théorèmes.

On introduit ensuite les outils disponibles dans le cas particulier des domaines ramifiés qui font l'objet de cette thèse.

On conclut cette introduction avec des applications des espaces fonctionnels introduits à l'étude d'équations aux dérivées partielles dans des domaines à frontière fractale.

On propose pour finir un résumé des articles dont la thèse est composée.

1.1 ENSEMBLES FRACTALS AUTO-SIMILAIRES ET DOMAINES RAMIFIÉS

1.1.1 LES ENSEMBLES FRACTALS ET LEUR DIMENSION

La notion de *fractalité* a été introduite par Benoît Mandelbrot. Aujourd'hui encore, aucune définition de cette notion ne fait consensus. Il est cependant communément entendu lorsqu'on parle d'objet *fractal* que l'on désigne un objet présentant une extrême irrégularité, caractérisé

par une forme d'invariance par changement d'échelle. En d'autres termes, il s'agit d'ensembles qui présentent des détails à toutes les échelles. On peut aussi voir les ensembles fractals comme des objets dont la dimension n'est pas entière, la notion de dimension étant à préciser.

Les ensembles ayant des propriétés fractales étaient connus avant les travaux de Mandelbrot, c'est le cas par exemple de l'ensemble de Cantor décrit ci-dessous. Toutefois, on doit à Mandelbrot d'avoir établi l'intérêt indéniable de l'étude des fractales, en mettant en valeur les liens entre ces ensembles et les formes de la nature dans son livre *The Fractal Geometry of Nature* [Man82]. Ce dernier propose dans son ouvrage de modéliser des formes ou des structures naturelles non plus par des objets lisses de la géométrie classique, mais par des ensembles fractals, qui rendent compte de l'irrégularité parfois très importante de ces objets.

Exemples Parmi les exemples les plus célèbres, on trouve l'ensemble triadique de Cantor. Il est construit en partant du segment $[0, 1]$ dont on commence par retirer le tiers médian. On obtient alors le deuxième ensemble sur la Figure 1, constitué de deux segments de longueur $1/3$. On retire ensuite le tiers médian de chacun des segments obtenus, et on itère cette opération à l'infini. L'ensemble obtenu de cette manière est l'*ensemble de Cantor*.



FIGURE 1 – Premières itérations de la construction de l'ensemble de Cantor

Le triangle Sierpiński est un autre exemple classique d'ensemble fractal. On l'obtient en partant d'un triangle équilatéral plein dont on retire le triangle équilatéral formé en joignant les milieux des trois côtés du premier triangle. On obtient alors trois triangles dont on retire également un plus petit triangle (voir Figure 2). En renouvelant cette opération à l'infini, on obtient le *triangle de Sierpiński*.

1.1.1.a Dimension de Hausdorff

On a recours à différentes définitions de la notion de dimension pour décrire les objets fractals. La plus commune est la dimension de Hausdorff dont on rappelle ici la définition dans le cas particulier des ensembles boréliens de \mathbb{R}^n .

On rappelle pour commencer la définition des mesures de Hausdorff. Pour $\varepsilon > 0$ et $s > 0$, on définit la mesure borélienne $\mathcal{H}_\varepsilon^s$ par

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(B) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam } X_i)^s, B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i, \text{diam } X_i < \varepsilon \text{ pour tout } i \in \mathbb{N} \right\},$$

pour tout borélien B de \mathbb{R}^n . On définit alors la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle comme la mesure borélienne $\mathcal{H}^s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s$.

On note que la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^n coïncide sur \mathbb{R}^n avec la mesure de Lebesgue n -dimensionnelle λ_n .

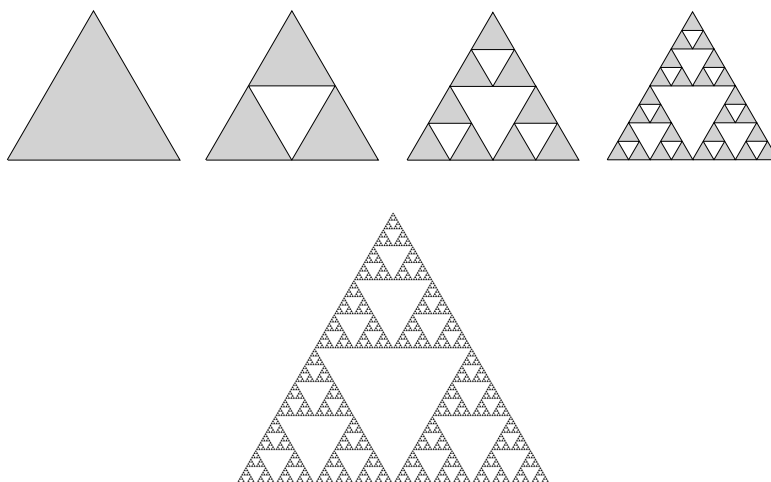


FIGURE 2 – Le triangle de Sierpiński et les premières itérations de sa construction

Les mesures de Hausdorff présentent la particularité fondamentale que pour tout borélien B de \mathbb{R}^n , il existe un réel d , $0 \leq s_d \leq \infty$ tel que

- ◇ pour tout $s < d$, $\mathcal{H}^s(B) = \infty$,
- ◇ pour tout $s > d$, $\mathcal{H}^s(B) = 0$.

Le réel d est appelé *dimension de Hausdorff* du borélien B .

1.1.2 ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES ET DOMAINES RAMIFIÉS

1.1.2.a Ensembles autosimilaires

Les ensembles dits *auto-similaires* peuvent être décrits comme des ensembles formés de contractions d'eux-mêmes. Ils présentent de ce fait une forte invariance par changement d'échelle. De fait, la plupart d'entre eux ont des propriétés fractales.

L'intérêt porté à ces ensembles s'explique par le fait que malgré leur irrégularité, ils s'expriment de manière très simple, et leur invariance par changement d'échelle permet de les étudier avec précision. Ils sont en outre de bons modèles pour nombre d'objets naturels qui ont des propriétés relativement similaires, comme les arbres, les fougères, certaines montagnes, mais aussi les poumons ou les vaisseaux sanguins.

Les ensembles auto-similaires peuvent être définis dans le cadre très général des espaces métriques, on se limitera toutefois ici au cas de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, suffisant pour la suite.

Plus précisément, un ensemble auto-similaire K de \mathbb{R}^n s'écrit

$$K = \bigcup_{i=1}^N f_i(K), \quad (1)$$

où les f_1, \dots, f_N sont des similitudes contractantes, c'est-à-dire qu'il existe $r_i \in]0, 1[$, $i = 1, \dots, N$ appelés *rappports de contraction* des f_i , tels que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $i = 1, \dots, N$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| = r_i |x - y|.$$

On peut montrer (voir par exemple [Hut81]) que lorsqu'on a fixé les similitudes contractantes f_1, \dots, f_N , il existe un unique compact K de \mathbb{R}^n satisfaisant (1). On dit alors que le compact K est l'*invariant* associé à la famille de similitudes (f_1, \dots, f_N) . On donne parfois à la famille (f_1, \dots, f_N) le nom de *système de fonctions itérées* (IFS).

La preuve utilise le théorème de point fixe de Banach-Picard, l'application F définie par

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A) \quad (2)$$

pour tout compact A de \mathbb{R}^n étant contractante pour la distance de Hausdorff. L'application F fournit alors un moyen de construire l'ensemble invariant associé à un IFS par récurrence, en appliquant F de façon itérée à n'importe quel compact de \mathbb{R}^n .

Les systèmes de fonctions itérées sont alors un moyen très pratique pour construire aisément des ensembles fractals.

Exemples L'exemple le plus simple d'ensemble auto-similaire est le segment $[0, 1]$, qui est l'invariant des homothéties de centre 0 et 1, et de rapport $\frac{1}{2}$. Cet exemple montre par ailleurs que les ensembles auto-similaires peuvent être réguliers et avoir des dimensions entières.

De son côté, l'ensemble de Cantor est en fait l'invariant de la famille de similitudes constituée des homothéties de centre 0 et 1, et de rapport $\frac{1}{3}$. La construction de la Figure 1 ci-dessus est d'ailleurs la construction itérative décrite plus haut : elle consiste à appliquer F de manière répétée au segment $[0, 1]$.

Le triangle de Sierpiński est quant à lui l'invariant de l'IFS constitué des trois homothéties ayant pour centre les sommets respectifs d'un triangle équilatéral, et pour rapport $\frac{1}{2}$. On obtient la construction de la Figure 2 en appliquant la transformation F associée à l'IFS au triangle équilatéral plein.

DIMENSION DES ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES

On peut facilement calculer la dimension de Hausdorff d'un ensemble auto-similaire K à partir des rapports de contraction des similitudes qui lui sont associées, à condition que ces similitudes vérifient les bonnes propriétés. Bien que le compact auto-similaire associé à un IFS soit unique, on voit aisément que la réciproque est fautive : on obtient par exemple le même compact invariant en ajoutant à un IFS l'une de ses similitudes. On remarque également que le segment $[0, 1]$ est aussi l'invariant des homothéties de centre 0 et 1 ayant pour rapport n'importe quel réel $a \in [1/2, 1]$.

On dit qu'un IFS satisfait la *condition de l'ouvert*, ou *condition de Moran* (voir [Mor46]) s'il existe un ouvert borné $\omega \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\begin{cases} \bigcup_{i=1}^N f_i(\omega) \subset \omega, \\ f_i(\omega) \cap f_j(\omega) \text{ si } i \neq j. \end{cases} \quad (3)$$

Dans le cas où la condition de l'ouvert est vérifiée, Moran montre dans [Mor46] que la dimension de Hausdorff du compact auto-similaire K est l'unique réel $d > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^N r_i^d = 1. \quad (4)$$

En fait, on a même $0 < \mathcal{H}^d(K) < \infty$.

On note par exemple que lorsqu'on ajoute une de ses similitudes à un IFS, ou lorsqu'on augmente le rapport de contraction de similitudes engendrant le segment $[0, 1]$, on obtient un IFS qui ne satisfait pas la condition de l'ouvert. La condition de l'ouvert permet en quelque sorte de limiter les recouvrements entre les ensembles $f_i(K)$, $i = 1, \dots, N$.

Exemples On voit aisément que la famille de similitudes décrite au paragraphe précédent pour construire l'ensemble de Cantor vérifie la condition de l'ouvert dans \mathbb{R} , en considérant par exemple l'ouvert $]0, 1[$. La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor vaut donc $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,63$.

De même, les similitudes ayant pour invariant le triangle de Sierpiński données au paragraphe précédent vérifient la condition de Moran dans \mathbb{R}^2 en prenant pour ω l'intérieur du triangle équilatéral. On en déduit la dimension de Hausdorff du triangle de Sierpiński, qui vaut $\ln 3 / \ln 2 \approx 1,58$.

DESCRIPTION DES ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES

Si K est l'invariant d'un IFS (f_1, \dots, f_N) , on peut établir une correspondance entre les suites de similitudes prises parmi les f_i et les points de K . On a alors recours à des notations consistant à représenter les suites de similitudes par des suites à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$; on introduit les notations suivantes :

- ◊ on désigne par $\mathcal{A}_k = \{1, \dots, N\}^k$ l'ensemble des suites finies de taille $k \in \mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, on appelle aussi les éléments de \mathcal{A}_k des *mots* de taille k dans l'alphabet $\{1, \dots, N\}$, il sera utile d'introduire aussi un ensemble \mathcal{A}_0 contenant un seul élément qu'on appelle le *mot vide* et qu'on convient de représenter par ϵ ;
- ◊ on note $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, on appelle les éléments de \mathcal{A} des *mots finis* dans l'alphabet $\{1, \dots, N\}$;
- ◊ on note $\mathcal{A}_\infty = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}$ les suites infinies à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$, et on appelle les éléments de \mathcal{A}_∞ des *mots infinis* dans l'alphabet $\{1, \dots, N\}$.

Les ensembles \mathcal{A}_k , \mathcal{A} et \mathcal{A}_∞ permettent de représenter les suites de tailles k , finies, et infinies de similitudes parmi les f_i : pour $k \geq 1$ et $\sigma \in \mathcal{A}_k$, on définit la similitude f_σ par

$$f_\sigma = f_{\sigma(1)} \circ \dots \circ f_{\sigma(k)}. \quad (5)$$

Dans le cas où σ est le mot vide ϵ , on convient que $f_\epsilon = \text{Id}$. Si $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la suite $(f_{\sigma(1)} \circ \dots \circ f_{\sigma(k)}(x))_k$ converge vers un point de l'invariant K $f_\sigma(x)$ indépendant de x qu'on appelle encore f_σ :

$$f_\sigma = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{\sigma(1)} \circ \dots \circ f_{\sigma(k)}(x). \quad (6)$$

On appelle parfois f_σ le *point limite* du mot $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$. La proposition suivante justifie la description du compact invariant par les suites de similitudes parmi les f_i .

PROPOSITION 1.1.1 – Si K est l'invariant des similitudes contractantes f_1, \dots, f_N , alors l'application

$$h : \sigma \in \mathcal{A}_\infty \mapsto f_\sigma \in K \quad (7)$$

est surjective.

On peut donc décrire tout point x de K par au moins une suite infinie de similitudes, qu'on appelle encore *adresse* du point x .

On note par ailleurs que la fonction h n'est pas toujours injective, même lorsque l'IFS satisfait la condition de l'ouvert. Dans le cas du segment $[0, 1]$, on a par exemple $\frac{1}{2} = h((1, 2, 2, \dots)) = h((2, 1, 1, \dots))$. En fait, la fonction h est une bijection si et seulement si $f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset$ pour tous $i \neq j$.

QUELQUES NOTATIONS

Pour décrire les suites de similitudes, il sera utile pour la suite d'avoir recours aux notations suivantes, empruntées à la théorie des langages formels.

- ◊ Pour deux entiers n, m et $\sigma \in \mathcal{A}_n, \sigma' \in \mathcal{A}_m$, on définit

$$\sigma\sigma' = (\sigma(1), \dots, \sigma(n), \sigma'(1), \dots, \sigma'(m)) \in \mathcal{A}_{n+m}.$$

Pour $m = \infty$, on définit $\sigma\sigma' \in \mathcal{A}_\infty$ de manière similaire.

- ◊ Si $n > 0$ et $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on définit pour $k \geq 0$

$$\sigma^k = \underbrace{\sigma\sigma \dots \sigma}_k \in \mathcal{A}_{nk}, \quad \sigma^\infty = \sigma\sigma \dots \sigma \dots \in \mathcal{A}_\infty,$$

- ◊ Si $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$, on pose $\sigma|\tau = \{\sigma, \tau\} \subset \mathcal{A}$.
- ◊ Pour $\sigma \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{X} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$, on définit $\sigma\mathcal{X} = \{\sigma\tau, \tau \in \mathcal{X}\}$. De même, si $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, on définit l'ensemble $\mathcal{X}\sigma = \{\tau\sigma, \tau \in \mathcal{X}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$.
- ◊ Si $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ et $k \in \mathbb{N}$, on introduit les ensembles

$$\mathcal{X}^k = \{\sigma_1 \dots \sigma_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{X}\}, \quad \mathcal{X}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^k$$

$$\mathcal{X}^\infty = \{\sigma_1 \sigma_2 \dots \in \mathcal{A}_\infty, \forall i, \sigma_i \in \mathcal{X}\}.$$

- ◊ Si $\sigma \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ s'écrit $\sigma = \tau\tau'$, on dit que τ est un *préfixe* de σ , et que τ' est un *suffixe* de σ .
- Si $\sigma, \tau \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ sont tels qu'aucun des deux mots σ et τ n'est préfixe l'un de l'autre, on notera $\sigma \perp \tau$.

Exemple. Si $N = 2$, l'ensemble noté $(12|21)^\infty$ désigne les mots infinis σ vérifiant $\sigma(2k) \neq \sigma(2k-1)$ pour tout entier k positif.

ENSEMBLE D'AUTO-INTERSECTION, ENSEMBLE POST-CRITIQUE

On définit ici la notion d'*auto-intersection* d'un ensemble auto-similaire, utile pour la suite. On dit qu'un ensemble auto-similaire K invariant pour la famille de similitudes (f_1, \dots, f_N) présente des auto-intersections s'il existe des points de K ayant deux adresses distinctes, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_\infty$ tels que $\sigma \neq \tau$ et $h(\sigma) = h(\tau)$.

On définit alors l'ensemble d'*auto-intersection* de K comme l'ensemble des points de K ayant plusieurs adresses distinctes, qu'on peut écrire $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\Xi_K)$, où

$$\Xi_K = \bigcup_{i \neq j} f_i(K) \cap f_j(K). \quad (8)$$

On note par exemple que l'ensemble de Cantor n'a pas d'auto-intersections, ou que l'ensemble d'auto-intersection du triangle de Sierpiński est constitué des images des centres des trois similitudes par les transformations f_σ , $\sigma \in \mathcal{A} \setminus \{\epsilon\}$.

Ensembles auto-similaires p.c.f. Soient K un ensemble auto-similaire et Ξ_K l'ensemble défini par (8). On introduit l'ensemble $\mathcal{C}_K = h^{-1}(\Xi_K) \subset \mathcal{A}$ appelé *ensemble critique* associé à K , où la fonction h est définie en (7). On appelle alors ensemble *post-critique* de K l'ensemble de mots

$$\mathcal{P}_K = \bigcup \{ \sigma \in \mathcal{A}_\infty, \exists \tau \in \mathcal{A} \setminus \{\epsilon\}, \tau\sigma \in \mathcal{C}_K \}. \quad (9)$$

On dit alors que K est *post-critiquement fini* (p.c.f.) si l'ensemble post-critique \mathcal{P}_K est fini. On définit alors l'ensemble

$$V_{0,K} = h(\mathcal{P}_K) \quad (10)$$

qu'on appelle parfois le *bord* de K . On note Ξ , \mathcal{C} , \mathcal{P} et V_0 au lieu de Ξ_K , \mathcal{C}_K , \mathcal{P}_K et $V_{0,K}$ lorsque le contexte est clair.

Exemple. Dans le cas du triangle de Sierpiński, l'ensemble Ξ est constitué des milieux des trois segments du triangle équilatéral formé par les points fixes des similitudes. L'ensemble critique est alors donné par

$$\mathcal{C} = \{12^\infty, 21^\infty, 23^\infty, 32^\infty, 31^\infty, 13^\infty\}.$$

L'ensemble post-critique est alors $\mathcal{P} = \{1^\infty, 2^\infty, 3^\infty\}$, et V_0 est constitué des centres des trois similitudes.

1.1.2.b Mesure invariante sur les ensembles auto-similaires

Si K est le compact invariant associé à l'IFS (f_1, \dots, f_N) , J. Hutchinson montre qu'il existe une unique mesure de probabilité μ sur K telle que

$$\mu = \sum_{i=1}^N r_i^d \mu_{f_i}, \quad (11)$$

où d est le réel défini en (4) et μ_{f_i} désigne la mesure image de μ par la similitude f_i (voir [Hut81]). On appelle cette mesure la *mesure invariante* ou *mesure auto-similaire* associée aux similitudes f_1, \dots, f_N .

Dans le cas où l'IFS vérifie la condition de l'ouvert, cette mesure n'est autre qu'une renormalisation de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^d restreinte à K . On montre en outre (voir par exemple [Kigo1]) que K vérifie la propriété

$$\mathcal{H}^d(f_i(K) \cap f_j(K)) = 0 \quad \text{pour } i \neq j. \quad (12)$$

1.1.2.c Domaines ramifiés

Nous décrivons ici les domaines ramifiés, sur lesquels nous allons porter notre intérêt dans toute la suite. Il s'agit de domaines de type arborescent de \mathbb{R}^n dont la frontière contient un ensemble auto-similaire.

On considère un IFS (f_1, \dots, f_N) dans \mathbb{R}^n , ainsi que deux points P_1 et P_2 de \mathbb{R}^n tels que $P_1 \neq P_2$, et une courbe régulière Γ^0 joignant P_1 à P_2 . Lorsqu'il existe un ouvert connexe borné Y^0 dans \mathbb{R}^n de frontière régulière par morceaux tel que :

- ◊ $\Gamma^0 \cup \bigcup_i f_i(\Gamma^0) \subset \partial Y^0$,
- ◊ pour tous $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ tels que $\sigma \perp \tau$, $f_\sigma(Y^0) \cap f_\tau(Y^0) = \emptyset$,

on dit que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$\text{Intérieur} \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\overline{Y^0}) \right) \quad (13)$$

est un *domaine ramifié* pour les similitudes f_1, \dots, f_N .

Du fait de leur définition, les domaines ramifiés satisfont la propriété (3), ce qui implique qu'un IFS pour lequel il existe un domaine ramifié satisfait la condition de l'ouvert.

1.1.3 UNE CLASSE DE DOMAINES RAMIFIÉS DU PLAN

1.1.3.a Une classe d'ensembles auto-similaires non p.c.f. du plan

Nous décrivons ici les ensembles auto-similaires qui nous intéresseront dans la suite de la thèse. Ces ensembles ont été définis dans [Man82] par B. Mandelbrot qui introduit la classe des arbres fractals, des compacts de \mathbb{R}^n présentant des branchements à toutes les échelles. Les arbres fractals, et particulièrement leur partie auto-similaire ont été étudiés en détail par B. Mandelbrot et M. Frame dans [MF99]. La topologie de ces ensembles a par ailleurs fait l'objet d'une étude dans [Tay07, Tay09].

On se place dans \mathbb{R}^2 . On considère deux similitudes f_1 et f_2 dont les rapports de contraction sont les mêmes (notés a), et les angles sont opposés (notés $\pm\theta$), avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Plus précisément, les similitudes f_1 et f_2 que nous considérerons sont décrites par

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\ f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, où α et β sont des réels positifs. On appelle Γ^∞ le compact invariant pour les similitudes f_1, f_2 . La Figure 3 présente des exemples de ces invariants pour différentes valeurs de a et de θ .

On verra dans le paragraphe suivant que le système de similitudes (f_1, f_2) satisfait la condition de l'ouvert, ce qui justifie le calcul immédiat de la dimension de Hausdorff de Γ^∞ notée d dans la suite :

$$d := \dim_H \Gamma^\infty = \frac{\log 2}{\log 1/a}.$$

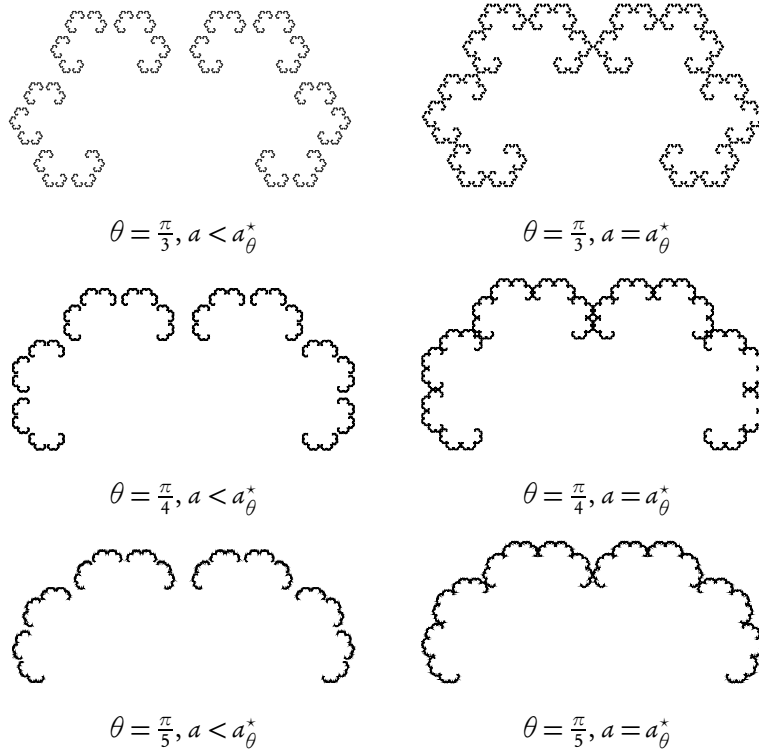


FIGURE 3 – L'invariant des similitudes f_1 et f_2 pour différentes valeurs de θ et a .

L'ENSEMBLE D'AUTO-INTERSECTION DE Γ^∞

Le résultat suivant, énoncé par ailleurs dans [MF99], est démontré au Chapitre 1 (voir aussi la Figure 3).

THÉORÈME 1.1.1 – *Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, il existe un unique réel $a_\theta^* \in (\frac{1}{2}, 1)$ tel que :*

- ◇ *si $a < a_\theta^*$, alors $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty) = \emptyset$, ce qui implique par auto-similarité que Γ^∞ est totalement disconnexe, c'est-à-dire que les seules parties connexes de Γ^∞ sont les singletons,*
- ◇ *si $a = a_\theta^*$, alors $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty) \neq \emptyset$, c'est-à-dire que Γ^∞ présente des auto-intersections, et l'auto-similarité de l'invariant implique que Γ^∞ est connexe (par le Théorème 1.6.2. de [Kig01]).*

Il sera utile par la suite de s'intéresser à l'ensemble d'auto-intersection du fractal Γ^∞ lorsque $a = a_\theta^*$, et plus particulièrement à sa dimension. On rappelle que l'ensemble d'auto-intersection de Γ^∞ s'écrit $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\Xi)$, où $\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_1(\Gamma^\infty)$. Sa dimension de Hausdorff est alors la même que celle de Ξ .

Lorsque $a = a_\theta^*$, on distingue deux cas très différents.

- Si θ n'appartient pas à l'ensemble $\frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}$ des réels $\frac{\pi}{2k}$ où $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on montre dans le Théorème 1.2.2 que Ξ est réduit à un singleton donné par le point limite $f_{12^{m+1}(12)^\infty}$, où m est le plus petit entier tel que $m\theta \geq \frac{\pi}{2}$. En d'autres termes, l'ensemble critique \mathcal{C} de Γ^∞ s'écrit :

$$\mathcal{C} = \{12^{m+1}(12)^\infty, 21^{m+1}(21)^\infty\}.$$

On en déduit que l'ensemble post-critique est $\{2^k(12)^\infty, 0 \leq k \leq m+1\} \cup \{1^k(21)^\infty, 0 \leq k \leq m+1\}$ et que Γ^∞ est p.c.f.

Par ailleurs, l'ensemble d'auto-intersection de Γ^∞ est dénombrable dans ce cas.

- Si en revanche θ appartient à l'ensemble $\frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}$, on montre dans le Théorème 1.2.2 que Ξ est constitué des points limites f_σ pour $\sigma \in 12^{m+1}(12|21)^\infty$. L'ensemble critique de Γ^∞ s'écrit alors

$$\mathcal{C} = 12^{m+1}(12|21)^\infty | 21^{m+1}(21|12)^\infty.$$

L'ensemble post-critique est donc donné par

$$\{2^k(12|21)^\infty, 0 \leq k \leq m+1\} \cup \{1^k(21|12)^\infty, 0 \leq k \leq m+1\},$$

et Γ^∞ n'est pas p.c.f.

Dans ce cas, Ξ est par ailleurs un ensemble de type Cantor, dont la dimension de Hausdorff est donnée par

$$\dim_H \Xi = \frac{\log 2}{2 \log 1/a} = \frac{d}{2}.$$

Ceci découle du fait qu'à une contraction près, on peut voir Ξ comme le compact invariant des similitudes $f_1 \circ f_2$ et $f_2 \circ f_1$, toutes deux de rapport de contraction a^2 (voir Proposition 1.2.1), dont on verra qu'elles forment un système satisfaisant la condition de l'ouvert.

Le paramètre critique a_θ^* peut être calculé en résolvant une équation polynomiale dont le degré dépend de l'angle θ (voir le Théorème 1.2.1) :

PROPOSITION 1.1.1 – Pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, le paramètre critique a_θ^* est donné par l'unique racine positive de l'équation :

$$\sum_{i=0}^m X^{i+2} \cos(i\theta) = \frac{1}{2},$$

où m est le plus petit entier tel que $m\theta \geq \frac{\pi}{2}$.

Dans [MF99], les auteurs étudient le rapport critique a_θ^* quand θ varie et proposent une courbe représentant a_θ^* en fonction de l'angle θ , donnée en Figure 4. Le cas qui nous intéresse ici correspond aux angles $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sur la figure.

1.1.3.b Une classe de domaines ramifiés du plan

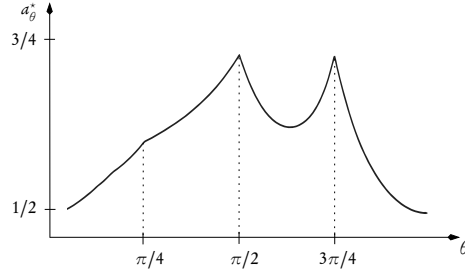


FIGURE 4 – Valeurs de a_θ^* en fonction de l'angle θ
(source : [MF99])

Nous donnons ici un exemple de domaines ramifiés pour les similitudes f_1 et f_2 définies en (14). Les domaines ramifiés que nous considérons ici sont construits en prenant Y^0 polygonal. On introduit les points du plan $P_1 = (-1, 0)$ et $P_2 = (1, 0)$, ainsi que le segment Γ^0 joignant P_1 à P_2 . On définit alors Y^0 comme l'intérieur du polygone $P_1 P_2 f_2(P_2) f_2(P_1) f_1(P_2) f_1(P_1) P_1$ (voir Figure 5). On appelle alors $\Omega(a, \theta, \alpha, \beta)$ l'ouvert défini par (13).

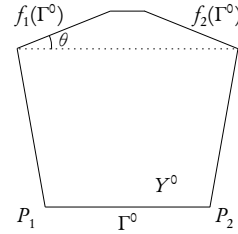


FIGURE 5 – Construction de Y^0

Dans [AT10], Y. Achdou et N. Tchou donnent une condition suffisante sur α , β et θ pour que Ω soit un domaine ramifié pour les similitudes f_1 et f_2 , comme défini au paragraphe 1.1.2.c, et prouvent le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1.2 – *Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, il existe des réels $\alpha, \beta > 0$ tels que $\Omega(a, \theta, \alpha, \beta)$ soit un domaine ramifié pour tout $a \leq a_\theta^*$.*

Dans la suite, on notera \mathcal{D} la classe des domaines ramifiés obtenus de cette manière :

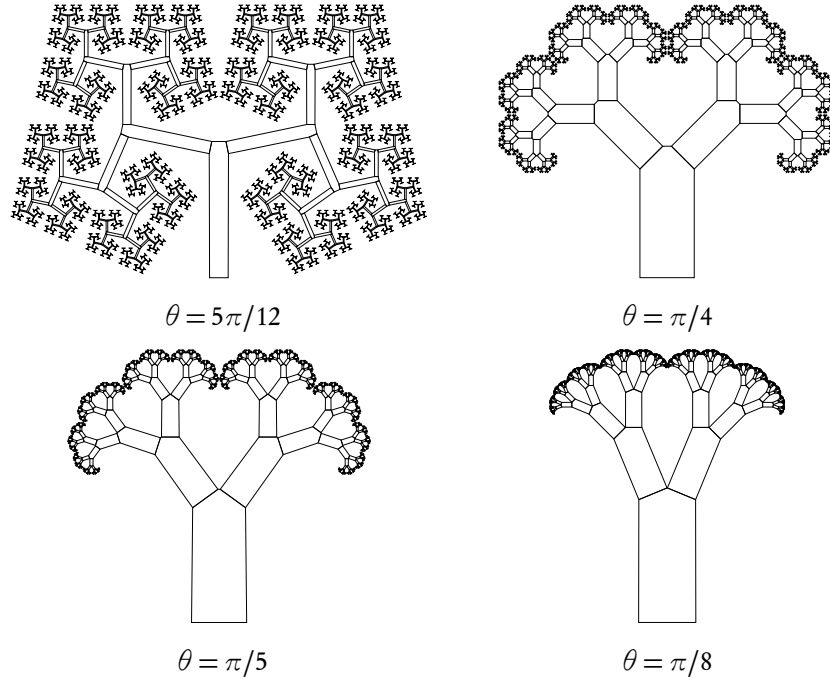
$$\mathcal{D} = \{ \Omega(a, \theta, \alpha, \beta) \text{ domaine ramifié, } 0 < \theta < \pi/2, a \leq a_\theta^* \}. \quad (15)$$

La Figure 6 présente quelques exemples de domaines ramifiés de \mathcal{D} pour différentes valeurs de θ .

1.1.3.c Le cas de la dimension 3

En dimension 3, des ensembles auto-similaires du type des ensembles introduits au paragraphe 1.1.3.a ont fait l'objet d'une étude géométrique dans [FLB07, BB09]. Dans ces travaux, le nombre de similitudes est arbitraire, et les similitudes présentent des propriétés de symétrie analogues à celles qu'on considère en dimension 2.

En particulier, dans [FLB07], les auteurs s'intéressent au cas où l'auto-intersection des ensembles fractals obtenus est non vide. Plus spécifiquement, ils proposent une méthode pour approcher le rapport de contraction critique des similitudes pour lequel l'auto-intersection est non vide, ainsi que les adresses des éventuels points doubles du fractal. On constate d'importantes analogies avec le cas de la dimension 2 : les points d'auto-intersection ont les mêmes adresses pour de

FIGURE 6 – Quelques exemples de domaines ramifiés pour $a = a_\theta^*$

nombreux angles différents, et ces adresses changent à des valeurs critiques de l'angle définissant les similitudes. De plus, les adresses des points doubles sont périodiques à partir d'un certain rang.

Par ailleurs, on peut construire des domaines ramifiés en dimension 3 dont la partie auto-similaire de la frontière est non p.c.f. (un tapi de Sierpiński par exemple). Il semble toutefois ardu de trouver des exemples en dimension 3 analogues au cas où $\theta \in \pi/(2\mathbb{N}^*)$ en dimension 2.

1.2 ÉLÉMENTS D'ANALYSE D'ESPACES DE FONCTIONS DANS LES DOMAINES IRRÉGULIERS

On désigne ici par domaine de \mathbb{R}^n un ouvert connexe de \mathbb{R}^n . Pour un domaine ω de \mathbb{R}^n et $1 \leq p \leq \infty$, on appelle $W^{1,p}(\omega)$ l'espace des fonctions de $L^p(\omega)$ dont les dérivées partielles du premier ordre au sens des distributions sont dans l'espace $L^p(\omega)$. On rappelle que la norme définie sur $W^{1,p}(\omega)$ par $\|u\|_{W^{1,p}(\omega)} = (\|u\|_{L^p(\omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\omega)}^p)^{1/p}$ lui confère une structure d'espace de Banach.

Les propriétés de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\omega)$ dépendent de façon significative de la régularité de la frontière de ω . Dans le cas où ω a une frontière lisse, les fonctions de $W^{1,p}(\omega)$ ont par exemple une trace sur la frontière du domaine, elles peuvent être prolongées en des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et vérifient des inégalités de Poincaré. Ces propriétés s'avèrent très utiles pour l'étude de problèmes aux limites comportant des équations aux dérivées partielles dans ω .

Lorsque le domaine ω n'est plus régulier, ces propriétés peuvent ne plus être satisfaites. En

outre, il est parfois très délicat de caractériser géométriquement les domaines jouissant de ces propriétés.

1.2.1 LE CAS RÉGULIER

1.2.1.a Densité de $C^\infty(\bar{\omega})$

On désigne par $C^\infty(\bar{\omega})$ l'espace définies comme les restrictions à ω des fonctions C^∞ de \mathbb{R}^n . Dans le cas où l'ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^n$ est régulier, la densité des fonctions de $C^\infty(\bar{\omega})$ dans l'espace $W^{1,p}(\omega)$ est un résultat fondamental. Ce résultat est en fait vrai dans le cadre assez général des ouverts dits à frontière continue, c'est-à-dire les ouverts dont la frontière est localement le graphe d'une fonction continue (voir par exemple [ADN59, Neč67]). Ces ouverts ont la propriété d'être localement du même côté de leur frontière, ce qui n'est par exemple pas le cas des domaines ramifiés introduits au §1.1.3.b dans le cas critique où $a = a_\theta^*$.

THÉORÈME 1.2.1 – *Si ω est un ouvert borné à frontière continue de \mathbb{R}^n , alors l'espace $C^\infty(\bar{\omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

1.2.1.b Traces sur la frontière

Il est particulièrement important dans l'étude de problèmes aux limites pour des opérateurs différentiels définis dans ω de définir une notion de trace sur la frontière $\partial\omega$ des fonctions de $W^{1,p}(\omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Il est alors intéressant de caractériser les espaces de fonctions contenant les traces de ces fonctions, notamment comme des espaces de Besov, qui peuvent être vus comme des espaces de Sobolev généralisés d'ordre fractionnaire.

Lorsque l'ouvert ω est régulier, par exemple de classe C^1 (c'est-à-dire que sa frontière est localement le graphe d'une fonction C^1), la notion de trace sur $\partial\omega$ est déduite de la restriction des fonctions de l'espace $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ à $S = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, où $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^1 à support compact dans \mathbb{R}^n . On commence en effet par remarquer que si $1 \leq p < \infty$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u|_S(x)|^p dx \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^p,$$

où $u|_S : x \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto u(x, 0)$ est la restriction de u à S . On utilise ensuite la densité des fonction de $C_c^1(\mathbb{R}_+^n)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ pour définir par extension un opérateur de trace pour les fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ sur S .

On peut alors définir une notion de trace pour les fonctions de $W^{1,p}(\omega)$ lorsque ω est un ouvert régulier de \mathbb{R}^n en rectifiant localement la frontière de ω par un changement de variable pour se ramener au cas de \mathbb{R}_+^n .

On a alors le théorème de trace bien connu (voir par exemple [Bre11]) :

THÉORÈME 1.2.2 – *Si ω est un domaine borné de classe C^1 de \mathbb{R}^n , l'application $u \in C^1(\bar{\omega}) \mapsto u|_{\partial\omega}$ admet une unique extension continue comme opérateur de $W^{1,p}(\omega)$ dans $B_{1-\frac{1}{p}}^{p,p}(\partial\omega)$.*

On rappelle que si $0 < s < 1$, l'espace $B_s^{p,p}(\partial\omega)$ est défini par

$$\{v \in L^p_\sigma(\partial\omega), |v|_{B_s^{p,p}(\partial\omega)} < \infty\},$$

où $|v|_{B_s^{p,p}(\partial\omega)} = \iint_{\partial\omega^2} \frac{|v(x)-v(y)|^p}{|x-y|^{n-sp}} d\sigma(x) d\sigma(y)$ et σ est la mesure surfacique associée à $\partial\omega$.

Lorsque la frontière est beaucoup moins régulière, on ne peut plus se ramener localement au cas où $\omega = \mathbb{R}_+^n$, et la définition de la trace proposée ci-dessus n'est plus possible.

1.2.1.c Propriété de prolongement $W^{1,p}$

Il est souvent utile pour établir des propriétés de l'espace $W^{1,p}(\omega)$ de les déduire des propriétés de l'espace $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque le domaine ω a la *propriété de prolongement* $W^{1,p}$, c'est-à-dire lorsqu'il existe un opérateur linéaire continu $\Lambda : W^{1,p}(\omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\omega)$, $(\Lambda u)|_\omega = u$, l'espace $W^{1,p}(\omega)$ hérite en effet de nombreuses propriétés de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Lorsqu'un tel opérateur existe, on dit aussi que ω est un *domaine de prolongement* $W^{1,p}$. Par ailleurs, si ω est un domaine de prolongement $W^{1,p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$, on dit que ω est un domaine de prolongement Sobolev, ou encore qu'il a la *propriété de prolongement Sobolev*.

Un tel prolongement n'est pas toujours possible lorsque le domaine ω n'est pas régulier, nous verrons par exemple que les domaines ramifiés construits en 1.1.3.b n'ont pas la propriété de prolongement $W^{1,p}$ pour tout p . On a le résultat classique (voir par exemple [Bre11]) :

THÉORÈME 1.2.3 – *Les ouverts de \mathbb{R}^n de classe C^1 sont des domaines de prolongement Sobolev.*

Il existe des liens entre les domaines de prolongement $W^{1,p}$ et les domaines de prolongement $W^{1,q}$ dans \mathbb{R}^n pour $q \neq p$. Le résultat suivant dû à P. Koskela montre une inclusion dans le cas où $p \geq n$ (voir [Kos98]).

THÉORÈME 1.2.4 – *Si $\omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine de prolongement $W^{1,n}$ de \mathbb{R}^n , alors ω a la propriété de prolongement $W^{1,q}$ pour tout $q \geq n$.*

Ce résultat devient faux si $q < n$: pour tout $n > 0$, il existe un domaine de prolongement $W^{1,n}$ de \mathbb{R}^n qui n'a pas la propriété de prolongement $W^{1,q}$ pour tout $q < n$ (voir [Kos99]). Par ailleurs, V. Maz'ja construit dans [Maz85, p.74] un domaine ω de \mathbb{R}^2 qui a la propriété de prolongement $W^{1,p}$ pour $1 \leq p < 2$ mais pas pour $p \geq 2$, et dont le complémentaire dans \mathbb{R}^2 a la propriété de prolongement $W^{1,p}$ pour tout $p > 2$ mais pas pour $1 \leq p \leq 2$. On verra également dans le Chapitre 2 qu'une sous-classe des domaines ramifiés de \mathbb{R}^2 construits au paragraphe 1.1.3.b ont la propriété de prolongement $W^{1,q}$ pour tout $q < p$ pour un certain $p < 2$, mais pas pour $q > p$.

1.2.2 LE CAS DES DOMAINES LIPSCHITZIENS

Les premiers domaines irréguliers pour lesquels les propriétés du paragraphe précédent ont été étendues sont les domaines à frontière lipschitzienne de \mathbb{R}^n dits *domaines lipschitziens*, c'est-à-dire les domaines dont la frontière est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne.

Un résultat dû à E. Gagliardo [Gag57] montre que le théorème de trace 1.2.2 reste vrai pour les domaines à frontière lipschitzienne (voir aussi [Gri85]).

Par ailleurs, la propriété de prolongement s'étend aussi aux domaines lipschitziens.

THÉORÈME 1.2.5 – *Tout domaine lipschitzien est un domaine de prolongement Sobolev.*

Ce théorème est dû à A. Calderón et E.M. Stein ; Calderón prouve dans [Cal61] le résultat dans le cas $1 < p < \infty$, puis Stein traite les cas $p = 1$ et $p = \infty$ dans [Ste70]. Les deux démonstrations utilisent une technique de décomposition de Whitney du domaine extérieur.

1.2.3 DOMAINES (ε, δ) ET PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT SOBOLEV

La classe des domaines de prolongement Sobolev est bien plus vaste que celle des domaines lipschitziens. Bien qu'aucune caractérisation géométrique de ces domaines ne soit connue, la propriété (ε, δ) introduite par P.W. Jones est une condition suffisante très générale, qui caractérise presque la propriété de prolongement Sobolev en dimension 2.

1.2.3.a Les domaines (ε, δ)

O. Martio et J. Sarvas ont introduit dans [MS79] la notion de *domaine uniforme* de \mathbb{R}^n : on dit qu'un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^n$ est uniforme s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tous $x, y \in \omega$, on puisse joindre x à y par un arc rectifiable γ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad & l(\gamma) \leq \frac{1}{\varepsilon} |x - y|, \\ (ii) \quad & d(z, \partial\omega) \geq \varepsilon \min(|x - z|, |y - z|) \text{ pour tout } z \in \gamma, \end{aligned} \tag{16}$$

où $l(\gamma)$ désigne la longueur de l'arc γ et $d(z, \partial\omega) = \inf_{z' \in \partial\omega} d(z, z')$ pour la distance euclidienne d .

Ces conditions suggèrent qu'il existe un chemin dans ω de x à y dont la longueur est contrôlée par la distance entre les points x et y (condition (i)), et un "tube" inclus dans ω joignant x à y dont le diamètre de la section en chaque point $z \in \gamma$ est de l'ordre de $\min(|x - z|, |y - z|)$ (condition (ii)). En d'autres termes, les conditions (i) et (ii) empêchent la présence dans le domaine de pointes trop nombreuses ou trop pincées. On se référera à [MS79, HK91, HK92] pour des propriétés de ces domaines.

Les domaines *localement uniformes* ont été définis par O. Martio et J. Sarvas, ainsi que par P.W. Jones dans [Jon81], sous le nom de *domaines (ε, δ)* . Il s'agit de domaines de \mathbb{R}^n pour lesquels il existe deux constantes $\varepsilon, \delta > 0$ telles que pour tous $x, y \in \omega$ vérifiant $|x - y| < \delta$, il existe un arc rectifiable γ joignant x à y satisfaisant (16).

Il est clair que les domaines uniformes sont des domaines (ε, δ) . La réciproque est vraie pour les domaines ω tels que $\text{diam } \partial\omega < \infty$, mais pas en général : un cylindre infini est localement uniforme, mais pas uniforme (voir [HK91]).

On voit aisément que les domaines à frontière lipschitzienne sont des domaines (ε, δ) . Cette classe est par ailleurs beaucoup plus vaste ; elle contient des domaines dont la frontière est extrêmement irrégulière, comme le flocon de Von Koch, ou les domaines ramifiés Ω définis en 1.1.3.b pour $a < a^*$, comme nous le verrons plus loin. On ne peut en fait déduire aucune propriété de régularité sur la frontière d'un domaine (ε, δ) : on peut par exemple construire, pour tout $d \in [n - 1, n)$, un domaine (ε, δ) dont la frontière est de dimension de Hausdorff d , en s'inspirant de la construction des domaines ramifiés du paragraphe 1.1.3.b. On peut même construire, toujours pour $n - 1 \leq d < n$, des domaines (ε, δ) de \mathbb{R}^n dont la frontière est un d -ensemble (voir [LV73]).

P.W. Jones montre le théorème suivant qui généralise le résultat de Calderón et Stein. La démonstration repose également sur la technique de prolongement de Whitney.

THÉORÈME 1.2.6 : Jones, [Jon81] – *Tout domaine (ε, δ) de \mathbb{R}^n est un domaine de prolongement Sobolev.*

La réciproque du Théorème 1.2.6 est fautive : par exemple, S. Yang construit dans [Yano6] un domaine de prolongement Sobolev de \mathbb{R}^3 qui n'est pas un domaine (ε, δ) . Toutefois, la propriété de locale uniformité caractérise presque la propriété de prolongement Sobolev dans le plan : le théorème suivant montre que cette condition est optimale dans un cadre géométrique plus restreint (voir [Jon81]).

THÉORÈME 1.2.7 – *Soit $\omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine finiment connexe, i.e. $\partial\omega$ a un nombre fini de composantes connexes. Le domaine ω a alors la propriété de prolongement Sobolev si et seulement si ω est un domaine (ε, δ) .*

1.2.3.b Quasidisques et domaines uniformes et de prolongement Sobolev de \mathbb{R}^2

On appelle quasicercle l'image d'un cercle par une application quasiconforme du plan sur lui-même, et quasidisque un domaine du plan dont la frontière est un quasicercle. Un résultat de L.V. Ahlfors donne une caractérisation géométrique simple de ces domaines qu'on prendra ici comme définition (voir [Ahl66]) : un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un quasidisque si et seulement si sa frontière $\partial\omega$ est une courbe de Jordan, c'est-à-dire une courbe fermée du plan sans point double, telle que pour tous $x, y \in \partial\omega$, et pour tout point z appartenant au plus petit arc de $\partial\omega$ joignant x à y ,

$$|x - z| \leq M|x - y|,$$

où $M > 0$ est une constante indépendante des points x et y . Le plus petit arc joignant x à y désigne ici l'arc de plus petit diamètre parmi les deux arcs disjoints composant $\partial\omega \setminus \{x, y\}$.

O. Martio et J. Sarvas montrent dans [MS79] que si un domaine $\omega \subset \mathbb{R}^2$ a pour frontière une courbe de Jordan du plan, alors ω est uniforme si et seulement si ω est un quasidisque. On déduit alors du Théorème 1.2.7 que les quasidisques sont les domaines de prolongement Sobolev dont la frontière est une courbe de Jordan de \mathbb{R}^2 .

1.2.4 DOMAINES DE JOHN ET INÉGALITÉS DE POINCARÉ

La classe des domaines appelés *domaines de John* est une classe plus générale que celle des domaines (ε, δ) bornés. Les domaines ramifiés sur lesquels nous porterons notre attention dans la thèse sont des exemples de domaines de John qui ne sont pas des domaines (ε, δ) .

Le terme *domaine de John*, du nom de F. John qui les a définis dans [Joh61] est introduit plus tard par O. Martio et J. Sarvas dans [MS79]. Il désigne un domaine ω de \mathbb{R}^n pour lequel il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ et un point $x \in \omega$ (appelé *centre* de ω) tels que pour tout $y \in \omega$ on trouve un arc γ rectifiable joignant x à y de longueur $l(\gamma) \leq \beta$ vérifiant pour tout $z \in \gamma$,

$$d(z, \partial\omega) \geq \alpha l(\gamma(z, y)),$$

où $l(\gamma(z, y))$ désigne la longueur du sous-arc de γ joignant z à y . On montre que tout point d'un domaine de John ω peut être pris comme centre pour ω , pour des valeurs différentes de α et β .

Cette définition, à comparer avec celle des domaines (ε, δ) , peut être vue comme une condition de cône "tordu", et évite la présence de points cuspidés externes sur $\partial\omega$.

Dans la classe générale des domaines de John, l'inégalité de Sobolev-Poincaré suivante est vérifiée.

THÉORÈME 1.2.8 : Bojarski [Boj88] – Si ω est un domaine de John de \mathbb{R}^n , alors pour $1 \leq p < n$, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de p, n et des constantes géométriques α et β de ω telle que

$$\|u - u_\omega\|_{L^{pn/(n-p)}(\omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\omega)},$$

pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\omega)$, où $u_\omega = |\omega|^{-1} \int_\omega u \, dx$.

S. Buckley et P. Koskela montrent une réciproque du Théorème 1.2.8 dans une classe de domaines vérifiant en plus une hypothèse de séparation, voir [BK95].

Pour une application du Théorème 1.2.8 à l'étude de problèmes d'homogénéisation, voir A. Damlamian et P. Donato [DD02].

Les domaines de John vérifient par ailleurs un théorème de compacité de type Rellich (voir [CRW]) :

THÉORÈME 1.2.9 – Si $1 \leq p < \infty$ et ω est un domaine de John de \mathbb{R}^n , alors l'injection de $W^{1,p}(\omega)$ dans $L^p(\omega)$ est compacte.

1.2.5 TRACE SUR UN SOUS-ENSEMBLE DE \mathbb{R}^n

Nous avons vu que lorsqu'un domaine ω de \mathbb{R}^n n'était pas régulier, on ne pouvait pas généraliser la construction de la trace de fonctions dans $W^{1,p}(\omega)$ sur $\partial\omega$. Si ω vérifie par exemple une propriété de prolongement $W^{1,p}$, on peut toutefois définir la trace sur $\partial\omega$ des fonctions dans ω comme la trace sur $\partial\omega$ de leur prolongement à \mathbb{R}^n et vérifier que la définition est indépendante du prolongement choisi.

Il convient donc de définir une notion de trace des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ou $W^{1,p}(\omega)$ sur un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R}^n ou de $\bar{\omega}$.

Cas des fonctions de \mathbb{R}^n Dans le cas où une fonction u définie sur \mathbb{R}^n est continue, ou est une fonction L^p possédant un représentant continu, on peut définir sa trace sur un sous-ensemble E de \mathbb{R}^n comme la restriction de u ou de son représentant continu à E . Si l'ensemble E est de mesure de Lebesgue n -dimensionnelle non nulle, sa restriction à E est définie presque partout. Dans le cas général, on peut parfois définir une notion de trace sur E pour les fonctions dans l'espace $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions localement intégrables qu'on appelle ici trace *au sens classique* ou trace *strictement définie* (voir [JW84]).

On dit que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ peut être *strictement définie* au point $x \in \mathbb{R}^n$ si la limite

$$\bar{u}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) \, dy \quad (17)$$

existe, où $B(x, r)$ désigne la boule euclidienne centrée en x et de rayon r , et $|B(x, r)|$ désigne son volume.

On note que lorsque la limite (17) existe, elle est indépendante du choix du représentant de u . Le théorème de Lebesgue assure par ailleurs que la limite (17) existe presque partout, ce qui définit une fonction \bar{u} sur \mathbb{R}^n dans la classe de u . La fonction \bar{u} est alors définie indépendamment du représentant de u , en dehors d'un ensemble négligeable.

Quitte à redéfinir u sur un ensemble de mesure nulle, on a alors $u = \bar{u}$ aux points où la limite existe. La fonction u définie ainsi est alors dite *strictement définie*.

DÉFINITION 1.2.1 – Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ et $E \subset \mathbb{R}^n$, on définit la fonction $u|_E$ comme la restriction d'un représentant strictement défini de u à E .

On note que la fonction $u|_E$ ainsi définie n'est définie qu'aux points où u peut être strictement définie. On appellera cette fonction la *trace strictement définie* ou *trace au sens classique* de u .

Cas des fonctions définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n Soient ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n et $u \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$. De manière analogue au paragraphe précédent, on dit que u peut être strictement définie en un point $x \in \bar{\omega}$ si la limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r) \cap \omega|} \int_{B(x, r) \cap \omega} u(y) \, dy \quad (18)$$

existe.

DÉFINITION 1.2.2 – Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\omega)$, on définit la fonction $u|_{\partial\omega}$ comme la restriction d'un représentant strictement défini de u à $\partial\omega$.

On note que, là encore, la fonction $u|_{\partial\omega}$ n'est définie qu'aux points de $\partial\omega$ où u peut être strictement définie. On appelle encore cette fonction la *trace strictement définie*, ou *trace au sens classique* de u sur $\partial\omega$.

Lorsque le domaine ω vérifie une propriété de prolongement $W^{1,p}$, il convient de se demander si les deux notions de trace strictement définie sur $\partial\omega$ données par (17) et (18) coïncident (voir par exemple [JW84]). Le chapitre 3 répondra à cette question dans le cas des domaines ramifiés introduits en 1.1.3.b.

1.2.6 ESPACES DE FONCTIONS DÉFINIES SUR DES FERMÉS

On a vu que l'espace de trace des fonctions de classe $W^{1,p}$ sur la frontière d'un domaine régulier était caractérisé comme étant un espace de Besov. Lorsque le domaine n'est pas régulier, l'espace des traces peut parfois être également décrit par des espaces de Besov définis sur la frontière, et on a parfois un théorème de trace analogue au Théorème 1.2.2. On détaille ici la construction des espaces de Besov sur un fermé quelconque de \mathbb{R}^n .

Pour les domaines dont la frontière contient un ensemble auto-similaire, l'espace de trace sur la frontière est parfois plus grand, et il convient d'introduire de nouveaux espaces sur la frontière pour avoir un analogue du Théorème 1.2.2.

1.2.6.a d -ensembles de \mathbb{R}^n

Soient F un fermé de \mathbb{R}^n et $d \in]0, n]$. On dit qu'une mesure borélienne μ sur F est une d -mesure s'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in F, \forall r \in (0, 1), \quad c_1 r^d \leq \mu(B(x, r) \cap F) \leq c_2 r^d, \quad (19)$$

où $B(x, r)$ est la boule centrée en x , de rayon r . Un fermé F muni d'une d -mesure est appelé un d -ensemble.

Il est clair que \mathbb{R}^n , les ouverts non vides de \mathbb{R}^n ou encore les compacts convexes d'intérieur non vide de \mathbb{R}^n sont des n -ensembles, ayant pour n -mesure la restriction de la mesure de Lebesgue

n -dimensionnelle.

La frontière d'un ouvert ω régulier (par exemple, de classe C^1 ou lipschitzien) de \mathbb{R}^n d'intérieur non vide est un d -ensemble avec $d = n - 1$: on peut munir $\partial\omega$ de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{n-1} restreinte à $\partial\omega$, qui est une d -mesure pour $d = n - 1$.

Par ailleurs, les ensembles auto-similaires de \mathbb{R}^n de dimension de Hausdorff $d \leq n$ sont des exemples de d -ensembles, la mesure invariante qui leur est associée étant une d -mesure.

En toute généralité, la restriction de la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle à un d -ensemble F est d'ailleurs une d -mesure sur F . On en déduit que si F est un d -ensemble, alors

$$\dim_H(B(x, r) \cap F) = d,$$

pour tous $x \in F$ et $r > 0$, où on désigne par $\dim_H X$ la dimension de Hausdorff d'un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$. En d'autres termes, un d -ensemble peut être vu comme un ensemble ayant la propriété d'être partout de dimension d .

Il est naturel d'introduire les espaces de Lebesgue sur un d -ensemble F muni d'une d -mesure μ . Pour $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace $L_m^p(F)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables de F dans \mathbb{C} telles que $\int_F |u|^p d\mu < \infty$. Muni de la norme

$$\|u\|_{L_m^p(F)} = \left(\int_F |u|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad u \in L_m^p(F),$$

l'espace $L_m^p(F)$ est un espace de Banach. On introduit également l'espace $L_m^\infty(F)$ des fonctions essentiellement bornées sur F pour la mesure m .

La définition des d -ensembles peut par ailleurs être généralisée aux boréliens de \mathbb{R}^n : un borélien E de \mathbb{R}^n est appelé d -ensemble pour $0 < d \leq n$ s'il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $x \in E$,

$$c_1 r^d \leq \mathcal{H}^d(B(x, r) \cap E) \leq c_2 r^d, \quad (20)$$

pour tout $r \leq 1$, où \mathcal{H}^d est la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle. On note que cette définition généralise la définition (19).

REMARQUE 1.2.1 – On montre par ailleurs facilement que si un borélien E est un d -ensemble, alors son adhérence \overline{E} est aussi un d -ensemble, et $\mathcal{H}^d(\overline{E} \setminus E) = 0$.

Comparaison des traces Dans le cas particulier où un domaine ω de prolongement $W^{1,p}$ de \mathbb{R}^n ($1 < p < \infty$) est un n -ensemble (au sens de (20)) et a pour frontière un d -ensemble pour $d = n - 1$, les traces au sens classique définies au paragraphe 1.2.5 coïncident (voir [JW84], p.206).

PROPOSITION 1.2.1 – Soient $p \in]1, \infty[$ et $\omega \subset \mathbb{R}^n$ est un n -ensemble tel que $\partial\omega$ est un d -ensemble pour $d = n - 1$. On suppose de plus que ω a la propriété de prolongement $W^{1,p}$: il existe un opérateur borné de prolongement $\mathcal{E} : W^{1,p}(\omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Alors, toute fonction $u \in W^{1,p}(\omega)$ peut être strictement définie presque partout sur $\partial\omega$, et $\bar{u} = \overline{\mathcal{E}u}$ presque partout, où la mesure prise sur la frontière est la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^{n-1} .

1.2.6.b Les espaces $Lip(s, p, q; m; F)$ et $B_s^{p,q}(F)$

Il existe de nombreuses manières de définir les espaces de Besov $B_s^{p,q}(F)$ sur un d -ensemble F de \mathbb{R}^n . On propose ici une construction par approximation polynomiale locale proposée par A. Jonsson dans [Jono4]. On trouve d'autres définitions équivalentes par exemple dans [JW95].

Soient F un d -ensemble de \mathbb{R}^n et μ une d -mesure sur F . Pour un entier $k \geq 0$, on appelle \mathcal{N}_k une subdivision de \mathbb{R}^n en cubes semi-ouverts de côté 2^{-k} , obtenus en intersectant \mathbb{R}^n avec des hyperplans orthogonaux aux axes. On impose de plus que l'origine soit le sommet d'un cube de \mathcal{N}_k . On pose par ailleurs $\mathcal{N}_k(F) = \{Q \in \mathcal{N}_k, Q \cap F \neq \emptyset\}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on appelle \mathcal{P}_m l'espace des polynômes à n variables de degré total inférieur ou égal à m . On considère une base orthonormale $(P_j)_{|j| \leq m}$ de \mathcal{P}_m , où j est un multi-indice.

Pour $Q \in \mathcal{N}_k$, on appelle $2Q$ le cube obtenu en dilatant Q d'un facteur 2 autour de son centre. Si $Q \in \mathcal{N}_k(F)$ et $f \in L^1_\mu(2Q)$, on appelle $P_Q(f)$ le projeté de f dans \mathcal{P}_m :

$$P_Q(f) = \sum_{|j| \leq m} P_j \int_{2Q} f P_j d\mu.$$

DÉFINITION 1.2.3 – On considère un d -ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ pour $0 < d \leq n$. Soient $s > 0$, un entier m , $0 \leq m \leq s$, et $p, q, 1 \leq p, q \leq \infty$. On dit que $f \in Lip(s, p, q; m; F)$ si

$$\|f\|_{L^p_\mu(F)} + \left(\sum_{k \geq 0} 2^{skq} \left(\sum_{Q \in \mathcal{N}_k(F)} \|f - P_Q(f)\|_{L^p_\mu(2Q)}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad (21)$$

ce qui définit une norme sur l'espace $Lip(s, p, q; m; F)$.

On définit les espaces de Besov $B_s^{p,q}(F)$ sur un d -ensemble F comme les espaces $Lip(s, p, q; [s]; F)$, où $[s]$ est la partie entière de s . Cette définition est équivalente à celles proposées dans [JW95] ou dans [Jon96]. D'autre part, en prenant $m = 0$, on obtient les espaces $Lip(s, p, q; F)$ également définis dans [JW95].

PROPOSITION 1.2.2 : [JW84] – Dans le cas particulier où $p = q$ et $0 < s < 1$, la norme sur $B_s^{p,p}(F)$ donnée par (21) sur un d -ensemble F borné est équivalente à la norme donnée par $\|v\|_{B_s^{p,p}(F)} = (\|v\|_{L^p(F)} + |v|_{B_s^{p,p}(F)})^{1/p}$, où $| \cdot |_{B_s^{p,p}(F)}$ est la semi-norme définie par :

$$|v|_{B_s^{p,p}(F)} = \int_F \int_F \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d+ps}} d\mu(x) d\mu(y). \quad (22)$$

REMARQUE 1.2.2 – On peut définir l'espace de Besov $B_s^{p,q}(E)$ pour un d -ensemble borélien E de \mathbb{R}^n de la même manière, en prenant comme mesure la restriction à E de la mesure de Hausdorff \mathcal{H}^d . On déduit de la remarque 1.2.1 qu'une fonction de $B_s^{p,q}(E)$ définit un unique élément de $B_s^{p,q}(\bar{E})$, obtenu en la prolongeant arbitrairement sur $\bar{E} \setminus E$.

1.2.6.c Le théorème de trace de Jonsson et Wallin

Le théorème de trace démontré par A. Jonsson et H. Wallin dans [JW84] caractérise l'espace de trace des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ sur un d -ensemble F de \mathbb{R}^n en terme d'espace de Besov sur F . Il généralise le théorème de trace connu pour la trace des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ sur un hyperplan de \mathbb{R}^n .

THÉORÈME 1.2.10 – Soit F un d -ensemble de \mathbb{R}^n avec $0 < d < n$. Si $1 < p < \infty$ et $1 - \frac{n-d}{p} > 0$, alors :

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)|_F = B_{1-\frac{n-d}{p}}^{p,p}(F). \quad (23)$$

La démonstration du résultat de prolongement du théorème repose sur la technique de décomposition de Whitney.

Le théorème concerne les fonctions définies sur tout \mathbb{R}^n , et ne s'applique donc pas directement au cas des fonctions de $W^{1,p}(\omega)$ pour un ouvert ω de \mathbb{R}^n . Toutefois, si ω a pour frontière un d -ensemble pour $0 < d < n$ et $1 - (n-d)/p > 0$, et a la propriété de prolongement $W^{1,p}$ pour un certain $p \in]1, \infty[$, le Théorème 1.2.10 implique directement que

$$W^{1,p}(\omega)|_{\partial\omega} = B_{1-\frac{n-d}{p}}^{p,p}(\partial\omega), \quad (24)$$

où la trace des fonctions de $W^{1,p}(\omega)$ est à entendre comme la trace au sens classique sur $\partial\omega$ de leur prolongement. Ce résultat généralise le Théorème 1.2.2 à une classe bien plus importante de domaines de \mathbb{R}^n .

En particulier, le théorème de prolongement de Jones (Théorème 1.2.6) permet de déduire que le théorème de trace (24) reste vrai pour tout $p \in]1, \infty[$ lorsque ω est un domaine (ε, δ) dont la frontière est un d -ensemble, avec $0 < d < n$ et $1 - (n-d)/p > 0$.

1.2.6.d Espaces de fonctions sur les ensembles auto-similaires

DÉFINITION DU LAPLACIEN SUR LES ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES P.C.F.

Pour décrire les aspects dynamiques liés aux objets modélisés par des fractals, comme la diffusion de la chaleur sur un objet fractal ou la vibration d'une structure fractale, il est nécessaire de savoir formuler les équations décrivant ces phénomènes sur les fractals. Il est par exemple important de pouvoir définir un opérateur laplacien sur ces ensembles, en dépit du fait que la structure irrégulière des fractals interdit la définition usuelle d'opérateurs différentiels.

La première approche pour décrire ces phénomènes physiques sur des objets de type fractal est une approche probabiliste et repose sur la construction d'un mouvement brownien sur le triangle de Sierpiński menée indépendamment par S. Kusuoka [Kus87] et S. Goldstein [Gol87].

J. Kigami propose une approche analytique de la construction du laplacien, qui est directe et constructive (voir [Kig89]). Il définit d'abord le laplacien sur le triangle de Sierpiński et décrit la structure des fonctions harmoniques et des fonctions de Green sur cet ensemble. Il généralise ensuite la construction aux ensembles auto-similaires p.c.f. (voir [Kig93]).

La construction de l'opérateur laplacien proposée dans [Kig89] repose sur la définition d'une forme d'énergie E sur le triangle de Sierpiński, noté K (voir [Mos04, Str99]). On considère l'ensemble V_0 défini en (10) associé à K , ainsi que les ensembles $V_n = F^n(V_0)$ et $V_\infty = \bigcup_n V_n$ où F est la fonction définie en (2) et F^n désigne la composée n fois de F . La forme d'énergie E sur K est alors définie comme la limite d'une suite de formes E_n sur l'ensemble des fonctions de V_∞ dans \mathbb{R} données par

$$E_0(u) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in V_0} |u(x) - u(y)|^2, \quad \forall u : V_0 \rightarrow \mathbb{R},$$

et

$$E_n(u) = (5/3)^n \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} E_0(u \circ f_\sigma), \quad \forall u : V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

pour $n \geq 1$, où le facteur d'échelle $5/3$ est donné par le principe variationnel :

$$E_0(u) = \min\{E_1(\tilde{u}), \tilde{u}|_{V_0} = u\}.$$

La suite E_n converge ponctuellement, et on peut alors introduire la forme limite E définie par $E(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(u)$, ayant pour domaine

$$D_\infty = \{u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}, E(u) = \sup_{n \geq 0} E_n(u) < \infty\}.$$

Grâce à leurs propriétés de régularité, on peut montrer que les fonctions de D_∞ admettent un unique prolongement continu sur K . On peut alors considérer la forme d'énergie E sur le domaine $D = \{u \in C^0(K), E(u) < \infty\}$, où $E(u) := E(u|_{V_\infty})$.

On définit l'espace D_E comme le complété de D pour la norme

$$\|u\|_E = (\|u\|_{L^2_\mu(K)}^2 + E(u))^{1/2},$$

où μ est la mesure invariante associée à K . On peut alors étendre la forme d'énergie E à l'espace D_E . La forme bilinéaire

$$E(u, v) = \frac{1}{2}(E(u+v) + E(u-v)), \quad u, v \in D_E,$$

obtenue par polarisation à partir de la forme d'énergie E est fermée, symétrique, bilinéaire, et de domaine D_E dense dans $L^2_\mu(K)$.

L'espace D_0 est défini comme l'espace des fonctions u de D_E telles que $u|_{V_0} = 0$, où on identifie u à son représentant continu. Comme la forme E est fermée dans $L^2_\mu(K)$, il existe un opérateur auto-adjoint Δ_K de domaine D_{Δ_K} dense dans $L^2_\mu(K)$ tel que pour tous $u \in D_{\Delta_K}$ et $v \in D_0$,

$$E(u, v) = - \int_K (\Delta_K u) v \, d\mu.$$

Une telle construction peut se généraliser aux ensembles auto-similaires p.c.f. (voir [Kig93, Kig01]).

Dans [LV99], M.R. Lancia et M.A. Vivaldi établissent un lien entre le domaine D de la forme de Dirichlet associée à la courbe de Koch K et les espaces Lip définis au paragraphe 1.2.6.b et montrent que $D = Lip(d, 2, \infty; K)$, où $d = \ln 4 / \ln 3$ est la dimension de Hausdorff de K .

U. Mosco définit sur ces ensembles une quasi-distance intrinsèque pour laquelle longueur, volume et énergie sont liés par des relations qui rappellent celles du cas euclidien. Il montre ensuite des inégalités de Poincaré, de Sobolev et de Morrey pour ces ensembles (voir [Mos95, Mos97]).

Dans le cas où l'ensemble auto-similaire n'est pas p.c.f., la méthode utilisée ci-dessus ne peut pas s'appliquer, du fait que V_0 est infini. On note que l'approche probabiliste peut en revanche s'appliquer aux ensembles non p.c.f. ; M.T. Barlow et R.F. Bass construisent par exemple dans [BB89] un mouvement brownien sur le tapi de Sierpiński.

On définit dans la suite des outils d'analyse qui peuvent s'appliquer au cas des ensembles auto-similaires non p.c.f.

LES ONDELETTES DE HAAR SUR LES ENSEMBLES AUTO-SIMILAIRES

Les ondelettes de Haar définies sur le segment $[0, 1]$ sont les ondelettes les plus connues. Il s'agit de dilatations et de translations de l'ondelette mère $g_0 = \mathbb{1}_{[0,1/2]} - \mathbb{1}_{]1/2,1]}$. Plus précisément, les ondelettes de niveau $n \in \mathbb{N}^*$ sont les dilatées de facteur $1/2^n$ et translatées de $k/2^n$, $k \leq 2^n$ de g_0 . Du fait qu'elles forment une base orthonormale de $L^2([0, 1])$, et une base de Schauder de $L^p([0, 1])$ pour $1 \leq p < \infty$, elles constituent un outil très intéressant.

On peut définir de manière analogue des ondelettes de Haar sur les ensembles auto-similaires en général. Dans le cas du segment $[0, 1]$ qui est l'invariant de deux similitudes f_1 et f_2 , les ondelettes de niveau n ont leur support dans les intervalles $[k/2^n, (k+1)/2^n[$, $k \leq 2^n$ qui sont les ensembles $f_\sigma([0, 1])$ pour $\sigma \in \{1, 2\}^n$. On peut procéder de même pour un ensemble auto-similaire K invariant d'un IFS (f_1, \dots, f_n) en introduisant des ondelettes de niveau n ayant pour support les $f_\sigma(K)$, $\sigma \in \{1, \dots, n\}^n$. On obtient ainsi les ondelettes de Haar dites du premier ordre, qui sont constantes par morceaux.

Ainsi définies, les ondelettes de Haar forment une base orthonormale de l'espace $L^2_\mu(K)$, et une base de Schauder de $L^p_\mu(K)$, $1 \leq p < \infty$, où les $L^p_\mu(K)$ sont les espaces de Lebesgue associés au d -ensemble K pour sa mesure invariante μ .

Ces ondelettes constituent un outil naturel pour étudier les fonctions définies sur K . En effet, la décomposition de fonctions suivant la base d'ondelettes de Haar permet de caractériser certains espaces fonctionnels sur K .

Par ailleurs, afin de mieux décrire les propriétés de régularité de certaines fonctions définies sur K , il est utile d'introduire les ondelettes de Haar dites d'ordre supérieur, qui sont analogues aux ondelettes décrites ci-dessus, et qui sont polynomiales par morceaux.

On donne ici la construction des ondelettes de Haar, comme elle est proposée par A. Jonsson dans [Jon98].

Ondelettes du premier ordre On détaille la construction des ondelettes de Haar du premier ordre sur un ensemble auto-similaire K , qui sont celles que nous utiliserons principalement dans la suite.

On considère des similitudes contractantes f_1, \dots, f_N , et leur invariant K , de mesure auto-similaire μ .

On appelle \mathcal{S}_0 l'ensemble des fonctions constantes sur K , et \mathcal{S}_k ($k \geq 1$) l'ensemble des fonctions définies sur K qui sont constantes sur chaque $f_\sigma(K) \setminus \Xi$, $\sigma \in \mathcal{A}_k$, où Ξ est l'ensemble d'auto-intersection de K , i.e. $\Xi = \bigcup_{i \neq j} f_i(K) \cap f_j(K)$.

On considère le complémentaire orthogonal $\mathcal{S}_1 \ominus \mathcal{S}_0$ de \mathcal{S}_0 dans \mathcal{S}_1 . Comme l'espace \mathcal{S}_1 est de dimension N , $\mathcal{S}_1 \ominus \mathcal{S}_0$ est de dimension $N-1$. On en considère alors une base orthonormale g^1, \dots, g^{N-1} pour le produit scalaire associé à $L^2_\mu(K)$. Par ailleurs, on pose, pour $i \leq N-1$ et $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$g_\sigma^i = \frac{1}{\mu(f_\sigma(K))} g^i \circ f_\sigma^{-1}. \quad (25)$$

Les g_σ^i sont appelées les *ondelettes de Haar* de l'ensemble auto-similaire K . On note que lorsque $\sigma = \epsilon$, $g_\sigma^i = g^i$.

On appelle $\mathbb{1}_K$ la fonction identiquement égale à 1 sur K . Il est aisé de constater que les fonctions $\mathbb{1}_K, g_\sigma^i, i \leq N-1, \sigma \in \mathcal{A}$ forment une base hilbertienne de $L^2_\mu(K)$. On en déduit qu'une fonction

$v \in L^2_\mu(K)$ admet une décomposition dans la base d'ondelettes de Haar de la forme

$$v = \langle v \rangle_K + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma^i g_\sigma^i, \quad (26)$$

où $\langle v \rangle_K = \int_K v \, d\mu$ désigne la moyenne de v sur K . Les coefficients β_σ^i sont appelés les *coefficients d'ondelettes* de v . En fait, le résultat est vrai dans $L^p_\mu(K)$:

PROPOSITION 1.2.1 – Si $1 \leq p < \infty$ et $v \in L^p_\mu(K)$, alors v admet une décomposition dans la base d'ondelettes de Haar de la forme de (26).

Preuve. Voir [Jon98], [DL92]. □

Le cas $N = 2$ Dans le cas où $N = 2$ qui nous intéressera particulièrement dans la suite, l'espace $\mathcal{S}_1 \ominus \mathcal{S}_0$ est de dimension 1, et engendré par la fonction $g_0 = \mathbb{1}_{f_1(K)} - \mathbb{1}_{f_2(K)}$, appelée *ondelette mère de Haar*.

Dans le cas où les rapports des similitudes f_1 et f_2 sont égaux, ce qui sera vérifié dans les chapitres suivants, les ondelettes de Haar de K s'écrivent $g_\sigma = 2^{\frac{k}{2}} g_0 \circ f_\sigma^{-1}$, $\sigma \in \mathcal{A}_k$, et toute fonction $v \in L^p_\mu(K)$ se décompose dans la base d'ondelette de Haar comme

$$v = \langle v \rangle_K + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma g_\sigma. \quad (27)$$

Ondelettes d'ordre supérieur Nous présentons succinctement les ondelettes d'ordre supérieur, qui retiendront moins notre attention dans la suite.

Pour mieux décrire la régularité locale autour des points de l'invariant K , il est parfois utile d'avoir recours à des ondelettes polynomiales par morceaux, et non plus constantes par morceaux sur K . Pour ce faire, on définit cette fois \mathcal{S}_0 comme l'espace des fonctions polynomiales sur K dont le degré total est inférieur ou égal à un entier $m \geq 1$. Ainsi, \mathcal{S}_0 vu comme sous-espace de $L^2_\mu(K)$ a pour dimension $\binom{n+m}{n}$. On considère alors une base orthonormale P_1, \dots, P_{M_0} de \mathcal{S}_0 dans $L^2_\mu(K)$.

De manière analogue au paragraphe précédent, on définit \mathcal{S}_k , $k \geq 1$, comme l'espace des fonctions qui coïncident sur chaque $f_\sigma(K) \setminus \Xi$ avec un polynôme de \mathcal{S}_0 . Cette fois, l'espace $\mathcal{S}_1 \ominus \mathcal{S}_0$ est de dimension $M = N(M_0 - 1)$. On considère une base orthonormale g^1, \dots, g^M de $\mathcal{S}_1 \ominus \mathcal{S}_0$, et on définit les ondelettes de Haar comme en (25). On vérifie alors sans peine que la famille formée par les P_j , $j \leq M_0$, et les g_σ^i , $i \leq N$, $\sigma \in \mathcal{A}$, est une base hilbertienne de $L^2_\mu(K)$. La Proposition 1.2.1 reste vraie dans ce cas : les fonctions $v \in L^p_\mu(K)$, $1 \leq p < \infty$ ont une décomposition de la forme

$$v = \sum_{j=1}^{M_0} \alpha_j P_j + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma^i g_\sigma^i.$$

LES ESPACES $JLip(s, p, q; m; K)$

On définit ici les espaces $JLip(s, p, q; m; K)$ sur un ensemble auto-similaire K , introduits par A. Jonsson dans [Jono4]. Ces espaces sont analogues aux espaces $Lip(s, p, q; m; F)$ sur un d -ensemble F mais autorisent des sauts en certains points du fractal K . Dans le cas où l'ensemble

K est totalement disconnexe, ces espaces coïncident avec les espaces $Lip(s, p, q; m; K)$.

De la même manière que les espaces Lip permettent de définir l'espace de trace sur un d -ensemble F des fonctions dans $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (voir Théorème 1.2.10), les espaces $JLip$ ainsi définis permettront de définir l'espace de trace de fonctions de classe $W^{k,p}$ définies dans des domaines à frontière fractale auto-similaire sur le bord fractal (voir [AT10] et §1.3.4).

La définition des ensembles $JLip(s, p, q; m; K)$ est calquée sur celle de $Lip(s, p, q; m; F)$ donnée en 1.2.6.b, à ceci près qu'on utilise des subdivisions \mathcal{N}_k adaptées à la structure auto-similaire de K .

On donne ensuite une caractérisation des fonctions dans $JLip(s, p, q; m; K)$ par leurs coefficients dans la base d'ondelettes de Haar associée à K .

Définition de $JLip(s, p, q; m; K)$ Soient K le compact auto-similaire associé aux similitudes f_1, \dots, f_N , et μ sa mesure invariante. Soient $s > 0$ et $p, q \in [1, \infty]$. Pour un entier $k \geq 0$, on appelle S_k le sous-ensemble de \mathcal{A}_k composé des mots σ qui vérifient $2^{-k-1}\delta < \text{diam } K_\sigma \leq 2^{-k}\delta$, où $\delta = \text{diam } K$ et $K_\sigma = f_\sigma(K)$. Les ensembles K_σ , $\sigma \in S_k$, joueront ici le rôle des cubes Q de $\mathcal{N}_k(F)$ dans 1.2.6.b.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on considère une base orthonormale $(P_j)_{|j| \leq m}$ de l'espace \mathcal{P}_m des polynômes sur K dont le degré total est inférieur à m . On définit la projection $P_\sigma f$ de $f \in L^1_\mu(K_\sigma)$ dans \mathcal{P}_m par $P_\sigma f = \sum_{|j| \leq m} P_j \int_{K_\sigma} f P_j d\mu$.

DÉFINITION 1.2.4 – Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble auto-similaire, $s > 0$, $m \leq s$ un entier, et $1 \leq p, q \leq \infty$. On dit que $f \in JLip(s, p, q; m; K)$ si

$$\|f\|_{L^p_\mu(F)} + \left(\sum_{k \geq 0} 2^{skq} \left(\sum_{\sigma \in S_k} \|f - P_\sigma f\|_{L^p_\mu(K_\sigma)}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad (28)$$

ce qui définit une norme sur l'espace $JLip(s, p, q; m; K)$.

Caractérisation par coefficients d'ondelettes Il découle de la définition des espaces $JLip(s, p, q; m; K)$ qu'ils contiennent les ondelettes de Haar. Il convient alors de considérer la décomposition dans la base d'ondelettes de Haar des fonctions de ces espaces.

Dans [Jono4], Jonsson caractérise les fonctions $v \in L^p_\mu(K)$ qui appartiennent à l'espace $JLip(s, p, q; m; K)$ à partir de leurs coefficients β_σ^i , $\sigma \in \mathcal{A}$, $i = 1 \dots N$, dans la décomposition suivant la base d'ondelettes de Haar. On donne ici le résultat pour $m = 0$: $v \in JLip(s, p, q; 0; K)$ si et seulement si

$$|(v)_K| + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{k \geq 0} 2^{ksq} \left(2^{kd(\frac{k}{2}-1)} \sum_{\sigma \in S_k} |\beta_\sigma^i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (29)$$

ce qui définit une norme équivalente à celle de la définition 1.2.4.

REMARQUE 1.2.3 – Dans le cas particulier où $N = 2$, $p = q$, $m = 0$ et les similitudes f_1 et f_2 ont même rapport de contraction, la norme définie par

$$\|v\|_{JLip(s,p,p;0;K)} = |(v)_K| + \left(\sum_{k \geq 0} 2^{\frac{ksp}{d}} 2^{k(\frac{p}{2}-1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} |\beta_\sigma|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (30)$$

pour tout $v \in L^p_\mu(K)$, où les β_σ , $\sigma \in \mathcal{A}_k$ sont les coefficients d'ondelettes de v , est équivalente à celle de la définition 1.2.4.

Si le compact auto-similaire K est totalement disconnexe, c'est-à-dire si les ensembles $f_i(K)$, $i = 1 \dots N$ sont deux à deux disjoints, on a le résultat suivant dû à A. Jonsson (voir [Jono4]).

THÉORÈME 1.2.11 : Jonsson – Si $f_i(K) \cap f_j(K) = \emptyset$ pour tous $i \neq j$, alors

$$JLip(s, p, q; m; K) = Lip(s, p, q; m; K) = B_s^{p,q}(K),$$

pour tous $s > 0$, $m \in [0, s]$, $1 \leq p, q \leq \infty$, et les normes sont équivalentes.

1.3 LE CAS DES DOMAINES RAMIFIÉS

Les propriétés détaillées dans le paragraphe précédent ne sont pas toutes vérifiées par les domaines ramifiés de la classe \mathcal{D} construite en 1.1.3.b. En particulier, dans le cas où le rapport de contraction des similitudes f_1 et f_2 est critique ($a = a^*$), on montre que le domaine ramifié n'est pas un domaine (ε, δ) (voir [ATo8]). Le théorème de prolongement de Jones ne s'applique donc pas.

Dans ce cas, les domaines que nous considérons ne sont d'ailleurs pas des domaines de prolongement Sobolev, et le résultat de trace de Jonsson et Wallin n'est pas vérifié.

En revanche, on peut montrer que les domaines ramifiés de la classe \mathcal{D} sont des domaines de John, et satisfont donc des inégalités de Poincaré. On verra que ces inégalités permettent par ailleurs de définir un opérateur de trace sur la partie auto-similaire de la frontière du domaine ramifié. Du fait qu'il exploite les propriétés d'auto-similarité du domaine ramifié, l'opérateur ainsi défini constitue une notion de trace naturelle pour les fonctions définies sur les domaines de \mathcal{D} .

En résumé, l'approche choisie diffère de la démarche habituelle, qui consiste à montrer des résultats de prolongement à \mathbb{R}^n , puis à déduire des résultats de trace à partir des théorèmes valables sur \mathbb{R}^n . On commence ici par introduire une notion de trace basée sur les propriétés d'auto-similarité du domaine. On utilisera dans la thèse les propriétés de l'opérateur de trace construit pour prouver des résultats de prolongement.

Les questions abordées dans la thèse Il se pose la question de la comparaison de l'espace de traces des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ pour un domaine ramifié Ω sur la partie fractale Γ^∞ de sa frontière aux espaces de traces des fonctions dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, ce qui revient, par le théorème de Jonsson et Wallin, à les comparer aux espaces de Besov sur Γ^∞ . Si ces espaces diffèrent pour une valeur de p et si les différentes notions de traces coïncident presque partout sur Γ^∞ , la dernière remarque implique que le domaine Ω n'est pas un domaine de prolongement $W^{1,p}$. Dans le cas contraire où les espaces coïncident, on se pose la question de l'existence d'un prolongement.

1.3.1 INÉGALITÉ DE POINCARÉ SUR LES DOMAINES RAMIFIÉS

On considère un domaine ramifié Ω appartenant à la classe \mathcal{D} . En tant que domaines de John, Ω satisfait l'inégalité de Poincaré suivante (voir [ATo7]).

THÉORÈME 1.3.1 – Soit $p \in [1, \infty[$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant $u|_{\Gamma^0} = 0$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (31)$$

où on rappelle que Γ^0 est le segment de base du domaine ramifié.

La preuve donnée par Y. Achdou et N. Tchou n'utilise pas les propriétés des domaines de John. Elle repose sur l'auto-similarité qui permet la construction d'une bijection préservant la mesure entre Ω et un nouveau domaine $\hat{\Omega}$, qui envoie le compact invariant Γ^∞ sur un graphe fractal dont $\hat{\Omega}$ est le domaine sous la courbe (voir Figure 7). Il est alors plus aisé de montrer l'inégalité de Poincaré sur $\hat{\Omega}$, dont on déduit le résultat sur Ω .

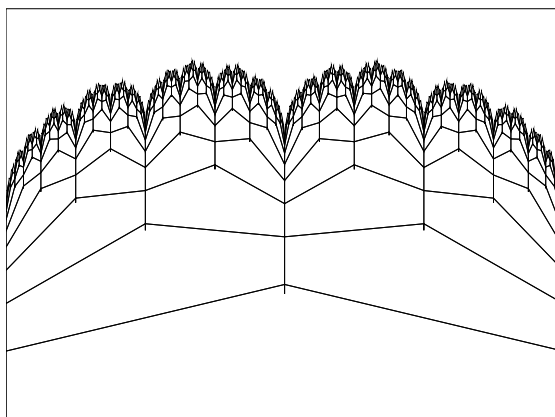


FIGURE 7 – La courbe délimitant $\hat{\Omega}$

Cette technique de preuve a l'avantage de conduire aussi à une inégalité de trace renforcée utile dans la suite, énoncée dans le Théorème 1.3.3 ci-dessous.

On obtient par un raisonnement similaire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ($n \geq 0$),

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \|u\|_{L^p(f_\sigma(\Omega))}^p \leq C (2a^2)^n \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|u|_{\Gamma^0}\|_{L^p(\Gamma^0)}^p \right), \quad (32)$$

ce qui implique en particulier le résultat de compacité de type Rellich :

THÉORÈME 1.3.2 – Pour $1 \leq p < \infty$, l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte.

On donne par ailleurs un résultat utile à la définition de la trace sur Γ^∞ : de l'inégalité de Poincaré, Y. Achdou et N. Tchou déduisent aussi l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et tout entier n ,

$$\int_{\Gamma^n} |u|_{\Gamma^n}|^p \leq C(2a)^n \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p, \quad (33)$$

où Γ^n est défini par $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \Gamma^\sigma$.

1.3.2 PROLONGEMENT ET TRACE DANS LE CAS SOUS-CRITIQUE

Du fait que dans le cas sous-critique $a < a_{\theta}^*$, les domaines ramifiés sont des domaines (ε, δ) , on a vu qu'il existait pour tout $p \in [1, \infty]$ un opérateur de prolongement continu de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. On peut donc déduire directement du théorème de Jonsson et Wallin le résultat de trace

$$W^{1,p}(\Omega)|_{\Gamma^\infty} = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty),$$

où $d = \dim_H \Gamma^\infty$, et où la trace est entendue au sens de la stricte définition du prolongement des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ (voir 1.2.5).

1.3.3 CONSTRUCTION D'UN OPÉRATEUR DE TRACE SUR Γ^∞

On introduit une notion de trace dite *auto-similaire*, proposée par Y. Achdou et N. Tchou dans [AT07] pour les domaines ramifiés.

On considère un domaine ramifié Ω pour les similitudes f_1 et f_2 définies en (14), et on note Γ^∞ son compact invariant. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on considère la suite d'opérateurs ℓ^n de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L_\mu^p(\Gamma^\infty)$ définis par :

$$\ell^n(u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma} \mathbb{1}_{f_\sigma(\Gamma^\infty)}, \quad (34)$$

pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, où on note $\Gamma_\sigma = f_\sigma(\Gamma^0)$ et $\langle u \rangle_{\Gamma^\sigma} = \frac{1}{|\Gamma^\sigma|} \int_{\Gamma^\sigma} u(x) dx$ pour $\sigma \in \mathcal{A}$.

L'opérateur ℓ^n est bien défini et continu : si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$\|\ell^n(u)\|_{L_\mu^p(\Gamma^\infty)}^p = \int_{\Gamma^\infty} \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma} \mathbb{1}_{f_\sigma(\Gamma^\infty)} \right|^p d\mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \int_{f_\sigma(\Gamma^\infty)} |\langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p d\mu,$$

du fait que $\mu(f_\sigma(\Gamma^\infty) \cap f_\tau(\Gamma^\infty)) = 0$ si $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n$ et $\sigma \neq \tau$. L'inégalité de Hölder donne alors

$$\|\ell^n(u)\|_{L_\mu^p(\Gamma^\infty)}^p \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \frac{1}{|\Gamma_\sigma|} \left(\int_{\Gamma_\sigma} |u|^p \right) \mu(f_\sigma(\Gamma^\infty)) = \frac{1}{(2a)^n |\Gamma^0|} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(\int_{\Gamma_\sigma} |u|^p \right).$$

On déduit alors de (33) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction u dans $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|\ell^n(u)\|_{L_\mu^p(\Gamma^\infty)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

PROPOSITION 1.3.1 – Si $p + d - 2 > 0$, la suite $(\ell^n)_n$ converge dans $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L_\mu^p(\Gamma^\infty))$ vers un opérateur qu'on appelle ℓ^∞ .

L'opérateur ℓ^∞ ainsi obtenu est un opérateur de trace sur $W^{1,p}(\Omega)$: si u est une fonction régulière sur Ω (par exemple si $u \in C^1(\bar{\Omega})$), alors $\ell^\infty(u)$ coïncide μ -presque partout avec la trace de u sur Γ^∞ au sens de la restriction.

Comme nous l'avons vu, une technique semblable à celle de la preuve dans [AT07] de l'inégalité de Poincaré dans les domaines ramifiés fournit une inégalité de trace renforcée :

THÉORÈME 1.3.3 – Pour tout χ tel que $(2a^2)^{p-1} < \chi < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\ell^\infty(u) - \langle \ell^\infty(u) \rangle_{\Gamma^\infty}\|_{L^p_\mu(\Gamma^\infty)}^p \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} \chi^i \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \|\nabla u\|_{L^p(Y^\tau)}^p, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad (35)$$

où $\langle \ell^\infty(u) \rangle_{\Gamma^\infty} = \int_{\Gamma^\infty} \ell^\infty(u) d\mu$.

REMARQUE 1.3.1 – On a défini la notion de trace auto-similaire dans le cas particulier des domaines ramifiés de la classe \mathcal{D} . On peut toutefois montrer que les domaines ramifiés en général sont des domaines de John, et qu'ils satisfont donc les mêmes inégalités de Poincaré. On peut donc généraliser la définition de l'opérateur de trace ℓ^∞ à tous les domaines ramifiés.

1.3.4 CARACTÉRISATION DE L'ESPACE DE TRACE

On donne dans ce paragraphe un résultat de trace dans les domaines ramifiés définis au paragraphe 1.1.3.b obtenu par Y. Achdou et N. Tchou dans [AT10]. De même qu'on peut caractériser la trace des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ à l'aide des espaces Lip (voir Théorème 1.2.10), on cherche à caractériser la trace des fonctions définies sur les domaines ramifiés à l'aide des espaces $JLip$.

On considère un domaine ramifié Ω de la classe \mathcal{D} . On appelle toujours Γ^∞ la partie auto-similaire de sa frontière, et on se place dans le cas où $a \leq a^*$.

On observe que les ondelettes de Haar sur l'ensemble Γ^∞ font partie de l'espace de trace des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ pour $1 \leq p \leq \infty$: on voit aisément qu'on peut même relever (pour les différentes notions de traces définies en 1.2.5) les ondelettes de Haar sur Γ^∞ en des fonctions de classe C^∞ sur Ω .

Dans le cas critique décrit au paragraphe 1.1.3.a où Γ^∞ est connexe, on voit que l'espace de trace de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ sur Γ^∞ diffère en général de l'espace de trace de $W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ^∞ . En effet, dans le cas où $p > 2$, l'injection $W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^2)$ implique que les ondelettes de Haar n'appartiennent pas à $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)|_{\Gamma^\infty}$.

Cette remarque suggère que pour construire l'espace de trace de $W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ^∞ , il convient d'ajouter les ondelettes de Haar à l'espace de Lipschitz $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)|_{\Gamma^\infty}$. En d'autres termes, il convient d'autoriser des sauts aux points d'auto-intersection de Γ^∞ .

Le théorème de trace suivant (voir [AT10]) identifie effectivement l'espace de trace $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ et certains espaces $JLip$.

THÉORÈME 1.3.4 – Si $a \leq a^*$ et $1 < p < \infty$, alors

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = JLip\left(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty\right).$$

Il s'agit d'une caractérisation essentielle pour la suite, car elle permet de décrire les traces auto-similaires de fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ par leurs coefficients dans la base d'ondelettes de Haar par le biais de (1.2.3), ce qu'on utilisera à de nombreuses reprises.

Dans [AT10], les auteurs montrent en fait le résultat plus général : si $m \geq 1$, $a \leq a^*$ et $1 < p < \infty$, alors

$$\ell^\infty(W^{m,p}(\Omega)) = JLip\left(m - \frac{2-d}{p}, p, p; m-1; \Gamma^\infty\right).$$

1.4 ÉTUDE D'EDP DANS DES DOMAINES À FRONTIÈRE FRACTALE

1.4.1 EDP DANS DES DES DOMAINES RAMIFIÉS OU DES ARBRES FRACTALS

L'étude de problèmes aux limites dans les domaines ramifiés décrits en 1.1.3.b est détaillée par Y. Achdou et N. Tchou dans [AT07] (voir aussi [AST07, AST06]) où une méthode basée sur les propriétés d'auto-similarité du domaine Ω est proposée pour résoudre les problèmes mixtes du type

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } (\partial\Omega) \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^\infty), \end{cases}$$

où Γ^0 est la base du domaine ramifié, avec en plus une condition de Neumann non-homogène sur Γ^∞ , imposée grâce à la formulation variationnelle.

On cherche à calculer la solution dans une cellule donnée du domaine. La méthode consiste à décomposer la donnée de Neumann sur le bord Γ^∞ dans la base d'ondelettes de Haar et à résoudre une suite de problèmes aux limites dans la cellule de base Y^0 à laquelle on se ramène par auto-similarité, avec des conditions aux limites dites transparentes sur la partie supérieure du bord de Y^0 . Ces conditions reposent sur un opérateur Dirichlet-Neumann non local obtenu comme limite d'une suite d'opérateurs en exploitant l'auto-similarité et l'invariance par changement d'échelle de l'équation.

La méthode est détaillée dans le Chapitre 4.

Une autre approche à l'étude d'EDP sur des objets présentant une infinité de ramifications est proposée par P.Joly et A. Semin dans [JS11] qui étudient l'équation des ondes dans des arbres fractals dont les branches sont unidimensionnelles, du type des arbres définis dans [MF99]. L'équation des ondes y est alors résolue sur chaque branche, avec une condition de type Kirchhoff au niveau des nœuds.

Pour gérer les problèmes liés au fait que l'arbre est infini et trouver la condition aux limites au bout de l'arbre, une condition aux limites transparente est exprimée au moyen d'un opérateur Dirichlet-Neumann, de manière comparable à la démarche adoptée en [AT07].

La structure d'arbre est également utilisée par B. Maury *et al.* dans [MSV09] pour modéliser le système respiratoire humain, dans le but de décrire la pression au niveau des alvéoles, c'est-à-dire à la terminaison des voies respiratoires, où se situent les échanges gazeux.

Le modèle utilisé est un arbre dyadique pour lequel une trace au bout de l'arbre est définie. Pour établir la régularité des fonctions traces, une approche impliquant la construction d'une base explicite des fonctions harmoniques dans l'espace d'énergie est proposée.

1.4.2 PROBLÈMES DE TRANSMISSION À TRAVERS UNE INTERFACE FRACTALE

Les problèmes de transmission apparaissent naturellement dans de nombreux domaines, comme l'électrostatique et la magnéto-statique où l'on souhaite par exemple décrire le transfert de chaleur à travers une couche infiniment conductive. Certains des phénomènes qui peuvent être modélisés par des problèmes de transmission présentent des échanges à travers une interface irrégulière. On peut parfois représenter ces interfaces par des objets fractals.

La définition du laplacien sur les ensembles auto-similaires p.c.f. (voir §1.2.6.d) permet en particulier d'imposer des conditions de transmission du second ordre à travers une interface fractale auto-similaire p.c.f.

Dans [Lano2, Lano3, Lano4], M.R. Lancia étudie par exemple des problèmes de Poisson dans des domaines du plan séparés par une courbe fractale K , avec une condition de transmission à travers K du second ordre du type

$$\begin{aligned} C\Delta_K u &= [\partial_n u] \quad \text{sur } K \setminus \partial\Omega, \\ [u] &= 0 \quad \text{sur } K, \end{aligned}$$

où $[u]$ et $[\partial_n u]$ désignent respectivement le saut de u et de la dérivée normale $\partial_n u$ en un sens faible à travers l'interface K . Dans ces papiers, K est une courbe fractale ou une approximation préfractale de courbe fractale. L'auteur considère en particulier le cas de la courbe de Koch. Des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible du problème dans un espace approprié sont démontrés, ainsi que des propriétés de régularité de la solution.

Dans [BBV06], un aspect numérique de ce problème est abordé. Les auteurs construisent un maillage adapté à la géométrie de l'interface pour le problème à interface préfractale et formulent une approximation de Galerkin pour le problème.

En dimension 3, le cas où l'interface est de la forme $K \times [0, 1]$ est traité dans [MV03] où les auteurs établissent l'existence d'un unique minimiseur pour une fonctionnelle énergie adaptée.

Par ailleurs, M.R. Lancia et P. Vernole prouvent dans [LV10] la convergence de problèmes de transmission en dimension 3 avec interface préfractale vers le problème avec interface fractale. La preuve est basée sur la convergence au sens de Mosco des formes d'énergie associées aux problèmes (voir [Mos67, Mos69]), et sur une méthode d'interpolation proposée dans [LV03, MV09].

1.5 RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Les chapitres 1, 2 et 3 proposent des éléments de réponses aux questions posées au paragraphe §1.3.

Le chapitre 1 est consacré à la comparaison des espaces $JLip(s, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ avec les espaces de Besov sur Γ^∞ . On montre en particulier que le théorème de trace (24) reste vrai dans les domaines ramifiés pour la trace auto-similaire dans Ω , pour des valeurs de p inférieures à une valeur critique p^* qui ne dépend que des angles des similitudes définissant les domaines.

Le chapitre 2 examine la question du prolongement pour les domaines ramifiés critiques. On construit un opérateur de prolongement $W^{1,p}$ pour les domaines critiques lorsque $p < p^*$.

Le chapitre 3 est consacré à la comparaison des notions de traces utilisées. On déduit du théorème de prolongement du chapitre 2 que les notions de traces strictement définies pour les fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ou $W^{1,p}(\Omega)$ et la notion de trace auto-similaire sur Γ^∞ coïncident presque partout.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à un problème de transmission entre les domaines ramifiés Ω de la classe \mathcal{D} et l'extérieur de Ω . On propose une approche numérique du problème, en écrivant un problème de transmission à travers une interface préfractale. Notons que le chapitre 4 rend compte de travaux en cours qui ne sont pas encore dans leur forme finale, et qu'on ne s'intéresse pour le moment qu'à la mise en œuvre numérique.

Les chapitres 1, 2 et 3 sont à quelques ajouts près les articles respectifs :

- ◊ *JLip versus Sobolev spaces on a class of self-similar fractal foliages* [ADT12],
- ◊ *Sobolev Extension Property for tree-shaped domains with self-contacting fractal boundary* [Deh],
- ◊ *Comparison of different definitions of traces for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries* [ADT],

dont la forme a été modifiée pour éviter des redites. Il n'a toutefois pas été possible de les éliminer toutes, et nous prions le lecteur de nous en excuser.

1.5.1 COMPARAISON DES ESPACES $JLip$ ET BESOV SUR LA FRONTIÈRE AUTO-SIMILAIRE DES DOMAINES RAMIFIÉS

On s'intéresse ici aux domaines ramifiés Ω de la classe \mathcal{D} décrite en 1.1.3.b. De même que dans le cas des domaines réguliers, on souhaite comparer l'espace de traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ sur la frontière de Ω aux espaces de Besov.

Dans le cas sous-critique ($a < a_\theta^*$) où on a vu que le domaine ramifié était un domaine (ε, δ) , les théorèmes cités dans les paragraphes précédents permettent de conclure qu'on a un théorème de trace du type de (24).

En revanche, dans le cas critique où $a = a_\theta^*$, ces théorèmes ne s'appliquent plus. En fait, on montre un théorème de trace du type de (24) pour $p < p^*$ seulement, où p^* ne dépend que de la dimension de l'auto-intersection de la partie auto-similaire Γ^∞ de la frontière. La démonstration de ce résultat consiste d'abord à comparer les espaces $JLip$ aux espaces Lip introduits ci-dessus, en s'appuyant sur la régularité Sobolev des ondelettes de Haar sur Γ^∞ .

1.5.1.a Le cas sous-critique

Dans le cas sous-critique décrit au paragraphe 1.1.3.a où la partie fractale Γ^∞ de la frontière est totalement disconnexe ($a < a_\theta^*$), le théorème de trace 1.2.10 de Jonsson et Wallin reste valable. Ce résultat découle directement du Théorème 1.2.6 de prolongement de Jones : on montre que dans ce cas Ω est un domaine (ε, δ) , ce qui implique que Ω est un domaine de prolongement Sobolev, et on peut appliquer le théorème de trace de Jonsson et Wallin au prolongement ainsi obtenu. La trace sur la frontière du domaine est ici entendue au sens classique.

On peut par ailleurs arriver à ce même résultat pour la trace auto-similaire ℓ^∞ en se souvenant que, dans le cas où Γ^∞ est totalement disconnexe, on a l'égalité

$$JLip(s, p, q; 0; \Gamma^\infty) = Lip(s, p, q; 0; \Gamma^\infty)$$

lorsque $0 < s < 1$ et $1 \leq p, q \leq \infty$. Le Théorème 1.3.4 permet alors de conclure, du fait que $Lip(s, p, q; 0; \Gamma^\infty) = B_s^{p,q}(\Gamma^\infty)$ pour $0 < s < 1$.

1.5.1.b Le cas critique

Lorsque l'ensemble fractal Γ^∞ est connexe ($a = a_\theta^*$), le domaine ramifié correspondant n'est pas un domaine (ε, δ) , et n'est d'ailleurs pas un domaine de prolongement Sobolev. Dans ce cas, on n'obtient pas la régularité du Théorème 1.2.10 pour toutes les valeurs de p , mais seulement lorsque p est inférieur à une valeur critique p^* qui ne dépend que de la dimension de l'ensemble

d'auto-intersection de la frontière $\partial\Omega$. En d'autres termes, pour $p < p^*$, on a un équivalent du théorème de trace (24) sur Γ^∞ pour la trace auto-similaire :

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty). \quad (36)$$

Dans le cas $a = a_\theta^*$, nous avons vu qu'on distingue deux possibilités :

(i) si $\theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}$, l'ensemble Ξ défini par

$$\Xi = f_1(\Xi) \cap f_2(\Xi) \quad (37)$$

est réduit à un point et, dans ce cas, l'ensemble d'auto-intersection de Γ^∞ est dénombrable ;

(ii) si $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}$, l'ensemble Ξ est un ensemble fractal de dimension de Hausdorff $d/2$, donc l'ensemble d'auto-intersection de Γ^∞ est un ensemble fractal de même dimension.

Selon qu'on se trouve dans le premier ou le deuxième de ces cas, nous verrons que la valeur de p^* et la régularité de la trace diffèrent.

Pour comparer les résultats obtenus à ceux de Jonsson et Wallin, il convient de préciser la notion de trace utilisée ici. Les résultats détaillés dans le Chapitre 1 concernent la trace auto-similaire ℓ^∞ et non pas la trace au sens classique définie en 1.2.5. On prouvera toutefois dans le Chapitre 3 que ces deux traces coïncident μ -presque partout, où μ est la mesure invariante associée à Γ^∞ .

On supposera dans la suite que l'on est dans le cas critique où $a = a_\theta^*$, et Γ^∞ est connexe et a des points d'auto-intersection.

RÉGULARITÉ SOBOLEV DES ONDELETTES DE HAAR

Il est clair que pour tout $p \in [1, \infty]$, les ondelettes de Haar sur l'ensemble auto-similaire Γ^∞ peuvent être relevées par des fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$, et appartiennent donc à l'espace de trace de $W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ^∞ .

Par ailleurs, on montre (voir les propositions 1.4.1 et 1.4.2) que la régularité des ondelettes dépend de la dimension de l'auto-intersection de Γ^∞ .

◊ Si on se trouve dans le cas (i) décrit plus haut, alors pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$\begin{cases} g_\sigma \in B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{si } 0 \leq s < \frac{d}{p}, \\ g_\sigma \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{si } s > \frac{d}{p}. \end{cases}$$

On en déduit que dans ce cas le résultat de trace (36) est faux pour $p > 2$.

◊ Si en revanche on se trouve dans le cas (ii) décrit plus haut, alors pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$\begin{cases} g_\sigma \in B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{si } 0 \leq s < \frac{d}{2p}, \\ g_\sigma \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{si } s > \frac{d}{2p}, \end{cases}$$

et on déduit ici que le résultat de trace (36) est faux pour $p > 2 - \frac{d}{2}$.

On va montrer en fait que ces valeurs sont optimales au sens où le résultat de trace (36) est vrai lorsqu'on est dans le cas (i) avec $p < 2$, ou dans le cas (ii) avec $p < 2 - \frac{d}{2}$. On appelle alors p^* la valeur critique obtenue :

$$p^* = \begin{cases} 2 & \text{dans le cas (i) : } \theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}, \\ 2 - \frac{d}{2} & \text{dans le cas (ii) : } \theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}. \end{cases} \quad (38)$$

On montrera également que lorsque $p > p^*$, la régularité générale de la trace est donnée par celle des ondelettes.

COMPARAISON DES ESPACES $JLip$ ET BESOV DANS LE CAS OÙ Ξ EST RÉDUIT À UN POINT

On énonce ici les résultats obtenus dans le cas où l'angle θ n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, et Ξ est réduit à un point.

THÉORÈME 1.5.1 – Si $\theta \notin \pi/2\mathbb{N}^*$ et $t < \min(d/p, 1)$, alors

$$JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty).$$

Ce théorème implique que le théorème de trace (36) reste vrai dans le cas $p < 2$.

Pour démontrer le Théorème 1.5.1, on propose d'abord une série de résultats géométriques faisant un lien entre le mot $\sigma \in \mathcal{A}$ et la distance entre $f_\sigma(\Gamma^\infty)$ et l'axe des ordonnées $\Lambda = \{(x_1, x_2), x_1 = 0\}$.

Dans le cas que nous considérons, Ξ est constitué du seul point limite f_ξ où $\xi = 12^{m+1}(12)^\infty$. On montre que la distance $d(f_\sigma(\Gamma^\infty), \Lambda)$ est du même ordre que la distance entre σ et ξ , où on définit la distance δ entre deux mots de $\sigma, \tau \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ par

$$\delta(\sigma, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = \tau, \\ a^k & \text{sinon, où } k \text{ est le plus grand entier tel que } \sigma_{\uparrow k} = \tau_{\uparrow k}. \end{cases} \quad (39)$$

Par la Proposition 1.2.2, il s'agit de contrôler l'intégrale

$$|v|_{B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)} = \int_{\Gamma^\infty} \int_{\Gamma^\infty} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{d(x,y)^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y),$$

pour $v \in JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$.

La démonstration du Théorème 1.5.1 repose sur les inégalités de Hardy discrètes énoncées dans le Lemme 1.4.9. L'idée est de décomposer la fonction $v \in JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ selon la base d'ondelettes de Haar de Γ^∞ , et de découper les intégrales selon une partition de $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de Γ^∞ , où l'ensemble X_i est constitué des points dont la distance à Λ est de l'ordre de a^{2i} .

Le Théorème 1.5.1 donne également l'inclusion suivante :

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty), \quad s < \frac{d}{p}, \quad (40)$$

lorsque $p > 2$. Les résultats sur les ondelettes montrent que ce résultat est optimal, au sens où (40) est faux pour $s > \frac{d}{p}$.

COMPARAISON DES ESPACES JLip ET BESOV DANS LE CAS OÙ Ξ EST NON DÉNOMBRABLE

Dans le cas où Ξ est non dénombrable, c'est-à-dire lorsque $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}^*}$, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5.2 – Si $\theta \notin \pi/2\mathbb{N}^*$ et $t < \min(d/2p, 1)$, alors

$$JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty).$$

La démonstration de ce dernier théorème est similaire à celle du Théorème 1.5.1. Elle utilise des résultats géométriques analogues au cas précédent.

Cette fois, l'ensemble Ξ est constitué des points limites f_ξ où $\xi \in \mathcal{X} := 12^{m+1}(12|21)^\infty$. On montre dans ce cas que la distance $d(f_\sigma(\Gamma^\infty), \Lambda)$ est du même ordre que $\delta(\sigma, \mathcal{X}) := \inf_{\xi \in \mathcal{X}} \delta(\sigma, \xi)$.

On procède alors de manière similaire à la démonstration du Théorème 1.5.1, en découpant les intégrales selon la même partition de Γ^∞ .

De même que pour le Théorème 1.5.1, on peut déduire du Théorème 1.5.2 l'inclusion

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty), \quad s < \frac{d}{2p} \quad (41)$$

lorsque $p > 2 - \frac{d}{2}$. Les résultats sur les ondelettes permettent également d'établir que ce résultat est optimal, au sens où (41) est faux pour $s > \frac{d}{2p}$.

1.5.2 PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT SOBOLEV POUR LES DOMAINES RAMIFIÉS

La question de l'existence d'un opérateur de prolongement pour les fonctions $W^{1,p}$ sur un domaine ramifié de la classe \mathcal{D} a une importance particulière, notamment pour déduire des résultats de densité sur ces domaines malgré leur irrégularité.

Ici encore, les théorèmes énoncés dans les paragraphes précédents permettent de régler la question dans le cas sous-critique. Dans ce cas, les domaines sont des domaines de prolongement Sobolev. Du fait que les domaines ramifiés critiques de \mathcal{D} ne sont pas des domaines (ε, δ) , on ne peut utiliser le théorème de prolongement de Jones. On voit d'ailleurs aisément que, du fait des injections de Sobolev dans les fonctions continues du plan, les domaines ramifiés critiques ne peuvent avoir la propriété de prolongement Sobolev pour $p > 2$.

Les résultats de régularité des ondelettes de Haar sur Γ^∞ du Chapitre 1 suggèrent qu'on ne peut espérer avoir un opérateur de prolongement $W^{1,p}$ lorsque $p > p^*$. Le principal théorème du Chapitre 2 montre en fait le résultat suivant.

THÉORÈME 1.5.3 – Lorsque $a = a_\theta^*$, les domaines ramifiés de \mathcal{D} sont des domaines de prolongement $W^{1,p}$ pour tout $p < p^*$.

Du fait que dans le cas critique les domaines ramifiés ne sont pas (ε, δ) , la technique de décomposition de Whitney habituellement utilisée ne s'applique pas directement. On montre alors le résultat de prolongement à la main en commençant par construire un prolongement des fonctions de $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-p}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ en des fonctions de $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

THÉORÈME 1.5.4 – Si $p < p_\theta^*$, alors il existe un opérateur de prolongement \mathcal{E} de $B_{1-\frac{2-p}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ pour la trace auto-similaire ℓ^∞ (c'est-à-dire que $\ell^\infty((\mathcal{E}v)|_\Omega) = v$ pour toute fonction $v \in B_{1-\frac{2-p}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$), tel que $\mathcal{E}g_\sigma \equiv -1$ dans $f_{\sigma_1}(\Omega)$ et $\mathcal{E}g_\sigma \equiv 1$ dans $f_{\sigma_2}(\Omega)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{A}$.

1.5.2.a Construction du prolongement du Théorème 1.5.4

La construction se fait en deux étapes : on commence par construire un relèvement des ondelettes de Haar pour l'opérateur de trace auto-similaire, puis on définit l'opérateur de prolongement en considérant le développement dans la base d'ondelettes de Haar des fonctions de $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$.

Le relèvement construit peut être vu comme une modification de la technique de Whitney, adaptée aux propriétés d'auto-similarité du domaine.

Relèvement des ondelettes On commence par construire un relèvement \bar{g}_0 de g_0 dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ qui vaut -1 dans $f_1(\Omega)$ et 1 dans $f_2(\Omega)$.

On définit ensuite les relèvements \bar{g}_σ des ondelettes de Haar g_σ ($\sigma \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$). Pour ce faire, on s'appuie sur les fonctions $2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}$ multipliées à des fonctions de troncature adaptées.

Dans le cas où Ξ est réduit à un point, les fonctions de troncature ont leur gradient nul en dehors de cônes dont les centres sont les points d'auto-intersection du fractal Γ^∞ .

Dans le cas où Ξ n'est pas dénombrable, la géométrie est plus complexe, et les cônes doivent être remplacés par des ensembles plus sophistiqués (voir Figure 2.4 p. 106).

L'opérateur de prolongement On construit ensuite l'opérateur de prolongement en posant, pour $v \in B_{1-\frac{2-p}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$,

$$\mathcal{E}v = \langle v \rangle_{\Gamma^\infty} \chi + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \beta_\sigma \bar{g}_\sigma, \quad (42)$$

où les β_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$ sont les coefficients dans la décomposition de v dans la base d'ondelettes de Haar sur Γ^∞ , et χ est un relèvement dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ de la fonction constante égale à 1 sur Ω .

On montre ensuite que le prolongement $\mathcal{E}v$ est dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ et que l'opérateur \mathcal{E} est bien continu. D'après la construction des relèvements \bar{g}_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$, il suffit de montrer l'inégalité $\|\mathcal{E}v\|_{W^{1,p}(\mathcal{S})} \lesssim \|v\|_{JLip(1-\frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)}$, où \mathcal{S} est l'union des supports des gradients des fonctions de troncature. La preuve utilise alors les propriétés des relèvements des ondelettes de Haar, dont les recouvrements dans \mathcal{S} sont contrôlés.

1.5.2.b Un résultat de densité

La propriété de prolongement $W^{1,p}$ pour les domaines ramifiés lorsque $p < p^*$ entraîne de manière immédiate le résultat de densité suivant.

THÉORÈME 1.5.5 – Si Ω est un domaine ramifié de la classe \mathcal{D} , l'espace $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $p < p_\theta^*$.

1.5.3 COMPARAISON DES DÉFINITIONS DE TRACE SUR LE BORD DES DOMAINES RAMIFIÉS

On a introduit au paragraphe 1.2.5 plusieurs définitions de trace sur la partie auto-similaire des domaines ramifiés de \mathcal{D} , et on a énoncé et démontré des résultats de trace pour lesquels la trace n'est pas toujours entendue au même sens. Jusqu'ici, nous avons laissé de côté la question du lien entre ces différentes notions de trace dans le cas de la classe des domaines ramifiés que nous considérons. Le chapitre 3 examine cette question et montre que les définitions de trace introduites au paragraphe 1.2.5 coïncident presque partout pour la mesure auto-similaire.

On note que la Proposition 1.2.1 ne s'applique pas au cas des domaines ramifiés de \mathcal{D} : les domaines de \mathcal{D} sont bien des 2-ensembles (voir la Proposition 3.2.1) mais Γ^∞ n'est jamais un 1-ensemble, même lorsque $\theta = 0$ et $\dim_H \Gamma^\infty = 1$.

Le résultat principal du chapitre 3 est le suivant.

THÉORÈME 1.5.6 – *Soient Ω un domaine ramifié de \mathcal{D} dont la partie auto-similaire du bord est notée Γ^∞ et $p \in [1, \infty]$. Toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ peut être strictement définie presque partout sur Γ^∞ au sens de la mesure auto-similaire, et*

$$\ell^\infty(u) = \bar{u}$$

μ -presque partout sur Γ^∞ .

La démonstration du Théorème 1.5.6 repose sur les résultats de prolongement Sobolev démontrés au chapitre 2. On s'appuie sur l'existence d'un réel $p \geq 1$ tel que les domaines de \mathcal{D} soient des domaines de prolongement $W^{1,p}$ de \mathbb{R}^2 . On note ensuite que si \mathcal{E} est un opérateur continu de prolongement de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, alors \mathcal{E} est bien sûr aussi un opérateur continu de prolongement de $W^{1,q}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $q \geq p$, ce qui vaut en particulier lorsque $q > p_\theta^*$ et que Ω n'a pas la propriété de prolongement $W^{1,q}$.

La preuve s'appuie sur une identification entre espaces de Sobolev et espaces de potentiel de Bessel. On rappelle que l'espace de potentiel de Bessel d'ordre $\alpha > 0$ sur \mathbb{R}^n est défini par

$$L^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \{G_\alpha \star g, g \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

$G_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ désigne le noyau de Bessel d'ordre α , défini par

$$\widehat{G}_\alpha = (1 + 4\pi^2|\xi|^2)^{-\alpha/2},$$

où $\widehat{G}_\alpha : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x) e^{2i\pi x \cdot \xi} dx$ est la transformée de Fourier de G_α . On a alors l'identification suivante due à A.P. Calderón (voir [Ste70]) :

$$\text{si } k \text{ est un entier positif et } 1 < p < \infty, \text{ alors } L^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n). \quad (43)$$

On montre dans un premier temps que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, la trace au sens classique $\bar{u}|_{\Gamma^\infty}$ coïncide avec la trace classique $\mathcal{E}u|_{\Gamma^\infty}$ de $\mathcal{E}u$, où \mathcal{E} est l'opérateur de prolongement décrit plus haut.

On montre ensuite le Théorème 1.5.6 en comparant la trace classique à une définition auto-similaire de la trace au sens classique (voir Définition 3.4.1 et Théorème 3.4.3).

1.5.4 UNE APPROCHE NUMÉRIQUE POUR UN PROBLÈME AUX LIMITES DANS $\Omega \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$

On considère dans cette dernière partie un problème aux limites avec une interface fractale auto-similaire dont on s'intéresse à la mise en œuvre numérique. On considère toujours les domaines ramifiés Ω de la classe \mathcal{D} , et on s'intéresse à des problèmes du type

$$\begin{cases} \Delta u = f_i & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = f_e & \text{dans } \Omega_e, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty, \\ [\partial_n u] = 0 & \text{sur } \Gamma^\infty, \end{cases} \quad (44)$$

avec en plus des conditions mixtes sur le reste du bord de Ω et de Ω_e , où Ω_e est l'extérieur du domaine Ω . On désigne par $[u]$ et $[\partial_n u]$ les sauts respectifs de u et de sa dérivée normale, en un sens faible à préciser, à travers l'interface Γ^∞ .

On étudie en fait le problème analogue en remplaçant Ω par le sous-domaine Ω_m obtenu en tronquant le domaine Ω après m générations et Ω_e par l'extérieur Ω_e^m de Ω^m . L'interface est donc le préfractal $\Gamma^m = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_m} f_\sigma(\Gamma^0)$.

On traite le problème extérieur mixte correspondant avec une donnée de Dirichlet sur l'interface Γ^m par une méthode de représentation intégrale. On obtient un opérateur de type Dirichlet-Neumann.

Le problème intérieur avec une donnée de Neumann sur l'interface Γ^m est traité par une méthode auto-similaire tirée de [AST06, AT07]. On obtient alors un opérateur de type Neumann-Dirichlet.

On résout alors un problème de point fixe dont la solution est la donnée de Dirichlet de la solution du problème de transmission sur l'interface Γ^m . Une fois cette donnée obtenue, la solution du problème de transmission s'obtient en résolvant successivement un problème extérieur et un problème intérieur.

On s'intéresse d'un point de vue numérique aux exemples où $f_i = 0$ et f_e est une masse de Dirac en un point de Ω_e^m , ainsi qu'au cas où $f_i = \delta_{\Gamma^\sigma}$ pour $\sigma \in \mathcal{A}_k$, $k < m$, et $f_e = 0$, où on rappelle que $\Gamma^\sigma = f_\sigma(\Gamma^0)$.

PART I

**TRACE AND EXTENSION THEOREMS FOR A CLASS
OF RAMIFIED DOMAINS WITH SELF-SIMILAR
FRACTAL BOUNDARY**

CHAPTER 1

JLip versus Sobolev spaces on a class of self-similar fractal foliages

For a class of self-similar sets Γ^∞ in \mathbb{R}^2 , supplied with a probability measure μ called the self-similar measure, we investigate if the $B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ regularity of a function can be characterized using the coefficients of its expansion in the Haar wavelet basis. Using the Lipschitz spaces with jumps recently introduced by Jonsson, the question can be rephrased: when does $B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ coincide with $JLip(s, p, p; 0; \Gamma^\infty)$? When Γ^∞ is totally disconnected, this question has been positively answered by Jonsson for all $s, p, 0 < s < 1$ and $1 \leq p < \infty$ (in fact, Jonsson has answered the broader question of characterizing $B_s^{p,q}(\Gamma^\infty)$, $s > 0, 1 \leq p, q < \infty$, using possibly higher degree Haar wavelets coefficients). Here, we fully answer the question in the case when $0 < s < 1$ and Γ^∞ is connected.

1.1 INTRODUCTION

There is a growing interest in analysis on self-similar fractal sets, see for instance Kigami [Kig01], Strichartz [Str03, Str99], Mosco [Mos02, Mos98] and references therein. These works aim at intrinsically defining function spaces using Dirichlet forms and a different metric from the Euclidean one. The results in this direction are often subject to the important assumption that the set is post-critically finite (or p.c.f.), see (9) or [Kig01].

In a different direction, Jonsson has studied Lipschitz functions spaces on a self-similar fractal set K under a technical condition which yields a Markov inequality at any order, see the pioneering works [Jon98, Jono4]. More precisely, in [Jono4], Haar wavelets of arbitrary order on K were introduced and used for constructing a family of Lipschitz function spaces allowing jumps at some special points in K . These function spaces are named $JLip(t, p, q; m; K)$, where t is a positive real number, p, q are two real numbers not smaller than 1 and m is an integer (m is the order of the Haar wavelets used for constructing the space). Here J stands for *jumps*, since the considered functions may jump at some points of K . The theory in [Jono4], which does not require the assumption that K be p.c.f, plays an important role in the present paper. It will be partially reviewed in § 1.3.1 (we will focus on the case when $m = 0, p = q$ and $0 < t < 1$).

In the present work, for a class of self-similar sets contained in \mathbb{R}^2 , we aim at studying the relationships between some *JLip* spaces and the more classical Besov spaces introduced and studied by Jonsson and Wallin [JW84] for closed sets: consider a closed subset F of \mathbb{R}^n supplied with a Borel measure μ such that there exists a positive real number d and two positive constants

c_1 and c_2 with

$$c_1 r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq c_2 r^d,$$

for all $x \in F$ and $r < 1$ (here $B(x, r)$ is the ball in F with center x and radius r , with respect to the Euclidean distance in \mathbb{R}^n); the set F is said to be a d -set. In [JW84], Sobolev and Besov spaces are defined on d -sets. For example, for $0 < s < 1$, the Sobolev space $B_s^{p,p}(F)$ is defined as

$$B_s^{p,p}(F) = \left\{ f \in L_\mu^p(F); \int_{x,y \in F, |x-y| < 1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} d\mu(x) d\mu(y) < \infty \right\}, \quad (1.1)$$

see §1.2.6.b. In [JW84], results on the extension (in \mathbb{R}^n) of functions belonging to Besov and Sobolev spaces on F and trace results are proved using as a main ingredient Whitney extension theory. In particular, there exists a continuous trace operator from $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ onto $B_{1-\frac{d}{p}}^{p,p}(F)$,

if $\max(1, n-d) < p < \infty$. A more general trace theorem is available, see Theorem 1, page 141 in [JW84].

The approach of Triebel [Tri97] is somewhat different. In [Tri97] chapter IV, paragraph 18, it is proved that the space of the traces on F of functions in $B_{\frac{n-d}{p}}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ is $L_\mu^p(F)$ for $0 < d < n$,

$d/n < p < \infty$ and $0 < q \leq \min(1, p)$; Besov spaces on F are then defined as spaces of the traces of Besov spaces on \mathbb{R}^n and embedding properties are studied.

In [Jono4], Jonsson has proved that if the self-similar set K is totally disconnected, then the *JLip* spaces coincide with Lipschitz or Besov spaces, more precisely that the spaces $JLip(t, p, q; m; K)$ coincide with the Lipschitz spaces $Lip(t, p, q; m; K)$ also introduced in [Jono4]. The latter are a generalization of the more classical spaces $Lip(t, p, q; K)$ introduced in [JW84] since $Lip(t, p, q; [t]; K) = Lip(t, p, q; K)$. Note that $Lip(t, p, q; [t]; K) = B_t^{p,q}(K)$, see [JW95]. When the fractal set is not totally disconnected, the *JLip* space may not coincide with *Lip* or Besov spaces.

In this chapter, we focus on a class of self-similar sets noted Γ^∞ below, see for example Figure 3 in the Introduction of the thesis. The set Γ^∞ is the unique compact subset of \mathbb{R}^2 such that

$$\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty),$$

where f_1 and f_2 are two similitudes with rotation angles $\pm\theta$ and contraction factor a such that $0 < a \leq a_\theta^*$. As we shall see, Γ^∞ can be seen as a part of the boundary of a ramified domain Ω in \mathbb{R}^2 , see Figure 6 in the Introduction, and the restriction $a \leq a_\theta^*$ allows for the construction of Ω as a union of non-overlapping sub-domains, see (1.30). In § 1.2.2.c, we will recall the notion of self-similar measure μ defined in the triplet $(\Gamma^\infty, f_1, f_2)$, see [Kigo1]. With the Borel regular probability measure μ , Γ^∞ is a d -set where $d \equiv -\log 2 / \log a$ is the Hausdorff dimension of Γ^∞ .

The notion of traces on Γ^∞ for functions in $W^{1,p}(\Omega)$ has been defined in the earlier work [AT07], see also §1.3.3. In [AT10], some of the authors of the present paper have characterized the space of the traces on Γ^∞ of functions in $W^{1,p}(\Omega)$ as $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$, for $1 < p < \infty$ (with $d = -\log 2 / \log a$). Note that $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ always contains $Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$, and that $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ if $a < a_\theta^*$.

Therefore, the question considered here is to know for $a = a_\theta^*$, in which case the identity

$$JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty) \quad (1.2)$$

holds, and if not, to find the parameters s such that $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$. The first part of the question covers the following one: when do the spaces containing the traces on Γ^∞ of the functions in $W^{1,p}(\Omega)$ and $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ coincide? This is also linked to the possibility of constructing an extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, which is addressed in Chapter 2. Note that a partial answer was given in [AT08] (before the characterization of the trace space as a $JLip$ space was found) in the special case when $p = 2$ and for a special geometry ($\theta = \pi/4$). We will see that two different situations occur:

- ◊ if there does not exist an integer m such that $m\theta = \pi/2$ then $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$ is a singleton, and we will see that (1.2) holds if $pt < d$.
- ◊ Otherwise, the Hausdorff dimension of $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$ is $d/2$ and (1.2) holds only for $pt < d/2$.

Finally, note that the question of extensions or traces naturally arises in boundary value or transmission problems in domains with fractal boundaries. Results in this direction have been given in [MV03, Lan03, Lan02] for the Koch flake. There also, the assumption that the fractal set is p.c.f. is generally made. Boundary value problems posed in the domains Ω displayed in Figure 6 were studied in [AT07].

The chapter is organized as follows: the geometry of the ramified domains we study is detailed in Section 1.2. In Section 1.3, we recall the construction of the trace operator and briefly review existing trace results from [AT07] and [AT10]. The main results are Theorems 1.4.1 and 1.4.2 which are stated in §1.4 and respectively proved in §1.4.2 and §1.4.3. For the ease of the reader, the proof of the geometrical lemmas, which are crucial but technical, is postponed to Section 1.5 at the end of the Chapter. We conclude by briefly mentioning another geometry for the ramified domains, and propose a conjecture on the regularity of the trace on the self-similar fractal boundary for general ramified domains.

1.2 THE GEOMETRY

1.2.1 THE SIMILITUDES f_1 AND f_2 AND THE SELF-SIMILAR SET Γ^∞

1.2.1.a Definitions

Consider four real numbers a, α, β, θ such that $0 < a < 1/\sqrt{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and $0 < \theta < \pi/2$. Let f_i^a , $i = 1, 2$ be the two similitudes in \mathbb{R}^2 given by

$$\begin{aligned} f_1^a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\ f_2^a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

The two similitudes have the same dilation ratio a and opposite angles $\pm\theta$. One can obtain f_2^a by composing f_1^a with the symmetry with respect to the axis $\{x_1 = 0\}$.

We denote by Γ_a^∞ the self-similar set associated to the similitudes f_1^a and f_2^a , i.e. the unique compact subset of \mathbb{R}^2 such that

$$\Gamma_a^\infty = f_1^a(\Gamma_a^\infty) \cup f_2^a(\Gamma_a^\infty).$$

When the context is clear, we write f_1 (resp. f_2, Γ^∞) instead of f_1^a (resp. f_2^a, Γ_a^∞).

Notations We denote by

- ◇ \mathcal{A}_n the set containing all the 2^n mappings from $\{1, \dots, n\}$ to $\{1, 2\}$ also called strings of length n for $n \geq 1$,
- ◇ \mathcal{A}_0 the set containing only one element called the empty string, that we agree to denote ϵ ,
- ◇ \mathcal{A} the set defined by $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$ containing the empty string and all the finite strings,
- ◇ $\mathcal{A}_\infty = \{1, 2\}^{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$ the set of the sequences $\sigma = (\sigma(i))_{i=1, \dots, \infty}$ with values $\sigma(i) \in \{1, 2\}$, i.e. the set of all infinite strings.

We will also use the following notations:

- ◇ if n, m are nonnegative integers and $\sigma \in \mathcal{A}_n, \sigma' \in \mathcal{A}_m$, define:

$$\sigma\sigma' = \sigma(1)\dots\sigma(n)\sigma'(1)\dots\sigma'(m) \in \mathcal{A}_{n+m}, \quad (1.4)$$

if $m = \infty$, we define similarly $\sigma\sigma' \in \mathcal{A}_\infty$,

- ◇ for $n > 0, \sigma \in \mathcal{A}_n$, and $k \geq 0$, we define

$$\sigma^k = \underbrace{\sigma\sigma\dots\sigma}_k \in \mathcal{A}_{nk}, \quad \sigma^\infty = \sigma\sigma\dots\sigma\dots \in \mathcal{A}_\infty, \quad (1.5)$$

- ◇ for $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$, define:

$$\sigma|\tau = \{\sigma, \tau\} \subset \mathcal{A}, \quad (1.6)$$

- ◇ for $\sigma \in \mathcal{A}$ and $\mathcal{X} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$, define the set:

$$\sigma\mathcal{X} = \{\sigma\tau, \tau \in \mathcal{X}\}, \quad (1.7)$$

similarly, if $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, define the set $\mathcal{X}\sigma = \{\tau\sigma, \tau \in \mathcal{X}\}$,

- ◇ for $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ and $k \in \mathbb{N}$, introduce the sets:

$$\mathcal{X}^k = \{\sigma_1\dots\sigma_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k \in \mathcal{X}\}, \quad \mathcal{X}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{X}^k,$$

$$\mathcal{X}^\infty = \{\sigma_1\sigma_2\dots \in \mathcal{A}_\infty, \forall i, \sigma_i \in \mathcal{X}\}.$$

EXAMPLE 1.2.1 – ◇ *The set $(12|21)^\infty$ is the set of infinite strings $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ such that for all positive integers $k, \sigma(2k) \neq \sigma(2k-1)$.*

- ◊ For $n \geq 0$, the set $(12|21)^n$ is the set of strings $\sigma \in \mathcal{A}_{2n}$ such that for all integers $k \in [1, n]$, $\sigma(2k) \neq \sigma(2k-1)$.
- ◊ The set $(12|21)^* \cup (12|21)^*(1|2)$ is the set of all the prefixes of the strings in $(12|21)^\infty$.

We say that $\sigma \in \mathcal{A}$ is a prefix of $\tau \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ if $\tau = \sigma\sigma'$ for some $\sigma' \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$. For $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) and $k \leq n$, we denote by $\sigma|_k$ the only prefix of σ in \mathcal{A}_k :

$$\sigma|_k = (\sigma(1), \dots, \sigma(k)) \in \mathcal{A}_k. \quad (1.8)$$

Similarly, we say that $\sigma' \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ is a suffix of $\tau \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_\infty$ if $\tau = \sigma\sigma'$ for some $\sigma \in \mathcal{A}$.

For a positive integer n and $\sigma \in \mathcal{A}_n$, we define the similitude f_σ by

$$f_\sigma = f_{\sigma(1)} \circ \dots \circ f_{\sigma(n)}. \quad (1.9)$$

We also agree that $f_\epsilon = \text{Id}$. Similarly, if $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$, define

$$f_\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\sigma(1)} \circ \dots \circ f_{\sigma(n)}. \quad (1.10)$$

If $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ and $x \in \mathbb{R}^2$, we know that $f_\sigma(x) \in \Gamma^\infty$ does not depend on the point x (it is the image of σ by the map h defined in (7)). We call this point the *limit point* of the string σ and sometimes write it f_σ . We recall that the set of all limit points of strings in \mathcal{A}_∞ is exactly Γ^∞ (see for example [Kigo1]).

For $\sigma \in \mathcal{A}$, let the subset $\Gamma^{\infty, \sigma}$ of Γ^∞ be defined by

$$\Gamma^{\infty, \sigma} = f_\sigma(\Gamma^\infty). \quad (1.11)$$

The definition of Γ^∞ implies that for all $n > 0$, $\Gamma^\infty = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \Gamma^{\infty, \sigma}$.

Recall the definition of the set Ξ_a (see (8)) defined by

$$\Xi_a = f_1^a(\Gamma^\infty) \cap f_2^a(\Gamma^\infty), \quad (1.12)$$

that we agree to write Ξ instead of Ξ_a when the context is clear. Note that the set $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\Xi_a)$ consists of all the multiple points of Γ_a^∞ .

The following theorem was stated by Mandelbrot *et al.* in [MF99].

THEOREM 1.2.1 –

- (i) For any θ , $0 < \theta < \pi/2$, there exists a unique positive number $a_\theta^* < 1/\sqrt{2}$, (which does not depend on (α, β) see [ATI0]) such that

$$\begin{aligned} \text{if } 0 < a < a_\theta^* & \text{ then } \Xi = \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is totally disconnected,} \\ \text{if } a = a_\theta^* & \text{ then } \Xi \neq \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is connected.} \end{aligned} \quad (1.13)$$

- (ii) The critical parameter a_θ^* is the unique positive root of the polynomial equation:

$$\sum_{i=0}^{m-1} X^{i+2} \cos i\theta = \frac{1}{2}, \quad (1.14)$$

where

$$m \text{ is the smallest integer such that } m\theta \geq \pi/2. \quad (1.15)$$

We start by proving the following lemmas.

LEMMA 1.2.1 - *There exists a number $a \in (0, 1/\sqrt{2})$ such that $\Xi_a \neq \emptyset$.*

Proof. We first choose the point M_0 with coordinates $(0, \beta - \frac{\alpha}{\tan \theta})$, such that the angle between the vertical axis Λ defined by the equation $x_1 = 0$ and the line $M_0 f_1(M_0)$ (resp. $M_0 f_2(M_0)$) is $-\theta$ (resp. θ). Observe that the points $f_{\sigma|_n}(M_0)$ are the nodes of a dyadic tree (see Figure 1.1).

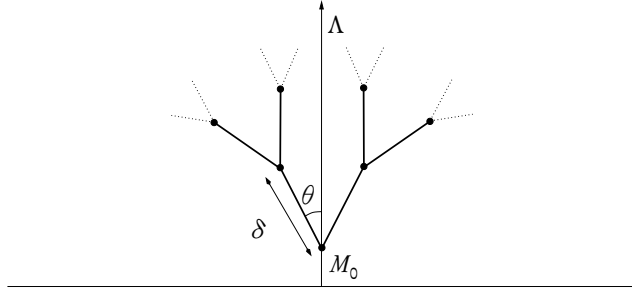


FIGURE 1.1: Dyadic tree formed by the points $f_{\sigma|_n}(M_0)$

Take $a \in (0, 1)$ and $\sigma \in \mathcal{A}^\infty$. We start by giving an expression of the abscissa ρ_a of the limit point $f_\sigma^a = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{\sigma|_n}(M_0))$.

For all positive integer n , write ρ_a^n the abscissa of $f_{\sigma|_n}(M_0)$; note that $\rho_a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \rho_a$. One has

$$\rho_a^n = \delta \sum_{k=1}^n a^{k-1} \sin(\gamma_k(\sigma)\theta), \quad (1.16)$$

where δ is the length of the line segment $[M_0 f_1(M_0)]$, and $(\gamma_k(\sigma))_{k \in \mathbb{N}}$ is a sequence of integers defined by

$$\begin{aligned} \gamma_0(\sigma) &= 0, \\ \gamma_{k+1}(\sigma) &= \begin{cases} \gamma_k - 1 & \text{if } \sigma(k) = 1 \\ \gamma_k + 1 & \text{if } \sigma(k) = 2 \end{cases} \quad \text{for all } k. \end{aligned}$$

We now choose $\sigma = 12^{m+1}(12)^\infty$, which implies by (1.16) that

$$\begin{aligned} \rho_a &= \delta \left(-\sin \theta + a^2 \sin \theta + \dots + a^{m-1} \sin(m-2)\theta \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} a^{m+2i} \sin(m-1)\theta + \sum_{i=0}^{\infty} a^{m+2i+1} \sin m\theta \right) \\ &= \delta \left(\sum_{j=0}^{m-1} a^j \sin(j-1)\theta + \frac{a^m}{1-a^2} \sin(m-1)\theta + \frac{a^{m+1}}{1-a^2} \sin m\theta \right), \quad (1.17) \end{aligned}$$

which holds for both cases $m\theta > \frac{\pi}{2}$ and $m\theta = \frac{\pi}{2}$ since $\sin(m-1)\theta = \sin(m+1)\theta$ in the latter case.

First note that $\rho_{1/\sqrt{2}} > 0$:

- ◇ if $m = 2$, $\rho_a > \delta \sin \theta \left(-1 + \frac{a^2}{1-a^2} \right)$, and $\rho_{1/\sqrt{2}} > 0$,
- ◇ if $m > 2$, then for all $j \in \{1, \dots, m\}$, $\sin \theta \leq \sin j\theta$, and

$$\rho_a \geq \delta \sin \theta \left(-1 + \sum_{k \geq 2} a^k \right) = \delta \sin \theta \left(-1 + \frac{a^2}{1-a} \right),$$

which implies that $\rho_{1/\sqrt{2}} > 0$.

Since $\lim_{a \rightarrow 0} \rho_a < 0$, the polynomial function $a \mapsto \rho_a$ has at least one root a_0 between 0 and $\frac{1}{\sqrt{2}}$, and the limit point $f_{\sigma}^{a_0}(M_0)$ has abscissa zero. By symmetry, we also have $f_{\sigma}^{a_0}(M_0) \in f_2(\Gamma^\infty)$, which implies that $\Xi_{a_0} \neq \emptyset$. \square

LEMMA 1.2.2 – *the mapping Φ defined by*

$$\Phi : a \in (0, 1) \mapsto \Gamma_a^\infty, \text{ where } \Gamma_a^\infty = f_1^a(\Gamma_a^\infty) \cup f_2^a(\Gamma_a^\infty) \quad (1.18)$$

is continuous.

Proof. For any $r \in (0, 1)$, introduce the mapping F_r defined by $F_r(K) = f_1^r(K) \cup f_2^r(K)$ for all compact set $K \subset \mathbb{R}^2$, and write F_r^n the mapping F_r composed n times with itself.

Take a point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and two real numbers $a, b \in (0, 1)$. We first prove by induction on the integer $n > 0$ that there exists a constant $M > 0$ such that for all $\sigma \in \mathcal{A}_n$,

$$d(f_\sigma^a(x_0), f_\sigma^b(x_0)) \leq M \sum_{k=0}^n a^k |b - a|.$$

We first note that the inequality holds for $n = 1$ since for $i = 1, 2$, one has

$$d(f_1^a(x_0), f_2^b(x_0)) = |b - a| \cdot \|x_0\|.$$

Suppose now that the inequality holds for an integer n , and observe that if $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $i \in \{1, 2\}$, then

$$\begin{aligned} d(f_i^a(f_\sigma^a(x_0)), f_i^b(f_\sigma^b(x_0))) &\leq d(f_i^a(f_\sigma^a(x_0)), f_i^a(f_\sigma^b(x_0))) + d(f_i^a(f_\sigma^b(x_0)), f_i^b(f_\sigma^b(x_0))) \\ &\leq a d(f_\sigma^a(x_0), f_\sigma^b(x_0)) + |b - a| \cdot \|f_\sigma^b(x_0)\| \\ &\leq M \sum_{k=1}^{n+1} a^k |b - a| + |b - a| \cdot \|f_\sigma^b(x_0)\|, \end{aligned}$$

which yields the result if we set $M \geq \|f_\sigma^b(x_0)\|$ for all $\sigma \in \mathcal{A}$. This is possible since the points $f_\sigma(x_0)$ are included in a compact set.

We note that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(F_a^n(\{x_0\}), F_b^n(\{x_0\})) = d_H(\Gamma_a^\infty, \Gamma_b^\infty).$$

Observe that

$$\begin{aligned} \max_{x \in F_a^n(\{x_0\})} d(x, F_b^n(\{x_0\})) &= \max_{\sigma \in \mathcal{A}_n} d(f_\sigma^a(x_0), F_b^n(\{x_0\})) \\ &\leq \max_{\sigma \in \mathcal{A}_n} d(f_\sigma^a(x_0), f_\sigma^b(x_0)) \leq \frac{M}{1-a} |b - a|. \end{aligned}$$

Similarly, we prove that $\max \{d(y, F_a^n(\{x_0\})), y \in F_b^n(\{x_0\})\} \leq \frac{M}{1-a}|b-a|$, which yields that $d_H(F_a^n(\{x_0\}), F_b^n(\{x_0\})) \leq \frac{M}{1-a}|b-a|$ and proves that Φ is Lipschitz-continuous. \square

Proof of Theorem 1.2.1. Point (i) Call A_1 and A_2 the respective fixed points of f_1 and f_2 . Observe that

$$\sup_{y \in f_1(\Gamma^\infty)} d(A_1, y) = \sup_{x \in \Gamma^\infty} d(f_1(A_1), f_1(x)) \leq a \sup_{x \in \Gamma^\infty} d(A_1, x) \leq a \operatorname{diam} \Gamma^\infty, \quad (1.19)$$

since $A_1 \in \Gamma^\infty$. Similarly, $\sup_{y \in f_2(\Gamma^\infty)} d(A_2, y) \leq a \operatorname{diam} \Gamma^\infty$. Therefore, when a is sufficiently small, $\Xi_a = \emptyset$.

Lemma 1.2.1 allows the definition of a^* as

$$a^* = \inf\{a > 0, \Xi_a \neq \emptyset\}. \quad (1.20)$$

Since for $a < a^*$, $f_1(\Gamma_a^\infty) \cap f_2(\Gamma_a^\infty) = \emptyset$, we easily deduce by self-similarity that Γ_a^∞ is totally disconnected in this case.

There remains to show that when $a = a^*$, $\Xi_a \neq \emptyset$. Call m_a the maximal abscissa of points in $f_1^a(\Gamma_a^\infty)$. Note that if $\Xi_a \neq \emptyset$, it is clear that $m_a \geq 0$.

Consider a sequence $(a_n)_n$ with $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a^*$ and $a_n < a^*$, which implies that $m_{a_n} < 0$. Indeed, the continuity of the mapping Φ implies that the mapping $a \in (0, 1) \mapsto m_a$ is also continuous. Therefore, if we had $m_{a_n} \geq 0$, then there would be a real number $b \in (0, a_n]$ such that $m_b = 0$, which is a contradiction.

The continuity of $a \mapsto m_a$ also implies that $m_{a^*} \leq 0$, since $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{a_n} = m_{a^*}$.

Similarly, choose $(b_n)_n$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a^*$ and $\Xi_{b_n} \neq \emptyset$ for all n , which implies that $m_{b_n} \geq 0$. The fact that $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{b_n} = m_{a^*}$ together with the previous point yields that $m_{a^*} = 0$ which proves that $\Xi_{a^*} \neq \emptyset$. This yields that $\Gamma_{a^*}^\infty$ is connected (see Theorem 1.6.2 in [Kig01]).

Point (ii) Take $a \leq a^*$, then we know that $m_a \leq 0$. To characterize a^* , we will look for the strings $\sigma \in \mathcal{A}^\infty$ with $\sigma(1) = 1$ such that the abscissa of $f_\sigma^a(\Gamma_a^\infty)$ is maximal, that is if the sum in (1.16) is maximal. We will see that m_a is in fact the real number ρ_a introduced in the proof of Lemma 1.2.1.

First observe that if the string σ maximizes the sum in (1.16) over all strings in \mathcal{A}^∞ , then the sum is in fact maximized termwise. This can be seen by noticing that if $\alpha \in \mathcal{A}$ and $\operatorname{abs}(f_{\alpha 1}(M_0)) < \operatorname{abs}(f_{\alpha 2}(M_0))$, then $\operatorname{abs}(f_{\alpha 1 \tau}(M_0)) < \operatorname{abs}(f_{\alpha 2 \tau}(M_0))$ for all $\tau \in \mathcal{A}^\infty$ since $f_{\alpha 1}(\Gamma_a^\infty)$ and $f_{\alpha 2}(\Gamma_a^\infty)$ lie in opposite sides of $f_\alpha(\Lambda)$ by self-similarity and are symmetrical with respect to $f_\alpha(\Lambda)$ (see Figure 1.2), where we denote by $\operatorname{abs} P$ the abscissa of a point $P \in \mathbb{R}^2$.

We will now construct a string $\sigma \in \mathcal{A}^\infty$ such that the sum in (1.16) is maximized termwise. First, we take for example $\sigma(1) = 1$, which implies that $\gamma_1(\sigma) = -1$. We start by defining $\sigma(k)$ for $2 \leq k \leq m+3$, where m is the smallest integer such that $m\theta \geq \frac{\pi}{2}$.

The case when $2 \leq k \leq m-2$: since $(m-1)\theta < \frac{\pi}{2}$, we have $\sin(k-1)\theta < \sin(k+1)\theta$. Since $\gamma_1(\sigma) = -1$, the term $\sin(\gamma_k(\sigma)\theta)$ is maximal when $\gamma_k(\sigma) = \gamma_{k-1}(\sigma) + 1$. Since $\gamma_1(\sigma) = -1$, we deduce that $\gamma_k(\sigma) = \gamma_{k-1}(\sigma) + 1$ for $2 \leq k \leq m+1$, that is $\sigma(k) = 2$ for all these values of k . Therefore, $\gamma_{m+1}(\sigma) = m-1$.

We know that $\sin(\gamma_{m+2}(\sigma)\theta)$ is maximal. Since $(m-1)\theta < \frac{\pi}{2} \leq m\theta$, one has $\pi - m\theta > \frac{\pi}{2} - \theta > (m-2)\theta$.

Therefore, $\sin m\theta = \sin(\pi - m\theta) > \sin(m-2)\theta$ since $0 \leq \pi - m\theta \leq \frac{\pi}{2}$, and one has $\gamma_{m+2}(\sigma) = m$, that is $\sigma(m+2) = 2$.

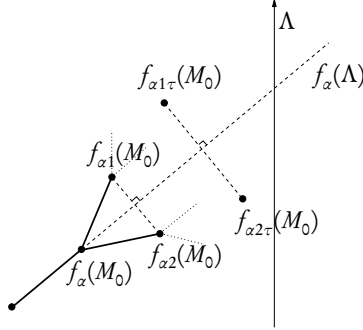


FIGURE 1.2: The points $f_{\alpha 1}(M_0)$, $f_{\alpha 2}(M_0)$, $f_{\alpha 1\tau}(M_0)$, and $f_{\alpha 2\tau}(M_0)$.

To determine $\gamma_{m+3}(\sigma)$, we note that $\pi - (m+1)\theta \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq (m-1)\theta$, which implies that

$$\sin(m+1)\theta = \sin(\pi - (m+1)\theta) \leq \sin(m-1)\theta. \quad (1.21)$$

We distinguish two cases:

1. if $m\theta \neq \frac{\pi}{2}$, then the inequality (1.21) is strict, which implies that $\gamma_{m+3}(\sigma) = m-1$, that is $\sigma(m+3) = 1$. We are then back to the case (ii), which means that $\sigma(m+2i) = 2$ and $\sigma(m+2i+1) = 1$ for all $i \geq 2$.
2. if $m\theta = \frac{\pi}{2}$, then the inequality (1.21) is in fact an equality, and one can have either $\sigma(m+3) = 1$ or $\sigma(m+3) = 2$. By the case (ii) (or its symmetric), one has:

$$\begin{aligned} & - \text{si } \sigma(m+3) = 1, \begin{cases} \sigma(m+2i) = 2 \\ \sigma(m+2i+1) = 1 \end{cases} \text{ for all } i \geq 2, \\ & - \text{si } \sigma(m+3) = 2, \begin{cases} \sigma(m+2i) = 1 \\ \sigma(m+2i+1) = 2 \end{cases} \text{ for all } i \geq 2. \end{aligned}$$

In other words, it suffices that $\sigma(m+2i-1) \neq \sigma(m+2i)$ for $i \geq 2$ to maximize the sum termwise.

This proves that the string $\sigma = 12^{m+1}(12)^\infty$ chosen in the proof of Lemma 1.2.1 is such that $f_\sigma^{a^*}(x)$ for any $x \in \mathbb{R}^2$ achieves the maximal abscissa of $f_1(\Gamma_{a^*}^\infty)$ which is zero. In other words, $\rho_{a^*} = m_{a^*} = 0$ with the notation of the proof of Lemma 1.2.1. Therefore, a^* is the smallest positive root of the polynomial defined by (1.17). A trigonometry argument shows that this polynomial in a can be rewritten

$$\sum_{i=0}^{m-1} a^{i+2} \cos i\theta = \frac{1}{2}, \quad (1.22)$$

which concludes the proof of Theorem 1.2.1. \square

REMARK 1.2.1 – From (1.14), it can be seen that $\theta \mapsto a_\theta^*$ is a continuous and increasing function from $(0, \pi/2)$ onto $(1/2, 1/\sqrt{2})$ and that $\lim_{\theta \rightarrow 0} a_\theta^* = 1/2$.

EXAMPLE 1.2.2 - We examine the cases $\theta = \pi/4$ and $\theta = \pi/5$ (see figure 3 p.15):

- ◇ $m_{\pi/4} = 2$ and the critical parameter $a_{\pi/4}^*$ is the unique positive solution of the polynomial $X^3 + \sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}/2 = 0$, i.e. $a_{\pi/4}^* \simeq 0.593465$,
- ◇ $m_{\pi/5} = 3$, and $a_{\pi/5}^* \simeq 0.56658$.

Hereafter, for a given θ , $0 < \theta < \pi/2$, we will write for brevity a^* instead of a_θ^* and we will only consider a such that $0 < a \leq a^*$.

1.2.1.b Characterization of Ξ

The proof of Theorem 1.2.1 characterizes the critical ratio a^* and describes in the process the strings $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ such that $h(\sigma) \in \Xi$, that is $f_\sigma(x) \in \Xi$ for all $x \in \mathbb{R}^2$, which we explicit here. First note that, when $a = a^*$, the set Ξ lies on the vertical axis Λ defined by $\Lambda = \{(x_1, x_2), x_1 = 0\}$.

As previously, we will have to distinguish two cases, according to the values of m defined in (1.15). We introduce some specific notations for the case when $m\theta = \frac{\pi}{2}$.

- ◇ for $i = 1, 2$, we define $\bar{i} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = 1 \\ 1 & \text{si } i = 2 \end{cases}$,

- ◇ we introduce

$$F_1 = f_1 \circ f_2 \quad \text{and} \quad F_2 = f_2 \circ f_1, \quad (1.23)$$

- ◇ for $\eta \in \mathcal{A}_k$, we define $\eta^{(1)}, \eta^{(2)} \in \mathcal{A}_{2(k+1)+m}$ by:

$$\begin{aligned} \eta^{(1)} &= 12^{m+1} \overline{\eta(1)} \overline{\eta(1)} \dots \overline{\eta(k)} \overline{\eta(k)}, \\ \eta^{(2)} &= 21^{m+1} \overline{\eta(1)} \overline{\eta(1)} \dots \overline{\eta(k)} \overline{\eta(k)}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

which yields

$$\begin{aligned} f_{\eta^{(1)}} &= f_1 \circ \underbrace{f_2 \circ \dots \circ f_2}_{m+1} \circ F_{\eta(1)} \circ \dots \circ F_{\eta(k)}, \\ f_{\eta^{(2)}} &= f_2 \circ \underbrace{f_1 \circ \dots \circ f_1}_{m+1} \circ F_{\eta(1)} \circ \dots \circ F_{\eta(k)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

The proof of Theorem 1.2.1 directly yields the following result.

THEOREM 1.2.2 -

- ◇ If $m\theta > \pi/2$ and $a = a^*$, then Ξ contains a single point

$$\xi = f_{12^{m+1}(12)^\infty}(x) = f_{21^{m+1}(21)^\infty}(x), \quad (1.26)$$

for all $x \in \mathbb{R}^2$.

- ◇ If $m\theta = \pi/2$ and $a = a^*$, then the set Ξ is not countable, and is characterized by

$$\Xi = \left\{ f_{\sigma^{(1)}}(x), \sigma \in \mathcal{A}_\infty \right\} = \left\{ f_{\sigma^{(2)}}(x), \sigma \in \mathcal{A}_\infty \right\}, \quad (1.27)$$

for all $x \in \mathbb{R}^2$. In other words,

$$\Xi = \{f_\sigma(x), \sigma \in 12^{m+1}(12|21)^\infty \cup 21^{m+1}(21|12)^\infty\}.$$

Moreover, for all point $y \in \Xi$, there exists a unique $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ such that y is the limit point of the strings $\sigma^{(1)}$ and $\sigma^{(2)}$.

1.2.2 RAMIFIED DOMAINS

1.2.2.a The construction

Call $P_1 = (-1, 0)$ and $P_2 = (1, 0)$ and Γ^0 the line segment $\Gamma^0 = [P_1 P_2]$. We impose that $f_2(P_1)$, and $f_2(P_2)$ have positive coordinates, i.e. that

$$a \cos \theta < \alpha \quad \text{and} \quad a \sin \theta < \beta. \quad (1.28)$$

We also impose that the open domain Y^0 inside the closed polygonal line joining the points $P_1, P_2, f_2(P_2), f_2(P_1), f_1(P_2), f_1(P_1), P_1$ in this order must be convex and hexagonal. With (1.28), this is true if and only if

$$(\alpha - 1) \sin \theta + \beta \cos \theta > 0. \quad (1.29)$$

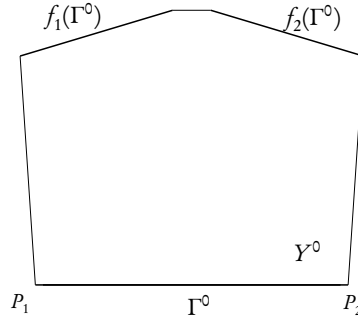


FIGURE 1.3: The first cell Y^0

Under the assumptions (1.28) and (1.29), the domain Y^0 is contained in the half-plane $x_2 > 0$ and symmetric w.r.t. the vertical axis $x_1 = 0$.

We introduce $K^0 = \overline{Y^0}$. It is possible to glue together $K^0, f_1(K^0)$ and $f_2(K^0)$ and obtain a new polygonal domain, also symmetric with respect to the axis $\{x_1 = 0\}$. The assumptions (1.28) and (1.29) imply that $Y^0 \cap f_1(Y^0) = \emptyset$ and $Y^0 \cap f_2(Y^0) = \emptyset$. We introduce the open domain Ω (see Figure 1.4 below):

$$\Omega = \text{Interior} \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(K^0) \right). \quad (1.30)$$

Note that Ω is symmetric with respect to the axis $x_1 = 0$, and that for $a < 1/\sqrt{2}$, the measure of Ω is finite. See Figure 6 in the Introduction for examples of ramified domains for different values of θ in the special case when $a = a^*$.

For a given θ , with a^* defined as above, we shall make the following assumption on (α, β) :

Assumption 1 For $0 < \theta < \pi/2$, the parameters α and β satisfy (1.29) and (1.28) for $a = a^*$, and are such that

(i) for all $a, 0 < a \leq a^*$, the sets $Y^0, f_\sigma(Y^0), \sigma \in \mathcal{A}_n, n > 0$, are disjoint,

(ii) for all $a, 0 < a < a^*$, $f_1(\overline{\Omega}) \cap f_2(\overline{\Omega}) = \emptyset$,

(iii) for $a = a^*$, $f_1(\overline{\Omega}) \cap f_2(\overline{\Omega}) \neq \emptyset$.

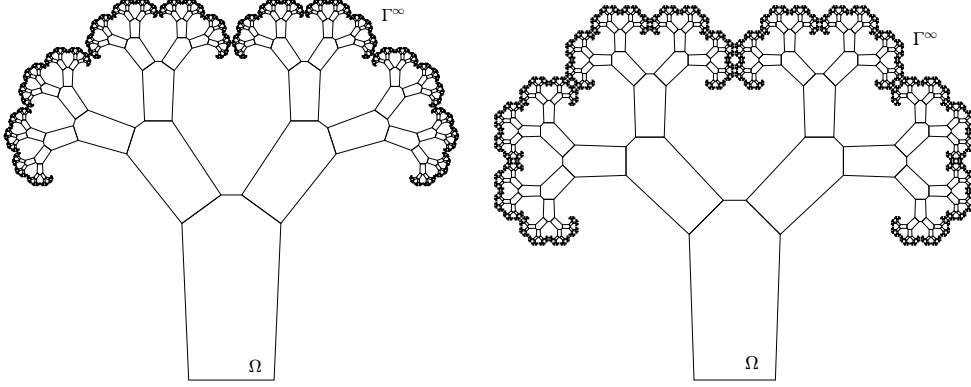


FIGURE 1.4: Left: the ramified domain Ω for $\theta = \pi/5$, $a = a_{\pi/5}^*$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 1.5$. Right: a similar construction for $\theta = \pi/4$ and $a = a_{\pi/4}^*$.

REMARK 1.2.2 – Assumption 1 implies that if $a = a^*$, then $f_1(\Omega) \cap f_2(\Omega) = \emptyset$; to prove this, we define the open set $T = \text{Interior}(K^0 \cup f_1(K^0) \cup f_2(K^0))$. It is easy to check that $\Omega = T \cup \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(T)$.

If $f_1(\Omega) \cap f_2(\Omega) \neq \emptyset$, there exist $x \in \Omega$, a positive number ρ , two positive integers n and n' , and $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $\sigma' \in \mathcal{A}_{n'}$ with $\sigma(1) = 1$ and $\sigma'(1) = 2$ such that $B(x, \rho) \subset f_\sigma(T) \cap f_{\sigma'}(T)$. It is then easy to prove that this contradicts point (i) in Assumption 1.

The following theorem proved in [AT10] asserts that for all θ with $0 < \theta < \pi/2$, there exists (α, β) satisfying Assumption 1.

THEOREM 1.2.3 – If $\theta \in (0, \pi/2)$, then for all $\alpha > a^* \cos \theta$, there exists $\bar{\beta} > 0$ such that $\bar{\beta} > a^* \sin \theta$ and $(\alpha - 1) \sin \theta + \bar{\beta} \cos \theta \geq 0$ and for all $\beta \geq \bar{\beta}$, (α, β) satisfies Assumption 1.

It has been proved in [AT08] that if $a < a^*$, then Ω is an (ε, δ) -domain as defined in paragraph 1.2.3, see also [Jon81] and [JW84], or in an equivalent manner a quasi-disk, see [Maz85] or §1.2.3.b.

On the contrary, if $a = a^*$, then Ω is not an (ε, δ) -domain because by Theorem 1.2.2, it is possible to construct two sequences $(x_n^{(1)})_n$ and $(x_n^{(2)})_n$, $x_n^{(1)} \in f_1(\Omega)$ and $x_n^{(2)} \in f_2(\Omega)$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| = 0$; then, any arc contained in Ω and joining $x_n^{(1)}$ to $x_n^{(2)}$ has a length bounded from below by a positive constant.

1.2.2.b The Hausdorff dimension of Γ^∞

Recall that the open set condition is satisfied by the similitudes f_1 and f_2 if and only if there is a nonempty bounded open subset ω of \mathbb{R}^2 such that $f_1(\omega) \cap f_2(\omega) = \emptyset$ and $f_1(\omega) \cup f_2(\omega) \subset \omega$. In this case, the Hausdorff dimension of the invariant set Ξ is given by the single number $d > 0$ satisfying $2a^d = 1$ (see §1.1.2, see also [Mor46, Kig01]).

For a given $\theta \in (0, \pi/2)$, let (α, β) satisfy Assumption 1. For $0 < a \leq a^*$, the open set condition is satisfied with $\omega = \Omega$ because

- ◊ $f_1(\Omega) \cap f_2(\Omega) = \emptyset$, which stems from point (ii) in Assumption 1 if $a < a^*$, and from Remark 1.2.2 if $a = a^*$;
- ◊ by construction of Ω , we also have $f_1(\Omega) \cup f_2(\Omega) \subset \Omega$.

Therefore, the Hausdorff dimension of the set Γ^∞ is

$$d := \dim_H(\Gamma^\infty) = -\log 2 / \log a,$$

If $0 < \theta < \pi/2$, then $0 < a \leq a^* < 1/\sqrt{2}$ and $d < 2$.

We have seen in paragraph 1.2.1.b that in the case when $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$, the set Ξ is not countable. It is easy to compute its Hausdorff dimension in this case.

PROPOSITION 1.2.1 – *If $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$, then the Hausdorff dimension of Ξ is $d/2$.*

Proof. Take $x \in \mathbb{R}^2$. We have seen that $\Xi = \{f_\sigma(x), \sigma \in 12^{m+1}(12|21)^\infty\}$, where $\theta = \frac{\pi}{2m}$. Therefore, $\Xi = f_{12^{m+1}}(\{f_\sigma(x), \sigma \in (12|21)^\infty\})$.

The set $\{f_\sigma(x), \sigma \in (12|21)^\infty\}$ is exactly the invariant set of the contracting similitudes $f_1 \circ f_2$ and $f_2 \circ f_1$, which also satisfy the open set condition with the domain Ω . Since their ratio is a^2 , we deduce that the Hausdorff dimension of Ξ is $d/2$. \square

1.2.2.c The self-similar measure μ

To define traces on Γ^∞ , we recall the classical result on self-similar measures, see [Fal97, Hut81] and [Kig01] page 26:

THEOREM 1.2.4 – *There exists a unique Borel regular probability measure μ on Γ^∞ such that for any Borel set $A \subset \Gamma^\infty$,*

$$\mu(A) = \frac{1}{2}\mu(f_1^{-1}(A)) + \frac{1}{2}\mu(f_2^{-1}(A)). \quad (1.31)$$

The measure μ is called the *self-similar measure associated to the self-similar triplet* $(\Gamma^\infty, f_1, f_2)$.

PROPOSITION 1.2.2 – *The measure μ is a d -measure on Γ^∞ , with $d = -\log 2 / \log a$: there exists two positive constants c_1 and c_2 such that*

$$c_1 r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq c_2 r^d,$$

for any r $0 < r < 1$ and $x \in \Gamma^\infty$, where $B(x, r)$ is the Euclidean ball in Γ^∞ centered at x and with radius r . In other words the closed set Γ^∞ is a d -set (see §1.2.6.a and [JW84]).

Proof. The proof stems from the Moran condition. It is due to Moran [Mor46] and has been extended by Kigami (see [Kig01], Proposition 1.5.8 and Theorem 1.5.7). \square

We define L_μ^p , $p \in [1, +\infty)$ as the space of the measurable functions v on Γ^∞ such that $\int_{\Gamma^\infty} |v|^p d\mu < \infty$, endowed with the norm $\|v\|_{L_\mu^p} = \left(\int_{\Gamma^\infty} |v|^p d\mu\right)^{1/p}$. We also introduce L_μ^∞ , the space of essentially bounded functions with respect to the measure μ . A Hilbertian basis of L_μ^2 can be constructed with e.g. Haar wavelets.

1.2.2.d Additional notations

We define the sets $\Gamma^\sigma = f_\sigma(\Gamma^0)$ and $\Gamma^N = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_N} \Gamma^\sigma$. The one-dimensional Lebesgue measure of Γ^σ for $\sigma \in \mathcal{A}_N$ and of Γ^N are

$$|\Gamma^\sigma| = a^N |\Gamma^0| \quad \text{and} \quad |\Gamma^N| = (2a)^N |\Gamma^0|.$$

We will sometimes use the notation \lesssim or \gtrsim to indicate that there may arise constants in the estimates, which are independent of the index n in Γ^n , or of the index σ in Γ^σ or $\Gamma^{\infty, \sigma}$. We may also write $A \simeq B$ if $A \lesssim B$ and $B \lesssim A$.

1.3 TRACE RESULTS IN THE RAMIFIED DOMAINS

Hereafter, we consider a ramified domain Ω constructed as in Section 1.2 with θ in $(0, \pi/2)$, and we suppose that the parameters α, β satisfy Assumption 1.

We first discuss very briefly the less interesting case when $a < 1/2$. If $a < 1/2$, then $d < 1$ and Γ^∞ is totally disconnected, see [Fal86], Lemma 4.1 p.54. This implies that $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty) = \emptyset$, see [Kig01], Theorem 1.6.2 page 33. The results of Jones [Jon81] and of Jonsson and Wallin [JW84] can be combined to prove that if $p > \max(1, 2-d)$, then the space of the traces on Γ^∞ of the functions $v \in W^{1,p}(\Omega)$ is $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ (see the introduction for the definition). We will see in Theorem 1.3.1 below that in this case, $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty) = JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$.

Since the case $a < 1/2$ is understood, in the remaining part of the paper, we will take a such that $1/2 \leq a \leq a^*$, so the Hausdorff dimension d of Γ^∞ is not smaller than 1. We recall the construction of the trace operator made in [AT07] (see also §1.3.3) by taking advantage of the self-similarity; this trace operator, called ℓ^∞ below, is well defined even if $a = a^*$.

We first construct a sequence $(\ell^n)_n$ of approximations of the trace operator: consider the sequence of linear operators $\ell^n : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_\mu^p$,

$$\ell^n(v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(\frac{1}{|\Gamma^\sigma|} \int_{\Gamma^\sigma} v \, dx \right) \mathbb{1}_{f_\sigma(\Gamma^\infty)}, \quad (1.32)$$

where $|\Gamma^\sigma|$ is the one-dimensional Lebesgue measure of Γ^σ .

PROPOSITION 1.3.1 – *The sequence $(\ell^n)_n$ converges in $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L_\mu^p)$ to an operator that we call ℓ^∞ .*

Proof. See [AT07]. □

REMARK 1.3.1 – *For a given θ , $0 < \theta < \pi/2$, let (α, β) satisfy Assumption 1 and Ω be constructed as in § 1.2.2.a, with $1/2 \leq a \leq a^*$; in Chapter 3, we prove that Ω is a 2-set as defined in e.g. [JW84] page 205, i.e. there exist three positive constants r_0, c_1 and c_2 such that for any closed ball $B(P, r)$, $P \in \Omega$, $0 < r \leq r_0$, $c_1 r^2 \leq m_2(B(P, r) \cap \Omega) \leq c_2 r^2$, where m_2 is the Lebesgue measure in \mathbb{R}^2 . Since Ω is a 2-set, there is a classical definition of a trace operator on $\partial\Omega$, see for instance [JW84] page 206. It is interesting to compare the operator ℓ^∞ , whose construction is based on the self-similarity properties, with the latter classical trace operator. In Chapter 3, we prove that if $p > 1$, the two definitions of the trace of a function $u \in W^{1,p}(\Omega)$ coincide μ -almost everywhere.*

1.3.1 DEFINITION OF $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ FOR $0 < t < 1$.

The spaces $JLip(t, p, p; 0; K)$ on a self-similar set K were introduced in Definition 1.2.4. We recall here the definition of these spaces in the special case when $K = \Gamma^\infty$. It was proved in [AT10] that this definition coincides with the original and more general one that was proposed in [Jono4].

Consider a real number t , $0 < t < 1$. For any function $f \in L^p(\Gamma^\infty)$, define $|f|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}$ by:

$$|f|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)} = \left(\sum_{n \geq 0} 2^{n \frac{p-t}{d}} 2^{n(\frac{p}{2}-1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |\beta_\sigma|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.33)$$

where the numbers β_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$ are the coefficients of f in the Haar wavelet basis expansion given in (26).

DEFINITION 1.3.1 – A function $f \in L^p_\mu(\Gamma^\infty)$ belongs to $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ if and only if the norm

$$\|f\|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)} = |P_0 f| + |f|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)} \quad (1.34)$$

is finite, where $P_0 f = \int_{\Gamma^\infty} f d\mu$.

Recall that if the fractal set Γ^∞ is totally disconnected, then $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ coincides with the more classical function space:

THEOREM 1.3.1 – (Jonsson) If $a < a^*$, then $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$ is empty and

$$JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty).$$

1.3.2 CHARACTERIZATION OF THE TRACES ON Γ^∞ OF THE FUNCTION IN $W^{1,p}(\Omega)$

Recall that the following theorem was proved in [AT10].

THEOREM 1.3.2 – For a given θ , $0 < \theta < \pi/2$, let (α, β) satisfy Assumption 1 and Ω be constructed as in § 1.2.2.a, with $1/2 \leq a \leq a^*$; then for all p , $1 < p < \infty$,

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty). \quad (1.35)$$

First consequence A first consequence of Theorem 1.3.2 is that if $1/2 \leq a < a^*$, then $d \geq 1$ and from Theorem 1.3.1,

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1 - \frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty), \quad \forall p \in (1, +\infty). \quad (1.36)$$

REMARK 1.3.2 – Note that (1.36) has been proved in [AT08], without relying on the $JLip$ spaces: indeed, when $a < a^*$, Ω is an (ε, δ) -domain and Γ^∞ is a d -set; in this case, the extension result of Jones [Jon81] (from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$) and the trace result of Jonsson and Wallin [JW84] (from $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ onto $B_{1 - \frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$) can be combined to obtain (1.36).

In what follows, we will see that when $a = a^*$, (1.36) does not hold for every $p \in (1, +\infty)$.

Second consequence From Theorem 1.3.2, we can deduce trace results in the Lebesgue spaces for functions in $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$.

The results obtained are similar to the trace results in the spaces $L^q(\partial\omega)$ for a regular open set $\omega \subset \mathbb{R}^2$. The following Theorem was proved in [ATo8].

THEOREM 1.3.3 - *If $p \geq 2$, then $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^q_\mu(\Gamma^\infty)$ for all $q \in [1, \infty)$. Moreover, for all $q \in [1, \infty)$, there exists a constant $A > 0$ such that*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|\ell^\infty(u)\|_{L^q_\mu} \leq A \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

The case when $p < 2$ is dealt with in the following Proposition.

PROPOSITION 1.3.2 - *If $1 \leq p < 2$, then $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \subset L^q_\mu$ for every q , $1 \leq q \leq \frac{dp}{2-p}$. Moreover, for all q such that $1 \leq q \leq \frac{dp}{2-p}$, there exists a constant $A > 0$ such that*

$$\forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \|\ell^\infty(u)\|_{L^q_\mu} \leq A \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Proof. If $q \leq p$, then the result is clear. Now assume $q > p$. If $u \in W^{1,p}(\Omega)$, we know that $\ell^\infty(u) \in JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$. Call $(b_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{A}}$ the Haar wavelet coefficients of $\ell^\infty(u)$, that is the real numbers b_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$ such that

$$\ell^\infty(u) = P_0 \ell^\infty(u) + \sum_{n \geq 0, \sigma \in \mathcal{A}_n} b_\sigma g_\sigma.$$

Therefore,

$$\|\ell^\infty(u)\|_{JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p = |P_0 \ell^\infty(u)|^p + \sum_{n \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p-2}{d})} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |b_\sigma|^p < \infty.$$

Take $q \leq \frac{dp}{2-p}$. Since $L^q_\mu(\Gamma^\infty) = JLip(0, q, q; 0; \Gamma^\infty)$, we deduce that

$$\|\ell^\infty(u)\|_{L^q_\mu(\Gamma^\infty)} \lesssim \left(|P_0 \ell^\infty(u)|^q + \sum_{n \geq 0} 2^{n(\frac{q}{2} - 1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |b_\sigma|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.37)$$

Since $q > p$, we have the following inequality:

$$\begin{aligned} \|\ell^\infty(u)\|_{L^q_\mu(\Gamma^\infty)} &\lesssim \left(|P_0 \ell^\infty(u)|^p + \sum_{n \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} - \frac{p}{q})} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |b_\sigma|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\lesssim |\ell^\infty(u)|_{JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p, \end{aligned}$$

since $\frac{p}{2} - \frac{p}{q} \leq \frac{p}{2} + \frac{p-2}{d}$. □

1.4 EMBEDDING OF THE $JLip$ SPACES IN SOBOLEV SPACES FOR $a = a^*$

1.4.1 MAIN RESULTS

In the case $a = a^*$, it is not possible to apply Theorem 1.3.1. We have seen that in this case, Ω is not an (ε, δ) -domain, and Jones extension result (from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$) does not hold for all $p \in [1, +\infty)$. Note that $a = a^* > 1/2$ implies that $d > 1$. We are going to make out two cases: with m defined in (1.15), the simpler case is when $m\theta > \pi/2$, so Ξ is made of a single point; the case when $m\theta = \pi/2$ will turn out to be more difficult because Ξ is not countable.

THEOREM 1.4.1 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta > \pi/2$.

1. For all $t \in (0, 1)$ and $s > \frac{d}{p}$, $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$.
2. If $0 < t < \min(d/p, 1)$, then $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

The following corollary stems from Theorem 1.4.1:

COROLLARY 1.4.1 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta > \pi/2$. For all $p > d$ and $t \in [d/p, 1)$, one has $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ with a continuous injection, for all s , $0 < s < \frac{d}{p}$.

As an easy consequence of Theorem 1.4.1, it is possible to find some connection between $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$, the trace space of $W^{1,p}(\Omega)$, see (1.35), and some Besov spaces:

COROLLARY 1.4.2 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta > \pi/2$.

1. If $p \geq 2$, then
 - (a) $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$, for all s , $0 < s < \frac{d}{p}$.
 - (b) $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$, for all $s > \frac{d}{p}$.

2. If $1 \leq p < 2$, then

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty).$$

By Theorem 1.3.2, this result yields the Besov regularity of the trace on Γ^∞ of functions in $W^{1,p}(\Omega)$.

THEOREM 1.4.2 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta = \pi/2$.

1. For all $t \in (0, 1)$ and $s > \frac{d}{2p}$, $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$.
2. If $0 < t < \min(d/(2p), 1)$, then $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

COROLLARY 1.4.3 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta = \pi/2$. For all $p > d/2$ and $t \in [d/(2p), 1)$, $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ with a continuous injection, for all s , $0 < s < \frac{d}{2p}$.

Here again, it is possible to find some connection between the trace space $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ and some Besov spaces:

COROLLARY 1.4.4 – Assume that $a = a^*$ and $m\theta = \pi/2$.

1. If $p \geq 2 - d/2$, then

$$(a) \text{JLip}(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty), \text{ for all } s, 0 < s < \frac{d}{2p}.$$

$$(b) \text{JLip}(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty), \text{ for all } s > \frac{d}{2p}.$$

2. If $1 \leq p < 2 - d/2$, then

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = \text{JLip}(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = \text{Lip}(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty).$$

REMARK 1.4.1 - If $a = a^*$, there is no similar trace result for the function space $W^{k,p}(\Omega)$ when k is an integer greater than 1: the Haar wavelets belong to the trace space $\ell^\infty(W^{k,p}(\Omega))$, but do not belong to the right Besov space, because they jump at points of the boundary.

Hereafter, when dealing with $a = a^*$, we will always write a .

1.4.2 PROOF OF THEOREM 1.4.1

1.4.2.a Geometrical lemmas

The proofs of the lemmas below are given in Section 1.5.

For two subsets X and Y of \mathbb{R}^2 , we define $d(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} |y - x|$. We will need to estimate $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau})$ for $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$. We start by estimating the distance between Γ^σ and the horizontal line \mathcal{H} tangent to the upper part of Γ^∞ , i.e. $\mathcal{H} = \{x : x_2 = h\}$, where

$$h = \sup_{x \in \Omega} x_2 = \max_{x \in \Gamma^\infty} x_2 = \frac{\beta + a(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta)}{1 - a^2}. \quad (1.38)$$

The points of Γ^∞ whose ordinate is h are the limit points of the strings in $(12|21)^\infty$.

LEMMA 1.4.1 - We have

$$\sup_{x \in f_1 \circ f_1(\Omega)} x_2 = \sup_{x \in f_2 \circ f_2(\Omega)} x_2 < h.$$

LEMMA 1.4.2 - Take $n \geq 1$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$. Let k be the largest integer such that $2k \leq n$ and for all $j \in \{1, \dots, k\}$, $\sigma(2j-1) \neq \sigma(2j)$. In other words, k is the largest integer k such that σ has a prefix in $(12|21)^k$. We have

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) + a^n \simeq a^{2k}. \quad (1.39)$$

REMARK 1.4.2 - Note that Lemmas 1.4.1 and 1.4.2 hold if $m\theta = \pi/2$.

We introduce a mapping Π from \mathcal{A} to \mathbb{N} such that $\Pi(\sigma)$ for $\sigma \in \mathcal{A}$ is an index of the distance between $\Gamma^{\infty, \sigma}$ and the vertical axis $\Lambda = \{(x_1, x_2), x_1 = 0\}$, which is stated by Lemma 1.4.3 below.

DEFINITION 1.4.1 - Define the mapping $\Pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ as follows: for $\sigma \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$,

$$\diamond \text{ if } n < m + 4 \text{ or } \sigma_{|m+2} \notin \{12^{m+1}, 21^{m+1}\}, \text{ then } \Pi(\sigma) = 0$$

◊ else

$$\Pi(\sigma) = \max \left\{ k \geq 0, \left| \begin{array}{l} \sigma(m+2j+1) = 1 \text{ and } \sigma(m+2+2j) = 2 \\ \forall j \in \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\} \quad \text{if } \sigma(1) = 1,$$

$$\Pi(\sigma) = \max \left\{ k \geq 0, \left| \begin{array}{l} \sigma(m+2j+1) = 2 \text{ and } \sigma(m+2+2j) = 1 \\ \forall j \in \{1, \dots, k\} \end{array} \right. \right\} \quad \text{if } \sigma(1) = 2.$$

In other words, $\Pi(\sigma)$ is the largest integer $k \geq 0$ such that $12^{m+1}(12)^k$ or $12^{m+1}(12)^k$ is a prefix of σ .

Therefore, if $n < m+4$ then $\Pi(\sigma) = 0$ and if $n \geq m+4$, then $\Pi(\sigma)$ takes its values in $\{0, \dots, [(n-m-2)/2]\}$.

DEFINITION 1.4.2 - For $\sigma \in \mathcal{A}_n$, $n \geq 1$, we say that $\Pi(\sigma)$ is maximal if $n < m+4$ (in this case $\Pi(\sigma) = 0$) or if $n \geq m+4$ and $\Pi(\sigma) = [(n-m-2)/2]$.

In other words, $\Pi(\sigma)$ is maximal if one of the following conditions hold:

$$\sigma \in \{12^l, l \leq m+1\} \cup \{21^l, l \leq m+1\},$$

$$\sigma \in 12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)} \cup 21^{m+1}(21)^{\Pi(\sigma)},$$

$$\sigma \in 12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)}(1|2) \cup 21^{m+1}(21)^{\Pi(\sigma)}(1|2).$$

LEMMA 1.4.3 - Take $n \geq 1$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$; for d_σ defined by

$$d_\sigma = \begin{cases} d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda), & \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is not maximal,} \\ d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) + a^n, & \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is maximal,} \end{cases} \quad (1.40)$$

we have

$$d_\sigma \simeq a^{2\Pi(\sigma)}. \quad (1.41)$$

LEMMA 1.4.4 - Take $n \geq 1$ and $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n$ such that $\sigma(1) \neq \tau(1)$; we have

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) + a^n \simeq a^{2\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau))}. \quad (1.42)$$

REMARK 1.4.3 - From Lemma 1.4.3, we also have that for all $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ with $\sigma(1) \neq \tau(1)$,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) \lesssim a^{2\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau))}.$$

DEFINITION 1.4.3 - • Lemma 1.4.3 implies that there exists a positive constant c_1 , such that for all $n \geq 1$, $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $x \in \Gamma^{\infty, \sigma}$,

$$c_1 a^{2\Pi(\sigma)} < d(x, \Lambda) \quad \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is not maximal,} \quad (1.43)$$

and for all $\eta \in \mathcal{A}$ such that $\Pi(\eta) = 0$ and f_η is a similitude with rotation angle 0,

$$d(f_\eta(\Lambda), \Lambda) > c_1. \quad (1.44)$$

We must have $c_1 < d(\Lambda, f_1 \circ f_2(\Lambda))$, because $\Pi((1, 2)) = 0$.

• Let us define the positive number $c_2 > 0$ by

$$c_2 = \frac{d(\Lambda, f_1 \circ f_2(\Lambda))}{a^2}. \quad (1.45)$$

Note that

$$\max_{x \in \Gamma^\infty} x_1 = \max_{x \in \Gamma^\infty} d(x, \Lambda) = \frac{d(\Lambda, f_1 \circ f_2(\Lambda))}{a^2} = c_2. \quad (1.46)$$

• Finally, from (1.41), we know that there exists a constant c_3 , such that for all $x \in \Gamma^{\infty, \sigma}$, $\sigma \in \mathcal{A}_n$,

$$d(x, \Lambda) \leq c_3 a^{2\Pi(\sigma)}. \quad (1.47)$$

We must have $c_3 \geq c_2$.

From (1.43) and (1.47), we deduce that for all $n \geq 1$, $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $x \in \Gamma^{\infty, \sigma}$,

$$\begin{cases} d(x, \Lambda) \leq c_3 a^{2\Pi(\sigma)}, & \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is maximal,} \\ c_1 a^{2\Pi(\sigma)} < d(x, \Lambda) \leq c_3 a^{2\Pi(\sigma)}, & \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is not maximal.} \end{cases} \quad (1.48)$$

LEMMA 1.4.5 – For any $\eta \in \mathcal{A}$ such that f_η is a similitude with rotation angle 0,

$$d(\Lambda, f_\eta(\Lambda)) > c_1 a^{2\Pi(\eta)}, \quad (1.49)$$

where c_1 satisfies (1.43) and (1.44).

For what follows, we will need to partition $f_1(\Gamma^\infty)$ into a sequence of subsets $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$. The measure of the set $X_i \subset f_1(\Gamma^\infty)$ and its distance to the axis Λ will be decreasing as i grows. By similarity, $(f_\eta(X_i))_{i \in \mathbb{N}}$ will be a partition of $f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)$.

DEFINITION 1.4.4 – We introduce the following definitions.

◊ Let us define the subsets of Γ^∞ :

$$\begin{aligned} X_i &= \{x \in f_1(\Gamma^\infty), c_1 a^{2i} \leq d(x, \Lambda) < c_1 a^{2(i-1)}\}, \quad \forall i \geq 1, \\ X_0 &= \{x \in f_1(\Gamma^\infty), c_1 \leq d(x, \Lambda) \leq c_2\}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

where c_1 satisfies (1.43) and (1.44) and c_2 is given by (1.45), see Figure 1.5.

◊ For $\ell \geq 0$, we define the class \mathcal{Z}_ℓ of subsets of Γ^∞ :

$$\mathcal{Z}_\ell = \{f_\eta(X_i), \eta \in \mathcal{A}_n, n + 2i = \ell\}. \quad (1.51)$$

◊ Let $\phi \in [0, 2\pi)$ be such that there exists a similitude f_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$, with rotation angle ϕ . For $n \geq 0$, we define $\mathcal{A}_{n, \phi} = \{\eta \in \mathcal{A}_n, f_\eta \text{ is a similitude of angle } \phi\}$, and the class $\mathcal{Z}_{\ell, \phi}$ of subsets of Γ^∞ :

$$\mathcal{Z}_{\ell, \phi} = \{f_\eta(X_i), \eta \in \mathcal{A}_{n, \phi}, n + 2i = \ell\}. \quad (1.52)$$

LEMMA 1.4.6 – For all $i \geq 1$,

$$\mu(X_i) \lesssim 2^{-2i}. \quad (1.53)$$

REMARK 1.4.4 – A direct consequence of Lemma 1.4.6 is that for all $Y \in \mathcal{Z}_\ell$, $\mu(Y) \lesssim 2^{-\ell}$.

LEMMA 1.4.7 – For all nonnegative integers n, m, i, j such that $n + 2i = m + 2j$ and $\eta \in \mathcal{A}_{n, \phi}$, $\nu \in \mathcal{A}_{m, \phi}$, the sets $Y = f_\eta(X_i)$ and $Z = f_\nu(X_j)$ are disjoint if $(n, i, \eta) \neq (m, j, \nu)$.

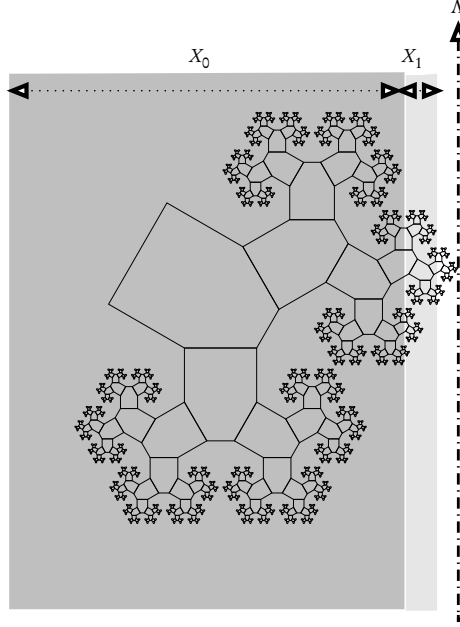


FIGURE 1.5: $\theta = \pi/3$: the domain $f_1 \circ f_2^{m+1}(\Omega)$, the fractal set $f_1 \circ f_2^{m+1}(\Gamma^\infty)$ and parts of X_0 and X_1 : X_0 (resp. X_1) is the intersection of Γ^∞ with the dark grey half-plane (resp. light grey strip).

REMARK 1.4.5 – We will see that when $m\theta = \pi/2$, the definition of Π differs, but once Π is defined, the definitions of c_1 and c_2 are the same. In that case, Lemma 1.4.5 and Lemma 1.4.7 are still true; by contrast, Lemma 1.4.6 does not hold, see Lemma 1.4.13.

LEMMA 1.4.8 – If $m\theta > \pi/2$, then for any $\ell \geq 0$, any $x \in \Gamma^\infty$, there are at most a finite number of (i, η) , $0 \leq 2i \leq \ell$, $\eta \in \mathcal{A}_{\ell-2i}$ such that $x \in f_\eta(X_i)$, and this number is independent of ℓ .

REMARK 1.4.6 – Although it seems clear that for a given $Z \in \mathcal{Z}_\ell$, there is a unique (i_Z, η_Z) such that $0 \leq 2i_Z \leq \ell$, $\eta_Z \in \mathcal{A}_{\ell-2i_Z}$ and $Z = f_{\eta_Z}(X_{i_Z})$, we have not found a short proof of this assertion. For what follows, it will be enough to use the following weaker result which stems from Lemma 1.4.8: there is at most a finite number of pairs (i, η) with $0 \leq 2i \leq \ell$, $\eta \in \mathcal{A}_{\ell-2i}$ and $Z = f_\eta(X_i)$, and this number is independent of Z and ℓ .

1.4.2.b Sobolev regularity of the Haar wavelet g_0

The following proposition will imply regularity results for the Haar wavelet g_0 :

PROPOSITION 1.4.1 – We have

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) < +\infty, \quad \text{if } 0 \leq \gamma < 2d, \quad (1.54)$$

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) = +\infty, \quad \text{if } \gamma > 2d. \quad (1.55)$$

Proof. Take $n \geq m + 2$ and let x be the largest integer such that $n \geq m + 2 + 2x$. We have

$$\begin{aligned} \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{(|x-y|+a^n)^\gamma} &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2}} \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} \int_{\Gamma^{\infty,\tau}} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{(|x-y|+a^n)^\gamma} \\ &\simeq 2^{-2n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2}} \frac{1}{(d(\Gamma^{\infty,\sigma}, \Gamma^{\infty,\tau}) + a^n)^\gamma}, \end{aligned}$$

because if $x \in \Gamma^{\infty,\sigma}$ and $y \in \Gamma^{\infty,\tau}$, then $|x-y|+a^n \simeq d(\Gamma^{\infty,\sigma}, \Gamma^{\infty,\tau}) + a^n$. Thus, from Lemma 1.4.4, we have

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{(|x-y|+a^n)^\gamma} \simeq S_1 + S_2,$$

with

$$S_1 = 2^{-2n} \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1, \tau(1)=2 \\ \Pi(\sigma) \geq \Pi(\tau)}} \frac{1}{a^{2\gamma\Pi(\tau)}} \quad \text{and} \quad S_2 = 2^{-2n} \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1, \tau(1)=2 \\ \Pi(\sigma) < \Pi(\tau)}} \frac{1}{a^{2\gamma\Pi(\sigma)}}.$$

We can write S_1 as follows:

$$S_1 = 2^{-2n} \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq x} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2 \\ \Pi(\tau)=\ell}} \frac{1}{a^{2\gamma\ell}}. \quad (1.56)$$

On the other hand, the number of $\sigma \in \mathcal{A}_n$ such that $\Pi(\sigma) = k$ is of the order of 2^{n-2k} . Therefore, (1.56) leads to

$$\begin{aligned} S_1 &\simeq 2^{-2n} \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq x} 2^{n-2k} 2^{n-2\ell} \frac{1}{a^{2\gamma\ell}} \\ &= \sum_{k=0}^x 2^{-2k} \sum_{\ell=0}^k 2^{2\ell(-1+\frac{\gamma}{d})} \\ &\lesssim \sum_{k=0}^x 2^{-2k} \max(k, 2^{2k(-1+\frac{\gamma}{d})}), \end{aligned}$$

and $S_1 \simeq \sum_{k=0}^x 2^{2k(-2+\frac{\gamma}{d})}$ if $\gamma > 2d$. The same is true for S_2 . Therefore, if $\gamma > 2d$, then

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \simeq 2^{n(-2+\frac{\gamma}{d})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty,$$

which yields (1.55).

On the other hand, if $\gamma < 2d$, then

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \lesssim \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-2\ell} \max(\ell, 2^{2\ell(-1+\frac{\gamma}{d})}) < \infty,$$

which yields (1.54) from the monotone convergence theorem. \square

COROLLARY 1.4.5 – For any $p, 1 \leq p < \infty$, $g_0 \in B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ if $0 \leq s < \frac{d}{p}$ and $g_0 \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ if $s > \frac{d}{p}$.

Proof. The result follows from the identity

$$\left| \frac{g_0}{2} \right|_{B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)}^p = \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^{d+ps}} d\mu(y) d\mu(x)$$

and from Proposition 1.4.1. \square

1.4.2.c Two lemmas

LEMMA 1.4.9 : discrete Hardy inequalities, [JW84], page 121, Lemma 3 – For any $\gamma \in \mathbb{R}$, any $p \geq 1$ there exists a constant C such that, for any sequence of positive real numbers $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\gamma n} \left(\sum_{k \leq n} c_k \right)^p \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\gamma n} c_n^p \quad \text{if } \gamma < 0, \quad (1.57)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\gamma n} \left(\sum_{k \geq n} c_k \right)^p \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\gamma n} c_n^p \quad \text{if } \gamma > 0. \quad (1.58)$$

LEMMA 1.4.10 – For any $\gamma > d$, we have

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \lesssim \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{d(x, \Lambda)^{\gamma-d}} d\mu(x), \quad \forall v \in L_\mu^p(\Gamma^\infty).$$

Proof. For any $n \geq m+2$, let x be the largest integer such that $n \geq m+2+2x$.

$$\begin{aligned} & \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \\ & \leq \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1, \tau(1)=2}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} \int_{\Gamma^{\infty, \tau}} \frac{|v(x)|^p}{(d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) + a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \\ & = 2^{-n} \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1, \tau(1)=2}} \frac{1}{(d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) + a^n)^\gamma} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} |v(x)|^p d\mu(x) \lesssim S_1 + S_2 \end{aligned}$$

where, from Lemma 1.4.4,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2^{-n} \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq x} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2 \\ \Pi(\tau)=\ell}} \frac{1}{a^{2\gamma\ell}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} |v(x)|^p d\mu(x), \\ S_2 &= 2^{-n} \sum_{0 \leq k \leq \ell \leq x} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2 \\ \Pi(\tau)=\ell}} \frac{1}{a^{2\gamma k}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} |v(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Since the number of $\tau \in \mathcal{A}_n$ such that $\tau(1) = 2$ and $\Pi(\tau) = \ell$ is of the order of $2^{n-2\ell}$, we have

$$\begin{aligned} S_1 &\simeq \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq x} \frac{2^{-2\ell}}{a^{2\gamma\ell}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} |v(x)|^p d\mu(x) \\ &= \sum_{k=0}^x \left(\sum_{\ell=0}^k \frac{1}{a^{2\ell(\gamma-d)}} \right) \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} |v(x)|^p d\mu(x) \\ &\simeq \sum_{k=0}^x \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1 \\ \Pi(\sigma)=k}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} \frac{|v(x)|^p}{a^{2k(\gamma-d)}} d\mu(x) \simeq \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(d(x, \Lambda) + a^n)^{\gamma-d}} d\mu(x), \end{aligned}$$

from Lemma 1.4.3. Similarly, $S_2 \simeq \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(d(x, \Lambda) + a^n)^{\gamma-d}} d\mu(x)$.

Finally, we obtain the desired estimate by having n tend to ∞ and using the monotone convergence theorem. \square

1.4.2.d Proof of Theorem 1.4.1

Proof of point 1. Point 1. in Theorem 1.4.1 stems from Corollary 1.4.5 and from the fact that the wavelet g_0 belongs to $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ for all p, t , $1 \leq p < \infty$, $0 < t < 1$. \square

Proof of point 2. Consider t , $0 < t < \min(d/p, 1)$ and $v \in JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$.

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma^\infty} \int_{\Gamma^\infty} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y) - \sum_{i=1}^2 \int_{f_i(\Gamma^\infty) \times f_i(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y) \\ &\lesssim I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

where

$$I_1 = 2 \int_{x \in f_1(\Gamma^\infty)} \int_{y \in f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x) - \langle v \rangle_{f_1(\Gamma^\infty)}|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(y) d\mu(x), \quad (1.59)$$

$$I_2 = 2 |\langle v \rangle_{f_2(\Gamma^\infty)} - \langle v \rangle_{f_1(\Gamma^\infty)}|^p \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(y) d\mu(x), \quad (1.60)$$

$$I_3 = 2 \int_{x \in f_1(\Gamma^\infty)} \int_{y \in f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|\langle v \rangle_{f_2(\Gamma^\infty)} - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y). \quad (1.61)$$

By iterating this argument and using Fatou lemma, we obtain that

$$\int_{\Gamma^\infty} \int_{\Gamma^\infty} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y) \lesssim I_1 + I_2 + I_3 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} (I_{1,\eta} + I_{2,\eta} + I_{3,\eta})$$

where

$$I_{1,\eta} = 2 \int_{x \in f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)} \int_{y \in f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x) - \langle v \rangle_{f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)}|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(y) d\mu(x), \quad (1.62)$$

$$I_{2,\eta} = 2 |\langle v \rangle_{f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} - \langle v \rangle_{f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)}|^p \int_{f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{|x - y|^{d+pt}}, \quad (1.63)$$

$$I_{3,\eta} = 2 \int_{x \in f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)} \int_{y \in f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|\langle v \rangle_{f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y). \quad (1.64)$$

Let us estimate $\sum_{\eta \in \mathcal{A}} I_{1,\eta}$: the change of variables $x = f_\eta(x')$ and $y = f_\eta(y')$ yields

$$I_{1,\eta} = 2a^{n(d-pt)} \int_{x' \in f_1(\Gamma^\infty)} \int_{y' \in f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v \circ f_\eta(x') - \langle v \circ f_\eta \rangle_{f_1(\Gamma^\infty)}|^p}{|x' - y'|^{d+pt}} d\mu(y') d\mu(x').$$

From Lemma 1.4.10, $I_{1,\eta} \lesssim a^{n(d-pt)} \int_{x' \in f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v \circ f_\eta(x') - \langle v \circ f_\eta \rangle_{f_1(\Gamma^\infty)}|^p}{d(x', \Lambda)^{pt}} d\mu(x')$. Let $\beta_0, (\beta_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{A}}$ be the coefficients in the Haar basis of v : $v = P_0 v + \beta_0 g_0 + \sum_{k \geq 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma g_\sigma$. Note that for any $\eta \in \mathcal{A}_n$, $v \circ f_\eta - \langle v \circ f_\eta \rangle_{\Gamma^\infty} = 2^{\frac{n}{2}} (\beta_\eta g_0 + \sum_{k \geq 1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma)$, where we recall that $\eta\sigma \in \mathcal{A}_{n+k}$ is the sequence $(\eta(1), \dots, \eta(n), \sigma(1), \dots, \sigma(k))$. Thus,

$$\begin{aligned} I_{1,\eta} &\lesssim a^{n(d-pt)} 2^{\frac{np}{2}} \int_{x \in f_1(\Gamma^\infty)} \frac{\left| \sum_{k \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma(x) \right|^p}{d(x, \Lambda)^{pt}} d\mu(x) \\ &\simeq \sum_{i \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} \int_{X_i} a^{-2ipt} \left| \sum_{k \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma(x) \right|^p d\mu(x), \end{aligned}$$

where X_i is defined in (1.50).

We are led to estimate

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in \mathcal{A}} I_{1,\eta} &\lesssim \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{i \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} a^{-2ipt} \int_{X_i} \left| \sum_{k \geq 0} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma(x) \right|^p d\mu(x) \\ &\lesssim S_1 + S_2, \end{aligned} \quad (1.65)$$

where

$$S_1 = \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{i \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} a^{-2ipt} \int_{X_i} \left| \sum_{k \leq 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma(x) \right|^p d\mu(x), \quad (1.66)$$

$$S_2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{i \geq 0} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} a^{-2ipt} \int_{X_i} \left| \sum_{k > 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_\sigma(x) \right|^p d\mu(x), \quad (1.67)$$

with the convention that if $n = 0$, then $\mathcal{A}_n = \{0\}$, $f_0 = Id$ and $0 + \sigma = \sigma$. It is convenient to rewrite S_2 as follows:

$$S_2 = \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{i \geq 0} a^{-(2i+n)pt} \int_{f_\eta(X_i)} \left| \sum_{k > 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1)=1} \beta_{\eta\sigma} g_{\eta\sigma}(x) \right|^p d\mu(x). \quad (1.68)$$

We have

$$S_2 = \sum_{\ell \geq 0} a^{-\ell pt} \sum_{i=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_{\ell-2i}} \int_{f_\eta(X_i)} \left| \sum_{k > 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1)=1} \beta_{\eta\sigma} g_{\eta\sigma}(x) \right|^p d\mu(x).$$

From the definition of \mathcal{Z}_ℓ in (1.51),

$$S_2 \lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{pt}{d}} \sum_{Y \in \mathcal{Z}_\ell} \int_Y \left| \sum_{k \geq \ell} \sum_{v \in \mathcal{A}_k} \beta_v g_v(x) \right|^p d\mu(x). \quad (1.69)$$

REMARK 1.4.7 – Note that in (1.69), the sign \lesssim has been used instead of $=$, because we did not prove that there exists a unique pair (i, η) such that $Y \in \mathcal{Z}_\ell$ coincide with $f_\eta(X_i)$, but only that the number of such pairs is bounded, see Remark 1.4.6.

Then from a triangle inequality,

$$\begin{aligned} S_2 &\lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \geq \ell} \left(\sum_{Y \in \mathcal{Z}_\ell} \int_Y \left| \sum_{v \in \mathcal{A}_k} \beta_v g_v(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &= \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \geq \ell} \left(\sum_{v \in \mathcal{A}_k} |\beta_v|^p \sum_{Y \in \mathcal{Z}_\ell} \int_Y |g_v(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \geq \ell} \left(\sum_{v \in \mathcal{A}_k} |\beta_v|^p 2^{-k} 2^{p \frac{k}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p. \end{aligned}$$

The latter inequality comes from Lemma 1.4.8, because any point $x \in \Gamma^\infty$ belongs to at most a finite number of sets $Y \in \mathcal{Z}_\ell$ (this number is independent of ℓ).

Hardy inequality (1.58) in Lemma 1.4.9 can be used because $\frac{pt}{d} > 0$: this yields

$$S_2 \lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell(\frac{pt}{d} + \frac{p}{2} - 1)} \sum_{v \in \mathcal{A}_\ell} |\beta_v|^p \lesssim \|v\|_{Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p. \quad (1.70)$$

Let us turn to S_1 defined in (1.66): we have, using a triangle inequality,

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{i \geq 0} 2^{2i \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} \int_{X_i} \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_{\eta\sigma} g_{\eta\sigma}(x) \right|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &= \sum_{i \geq 0} 2^{2i \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \int_{X_i} |g_{\eta\sigma}(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p, \end{aligned}$$

because the supports of g_σ , $\sigma \in \mathcal{A}_k$ are disjoint (up to a negligible set). This implies that

$$S_1 \lesssim \sum_{i \geq 0} 2^{2i \frac{pt}{d}} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{k}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} 2^{k \frac{p}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \mu(\text{Supp } g_\sigma \cap X_i) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p.$$

From Definition 1.4.2, Lemma 1.4.3, if $\Pi(\sigma)$ is not maximal, then $i > 1$ and thanks to Definition 1.4.4, $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) > c_1 a^{2\Pi(\sigma)} > c_1 a^{2(i-1)}$, and $\mu(\text{Supp } g_\sigma \cap X_i) = 0$.

Hence, if $P_k = \{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1) = 1, \Pi(\sigma) \text{ maximal}\}$,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{k}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} |\beta_\eta|^p \\ &\lesssim \sum_{i \geq 1} 2^{2i(\frac{pt}{d} - 1)} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{k}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} 2^{k \frac{p}{2}} \sum_{\sigma \in P_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\leq \sum_{j \geq 1} 2^{j(\frac{pt}{d} - 1)} \left(\sum_{k \leq j} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{k}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} 2^{k \frac{p}{2}} \sum_{\sigma \in P_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\lesssim \sum_{j \geq 1} \sum_{n \geq 0} 2^{(n+j)(\frac{pt}{d} - 1)} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{\sigma \in P_j} |\beta_{\eta\sigma}|^p, \end{aligned}$$

by Hardy's inequality (1.57) in Lemma 1.4.9, because $pt < d$.

For all $v \in \mathcal{A}$, there exist at most $N = m + 4$ pairs (η, σ) , $\eta, \sigma \in \mathcal{A}$ such that $v = \eta\sigma$ and $\Pi(\sigma)$ is maximal. Therefore, for all $v \in \mathcal{A}$, β_v appears in the latter sum at most N times. Hence,

$$S_1 \lesssim \sum_{m \geq 0} 2^{m(\frac{k}{2} + \frac{pt}{d} - 1)} \sum_{v \in \mathcal{A}_m} |\beta_v|^p \lesssim |v|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p. \quad (1.71)$$

From the bounds (1.70) and (1.71), we immediately deduce that

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} I_{1, \eta} \lesssim |v|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p, \quad (1.72)$$

and the same argument shows that

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} I_{3, \eta} \lesssim |v|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p. \quad (1.73)$$

We are left with estimating $I_2 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} I_{2, \eta}$. From (1.54) in Proposition 1.4.2 and easy scaling arguments,

$$\int_{f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(y) d\mu(x) \lesssim 2^{n(\frac{pt}{d} - 1)}, \quad \forall \eta \in \mathcal{A}_n.$$

On the other hand, $|\langle v \rangle_{f_\eta \circ f_2(\Gamma^\infty)} - \langle v \rangle_{f_\eta \circ f_1(\Gamma^\infty)}| = 2^{\frac{n}{2} + 1} |\beta_\eta|$. Combining these two observations, we have that for all $t < \min(d/p, 1)$,

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} I_{2, \eta} \lesssim \sum_{n \geq 0} 2^{n(\frac{pt}{d} - 1)} 2^{\frac{pn}{2}} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} |\beta_\eta|^p \lesssim |v|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p. \quad (1.74)$$

From (1.72), (1.73), (1.74), we obtain the desired result. \square

1.4.3 PROOF OF THEOREM 1.4.2

We now consider the case when $m\theta = \pi/2$, with m defined in (1.15). The situation is more complex because Ξ is a non countable set whose Hausdorff dimension is $d/2$.

1.4.3.a Geometrical lemmas

As in previous paragraph, we first state several useful geometrical lemmas whose proofs are postponed to Section 1.5.

We start by introducing a mapping Π from \mathcal{A} to \mathbb{N} with similar properties to that of §1.4.2 (see Lemma 1.4.11 below). Because of the more complex self-intersection set of Γ^∞ , the definition of Π will be quite different.

DEFINITION 1.4.5 - \diamond if $\sigma \in \mathcal{A}_n$ with $n < m + 4$ then $\Pi(\sigma) = 0$,

\diamond if $n \geq m + 4$ and $\sigma_{|m+2} \notin \{12^{m+1}, 21^{m+1}\}$, then $\Pi(\sigma) = 0$,

\diamond else, $\Pi(\sigma) = \max \left\{ k \geq 0, \forall j \in \{1, \dots, k\}, \sigma(m+2j+1) = \overline{\sigma(m+2(j+1))} \right\}$.

In other words, $\Pi(\sigma)$ is the largest integer $k \geq 0$ such that σ has a prefix lying in one of the sets $12^{m+1}(12|21)^k$ and $21^{m+1}(12|21)^k$.

Note that if $n < m + 4$ then $\Pi(\sigma) = 0$ and if $n \geq m + 4$, then the possible values of $\Pi(\sigma)$ are $0, 1, \dots, [(n - m - 2)/2]$.

DEFINITION 1.4.6 - As previously, we say that $\Pi(\sigma)$ for $\sigma \in \mathcal{A}_n$ is maximal if $n < m + 4$ (in this case $\Pi(\sigma) = 0$) or if $n \geq m + 4$ and $\Pi(\sigma) = [(n - m - 2)/2]$.

In other words, $\Pi(\sigma)$ is maximal if one of the following conditions hold:

$$\sigma \in \{12^l, l \leq m + 1\} \cup \{21^l, l \leq m + 1\},$$

$$\sigma \in 12^{m+1}(12|21)^{\Pi(\sigma)} \cup 21^{m+1}(21|12)^{\Pi(\sigma)},$$

$$\sigma \in 12^{m+1}(12|21)^{\Pi(\sigma)}(1|2) \cup 21^{m+1}(21|12)^{\Pi(\sigma)}(1|2).$$

As in the proof of Theorem 1.4.1, the integer $\Pi(\sigma)$ is an index of the distance between $\Gamma^{\infty, \sigma}$ and the vertical axis Λ .

LEMMA 1.4.11 - Take $n \geq 1$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$; with d_σ defined in (1.40), we have

$$d_\sigma \simeq a^{2\Pi(\sigma)}.$$

Estimating the distance $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau})$ for $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and $\sigma(1) \neq \tau(1)$ must be done more carefully than in the case when $m\theta > \pi/2$. Indeed, the quantity $\max(d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda), d(\Gamma^{\infty, \tau}, \Lambda))$ is too coarse an underestimate of $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau})$ in the present case. This stems from the fact that $\Gamma^{\infty, \sigma}$ and $\Gamma^{\infty, \tau}$ may touch Λ without facing each other, which is why we introduce the following definition.

DEFINITION 1.4.7 - For $n \geq m + 2$ and $k \geq 0$ such that $m + 2 + 2k \leq n$, let \mathcal{P}_n^k be the set containing all those pairs (σ, τ) such that

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{A}_n \text{ and } \tau \in \mathcal{A}_n, \\ \sigma(1) = 1 \text{ and } \tau(1) = 2, \\ k \text{ is the largest integer such that there exists } \eta \in \mathcal{A}_k \text{ with } \left. \begin{array}{l} \sigma_{|m+2+2k} = \eta^{(1)} \\ \tau_{|m+2+2k} = \eta^{(2)}, \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (1.75)$$

where $\eta^{(1)}$ and $\eta^{(2)}$ are defined by (1.24).

For example, if we take $\sigma = 12^{\widehat{m+1}}\widehat{12212112}$ and $\tau = 21^{\widehat{m+1}}\widehat{21122122}$, then $(\sigma, \tau) \in \mathcal{P}_{m+10}^2$ with $\eta = (1, 2)$ in (1.75).

LEMMA 1.4.12 – For any $n \geq m+2$ and $k \geq 0$ such that $m+2+2k \leq n$, for any $(\sigma, \tau) \in \mathcal{P}_n^k$,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) + a^n \simeq a^{2k}. \quad (1.76)$$

Finally, as in § 1.4.2.a, there exist two positive constants c_1 and c_2 such that $c_1 \leq c_2$ and (1.48) holds for all $n \geq 1$, $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $x \in \Gamma^{\infty, \sigma}$. The following lemma should be compared to Lemma 1.4.6.

LEMMA 1.4.13 – For all integers $i \geq 1$, the sets X_i defined in (1.50) are such that

$$\mu(X_i) \lesssim 2^{-i}. \quad (1.77)$$

REMARK 1.4.8 – It can be seen that the set X_i is made of $O(2^i)$ disjoint connected components whose measure is of the order of 2^{-2i} .

1.4.3.b Sobolev regularity of the Haar wavelet g_0

The following proposition, which should be compared to Proposition 1.4.1, will imply regularity results for the Haar wavelet g_0 :

PROPOSITION 1.4.2 – We have

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) < \infty, \quad \text{if } \gamma < \frac{3d}{2}, \quad (1.78)$$

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) = \infty, \quad \text{if } \gamma > \frac{3d}{2}. \quad (1.79)$$

Proof. For any $n \geq m+2$, let x be the largest integer such that $m+2+2x \leq n$. We have

$$\begin{aligned} \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{(|x-y|+a^n)^\gamma} &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2}} \int_{\Gamma^{\infty, \sigma}} \int_{\Gamma^{\infty, \tau}} \frac{d\mu(y) d\mu(x)}{(|x-y|+a^n)^\gamma} \\ &\simeq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2}} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{(d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) + a^n)^\gamma} \\ &\simeq \sum_{k=0}^x \sum_{(\sigma, \tau) \in \mathcal{P}_n^k} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{a^{2k\gamma}}, \end{aligned}$$

from Lemma 1.4.12. It is easy to see that \mathcal{P}_n^k has $2^k \cdot 2^{n-2k} \cdot 2^{n-2k} = 2^{2n-3k}$ elements. Therefore,

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \simeq \sum_{k=0}^x 2^k \left(\frac{2^\gamma}{a} - 3\right).$$

Thus

$$\begin{aligned} \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) &\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \left(\frac{2^k}{d}-3\right) < \infty, & \text{if } \gamma < \frac{3d}{2}, \\ \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{1}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) &\gtrsim 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2^k}{d}-3\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, & \text{if } \gamma > \frac{3d}{2}, \end{aligned}$$

and the result follows by the monotone convergence theorem. \square

The following should be compared to Corollary 1.4.5.

COROLLARY 1.4.6 – For any q , $1 \leq p < \infty$, $g_0 \in B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ if $0 \leq s < \frac{d}{2p}$ and $g_0 \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ if $s > \frac{d}{2p}$.

1.4.3.c Two Lemmas

LEMMA 1.4.14 – For all $\gamma > d$, we have

$$\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \lesssim \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{d(x,\Lambda)^{\gamma-d}} d\mu(x), \quad \forall v \in L_\mu^p(\Gamma^\infty).$$

Proof. Consider $n \geq m+2$. For any $\sigma \in \mathcal{A}_n$, define $\mathcal{P}_\sigma^k = \{\tau \in \mathcal{A}_n, (\sigma, \tau) \in \mathcal{P}_n^k\}$ (see Definition 1.4.7). Lemma 1.4.12 implies that

$$\begin{aligned} &\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \\ &\leq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_n \\ \tau(1)=2}} \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} \int_{\Gamma^{\infty,\tau}} \frac{|v(x)|^p}{(d(\Gamma^{\infty,\sigma}, \Gamma^{\infty,\tau})+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \\ &\simeq 2^{-n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \sum_{k=0}^{\Pi(\sigma)} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_\sigma^k} \frac{1}{a^{2\gamma k}} \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} |v(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

It is easy to see that since $\sigma \in \mathcal{A}_n$, \mathcal{P}_σ^k has 2^{n-2k} elements. Therefore,

$$\begin{aligned} &\int_{f_1(\Gamma^\infty)} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(|x-y|+a^n)^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) \\ &\lesssim \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \left(\sum_{k=0}^{\Pi(\sigma)} \frac{2^{-2k}}{a^{2\gamma k}} \right) \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} |v(x)|^p d\mu(x) \simeq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \frac{1}{a^{2\Pi(\sigma)(\gamma-d)}} \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} |v(x)|^p d\mu(x) \\ &\simeq \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \sigma(1)=1}} \int_{\Gamma^{\infty,\sigma}} \frac{|v(x)|^p}{(d(x,\Lambda)+a^n)^{\gamma-d}} d\mu(x) = \int_{f_1(\Gamma^\infty)} \frac{|v(x)|^p}{(d(x,\Lambda)+a^n)^{\gamma-d}} d\mu(x). \end{aligned}$$

The desired result is obtained by letting n tend to ∞ , by monotone convergence. \square

REMARK 1.4.9 – Although the statements of Lemma 1.4.10 and 1.4.14 are similar, the proofs differ.

Recall that the sets X_i are defined by (1.50), where c_1 is the constant appearing in (1.48).

LEMMA 1.4.15 – For any $i \geq 1$, $k \geq 1$ and $\sigma \in \mathcal{A}_k$,

$$\int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu \lesssim 2^{\frac{k}{2}(p-1)} 2^{-i}, \quad \text{if } k < 2i, \quad (1.80)$$

$$\int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu \lesssim 2^{k(\frac{p}{2}-1)}, \quad \text{if } k \geq 2i. \quad (1.81)$$

Proof. Assume that $k < 2i$. It is easy to see that for $\sigma \in \mathcal{A}_1$, $\int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu \leq 2^{\frac{p}{2}} \mu(X_i)$; this is exactly (1.80) for $k = 1$. If $k \geq 2$, let $\sigma \in \mathcal{A}_k$ and $\tau \in \mathcal{A}_k$ be such that $\sigma \neq \tau$, $\Pi(\sigma)$ and $\Pi(\tau)$ are maximal; then $\Gamma^{\infty, \sigma}$ and $\Gamma^{\infty, \tau}$ can be obtained from each other by a translation with a vertical vector (parallel to Λ). Hence,

$$\Pi(\sigma) \text{ and } \Pi(\tau) \text{ are maximal} \quad \Rightarrow \quad \mu(X_i \cap \Gamma^{\infty, \sigma}) = \mu(X_i \cap \Gamma^{\infty, \tau}). \quad (1.82)$$

Moreover, since $\mu(\Gamma^{\infty, \tau} \cap \Gamma^{\infty, \sigma}) = 0$ for $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_k$, we get

$$\mu(X_i) \geq \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_k \\ \Pi(\tau) \text{ maximal}}} \mu(X_i \cap \Gamma^{\infty, \tau}). \quad (1.83)$$

On the other hand, if $\tau \in \mathcal{A}_k$ and $\Pi(\tau)$ is not maximal, then $\Pi(\tau) \leq k/2 - 1$ and, from Lemma 1.4.11,

$$d(\Gamma^{\infty, \tau}, \Lambda) \geq c_1 a^{2\Pi(\tau)} \geq c_1 a^{(k-2)} > c_1 a^{2(i-1)}.$$

Therefore, if $\tau \in \mathcal{A}_k$ and $\Pi(\tau)$ is not maximal, then $X_i \cap \Gamma^{\infty, \tau} = \emptyset$. The latter observation, (1.82) and (1.83) imply that for any $\sigma \in \mathcal{A}_k$, $\mu(X_i \cap \Gamma^{\infty, \sigma}) \lesssim 2^{-k/2} \mu(X_i) \lesssim 2^{-i-k/2}$, from Lemma 1.4.13. Therefore,

$$\int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu = 2^{\frac{kp}{2}} \mu(X_i \cap \text{Supp}(g_\sigma)) = 2^{\frac{kp}{2}} \mu(X_i \cap \Gamma^{\infty, \sigma}) \lesssim 2^{\frac{k}{2}(p-1)-i},$$

and we have proved (1.80). On the other hand,

$$\int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu \leq 2^{\frac{kp}{2}} \mu(\text{Supp}(g_\sigma)) = 2^{k(\frac{p}{2}-1)},$$

and we have proved (1.81). \square

1.4.3.d Proof of Theorem 1.4.2

Proof. The result stems from the fact that $g_0 \in JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ and from Corollary 1.4.6. \square

Proof. Exactly as in the proof of Theorem 1.4.1,

$$\int_{\Gamma^\infty} \int_{\Gamma^\infty} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{d+pt}} d\mu(x) d\mu(y) \lesssim I_1 + I_2 + I_3 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} (I_{1,\eta} + I_{2,\eta} + I_{3,\eta})$$

where $I_1, I_2, I_3, I_{1,\eta}, I_{2,\eta}$ and $I_{3,\eta}$ are respectively given by (1.59), (1.60), (1.61), (1.62), (1.63) and (1.64). As above, we get that $I_1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} I_{1,\eta} \lesssim S_1 + S_2$, where S_1 and S_2 are given by (1.66)

and (1.67).

Let us first find a bound on S_1 : exactly as in the proof of Theorem 1.4.1, we see that

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} |\beta_\eta|^p \\ &\lesssim \sum_{i \geq 1} 2^{2i \frac{p_t}{d}} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} \sum_{\sigma \in P_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \int_{X_i} |g_\sigma|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p, \end{aligned}$$

where $P_k = \{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1) = 1, \Pi(\sigma) \text{ maximal}\}$. Thus, from (1.80),

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} |\beta_\eta|^p \\ &\lesssim \sum_{i \geq 1} 2^{2i \frac{p_t}{d}} \left(\sum_{k \leq 2i} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} 2^{\frac{k}{2}(p-1)} 2^{-i} \sum_{\sigma \in P_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\leq \sum_{j \geq 1} 2^{j(\frac{p_t}{d} - 1/2)} \left(\sum_{k \leq j} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} 2^{n(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} 2^{\frac{k}{2}(p-1)} \sum_{\sigma \in P_k} |\beta_{\eta\sigma}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ &\lesssim \sum_{j \geq 1} \sum_{n \geq 0} 2^{(n+j)(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n} \sum_{\sigma \in P_j} |\beta_{\eta\sigma}|^p, \end{aligned}$$

by Hardy's inequality (1.57) in Lemma 1.4.9. For all $v \in \mathcal{A}$, there exist at most $N = m + 4$ pairs (η, σ) , $\eta, \sigma \in \mathcal{A}$ such that $v = \eta\sigma$ and $\Pi(\sigma)$ is maximal. Therefore, for all $v \in \mathcal{A}$, β_v appears in the latter sum at most N times. Hence,

$$S_1 \lesssim \sum_{m \geq 0} 2^{m(\frac{p}{2} + \frac{p_t}{d} - 1)} \sum_{v \in \mathcal{A}_m} |\beta_v|^p \lesssim |v|_{JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p. \quad (1.84)$$

We now consider S_2 . Since $\pi/\theta = 2m$ is an integer, the rotation angles of the similitudes f_η can take only a finite number of values in $[0, 2\pi)$. Call Θ the finite set of all possible angles: $\Theta = \{i\theta, 0 \leq i < 4m\}$. It is convenient to split S_2 as $S_2 = \sum_{\phi \in \Theta} S_{2, \phi}$, with

$$S_{2, \phi} = \sum_{n \geq 0} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_{n, \phi}} \sum_{i \geq 0} a^{-(2i+n)pt} \int_{f_\eta(X_i)} \left| \sum_{k > 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1)=1} \beta_{\eta\sigma} g_{\eta\sigma}(x) \right|^p d\mu(x).$$

We have

$$S_{2, \phi} = \sum_{\ell \geq 0} a^{-\ell pt} \sum_{i=0}^{[\ell/2]} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_{\ell-2i, \phi}} \int_{f_\eta(X_i)} \left| \sum_{k > 2i} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k, \sigma(1)=1} \beta_{\eta\sigma} g_{\eta\sigma}(x) \right|^p d\mu(x).$$

We can rewrite $S_{2, \phi}$ as follows:

$$S_{2, \phi} = \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{p_t}{d}} \sum_{Y \in \mathcal{Z}_{\ell, \phi}} \int_Y \left| \sum_{k \geq \ell} \sum_{v \in \mathcal{A}_k} \beta_v g_v(x) \right|^p d\mu(x). \quad (1.85)$$

Thus, by the triangle inequality and the fact that the supports of g_ν , $\nu \in \mathcal{A}_k$ are disjoint,

$$S_{2,\phi} \leq \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{p_t}{d}} \left(\sum_{k \geq \ell} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{A}_k} |\beta_\nu|^p \sum_{Y \in \mathcal{Z}_{\ell,\phi}} \int_Y |g_\nu(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p.$$

From Remark 1.4.5, for all $\ell \geq 0$ and $\phi \in \Theta$, the sets $Y \in \mathcal{Z}_{\ell,\phi}$ are disjoint. Therefore,

$$S_{2,\phi} \lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell \frac{p_t}{d}} \left(\sum_{k \geq \ell} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{A}_k} |\beta_\nu|^p 2^{-k} 2^{p \frac{k}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p,$$

because any $x \in \Gamma^\infty$ belongs to at most one set $Y \in \mathcal{Z}_{\ell,\phi}$.

Hardy inequality (1.58) in Lemma 1.4.9 can be used because $\frac{p_t}{d} > 0$: this yields

$$S_{2,\phi} \lesssim \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell(\frac{p_t}{d} + \frac{k}{2} - 1)} \sum_{\nu \in \mathcal{A}_\ell} |\beta_\nu|^p \lesssim |v|_{Lip(t,p,p;0;\Gamma^\infty)}^p.$$

Since this is true for all $\phi \in \Theta$ and since Θ is a finite set, we get $S_2 \lesssim |v|_{Lip(t,p,p;0;\Gamma^\infty)}^p$. From this and (1.84), we immediately deduce (1.72) and the same argument yields (1.73). The conclusion of the proof is identical as that of Theorem 1.4.1. \square

REMARK 1.4.10 – For $s > 1 - \frac{2-d}{p}$, $p < 2$, it is interesting to construct a function $u \in W^{1,p}(\Omega)$ whose trace $\ell^\infty(u)$ does not belong to $B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$. One can take the following example: let $\chi \in W^{1,p}(Y^0)$ be such that $\chi|_{\Gamma^0} = 0$, $\chi|_{f_1(\Gamma^0)} = 1$ and $\chi|_{f_2(\Gamma^0)} = 0$. For $\rho > 0$, we build u by the following iterative process:

$$\diamond u|_{Y^0} = \chi;$$

\diamond let the polygonal open domain Ω^n be obtained by stopping the construction at step $n + 1$:

$$\Omega^n = \text{Interior} \left(\bigcup_{k=0}^n \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_k} f_\sigma(K^0) \right). \text{ Let us also introduce } Y^\sigma = f_\sigma(Y^0).$$

If u is already defined in Ω^{n-1} , we define $u|_{Y^\sigma}$, $\sigma \in \mathcal{A}_n$ as follows:

$$\begin{cases} u|_{Y^\sigma} = 1 + \rho u|_{\Omega^{n-1}} \circ f_{\sigma(n)}^{-1} & \text{if } \Pi(\sigma) \text{ is maximal,} \\ u|_{Y^\sigma} = \gamma^\sigma & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\gamma^\sigma = u|_{\Gamma^\sigma}$ for $\sigma \in \mathcal{A}$ (note that the function u is constant on the lines Γ^σ).

It is possible to prove that if $\rho = 2^{\frac{2-p}{d_p} - \frac{1}{2p} - \varepsilon}$, for $\varepsilon > 0$, then $u \in W^{1,p}(\Omega)$ and that for any $s > 1 - \frac{2-d}{p}$, one may choose ε small enough such that $\ell^\infty(u) \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

1.5 PROOFS OF THE GEOMETRICAL LEMMAS

1.5.1 THE CASE $m\theta > \pi/2$

Proof of Lemma 1.4.1. We have

$$\sup_{x \in f_{11}(\Omega)} x_2 = \sup_{x \in f_{22}(\Omega)} x_2 = \sup_{x \in f_{1122}(Y^0)} x_2 + a^4 b.$$

On the other hand, with F_1 defined in (1.23),

$$b = \sup_{x \in F_1 \circ F_1(Y^0)} x_2 + a^4 b.$$

Easy algebra shows that $f_1^2 \circ f_2^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -\alpha + a(-\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) + a^2(\alpha \cos 2\theta - \beta \sin 2\theta) + a^3(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) + a^4 x_1 \\ \beta + a(-\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) + a^2(\alpha \sin 2\theta + \beta \cos 2\theta) + a^3(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) + a^4 x_2 \end{pmatrix},$$

and that

$$F_1 \circ F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + a(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) - a^2 \alpha + a^3(\alpha \cos \theta - \beta \sin \theta) + a^4 x_1 \\ \beta + a(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) + a^2 \beta + a^3(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) + a^4 x_2 \end{pmatrix}.$$

Thus, the desired result is a consequence of the inequality

$$\begin{aligned} & -\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + a(\alpha \sin 2\theta + \beta \cos 2\theta) + a^2(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) \\ & < \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta + a\beta + a^2(\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta) \end{aligned}$$

which is true, since $\alpha(-2 \sin \theta + a \sin 2\theta) + a\beta(\cos 2\theta - 1) < 0$. \square

Proof of Lemma 1.4.2. From the definition of k in the statement of Lemma 1.4.2,

◊ if $k = [n/2]$ (where we denote by $[z]$ the integer part of z), then at least one of the two points $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{\sigma_{12k}} \circ F_1^l(O)$, $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{\sigma_{12k}} \circ F_2^l(O)$ belongs to $\Gamma^{\infty, \sigma}$, which implies that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) = 0$. This implies that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) + a^n \simeq a^{2k}$.

◊ otherwise, let us define $i = \sigma(2k + 1) = \sigma(2k + 2)$, and $\sigma' = \sigma_{12k+2}$. We have by self-similarity that

$$d(f_{\sigma'}(\Omega), \mathcal{H}) = a^{2k} d(f_i \circ f_i(\Omega), \mathcal{H}) > 0,$$

by Lemma 1.4.1. Hence,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) \geq d(f_{\sigma'}(\Omega), \mathcal{H}) = a^{2k} d(f_i \circ f_i(\Omega), \mathcal{H}).$$

On the other hand,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) \leq d(f_{\sigma'}(\Omega), \mathcal{H}) + \text{diam}(f_{\sigma'}(\Omega)) = a^{2k} \left(d(f_i \circ f_i(\Omega), \mathcal{H}) + a^2 \text{diam}(\Omega) \right).$$

We have proved that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \mathcal{H}) \simeq a^{2k}$, which implies (1.39). \square

Proof of Lemma 1.4.3. We may suppose that $n \geq m+4$. If $\Pi(\sigma)$ is maximal, then $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) = 0$, which yields (1.41).

Now suppose that $\Pi(\sigma)$ is not maximal. Without restriction, we can also suppose that $\sigma(1) = 1$. We first assume that 12^{m+1} is not a prefix of σ , which implies that there exists an integer $j \in [0, m]$ such that $12^j 1$ is a prefix of σ . Thus $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \geq d(f_1 \circ f_2^j \circ f_1(\Omega), \Lambda)$. From §1.2.1.b, we know that $c \equiv \min_{0 \leq j \leq m+1} d((f_1 \circ f_2^j \circ f_1(\Omega), \Lambda)) > 0$. We have that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \geq c$. On the

other hand $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \leq \text{diam}(\Omega)$. We have obtained (1.41).

We are left with considering the case when 12^{m+1} is a prefix of σ , which implies that there exists $\tau \in \mathcal{A}_{n-m-2}$ and $\tau' \in \mathcal{A}_{n-m-1}$ such that $\sigma = 12^{m+1}\tau = 12^m\tau'$. Therefore, σ has a prefix of the form $12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)}ij$ where $i, j \in \{1, 2\}$ and $(i, j) \neq (1, 2)$, by the definition of $\Pi(\sigma)$.

Obviously, we have that

$$\begin{aligned} d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})) &= a^{m+2}d(\Gamma^{\infty, \tau}, \mathcal{H}), \\ d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^m(\mathcal{H})) &= a^{m+1}d(\Gamma^{\infty, \tau'}, \mathcal{H}). \end{aligned} \quad (1.86)$$

Three observations will prove useful, see Figure 1.6.

a) By self similarity, the set $f_1(\Gamma^\infty)$ lies in one side of the straight lines $f_1 \circ f_2^m(\mathcal{H})$ and $f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})$, whose intersection is the single point of Ξ .

b) It is also easy to see that the line $f_1 \circ f_2^m(\mathcal{H})$ makes an angle of $\frac{\pi}{2} - (m-1)\theta > 0$ with the axis Λ .

c) Similarly, the line $f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})$ makes an angle of $m\theta - \frac{\pi}{2} > 0$ with the axis Λ .

An elementary geometrical argument combining points a), b) and c), leads to

$$\begin{aligned} d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) &\geq \sin\left(\frac{\pi}{2} - (m-1)\theta\right) d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})), \\ d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) &\geq \sin\left(m\theta - \frac{\pi}{2}\right) d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^m(\mathcal{H})). \end{aligned} \quad (1.87)$$

The geometrical argument for the first inequality in (1.87) is summarized in Figure 1.7. The second one can be seen in a similar way.

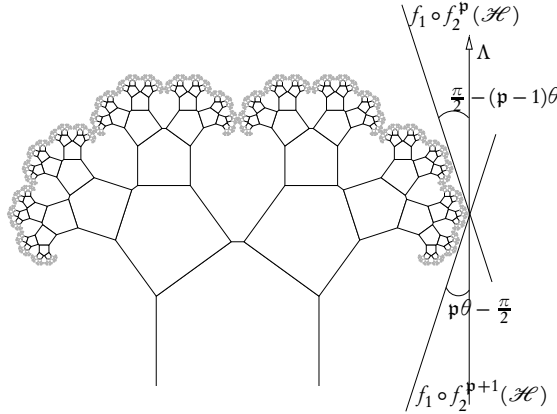


FIGURE 1.6: The lines $f_1 \circ f_2^m(\mathcal{H})$ and $f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})$ (for $\theta = \pi/5$).

We make out two cases:

◊ If $i = j$ then $\Pi(\sigma)$ is the largest integer k such that for all $l \leq k$, $\tau(2l-1) \neq \tau(2l)$. From Lemma 1.4.2 and since $\Pi(\sigma)$ is not maximal, we have that $d(\Gamma^{\infty, \tau}, \mathcal{H}) \gtrsim a^{2\Pi(\sigma)}$. Thus

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})) \gtrsim a^{m+2+2\Pi(\sigma)}. \quad (1.88)$$

Combining the first inequality in (1.87) and (1.88) yields that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \gtrsim a^{2\Pi(\sigma)}$.

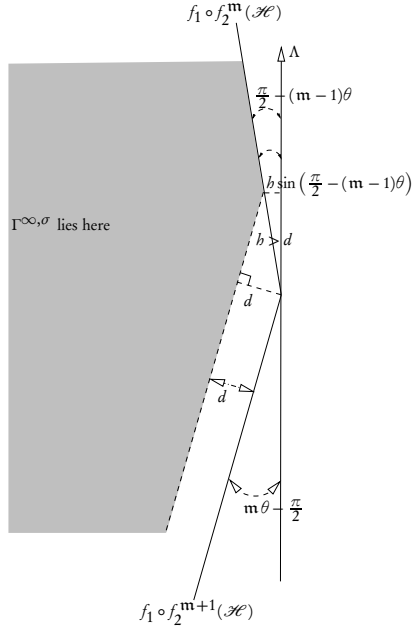


FIGURE 1.7: $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2} - (m-1)\theta\right) d$ where $d = d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{A}))$.

◊ If $(i, j) = (2, 1)$, then $\Pi(\sigma)$ is the largest integer k such that for all $l \leq k$, $\tau'(2l-1) \neq \tau'(2l)$. From Lemma 1.4.2 and since $\Pi(\sigma)$ is not maximal, we have that $d(\Gamma^{\infty, \tau'}, \mathcal{A}) \gtrsim a^{2\Pi(\sigma)}$, and

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, f_1 \circ f_2^m(\mathcal{A})) \gtrsim a^{m+1+2\Pi(\sigma)}. \quad (1.89)$$

We deduce that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \gtrsim a^{2\Pi(\sigma)}$ as above.

In both cases, we have proved that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \gtrsim a^{2\Pi(\sigma)}$. For the opposite inequality, recall that $\Xi = \{\xi\}$ where the point ξ is the limit point of the string $12^{m+1}(12)^\infty$. Therefore, there exists $\zeta \in \Gamma^\infty$ such that $\xi = f_{12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)}}(\zeta)$. Let η be the string in $\mathcal{A}_{n-m-2-2\Pi(\sigma)}$ such that $\sigma = 12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)}\eta$. We have

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \leq d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \xi) = a^{m+2+2\Pi(\sigma)} d(\Gamma^{\infty, \eta}, \zeta) \leq a^{m+2+2\Pi(\sigma)} \text{diam}(\Omega),$$

which yields that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \lesssim a^{2\Pi(\sigma)}$. \square

Proof of Lemma 1.4.4. We may suppose that $n \geq m+4$. If $\Pi(\sigma)$ and $\Pi(\tau)$ are maximal, then $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) = 0$ which yields (1.42).

Now suppose $\Pi(\sigma)$ or $\Pi(\tau)$ is not maximal. Since $\Gamma^{\infty, \sigma}$ and $\Gamma^{\infty, \tau}$ are separated by Λ , we have

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) \geq \max(d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda), d(\Gamma^{\infty, \tau}, \Lambda)) \gtrsim a^{2\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau))}, \quad (1.90)$$

from Lemma 1.4.3.

On the other hand, defining $k = m+2+2\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau))$, we see that $\sigma(\ell) = \overline{\tau(\ell)}$ for any

$\ell \leq k$, since $12^{m+1}(12)^{\Pi(\sigma)}$ (resp. $21^{m+1}(21)^{\Pi(\tau)}$) is a prefix of σ (resp. τ). Thus, $\Gamma^{\infty, \sigma_{\uparrow k}}$ and $\Gamma^{\infty, \tau_{\uparrow k}}$ are symmetric with respect to Λ . Hence,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma_{\uparrow k}}, \Gamma^{\infty, \tau_{\uparrow k}}) = 2(\Gamma^{\infty, \sigma_{\uparrow k}}, \Lambda) \lesssim a^{2 \min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau))}.$$

Observe that

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) \leq d(\Gamma^{\infty, \sigma_{\uparrow k}}, \Gamma^{\infty, \tau_{\uparrow k}}) + 2a^k \text{diam } \Gamma^{\infty}, \quad (1.91)$$

since $\Gamma^{\infty, \sigma_{\uparrow k}} \subset \Gamma^{\infty, \sigma}$ and $\Gamma^{\infty, \tau_{\uparrow k}} \subset \Gamma^{\infty, \tau}$. From (1.90) and (1.91), we obtain (1.42). \square

Proof of Lemma 1.4.5. \diamond If $\Pi(\eta) = 0$, then we use (1.44).

\diamond If $\Pi(\eta) > 0$, then $\Pi(\eta)$ cannot be maximal: indeed, if $\Pi(\eta)$ was maximal, then if we suppose for example that $\eta(1) = 1$, the $\eta = 12^{m+1}(12)^{\Pi(\eta)}$ or $\eta \in 12^{m+1}(12)^{\Pi(\eta)}(1|2)$. This implies that the angle of f_{η} would be $m\theta$, $(m-1)\theta$ or $(m+1)\theta$, so it would not be an integer multiple of 2π . Since $\Pi(\eta)$ is not maximal, the result stems from (1.48) and the fact that Λ and $f_{\eta}(\Lambda)$ are parallel. \square

Proof of Lemma 1.4.6. Take $i \geq 1$. Since Γ^{∞} is symmetric w.r.t. the axis Λ , we can estimate $\mu(\{x \in \Gamma^{\infty}, c_1 a^{2i} < d(x, \Lambda) \leq c_1 a^{2(i-1)}\})$ instead of $\mu(X_i)$.

Consider n , $n > m + 3 + 2I$ where $I \equiv i + \left\lceil \frac{\log(\frac{4}{c_3})}{2 \log a} \right\rceil$. We start by estimating

$$\mu(\{x \in \Gamma^{\infty}, c_1 a^{2i} + a^n \text{diam } \Gamma^{\infty} < d(x, \Lambda) \leq c_1 a^{2(i-1)}\}).$$

Take $x \in \Gamma^{\infty}$ and assume that $c_1 a^{2i} + a^n \text{diam } \Gamma^{\infty} < d(x, \Lambda) \leq c_1 a^{2(i-1)}$. Since we know that $\Gamma^{\infty} = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \Gamma^{\infty, \sigma}$, there exists $\sigma \in \mathcal{A}_n$ such that $x \in \Gamma^{\infty, \sigma}$.

We have $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) > c_1 a^{2i}$. The upper bounds in (1.48) imply that $\Pi(\sigma) \leq I$, which implies that $\Pi(\sigma)$ is not maximal.

Then, the lower bound in (1.48) implies that $\Pi(\sigma) \geq i$.

Hence,

$$\begin{aligned} & \mu(\{x \in \Gamma^{\infty}, c_1 a^{2i} + a^n \text{diam } \Gamma^{\infty} < d(x, \Lambda) \leq c_1 a^{2(i-1)}\}) \\ & \leq \mu \left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ i \leq \Pi(\sigma) \leq I}} \Gamma^{\infty, \sigma} \right) \leq 2^{-n} \sum_{\ell=i}^I \#\{\sigma \in \mathcal{A}_n, \Pi(\sigma) = \ell\} \lesssim 2^{-n} \sum_{\ell=i}^I 2^{n-2\ell} \lesssim 2^{-2i}, \end{aligned}$$

which yields (1.53) by letting n tend to infinity (monotone convergence). \square

Proof of Lemma 1.4.7. Let x be the maximal integer k such that $v_{\uparrow k} = \eta_{\uparrow k}$ for all $k \leq x$. We must have either $x < \min(n, m)$ or $(x = \min(n, m) \text{ and } n \neq m)$ otherwise we have $(m, j, v) = (n, i, \eta)$.

\diamond Assume that $x < \min(n, m)$, which implies that there exist $\sigma \in \mathcal{A}_x$, $v' \in \mathcal{A}_{m-x}$, $\eta' \in \mathcal{A}_{n-x}$ such that $v = \sigma v'$, $\eta = \sigma \eta'$ and $v'(1) \neq \eta'(1)$. Thus, $f_{\eta'}(\Gamma^{\infty})$ and $f_{v'}(\Gamma^{\infty})$ lie on two different sides of Λ .

We may assume that $f_{v'}(\Gamma^{\infty})$ lies on the right side of Λ and that $f_{\eta'}(\Gamma^{\infty})$ lies on the left side of Λ .

- If $f_{v'}(\Gamma^{\infty})$ lies strictly on the right side of Λ , we get the desired result. This happens in particular if $\Pi(v')$ is not maximal.

- If $f_{\eta'}(\Gamma^\infty)$ lies strictly on the left side of Λ , we also get the desired result. As above, this happens in particular if $\Pi(\eta')$ is not maximal.
- Assume that $f_{\nu'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda \neq \emptyset$ and $f_{\eta'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda \neq \emptyset$.
 - * If $\Pi(\nu')$ is positive then it is maximal, and $f_{\nu'}$ is a similitude whose angle can be $-(m-1)\theta$, $-m\theta$ or $-(m+1)\theta$. If the angle is $-m\theta$ or $-(m+1)\theta$, then $f_{\nu'}(X_j)$ does not intersect Λ (because $f_{\nu'}(X_j)$ is on the left of $f_{\nu'}(\Lambda)$), which yields the desired result. If the angle is $-(m-1)\theta$, then the similitude $f_{\eta'}$ has the same angle and $f_{\eta'}(X_i)$ does not intersect Λ (because $f_{\eta'}(X_i)$ is on the left of $f_{\eta'}(\Lambda)$), which yields the desired result.
 - * Similarly, if $\Pi(\eta')$ is positive then it is maximal, and $f_{\eta'}$ is a similitude whose angle can be $(m-1)\theta$, $m\theta$ or $(m+1)\theta$. If the angle is $(m-1)\theta$, then $f_{\eta'}(X_i)$ does not intersect Λ which yields the result. If the angle is $m\theta$ or $(m+1)\theta$, then the similitude $f_{\nu'}$ has the same angle and $f_{\nu'}(X_j)$ does not intersect Λ which yields the result.
 - * We are left with the case where $\Pi(\eta') = 0$ and $\Pi(\nu') = 0$: it can be shown that there are only three pairs (ν', η') such that the related similitudes have the same angle, $\Pi(\eta') = 0$, $\Pi(\nu') = 0$, $f_{\nu'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda \neq \emptyset$ and $f_{\eta'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda \neq \emptyset$: 1) $\eta' = (1)$ and $\nu' = (2, 1, 1)$ 2) $\eta' = (1, 2)$ and $\nu' = (2, 1, 3)$ 3) $\eta' = (1, 2, 2)$ and $\nu' = (2)$. In these three cases, the result follows easily.
- ◊ If $x = \min(n, m)$, for example $x = n < m$, then $Y = f_\eta(X_i)$ and $Z = f_\eta \circ f_{\nu'}(X_j)$, $\nu' \in \mathcal{A}_{m'}$. We have to prove that $X_i \cap f_{\nu'}(X_j) = \emptyset$. The angle of the similitude $f_{\nu'}$ is 0 and $2i = 2j + m'$.
 - If $\nu'(1) = 2$, then $f_{\nu'}(X_j)$ lies on the right side of Λ and X_i strictly lies on the left side of Λ , which yields the result.
 - If $\nu'(1) = 1$, then $d(f_{\nu'}(\Lambda), \Lambda) > c_1 a^{2\Pi(\nu')}$ from Lemma 1.4.5. Therefore, from the definition of X_i , $d(f_{\nu'}(\Lambda), X_i) > c_1 a^{2\Pi(\nu')} - c_1 a^{2i-2} > 0$. \square

Proof of Lemma 1.4.8. We can assume $\ell > 1$.

- ◊ Suppose first that $\ell = 2i$, $i > 0$, $x \in X_i$. Since we are interested in finding $j < i$ and $\eta \in \mathcal{A}_{\ell-2j}$ such that the set $Z = f_\eta(X_j)$ contains x , we can suppose that $\eta(1) = 1$. If $\Pi(\eta)$ is not maximal, then $X_i \cap Z = \emptyset$: indeed, from (1.48), $Z \subset f_\eta(\Gamma^\infty)$ and $d(f_\eta(\Gamma^\infty), \Lambda) > c_1 a^{2\Pi(\eta)}$. Therefore

$$d(Z, X_i) \geq d(f_\eta(\Gamma^\infty), \Lambda) - c_1 a^{2(i-1)} > c_1 (a^{2\Pi(\eta)} - a^{2(i-1)}).$$

But $2\Pi(\eta) < 2(i-1)$, so $d(Z, X_i) > 0$ and $x \notin Z$.

We now focus on the $Z = f_\eta(X_j) \in \mathcal{Z}_\ell$ such that $\eta(1) = 1$ and $\Pi(\eta)$ is maximal. Since there are a finite number, namely 2^{m+2} , of η such that $\Pi(\eta) = 0$ and $\Pi(\eta)$ is maximal, we can suppose that $\Pi(\eta) > 0$. We make out two cases:

- If m is even, then $\eta \in \mathcal{A}_{m+2+2\Pi(\eta)}$, and the angle of the similitude f_η is $m\theta$. Since the sets $Z \in \mathcal{Z}_{\ell, m\theta}$ are pairwise disjoint, only one of them can contain x .
- If m is odd, then $\eta \in \mathcal{A}_{m+3+2\Pi(\eta)}$. Since $\eta 1 \in \mathcal{A}_{m+4+2\Pi(\eta)}$, $\Pi(\eta 1) = \Pi(\eta)$ is not maximal. Since we have $Z = f_\eta(X_j) \subset f_{\eta 1}(\Gamma^\infty)$, we deduce from the inequality $d(f_{\eta 1}(\Gamma^\infty), \Lambda) > c_1 a^{2\Pi(\eta)} > c_1 a^{2(i-1)}$ that $X_i \cap Z = \emptyset$, so $x \notin Z$.

- ◇ Suppose $x \in Y = f_\nu(X_i)$, $Y \in \mathcal{Z}_\ell$, with $\nu \in \mathcal{A}_{n_Y}$, $n_Y > 0$ and $x \notin Z$, $Z \in \mathcal{Z}_\ell$, with $n_Z < n_Y$. On the one hand, the number of sets $f_{\nu\nu'}(X_j) \in \mathcal{Z}_\ell$ containing x coincides with the number of sets $f_{\nu'}(X_j)$ containing $f_\nu^{-1}(x) \in X_i$; this number has been estimated above. On the other hand, if a set $Z = f_\eta(X_j) \in \mathcal{Z}_\ell$, with $n_Z \geq n_Y$, is such that $\eta \neq \nu\nu'$, then calling x the maximal integer such that $\nu|_k = \eta|_k$ for all $k \leq x$, we know that $x < n_Y$ and that $f_\eta(X_j)$ and $f_\nu(X_i)$ lie on different sides of $f_{\nu|_x}(\Lambda)$, so their intersection is empty: Z does not contain x .

□

1.5.2 THE CASE $m\theta = \pi/2$

Proof of Lemma 1.4.11. It is enough to consider $n \geq m + 4$.

- ◇ If $\sigma|_{m+2} \notin \{12^{m+1}, 21^{m+1}\}$, then there exists a constant c independent of σ such that $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) > c$. Since $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) \leq \text{diam}(\Omega)$, we obtain the desired result in this case.
- ◇ If $\sigma|_{m+2} \in \{12^{m+1}, 21^{m+1}\}$, for example $\sigma|_{m+2} = 12^{m+1}$, then $\sigma = 12^{m+1}\tau$ for some $\tau \in \mathcal{A}_{n-m-2}$. Since we also have $\Lambda = f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})$,

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Lambda) = d(f_1 \circ f_2^{m+1}(\Gamma^{\infty, \tau}), f_1 \circ f_2^{m+1}(\mathcal{H})) = a^{m+2}d(\Gamma^{\infty, \tau}, \mathcal{H}). \quad (1.92)$$

Also, $\Pi(\sigma)$ is the largest integer k such that for all $j \leq k$, $\tau(2j-1) \neq \tau(2j)$. Thus from Lemma 1.4.2, $d(\Gamma^{\infty, \tau}, \mathcal{H}) + a^{n-m-2} \simeq a^{2\Pi(\sigma)}$. Combining this and (1.92) yields the desired result. □

Proof of Lemma 1.4.12. From the definition of k , it is clear that $\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau)) \geq k$. Let x be the largest integer such that $m+2+2x \leq n$. With the notation defined in (1.24), let $\eta \in \mathcal{A}_k$ be such that $\sigma|_{m+2+2k} = \eta^{(1)}$ and $\tau|_{m+2+2k} = \eta^{(2)}$.

- ◇ If $k = x$, then $\Gamma^{\infty, \eta^{(1)}}$ is the symmetric of $\Gamma^{\infty, \eta^{(2)}}$ w.r.t. Λ , and $d(\Gamma^{\infty, \eta^{(1)}}, \Gamma^{\infty, \eta^{(2)}}) = 0$. This implies (1.76).
- ◇ If $k < x$, then $d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) \leq d(\Gamma^{\infty, \eta^{(1)}}, \Gamma^{\infty, \eta^{(2)}}) + 2 \text{diam} \Gamma^{\infty, \eta^{(1)}} \simeq a^{2k}$, since we have $d(\Gamma^{\infty, \eta^{(1)}}, \Gamma^{\infty, \eta^{(2)}}) = 0$. For the opposite inequality, we can define $\sigma' = \sigma|_{m+4+2k}$ and $\tau' = \tau|_{m+4+2k}$, since $x > k$.

- If $\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau)) = k$ then

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma}, \Gamma^{\infty, \tau}) \geq d(\Gamma^{\infty, \sigma'}, \Gamma^{\infty, \tau'}) \geq \max(d(\Gamma^{\infty, \sigma'}, \Lambda), d(\Gamma^{\infty, \tau'}, \Lambda)) \simeq a^{2k}.$$

- Otherwise, $\min(\Pi(\sigma), \Pi(\tau)) > k$. This implies that

$$\sigma(m+3+2k) = \tau(m+3+2k) \neq \sigma(m+4+2k) = \tau(m+4+2k).$$

Without restriction, we may assume that $\sigma(m+3+2k) = \tau(m+3+2k) = 1$ and that $\sigma(m+4+2k) = \tau(m+4+2k) = 2$, thus $\sigma' = \eta^{(1)12}$ and $\tau' = \eta^{(2)12}$.

For what follows we define $\delta = d(\Gamma^{1, \infty} \cap \mathcal{H}, \Gamma^{2, \infty} \cap \mathcal{H}) > 0$ and \mathcal{E} as the convex subset of \mathbb{R}^2 located under the straight lines \mathcal{H} , $f_1(\mathcal{H})$ and $f_2(\mathcal{H})$. It is clear that

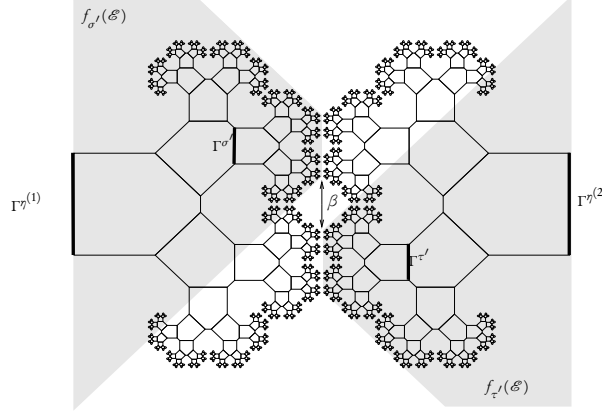


FIGURE 1.8: $\theta = \pi/4$: the case when $\sigma' = \eta^{(1)}12$ and when $\tau' = \eta^{(2)}12$

$\Omega \subset \mathcal{E}$. Therefore, $\Omega_{\sigma'} \subset f_{\sigma'}(\mathcal{E})$ and $\Omega_{\tau'} \subset f_{\tau'}(\mathcal{E})$, see Figure 1.8. Elementary geometrical arguments lead to

$$d(f_{\sigma'}(\mathcal{E}), f_{\tau'}(\mathcal{E})) = \beta \sin \theta,$$

where $\beta = d(f_{\sigma'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda, f_{\tau'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda)$, see Figure 1.8. But

$$\begin{aligned} d(f_{\sigma'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda, f_{\tau'}(\Gamma^\infty) \cap \Lambda) &= d(f_{\eta^{(1)}}(F_1(\Gamma^\infty)) \cap \Lambda, f_{\eta^{(2)}}(F_1(\Gamma^\infty)) \cap \Lambda) \\ &= d(f_{\eta^{(1)}}(F_1(\Gamma^\infty)) \cap \Lambda, f_{\eta^{(1)}}(F_2(\Gamma^\infty)) \cap \Lambda). \end{aligned}$$

By self-similarity, $\beta = a^{m+2+2k} \delta$. Therefore

$$d(\Gamma^{\infty, \sigma'}, \Gamma^{\infty, \tau'}) \geq d(\Gamma^{\infty, \sigma'}, \Gamma^{\infty, \tau'}) \geq d(f_{\sigma'}(\mathcal{E}), f_{\tau'}(\mathcal{E})) \gtrsim a^{2k}. \quad \square$$

Proof of Lemma 1.4.13. The argument is the same as the one used for Lemma 1.4.6. The only difference is that $\#\{\sigma \in \mathcal{A}_n, \Pi(\sigma) = \ell\} \lesssim 2^{n-\ell}$, instead of $2^{n-2\ell}$ in the former case. Hence, with I defined as in the proof of Lemma 1.4.6,

$$\begin{aligned} &\mu(\{x \in \Gamma^\infty, c_1 a^{2i} + a^n \text{diam}(\Gamma^\infty) < d(x, \Lambda) \leq c_1 a^{2(i-1)}\}) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{\Pi(\sigma)=i}^{i+I} \Gamma^{\infty, \sigma}\right) \leq 2^{-n} \sum_{\ell=i}^{i+I} \#\{\sigma \in \mathcal{A}_n, \Pi(\sigma) = \ell\} \lesssim 2^{-n} \sum_{\ell=i}^{i+I} 2^{n-\ell} \lesssim 2^{-i}, \end{aligned}$$

and (1.77) is obtained by Fatou lemma. \square

1.6 ANOTHER GEOMETRY

In this section, we state a few results on a similar geometry with four similitudes instead of two, and we propose a conjecture on the Besov regularity of the traces of functions in tree-shaped domains with self-similar boundary.

We consider the similitudes f_i , $i = 1 \dots 4$, with respective angles $-\varphi, -\theta, \theta, \varphi$, where $0 < \varphi,$

$\theta < \pi/2$ and $\theta < \varphi$. We also introduce the associated self-similar set Γ^∞ , that is $\Gamma^\infty = \bigcup_{i=1}^4 f_i(\Gamma^\infty)$.

It is straightforward that in this case, Γ^∞ has Hausdorff dimension $d = -\frac{2\log 2}{\log a}$.

Write $\Xi = \bigcup_{i \neq j} f_i(\Gamma^\infty) \cap f_j(\Gamma^\infty)$. It can be shown as in Theorem 1.2.1 that there exists a critical value a^* depending only on θ and φ such that Ξ is empty when $a < a^*$, and is nonempty when $a = a^*$. As previously, we will focus on the case when $a = a^*$.

We distinguish the angles θ and φ for which the set Ξ is reduced to one point, and the ones for which Ξ has positive Hausdorff measure. In the latter case, it is easily seen that the Hausdorff dimension of Ξ is $-\frac{\log 2}{2\log a} = \frac{d}{4}$. This case is presented in Figure 1.9.

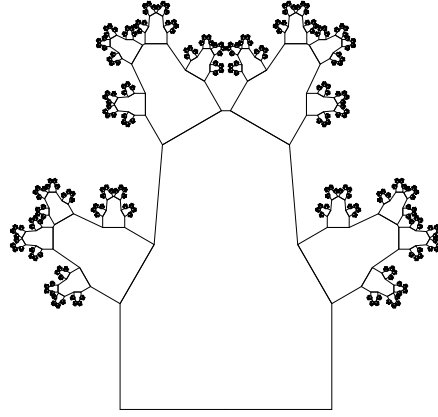


FIGURE 1.9: The ramified domain in the case with four similitudes, with $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, and $a = a^*$.

THEOREM 1.6.1 : Sobolev regularity of the Haar wavelets - We have

$$\begin{aligned} \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \int_{f_3(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) < \infty, & \quad \text{if } \gamma < \frac{7d}{4}, \\ \int_{f_2(\Gamma^\infty)} \int_{f_3(\Gamma^\infty)} \frac{1}{|x-y|^\gamma} d\mu(y) d\mu(x) = \infty, & \quad \text{if } \gamma > \frac{7d}{4}. \end{aligned} \quad (1.93)$$

COROLLARY 1.6.1 - For any p , $1 \leq p < \infty$,

$$\begin{cases} g_{0,2} \in B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{if } 0 \leq s < \frac{3d}{4p}, \\ g_{0,2} \notin B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) & \text{if } s > \frac{3d}{4p}. \end{cases}$$

Therefore, it can be shown that when $a = a^*$,

- ◇ for all $t \in (0, 1)$ and $s > \frac{3d}{4p}$, $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$;
- ◇ if $0 < t < \min(\frac{3d}{4p}, 1)$, then $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

This last result is to be compared to Theorems 1.4.1 and 1.4.2. It could even be shown with a similar method as in Chapter 2 that for $1 \leq p < 2 - 3d/4$, there exists a bounded linear extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

A conjecture on tree-shaped domains

These results lead to the following conjecture. Consider a ramified domain Ω in \mathbb{R}^2 as defined in §1.1.2.c of the Introduction, associated to the similitudes f_1, \dots, f_N . Denote Γ^∞ its compact invariant and $d = \dim_H \Gamma^\infty$. We recall that the set Ξ is defined by $\Xi = \bigcup_{i \neq j} f_i(\Gamma^\infty) \cap f_j(\Gamma^\infty)$.

We conjecture that:

- ◊ for all $t \in (0, 1)$ and $s > \frac{1}{p}(d - \dim_H \Xi)$, $JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$,
- ◊ if $0 < t < \min(\frac{1}{p}(d - \dim_H \Xi), 1)$, then

$$JLip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Lip(t, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_t^{p,p}(\Gamma^\infty),$$

which implies the following trace result:

- ◊ if $1 \leq p < 2 - \dim_H \Xi$, then $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$,
- ◊ if $p \geq 2 - \dim_H \Xi$, then
 - for all $s, 0 < s < \frac{1}{p}(d - \dim_H \Xi)$, $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$,
 - for all $s > \frac{1}{p}(d - \dim_H \Xi)$, $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) \not\subset B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

CHAPTER 2

Sobolev extension property for tree-shaped domains with self-contacting fractal boundary

In this chapter, we investigate the existence of extension operators from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) for a class of tree-shaped domains Ω with a self-similar fractal boundary previously studied by Mandelbrot and Frame. When the fractal boundary has no self-contact, the results of Jones imply that there exist such extension operators for all $p \in [1, \infty]$. In the case when the fractal boundary self-intersects, this result does not hold. Here, we prove however that extension operators exist for $p < p^*$ where p^* depends only on the dimension of the self-intersection of the boundary. The construction of these operators mainly relies on the self-similar properties of the domains.

2.1 INTRODUCTION

This work deals with some extension results from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ ($1 < p < \infty$) for some domains $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ with a self-similar fractal boundary. The focus will be put on the special case when the boundary of Ω is self-contacting. Such a geometry (see Figure 2.1) can be seen as a bidimensional idealization of the bronchial tree.

We will investigate if the domains Ω introduced below have the $W^{1,p}$ -extension property, for $1 < p < \infty$. In general, a domain $D \subset \mathbb{R}^n$ is said to have the $W^{m,p}$ -extension property for $m \in \mathbb{N}$ and $1 \leq p \leq \infty$ if there exists a bounded linear operator

$$\Lambda : W^{m,p}(D) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

such that $\Lambda u|_D = u$ for all $u \in W^{m,p}(D)$. Such domains are called $W^{m,p}$ -extension domains. A domain that has the $W^{m,p}$ -extension property for all $m \geq 1$ and $p \in [1, \infty]$ is sometimes referred to as a Sobolev extension domain.

It is well known that every Lipschitz domain in \mathbb{R}^n , that is every domain whose boundary is locally the graph of a Lipschitz function, is a Sobolev extension domain. Calderón proved the $W^{m,p}$ -extension property for $m \geq 1$, $p \in (1, \infty)$ (see [Cal61]), and Stein extended the result to the cases $p = 1$ and $p = \infty$ (see [Ste70]).

In [Jon81], Jones improved this result by introducing a class of domains in \mathbb{R}^n called (ε, δ) -domains, every member of which is a Sobolev extension domain. Jones' proof uses as a main

ingredient Whitney’s extension theory. Such domains were introduced by Martio and Sarvas who referred to them as locally uniform domains (see [MS79] and §1.2.3.a). This result is almost optimal in the plane, in the sense that every plane finitely connected Sobolev extension domain is an (ε, δ) -domain, see [Jon81, Maz85]. The case when the domain $D \subset \mathbb{R}^2$ is unbounded has been studied in [VGL79].

In [Kos98], Koskela proved that in the general case, if an open domain $D \subset \mathbb{R}^n$ has the $W^{1,n}$ -extension property, then it has the $W^{1,p}$ -extension property for all $p \geq n$. He also showed that if the embedding $W^{1,p}(D) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\overline{D})$ holds for some $p > n$, then D is a $W^{1,q}$ -extension domain for all $q > p$. The case $p < n$ is not as well understood.

Hajlasz, Koskela and Tuominen proved that every $W^{m,p}$ -extension domain in \mathbb{R}^n for $m \geq 1$ and $1 \leq p < \infty$ is a n -set, as defined in e.g. [JW84], and provided several characterizations of $W^{m,p}$ -extension domains for $1 < p < \infty$, see [HKT08]. They also investigated these questions in the setting of metric measure spaces, see [HKT08].

The domains we consider in the present work do not have the $W^{1,p}$ -extension property for any $p > 2$, and we will study the case when $p < 2$.

We focus on a class of tree-shaped domains Ω in \mathbb{R}^2 with a self-similar fractal boundary Γ^∞ which self-intersects, see for example Figure 2.1. The set Γ^∞ is defined as the unique compact set such that

$$\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty),$$

where f_1 and f_2 are two contracting similitudes with opposite rotation angles $\pm\theta$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$) and contraction ratio $a \in [0, 1)$. This type of fractal sets were first studied by Mandelbrot and Frame in [MF99].

We have seen in paragraph 1.2.1 that there exists a critical ratio a_θ^* dependent on the rotation angle of the similitude such that for every $a < a_\theta^*$, the set Γ^∞ is totally disconnected, and for $a = a_\theta^*$, it is connected. In the first case, the domain Ω is an (ε, δ) -domain and Ω is a Sobolev extension domain. In this chapter, emphasis will be put on the latter case, in which we will see that Ω is not an (ε, δ) -domain and Ω is not a Sobolev extension domain. In this case, the assumptions required in [Jon81] for the construction of Whitney extension operators are not satisfied.

Particular care will be given to the notion of trace on the set Γ^∞ for functions in $W^{1,p}(\Omega)$. We will use two different definitions of traces on Γ^∞ .

- ◊ The first one, referred to as the classical or strictly defined trace below, relies on the notion of the strict definition of a locally integrable function, see for instance [JW84] page 206. For a function u in $W^{1,p}(\Omega)$ or $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, this trace, noted $u|_{\Gamma^\infty}$ below, is defined as its strictly defined counterpart on the subset of Γ^∞ where u is strictly defined.
- ◊ The second one was first introduced in [AT07]. Its construction was recalled in §1.3.3. This trace operator, noted ℓ^∞ below, is obtained by exploiting the self-similarity as the limit of a sequence of operators ℓ^n which map $W^{1,p}(\Omega)$ to piecewise constant functions on a partition of Γ^∞ into 2^n sets whose measure is 2^{-n} . Y. Achdou and N. Tchou provided in [AT10] a characterization of functions in the trace space $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ in terms of Lipschitz functions with jumps (see §1.3.4) that will be helpful in the proof of the main theorems. Embeddings of $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ in some Sobolev spaces on the set Γ^∞ were studied especially in [ADT12], see §2.3.3.

A consequence of the main result of this paper is that these two definitions of trace on Γ^∞ in fact coincide (almost everywhere) on the set Γ^∞ ; this is proved in Chapter 3 (see also [ADT]).

Jonsson and Wallin have proved extension and trace results for Besov and Sobolev spaces on d -sets (see [JW84]). See §1.2.6.b for a definition of the Besov spaces on such sets in the special case of Γ^∞ which is a d -set where d is its Hausdorff dimension. In particular, see [JW84] page 183, $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)_{|\Gamma^\infty} = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ for $p \in (1, \infty)$, where the trace is meant in the classical sense.

The extension part of the theorem mainly relies on Whitney's extension theorem.

On the other hand, It has been proved in [ADT12] that there exists a real number $p^* > 1$ such that p^* only depends on the Hausdorff dimension of the self-intersection of Γ^∞ and

$$\diamond \text{ if } p < p^*, \text{ then } \ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty),$$

\diamond if $p > p^*$, then the previous result does not hold.

The main extension result of this chapter (Theorem B) states that when $p < p^*$, the domains Ω in fact have the $W^{1,p}$ -extension property. To prove this result, we prove in Theorem A that there exists a continuous lifting operator \mathcal{E} in the sense of ℓ^∞ from the trace space on Γ^∞ of functions in $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$: for all $v \in \ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$, $\ell^\infty((\mathcal{E}v)|_\Omega) = v$. This last property, which will be crucial in the proof of Theorem B, would not be guaranteed *a priori* by the lifting operator of Jonsson and Wallin in the classical sense.

An immediate consequence of this extension theorem is that, for $p \in (1, p^*)$, the Sobolev embeddings hold in Ω . Theorem 7 is sharp in the sense that whenever $p > p^*$, Ω is not a $W^{1,p}$ -extension domain, in Remark 2.4.3 below. The case $p = p^*$ is partially discussed in Remark 2.4.3.

Note that the question of extensions or traces naturally arises in boundary value or transmission problems in domains with fractal boundaries. Results in this direction have been given by Mosco and Vivaldi (see [MV03]), Lancia (see [Lano2, Lano3]), and Capitanelli (see [Cap10]) for the Koch flake. Boundary value problems posed in the domains Ω displayed in Figure 2.1 were studied *e.g.* in [AT07], and numerical methods were proposed to compute the solutions in subdomains of Ω . Such a geometry can be seen as a bidimensional idealization of the bronchial tree, for example. The problems studied in the latter papers aim at simulating the diffusion of medical sprays in human lungs.

The chapter is organized as follows: we briefly recall the geometry of the ramified domains we study in Section 2.2. In Section 2.3, we treat the less interesting sub-critical case when $a < a_\theta^*$ and recall the available trace results from [AT10] and [ADT12]. The main results are Theorems A and B which are stated in Section 2.4 and proved in Sections 2.5 and 2.6.

For the ease of the reader, the geometrical lemmas, which are crucial but technical, are proved in Section 2.7 at the end of the chapter.

2.2 THE GEOMETRY

In this section, we briefly recall the geometry of the domains we study. We consider the similitudes f_1 and f_2 defined in (1.3) which depend on the real numbers a, α, β, θ where $0 < a < 1/\sqrt{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and $0 < \theta < \pi/2$.

We still denote Γ^∞ the self-similar invariant of the similitudes f_1 and f_2 :

$$\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty),$$

and we use the same notations as those introduced in §1.2.1. The Hausdorff dimension of Γ^∞ , noted d then writes $\log 2/\log(1/a)$. We recall the definition of the set

$$\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$$

associated with Γ^∞ . Recall the following theorem proved in Chapter 1 (see Theorem 1.2.1).

THEOREM 2.2.1 – *For any θ , $0 < \theta < \pi/2$, there exists a unique positive number $a_\theta^* < 1/\sqrt{2}$ which does not depend on (α, β) such that*

$$\begin{aligned} \text{if } 0 < a < a_\theta^* & \text{ then } \Xi = \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is totally disconnected,} \\ \text{if } a = a_\theta^* & \text{ then } \Xi \neq \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is connected,} \end{aligned} \quad (2.1)$$

see Figure 3 p.15.

As in Chapter 1, the particular geometries of the self-similar sets Γ^∞ and Ξ when $a = a^*$ will play an important role here.

2.2.0.a Characterization of Ξ

We recall the characterization of the set $\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$ detailed in Chapter 1. We know that $\Xi \neq \emptyset$ if and only if $a = a^*$. Let us denote by Λ the vertical axis defined by $\Lambda = \{(x_1, x_2), x_1 = 0\}$ and by O the origin $O = (0, 0)$.

We proved in Chapter 1 that the sequences $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ such that $f_\sigma(O) \in \Lambda$ and that $\sigma(1) = 1$ are characterized by the following property: for all $n \leq 1$, the truncated sequence $\sigma_{\lfloor n}$ achieves the maximum of the abscissa of $f_\tau(O)$ over all $\tau \in \mathcal{A}_n$ such that $\tau(1) = 1$. Moreover, when $a = a^*$, $\Xi \subset \Lambda$.

In Chapter 1, we distinguished two cases, depending on the values of the integer m defined as the smallest integer such that $m\theta \geq \pi/2$ (see (1.15)):

◊ if $m\theta > \pi/2$ and $a = a^*$, then Ξ contains the single point $f_\sigma(O)$, where

$$\sigma = 12^{m+1}(12)^\infty \text{ or } \sigma = 21^{m+1}(21)^\infty, \quad (2.2)$$

◊ if $m\theta = \pi/2$ and $a = a^*$, then

$$\Xi = \{f_\sigma(O), \sigma \in 12^{m+1}(12|21)^\infty\} = \{f_\sigma(O), \sigma \in 21^{m+1}(12|21)^\infty\}, \quad (2.3)$$

which implies that the Hausdorff dimension of the set Ξ is $d/2$.

see §1.2.1 and Example 1.2.1 for the notations.

2.2.0.b The ramified domains

The domains we consider are the domains in the class \mathcal{D} introduced in the Introduction, see also the definitions in §1.2.2. Their construction starts with a base cell Y^0 displayed in Figure 1.3. The domains are obtained by gluing together the closure of the cells $f_\sigma(Y^0)$ for $\sigma \in \mathcal{A}$, see Figure 2.1 below.

For $\sigma \in \mathcal{A}$, we will use the notation $Y^\sigma := f_\sigma(Y^0)$, and $\Omega^\sigma := f_\sigma(\Omega)$.

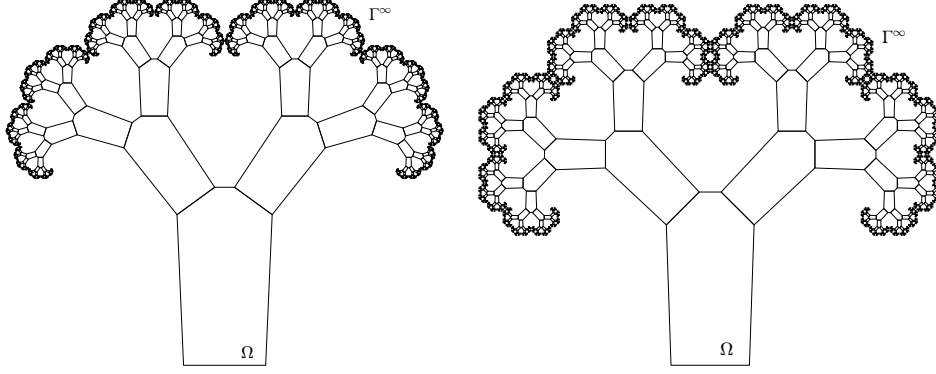


Figure 2.1: The ramified domain Ω for $\theta = \pi/5$ and $\theta = \pi/4$ when $a = a^*$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 1.5$.

As we saw in Chapter 1, by a theorem of Y. Achdou and N. Tchou, we can assume that the open set Ω defined in (1.30) satisfy Assumption 1 p. 57, that is, Ω is a ramified domain as defined in §1.1.2.c.

It can be seen that in the critical case when $a = a^*$, the ramified domains we consider are not (ε, δ) -domains as defined e.g. in [Jon81], but they are John-domains as defined in [MS79] (see also the definitions in §1.2.6).

2.3 EXTENSION AND TRACE RESULTS IN $W^{1,p}(\Omega)$

Hereafter, we consider a domain Ω as defined in Section 1.1.2.c, with θ in $(0, \pi/2)$, $a \leq a^*$ and we suppose that the parameters α, β are such that Assumption 1 is satisfied.

2.3.1 EXTENSION RESULT IN THE CASE $a < a^*$

We first briefly discuss the case when $a < a^*$ and the self-similar set Γ^∞ is totally disconnected. In this case, the ramified domain Ω is an (ε, δ) -domain (see [ATo8], Lemma 1 p.5). Therefore, Jones' extension theorem (see Theorem 1.2.6) yields a continuous extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ for every $p \in (1, \infty)$.

As a consequence of this extension result, the Sobolev embeddings in the Lebesgue spaces verified by Lipschitz domains clearly remain true in the ramified domains for all $a < a^*$.

In the critical case when $a = a^*$, the Sobolev embeddings still hold. This is a general property of the John-domains proved in [Boj88]. We give an alternate proof of this result based on self-similarity for the ramified domain Ω .

PROPOSITION 2.3.1 – For all $a \leq a^*$, the following continuous injections hold

$$\begin{aligned} \text{if } p < 2, \text{ then } W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ for } q \leq \bar{q} := \frac{2p}{2-p}, \\ \text{if } p \geq 2, \text{ then } W^{1,p}(\Omega) &\hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ for } 1 < q < \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Proof. As we saw, the Sobolev embeddings in the ramified domain Ω in the case $a < a^*$ are deduced from the embeddings in \mathbb{R}^2 .

When $a = a^*$, we introduce a transformation of the plan mapping Ω into a sub-critical ramified domain $\tilde{\Omega}$ for which we know that the Sobolev embeddings hold.

Take $\tilde{\theta}$ such that $\theta < \tilde{\theta} < \frac{\pi}{2}$. We know that there exists a ramified domain $\tilde{\Omega}$ in the class \mathcal{D} associated with similitudes \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 with angles $\pm\tilde{\theta}$.

Denote Y^0 and \tilde{Y}^0 the respective base cells of the ramified domains Ω and $\tilde{\Omega}$. We consider a transformation T_0 of the plane mapping Y^0 into \tilde{Y}^0 . We now introduce a transformation T defined by

$$T_{|Y^\sigma} = \tilde{f}_\sigma \circ T \circ f_\sigma^{-1}, \quad (2.5)$$

for all $\sigma \in \mathcal{A}$, where we denote $\tilde{f}_\sigma = \tilde{f}_{\sigma(1)} \dots \tilde{f}_{\sigma(k)}$ for $\sigma \in \mathcal{A}_k$. Note that since f_σ and \tilde{f}_σ have same contraction ratio for every $\sigma \in \mathcal{A}$, $|\text{Jac } T|$ and $|\text{Jac } T^{-1}|$ are bounded by a constant $C > 0$ independent of $\sigma \in \mathcal{A}$.

Take $1 < p < \infty$, for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, introduce the function $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by $\tilde{u} = u \circ T^{-1}$.

Take $u \in W^{1,p}(\Omega)$. If $q \in [1, \infty)$ is such that $W^{1,p}(\tilde{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\tilde{\Omega})$, one has

$$\int_{\Omega} |u(x)|^q dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \int_{Y^\sigma} |u(x)|^q dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \int_{Y^\sigma} |\tilde{u} \circ T(x)|^q dx \leq C \sum_{\sigma \in \mathcal{A}} \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}|^q.$$

Since C is independent of σ , we get

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C^{1/q} \|\tilde{u}\|_{L^q(\tilde{\Omega})}.$$

The Sobolev embedding in $\tilde{\Omega}$ implies the existence of a constant C' such that

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^q(\Omega)} &\leq C' \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} = C' \left(\int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{u}(x)|^p dx + \int_{\tilde{\Omega}} |\nabla \tilde{u}(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= C' \left(\int_{\tilde{\Omega}} |u \circ T^{-1}(x)|^p dx + \int_{\tilde{\Omega}} |{}^t(\text{Jac } T^{-1})(\nabla u) \circ T^{-1}|^p dx \right)^{1/p} \\ &\lesssim \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

and we deduce the Sobolev embeddings in Ω from those in $\tilde{\Omega}$. \square

2.3.2 CHARACTERIZATION OF THE TRACES ON Γ^∞ OF FUNCTIONS IN $W^{1,p}(\Omega)$

Recall the construction of the self-similar trace operator ℓ^∞ from $W^{1,p}(\Omega)$ to $L^p_\mu(\Gamma^\infty)$. We start by constructing a sequence $(\ell^n)_n$ of approximations of the trace operator ; ℓ^n is defined by

$$\ell^n(u) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma} \mathbb{1}_{f_\sigma(\Gamma^\infty)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \quad (2.6)$$

where $\langle u \rangle_{\Gamma^\sigma} = \frac{1}{|\Gamma^\sigma|} \int_{\Gamma^\sigma} u dx$. We saw in Chapter 1 that the sequence $(\ell^n)_n$ converges in the space $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p_\mu(\Gamma^\infty))$ to a trace operator ℓ^∞ .

We also recall the following theorem proved in [AT10] which provides a characterization of the trace space $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ and will prove very useful in the proof of the main theorems.

THEOREM 2.3.1 – For a given θ , $0 \leq \theta < \pi/2$, if (α, β) satisfies Assumption 1 and Ω is constructed as in § 1.1.3.b, with $1/2 \leq a \leq a^*$, then for all p , $1 < p < \infty$,

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty). \quad (2.7)$$

2.3.3 JLip VERSUS SOBOLEV SPACES ON Γ^∞

We briefly recall the result obtained in Chapter 1 (see also [ADT12]), which compares the $JLip$ spaces and the Sobolev spaces on Γ^∞ .

THEOREM 2.3.2 – There exists a real number $p_\theta^* > 0$ depending only on the dimension of the self-intersection of the fractal set Γ^∞ , such that

◊ if $a = a^*$ and $1 < p < p_\theta^*$, then

$$JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1 - \frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty), \quad (2.8)$$

◊ if $a = a^*$ and $p > p_\theta^*$, then

$$JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_{1 - \frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty). \quad (2.9)$$

The number p_θ^* is given by:

$$\begin{aligned} p_\theta^* &= 2 && \text{if } \theta \notin \{\frac{\pi}{2k}, k > 0\}, \\ p_\theta^* &= 2 - d/2 && \text{if } \theta = \frac{\pi}{2k}, k > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Together with Theorem 2.3.1, Theorem 2.3.2 provides another characterization of the trace space $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ when $p < p_\theta^*$.

2.4 THE MAIN EXTENSION RESULT

2.4.1 THE EXTENSION THEOREM

We will focus on the case $a = a^*$ in the rest of the chapter. As was seen in paragraph 1.2.2.a, the domain Ω is not an (ε, δ) -domain in this case, and the argument of §2.3.1 does not hold. However, it will be proved in Theorem B that the extension result is true when $1 < p < 2$ for angles $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ such that $m\theta > \frac{\pi}{2}$, and when $1 < p < 2 - \frac{d}{2}$ for angles such that $m\theta = \frac{\pi}{2}$, where m has been introduced on (1.15). It will also be seen (see Remark 2.4.3) that if $p > 2$ in the first case, and if $p > 2 - \frac{d}{2}$ in the second case, the extension result cannot hold.

The proof of the extension theorem will rely on Theorem A which states that when $1 < p < p_\theta^*$, there exist liftings in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ for functions in $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ (see (2.7)), where the trace is meant in the sense of the operator ℓ^∞ . The proof of this result relies on the construction of liftings for the Haar wavelets on Γ^∞ , and on Theorem 2.3.1.

REMARK 2.4.1 – Using Theorem 2.3.2 above and the trace theorem of Jonsson and Wallin stating that $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty) = W^{1,p}(\mathbb{R}^2)|_{\Gamma^\infty}$ for $p \in (1, \infty)$, it can be proved that

$$JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = W^{1,p}(\mathbb{R}^2)|_{\Gamma^\infty}, \quad (2.11)$$

where we recall that the trace on Γ^∞ is meant in the classical sense (see §1.2.5). It should be noted that Theorem A below differs from the previous result in that the trace is meant in the sense of ℓ^∞ , which will be of particular importance, especially in the proof of Theorem B below.

The method proposed in the proof of Theorem B uses the lifting of Theorem A and the self-similar properties of the trace operator. Another choice could have been to work with the Whitney extension operator of (2.11), but we then could not have exploited the self-similar properties of the geometry as is done to prove Theorem B.

In Chapter 3, Theorems A and B below are key ingredients in the proof that $u|_{\Gamma^\infty} = \ell^\infty(u)$ μ -almost everywhere for all $p > 1$ and $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

The second result (Theorem B) states that there exists a continuous extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ when $1 < p < p_\theta^*$. The proof consists in the construction of the extension operator, with the help of the lifting introduced in Theorem A.

THEOREM A – 1. If $\theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$ and $p \in (1, 2)$, then there exists a continuous linear lifting operator \mathcal{E} from $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ in the sense of ℓ^∞ , i.e.

$$\forall v \in JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty), \quad \ell^\infty((\mathcal{E}v)|_\Omega) = v, \quad (2.12)$$

such that for every $\sigma \in \mathcal{A}$, $\mathcal{E}g_\sigma \equiv -1$ on $f_{\sigma 1}(\Omega)$ and $\mathcal{E}g_\sigma \equiv 1$ on $f_{\sigma 2}(\Omega)$, where g_σ is the Haar wavelet associated to the string σ .

2. If $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$ and $p \in (1, 2 - \frac{d}{2})$, then the conclusion of 1. remains true.

REMARK 2.4.2 – If $1 < p < p_\theta^*$ and $u \in W^{1,p}(\Omega)$, then Theorem A implies that the function $\bar{u} = \mathcal{E}(\ell^\infty(u))$ satisfies $\ell^\infty(\bar{u}|_\Omega) = \ell^\infty(u)$.

We will deduce the main extension result of this chapter:

THEOREM B – 1. If $\theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$ and $p \in (1, 2)$, then there exists a continuous linear operator \mathcal{F} from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ such that, for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{F}u|_\Omega = u$.

2. If $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$ and $p \in (1, 2 - \frac{d}{2})$, then the above extension result remains true.

In other words, Ω is a $W^{1,p}$ -extension domain when $p \in (1, p_\theta^*)$.

REMARK 2.4.3 – The extension result of Theorem B is sharp in the following sense. As was seen in Remark 2.4.1, it is proved a posteriori in [ADT] that the trace operator ℓ^∞ coincides with the trace operator introduced by Jonsson and Wallin in [JW84] μ -almost everywhere. Therefore, if Ω is a $W^{1,p}$ -extension domain for some $p > p_\theta^*$, then, by the trace theorem in [JW84] (p.182), $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$, which contradicts (2.9).

In the case when $\theta \notin \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$, we have $p_\theta^* = 2$, and we can conclude that Ω does not have the W^{1,p_θ^*} -extension property: if it did, then Koskela's theorem (see Theorem 1.2.4 and [Kos98]) would imply that Ω has the $W^{1,p}$ -extension property for all $p > p_\theta^*$. The case $\theta \in \frac{\pi}{2\mathbb{N}}$ is open.

2.4.2 A DENSITY RESULT

As a direct consequence of Theorem B, we obtain the following density result.

THEOREM 2.4.1 – *If $a \leq a^*$, then the space $C^\infty(\overline{\Omega})$ is dense in $W^{1,p}(\Omega)$ for all $p < p_\theta^*$.*

In the case when $m\theta > \pi/2$, the result is sharp in the sense that if $p > p_\theta^* = 2$, then the space $C^\infty(\overline{\Omega})$ is not dense in $W^{1,p}(\Omega)$. Indeed, the Sobolev embedding theorem implies that if $u \in W^{1,p}(\Omega)$, then u is Hölder continuous in Ω . Since there is a lifting in $W^{1,p}(\Omega)$ of e.g. the Haar mother wavelet on Γ^∞ , we deduce that the density result is not true in that case.

The case $p = 2$ has been studied in the case of multiple cones in [AB10], where the authors prove that the space $C^\infty(\overline{\omega})$ is dense in $H^1(\omega)$ where ω is the open set inside multiple cones with same vertex (see also [CDN99], Lemma 2.4).

It seems that a similar proof can apply to the ramified domains in the critical case $a = a^*$, at least for those angles θ such that $m\theta > \frac{\pi}{2}$, for which we could prove that $C^\infty(\overline{\Omega})$ is dense in $H^1(\Omega)$.

2.5 PROOF OF THE LIFTING THEOREM

In this section, we prove Theorem A.

2.5.1 PROOF OF POINT 1

Recall that in this case, $\theta \notin \{\frac{\pi}{2k}, k > 0\}$, and $m\theta > \frac{\pi}{2}$, where m was introduced in (1.15).

We start by lifting the Haar wavelets on Γ^∞ into functions in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < \infty$. This will yield a natural lifting for functions in $JLip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$, defined as the lifting of their expansion in the Haar wavelets basis.

2.5.1.a Lifting of the Haar wavelets

In this section, we define liftings \tilde{g}_σ of the Haar wavelets g_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$, such that for all $p \in (1, \infty)$, $\tilde{g}_\sigma \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, and the pairwise intersections of the sets $\text{Supp } \nabla \tilde{g}_\sigma$ ($\sigma \in \mathcal{A}$) are contained in some cones centered at the points $f_\eta(A)$ ($\eta \in \mathcal{A}$), where A is the single point contained in $f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$.

More precisely, define C to be the vertical cone centered at A with angle φ_0 small enough so that C does not intersect $f_1(\Omega)$ or $f_2(\Omega)$. For this, it is enough to take

$$\varphi_0 < \min(m\theta - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - (m-1)\theta).$$

We impose that the liftings \tilde{g}_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$ should satisfy the following condition: if $\sigma \neq \tau$, then

$$\text{Supp } \nabla \tilde{g}_\sigma \cap \text{Supp } \nabla \tilde{g}_\tau \subset \bigcup_{\eta \in \mathcal{A}} f_\eta(C). \quad (2.13)$$

Proposition 2.5.2 below will imply in particular that this condition is verified.

We proceed in three steps: we successively define liftings for the constants, the mother Haar wavelet, and the other Haar wavelets.

Lifting of the constants We will introduce a lifting χ of the constant function 1 on Γ^∞ that will allow to define liftings for the Haar wavelets by self-similarity.

The proof of Lemma 1.4.3 in Chapter 1 (see especially Figure 1.5) can be easily modified to obtain the existence of a constant $c > 0$ such that for all $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ($n > 0$) with $\sigma \notin \mathcal{B}$,

$$d(f_\sigma(\Omega), C) > ca^n, \quad (2.14)$$

where

$$\mathcal{B} = \{\sigma \in \mathcal{A}, \sigma \text{ is a prefix of } 12^{m+1}(12)^\infty \text{ or } 21^{m+1}(21)^\infty\}, \quad (2.15)$$

see paragraph 1.2.1 for the notations. Recall that the elements of \mathcal{B} are those strings $\sigma \in \mathcal{A}$ such that $d(f_\sigma(\Omega), \Lambda) = 0$ where Λ is the vertical axis given by $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = 0\}$ (cf. §2.2).

Define \mathcal{H} to be the horizontal line tangent to the upper part of Γ^∞ . Write $\delta = d(C \cap \mathcal{H}, \Omega)$, note that $\delta > 0$.

We consider a smooth compactly supported function χ on \mathbb{R}^2 such that $\chi = 1$ on a neighborhood of the closure of the ramified domain Ω , and such that χ is symmetric with respect to the axis Λ . Write $d_1 = d(\Omega, \text{Supp } \nabla \chi)$ and $d_2 = \sup\{d(x, \Omega), x \in \text{Supp } \chi\}$. We also impose that

$$d_2 < \delta \quad (2.16)$$

$$d_2 < c \quad (2.17)$$

$$d_1 > ad_2, \quad (2.18)$$

see Figure 2.2.

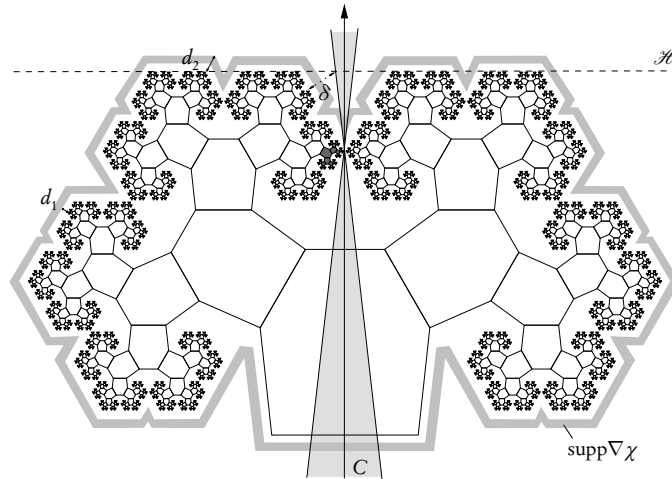


Figure 2.2: The function χ

The condition (2.18) will play an important role in the proof that (2.13) is fulfilled. Conditions (2.17) and (2.16) will help dealing with the pairwise intersections of the sets $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma$ within the cones.

Lifting of the Haar mother wavelet We introduce the polar coordinates (r, φ) centered at the point A such that the vertical half-line starting from A and pointing up is given by $\{\varphi = 0\}$. Define the function ψ as follows: if $(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times (-\pi, \pi]$,

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varphi}{\varphi_0}\right) & \text{if } |\varphi| \leq \varphi_0, \\ 1 & \text{if } \varphi_0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\pi - \varphi}{\varphi_0}\right) & \text{if } \pi - |\varphi| \leq \varphi_0, \\ 0 & \text{if } -\pi + \varphi_0 < \varphi < -\varphi_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Note that the cone C is the support of $\nabla \psi$.

Define the lifting \bar{g}_0 of the Haar mother wavelet by:

$$\bar{g}_0 = \psi \cdot (\chi \circ f_1^{-1}) - (1 - \psi) \cdot (\chi \circ f_2^{-1}). \quad (2.20)$$

Note that $\bar{g}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ if and only if $p < 2$.

Lifting of the Haar wavelets We use the function \bar{g}_0 and the self-similarity to define the liftings of the other Haar wavelets. We first define the natural lifting \tilde{g}_σ of g_σ , for $\sigma \in \mathcal{A}_n$ by

$$\tilde{g}_\sigma = 2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}.$$

Note that the functions \tilde{g}_σ , $\sigma \in \mathcal{A}$ do not satisfy condition (2.13) (take for example $\sigma = 1$ and $\tau = 2$). Hence, we will define cut-off functions whose gradients are supported in the cones $f_\tau(C)$, $\tau \in \mathcal{A}$.

Take $\sigma \in \mathcal{A} \setminus \{\epsilon\}$, we define for any prefix $\tau \in \mathcal{A}_k$ of σ such that $\tau \neq \sigma$,

$$\gamma_\tau^\sigma = \mathbb{1}_{\sigma(k+1)=1} \psi \circ f_\tau^{-1} + \mathbb{1}_{\sigma(k+1)=2} (1 - \psi) \circ f_\tau^{-1}. \quad (2.21)$$

Note that the function γ_τ^σ is 1 on one connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus f_\tau(C)$, and 0 on the other. This definition is based on the observation that for all prefix $\tau \in \mathcal{A}_k$ of σ such that $\tau \neq \sigma$, $\Omega^\sigma \subset f_\tau(\{x_1 < 0\})$ if $\sigma(k+1) = 1$, and $\Omega^\sigma \subset f_\tau(\{x_1 > 0\})$ if $\sigma(k+1) = 2$.

For $\sigma \in \mathcal{A}$, we introduce the set $\mathcal{M}(\sigma)$ of all those prefixes τ of σ such that $f_\tau(A) \in \Gamma^{\infty, \sigma}$. It is easily checked that

$$\mathcal{M}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{A}, \sigma = \tau\sigma', \sigma' \in \mathcal{B}\}, \quad (2.22)$$

where \mathcal{B} is defined in (2.15). If $\tau \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, then the function \tilde{g}_σ needs to be multiplied by the cut-off function γ_τ^σ .

REMARK 2.5.1 – 1. If $\sigma \in \mathcal{B}$, then $\epsilon \in \mathcal{M}(\sigma)$.

2. For all $n > 0$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$, one has $\sigma, \sigma|_{n-1} \in \mathcal{M}(\sigma)$, since the empty string and the string $\sigma(n) \in \mathcal{A}_1$ belong to \mathcal{B} .

We can now define the cut off lifting \bar{g}_σ of the Haar wavelet g_σ , $\sigma \in \mathcal{A}_n$:

$$\bar{g}_\sigma = \left(\prod_{\tau \in \mathcal{M}(\sigma), \tau \neq \sigma} \gamma_\tau^\sigma \right) \tilde{g}_\sigma. \quad (2.23)$$

Example We present an example where $\theta = \frac{\pi}{3}$ (hence $m = 2$), and $\sigma = 12^3 12$. Therefore, $\mathcal{M}(\sigma) = \{\epsilon, 12^3, 12^3 1, 12^3 12\}$.

The gray area in Figure 2.3 shows the support of $\nabla \bar{g}_\sigma$. We have only represented the domain Ω^σ , which corresponds to the small area in dark gray in Figure 2.2.

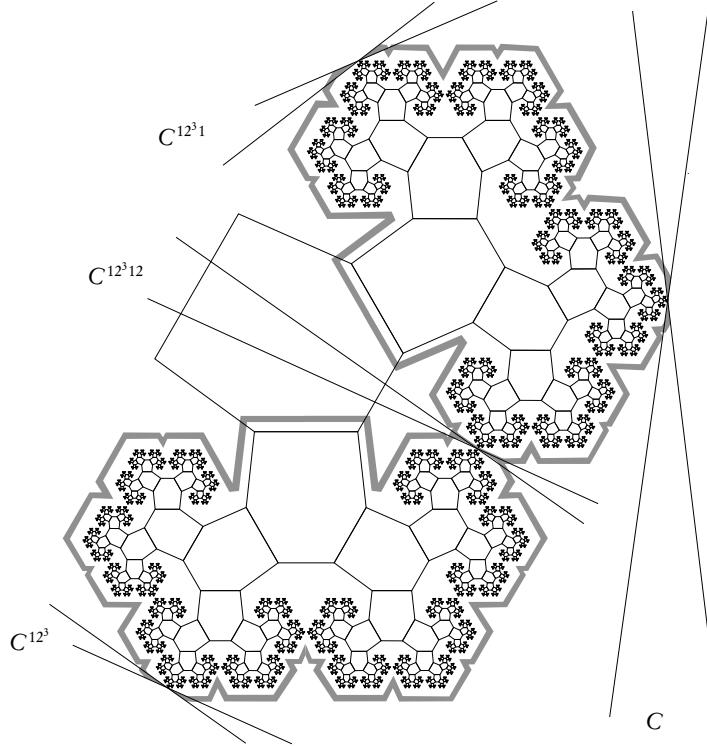


Figure 2.3: The support of $\nabla \bar{g}_\sigma$ for $\theta = \frac{\pi}{3}$ and $\sigma = 12^{m+1} 12 = 12^3 12$ (represented by the gray area). In this case, $\mathcal{M}(\sigma) = \{\epsilon, 12^3, 12^3 1, 12^3 12\}$.

In what follows, we will need a uniform bound on the cardinal of $\mathcal{M}(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{A}$:

LEMMA 2.5.1 – For all $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$\#\mathcal{M}(\sigma) \leq 4. \quad (2.24)$$

Proof. Take $n > 0$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$. If $n \leq 2$, then the result is clear. Suppose $n > 2$, we first note that $\sigma_{\uparrow n-1}, \sigma \in \mathcal{M}(\sigma)$ by point 2 in Remark 2.5.1. Let us look for elements of $\mathcal{M}(\sigma)$ distinct from $\sigma_{\uparrow n-1}$ and σ .

First assume that $\sigma(n) = \sigma(n-1)$, suppose for example $\sigma(n) = 2$. Then, any suffix σ' of σ such that $\sigma' \in \mathcal{B}$ is of the form 12^k with $k \leq m+1$. If there were two of them, then one of them would be a suffix of the other, which is impossible. Therefore, in this case, $\#\mathcal{M}(\sigma) \leq 3$.

If $\sigma(n) \neq \sigma(n-1)$, then $(\sigma(n-1), \sigma(n)) \in \mathcal{B}$, which implies that $\sigma_{\uparrow n-2} \in \mathcal{M}(\sigma)$. Let us look for a string $\sigma' \in \mathcal{M}(\sigma)$ such that $\sigma' \in \mathcal{A}_k$ with $k > 2$. Suppose for example $\sigma(n) = 2$. Then σ' must be of the form $12^{m+1}(12)^l$ or $21^{m+1}(21)^l 2$, for some $l > 0$. As for the previous case, were

there two such strings, one of them would be a suffix of the other, which is impossible. Hence, in this case, $\#\mathcal{M}(\sigma) \leq 4$. \square

PROPOSITION 2.5.1 – For $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $p < 2$,

$$\|\nabla \bar{g}_\sigma\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \simeq 2^n \left(\frac{p}{2} + \frac{2-p}{d} \right) \quad (2.25)$$

Proof. First, we note that $\|2^{\frac{n}{2}} \nabla(\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p = 2^{\frac{np}{2}} a^{n(2-p)} \|\nabla \bar{g}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \simeq 2^n \left(\frac{p}{2} + \frac{2-p}{d} \right)$.

The other terms to consider are of the form $\|2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cdot \nabla(\psi \circ f_\tau^{-1})\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p$, where $\tau \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. One has

$$\begin{aligned} \|2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cdot \nabla(\psi \circ f_\tau^{-1})\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p &\leq 2^{\frac{np}{2}} \|\nabla(\psi \circ f_\tau^{-1})\|_{L^p(f_\sigma(\text{Supp } \bar{g}_0))}^p \\ &= 2^{\frac{np}{2}} a^{k(2-p)} \|\nabla \psi\|_{L^p(f_{\sigma'}(\text{Supp } \bar{g}_0))}^p, \end{aligned} \quad (2.26)$$

where $\sigma = \tau\sigma'$, $\tau \in \mathcal{A}_k$ and $\sigma' \in \mathcal{B}$ (see (2.22)). Denote $R = \text{diam Supp } \bar{g}_0$, note that $\text{diam } f_{\sigma'}(\text{Supp } \bar{g}_0) = a^{n-k}R$. Since $\sigma' \in \mathcal{B}$, one has $A \in f_{\sigma'}(\text{Supp } \bar{g}_0)$. Recall that $\text{Supp } \nabla \psi \subset C$. Switching to polar coordinates centered at the point A , we get

$$\|\nabla \psi\|_{L^p(f_{\sigma'}(\text{Supp } \bar{g}_0))}^p \lesssim \int_{\Phi} \int_0^{a^{n-k}R} \frac{1}{r^p} r \, dr \, d\varphi \simeq \int_0^{a^{n-k}R} \frac{dr}{r^{p-1}} \simeq a^{(2-p)(n-k)},$$

where $\Phi = (-\varphi_0, \varphi_0) \cup (\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0)$. Together with (2.26), this achieves the proof since $a^d = 2$. \square

From Proposition 2.5.1, we deduce that $\bar{g}_\sigma \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ for $p < 2$.

2.5.1.b Geometrical results

The following geometrical results will be crucial in the proof of Theorem A. The proofs of these results rely on simple but technical geometrical arguments and have been postponed to Section 2.7 for the ease of the reader.

We introduce the truncated cones $S = C \cap \text{Supp } \bar{g}_0$ and $S^\tau = f_\tau(S)$ for $\tau \in \mathcal{A}$. Define the set $\mathcal{S} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} S^\tau$ to be the union of these truncated cones. We also define

$$F = \text{Supp } \nabla \bar{g}_0 \setminus C, \quad (2.27)$$

and $F^\tau = f_\tau(F)$ for $\tau \in \mathcal{A}$.

REMARK 2.5.2 – Condition (2.16) implies by a simple geometric argument that S lies in the convex hull of the ramified domain Ω (see Figure 2.2).

Note that, for $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \subset F^\sigma \cup \left(\bigcup_{\tau \in \mathcal{M}(\sigma)} S^\tau \right). \quad (2.28)$$

Proposition 2.5.2 below states a stronger version of condition (2.13).

PROPOSITION 2.5.2 – If $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and $\sigma \neq \tau$, then

$$(\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \cap \text{Supp } \nabla \bar{g}_\tau) \setminus \mathcal{S} = \emptyset. \quad (2.29)$$

Proposition 2.5.3 below justifies in a way the definition of the cut-off functions γ_τ^σ .

PROPOSITION 2.5.3 – If $\sigma \in \mathcal{A}$ and $\tau \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, then

$$\bar{g}_\sigma = 2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \gamma_\tau^\sigma \text{ on } S^\tau. \quad (2.30)$$

Propositions 2.5.4 and 2.5.5 below describe the case when, for a given $\tau \in \mathcal{A}$, $\nabla(\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})$ or $\nabla \bar{g}_\sigma$ are not identically zero on S^τ .

PROPOSITION 2.5.4 – There exists a constant $C > 0$ such that for all $\tau \in \mathcal{A}$ and $x \in S^\tau$,

$$\#\{\sigma \in \mathcal{A}, \tau \in \mathcal{M}(\sigma), \nabla(\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})(x) \neq 0\} \leq C.$$

PROPOSITION 2.5.5 – If $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and $\tau \notin \mathcal{M}(\sigma)$, then $\nabla \bar{g}_\sigma \equiv 0$ on S^τ .

REMARK 2.5.3 – In particular, if $\nabla \bar{g}_\sigma \not\equiv 0$ on S^τ , then τ is a prefix of σ .

2.5.1.c Proof of point 1 in Theorem A

We start by stating a discrete Hardy inequality that will prove useful in the proof of Theorem A.

LEMMA 2.5.2 : discrete Hardy inequality, [JW84], page 121, Lemma 3 – If $p \geq 1$, for any $\gamma > 0$ and $a \in (0, 1)$, there exists a constant C such that, for any sequence of positive real numbers $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a^{\gamma n} \left(\sum_{k \leq n} c_k \right)^p \leq C \sum_{n \in \mathbb{N}} a^{\gamma n} c_n^p. \quad (2.31)$$

Proof of point 1 in Theorem A. We first suppose that $\langle v \rangle_{\Gamma^\infty} = \int_{\Gamma^\infty} v \, d\mu = 0$. Take $v \in \mathcal{J}Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p, 0; \Gamma^\infty)$. The function v then reads $v = \sum_n \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \beta_\sigma \mathfrak{g}_\sigma$ where the β_σ are the coefficients of v in the Haar wavelet basis of Γ^∞ . We define the operator \mathcal{E} by setting

$$\mathcal{E}v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \beta_\sigma \bar{g}_\sigma. \quad (2.32)$$

Recall that \mathcal{S} is the union of all the truncated cones S^τ , $\tau \in \mathcal{A}$. By Proposition 2.5.2,

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathcal{E}v)\|_{L^p(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S})}^p &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \beta_\sigma \nabla \bar{g}_\sigma(x) \right|^p dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |\beta_\sigma|^p \int_{\text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus \mathcal{S}} |\nabla \bar{g}_\sigma(x)|^p dx \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{n \left(\frac{p}{2} + \frac{p}{d} - \frac{2}{p} \right)} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} |\beta_\sigma|^p \\ &= \|v\|_{\mathcal{J}Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p, 0; \Gamma^\infty)}^p \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\|\nabla(\mathcal{E}v)\|_{L^p(S)}^p = \int_S \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} \beta_\sigma \nabla \bar{g}_\sigma(x) \right|^p dx = \sum_{\tau \in \mathcal{A}} \int_{S^\tau} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} \beta_\sigma \nabla \bar{g}_\sigma(x) \right|^p dx.$$

Take $k \in \mathbb{N}$ and $\tau \in \mathcal{A}_k$. By Proposition 2.5.5, if $\sigma \in \mathcal{A}'_n$ ($n \in \mathbb{N}$) is such that $\nabla \bar{g}_\sigma \not\equiv 0$ in S^τ , then $\tau \in \mathcal{M}(\sigma)$. Therefore, by Proposition 2.5.3, $\gamma_{\tau'}^\sigma \equiv 1$ in S^τ for any $\tau' \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, which implies that \bar{g}_σ coincides with $2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \gamma_\tau^\sigma$ in S^τ . Therefore,

$$\begin{aligned} \int_{S^\tau} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} \beta_\sigma \nabla \bar{g}_\sigma(x) \right|^p dx &= \int_{S^\tau} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n, \tau \in \mathcal{M}(\sigma)} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \nabla \left((\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}) \cdot \gamma_\tau^\sigma \right)(x) \right|^p dx \\ &\lesssim I_1^\tau + I_2^\tau, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} I_1^\tau &= \int_{S^\tau} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n, \tau \in \mathcal{M}(\sigma)} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \nabla (\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})(x) \right|^p dx \\ I_2^\tau &= \int_{S^\tau} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n, \tau \in \mathcal{M}(\sigma)} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}(x) \nabla \gamma_\tau^\sigma(x) \right|^p dx. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Let us first consider I_1^τ . By Proposition 2.5.4, one has:

$$\begin{aligned} I_1^\tau &\leq C^{p-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}'_n \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} 2^{\frac{np}{2}} |\beta_\sigma|^p \int_{S^\tau} |\nabla (\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})(x)|^p dx \\ &\leq C^{p-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{np}{2}} a^{(2-p)n} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} |\beta_\sigma|^p \int_{S^\tau} |\nabla \bar{g}_0(x)|^p dx, \end{aligned} \quad (2.34)$$

where C is the constant in Proposition 2.5.4. Therefore,

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \mathcal{A}} I_1^\tau &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{np}{2}} a^{(2-p)n} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} |\beta_\sigma|^p \sum_{\tau \in \mathcal{A}} \int_{S^\tau} |\nabla \bar{g}_0(x)|^p dx \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{np}{2}} a^{(2-p)n} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n} |\beta_\sigma|^p \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{g}_0(x)|^p dx \\ &\lesssim \|v\|_{Lip(1-\frac{2-d}{p}, p, p, \vartheta; \Gamma^\infty)}^p. \end{aligned} \quad (2.35)$$

We are left with dealing with I_2^τ . Denote $\Phi = (-\varphi_0, \varphi_0) \cup (\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0)$. We resort to a polar change of variables centered at the point $f_\tau(A)$ such that the vertical half-line starting from the point $f_\tau(A)$ and pointing up is given by $\{\varphi = 0\}$:

$$I_2^\tau \lesssim \int_0^\infty \int_\Phi \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_n, \tau \in \mathcal{M}(\sigma)} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}(r e^{i\varphi}) \right|^p r^{1-p} d\varphi dr, \quad (2.36)$$

since for $r > 0$ and $\varphi \in \Phi$, $|\nabla \gamma_\tau^\sigma(r e^{i\varphi})| \lesssim \frac{1}{r}$.

Define $R = \text{diam Supp } \bar{g}_0$. If $\tau \in \mathcal{M}(\sigma)$, then $f_\tau(A) \in \overline{\Omega^\sigma} \subset \text{Supp } \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}$, by the definition of $\mathcal{M}(\sigma)$ in (2.22). Therefore, if $\text{Supp } \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cap C_r(f_\tau(A)) \neq \emptyset$ where $C_r(f_\tau(A))$ is the circle centered at $f_\tau(A)$ with radius r , then $r \leq a^n R$, i.e. $n \leq N_r$ where $N_r = \frac{\log r/R}{\log a}$. Hence

$$\begin{aligned} I_2^\tau &\lesssim \int_0^{a^k R} \int_\Phi \left| \sum_{n=k}^{[N_r]} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n, \tau \in \mathcal{M}(\sigma)} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}(r e^{i\varphi}) \right|^p r^{1-p} d\varphi dr \\ &\lesssim \int_0^{a^k R} \left(\sum_{n=k}^{[N_r]} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} 2^{\frac{n}{2}} |\beta_\sigma| \right)^p r^{1-p} dr. \end{aligned}$$

Recall that if $\tau \in \mathcal{M}(\sigma)$, then σ is of the form $\tau\sigma'$ with $\sigma' \in \mathcal{B}$. Consequently,

$$I_2^\tau \lesssim \int_0^{a^k R} \left(\sum_{n=0}^{[N_r^k]} \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}} 2^{\frac{n+k}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)^p r^{1-p} dr,$$

where $N_r^k = N_r - k = \frac{\log(r/(a^k R))}{\log a}$. Therefore, the change of variable $\rho = N_r^k$ yields:

$$\begin{aligned} I_2^\tau &\lesssim \int_0^\infty a^{(\rho+k)(2-p)} \left(\sum_{n=0}^{[\rho]} \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}} 2^{\frac{n+k}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)^p d\rho \\ &\leq \sum_{m=0}^\infty a^{(m+k)(2-p)} \left(\sum_{n=0}^m \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}} 2^{\frac{n+k}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)^p, \end{aligned}$$

since $\rho \mapsto a^{(\rho+k)(2-p)} \left(\sum_{n=0}^{[\rho]} \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}} 2^{\frac{n}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)$ is increasing. Then, by the Hardy inequality of

Lemma 2.5.2,

$$I_2^\tau \lesssim \sum_{m=0}^\infty a^{(m+k)(2-p)} 2^{\frac{(m+k)p}{2}} \sum_{\sigma' \in \mathcal{B}} |\beta_{\tau\sigma'}|^p = \sum_{m=k}^\infty a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_m \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} |\beta_\sigma|^p. \quad (2.37)$$

Therefore, we obtain:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \mathcal{A}} I_2^\tau &\lesssim \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_k} \sum_{m=k}^\infty a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_m \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} |\beta_\sigma|^p \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_m} \sum_{k=0}^m \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{A}_k \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} |\beta_\sigma|^p \\ &\lesssim \sum_{m \in \mathbb{N}} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_m} |\beta_\sigma|^p, \end{aligned} \quad (2.38)$$

since $\#\mathcal{M}(\sigma) \leq 4$ by Lemma 2.5.1, which shows that $\sum_{\tau \in \mathcal{A}} I_2^\tau \lesssim \|v\|_{Lip(1-\frac{2-d}{p}, p, p, 0; \Gamma^\infty)}^p$.

Finally, if $\langle v \rangle_{\Gamma^\infty} \neq 0$, then we get the desired result by taking

$$\mathcal{E}v = \langle v \rangle_{\Gamma^\infty} \chi + \mathcal{E}(v - \langle v \rangle_{\Gamma^\infty}). \quad \square$$

2.5.2 PROOF OF POINT 2

We will proceed in the same manner as we did in the proof of point 1 in Theorem A. The extensions of the Haar wavelets will differ since the set $\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$ is now infinite.

2.5.2.a Lifting of the Haar wavelets

Define $\alpha_1 = d(\text{conv}(\Omega^{11}), \mathcal{H})$, where we recall that \mathcal{H} is the line tangent to the upper part of Γ^∞ (see Figure 2.2). It has been proved in Lemma 1.4.1 that $\alpha_1 > 0$. It has also been seen in Lemma 1.4.3 that there exists a constant α_2 such that for all $\sigma \notin \mathcal{B}$ such that $12^{m+1}, 21^{m+1}$ are not prefix of σ ,

$$d(\text{conv}(\Omega^\sigma), \Lambda) > \alpha_2. \quad (2.39)$$

Let A be the limit point of the string $12^{m+1}(12)^\infty$ and B the limit point of $12^{m+1}(21)^\infty$, see figure 2.4. The points A and B are respectively the upper and lower ends of the set Ξ . Take $\varphi_0 > 0$ such that:

1. $\varphi_0 < \theta$,
2. φ_0 is small enough so that the vertical open half-cones C_u centered at A and C_l centered at B with common angle φ_0 , as in figure 2.4, do not intersect $f_1(\Omega)$ or $f_2(\Omega)$ (see Figure 2.4),
3. $\varphi_0 < \min(\alpha_1/2R, \alpha_2/2R)$, where $R = \text{diam } \Omega$.

Condition 3 will be useful in the proof of the geometrical results below.

We introduce the points $M_1 = f_{12^{m+1}12(21)^\infty}(O)$ and $M_2 = f_{12^{m+1}21(12)^\infty}(O)$. Call D the diamond-shaped intersection of the vertical open half-cones with respective vertices M_1 and M_2 and with common angle φ_0 , as in figure 2.4. Call M_3 and M_4 the other two vertices of D , see figure 2.4. Call $D^0 = f_{12^{m+1}}^{-1}(D)$ and $D^\eta = f_\eta(D^0)$ for $\eta \in \mathcal{A}$. Note that $D = D^{12^{m+1}}$. Write

$$\mathcal{B}^+ = 12^{m+1}(12|21)^*,$$

and define $M_i^\eta = f_\eta(f_{12^{m+1}}^{-1}(M_i))$ for $i = 1, 2$ and $\eta \in \mathcal{B}^+$; note that M_1^η and M_2^η are vertices of the diamond D^η . We introduce the set $\mathcal{D} = \bigcup_{\eta \in \mathcal{B}^+} D^\eta$, and we define

$$C = \overline{C_u \cup C_l \cup \mathcal{D}}. \quad (2.40)$$

The set C corresponds to the gray area in the right part of Figure 2.4, and will play the part of the cone C defined in paragraph 2.5.1.a for the proof of point 1.

In view of (2.3), introduce the set $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ such that $\sigma \in \mathcal{B}$ if and only if one of the following two conditions is satisfied:

- (i) σ is a prefix of 12^m or 21^m ,
 - (ii) $\sigma \in (12^{m+1}|21^{m+1})(12|21)^* \cup (12^{m+1}|21^{m+1})(12|21)^*(1|2)$,
- (2.41)

where the notations have been defined in paragraph 1.2.1, see also Example 1.2.1. The following result is analogous to (2.14) in the proof of point 1. The proof is postponed to Section 2.7 for the ease of the reader.

LEMMA 2.5.3 – *There exists a constant $c > 0$ such that for any $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ($n \in \mathbb{N}$) with $\sigma \notin \mathcal{B}$,*

$$d(\Omega^\sigma, C) > ca^n, \tag{2.42}$$

As in paragraph 2.5.1.a, we introduce a smooth compactly supported function χ on \mathbb{R}^2 such that $\chi = 1$ on a neighborhood of the closure of the ramified domain Ω , χ is symmetric with respect to the axis Λ , χ satisfies conditions (2.17) and (2.18) with the same notations, and

$$d_2 < d(C \cap D^0, \Omega), \tag{2.43}$$

where $d_2 = \sup\{d(x, \Omega), x \in \text{Supp } \chi\}$, which replaces condition (2.16).

We consider a function ψ on \mathbb{R}^2 valued in $[0, 1]$ such that $\psi \equiv 1$ on $\{x_1 \leq 0\} \setminus C$, $\psi \equiv 0$ on $\{x_1 > 0\} \setminus (C_u \cup C_l)$, ψ is continuous on $\overline{C} \setminus \{A, B\}$, and ψ is constant on the lines through the point A in C_u and on the lines through the point B in C_l .

Take $p \in (1, 2 - \frac{d}{2})$. Consider a function $\zeta \in W^{1,p}(D)$ valued in $[0, 1]$ such that $\zeta|_{[M_1M_3]} = \zeta|_{[M_3M_2]} = 1$, and $\zeta|_{[M_2M_4]} = \zeta|_{[M_4M_1]} = 0$ (such a function can be found since $p < 2$). See figure 2.4 where we have only represented the part of the ramified domain around Ξ .

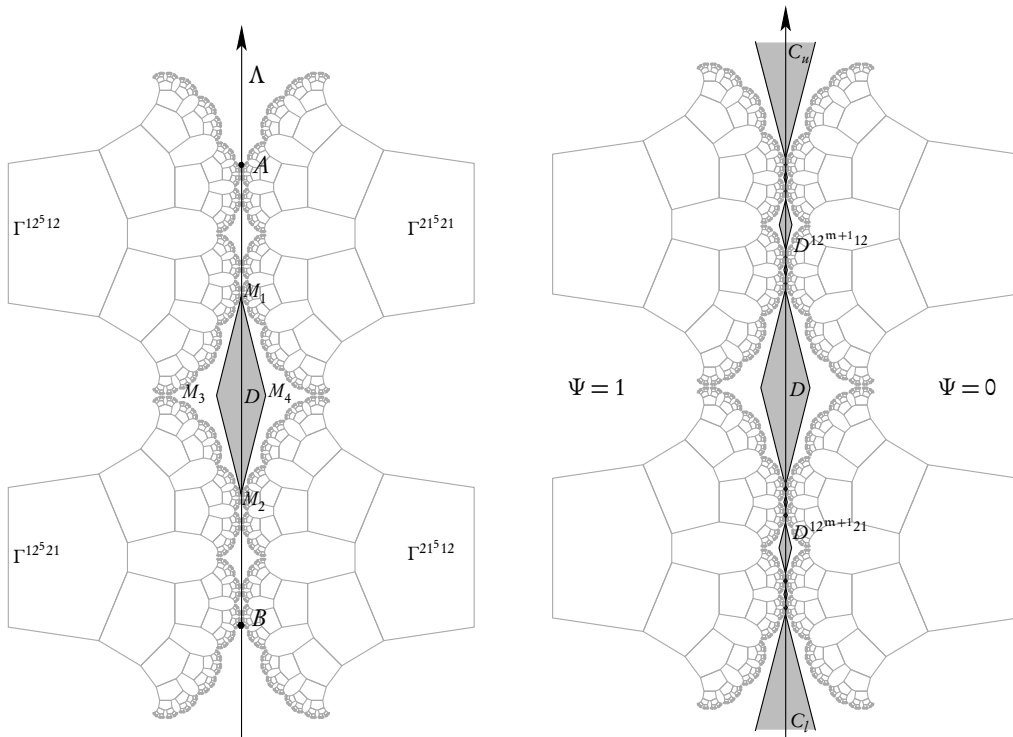


Figure 2.4: The functions ζ and Ψ in the case $\theta = \frac{\pi}{8}$ ($m = 4$). Left: construction of the function ζ , in the gray area lies the support of ζ . Right: the gray area corresponds to C .

For $\eta \in \mathcal{B}^+$, define $\zeta_\eta = \zeta \circ f_{12^{m+1}} \circ f_\eta^{-1} \in W^{1,p}(D^\eta)$. We introduce the function

$$\Psi : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \zeta_\eta(x) & \text{if } x \in D^\eta, \eta \in \mathcal{B}^+, \\ \psi(x) & \text{if } x \in C_u \cup C_l, \\ 1 & \text{if } x_1 \leq 0 \text{ and } x \notin C, \\ 0 & \text{if } x_1 > 0 \text{ and } x \notin C, \end{cases} \quad (2.44)$$

see Figure 2.4. This definition is unambiguous since the sets D^η are pairwise disjoint. The function Ψ will play the part of the function defined in (2.19) in paragraph 2.5.1.a. Note that Ψ is continuous on $\mathbb{R}^2 \setminus \Xi$.

We start by defining the lifting of the Haar mother wavelet:

$$\bar{g}_0 = (\chi \circ f_1^{-1})\Psi - (\chi \circ f_2^{-1})(1 - \Psi). \quad (2.45)$$

One has:

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in \mathcal{B}^+} \int_{D^\eta} |\nabla \zeta_\eta|^p &\simeq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}^+} a^{n(2-p)} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \zeta|^p \\ &\lesssim \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{\frac{n}{2}} a^{n(2-p)} \|\nabla \zeta\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p, \end{aligned}$$

since $\#\mathcal{A}_n \cap \mathcal{B}^+ \lesssim 2^{\frac{n}{2}}$. Since $2^n a^{2n(2-p)} = 2^{n(1+\frac{2(p-2)}{d})}$ and $p < 2 - \frac{d}{2}$, the latter sum converges, and $\Psi \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Therefore, $\bar{g}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

Take $n > 0$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$. For any prefix $\tau \in \mathcal{A}_k$ ($0 \leq k < n$) of σ , we define the cut-off function

$$\gamma_\tau^\sigma = (\mathbb{1}_{\sigma(k+1)=1}\Psi + \mathbb{1}_{\sigma(k+1)=2}(1 - \Psi)) \circ f_\tau^{-1}, \quad (2.46)$$

as we did in paragraph 2.5.1.a. For every $\sigma \in \mathcal{A}$, we introduce the set

$$\mathcal{M}(\sigma) = \{\tau \in \mathcal{A}, \sigma = \tau\sigma', \sigma' \in \mathcal{B}\}, \quad (2.47)$$

as in paragraph 2.5.1.a, where \mathcal{B} was defined in (2.41). Note that Lemma 2.5.1 is still true in that case.

We can now define liftings \bar{g}_σ for the Haar wavelets: if $n > 0$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$, introduce

$$\bar{g}_\sigma = \prod_{\tau \in \mathcal{M}(\sigma), \tau \neq \sigma} \gamma_\tau^\sigma \cdot 2^{\frac{n}{2}} \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}. \quad (2.48)$$

As in (2.25), there is a constant C such that for all $\sigma \in \mathcal{A}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{g}_\sigma|^p \leq C 2^{n(\frac{1}{2} + \frac{p-2}{d})} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \bar{g}_0|^p. \quad (2.49)$$

As in paragraph 2.5.1.a, we introduce the sets

$$S = C \cap \text{Supp } \bar{g}_0, \quad S^\tau = f_\tau(S) \quad (\tau \in \mathcal{A}), \quad \text{and} \quad \mathcal{S} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}} S^\tau. \quad (2.50)$$

We also write $S_u = C_u \cap \text{Supp } \bar{g}_0$, $S_l = C_l \cap \text{Supp } \bar{g}_0$ and $S_u^\tau = f_\tau(S_u)$, $S_l^\tau = f_\tau(S_l)$ for $\tau \in \mathcal{A}$. Finally, we define

$$F = \text{Supp } \nabla \bar{g}_0 \setminus C, \quad \text{and} \quad F^\tau = f_\tau(F) \quad (\tau \in \mathcal{A}). \quad (2.51)$$

REMARK 2.5.4 – Condition (2.43) implies by a simple geometric argument that $S \cap D^0 = \emptyset$.

2.5.2.b Geometrical results

In this paragraph, we state some geometrical results that will be useful for the proof of point 2. As in paragraph 2.5.1.b, we postpone the proof of these results to Section 2.7.

Propositions 2.5.2, 2.5.3 and 2.5.4 remain true in this case. Proposition 2.5.5 still holds in the following sense:

PROPOSITION 2.5.6 – *If $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and $\tau \notin \mathcal{M}(\sigma)$, then $\nabla \bar{g}_\sigma \equiv 0$ on $S_u^\tau \cup S_l^\tau$.*

PROPOSITION 2.5.7 – *Take $\tau \in \mathcal{A}$ and $\eta \in \mathcal{B}^+$. If $\sigma \in \mathcal{A}$ is not a prefix of $\tau\eta 12(21)^\infty$ or $\tau\eta 21(12)^\infty$, then $\nabla \bar{g}_\sigma \equiv 0$ on $f_\tau(D^\eta)$.*

2.5.2.c Proof of point 2 in Theorem A

The proof that $\|\nabla(\mathcal{E}v)\|_{L^p(\mathbb{R}^2 \setminus S)}^p \lesssim \|v\|_{JLip(1-\frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)}^p$ is the same as in the proof of point 1. We are left with dealing with $\|\nabla(\mathcal{E}v)\|_{L^p(S)}^p$. Write

$$\|\nabla(\mathcal{E}v)\|_{L^p(S)}^p \lesssim \sum_{\tau \in \mathcal{A}} I_1^\tau + I_2^\tau, \quad (2.52)$$

where I_1^τ and I_2^τ are as in (2.33). Since Proposition 2.5.4 still holds, we can deal with $\sum_{\tau \in \mathcal{A}} I_1^\tau$ as in the proof of point 1.

Since $S^\tau = S_u^\tau \cup S_l^\tau \cup f_\tau(\mathcal{D})$, the integration on S^τ in I_2^τ can be decomposed into integrals on S_u^τ , S_l^τ and $f_\tau(\mathcal{D})$. The first two integrals can be dealt with exactly as in the proof of point 1, since Proposition 2.5.6 holds. We refer to the last one as J_2^τ . For $\eta \in \mathcal{B}^+$, call $\mathcal{B}_\eta = \{\sigma \in \mathcal{A}, \sigma \text{ is a prefix of } \eta 12(21)^\infty \text{ or } \eta 21(12)^\infty\}$. By Proposition 2.5.7, $\nabla \bar{g}_\sigma \equiv 0$ on $f_\tau(D^\eta)$ if $\sigma \notin \tau \mathcal{B}_\eta$. Therefore,

$$J_2^\tau = \sum_{\eta \in \mathcal{B}^+} \int_{f_\tau(D^\eta)} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}(x) \nabla \gamma_\tau^\sigma(x) \right|^p dx. \quad (2.53)$$

We split the integral over $f_\tau(D^\eta)$ into two integrals over portions of cones with respective vertices $f_\tau(M_1^\eta)$ and $f_\tau(M_2^\eta)$. As in (2.36), we express them in polar coordinates centered respectively at $f_\tau(M_1^\eta)$ and $f_\tau(M_2^\eta)$. Call ℓ the length of the sides of the diamond D^0 . The length of the sides of $f_\tau(D^\eta)$ is $a^{k+l}\ell \leq a^{k+l}R$, and we may take $r \leq a^{k+l}R$ in the integrals.

As in the proof of point 1, we note that if $\tau \in \mathcal{M}(\sigma)$ and $\text{Supp } \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cap C_r(f_\tau(M_i^\tau)) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$ where $C_r(f_\tau(M_i^\tau))$ is the circle centered at $f_\tau(A)$, then $n \leq N_r$ where

$N_r = \frac{\log(r/R)}{\log a}$. Therefore,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} 2^{\frac{n}{2}} \beta_\sigma \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cdot \nabla \gamma_\tau^\sigma \right\|_{L^p(f_\tau(D^\eta))}^p \\
& \lesssim \int_0^{a^{k+l}R} \left(\sum_{n=k}^{[N_r]} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} 2^{\frac{n}{2}} |\beta_\sigma| \right)^p r^{1-p} dr \\
& = \int_0^{a^{k+l}R} \left(\sum_{n=0}^{[N_r]-k} \sum_{\sigma' \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} 2^{\frac{n+k}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)^p r^{1-p} dr \\
& \lesssim \sum_{m=0}^{\infty} a^{(m+k+l)(2-p)} \left(\sum_{n=0}^m \sum_{\sigma' \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} 2^{\frac{n+k}{2}} |\beta_{\tau\sigma'}| \right)^p \\
& \lesssim a^{l(2-p)} \sum_{m=k}^{\infty} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} |\beta_\sigma|^p,
\end{aligned}$$

where we have proceeded exactly as in the proof of point 1, using the Hardy inequality of Lemma 2.5.2. Hence,

$$\begin{aligned}
J_2^\tau & \lesssim \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\eta \in \mathcal{A}_l \cap \mathcal{B}^+} a^{l(2-p)} \sum_{m=k}^{\infty} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta} |\beta_\sigma|^p \\
& \lesssim \sum_{l=0}^{\infty} a^{l(2-p)} 2^{\frac{l}{2}} \sum_{m=k}^{\infty} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} |\beta_\sigma|^p,
\end{aligned}$$

since $\#\mathcal{A}_l \cap \mathcal{B}^+ \lesssim 2^{\frac{l}{2}}$ and $\#\mathcal{A}_n \cap \tau \mathcal{B}_\eta = 2$. Therefore, since $a^{l(2-p)} 2^{\frac{l}{2}} = a^{l(2-\frac{d}{2}-p)}$ and $p < 2 - \frac{d}{2}$,

$$J_2^\tau \lesssim \sum_{m=k}^{\infty} a^{m(2-p)} 2^{\frac{mp}{2}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A}_n \\ \tau \in \mathcal{M}(\sigma)}} |\beta_\sigma|^p. \quad (2.54)$$

We show that $\sum_{\tau \in \mathcal{A}} J_2^\tau \lesssim \|v\|_{Lip(1-\frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)}$ exactly as in the proof of point 1 (see (2.38)).

2.6 PROOF OF THE EXTENSION THEOREM

Take $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, and $p \in (1, p_\theta^*)$. We will construct a sequence of continuous linear operators $\mathcal{F}_n : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ such that for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$(\mathcal{F}_n u)|_{Z^n} = u|_{Z^n}, \quad (2.55)$$

where $Z^n = \text{Interior} \left(\bigcup \{ \bar{Y}^\sigma, \sigma \in \mathcal{A}_k, k \leq n \} \right)$.

It will be proved in Proposition 2.6.2 that $(\mathcal{F}_n)_n$ converges in $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^2))$ to a continuous linear operator \mathcal{F} , which will yield Theorem B since $\mathcal{F}u|_\Omega = u$ for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

An immediate consequence is that $\ell^\infty(\mathcal{F}u) = \ell^\infty(u)$.

First, we introduce an extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\widehat{\Omega})$, where $\widehat{\Omega}$ is a larger domain defined below and presented in Figure 2.5.

The domain $\widehat{\Omega}$ Take $\varepsilon < 2$ and write $P'_1 = (-1 - \varepsilon, 0)$, and $P'_2 = (1 + \varepsilon, 0)$. Define \widehat{Y}^0 to be the open domain inside the closed polygonal line joining the points $P'_1, P'_2, f_2(P'_2), f_2(P'_1), f_1(P'_2), f_1(P'_1), P'_1$ in this order. Let \widehat{K}^0 be the closure of \widehat{Y}^0 . We define the wider ramified domain $\widehat{\Omega}$ to be:

$$\widehat{\Omega} = \text{Interior} \left(\widehat{K}^0 \cup \left(\bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\widehat{K}^0) \right) \right), \quad (2.56)$$

see figure 2.5. We can suppose $\varepsilon > 0$ is small enough so that $f_2(P'_1)$ and $f_2(P'_2)$ have positive coordinates, the domain \widehat{Y}^0 is convex, and Assumption 1 is satisfied.

We introduce the open domains $\widehat{Y}^\sigma = f_\sigma(\widehat{Y}^0)$ for $\sigma \in \mathcal{A}$, along with their closure \widehat{K}^σ . We also write $\widehat{\Omega}^\sigma = f_\sigma(\widehat{\Omega})$ for $\sigma \in \mathcal{A}$, and $\widehat{\Omega}^n = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \widehat{\Omega}^\sigma$.

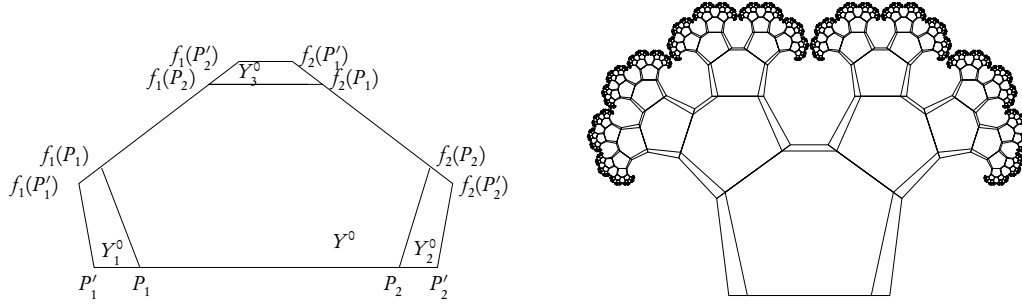


Figure 2.5: Left: First cells Y^0 and \widehat{Y}^0 of the ramified domains. Right: The ramified domains Ω and $\widehat{\Omega}$.

We introduce the open domain Y_1^0 inside the polygonal line joining the points $P'_1, P_1, f_1(P_1), f_1(P'_1), P'_1$, its symmetric Y_2^0 with respect to the vertical axis Λ , and the open domain Y_3^0 inside the polygonal line joining the points $f_1(P_2), f_2(P_1), f_2(P'_1), f_1(P'_2), f_1(P_2)$. For $\sigma \in \mathcal{A}$ and $i = 1, 2, 3$, write $Y_i^\sigma = f_\sigma(Y_i^0)$.

PROPOSITION 2.6.1 – *There exists a continuous extension operator \mathcal{G} from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\widehat{\Omega})$.*

Proof. We start by defining a mapping ξ_1 in polar coordinates (r, φ) centered at the intersection M_1 of the axes (P_1P_2) and $(f_1(P_1)f_1(P_2))$ (see figure 2.6) and such that the half line $[M_1P_1]$ is given by $\varphi = 0$. Write $(x_1, 0)$ the euclidean coordinates of M_1 . For every $\varphi \in [0, \theta]$, define r_φ to be the unique $r > 0$ such that the point $(x_1 + r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ belongs to the segment $[P_1f_1(P_1)]$. Now define $\xi_1 : Y_1^0 \rightarrow Y^0$ by:

$$\xi_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 + r' \cos \varphi \\ r' \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

where $x = (x_1 + r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ with $\varphi \in [0, \theta]$, and $r' = 2r_\varphi - r$. We define $\xi_2 : Y_2^0 \rightarrow Y^0$ as the symmetric of ξ_1 with respect to the axis Λ .

Similarly, we define the mapping ξ_3 in polar coordinates (r, φ) centered at the intersection M_3 of the axes $f_1(P_1)f_1(P_2)$ and $f_2(P_1)f_2(P_2)$ (see figure 2.6) and such that the half line $[M_3O)$ is given by $\varphi = 0$. Write $(0, y_3)$ the euclidean coordinates of M_3 . For every $\varphi \in [\theta - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \theta]$, define r_φ to be the unique $r > 0$ such that the point $(r \cos \varphi, y_3 + r \sin \varphi)$ belongs to the segment $[f_1(P'_2)f_2(P'_1)]$. Now define $\xi_3 : Y_3^0 \rightarrow Y^0$ by:

$$\xi_3(x) = \begin{pmatrix} r' \cos \varphi \\ y_3 + r' \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

where $x = (r \cos \varphi, y_3 + r \sin \varphi)$, and $r' = 2r_\varphi - r$.

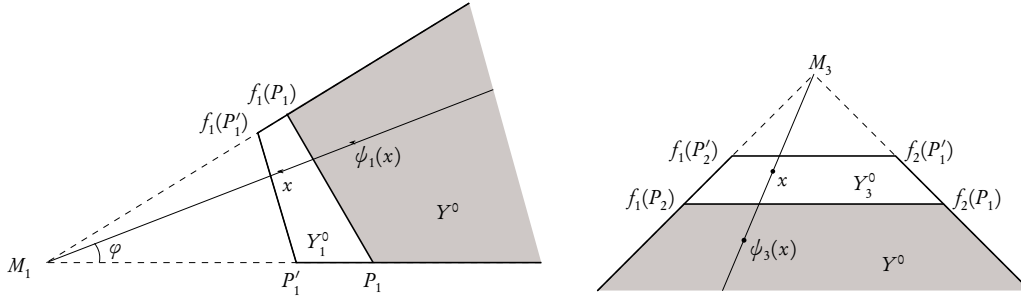


Figure 2.6: Left: Construction of the mapping $\xi_1 : Y_1^0 \rightarrow Y^0$. Right: Construction of the mapping $\xi_3 : Y_3^0 \rightarrow Y^0$.

We now define the mappings $\xi_i^\sigma : Y_i^\sigma \rightarrow Y^\sigma$ for $\sigma \in \mathcal{A}$ and $i = 1, 2, 3$ by $\xi_i^\sigma = f_\sigma \circ \xi_i \circ f_\sigma^{-1}$.

REMARK 2.6.1 – It is important to note that the functions ξ_i^σ , $\sigma \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$ respect the self-similarity of the domain, in the sense that for each $i \in \{1, 2\}$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ($n > 0$), $\xi_i^\sigma = \xi_j^{\sigma \uparrow n-1}$ on $f_\sigma([P_i P'_i])$, where j is the unique integer in $\{1, 2, 3\}$ such that one has $f_\sigma([P_i P'_i]) \subset Y_i^\sigma \cap Y_j^{\sigma \uparrow n-1}$.

We define the operator $\mathcal{G} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\widehat{\Omega})$ by setting

$$\begin{cases} \mathcal{G}u = u & \text{on } \Omega, \\ \mathcal{G}u = u \circ \xi_i^\sigma & \text{on } Y_i^\sigma \text{ for } \sigma \in \mathcal{A}, i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.59)$$

Note that for all $\sigma \in \mathcal{A}$ and $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\int_{Y_i^\sigma} |\nabla(\mathcal{G}u)|^p \leq C \int_{Y^\sigma} |\nabla u|^p, \quad (2.60)$$

where the constant C is independent of i and σ . We deduce that $\mathcal{G}u \in W_{loc}^{1,p}(\widehat{\Omega})$ from Remark 2.6.1, which implies that $\mathcal{G}u \in W^{1,p}(\widehat{\Omega})$, and we deduce from (2.60) that \mathcal{G} is continuous. \square

The extension operators \mathcal{F}_n Let us now construct the sequence $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Introduce a continuous function $\chi \in W^{1,\infty}(\widehat{Y}^0)$ valued in $[0, 1]$ such that $\chi = 1$ in Y^0 , the trace of χ on the segments $[P'_1 f_1(P'_1)]$, $[P'_2 f_2(P'_2)]$ and $[f_1(P'_2) f_2(P'_1)]$ is 0, and

$$\begin{aligned} \chi \circ f_1^{-1} &= \chi \text{ on } f_1([P'_1 P'_2]), \\ \chi \circ f_2^{-1} &= \chi \text{ on } f_2([P'_1 P'_2]). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Condition (2.61) implies that a certain self-similar property is satisfied by χ . Such a function χ can be constructed in a similar manner as in the proof of Proposition 2.6.1.

Introduce a function $\eta \in \mathcal{C}^0(\widehat{K}_0)$ with values in $[0, 1]$ such that $\eta = 1$ on $\widehat{\Gamma}^0 = [P'_1 P'_2]$, and $\eta = 0$ on $f_1(\widehat{\Gamma}^0) \cup f_2(\widehat{\Gamma}^0)$.

For every $n > 0$, we define a function ρ_n on \mathbb{R}^2 by:

$$\rho_n = \sum_{k=0}^n \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \chi \circ f_\sigma^{-1} \mathbb{1}_{\widehat{K}^\sigma} + \sum_{\sigma \in \mathcal{A}'_{n+1}} \chi \eta \circ f_\sigma^{-1} \mathbb{1}_{\widehat{K}^\sigma}. \quad (2.62)$$

Note that ρ_n is continuous on \mathbb{R}^2 .

Introduce the linear operators \mathcal{F}_n on $W^{1,p}(\Omega)$ defined by:

$$\mathcal{F}_n u = \rho_n \mathcal{G} u + (1 - \rho_n) \mathcal{E} \ell^\infty(u), \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \quad (2.63)$$

Condition (2.61) implies that for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{F}_n u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, and therefore $\mathcal{F}_n u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Moreover, note that since \mathcal{G} , \mathcal{E} and ℓ^∞ are continuous, so are the operators \mathcal{F}_n .

PROPOSITION 2.6.2 – *The sequence $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converges pointwise to a continuous operator $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), W^{1,p}(\mathbb{R}^2))$ such that $(\mathcal{F} u)|_\Omega = u$ for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$.*

The proof of Proposition 2.6.2 will use the following Poincaré-Wirtinger inequality.

LEMMA 2.6.1 – *If $u \in W^{1,p}(\Omega)$, there exists a constant $C > 0$ such that:*

$$\int_{\widehat{\Gamma}^0} |\mathcal{G} u(x) - \langle u \rangle_{\Gamma^0}|^p dx \leq C \int_{\widehat{\Gamma}^0} |\nabla \mathcal{G} u(x)|^p dx. \quad (2.64)$$

We will also use a slightly different version of Theorem 1.3.3 (see [AT10]), whose proof can be adapted to get the following result.

THEOREM 2.6.1 – *For all real number x satisfying $(2a^2)^{p-1} < x < 1$, there exists a constant $C > 0$ such that for all $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|\ell^\infty(u) - \langle u \rangle_{\Gamma^0}\|_{L^p(\Gamma^\infty)}^p \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} x^i \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \|\nabla u\|_{L^p(Y^\tau)}^p. \quad (2.65)$$

Proof of Proposition 2.6.2. Take $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Let us prove that $(\mathcal{F}_n u)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Take $n, m \in \mathbb{N}$ with $n < m$. We denote $\hat{u} = \mathcal{G} u$ and $\bar{u} = \mathcal{E} \ell^\infty(u)$. First, we note

that

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{F}_m u - \mathcal{F}_n u|^p &= \sum_{k=n+1}^{m+1} \int_{\widehat{Y}^k} |\mathcal{F}_m u - \mathcal{F}_n u|^p \\
&= \sum_{k=n+1}^{m+1} \int_{\widehat{Y}^k} |(\rho_n - \rho_m)(\hat{u} - \bar{u})|^p \\
&\leq \int_{\widehat{\Omega}^n} |\hat{u} - \bar{u}|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned} \tag{2.66}$$

since $\hat{u} - \bar{u}|_{\widehat{\Omega}} \in L^p(\widehat{\Omega})$. On the other hand,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathcal{F}_m u - \nabla \mathcal{F}_n u|^p = \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla \mathcal{F}_m u - \nabla \mathcal{F}_n u|^p. \tag{2.67}$$

Take $k \in \mathbb{N}$ such that $n \leq k \leq m$ and $\sigma \in \mathcal{A}_k$. One has:

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla \mathcal{F}_m u - \nabla \mathcal{F}_n u|^p &= \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla((\rho_m - \rho_n)(\hat{u} - \bar{u}))|^p \\
&\leq C \left(\int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla(\hat{u} - \bar{u})|^p + a^{-kq} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\hat{u} - \bar{u}|^p \right),
\end{aligned}$$

where C is a constant independent of σ , since we have $\rho_m - \rho_n = \chi \circ f_\sigma^{-1}$ if $k > n$, and $\rho_m - \rho_n = \chi \circ f_\sigma^{-1} - \chi \eta \circ f_\sigma^{-1}$ if $k = n$. Therefore,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathcal{F}_m u - \nabla \mathcal{F}_n u|^p \\
&\lesssim \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla(\hat{u} - \bar{u})|^p + \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{-kq} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\hat{u} - \bar{u}|^p.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

To deal with the first term of the right hand side in (2.68), we note that:

$$\sum_{k=n}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla(\hat{u} - \bar{u})|^p = \|\nabla(\hat{u} - \bar{u})\|_{L^p(\widehat{\Omega}^n)}^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.69}$$

Therefore, we are left with considering the second term. For $\sigma \in \mathcal{A}_k$, one has:

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{-pk} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\hat{u} - \bar{u}|^p \lesssim S_1 + S_2,$$

where $S_1 = \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{-pk} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\hat{u} - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p$ and $S_2 = \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{-pk} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\bar{u} - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p$.

By Lemma 2.6.1, one has:

$$S_1 \leq C \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{(2-p)k} \int_{\widehat{Y}^\sigma} |\nabla \hat{u}|^p \lesssim \int_{\widehat{\Omega}_n} |\nabla \hat{u}|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.70}$$

We are left with considering S_2 . Since for all $\tau \in \mathcal{A}_n$ with $n > k$, $\bar{g}_\tau|_{\hat{Y}^\sigma} \equiv 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{Y}^\sigma} |\bar{u} - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p &= \int_{\hat{Y}^\sigma} |P_0 \ell^\infty(u) + \sum_{i \leq k} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \beta_\tau \bar{g}_\tau - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p \\ &\leq c \left(a^{2k} |P_0 \ell^\infty(u \circ f_\sigma) - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p + \int_{\hat{Y}^\sigma} |\beta_\sigma \bar{g}_\sigma|^p \right), \end{aligned} \quad (2.71)$$

where c is a positive constant independent of k and σ , since

$$P_0 \ell^\infty(u) + \sum_{i < k} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \beta_\tau \bar{g}_\tau = P_0 \ell^\infty(u \circ f_\sigma) \text{ on } Y^\sigma.$$

This last result can be easily seen by writing the expansions of $\ell^\infty(u \circ f_\sigma)$ and $\ell^\infty(u)$ in the Haar wavelet basis on Γ^∞ , and observing that $\ell^\infty(u \circ f_\sigma) = \ell^\infty(u) \circ f_\sigma$. This yields that on $\Gamma^{\infty, \sigma}$,

$$P_0 \ell^\infty(u) + \sum_{i < k} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \beta_\tau g_\tau = P_0 \ell^\infty(u \circ f_\sigma). \quad (2.72)$$

If $i < k$ and $\tau \in \mathcal{A}_i$, then \bar{g}_τ is constant on $f_\tau(f_j(\Omega))$, $j = 1, 2$, therefore \bar{g}_τ is constant on Y^σ and $\bar{g}_\tau(Y^\sigma) = g_\tau(\Gamma^{\infty, \sigma})$, hence the equality.

Therefore, one has:

$$\int_{\hat{Y}^\sigma} |\bar{u} - \langle u \rangle_{\Gamma^\sigma}|^p \leq c' a^{2k} \left(\int_{\Gamma^\infty} |\ell^\infty(u \circ f_\sigma) - \langle u \circ f_\sigma \rangle_{\Gamma^0}|^p d\mu + 2^{\frac{kp}{2}} |\beta_\sigma|^p \right), \quad (2.73)$$

where c' is a positive constant independent of k and σ . We know from Theorem 2.6.1 that for all $x \in](2a^2)^{p-1}, 1[$,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^\infty} |\ell^\infty(u \circ f_\sigma) - \langle u \circ f_\sigma \rangle_{\Gamma^0}|^p d\mu &\leq C \sum_{i \geq 0} x^i \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \int_{Y^\tau} |\nabla(u \circ f_\sigma)|^p \\ &= C a^{(p-2)k} \sum_{i \geq 0} x^i \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \int_{Y^{\sigma\tau}} |\nabla u|^p \\ &= C a^{(p-2)k} \sum_{i \geq k} x^{i-k} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i, \tau|_k = \sigma} \int_{Y^\tau} |\nabla u|^p. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Therefore,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{(2-p)k} \int_{\Gamma^\infty} |\ell^\infty(u \circ f_\sigma) - \langle u \circ f_\sigma \rangle_{\Gamma^0}|^p d\mu \\ &\lesssim \sum_{k=n+1}^{m+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \sum_{i \geq k} x^{i-k} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i, \tau|_k = \sigma} \int_{Y^\tau} |\nabla u|^p \\ &= \sum_{i \geq n+1} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \sum_{k=n+1}^{\min(i, m+1)} x^{i-k} \int_{Y^\tau} |\nabla u|^p \\ &\lesssim \sum_{i \geq n} \sum_{\tau \in \mathcal{A}_i} \int_{Y^\tau} |\nabla u|^p = \int_{\Omega^n} |\nabla u|^p. \end{aligned}$$

Then, (2.73) yields:

$$S_2 \lesssim \int_{\Omega^n} |\nabla u|^p + \sum_{k \geq n} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{(2-p)k} 2^{\frac{kp}{2}} |\beta_\sigma|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (2.75)$$

Indeed, since $\ell^\infty(u) \in Lip(1 - \frac{2-d}{p}, p, p, 0; \Gamma^\infty)$, $\sum_k 2^{\frac{kp}{2}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} a^{(2-p)k} |\beta_\sigma|^p < \infty$. This proves that the sequence $(\mathcal{F}_n u)_n$ has a limit in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. We define $\mathcal{F}u$ to be the latter limit; \mathcal{F} obviously defines a linear operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

Therefore, Banach Steinhaus Theorem insures that \mathcal{F} is continuous. The fact that $(\mathcal{F}u)|_\Omega = u$ is a direct consequence of (2.55). \square

2.7 PROOF OF THE GEOMETRICAL RESULTS

In this section, we prove the geometrical results stated in paragraphs 2.5.1.b and 2.5.2.b.

2.7.1 PROOF OF THE GEOMETRICAL RESULTS FROM PARAGRAPH 2.5.1.b

We start by stating and proving several geometrical lemmas.

LEMMA 2.7.1 – *One has:*

$$\begin{aligned} d(\Omega \setminus Y^0, F) &\geq ad_1, \\ \sup\{d(x, \Omega \setminus Y^0), x \in \text{Supp } \bar{g}_0\} &\leq ad_2, \end{aligned}$$

where d_1 and d_2 were defined in paragraph 2.5.1.a. We recall that $F = \text{Supp } \nabla \bar{g}_0 \setminus C$.

Proof.

- ◊ Since the function χ is symmetric with respect to the axis Λ , so is F . Therefore, since $f_1(\Omega) = \Omega \setminus Y^0 \cap \{x_1 \leq 0\}$, we have $d(\Omega \setminus Y^0, F) = d(f_1(\Omega), F \cap \{x_1 \leq 0\})$. Moreover, note that $F \cap \{x_1 \leq 0\} \subset f_1(\text{Supp } \nabla \chi)$, which implies that

$$d(f_1(\Omega), F \cap \{x_1 \leq 0\}) \geq d(f_1(\Omega), f_1(\text{Supp } \nabla \chi)) = ad_1,$$

hence the result.

- ◊ Take $x = (x_1, x_2) \in \text{Supp } \bar{g}_0$. If $x_1 \leq 0$, then by symmetry

$$d(x, \Omega \setminus Y^0) = d(x, f_1(\Omega)) \leq \sup\{d(x, f_1(\Omega)), x \in f_1(\text{Supp } \chi)\} = ad_2,$$

since $\text{Supp } \bar{g}_0 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \leq 0\} \subset f_1(\text{Supp } \chi)$. Similarly, if $x_1 \geq 0$, then $d(x, \Omega \setminus Y^0) \leq ad_2$. The result follows.

LEMMA 2.7.2 – *If $\sigma \notin \mathcal{B}$, then*

$$\text{Supp } \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1} \cap C = \emptyset, \quad (2.76)$$

where \mathcal{B} was defined in (2.15).

Proof. If $x \in C$, then $d(x, \Omega^\sigma \setminus Y^\sigma) \geq d(C, \Omega^\sigma) > ca^n$ since $\sigma \notin \mathcal{B}$, by (2.14). Lemma 2.7.1 and an argument of self-similarity imply that

$$\sup\{d(x, \Omega^\sigma \setminus Y^\sigma), x \in \text{Supp } \bar{g}_\sigma \circ f_\sigma^{-1}\} \leq a^{n+1}d_2 < ca^n,$$

by condition (2.17). Therefore $x \notin \text{Supp } \bar{g}_\sigma \circ f_\sigma^{-1}$. \square

LEMMA 2.7.3 – *If $\sigma \in \mathcal{A} \setminus \{\epsilon\}$ and $\sigma(1) = 1$ (resp. $\sigma(1) = 2$), then*

$$\text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus S \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < 0\} \quad (2.77)$$

(resp. $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus S \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$).

Proof. Suppose for example $\sigma(1) = 1$. If $\sigma \notin \mathcal{B}$, then $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \cap C = \emptyset$ by Lemma 2.7.2. Therefore, $\text{Supp } \bar{g}_\sigma$ lies in the left-hand connected component of $\mathbb{R}^2 \setminus C$, and one has the inclusion $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < 0\}$, hence the result.

If $\sigma \in \mathcal{B}$, then, by the definition of \bar{g}_σ , ψ is a factor of \bar{g}_σ , which implies that we have $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus C \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$. Since $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset \text{Supp } \bar{g}_0$, one has $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus S = \text{Supp } \bar{g}_\sigma \setminus C$, hence the result. \square

LEMMA 2.7.4 – *If $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and σ is a prefix of τ , then*

$$F^\sigma \cap \text{Supp } \bar{g}_\tau = \emptyset. \quad (2.78)$$

Proof. Suppose $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $\tau \in \mathcal{A}_k$. Note that $d(\Omega^\tau \setminus Y^\tau, F^\sigma) \geq d(\Omega^\sigma \setminus Y^\sigma, F^\sigma) \geq a^{n+1}d_1$ and $\sup\{d(y, \Omega^\tau \setminus Y^\tau), y \in \text{Supp } \bar{g}_\tau\} \leq a^{k+1}d_2$ by lemma 2.7.1. Since $n < k$, (2.18) yields:

$$d(\Omega^\tau \setminus Y^\tau, F^\sigma) > \sup\{d(y, \Omega^\tau \setminus Y^\tau), y \in \text{Supp } \bar{g}_\tau\}.$$

Therefore, if $x \in \text{Supp } \bar{g}_\tau$, then $d(x, \Omega^\tau \setminus Y^\tau) < d(\Omega^\tau \setminus Y^\tau, F^\sigma)$ and $x \notin F^\sigma$. \square

LEMMA 2.7.5 – *If $n > 0$ and $\sigma \in \mathcal{A}_n$, then, for every $k < n$,*

$$\text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset f_{\sigma_{\uparrow k}}(\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'}), \quad (2.79)$$

where $\sigma = \sigma_{\uparrow k} \sigma'$.

Proof. Take $\tau' \in \mathcal{A}_i$, $i \geq 0$ such that $\tau' \in \mathcal{M}(\sigma')$ and $\tau' \neq \sigma'$. Therefore, $\sigma_{\uparrow k} \tau'$ is a prefix of σ . We observe that:

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau'}^{\sigma'} \circ f_{\sigma_{\uparrow k}}^{-1} &= (\mathbb{1}_{\sigma'(i+1)=1} \psi + \mathbb{1}_{\sigma'(i+1)=2} (1 - \psi)) \circ f_{\sigma_{\uparrow k} \tau'}^{-1} \\ &= (\mathbb{1}_{\sigma(k+i+1)=1} \psi + \mathbb{1}_{\sigma(k+i+1)=2} (1 - \psi)) \circ f_{\sigma_{\uparrow k} \tau'}^{-1} \\ &= \gamma_{\sigma_{\uparrow k} \tau'}^\sigma. \end{aligned}$$

Note that for any such τ' , $\sigma_{\uparrow k} \tau' \in \mathcal{M}(\sigma)$ and $\sigma_{\uparrow k} \tau' \neq \sigma$.

Therefore, since $(\bar{g}_0 \circ f_{\sigma'}^{-1}) \circ f_{\sigma_{\uparrow k}}^{-1} = \bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}$,

$$\begin{aligned} |\bar{g}_{\sigma'} \circ f_{\sigma_{\uparrow k}}^{-1}| &= 2^{\frac{n-k}{2}} |\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}| \prod_{\tau' \in \mathcal{M}(\sigma'), \tau' \neq \sigma'} \gamma_{\sigma_{\uparrow k} \tau'}^\sigma \\ &\geq 2^{\frac{n-k}{2}} |\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}| \prod_{\tau \in \mathcal{M}(\sigma), \tau \neq \sigma} \gamma_\tau^\sigma \\ &= 2^{\frac{-k}{2}} |\bar{g}_\sigma|, \end{aligned}$$

since for any prefix $\tau \in \mathcal{A}$ of σ , $\gamma_\tau^\sigma \leq 1$, which implies the result. \square

LEMMA 2.7.6 - If $\sigma, \tau \in \mathcal{A}$ and $\sigma \neq \tau$, then $S^\sigma \cap S^\tau = \emptyset$.

Proof. Let us first examine the case when $\tau = \epsilon$. Suppose for example $\sigma(1) = 1$. The set Ω^σ lies in the convex set \mathcal{D} defined by $\{x_1 < 0\} \setminus C$. Therefore, its convex hull $\text{conv}(\Omega^\sigma)$ also lies in \mathcal{D} . Since, by Remark 2.5.2, $S^\sigma \subset \text{conv}(\Omega^\sigma)$, S^σ lies in \mathcal{D} , and $S^\sigma \cap C = \emptyset$, hence the result.

Let us consider the general case. First suppose that τ is a prefix of σ : write $\sigma = \tau\sigma'$, where $\sigma' \in \mathcal{A}$. Then, $S^\sigma \cap S^\tau = f_\tau(S^{\sigma'} \cap S) = \emptyset$ by the previous point.

If none of the strings σ, τ is a prefix of the other, there is a string $\eta \in \mathcal{A}$ such that $\sigma = \eta\sigma'$ and $\tau = \eta\tau'$ with $\sigma'(1) \neq \tau'(1)$. Since, by Lemma 2.7.3, $S^{\sigma'}$ and $S^{\tau'}$ lie in opposite sides of the axis Λ (given by $\{x_1 = 0\}$), $S^{\sigma'} \cap S^{\tau'} = \emptyset$. Therefore, $S^\sigma \cap S^\tau = f_\eta(S^{\sigma'} \cap S^{\tau'}) = \emptyset$. \square

REMARK 2.7.1 - In particular, if $\sigma \in \mathcal{A}$ and $\sigma(1) = 1$ (resp. $\sigma(1) = 2$), then $S^\sigma \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 < 0\}$ (resp. $S^\sigma \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 > 0\}$).

Proof of Proposition 2.5.2. If one of the strings σ, τ is a prefix of the other, then by Lemma 2.7.4, $F^\sigma \cap F^\tau = \emptyset$. Since $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \setminus \mathcal{S} \subset F^\sigma$ and $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\tau \setminus \mathcal{S} \subset F^\tau$ by (2.28), we have $(\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \setminus \mathcal{S}) \cap (\text{Supp } \nabla \bar{g}_\tau \setminus \mathcal{S}) = \emptyset$.

Now suppose none of the sequences σ, τ is a prefix of the other, i.e. there exists an integer k such that $\sigma_{|k} = \tau_{|k}$ and $\sigma(k+1) \neq \tau(k+1)$. Then we can write $\sigma = \sigma_{|k}\sigma'$ and $\tau = \tau_{|k}\tau'$ for some $\sigma', \tau' \in \mathcal{A}$. By Lemma 2.7.3, $(\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'} \setminus \mathcal{S}) \cap (\text{Supp } \bar{g}_{\tau'} \setminus \mathcal{S}) = \emptyset$, hence the result since $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset f_{\sigma_{|k}}(\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'})$ and $\text{Supp } \bar{g}_\tau \subset f_{\tau_{|k}}(\text{Supp } \bar{g}_{\tau'})$ by Lemma 2.7.5. \square

Proof of Proposition 2.5.3. By the definition of \bar{g}_σ (see (2.23)), it is enough to show that if $\tau' \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma, \tau\}$, then $\gamma_{\tau'}^\sigma \equiv 1$ on $S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma$.

Take $\tau' \in \mathcal{M}(\sigma) \setminus \{\sigma, \tau\}$. Let us first prove that $(S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma) \cap C^{\tau'} = \emptyset$. Note that $S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset f_\sigma(\text{Supp } \bar{g}_0) \subset f_{\tau'}(\text{Supp } \bar{g}_0)$, since τ' is a prefix of σ . Therefore, $(S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma) \cap C^{\tau'} \subset f_{\tau'}(\text{Supp } \bar{g}_0) \cap C^{\tau'} = S^{\tau'}$. The result follows since $S^\tau \cap S^{\tau'} = \emptyset$ by Lemma 2.7.6. Since $\nabla \gamma_{\tau'}^\sigma \equiv 0$ outside the cone $C^{\tau'}$, $\gamma_{\tau'}^\sigma$ is constant (and takes the value 0 or 1) on $S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma$.

Suppose $\tau' \in \mathcal{A}_k$ ($k \geq 0$), and $\sigma(k+1) = 1$. This implies that $\Omega^\sigma \subset f_{\tau'}(\{x_1 > 0\})$. Since $\tau' \in \mathcal{M}(\sigma)$, one has $f_\tau(A) \in \overline{\Omega^\sigma}$ by the definition of $\mathcal{M}(\sigma)$ (see (2.22)).

Consequently, $f_\tau(A) \in f_{\tau'}(\{x_1 < 0\} \setminus C)$, since $f_{\tau'}(A) \neq f_\tau(A)$. Therefore, the connected set $S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma$ lies in the connected component $f_{\tau'}(\{x_1 < 0\} \setminus C)$ of $\mathbb{R}^2 \setminus C^\tau$ by the above result, and $S^\tau \cap \text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset f_{\tau'}(\{x_1 < 0\}) \setminus C^{\tau'}$. Since by definition $\gamma_{\tau'}^\sigma \equiv 1$ on $f_{\tau'}(\{x_1 < 0\}) \setminus C^{\tau'}$, we get the desired result. The case $\sigma(k+1) = 2$ is similar. \square

Proof of Proposition 2.5.4. Write $M = \{\sigma \in \mathcal{A}, \tau \in \mathcal{M}(\sigma), \nabla(\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})(x) \neq 0\}$. We first note that if $\sigma \in M$ and $\sigma \neq \tau$, then $\text{Supp } \nabla(\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1}) \cap S^\tau = F^\sigma \cap S^\tau$ since $S^\sigma \cap S^\tau = \emptyset$ by Lemma 2.7.6 (see (2.28)).

If $\sigma, \sigma' \in M$, write $\sigma = \tau\eta$ and $\sigma' = \tau\eta'$ where $\eta, \eta' \in \mathcal{B}$. Suppose that η, η' are prefixes of $12^{m+1}(12)^\infty$ and distinct from ϵ . Therefore, one of the two strings η, η' is a prefix of the other. Assume for example that η' is a prefix of η . Consequently, σ' is a prefix of σ , and Lemma 2.7.4 implies that $\sigma = \sigma'$, since $x \in F^{\sigma'} \cap F^\sigma \subset F^{\sigma'} \cap \text{Supp } (\bar{g}_0 \circ f_\sigma^{-1})$. Therefore, there is at most one string $\sigma \in M \setminus \{\tau\}$ such that σ is a prefix of $12^{m+1}(12)^\infty$. Similarly, there is at most one string

$\sigma \in M \setminus \{\tau\}$ such that σ is a prefix of $21^{m+1}(21)^\infty$. Since $\tau \in M$, there are at most three strings in M . \square

Proof of Proposition 2.5.5. For $n, k \in \mathbb{N}$, take $\sigma \in \mathcal{A}_n$ and $\tau \in \mathcal{A}_k$.

1. First, we prove that if $n < k$, then $\nabla \bar{g}_\sigma \equiv 0$ on S^τ .
 If $\eta \in \mathcal{M}(\sigma)$ and $\eta \in \mathcal{A}_m$, then $m \leq n < k$, and $\eta \neq \tau$, which implies by Lemma 2.7.6 that $S^\tau \cap S^\eta = \emptyset$. Therefore, by (2.28), $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \cap S^\tau \subset F^\sigma$. If σ is a prefix of τ , then Lemma 2.7.4 implies that $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \cap S^\tau = \emptyset$ since $S^\tau \subset \text{Supp } \bar{g}_\tau$.
 If σ is not a prefix of τ , then there exists $m < n$ such that $\sigma = \sigma_{\uparrow m} \sigma'$, $\tau = \sigma_{\uparrow m} \tau'$ with $\sigma', \tau' \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ and $\sigma'(1) \neq \tau'(1)$. Remark 2.7.1 and Lemma 2.7.3 imply that $\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'} \setminus S$ and $S^{\tau'}$ lie in opposite sides of the axis Λ . Hence, $\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'} \cap S^{\tau'} = \emptyset$, since $S \cap S^{\tau'} = \emptyset$ by Lemma 2.7.4. Therefore, $\text{Supp } \nabla \bar{g}_\sigma \cap S^\tau = \emptyset$, since $\text{Supp } \bar{g}_\sigma \subset f_{\sigma_{\uparrow k}}(\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'})$ by Lemma 2.7.5.
2. Second, we prove that if $n \geq k$ and $\tau \notin \mathcal{M}(\sigma)$, then $\bar{g}_\sigma \equiv 0$ on S^τ . This will achieve the proof of Proposition 2.5.5.
 Suppose $\tau \notin \mathcal{M}(\sigma)$. If τ is not a prefix of σ , then the same argument as above applies. If τ is a prefix of σ , write $\sigma = \tau \sigma'$. Since $\tau \notin \mathcal{M}(\sigma)$, $\sigma' \notin \mathcal{B}$ and $\text{Supp } \bar{g}_{\sigma'} \cap S = 0$ by Lemma 2.7.2. Lemma 2.7.5 yields the result as above.

2.7.2 PROOF OF THE GEOMETRICAL RESULTS FROM PARAGRAPH 2.5.2

We start by giving a proof of Lemma 2.5.3. We introduce the following notations: call $\mathcal{D}^0 = f_{12^{m+1}}^{-1}(\mathcal{D})$, $C_u^0 = f_{12^{m+1}}^{-1}(C_u)$, $C_l^0 = f_{12^{m+1}}^{-1}(C_l)$, and $C^0 = f_{12^{m+1}}^{-1}(C) = \mathcal{D}^0 \cup C_u^0 \cup C_l^0$.

Proof of Lemma 2.5.3. We start by proving that $d(\Omega^{11}, C^0) > 0$. Observe that $\sup\{d(x, \mathcal{H}), x \in \mathcal{D}^0\} = \ell \sin \varphi_0$ where ℓ is the length of the sides of the diamond D^0 . Since $d(\Omega^{11}, \mathcal{H}) \geq x_1$, condition 3 in §2.5.2.a implies that $d(\Omega^{11}, \mathcal{H}) > R\varphi_0 \geq \ell \sin \varphi_0$. Therefore, $d(\Omega^{11}, \mathcal{D}^0) > d(\Omega^{11}, \mathcal{H}) - \sup\{d(x, \mathcal{H}), x \in \mathcal{D}^0\} > \ell \sin \varphi_0$. Since $d(\Omega^{11}, C_u^0 \cup C_l^0) > 0$, we deduce the result.

Take $\sigma \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{B}$, suppose for example that $\sigma(1) = 1$. Suppose 12^{m+1} is a prefix of σ . Therefore, σ can be written $\sigma_{\uparrow k} \sigma'$ with $\sigma_{\uparrow k} \in 12^{m+1}(12|21)^*$ and $\sigma'(1) = \sigma'(2)$. Suppose for example that $\sigma'(1) = 1$.

Hence, $\Omega^\sigma \subset \Omega^{\sigma_{\uparrow k} 11}$, and $d(\Omega^\sigma, f_{\sigma_{\uparrow k}}(C^0)) \geq d(\Omega^{\sigma_{\uparrow k} 11}, f_{\sigma_{\uparrow k}}(C^0)) = a^k d(\Omega^{11}, C^0)$. Since $C \subset f_{\sigma_{\uparrow k}}(C^0)$, the result is proved in this case.

Suppose 12^{m+1} is not a prefix of σ . We know that in this case, $d(\Omega^\sigma, \Lambda) > x_2 > 2R\varphi_0$ by (2.39) and condition 3 in §2.5.2.a. Since $\sup\{d(x, \Lambda), x \in \mathcal{D}\} = a^{m+2} \ell \sin \varphi_0 < R\varphi_0$, we deduce as above that $d(\Omega^\sigma, \mathcal{D}) > x_2 - R\varphi_0 > 0$. It is easily seen that for every $\tau \notin \mathcal{B}$, $d(\Omega^\tau, C_u \cup C_l) > 0$. Since $\Omega^\sigma \subset \bigcup_{k=0}^m \Omega^{12^k 1}$, there is a constant c_0 independent of σ such that $d(\Omega^\sigma, C_u \cup C_l) > c_0$, which concludes the proof. \square

It is straightforward to check that, with the notations introduced in paragraph 2.5.2.a and (2.42), Lemmas 2.7.1, 2.7.2, 2.7.3, 2.7.4 and 2.7.5 still hold in this case. We start by stating a preliminary lemma.

LEMMA 2.7.7 – *If $\eta \notin \mathcal{B}$ and $\eta(1) = 1$ (resp. $\eta(1) = 2$), then $D^\eta \subset \{x_1 < 0\}$ (resp. $D^\eta \subset \{x_1 > 0\}$).*

Proof. Take $\eta \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{B}$ and suppose $\eta(1) = 1$. We first show that $d(\text{conv}(\Omega^\eta), \Lambda) > a^n R \varphi_0$. First suppose that 12^{m+1} is not a prefix of η , then (2.39) and condition 3 in §2.5.2.a imply that $d(\text{conv}(\Omega^\eta), \Lambda) > x_2 > R \varphi_0$.

If 12^{m+1} is a prefix of η , then $\eta = \eta_{\uparrow k} \eta'$ with $\eta_{\uparrow k} \in 12^{m+1}(12|21)^*$ and $\eta'(1) = \eta'(2)$. For example, suppose $\eta'(1) = 1$. Since $\text{conv}(\Omega^\eta) \subset f_{\eta_{\uparrow k}}(\text{conv}(\Omega^{11}))$, we deduce that $d(\text{conv}(\Omega^\eta), \Lambda) \geq d(f_{\eta_{\uparrow k}}(\text{conv}(\Omega^{11}), \Lambda) = a^k d(\text{conv}(\Omega^{11}), \mathcal{H}) > a^k R \varphi_0$ by condition 3 in §2.5.2.a.

Observe that

$$d(D^\eta, \Lambda) \geq d(\text{conv}(\Omega^\eta), \Lambda) - \sup\{d(x, \text{conv}(\Omega^\eta)), x \in D^\eta\} > a^n R \varphi_0 - a^n \ell \sin \varphi_0 \geq 0$$

by the last point, hence the result. \square

We now give the proof that Lemma 2.7.6 also remains true:

Proof. We first suppose that $\tau = \epsilon$. The proof that $S^\sigma \cap S_u^0 = S^\sigma \cap S_l^0 = \emptyset$ is the same as in Lemma 2.7.6.

We are left with checking that $S^\sigma \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Take $\eta \in \mathcal{B}^+$. If η is not a prefix of σ , then we can write $\eta = \eta_{\uparrow k} \eta'$ and $\sigma = \eta_{\uparrow k} \sigma'$ with $k \geq 0$ and $\sigma'(1) \neq \eta'(1)$. Suppose for example that $\sigma(1) = 1$. Then $S^{\sigma'} \subset \text{conv}(\Omega^{\sigma'}) \subset \{x_1 > 0\}$. On the other hand, by Lemma 2.7.7, since $\eta'(1) = 2$, $D^{\eta'} \subset \{x_1 > 0\}$, and $S^\sigma \cap D^\eta = \emptyset$.

If $\eta = \sigma$, then $S^\sigma \cap D^\eta = \emptyset$ by Remark 2.5.4 and by self-similarity.

If $\sigma = \eta \sigma'$ with $\sigma' \in \mathcal{A} \setminus \{\epsilon\}$, then $S^\sigma \subset \text{conv}(\Omega^\sigma) \subset \text{conv}(\Omega^{\eta \sigma'(1)})$. Since we have $\text{conv}(f_1(\Omega)) \cap D^0 = \text{conv}(f_2(\Omega)) \cap D^0 = \emptyset$, we deduce that $\text{conv}(\Omega^{\eta \sigma'(1)}) \cap D^\eta = \emptyset$ by self-similarity, and $S^\sigma \cap D^\eta = \emptyset$.

In the case when $\tau \neq \epsilon$, we conclude in the same way as in Lemma 2.7.6. \square

Therefore, it is easily checked that Propositions 2.5.2, 2.5.3 and 2.5.4 hold.

Proof of Proposition 2.5.7. Take $\sigma \in \mathcal{A}$ such that σ is not a prefix of $\tau \eta 12(21)^\infty$ or $\tau \eta 21(12)^\infty$. In the first place, suppose $\tau = \epsilon$. We first note that if $\sigma \notin \mathcal{B}$, then Lemma 2.7.2 yields the result. In the following, we assume that $\sigma \in \mathcal{B}$.

We first examine the case when η is not a prefix of σ . By symmetry, we can assume that $\sigma(1) = \eta(1) = 1$. There exists an integer $k > 0$ such that $\eta = \eta_{\uparrow k} \eta'$, $\sigma = \eta_{\uparrow k} \sigma'$ and $\eta'(1) \neq \sigma'(1)$. Suppose for example $\sigma'(1) = 1$. Since $\sigma \in \mathcal{B}$, $\sigma' \notin \mathcal{B}$, and Lemma 2.7.2 implies that $\text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'} \subset \{x_1 < 0\}$. Since $\eta' \notin \mathcal{B}$ and $\eta'(1) = 2$, the set $D^{\eta'}$ lies in $\{x_1 > 0\}$ by Lemma 2.7.7, which implies that $\text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'} \cap D^{\eta'} = \emptyset$. We conclude with Lemma 2.7.5.

In the case when η is a prefix of σ , the hypothesis we made on σ and η imply that σ has a prefix of the form $\eta 12(21)^l 1$ or $\eta 21(12)^l 2$ with $l \geq 0$. Suppose for example that the former is true, and write $\sigma = \eta 12(21)^l \sigma'$. Therefore, since $\sigma' \notin \mathcal{B}$, Lemma 2.7.2 implies that $\text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'}$ lies above the horizontal axis $f_{\eta 12(21)^l}(\Lambda)$ (recall that Λ is the axis given by $\{x_1 = 0\}$). On the other hand, the limit point of $\eta 12(21)^\infty$ lies below this axis. Since this point is the highest vertex of the set D^η , the result follows.

Let us now examine the case when $\tau \neq \epsilon$. If $\sigma = \tau \sigma'$ with $\sigma' \in \mathcal{A}$, then σ' is not a prefix of $\eta 12(12)^\infty$ or $\eta 21(21)^\infty$, and $\text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'} \cap D^\eta = \emptyset$ by what precedes, we conclude with Lemma 2.7.5. If $\sigma = \tau_{\uparrow k} \sigma'$ and $\tau = \tau_{\uparrow k} \tau'$ with $k \geq 0$ and $\sigma'(1) \neq \tau'(1)$ (for example $\sigma'(1) = 1$), then $\text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'} \subset \{x_1 < 0\} \cup S^0$. On the other hand, $f_{\tau'}(D^\eta) \subset S^{\tau'}$, which implies that $f_{\tau'}(D^\eta) \cap \text{Supp } \nabla \bar{g}_{\sigma'} = \emptyset$. We can conclude with Lemma 2.7.5. \square

CHAPTER 3

Comparison of different definitions of traces for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries

We consider a class of ramified bidimensional domains Ω with a self-similar fractal boundary Γ^∞ , which is supplied with a probability measure μ called the self-similar measure. Emphasis is put on the case when the domain is not a (ε, δ) -domain as defined by Jones and the fractal set is not totally disconnected. We compare two notions of trace on Γ^∞ for functions in $W^{1,p}(\Omega)$: the classical one, see for instance the book by Jonsson and Wallin, 1984, page 206, using the strict definition of a function at a point of Ω , and another one proposed in 2007 and heavily relying on self-similarity. We prove that the two traces coincide μ -almost everywhere on Γ^∞ . As a corollary, we characterize the critical number p^* such that for all $p < p^*$ (resp. $p > p^*$) there is a (resp. no) continuous extension operator from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

3.1 INTRODUCTION

In the present work, we consider a class of self-similar sets noted Γ^∞ below, see for example Figure 3.1. The set Γ^∞ is the unique compact subset of \mathbb{R}^2 such that

$$\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty),$$

where f_1 and f_2 are two similitudes with rotation angles $\pm\theta$ and contraction factor a such that $0 < a \leq a_\theta^*$. As we shall see, Γ^∞ can be seen as a part of the boundary of a ramified domain Ω in \mathbb{R}^2 , see Figure 3.1, and the restriction $a \leq a_\theta^*$ allows for the construction of Ω as a union of non-overlapping sub-domains, see §1.1.3.b.

Such a geometry can be seen as a bidimensional idealization of the bronchial tree, for example. Indeed, the present work is a continuation of [AT07] and of [AT08], which were part of a wider project aimed at simulating the diffusion of medical sprays in lungs. Since the exchanges between the lungs and the circulatory system take place only in the last generations of the bronchial tree (the smallest structures), reasonable models for the diffusion of, e.g., oxygen may involve a non-homogeneous Neumann or Robin condition on the boundary Γ^∞ . Similarly, the lungs are mechanically coupled to the diaphragm, which also implies non-homogeneous boundary conditions on Γ^∞ , if one is interested in a coupled fluid-structure model. It is therefore necessary to study traces of functions on Γ^∞ .

There are several possible ways of defining the trace of a function $v \in W^{1,p}(\Omega)$ on Γ^∞ . The first one, referred to as the *classical* or *strictly defined* trace below, relies on the notion of the *strict definition of a function at a point* $x \in \overline{\Omega}$, see for instance [JW84] page 206. It is recalled in § 3.3.1 below.

For $1/2 \leq a \leq a^*$, a different notion of trace was introduced in [AT07]. Its construction is recalled in § 3.3.2 below. This trace operator noted ℓ^∞ below, is obtained by exploiting the self-similarity, as the limit of a sequence of operators $(\ell^n)_n$: the operator ℓ^n maps $W^{1,p}(\Omega)$ to piecewise constant functions on a partition of Γ^∞ into 2^n sets whose μ -measure is 2^{-n} . Obtained by passing to the limit, ℓ^∞ is linear and continuous from $W^{1,p}(\Omega)$ to $L^p(\Gamma^\infty, d\mu)$. The self-similar construction of the trace operator ℓ^∞ has permitted to obtain several results:

- ◊ The space $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ was characterized in [AT08] as a *JLi p* space, see §3.3.2 below for the precise statement. The *JLi p* spaces were presented in [Jono4]: Haar wavelets of arbitrary order on Γ^∞ were used to construct a family of Lipschitz function spaces allowing jumps at the multiple points in Γ^∞ . These spaces were named $JLi p(t, p, q; m; \Gamma^\infty)$, where t is a positive real number, p, q are two real numbers not smaller than 1 and m is an integer (m is the order of the Haar wavelets used for constructing the space). Here *J* stands for *jumps*, since the considered functions may jump at the multiple points of Γ^∞ . Note that if a self-similar set K is totally disconnected, then the *JLi p* spaces on K coincide with Lipschitz or Besov spaces, more precisely that the spaces $JLi p(t, p, q; m; K)$ coincide with the Lipschitz spaces $Li p(t, p, q; m; K)$ also introduced in [Jono4]. The latter are a generalization of the more classical spaces $Li p(t, p, q; K)$ introduced in [JW84] since $Li p(t, p, q; [t]; K) = Li p(t, p, q; K)$. Note that $Li p(t, p, q; K)$ coincides with the Besov space $B_t^{p,q}(K)$, see [JW95]. Remember that if $p = q$ and $s \in (0, 1)$

$$B_s^{p,p}(\Gamma^\infty) = \left\{ f \in L^p_\mu(\Gamma^\infty); \iint_{x,y \in \Gamma^\infty, |x-y| < 1} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x-y|^{d+sp}} d\mu(x) d\mu(y) < \infty \right\}. \quad (3.1)$$

- ◊ As a consequence, if $1/2 \leq a < a^*$, i.e. if Γ^∞ is totally disconnected, then the trace space $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ is exactly $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$. Note that $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ is precisely the image of $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ by the classical trace operator, see [JW84].
- ◊ In the case when $a = a^*$, i.e. when the set Γ^∞ self-intersects, relations between *JLi p* and classical Besov spaces on Γ^∞ were studied in Chapter 1. As a consequence, it was also shown in Chapter 1 that there exists a critical exponent $p_\theta^* \in (1, 2)$, depending on the Hausdorff dimension of the self intersection of Γ^∞ such that for all p with $1 < p < p_\theta^*$, the identity $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ holds, and is false for $p > p_\theta^*$.

The question of extensions is closely related to that of traces.

- ◊ Jones [Jon81] (and Vodopjanov *et al.* [VGL79] in the case $n = 2$, see also [Maz85, JW84]) have studied the open bounded subsets Ω of \mathbb{R}^n such that there exists a continuous extension operator from $W^{\ell,p}(\Omega)$ in $W^{\ell,p}(\mathbb{R}^n)$, for all nonnegative integers ℓ and real numbers p , $1 \leq p \leq \infty$. Such domains are sometimes called Sobolev extension domains. Jones has proved that if Ω is an (ε, δ) -domain, see [Jon81, JW84] or paragraph 1.2.3 in the Introduction for the definition, then it is a Sobolev extension domain. Moreover, in dimension two, if Ω is finitely connected and a Sobolev extension domain, then Ω is an (ε, δ) -domain. In dimension two, the definition of such domains is equivalent to that of quasi-disks, see [Maz85].

- ◊ It can be seen that if $1/2 \leq a < a^*$, the domain Ω is an (ε, δ) -domain, hence a Sobolev extension domain.
- ◊ If on the contrary $a = a^*$ then the domain Ω is not a Sobolev extension domain (it is easily seen that for $p > 2$, the extension property from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ is not satisfied; in this case, it was proved in Chapter 2 that Ω has the Sobolev extension property (from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$) for $1 < p < p_\theta^*$, where p_θ^* is the critical exponent mentioned above; the proof of this result consisted in the construction of an extension operator which was compatible with that of ℓ^∞ ; it used the above-mentioned characterization of $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$, and a strengthened Poincaré inequality proved in [AT10]. The results obtained in Chapter 2 are recalled in § 3.4.1.b below.

A question that was not tackled in the previously mentioned works is the relation between the classically defined trace operator and the operator ℓ^∞ constructed using the self-similarity. Is it true that for a given function $v \in W^{1,p}(\Omega)$, the two definitions of the trace of v on Γ^∞ coincide μ -almost everywhere on Γ^∞ ? The goal of the present work is to give a positive answer to this question, using the extension operators constructed in Chapter 2. As a consequence, we shall see in § 3.4.4 that for $p > p_\theta^*$, the domain Ω does not have the $W^{1,p}$ extension property.

3.2 THE RAMIFIED DOMAINS

3.2.1 THE SELF-SIMILAR SET Γ^∞

We briefly recall the geometry of the domains we study, which are the same as in the previous chapters. We consider the similitudes f_1 and f_2 defined in (1.3) which depend on the real numbers a, α, β, θ where $0 < a < 1/\sqrt{2}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and $0 < \theta < \pi/2$.

We still denote Γ^∞ the self-similar invariant of the similitudes f_1 and f_2 :

$$\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty),$$

and we use the same notations as those introduced in §1.2.1. We have seen that the Hausdorff dimension of Γ^∞ , noted d then writes $\log 2 / \log(1/a)$. We recall the definition of the set

$$\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$$

associated with Γ^∞ . Recall the following theorem proved in Chapter 1 (see Theorem 1.2.1).

THEOREM 3.2.1 – *For any θ , $0 < \theta < \pi/2$, there exists a unique positive number $a_\theta^* < 1/\sqrt{2}$ which does not depend on (α, β) such that*

$$\begin{aligned} \text{if } 0 < a < a_\theta^* & \text{ then } \Xi = \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is totally disconnected,} \\ \text{if } a = a_\theta^* & \text{ then } \Xi \neq \emptyset \text{ and } \Gamma^\infty \text{ is connected,} \end{aligned} \tag{3.2}$$

see Figure 3 p.15.

3.2.2 THE RAMIFIED DOMAINS

We still consider the ramified domains Ω introduced in §1.2.2. Recall that their construction starts with a base cell Y^0 displayed in Figure 1.3. The domains are then obtained by gluing together the closure of the cells $f_\sigma(Y^0)$ for $\sigma \in \mathcal{A}$, see Figure 3.1 below.

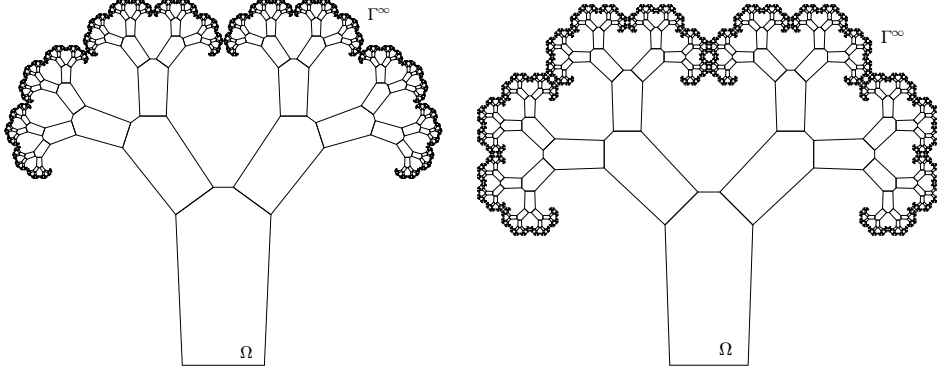


Figure 3.1: The ramified domain Ω for $\theta = \pi/5$ and $\theta = \pi/4$ when $a = a^*$, $\alpha = 0.7$, $\beta = 1.5$.

As we saw in Chapter 1, by a theorem of Y. Achdou and N. Tchou, we can assume that the domain Ω satisfy Assumption 1 p. 57, that is, Ω is a ramified domain as defined in §1.1.2.c in the Introduction of the thesis.

3.2.3 RAMIFIED DOMAINS ARE TWO-SETS

We recall the definition of a d -set given in §1.2.6.a and in (20) (see [JW84]).

DEFINITION 3.2.1 – Let $E \subset \mathbb{R}^2$ be an arbitrary Borel set. Let m_d be the d -dimensional Hausdorff measure. The set E is a d -set if there exist three positive constants r_0 , c_1 and c_2 such that for any closed ball $B(P, r)$, $P \in E$, $0 < r \leq r_0$,

$$c_1 r^d \leq m_d(B(P, r) \cap E) \leq c_2 r^d. \quad (3.3)$$

LEMMA 3.2.1 – There exist two positive constants \tilde{c}_1 and \tilde{c}_2 such that for any $P \in \Gamma^\infty$ and for any r , $0 < r \leq \text{diam}(\Omega)$,

$$\tilde{c}_1 r^2 \leq m(B(P, r) \cap \Omega) \leq \tilde{c}_2 r^2, \quad (3.4)$$

where $m = m_2$ is the standard Lebesgue measure un \mathbb{R}^2 .

Proof. The right side of (3.4) is clearly true with $\tilde{c}_2 = \pi$.

For the other inequality, take $P \in \Gamma^\infty$ and $r \in (0, \text{diam} \Omega]$. There exists $\sigma \in \mathcal{A}_\infty$ such that $P = f_\sigma(P)$. Take $n \in \mathbb{N}$ such that $a^n \text{diam} \Omega < r \leq a^{n-1} \text{diam} \Omega$, which implies that $\text{diam} f_{\sigma_{1^n}}(\Omega) = a^n \text{diam} \Omega < r$. Since $P \in f_{\sigma_{1^n}}(\Gamma^\infty)$, one has $P \in \overline{f_{\sigma_{1^n}}(\Omega)}$, and we deduce that $f_{\sigma_{1^n}}(\Omega) \subset B(P, r)$. Therefore, since $f_{\sigma_{1^n}}(\Omega) \subset \Omega$,

$$m(B(P, r) \cap \Omega) \geq m(f_{\sigma_{1^n}}(\Omega)) = a^{2n} m(\Omega) \geq \frac{a^2 m(\Omega)}{\text{diam}^2 \Omega} r^2,$$

hence the result. □

PROPOSITION 3.2.1 – Ω is a two-set.

Proof. Call $r_0 = \text{diam } \Omega$.

Step 1 We are first going to prove that there exist two positive constants c_3 and c_4 such that for all $P \in \Omega$, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$c_3 a^{2n} \leq m(B(P, a^n r_0) \cap \Omega) \leq c_4 a^{2n}. \quad (3.5)$$

Obviously, one can take $c_4 = \pi r_0^2$. Let us proceed by induction on n :

$n = 0$ From the self-similarity, at least one of the following assertions is true: $P \in Y^0$ or $\min_{Q \in \Gamma^\infty} |P - Q| \leq a r_0$. Indeed, if $P \notin Y^0$, then one can suppose without restriction that $P \in f_1(\overline{\Omega})$. In this case, $\min_{Q \in \Gamma^\infty} |P - Q| = \min_{Q \in f_1(\Gamma^\infty)} |P - Q|$, because for all $Q' \in f_2(\Gamma^\infty)$, the symmetric Q of Q' with respect to the vertical axis belongs to $f_1(\Gamma^\infty)$ and is such that $|P - Q| \leq |P - Q'|$. Therefore, $\min_{Q \in \Gamma^\infty} |P - Q| \leq a r_0$.

- ◇ Since Y^0 is a polygonal domain of \mathbb{R}^2 there exists a positive constant c such that for all $r \leq r_0$, and $Q \in \overline{Y^0}$, $m(B(Q, r) \cap Y^0) \geq c r^2$. Therefore, if $P \in \overline{Y^0}$, then for all r , $0 < r \leq r_0$, we have $m(B(P, r) \cap \Omega) \geq c r^2$.
- ◇ If $\min_{Q \in \Gamma^\infty} |P - Q| \leq a r_0$, call Q_{\min} a point in Γ^∞ achieving the minimum: then $B(Q_{\min}, (1-a)r_0) \subset B(P, r_0)$. Therefore, from Lemma 3.2.1,

$$m(B(P, r_0) \cap \Omega) \geq m(B(Q_{\min}, (1-a)r_0) \cap \Omega) \geq \tilde{c}_1 (1-a)^2 r_0^2.$$

We can take $c_3 = \min(\tilde{c}_1 (1-a)^2, c) r_0^2$.

$n \rightarrow n+1$ The induction hypothesis is (3.5) with the value of c_3 defined above. Take $P \in \Omega$.

- ◇ If $P \in \overline{Y^0}$, we have that $m(B(P, a^{n+1} r_0) \cap \Omega) \geq c r_0^2 a^{2(n+1)} \geq c_3 a^{2(n+1)}$.
- ◇ If $P \notin \overline{Y^0}$, we can assume without restriction that $P \in f_1(\Omega)$. There exists $Q \in \Omega$ such that $P = f_1(Q)$. Therefore $f_1(B(Q, a^n r_0) \cap \Omega) \subset B(P, a^{n+1} r_0) \cap \Omega$, and from the induction hypothesis, $m(B(Q, a^n r_0) \cap \Omega) \geq c_3 a^{2n}$. Therefore, one has $m(B(P, a^{n+1} r_0) \cap \Omega) \geq c_3 a^{2(n+1)}$.

Step 2 For $0 < r \leq r_0$, there exists a unique $n > 0$ such that $r_0 a^n < r \leq r_0 a^{n-1}$. Thus, for all $p \in \Omega$, $m(B(p, r) \cap \Omega) \geq m(B(p, r_0 a^n) \cap \Omega) \geq c_3 a^{2n} \geq \frac{c_3 a^2}{r_0^2} r^2$. We have proved (3.3) with $c_1 = \frac{c_3 a^2}{r_0^2}$ and $c_2 = \pi$. \square

3.3 DIFFERENT DEFINITIONS OF BOUNDARY TRACES

3.3.1 THE CLASSICAL DEFINITION OF TRACES

We recall the classical definition of a trace operator on $\partial \omega$, see §1.2.5 and for instance [JW84], when ω is an open subset of \mathbb{R}^2 .

DEFINITION 3.3.1 – Consider an open set $\omega \subset \mathbb{R}^2$. The function $u \in L^1_{loc}(\omega)$ can be strictly defined at $x \in \overline{\omega}$ if the limit

$$\bar{u}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(x, r) \cap \omega)} \int_{B(x, r) \cap \omega} u(z) dz \quad (3.6)$$

exists.

The trace $u|_{\partial\omega}$ is defined as the function given by $u|_{\partial\omega}(x) = \bar{u}(x)$ at every point $x \in \partial\omega$ such that the limit $\bar{u}(x)$ exists.

In [JW84], Jonsson and Wallin proved the following result, stated before in Proposition 1.2.1. Here we state it in the particular case when the space dimension is 2.

PROPOSITION 3.3.1 – *Let ω be an open 2-set such that the boundary $\partial\omega$ of ω is a 1-set. Let us assume that for a real number $p \in (1, \infty)$, there exists an extension operator $\mathcal{E} : W^{1,p}(\omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Let $u \in W^{1,p}(\omega)$, then u can be strictly defined in $\partial\omega$ almost everywhere with respect to the one-dimensional Hausdorff measure m_1 and $\bar{u} = \mathcal{E}u$ m_1 -a.e.*

Although Ω defined above is a two-set, Proposition 3.3.1 does not apply to Ω because $\partial\Omega$ is not a 1-set even in the cases when Γ^∞ is a 1-set.

3.3.2 A TRACE OPERATOR DEFINED BY SELF-SIMILARITY

In the remaining part of the paper, we will take a such that $1/2 \leq a \leq a^*$, so the Hausdorff dimension d of Γ^∞ is not smaller than 1.

We recall the construction of the trace operator made in [AT07] by taking advantage of the self-similarity; this trace operator, called ℓ^∞ below, is well defined even if $a = a^*$.

We first construct a sequence $(\ell^n)_n$ of approximations of the trace operator: consider the sequence of linear operators $\ell^n : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p_\mu$,

$$\ell^n(v) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} \left(\frac{1}{|\Gamma^\sigma|} \int_{\Gamma^\sigma} v \, dx \right) \mathbf{1}_{f_\sigma(\Gamma^\infty)}, \quad (3.7)$$

where $|\Gamma^\sigma|$ is the one-dimensional Lebesgue measure of Γ^σ .

PROPOSITION 3.3.2 – *see [AT07]. The sequence $(\ell^n)_n$ converges in $\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p_\mu)$ to an operator that we call ℓ^∞ .*

The operator ℓ^∞ is clearly a trace operator on Γ^∞ . Recall that the range of ℓ^∞ has been characterized in [AT10] (see §1.3.4).

3.4 COMPARISON OF THE TWO DEFINITIONS OF TRACE

We start by recalling important extension results for the space $W^{1,p}(\Omega)$.

3.4.1 EXTENSION RESULTS FOR THE RAMIFIED DOMAINS

3.4.1.a The case when $a < a^*$

We have seen in § 3.1 that if ω is an (ε, δ) -domain, then it is a Sobolev extension domain. In dimension $n = 2$, the definition of such domains is equivalent to that of quasi-disks, see [Maz85], and the extension operator can be chosen such that $\mathcal{E}(u) \geq 0$ if $u \geq 0$.

The above mentioned results clearly hold with our domains Ω if $a < a^*$.

3.4.1.b The case when $a = a^*$

When $a = a_\theta^*$, Ω is not an (ε, δ) -domain, and the extension results of Jones and Vodopjanov *et al.* cannot be used. We recall Theorem B, which was proved in Chapter 2:

THEOREM 3.4.1 – 1. *If $m\theta > \frac{\pi}{2}$ and $p \in (1, 2)$, then there exists a continuous linear operator \mathcal{E} from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ such that*

$$\mathcal{E}(u)|_\Omega = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

and such that $\mathcal{E}(u) \geq 0$ if $u \geq 0$.

2. *If $m\theta = \frac{\pi}{2}$ and $p \in (1, 2 - \frac{d}{2})$, then there exists a continuous linear operator \mathcal{E} from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ such that*

$$\mathcal{E}(u)|_\Omega = u, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

and such that $\mathcal{E}(u) \geq 0$ if $u \geq 0$.

Let p_θ^* be defined by $p_\theta^* = 2$ if $m\theta > \frac{\pi}{2}$ and $p_\theta^* = 2 - \frac{d}{2}$ if $m\theta = \frac{\pi}{2}$; it is clear that $p_\theta^* > 1$ and a consequence of Theorem 3.4.1 is that Ω has the $W^{1,p}$ -extension property if $p \in (1, p_\theta^*)$.

Note that the critical exponent p_θ^* already appeared in Chapter 1, where it was proved if $a = a^*$ and $1 < p < p_\theta^*$, then

$$\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega)) = JLi p(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = Li p(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) = B_{1 - \frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty),$$

and that the previous space identities do not hold for $p > p_\theta^*$.

3.4.2 SOME RESULTS ON THE CLASSICALLY DEFINED TRACE

We consider a such that $1/2 \leq a \leq a^*$. Hereafter, the notation $\bar{u}(x)$ will be used for the strict definition at $x \in \bar{\Omega}$ of a function $u \in L^1(\Omega)$.

From §3.4.1.a and §3.4.1.b, we know that there exists a linear extension operator \mathcal{E} which is continuous from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, for all p , $p \in (1, p_\theta^*)$ and which preserves the signs of the functions, *i.e.* if $u \geq 0$ in Ω then $\mathcal{E}(u) \geq 0$ in \mathbb{R}^2 . Note that if $1/2 \leq a < a^*$, then the extension property holds for all $p > 1$, but we will not need this in what follows.

As a consequence, the operator \mathcal{E} is continuous from $W^{1,q}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, for all $q \geq p_\theta^*$ and $1 < p < p_\theta^*$ and from $W^{1,q}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, for all $p \leq q < p_\theta^*$. This extension operator is an important ingredient in the proof of the following result:

THEOREM 3.4.2 – *Let $p > 1$ be a real number. For all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, u can be strictly defined m_1 -almost everywhere on $\partial\Omega$. Furthermore, m_1 -almost everywhere on $\partial\Omega$, \bar{u} defined by (3.6) coincides with $\widetilde{\mathcal{E}(u)}$, the strictly defined function in \mathbb{R}^2 which is given by*

$$\widetilde{\mathcal{E}(u)}(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \mathcal{E}(u)(z) dz, \text{ when the limit exists.}$$

Proof. The proof is similar to that of Proposition 2 in [JW84] page 206. It is based on some results on potential spaces, which we recall in the specific present framework for completeness. Assume that u is positive. This is not a restriction, since it is always possible to decompose u in $u = u^+ - u^-$ with $u^+ \geq 0$, $u^- \geq 0$ and $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$. We know that $\mathcal{E}(u)$ is positive and belongs to $\in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ for some p , $1 < p \leq \min(q, p_\theta^*)$.

Thanks to the identification of the potential spaces and the Sobolev spaces (see (43) and for instance E.M. Stein [Ste70] Theorem 3, Ch. V p.135), there exists $g \in L^p(\mathbb{R}^2)$, such that $\mathcal{E}(u) = G_1 \star g$ where G_1 is the Bessel kernel of order one. Take $\beta \in (0, 2)$. N.G. Meyers proved in [Mey75], Theorem 3.2 page 165 that for almost every ξ_0 (with respect to the β -Hausdorff measure), there exists a set E_{ξ_0} such that

1. $\mathcal{E}(u)(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \xi \notin E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u)(\xi)$,
2. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_p(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0})}{r^\beta} = 0$,

where $C_p(A)$ is the capacity of a Borel set A , which is defined by

$$C_p(A) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} f^p, f \geq 0 \text{ on } \mathbb{R}^2 \quad G_1 \star f(x) \geq 1 \quad \forall x \in A \right\}.$$

Moreover, thanks to Proposition 1 page 151 in [JW84], see also [JW78], p.178, $\mathcal{E}(u)$ coincides with $\widetilde{\mathcal{E}(u)}$ a.e. with respect to the β -Hausdorff measure if $1 - \frac{(2-\beta)}{p} > 0$.

For a fixed value of $\beta > 2 - p$, let us consider $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$ with the previously mentioned properties. Let \bar{p} be the Sobolev exponent associated to p i.e. $\bar{p} = \frac{2p}{2-p}$ (we can always assume that $p < 2$) and \bar{p}' the conjugate exponent of \bar{p} . Then for any $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ such that $f \geq 0$ and $G_1 \star f(x) \geq 1$ for all $x \in B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}$,

$$\begin{aligned} m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}) &\leq \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}} G_1 \star f \leq \|G_1 \star f\|_{L^{\bar{p}}(\mathbb{R}^2)} (m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}))^{\frac{1}{\bar{p}}} \\ &\leq c \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} (m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}))^{\frac{1}{\bar{p}'}} \end{aligned}$$

and

$$m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0})^{p/\bar{p}} \leq c^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p.$$

Then, minimizing with respect to f and using N.G. Meyers result,

$$m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0})^{\frac{2-p}{2}} \leq C_p c^p (B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}) = o(r^\beta),$$

which implies that

$$m_2(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}) = o(r^{\frac{2\beta}{2-p}}). \quad (3.8)$$

Thanks to the assumptions on ξ_0 ,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{E}(u)}(\xi_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \int_{B(\xi_0, r)} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \left(\int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 + \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \right). \end{aligned}$$

Thanks to the continuity property and (3.8), if $\beta > 2 - p$ then

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, dm_2 = \mathcal{E}(u)(\xi_0),$$

and

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 = 0. \quad (3.9)$$

Hence

$$\tilde{\mathcal{E}}(u)(\xi_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, dm_2. \quad (3.10)$$

We now have all the tools necessary to begin the proof:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega} u \, dm_2 = \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \\ & = \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \left(\int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 + \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \right). \end{aligned}$$

For the first integral, since Ω is a 2-set:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 & \leq \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \\ & \leq C \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r))} \int_{B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, dm_2 \end{aligned}$$

and as $r \rightarrow 0$, this tends to zero if $\beta > 2 - p$ thanks to (3.9).

For the second integral, if $\beta > 2 - p$, using the continuity property of $\mathcal{E}(u)$ in $\Omega \cap E_{\xi_0}^c$ and again the fact that Ω is a 2-set,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, dm_2 = \mathcal{E}(u)(\xi_0).$$

Hence, for all ξ_0 chosen as above, the limit $\tilde{u}(\xi_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r) \cap \Omega} u(z) \, dz$ exists and

$$\tilde{u}(\xi_0) = \mathcal{E}(u)(\xi_0) = \widetilde{\mathcal{E}(u)}(\xi_0).$$

We can choose $\beta = 1$ since with $p > 1$, the condition $\beta > 2 - p$ is fulfilled. This concludes the proof. \square

3.4.3 SELF-SIMILAR STRICTLY DEFINED TRACE ON Γ^∞

Recall that $\Xi = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$, and define the set of the multiple points of Γ^∞ , $\Xi^\infty = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}} f_\sigma(\Xi)$. Note that $\mu(\Xi^\infty) = 0$ and $m_1(\Xi^\infty) = 0$. For $x \in \Gamma^\infty \setminus \Xi^\infty$, there is one and only one $\tau_x \in \mathcal{A}_\infty$ such that for all $n > 0$, $x \in f_{\tau_{x,n}}(\Gamma^\infty)$, where $\tau_{x,n} \in \mathcal{A}_n$ and $\tau_{x,n}(i) = \tau_x(i)$ for $i = 1, \dots, n$.

DEFINITION 3.4.1 – The function $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ can be self-similarly strictly defined at $x \in \Gamma^\infty \setminus \Xi^\infty$ if the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_{x,n}})} \int_{\Omega^{\tau_{x,n}}} u(z) dz$$

exists.

The self-similar strictly defined trace of u on Γ^∞ is then defined as

$$\check{\ell}^\infty(u)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_{x,n}})} \int_{\Omega^{\tau_{x,n}}} u(z) dz \quad (3.11)$$

at every point $x \in \Gamma^\infty \setminus \Xi^\infty$ such that the limit exists.

THEOREM 3.4.3 – Let $p > 1$ be a real number. For all $u \in W^{1,p}(\Omega)$, the limit in the right hand side of (3.11) can be self-similarly strictly defined m_1 -almost everywhere on Γ^∞ . Furthermore, m_1 -almost everywhere on Γ^∞ , $\check{\ell}^\infty(u)$ coincides with $\widetilde{\mathcal{E}}(u)$.

Proof. The proof is very similar to that of Theorem 3.4.2 and we take the same notations. We know that for $\beta = 1$, we have $1 - \frac{2-\beta}{p} = 1 - \frac{1}{p} > 0$ where $p \in (1, 2)$ is defined in the proof of Theorem 3.4.2. Hence, for almost every $\xi_0 \in \Gamma^\infty \setminus \Xi^\infty$ w.r.t. m_1 , there exists a set E_{ξ_0} such that

1. $\mathcal{E}(u)(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0, \xi \notin E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u)(\xi)$,
2. $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{C_p(B(\xi_0, r) \cap E_{\xi_0}^c)}{r} = 0$,

and that $\mathcal{E}(u)$ coincides with $\widetilde{\mathcal{E}}(u)$ at ξ_0 . Fix such a ξ_0 . We write $\tau = \tau_{\xi_0}$ and $\tau_n = \tau_{\xi_0, n}$ for brevity.

We know that $\Omega^{\tau_n} \subset B(\xi_0, a^n \text{diam}(\Omega))$ and that $m_2(\Omega^{\tau_n}) = a^{2n} m_2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_n})} \int_{\Omega^{\tau_n}} u \, d m_2 &= \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_n})} \int_{\Omega^{\tau_n}} \mathcal{E}(u) \, d m_2 \\ &= \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_n})} \left(\int_{\Omega^{\tau_n} \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, d m_2 + \int_{\Omega^{\tau_n} \cap E_{\xi_0}^c} \mathcal{E}(u) \, d m_2 \right). \end{aligned}$$

Let us call $r_n = a^n \text{diam}(\Omega)$. For the first integral,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_n})} \int_{\Omega^{\tau_n} \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, d m_2 \\ &\leq \frac{m_2(B(\xi_0, r_n) \cap \Omega)}{m_2(\Omega^{\tau_n})} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r_n) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r_n) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, d m_2 \\ &\leq \frac{\pi \text{diam}^2(\Omega)}{m_2(\Omega)} \frac{1}{m_2(B(\xi_0, r_n) \cap \Omega)} \int_{B(\xi_0, r_n) \cap \Omega \cap E_{\xi_0}} \mathcal{E}(u) \, d m_2, \end{aligned}$$

which goes to 0 as n tends to infinity from the proof of Theorem 3.4.2. The second term converges to $\mathcal{E}(u)(\xi_0)$ from (3.8) and the continuity property of $\mathcal{E}(u)$ in $\Omega \cap E_{\xi_0}^c$. \square

3.4.4 COMPARISON OF THE DIFFERENT TRACES

PROPOSITION 3.4.1 – For any $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, there exists a set $\mathcal{N} \subset \Gamma^\infty$ containing Ξ^∞ with $\mu(\mathcal{N}) = 0$ such that for all $x \in \Gamma^\infty \setminus \mathcal{N}$,

- ◊ $\widetilde{\mathcal{E}(u)}(x)$, $\bar{u}(x)$ and $(\ell^\infty(u))(x)$ are well defined,
- ◊ $(\ell^\infty(u))(x) = \bar{u}(x) = \widetilde{\mathcal{E}(u)}(x)$.

Proof. From Theorem 3.4.2, we know that there exists a subset \mathcal{N}_1 of Γ^∞ with $\mu(\mathcal{N}_1) = 0$ such that $\widetilde{\mathcal{E}(u)}(x)$ and $\bar{u}(x)$ are well defined and coincide for $x \in \Gamma^\infty \setminus \mathcal{N}_1$. From Theorem 3.4.3, we know that there exists a subset \mathcal{N}_2 of Γ^∞ containing Ξ^∞ with $\mu(\mathcal{N}_2) = 0$ such that $\mathcal{E}(u)(x)$ and $\check{\ell}^\infty(u)(x)$ are well defined and coincide for $x \in \Gamma^\infty \setminus \mathcal{N}_2$. Therefore, for $x \in \Gamma^\infty \setminus (\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$, $\check{\ell}^\infty(u)(x)$, $\mathcal{E}(u)(x)$ and $\bar{u}(x)$ are well defined and coincide.

On the other hand, it is elementary to check that if $u \in W^{1,p}(\Omega)$ with $p \geq 1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| (\ell^n(u))(x) - \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_{x,n}})} \int_{\Omega^{\tau_{x,n}}} u(z) dz \right\|_{L^p_\mu(\Gamma^\infty)} = 0,$$

because, for all $x \in \Gamma^\infty \setminus \Xi^\infty$,

$$\left| (\ell^n(u))(x) - \frac{1}{m_2(\Omega^{\tau_{x,n}})} \int_{\Omega^{\tau_{x,n}}} u(z) dz \right| \leq ca^{n(1-2/p)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega^{\tau_{x,n}})}$$

and $\sum_{\tau \in \mathcal{A}_n} 2^{-n} a^{n(p-2)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega^\tau)}^p = \sum_{\tau} a^{n(p-2+d)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega^\tau)}^p$ tends to zero as n tends to $+\infty$.

This implies that $\ell^\infty(u)$ coincides with $\check{\ell}^\infty(u)$ μ -almost everywhere on Γ^∞ .

As a consequence of the first point, $\ell^\infty(u)$ coincides with \bar{u} and $\widetilde{\mathcal{E}(u)}$ μ -almost everywhere on Γ^∞ . \square

As a consequence of Proposition 3.4.1, we see that if $p > p_\theta^*$, there does not exist any continuous extension operators from $W^{1,p}(\Omega)$ to $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Indeed, if such an extension operator \mathcal{E} existed, then for any $u \in W^{1,p}(\Omega)$, the trace (in the classical sense) of $\mathcal{E}(u)$ on Γ^∞ , namely $\widetilde{\mathcal{E}(u)}$ would belong to $B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$ (see [JW84]), where $B_s^{p,p}(\Gamma^\infty)$ is given by (3.1).

But since $\ell^\infty(u)$ and $\widetilde{\mathcal{E}(u)}$ coincide μ -everywhere, this would also imply that for every $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\ell^\infty(u) \in B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$.

This is in contradiction with the characterization of $\ell^\infty(W^{1,p}(\Omega))$ as the space $JLi p(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty)$ given by Theorem 1.3.4 (see [AT10]), and the fact that

$$JLi p(1 - \frac{2-d}{p}, p, p; 0; \Gamma^\infty) \not\subset B_{1-\frac{2-d}{p}}^{p,p}(\Gamma^\infty)$$

for $p > p_\theta^*$, see Chapter 1.

PART II

**A NUMERICAL APPROACH FOR A MIXED
TRANSMISSION PROBLEM WITH A SELF-SIMILAR
FRACTAL INTERFACE**

CHAPITRE 4

Une approche numérique d'un problème de transmission mixte avec une interface fractale auto-similaire

Cette partie décrit l'état d'avancement de travaux en cours. Notre étude a porté jusqu'à présent sur la mise en œuvre numérique, et une étude théorique complémentaire reste nécessaire.

On considère un problème aux limites dans $\Omega \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$, où Ω est un domaine ramifié de \mathbb{R}^2 dont la frontière contient une partie fractale auto-similaire Γ^∞ . On cherche une solution au problème de Poisson à l'intérieur du domaine et à l'extérieur avec une condition de transmission à travers Γ^∞ et des conditions mixtes sur le reste du bord.

On propose une méthode de résolution numérique du problème analogue où l'on remplace le domaine Ω par un sous-domaine. Cette méthode consiste à coupler une méthode intégrale pour la résolution du problème extérieur et une méthode d'éléments finis auto-similaires pour le problème intérieur.

4.1 INTRODUCTION

Les problèmes de transmission apparaissent naturellement dans de nombreux domaines de la physique. On considère un domaine partitionné en plusieurs sous-domaines, et des problèmes aux limites comprenant des équations aux dérivées partielles dans les sous-domaines, des conditions de transmission sur des interfaces entre les sous-domaines et d'autres conditions aux limites sur le bord.

Les interfaces des domaines considérés sont en général supposées régulières. On note toutefois un intérêt plus récent pour des problèmes de transmission à travers des interfaces irrégulières, voire fractales, qui trouvent de nombreuses applications. Par exemple, l'étude du flot de courant à travers une électrode irrégulière en électrochimie (voir [Sap94, FS00]). Par ailleurs, des problèmes de transmission à travers des surfaces préfractales et fractales de type Von Koch ont été étudiés par exemple dans [Lan02, Lan04, LV12], et des résultats de convergence du problème avec interface préfractale vers le problème avec interface fractale ont été montrés dans [LV10]. Dans cette dernière référence, la condition de transmission fait intervenir un opérateur laplacien sur le fractal, défini en utilisant une méthode variationnelle grâce au caractère p.c.f. de ce dernier.

Dans ce chapitre, on étudie d'un point de vue numérique des problèmes aux limites avec

deux sous-domaines : un domaine ramifié du plan dont la frontière contient une partie fractale auto-similaire Γ^∞ et le domaine extérieur correspondant. On cherche des solutions à des problèmes de Poisson sur le domaine ramifié et le domaine extérieur qui vérifient des conditions de transmission à travers l'interface Γ^∞ et des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le reste de la frontière du domaine ramifié.

Plus précisément, on s'intéresse à des problèmes que l'on écrit formellement de la façon suivante :

$$\Delta u|_\Omega = f^i \text{ dans } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\Delta u|_{\Omega_e} = f^e \text{ dans } \Omega_e, \quad (4.2)$$

$$[u] = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, \quad (4.3)$$

$$[\partial_n u] = 0 \text{ sur } \Gamma^\infty, \quad (4.4)$$

avec en plus des conditions de Neumann homogène ou de Dirichlet sur le reste du bord de Ω et de Ω_e , où Ω désigne le domaine ramifié, Ω_e le complémentaire dans \mathbb{R}^2 de $\overline{\Omega}$, et $[u]$, $[\partial_n u]$ les sauts respectifs de u et $\partial_n u$ à travers l'interface Γ^∞ . La source donnée par les fonctions f^i et f^e variera selon les situations considérées. On note que la valeur de u sur Γ^∞ est prise au sens de la trace définie au §1.2.5, et que la condition (4.4) est entendue en un sens faible défini plus loin.

Il s'agit d'une première étape vers des problèmes de transmission proprement dits, obtenus par exemple en remplaçant l'équation (4.2) par

$$-\Delta u|_{\Omega_e} + \alpha u|_{\Omega_e} = f^e,$$

pour une constante α , ou encore la condition (4.4) par

$$[\partial_n u] + \beta u = 0,$$

pour une constante β .

Numériquement, on se ramènera à l'étude d'un problème similaire dans $\Omega^m \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}^m)$, où Ω^m est un sous-domaine du domaine ramifié obtenu en arrêtant la construction du domaine ramifié Ω après un nombre fini de ramifications et son complémentaire, ce qui revient à considérer un problème dans des domaines polygonaux. On va proposer une méthode de résolution de ces problèmes consistant à coupler une méthode basée sur l'auto-similarité développée dans [AST06, AT07] pour le problème intérieur, et des méthodes de représentation intégrale pour le problème extérieur.

Les questions liées au passage à la limite quand le sous-domaine tend vers Ω sont ouvertes et laissées à un travail ultérieur.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la partie 4.2, on définit le cadre fonctionnel et on présente les problèmes aux limites. La partie 4.3 est consacrée à la résolution du problème extérieur dans le cas d'une interface préfractale. Dans la partie 4.5, on s'intéresse à des exemples et on présente les résultats numériques obtenus. On décrit en partie 4.6 une méthode de résolution approchée du problème intérieur sur le domaine ramifié entier proposée par Y. Achdou, C. Sabot et N. Tchou dans [AST06].

4.2 LE PROBLÈME AUX LIMITES DANS $\Omega \cup \Omega_e$

4.2.1 LE PROBLÈME AVEC INTERFACE FRACTALE

Les domaines Ω que nous allons considérer sont les domaines ramifiés de la classe \mathcal{D} définie en (15) (voir Figure 6). On appelle toujours Γ^∞ la partie fractale auto-similaire de la frontière de Ω , Γ^0 la base du domaine, et $\Gamma^\sigma = f_\sigma(\Gamma^0)$ pour $\sigma \in \mathcal{A}$ (voir §1.1.2.a pour les notations). On désigne par ailleurs par Σ la partie de la frontière de Ω définie par $\Sigma = \partial\Omega \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^\infty)$.

On se place dans le cas sous-critique où $a < a^*$ (voir Théorème 1.2.1). Dans ce cas, l'ensemble Γ^∞ est totalement disconnexe.

On s'intéresse ici au problème aux limites suivant dans $\Omega \cup \Omega_e$, où $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$:

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f^i & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_e = f^e & \text{dans } \Omega_e, \\ \partial_n u_i|_\Sigma = \partial_n u_e|_\Sigma = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \partial_n u_e|_{\Gamma^0} = 0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ u_i|_{\Gamma^0} = u_0 & \text{sur } \Gamma^0, \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\partial_n u_i$ (resp. $\partial_n u_e$) désigne la dérivée normale de u_i (resp. u_e) par rapport à la normale extérieure à l'ouvert Ω qui existe en dehors des coins sur $\Sigma \cup \Gamma^0$. On souhaite ajouter au problème (4.5) une condition faible traduisant la continuité des flux à travers Γ^∞ .

Les conditions de Neumann sur Σ signifient qu'il n'y a pas d'échanges à travers cette partie de la frontière. La condition de Dirichlet sur Γ^0 du côté intérieur traduit l'existence d'une source.

On introduit les espaces

$$V_i = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma^0} = 0\}, \quad (4.6)$$

$$V_e = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_e), \frac{u}{(1+|x|^2)^{1/2} \ln(2+|x|^2)} \in L^2(\Omega_e), \nabla u \in L^2(\Omega_e) \right\}, \quad (4.7)$$

$$V = \{(u_i, u_e) \in V_i \times V_e, u_i|_{\Gamma^\infty} = u_e|_{\Gamma^\infty} \mu \text{ p.p.}\}, \quad (4.8)$$

$$W = \{(u_i, u_e) \in H^1(\Omega) \times V_e, u_i|_{\Gamma^\infty} = u_e|_{\Gamma^\infty} \mu \text{ p.p.}\}, \quad (4.9)$$

ainsi que les espaces affines suivants, pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0)$,

$$V_{i,u_0} = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma^0} = u_0\}, \quad (4.10)$$

$$V_{u_0} = \{(u_i, u_e) \in V_{i,u_0} \times V_e, u_i|_{\Gamma^\infty} = u_e|_{\Gamma^\infty} \mu \text{ p.p.}\}. \quad (4.11)$$

On désigne ici par $u_i|_{\Gamma^\infty}$ la trace au sens classique de u_i sur Γ^∞ (voir §1.2.5) dont on a montré (voir Proposition 3.4.1) qu'elle coïncidait presque partout avec la trace auto-similaire définie au paragraphe 1.3.3.

D'autre part, $u_e|_{\Gamma^\infty}$ désigne la trace au sens classique de u_e sur Γ^∞ : on peut montrer que toute fonction $u_e \in V_e$ peut être strictement définie sur Γ^∞ , et que l'opérateur de trace est continu de V_e dans $L^2_\mu(\Gamma^\infty)$. En effet, on peut montrer que comme $a < a^*$, l'ouvert Ω_e est un domaine (ε, δ) . De ce fait, le théorème de Jones assure que Ω_e est un domaine de prolongement H^1 , et le

théorème de trace de Jonsson et Wallin permet de conclure.

Ainsi défini, l'espace V est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|(u_i, u_e)\|_V = \left(\|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_e\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2}.$$

Dans la suite, on prendra f^i dans le dual V_i' de V_i et f^e dans $L^2(\Omega_e)$. Pour simplifier, on supposera que f^e est supportée dans un compact disjoint de $\bar{\Omega}$, et qu'il existe un entier m tel que f^i est supportée dans $\bigcup_{k \leq m} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_k} f_\sigma(\bar{Y}^0)$.

La formulation variationnelle du problème (4.5) permet d'exprimer les conditions de raccord en un sens faible. Elle s'écrit de la manière suivante : on cherche $u = (u_i, u_e) \in V_{u_0}$ telle que

$$A(u, v) = \int_{\Omega} f^i v_i + \int_{\Omega_e} f^e v_e, \quad \forall v = (v_i, v_e) \in V, \quad (4.12)$$

où

$$A(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \int_{\Omega_e} \nabla u_e \cdot \nabla v_e. \quad (4.13)$$

A est une forme bilinéaire continue sur $W \times W$ et coercive sur $V \times V$. Le théorème de Lax-Milgram implique donc que (4.12) a une solution unique.

REMARQUE 4.2.1 – *Dans un travail en cours, nous montrerons qu'on peut aussi formuler le problème aux limites dans le cas critique $a = a^*$. Dans ce cadre, il faut prendre des précautions supplémentaires. On introduit la canopée de Ω , définie comme l'intersection de Γ^∞ avec la frontière de la composante connexe non bornée de Ω_e . On peut montrer que la canopée est un d_c -ensemble associé à une d_c -mesure m , où d_c satisfait $a^{2d_c} + a^{3d_c} + \dots + a^{d_c(m+1)} = 1/2$, et $1 \leq d_c \leq d$ si $0 < \theta < \pi/2$ (voir [MF99]).*

De la même façon, chaque composante connexe ω de Ω_e est telle que l'intersection γ_ω de sa frontière avec Γ^∞ est un d_c -ensemble associé à une d_c -mesure m_ω .

On peut aussi montrer que chaque composante connexe ω de Ω^e est un domaine (ε, δ) . On peut donc appliquer le théorème de prolongement de Jones, ainsi que le théorème de trace de Jonsson et Wallin, ce qui permet de définir la trace d'une fonction de $H^1(\omega)$ sur γ_ω presque partout pour la mesure m_ω .

On peut aussi prouver que l'opérateur de trace ainsi construit est continu de $H^1(\omega)$ à valeur dans l'espace de Besov $B_{2,2}^{d_c/2}(\gamma_\omega)$ pour la mesure m_ω .

On peut également montrer l'existence d'un opérateur de trace continu de $H^1(\Omega)$ à valeur dans $B_{2,2}^{d_c/2}(\gamma_\omega)$, grâce au Théorème 3.4.2.

On construit alors le sous-espace V de $V_i \times V_e$ des fonctions dont les sauts à travers les courbes γ_ω sont nuls pour toutes les composantes connexes ω de Ω^e , c'est-à-dire que les traces coïncident.

Cet espace V est un sous-espace fermé de $V_i \times V_e$, c'est donc un Hilbert. On peut donc utiliser la même formulation que (4.12) avec cette nouvelle définition de V , et montrer la coercivité de la forme bilinéaire associée.

4.2.2 LE PROBLÈME AVEC INTERFACE PRÉFRACTALE

On formule ici le même problème que dans le paragraphe précédent en prenant un sous-domaine Ω^m du domaine ramifié Ω et son domaine extérieur Ω_e^m au lieu de Ω et Ω_e . Le sous-domaine Ω^m est obtenu en arrêtant la construction du domaine ramifié après m générations et

est défini plus précisément par

$$\Omega^m = \text{Intérieur} \left(\bigcup_{k \leq m} \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_k} f_\sigma(\overline{Y^0}) \right).$$

On note que le domaine Ω^m ainsi défini est polygonal. Le domaine extérieur Ω_e^m qui lui correspond est alors défini comme le complémentaire dans \mathbb{R}^2 de $\overline{\Omega^m}$. On note alors que Ω_e^m est connexe et $\Omega_e \subset \Omega_e^m$. On introduit également l'ensemble $\Sigma^m = \partial\Omega \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^m)$ inclus dans la frontière de Ω^m , correspondant à l'ensemble Σ tronqué après m générations.

L'analogie de l'interface fractale auto-similaire Γ^∞ est $\Gamma^m = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{A}_m} f_\sigma(\Gamma^0)$. On dit que Γ^m est un ensemble *préfractal*, du fait qu'il est obtenu en arrêtant la construction du fractal Γ^∞ après un nombre fini d'étapes.

Le problème aux limites dans $\Omega^m \cup \Omega_e^m$ Le problème s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f^i & \text{dans } \Omega^m, \\ -\Delta u_e = f^e & \text{dans } \Omega_e^m, \\ \partial_n u_i|_{\Sigma^m} = \partial_n u_e|_{\Sigma^m} = 0 & \text{sur } \Sigma^m, \\ \partial_n u_e|_{\Gamma^0} = 0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ u_i|_{\Gamma^0} = u_0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m} & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_i|_{\Gamma^m} = \partial_n u_e|_{\Gamma^m} & \text{sur } \Gamma^m, \end{cases} \quad (4.14)$$

où $\partial_n u_e$ désigne la dérivée normale de u_e par rapport à la normale extérieure qui existe en dehors des coins sur $\partial\Omega^m$.

On définit les espaces fonctionnels correspondant aux espaces définis en (4.6), (4.7) et (4.8) :

$$\begin{aligned} V_i^m &= \{u \in H^1(\Omega^m), u|_{\Gamma^0} = 0\}, \\ V_{i,u_0}^m &= \{u \in H^1(\Omega^m), u|_{\Gamma^0} = u_0\}, \\ V_e^m &= \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_e^m), \frac{u}{(1+|x|^2)^{1/2} \ln(2+|x|^2)} \in L^2(\Omega_e^m), \nabla u \in L^2(\Omega_e^m) \right\}, \\ V^m &= \{(u_i, u_e) \in V_i^m \times V_e^m, u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m}\}, \\ W^m &= \{(u_i, u_e) \in H^1(\Omega^m) \times V_e^m, u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m}\}, \\ V_{u_0}^m &= \{(u_i, u_e) \in V_{i,u_0}^m \times V_e^m, u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m}\}, \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème s'écrit alors de la manière suivante : on cherche $u = (u_i, u_e) \in V_{u_0}^m$ telle que

$$\mathcal{A}^m(u, v) = \int_{\Omega^m} f^i v_i + \int_{\Omega_e^m} f^e v_e, \quad \forall v = (v_i, v_e) \in V^m, \quad (4.15)$$

où

$$\mathcal{A}^m(u, v) = \int_{\Omega^m} \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \int_{\Omega_e^m} \nabla u_e \cdot \nabla v_e. \quad (4.16)$$

La forme bilinéaire \mathcal{A}^m est continue sur $W^m \times W^m$ et coercive sur $V^m \times V^m$, et le théorème de Lax-Milgram donne l'existence et l'unicité pour le problème (4.15).

On note que grâce à l'hypothèse sur les supports des fonctions f^i et f^e , on n'a pas besoin de modifier f^i et f^e si m est assez grand.

On choisit dans la suite de traiter d'une part le problème extérieur comme un problème mixte, et d'autre part le problème intérieur comme un problème de Neumann. Ce choix est motivé par le fait que le problème intérieur avec des conditions de Neumann a déjà été traité dans tout le domaine ramifié Ω par Y. Achdou, C. Sabot et N. Tchou dans [ASTo6] (voir la partie 4.6).

4.3 LE PROBLÈME EXTÉRIEUR HOMOGENÈ

4.3.1 RÉOLUTION DU PROBLÈME EXTÉRIEUR HOMOGENÈ

4.3.1.a Le problème

On s'intéresse ici à la résolution du problème extérieur homogène sur Ω_e^m qui s'écrit comme un problème aux limites mixte :

$$\begin{cases} -\Delta u_e = 0 & \text{dans } \Omega_e^m, \\ u_e|_{\Gamma^m} = \zeta^D & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} = \zeta^N & \text{sur } \Sigma^m \cup \Gamma^0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Pour résoudre le problème (4.17), on cherche en fait $u = (u_i, u_e) \in V^m$ définie sur le plan entier telle que :

$$\begin{cases} u_e \text{ est solution du problème (4.17),} \\ u_i \equiv 0 \text{ dans } \Omega^m. \end{cases} \quad (4.18)$$

On rappelle que les espaces de Sobolev sur la frontière $\partial\Omega^m$ sont définis par :

$$H^s(\partial\Omega^m) = \begin{cases} B^{2,2}(\partial\Omega^m) & \text{si } 0 < s < 1, \\ L^2_s(\partial\Omega^m) & \text{si } s = 0, \\ (H^{-s}(\partial\Omega^m))' & \text{si } -1 < s < 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

où la notation X' désigne le dual topologique de l'espace X . Pour $S = \Gamma^m$ ou $S = \Sigma^m \cup \Gamma^0$, on rappelle également la définition des espaces

$$H^s(S) = \{u|_S, u \in H^s(\partial\Omega^m)\} \text{ si } 0 \leq s < 1, \quad (4.20)$$

$$\tilde{H}^s(S) = \{u \in H^s(S), \tilde{u} \in H^s(\partial\Omega^m)\} \text{ si } 0 \leq s < 1, \quad (4.21)$$

où $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, ainsi que

$$H^s(S) = (\tilde{H}^{-s}(S))' \text{ si } -1 < s < 0, \quad (4.22)$$

$$\tilde{H}^s(S) = (H^{-s}(S))' \text{ si } -1 < s < 0. \quad (4.23)$$

On peut définir le problème (4.17) dans le cadre général où $\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ et $\zeta^N \in \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0)$. Dans ce cas, la dérivée normale $\partial_n u_e$ sur $\partial\Omega^m$ sont définies par la formule de Green :

$$\langle \partial_n u_e, v|_{\partial\Omega^m} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega^m), H^{1/2}(\partial\Omega^m)} = \int_{\Omega_e^m} \Delta u_e \cdot v \, dx + \int_{\Omega_e^m} \nabla u_e \cdot \nabla v \, dx \quad \forall v \in V_e^m,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega^m), H^{1/2}(\partial\Omega^m)}$ désigne le crochet de dualité.

4.3.1.b Formulation variationnelle

On écrit ici une formulation variationnelle du problème (4.17). On considère le problème consistant à trouver $u_e \in V_e^m$ telle que $u_e|_{\Gamma^m} = \zeta^D$ et

$$\int_{\Omega_e^m} \nabla u_e \cdot \nabla v_e \, dx = \langle \zeta^N, v_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} \rangle_{H^{-1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0), \tilde{H}^{1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0)} \quad (4.24)$$

pour toute fonction test $v_e \in V_e^m$ vérifiant $v_e|_{\Gamma^m} = 0$.

Le problème variationnel (4.24) admet une unique solution qui vérifie $\Delta u_e = 0$ au sens des distributions.

4.3.1.c Représentation intégrale

Pour une fonction u harmonique dans Ω^m et Ω_e^m , les formules de Green énoncées ci-dessus appliquées à u et à la solution fondamentale du laplacien permettent d'obtenir des équations intégrales.

On appelle E la solution fondamentale du laplacien en dimension 2 :

$$E(y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |y|.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^2$, on note E_x la fonction $y \mapsto E(y - x)$. On a la représentation intégrale suivante (voir [CS85, SW85]).

PROPOSITION 4.3.1 – Si $u = (u_i, u_e) \in V^m$ est telle que $\Delta u_i = 0$ dans Ω^m et $\Delta u_e = 0$ dans Ω_e^m , alors $\int_{\partial\Omega^m} [\partial_n u] \, ds = 0$, et il existe une constante c telle que u vérifie :

$$\begin{cases} \frac{u_i(x) + u_e(x)}{2} + c = \int_{\partial\Omega^m} (E_x[\partial_n u] - \partial_n E_x[u]) \, ds & \text{p.p. } x \in \partial\Omega^m, \\ u(x) + c = \int_{\partial\Omega^m} (E_x[\partial_n u] - \partial_n E_x[u]) \, ds & \forall x \notin \partial\Omega^m, \end{cases} \quad (4.25)$$

où s désigne la mesure surfacique associée à $\partial\Omega^m$, $[u] = u_i|_{\partial\Omega^m} - u_e|_{\partial\Omega^m}$ (resp. $[\partial_n u] = \partial_n u_i|_{\partial\Omega^m} - \partial_n u_e|_{\partial\Omega^m}$) représente le saut de u (resp. de $\partial_n u$) à travers la frontière $\partial\Omega^m$, la normale étant prise vers l'extérieur de Ω^m .

L'écriture $\int_{\partial\Omega^m} \partial_n u E_x \, ds$ est à entendre au sens de la dualité $(H^{1/2}(\partial\Omega^m), H^{-1/2}(\partial\Omega^m))$.

La constante c est la limite de u lorsque $|x|$ tend vers ∞ .

On note $\chi = \partial_n u_e|_{\Gamma^m}$ et $\psi = u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0}$ les inconnues sur la frontière du problème (4.17). En insérant les données $\zeta^D = u_e|_{\Gamma^m}$ et $\zeta^N = \partial_n u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0}$ dans la première équation de (4.25), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u_e(x)}{2} + c &= \int_{\partial\Omega^m} (-E_x \partial_n u_e|_{\partial\Omega^m} + \partial_n E_x u_e|_{\partial\Omega^m}) ds \\ &= \int_{\Gamma^m} (\zeta^D \partial_n E_x - \chi E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\psi \partial_n E_x - \zeta^N E_x) ds. \end{aligned} \quad (4.26)$$

pour presque tout $x \in \partial\Omega^m$. On obtient alors le problème intégral suivant :

$$\begin{cases} \frac{\zeta^D(x)}{2} + c = \int_{\Gamma^m} (\zeta^D \partial_n E_x - \chi E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\psi \partial_n E_x - \zeta^N E_x) ds & (x \in \Gamma^m), \\ \frac{\psi(x)}{2} + c = \int_{\Gamma^m} (\zeta^D \partial_n E_x - \chi E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\psi \partial_n E_x - \zeta^N E_x) ds & (x \in \Sigma^m \cup \Gamma^0), \\ \int_{\Gamma^m} \chi ds = - \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} \zeta^N ds. \end{cases} \quad (4.27)$$

On définit les opérateurs intégraux S_1 et S_2 liés au potentiel simple couche définis par

$$S_1 g(x) = \int_{\Gamma^m} g E_x ds \quad \text{et} \quad S_2 g(x) = \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} g E_x ds \quad (x \in \partial\Omega^m), \quad (4.28)$$

ainsi que les opérateurs D_1 et D_2 liés au potentiel double couche qu'on définit par

$$D_1 g(x) = \int_{\Gamma^m} g \partial_n E_x ds \quad \text{et} \quad D_2 g(x) = \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} g \partial_n E_x ds \quad (x \in \partial\Omega^m). \quad (4.29)$$

On définit également les formes linéaires K et L définies par

$$K g = \int_{\Gamma^m} g ds \quad \text{et} \quad L g = \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} g ds. \quad (4.30)$$

Les opérateurs $S_i, D_i, i = 1, 2$, présentent les propriétés de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} S_1 : H^{1/2}(\Gamma^m) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma^m), & S_2 : H^{1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0) &\rightarrow H^{1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0), \\ D_1 : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma^m), & D_2 : \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0) &\rightarrow H^{1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0). \end{aligned} \quad (4.31)$$

On peut récrire le problème intégral (4.27) sous la forme :

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ c \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S_1 & -D_2 & 1 \\ S_1 & -D_2 + \frac{1}{2} & 1 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \zeta^D - S_2 \zeta^N - \frac{1}{2} \zeta^D \\ D_1 \zeta^D - S_2 \zeta^N \\ -L \zeta^N \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

On a alors la propriété suivante (voir [SW85, CS85] pour un résultat très similaire).

THÉORÈME 4.3.1 – *L'opérateur*

$$\mathcal{A} : H^{1/2}(\Gamma^m) \times \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0) \times \mathbb{R} \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^m) \times H^{1/2}(\Sigma^m \cup \Gamma^0) \times \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

Le résultat suivant montré dans [CS85] justifie la résolution du problème (4.17) par la méthode de représentation intégrale.

THÉORÈME 4.3.2 – *Le problème variationnel (4.24) et le problème intégral (4.32) sont équivalents, au sens où si u_e est la solution de (4.24) et (χ, ψ, c) est la solution de (4.32), alors $\partial_n u_e|_{\Gamma^m} = \chi$, $u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} = \psi$, et en particulier*

$$u_e(x) = \int_{\Gamma^m} (\zeta^D \partial_n E_x - \chi E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\psi \partial_n E_x - \zeta^N E_x) ds - c. \quad (4.33)$$

4.3.2 DISCRÉTISATION ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME EXTÉRIEUR

Dans le but de la résolution numérique, on procède à une discrétisation de la frontière $\partial\Omega^m$ du domaine préfractal.

On se donne deux entiers M_1 et M_2 , et on découpe la partie Γ^m de la frontière en M_1 segments qu'on notera S_1, \dots, S_{M_1} , et l'autre partie $\Sigma^m \cup \Gamma^0$ en M_2 segments notés $S_{M_1+1}, \dots, S_{M_1+M_2}$. On pose aussi $M = M_1 + M_2$.

On cherche à résoudre numériquement le système d'équations intégrales (4.32) dont les inconnues du problème sont la trace de $\partial_n u_e$ sur Γ^m , la trace de u_e sur $\Sigma^m \cup \Gamma^0$ et la constante c , où u_e est la solution du problème extérieur (4.17) décrite en (4.33).

On utilise une méthode de collocation : on discrétise les données ζ^D et ζ^N qu'on choisit de prendre constantes sur chaque segment S_i . On note ζ_i^D (resp. ζ_i^N) la valeur de ζ^D (resp. ζ^N) sur le segment S_i , $1 \leq i \leq M_1$ (resp. $M_1 < i \leq M$). On cherche ensuite $\chi = \partial_n u_e|_{\Gamma^m}$ et $\psi = u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0}$ sous forme discrétisée : constante sur chaque segment S_i . On note χ_i (resp. ψ_i) la valeur de $\partial_n u_e|_{\Gamma^m}$ (resp. de $u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0}$) sur S_i .

On choisit de prendre des fonctions test v constantes sur chaque segment S_i . On obtient alors l'analogie discret du problème intégral (4.27) :

$$\begin{cases} \frac{\zeta_i^D}{2} + c = \sum_{j=1}^{M_1} (\zeta_j^D d_{i,j} - \chi_j s_{i,j}) + \sum_{j=M_1+1}^M (\psi_j d_{i,j} - \zeta_i^N s_{i,j}) & \text{pour } 1 \leq i \leq M_1, \\ \frac{\psi_i}{2} + c = \sum_{j=1}^{M_1} (\zeta_j^D d_{i,j} - \chi_j s_{i,j}) + \sum_{j=M_1+1}^M (\psi_j d_{i,j} - \zeta_i^N s_{i,j}) & \text{pour } M_1 < i \leq M, \\ \sum_{j=1}^{M_1} |S_j| \chi_j = - \sum_{j=M_1+1}^M |S_j| \zeta_j^N, \end{cases}$$

où on note :

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} \int_{S_j} E_x(y) ds(y) ds(x), \\ d_{i,j} &= \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} \int_{S_j} \partial_n E_x(y) ds(y) ds(x). \end{aligned} \quad (4.34)$$

On se ramène alors à la résolution d'un système linéaire à $M + 1$ inconnues : les réels χ_i , $1 \leq i \leq M_1$, ψ_i , $M_1 < i \leq M$ et la constante c .

On peut récrire ce système sous la forme

$$AX = b, \quad (4.35)$$

où l'inconnue $X \in \mathbb{R}^{M+1}$ est de la forme $X = (\chi_1, \dots, \chi_{M_1}, \psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M, c)$, et $A \in \mathcal{M}_{M+1}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^{M+1}$ sont donnés par

$$A = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ M_1 \\ M_1+1 \\ \vdots \\ M \\ M+1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & \dots & M_1 & M_1+1 & \dots & M & M+1 \\ & & & & & & 1 \\ & & s_{i,j} & & & -d_{i,j} & \\ \hline & & & -d_{i,i} + \frac{1}{2} & & -d_{i,j} & \\ & & s_{i,j} & & \ddots & & \\ & & & -d_{i,j} & & -d_{i,i} + \frac{1}{2} & 1 \\ \hline |S_1| & \dots & |S_{M_1}| & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (4.36)$$

$$\text{et } b = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ M_1 \\ M_1+1 \\ \vdots \\ M \\ M+1 \end{array} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{M_1} \zeta_j^D d_{i,j} - \sum_{j=M_1+1}^M \zeta_j^N s_{i,j} - \frac{\zeta_i^D}{2} \\ \hline \sum_{j=1}^{M_1} \zeta_j^D d_{i,j} - \sum_{j=M_1+1}^M \zeta_j^N s_{i,j} \\ \hline - \sum_{j=M_1+1}^M \zeta_j^N |S_j| \end{array} \right]. \quad (4.37)$$

On peut montrer que le système (4.35) admet une unique solution (voir par exemple [SS88] pour un problème très similaire).

4.4 LE PROBLÈME INTÉRIEUR

On s'intéresse au problème intérieur dans Ω^m , qui s'écrit comme le problème aux limites suivant.

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f^i & \text{dans } \Omega^m, \\ \partial_n u_i|_{\Gamma^m} = \zeta^N & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_i|_{\Sigma^m} = 0 & \text{sur } \Sigma^m, \\ u_i|_{\Gamma^0} = u_0 & \text{sur } \Gamma^0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Le problème (4.38) peut être défini dans le cadre général où $\zeta^N \in \tilde{H}^{-1/2}(\Sigma^m)$. Dans ce cas, la dérivée normale $\partial_n u_i$ sur $\partial\Omega^m$ est définie par la formule de Green :

$$\langle \partial_n u_i, v \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega^m), H^{1/2}(\partial\Omega^m)} = \int_{\Omega^m} \Delta u_i \cdot v \, dx + \int_{\Omega^m} \nabla u_i \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega^m).$$

La formulation variationnelle du problème intérieur (4.38) s'écrit de la manière suivante : on cherche $u_i \in V_{i, u_0}^m$ telle que

$$\int_{\Omega^m} \nabla u_i \cdot \nabla v \, dx = \langle \zeta^N, v \rangle_{H^{-1/2}(\Sigma^m), \tilde{H}^{1/2}(\Sigma^m)} + \int_{\Omega^m} f^i v \, dx, \quad \forall v \in V_i^m. \quad (4.39)$$

Par le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel (4.39) admet une unique solution.

Résolution numérique Sans entrer dans les détails, on résout dans un premier temps le problème intérieur (4.38) par une méthode d'éléments finis P_1 dans Ω^m .

On décrira plus en détail dans la partie 4.6 une méthode de résolution approchée du problème intérieur basée sur les propriétés d'auto-similarité du domaine Ω , introduite dans [AT07].

4.5 RÉOLUTION DU PROBLÈME AUX LIMITES DANS $\Omega^m \cup \Omega_e^m$

On cherche désormais à résoudre numériquement le problème (4.14), on mettra l'accent sur certains cas particuliers. On note $u = (u_i, u_e) \in V_{u_0}^m$ la solution du problème.

On cherche dans un premier temps à exprimer $\gamma^D := u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m}$ comme la solution d'un problème de point fixe. On introduit pour ce faire un opérateur Dirichlet-Neumann pour le domaine extérieur Ω_e^m , et un opérateur Neumann-Dirichlet pour le domaine Ω^m .

L'opérateur Dirichlet-Neumann On s'intéresse ici au problème extérieur. On considère l'opérateur affine \mathcal{H}_e^m qui associe à $\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ la solution $u_e \in V_e^m$ du problème extérieur

$$\begin{cases} -\Delta u_e = f^e & \text{sur } \Omega_e^m, \\ u_e|_{\Gamma^m} = \zeta^D & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} = 0 & \text{sur } \Sigma^m \cup \Gamma^0, \end{cases} \quad (4.40)$$

On introduit l'opérateur Dirichlet-Neumann $\mathcal{S}^m : H^{1/2}(\Gamma^m) \rightarrow \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m)$ défini par

$$\mathcal{S}^m \zeta^D = \partial_n \mathcal{H}_e^m \zeta^D \quad (\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)). \quad (4.41)$$

L'opérateur Neumann-Dirichlet On considère maintenant le problème extérieur. On considère l'opérateur affine \mathcal{H}_i^m qui associe à $\zeta^N \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ la solution $u_i \in H^1(\Omega^m)$ du problème intérieur

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f^i & \text{sur } \Omega^m, \\ \partial_n u_i|_{\Gamma^m} = \zeta^N & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_i|_{\Sigma^m} = 0 & \text{sur } \Sigma^m, \\ u_i|_{\Gamma^0} = u_0 & \text{sur } \Gamma^0. \end{cases} \quad (4.42)$$

On définit l'opérateur Neumann-Dirichlet $\mathcal{T}^m : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^m)$ par

$$\mathcal{T}^m \zeta^N = \mathcal{H}_i^m \zeta^N|_{\Gamma^m} \quad (\zeta^N \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m)). \quad (4.43)$$

Le problème de point fixe On exprime ici γ^D comme solution d'un problème de point fixe.

PROPOSITION 4.5.1 - Soit $\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$. On a

$$(\mathcal{T}^m \circ \mathcal{S}^m)\zeta^D = \zeta^D, \quad (4.44)$$

si et seulement si $\zeta^D = \gamma^D$.

Démonstration. On observe que si $\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ est un point fixe de l'opérateur $\mathcal{T}^m \circ \mathcal{S}^m$, alors $u = (u_i, u_e) := (\mathcal{H}_e^m \zeta^D, \mathcal{H}_i^m(\mathcal{S}^m \zeta^D)) \in V^m$ est solution du problème (4.14). On a alors $u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m} = \gamma^D$. \square

Réécriture du problème de point fixe On considère l'opérateur linéaire $\mathcal{H}_{e,0}^m$ qui associe à $\zeta^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ la solution $u_e \in V_e^m$ du problème extérieur (4.40) avec $f^e \equiv 0$.

On introduit l'opérateur Dirichlet-Neumann $\mathcal{S}_0^m : H^{1/2}(\Gamma^m) \rightarrow \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m)$ défini par

$$\mathcal{S}_0^m \zeta^D = \partial_n \mathcal{H}_{e,0}^m \zeta^D,$$

de sorte que $\mathcal{S}^m \zeta^D = \mathcal{S}_0^m \zeta^D + \mathcal{S}^m(0)$ pour tout ζ^D .

On considère par ailleurs l'opérateur linéaire $\mathcal{H}_{i,0}^m$ qui associe à $\zeta^N \in H^{1/2}(\Gamma^m)$ la solution $u_i \in H^1(\Omega^m)$ du problème intérieur (4.42) avec $f^i \equiv 0$ et $u_0 \equiv 0$.

On définit l'opérateur Neumann-Dirichlet $\mathcal{T}_0^m : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^m) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma^m)$ par

$$\mathcal{T}_0^m \zeta^N = \mathcal{H}_{i,0}^m \zeta^N|_{\Gamma^m}.$$

de sorte que $\mathcal{T}^m \zeta^N = \mathcal{T}_0^m \zeta^N + \mathcal{T}^m(0)$ pour tout ζ^N .

On observe alors que le problème de point fixe (4.44) se réécrit

$$(\mathcal{T}_0^m \circ \mathcal{S}_0^m - \text{Id})\gamma^D = -\mathcal{T}_0^m(\mathcal{S}^m(0)) - \mathcal{T}^m(0). \quad (4.45)$$

4.5.1 UN EXEMPLE DANS LE CAS $f^e = 0$

On étudie un problème aux limites pour lequel $f^e \equiv 0$, qui s'écrit de la manière suivante. On considère $\sigma \in \mathcal{A}_n$ pour $0 < n < m$, et on cherche $u = (u_i, u_e)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_e = 0 & \text{dans } \Omega_e^m, \\ \Delta u_i = \delta_{\Gamma^\sigma} & \text{dans } \Omega^m \setminus \Gamma^\sigma, \\ \partial_n u_i|_{\Sigma^m} = \partial_n u_e|_{\Sigma^m} = 0 & \text{sur } \Sigma^m, \\ u_i|_{\Gamma^0} = 0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ \partial_n u_e|_{\Gamma^0} = 0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ u_i|_{\Gamma^m} = u_e|_{\Gamma^m} & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_i|_{\Gamma^m} = \partial_n u_e|_{\Gamma^m} & \text{sur } \Gamma^m. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

L'équation impose alors un saut de la dérivée normale de u_i sur Γ^σ , qu'on peut interpréter comme une condition traduisant la présence d'une source intérieure localisée sur le segment Γ^σ .

4.5.1.a Résolution numérique

Approximation des opérateurs On détaille pour commencer les approximations des opérateurs Dirichlet-Neumann et Neumann-Dirichlet que l'on choisit. On procède à la même discrétisation que dans le paragraphe 4.3.2.

- L'opérateur Neumann-Dirichlet : le problème à résoudre est le problème intérieur (4.38) qu'on résout numériquement. On construit ainsi un opérateur $\widetilde{\mathcal{F}}^m$ qui associe à une approximation constante sur chaque segment S_i ($1 \leq i \leq M$) de la donnée de Neumann ζ^N une fonction constante sur chaque segment S_i approchant $\mathcal{F}^m \zeta^N$.
- L'opérateur Dirichlet-Neumann : le problème extérieur (4.40) est en fait le problème homogène 4.17 avec $\zeta^N \equiv 0$. Le paragraphe 4.3.2 fournit alors une approximation $\widetilde{\mathcal{F}}^m$ de l'opérateur Dirichlet-Neumann \mathcal{F}^m définie par

$$\widetilde{\mathcal{F}}^m : (\zeta_1^D, \dots, \zeta_{M_1}^D) \mapsto (\chi_1, \dots, \chi_{M_1}), \quad (4.47)$$

où $(\chi_1, \dots, \chi_{M_1}, \psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M, \tilde{c})$ est la solution de (4.35).

Résolution du problème de point fixe On résout numériquement le problème de point fixe (4.45) dont l'inconnue γ^D est la trace sur Γ^m de la solution du problème de transmission (4.14). L'analogie discret de 4.45 s'écrit

$$(\widetilde{\mathcal{T}}_0^m \circ \widetilde{\mathcal{F}}^m - \text{Id}) \tilde{\gamma}^D = -\widetilde{\mathcal{T}}^m(0).$$

On résout ce système linéaire par une méthode de bi-gradient conjugué stabilisé (voir [VdV92]), on détaille dans la Table 4.1 ci-dessous le nombre d'itérations de la méthode en fonction du nombre de générations m du sous-domaine.

On obtient alors la donnée de Dirichlet approchée $\tilde{\gamma}^D$ de la solution sur Γ^m , constante sur chaque segment S_i .

Reconstruction de la solution On décrit finalement la reconstruction d'une approximation de la solution (u_i, u_e) du problème (4.14) sur tout le plan.

On résout le système linéaire (4.35) en prenant $\tilde{\gamma}^D$ comme donnée Dirichlet sur Γ^m , on désigne par $(\chi_1, \dots, \chi_{M_1}, \psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M, \tilde{c})$ la solution du système qui fournit :

- ◊ une approximation de la trace de $\partial_n u_e$ sur Γ^m donnée par $(\chi_1, \dots, \chi_{M_1})$,
- ◊ une approximation de la trace de u_e sur Γ^m donnée par $(\psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M)$.

On déduit alors de (4.33) une approximation \tilde{u}_e de u_e dans Ω_e^m :

$$\tilde{u}_e(x) = \int_{\Gamma^m} (\tilde{\gamma}^D \partial_n E_x - \tilde{\chi} E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} \tilde{\psi} \partial_n E_x ds - \tilde{c}, \quad (x \in \Omega_e^m), \quad (4.48)$$

où $\tilde{\chi} = \sum_{1 \leq i \leq M_1} \chi_i \mathbb{1}_{S_i}$ et $\tilde{\psi} = \sum_{M_1 < i \leq M} \psi_i \mathbb{1}_{S_i}$.

On construit une approximation \tilde{u}_i de u_i dans le domaine Ω^m en résolvant à nouveau un problème intérieur par éléments finis, à partir de la donnée de Neumann approchée $\tilde{\chi}$ sur Γ^m .

4.5.1.b Résultats numériques

On détaille dans la table 4.1 le nombre d'itérations avant convergence de la méthode de bi-gradient conjugué stabilisé, en fonction du nombre m de générations du sous-domaine Ω^m .

On constate que le nombre d'itérations croît beaucoup avec le nombre de générations. Ce

Nombre m de générations	Nombre d'itérations	Temps de calcul
4	2	0,03
5	10	0,3
6	8	0,7
7	22	6,6
8	20	21,2
9	42	161,0
10	84	1143,0
11	114	2015,1

TABLE 4.1 – Nombre d'itérations et temps écoulé (en secondes) dans l'algorithme de bi-gradient conjugué stabilisé

phénomène pourrait s'expliquer par le fait qu'on est dans le cas où le fractal présente des auto-intersections. Il serait intéressant de faire la même étude en résolvant plutôt un problème de Neumann extérieur, et un problème mixte intérieur. On s'attend pour ce choix à une meilleure convergence.

La Figure 4.2 présente la solution approchée calculée de la manière décrite ci-dessus dans le cas où $m = 10$, et où la source est placée sur le segment Γ^{21} .

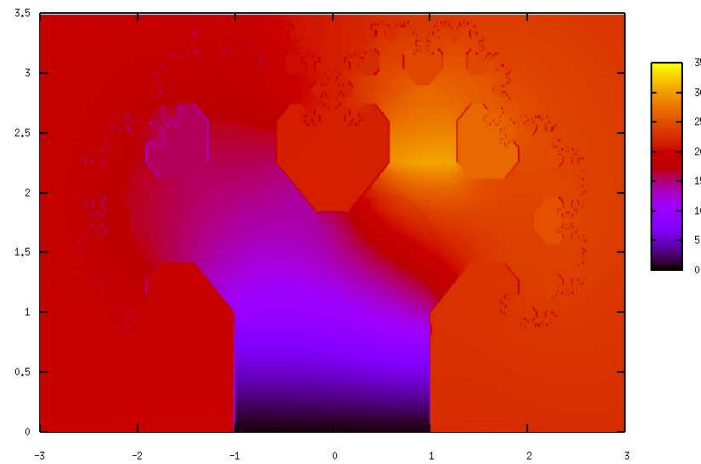


FIGURE 4.1 – Solution approchée pour $m = 10$ dans le cas d'une source intérieure placée sur Γ^{21} .

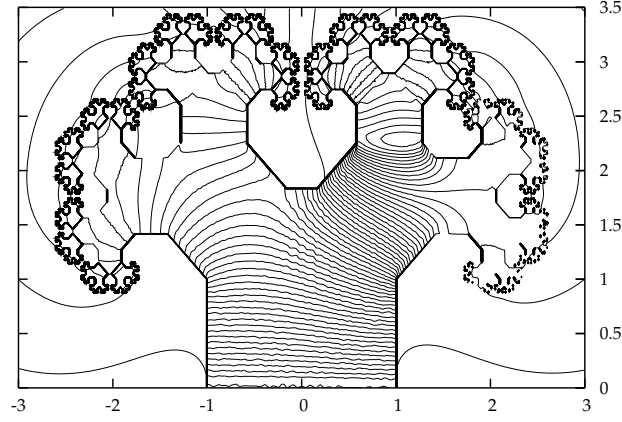


FIGURE 4.2 – Solution approchée pour $m = 10$ dans le cas d'une source intérieure placée sur Γ^{21} , représentée par des lignes de niveau.

4.5.2 LE PROBLÈME AUX LIMITES AVEC UNE SOURCE EXTÉRIEURE PONCTUELLE

On s'intéresse ici au problème aux limites décrit au paragraphe 4.2 dans le cas d'une source extérieure ponctuelle en un point \bar{x} du domaine extérieur Ω_e^m . Il s'agit du problème (4.14) avec $f^i \equiv 0$ et $f^e = \delta_{\bar{x}}$ où $\delta_{\bar{x}}$ est la masse de Dirac au point \bar{x} . On translate le problème pour se ramener à une formulation du type de (4.14).

4.5.2.a Le problème extérieur

Soit $\xi^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$. On cherche à résoudre le problème extérieur (4.40) qui s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta u_e = \delta_{\bar{x}} & \text{sur } \Omega_e^m, \\ u_e = \xi^D & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n u_e = 0 & \text{sur } \Sigma^m \cup \Gamma^0. \end{cases} \quad (4.49)$$

On cherche une solution de (4.49) sous la forme $u_e = \bar{u}_e + E_{\bar{x}}$, où \bar{u}_e appartient à l'espace V_e^m . La fonction \bar{u}_e est alors solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}_e = 0 & \text{sur } \Omega_e^m, \\ \bar{u}_e = \xi^D - E_{\bar{x}} & \text{sur } \Gamma^m, \\ \partial_n \bar{u}_e = -\partial_n E_{\bar{x}} & \text{sur } \Sigma^m \cup \Gamma^0, \end{cases} \quad (4.50)$$

qui correspond au problème homogène (4.17) avec

$$\zeta^D = \xi^D - E_{\bar{x}} \quad (4.51)$$

$$\zeta^N = -\partial_n E_{\bar{x}}. \quad (4.52)$$

On note (χ, ψ, c) la solution du problème (4.32) avec les conditions (4.51) et (4.52). On a alors $\chi = \partial_n \bar{u}_e|_{\Gamma^m}$ et $\psi = \bar{u}_e|_{\Sigma^m \cup \Gamma^0}$.

On introduit alors l'opérateur Dirichlet-Neumann \mathfrak{S}^m défini par

$$\mathfrak{S}^m \xi^D = \chi + \partial_n E_{\bar{x}}|_{\Gamma^m}. \quad (4.53)$$

On déduit par ailleurs de (4.33) l'expression de la solution \bar{u}_e cherchée :

$$\bar{u}_e(x) = \int_{\Gamma^m} (\partial_n E_x(\xi^D - E_{\bar{x}}) - \chi E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\psi \partial_n E_x + E_x \partial_n E_{\bar{x}}) ds - c. \quad (4.54)$$

4.5.2.b Résolution numérique

On procède de manière analogue au paragraphe 4.5.1. On cherche à résoudre numériquement le problème de point fixe

$$(\mathcal{F}_0^m \circ \mathcal{S}_0^m - \text{Id})\gamma^D = -\mathcal{F}_0^m(\mathfrak{S}^m(0)). \quad (4.55)$$

On procède de nouveau à la discrétisation décrite au paragraphe 4.3.2.

Résolution numérique du problème extérieur On commence par décrire la résolution numérique du problème (4.49). On considère $\xi^D \in H^{1/2}(\Gamma^m)$. On appelle \tilde{u}_e la solution approchée du problème (4.50) calculée comme en 4.3.2, en approchant les données $\xi^D = \xi^D - E_{\bar{x}}$ et $\zeta^N = -\partial_n E_{\bar{x}}$ par des fonctions constantes sur les segments S_i , $1 \leq i \leq M_1$, valant respectivement $\xi_i^D - s_i$ et $-d_i$ sur chaque S_i , où

$$s_i = \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} E_{\bar{x}}(y) ds(y), \quad d_i = \frac{1}{|S_i|} \int_{S_i} \partial_n E_{\bar{x}}(y) ds(y).$$

On désigne par $(\chi_1, \dots, \chi_{M_1}, \psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M, \tilde{c})$ la solution du système linéaire (4.35), qui fournit :

- ◊ une approximation de la trace de $\partial_n \bar{u}_e$ sur Γ^m donnée par $(\chi_1, \dots, \chi_{M_1})$,
- ◊ une approximation de la trace de \bar{u}_e sur $\Sigma^m \cup \Gamma^0$ donnée par $(\psi_{M_1+1}, \dots, \psi_M)$.

On définit alors un opérateur $\tilde{\mathfrak{S}}^m$ approchant l'opérateur Dirichlet-Neumann \mathfrak{S}^m par

$$\tilde{\mathfrak{S}}^m(\xi_1^D, \dots, \xi_{M_1}^D) = (\chi_1 + d_1, \dots, \chi_{M_1} + d_{M_1}). \quad (4.56)$$

La résolution du système permet en particulier de construire la solution approchée \tilde{u}_e du problème (4.50) en posant

$$\tilde{u}_e(x) = \int_{\Gamma^m} (\partial_n E_x(\tilde{\xi}^D - E_{\bar{x}}) - \tilde{\chi} E_x) ds + \int_{\Sigma^m \cup \Gamma^0} (\tilde{\psi} \partial_n E_x + E_x \partial_n E_{\bar{x}}) ds - \tilde{c}, \quad (4.57)$$

où $\tilde{\chi} = \sum_{1 \leq i \leq M_1} \chi_i \mathbb{1}_{S_i}$ et $\tilde{\psi} = \sum_{M_1 < i \leq M} \psi_i \mathbb{1}_{S_i}$.

On peut alors construire une solution approchée $\tilde{u}_e = \tilde{u}_e + E_{\bar{x}}$ du problème .

Résolution numérique du problème aux limites On choisit comme précédemment pour opérateurs Neumann-Dirichlet et Dirichlet-Neumann approchés :

- une approximation $\tilde{\mathcal{T}}^m$ de l'opérateur \mathcal{T}^m obtenu par une méthode d'éléments finis comme dans le paragraphe 4.5.1.a,
- l'opérateur $\tilde{\mathcal{F}}_0^m$ obtenu comme au paragraphe 4.5.1.a par la résolution numérique du problème homogène (4.17).

On cherche alors à résoudre le problème de point fixe

$$(\tilde{\mathcal{T}}^m \circ \tilde{\mathcal{F}}_0^m - \text{Id})\tilde{\gamma}^D = -\tilde{\mathcal{T}}^m(\tilde{\mathcal{S}}^m(0)). \quad (4.58)$$

On commence par calculer le second membre approché associé au problème de point fixe, donné par $-\tilde{\mathcal{T}}^m \circ \tilde{\mathcal{F}}_0^m(0)$.

On résout ensuite (4.58) par une méthode de bi-gradient conjugué stabilisé comme précédemment, et on obtient la donnée Dirichlet approchée $\tilde{\gamma}^D$ de la solution sur Γ^m .

On peut alors reconstruire la solution approchée $(\tilde{u}_i, \tilde{u}_e)$ du problème aux limites. On obtient \tilde{u}_e par (4.57), puis on obtient \tilde{u}_i en résolvant un problème intérieur avec pour donnée de Neumann $\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\gamma}^D$.

4.5.2.c Résultats numériques

La Figure 4.3 présente la solution approchée calculée de la manière décrite ci-dessus dans le cas où $m = 10$, et où on a placé la source ponctuelle au point $(-2, 5, 3, 25)$.

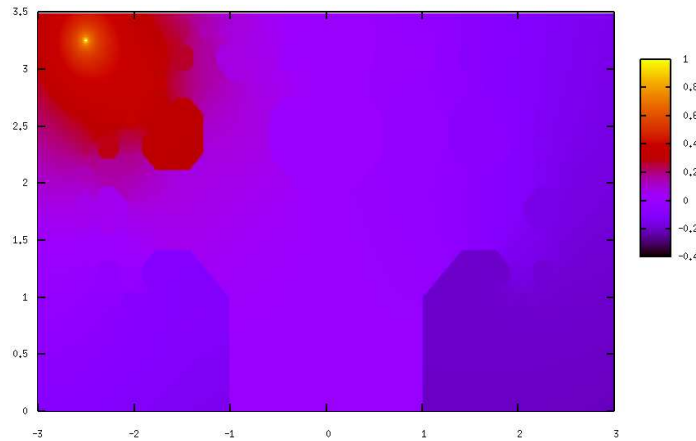


FIGURE 4.3 – Solution approchée pour $m = 10$ dans le cas d'une source extérieure placée en $(-2, 5, 3, 25)$.

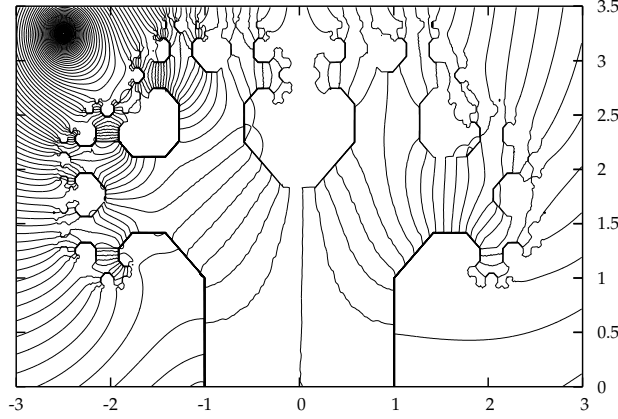


FIGURE 4.4 – Solution approchée pour $m = 10$ dans le cas d'une source extérieure placée en $(-2, 5; 3, 25)$ représentée par ses lignes de niveau.

4.6 UNE MÉTHODE DE RÉOLUTION AUTO-SIMILAIRE DU PROBLÈME INTÉRIEUR

On rappelle dans cette partie la méthode de résolution approchée de problèmes de Poisson avec des conditions de Neumann non-homogènes dans des domaines ramifiés proposée par Y. Achdou, C. Sabot et N. Tchou (voir [AST06, AT07, AST07]). Il s'agit d'une méthode multi-échelle basée sur des conditions aux limites transparentes, et un développement en ondelettes de la donnée de Neumann.

Le problème considéré est le suivant. On considère $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0)$, et on cherche une solution $u \in H^1(\Omega)$ du problème de Poisson :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma^0, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où on cherche à imposer en plus une condition de Neumann sur Γ^∞ de donnée $\gamma^N \in L^2_\mu(\Gamma^\infty)$ en un sens faible. On s'intéresse alors naturellement au problème variationnel suivant : on cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Gamma^\infty} \gamma^N \ell^\infty(v) d\mu, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\Omega), \\ u|_{\Gamma^0} = u_0, \end{cases} \quad (4.59)$$

où $\mathcal{V}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma^0} = 0\}$. On note $U(u_0, \gamma^N)$ la solution du problème (4.59).

Le problème variationnel donne une solution au problème de Poisson ci-dessus au sens du théorème suivant démontré dans [AT07].

THÉORÈME 4.6.1 – Si $\gamma^N \in L^2_\mu(\Gamma^\infty)$ et $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0)$, le problème (4.59) admet une unique solution u , qui vérifie une condition de Neumann sur Γ^∞ de donnée γ^N au sens suivant : si $\gamma^N = \ell^\infty(w)$ pour $w \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et $u^k \in H^1(\Omega^m)$ solution du problème :

$$\begin{aligned} \Delta u^m &= 0 && \text{dans } \Omega^m, \\ u^m|_{\Gamma^0} &= u_0 && \text{sur } \Gamma^0, \\ \partial_n u^m &= 0 && \text{sur } \Sigma^m, \\ \partial_n u^m &= |\Gamma^{m+1}|^{-1} w|_{\Gamma^{m+1}} && \text{sur } \Gamma^{m+1}, \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{H^1(\Omega^m)} = 0.$$

4.6.1 APPROXIMATION DE LA SOLUTION DANS Ω^m

Les auteurs de [ASTo6] proposent alors une méthode pour approcher la solution u du problème (4.59) dans les sous-domaines Ω^m , $m \in \mathbb{N}$. On décrit ci-dessous le cas où $\gamma^N = 0$; puis le cas où γ^N est une ondelette de Haar. Le cas général se déduit en développant la donnée de Neumann dans la base d'ondelettes de Haar de Γ^∞ .

Le cas où $\gamma^N = 0$ Pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0)$, on appelle $\mathcal{H}(u_0)$ la solution de (4.59). On désigne d'autre part par T l'opérateur Dirichlet-Neumann de $H^{1/2}(\Gamma^0)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma^0)$ défini par $T : u_0 \mapsto \partial_n \mathcal{H}(u_0)|_{\Gamma^0}$.

On note $w = \mathcal{H}(u_0)|_{Y^0}$. L'auto-similarité et l'invariance par changement d'échelle des équations impliquent que w est solution du problème (P_0) donné par

$$\Delta w = 0 \text{ dans } Y^0, \quad (4.60)$$

$$w|_{\Gamma^0} = u_0 \text{ sur } \Gamma^0, \quad (4.61)$$

$$\partial_n w|_{\partial Y^0 \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^1)} = 0 \text{ sur } \partial Y^0 \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^1), \quad (4.62)$$

$$\partial_n w|_{f_i(\Gamma^0)} = -\frac{1}{a} T(w|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2, \quad (4.63)$$

qui est un problème bien posé, du fait que T est un opérateur linéaire borné auto-adjoint semi-défini positif. L'équation (4.63) est appelée *condition aux limites transparente*.

Ce procédé est utilisé pour approcher $u|_{\Omega^m}$ pour $m \in \mathbb{N}$, en résolvant successivement $2^{m+1} - 1$ problèmes aux limites sur la cellule Y^0 : l'algorithme de résolution 4.6.1 ci-dessous est basé sur le résultat suivant qui permet de calculer $u|_{f_\sigma(Y^0)}$ pour $\sigma \in \mathcal{A}_m$ en fonction de $u|_{\Omega^{m-1}}$.

PROPOSITION 4.6.1 – On désigne par u la solution du problème (4.59). Si $\sigma \in \mathcal{A}_m$ et $w_\sigma \in H^1(Y^0)$ est la solution du problème (P_0) où on a remplacé la condition (4.61) par

$$w|_{\Gamma^0} = u|_{\Gamma^\sigma} \circ f_\sigma \text{ sur } \Gamma^0, \quad (4.64)$$

alors $u|_{f_\sigma(Y^0)} = w_\sigma \circ f_\sigma^{-1}$ pour chaque $\sigma \in \mathcal{A}_m$.

ALGORITHME 4.6.1 – Pour $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0)$, on calcule $u|_{\Omega^m}$ au moyen de l'algorithme suivant.

– Pour $k = 0$ à $m + 1$,

- pour $\sigma \in \mathcal{A}_k$ (à ce stade, $u_{|\Gamma^\sigma}$ est connu),
 - on trouve $w \in H^1(Y^0)$ solution du problème aux limites donné par (4.60), (4.62), (4.63), et (4.61) si $k = 0$, (4.64) sinon.
 - on pose $u_{|Y^\sigma} = w \circ f_\sigma^{-1}$.

L'opérateur Dirichlet-Neumann T est approché de la manière suivante. On désigne par \mathcal{C} le cône des opérateurs linéaires bornés auto-adjoints semi-définis positifs, et par \mathcal{M} l'opérateur de \mathcal{C} dans \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{M}S : u_0 \in H^{1/2}(\Gamma^0) \mapsto \partial_n w_{|\Gamma^0} \quad (S \in \mathcal{C}),$$

où w est la solution du problème (P_0) dont la condition (4.63) est remplacée par

$$\partial_n w = -\frac{1}{a} S(w_{|f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2.$$

Le théorème suivant montré dans [AST06] (voir aussi [AT07]) permet alors d'approcher T avec une précision arbitraire.

THÉORÈME 4.6.2 – *L'opérateur T est l'unique point fixe de \mathcal{M} . De plus, il existe $\rho \in]0, 1[$ tel que pour tout $S \in \mathcal{C}$, on puisse trouver une constante $C > 0$ vérifiant*

$$\forall k \geq 0, \quad \|\mathcal{M}^k(S) - T\| \leq C\rho^{\frac{k}{4}}.$$

Le cas où γ^N est une ondelette de Haar Dans ce cas, la méthode de résolution s'appuie sur la résolution du problème avec pour donnée de Neumann $g = \mathbb{1}_{\Gamma^\infty}$.

On note $e = U(0, g)$ et $e_\sigma = U(0, g_\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{A}$. On appelle y (resp. y^σ) la dérivée normale de e (resp. e_σ) sur Γ^0 .

La fonction y est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} y = By, \\ \int_{\Gamma^0} y \, dx = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

où B est l'opérateur borné de $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma^0)$ dans $L^2(\Gamma^0)$ défini par $Bz = \partial_n w_{|\Gamma^0}$, où $w \in \mathcal{V}(Y^0)$ est l'unique solution du problème

$$\Delta w = 0 \text{ dans } Y^0, \quad (4.66)$$

$$w_{|\Gamma^0} = 0 \text{ sur } \Gamma^0, \quad (4.67)$$

$$\partial_n w_{|\partial Y^0 \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^1)} = 0 \text{ sur } \partial Y^0 \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^1), \quad (4.68)$$

$$\partial_n w_{f_i(\Gamma^0)} = -\frac{1}{a} T(w_{|f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} - z \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2. \quad (4.69)$$

L'algorithme 4.6.2 ci-dessous permet alors de calculer e en résolvant $2^{m+1} - 1$ problèmes aux limites dans Y^0 .

ALGORITHME 4.6.2 –

- Pour $k = 0$ à $m + 1$,

- pour $\sigma \in \mathcal{A}_k$ (à ce stade, $e_{|\Gamma^\sigma}$ est connu),

- on trouve $w \in H^1(Y^0)$ solution du problème aux limites donné par (4.66), (4.68), $w|_{\Gamma^0} = 0$ si $k = 0$, $w|_{\Gamma^0} = e|_{\Gamma^0} \circ f_\sigma$ sinon, et

$$\partial_n w|_{f_i(\Gamma^0)} = -\frac{1}{a} T(w|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} - \frac{1}{2^{k+1}a} y \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2,$$

- on pose $u|_{Y^\sigma} = w \circ f_\sigma^{-1}$.

On peut alors approcher la solution $e_0 = U(0, g_0)$ en remarquant que $e_0|_{Y^0} = w$ où w vérifie (4.66), (4.68) et

$$\partial_n w|_{f_i(\Gamma^0)} = -\frac{1}{a} T(w|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} + \frac{(-1)^i}{2a} y \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2,$$

et pour $i = 1, 2$,

$$e_0|_{f_i(\Omega)} = \frac{(-1)^{i+1}}{2} e \circ f_i^{-1} + (\mathcal{H}(e_0|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i)) \circ f_i^{-1}.$$

Les e_σ, y^σ sont alors déduites par récurrence. Si $\sigma = i\tau$ pour $i \in \{1, 2\}$ et $\tau \in \mathcal{A}$, alors $e_\sigma|_{Y^0} = w$, où $w \in \mathcal{V}(Y^0)$ vérifie (4.66), (4.68) et

$$\partial_n w|_{f_i(\Gamma^0)} = -\frac{1}{a} T(w|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i) \circ f_i^{-1} - \frac{1}{2a} y^\tau \circ f_i^{-1} \text{ sur } f_i(\Gamma^0), \quad i = 1, 2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} e_\sigma|_{f_i(\Omega)} &= \frac{1}{2} e^\tau \circ f_i^{-1} + (\mathcal{H}(e_0|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i)) \circ f_i^{-1}, \\ e_\sigma|_{f_i(\Omega)} &= (\mathcal{H}(e_0|_{f_i(\Gamma^0)} \circ f_i)) \circ f_i^{-1}, \end{aligned}$$

où la notation \bar{i} désigne 2 si $i = 1$, et 1 sinon.

Le résultat suivant indique que si n est fixé et $\sigma \in \mathcal{A}_k$, $\|e_\sigma\|_{L^2(Y^n)}$ décroît exponentiellement rapidement lorsque $k \rightarrow \infty$, où $Y^n = \bigcup_{\tau \in \mathcal{A}_n} f_\tau(Y^0)$.

THÉORÈME 4.6.3 – *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous n, k entiers tels que $1 \leq n < k$, et $\sigma \in \mathcal{A}_k$,*

$$\|e_\sigma\|_{L^2(Y^n)} \leq 2^{-n} \rho^{k-n},$$

où ρ est la constante de la constante du Théorème 4.6.2.

Le cas général Dans le cas général, on décompose γ^N dans la base d'ondelettes de Haar de Γ^∞ :

$$\gamma^N = \beta g + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma g_\sigma.$$

Le Théorème 4.6.3 permet alors de montrer que

$$U(0, \gamma^N) = \beta e + \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma e_\sigma.$$

Dans [ASTo6], les auteurs obtiennent l'estimation d'erreur suivante. Il existe une constante C indépendante de γ^N telle que pour tous n, K entiers tels que $1 \leq n < K$,

$$\left\| U(0, \gamma^N) - \beta e - \sum_{k=0}^K \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma e_\sigma \right\|_{H^1(Y^n)} \leq C 2^{-K/2} \rho^{K-n} \|\gamma^N\|_{L^2_\mu(\Gamma^\infty)},$$

où ρ est la constante du Théorème 4.6.2.

4.6.2 APPLICATION À LA RÉOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME INTÉRIEUR

La méthode décrite ci-dessus permet de résoudre de manière approchée un problème aux limites dans Ω avec une donnée de Neumann sur Γ^∞ . Le problème qu'on traite dans la méthode de point fixe est un problème dans Ω^m avec une donnée de Neumann sur Γ^m . On décrit ici très brièvement comment exploiter la méthode du paragraphe 4.6.1 pour approcher la solution du problème (4.42) dans Ω^m dans le cas où $f^i \equiv 0$.

Lorsque m est grand, pour exploiter les propriétés d'auto-similarité, on "projette" la donnée de Neumann sur Γ^∞ en la développant en ondelettes de Haar, puis en identifiant les coefficients d'ondelettes. On obtient une donnée de Neumann ζ^N sur Γ^∞ .

On approche ensuite la solution du problème dans Ω^m par

$$U(u_0, 0)|_{\Omega^m} + U(0, \zeta^N)|_{\Omega^m}.$$

Mise en œuvre numérique On décrit par exemple la résolution numérique dans le cadre de la discrétisation décrite au paragraphe 4.3.2, pour laquelle l'ensemble Γ^m est découpé en M_1 segments. On suppose que $M_1 = 2^m$ et que le découpage de Γ^m est donné par $\{\Gamma^\tau, \tau \in \mathcal{A}_m\}$.

On appelle $\tilde{\gamma}^N$ la donnée de Neumann approchée pour le problème intérieur (4.42), prise constante sur chaque segment du découpage. On peut écrire le développement en ondelettes de $\tilde{\gamma}^N$ sous la forme

$$\tilde{\gamma}^N = \beta h + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma h_\sigma,$$

où $h = \mathbb{1}_{\Gamma^m}$, et les fonctions h_σ , $\sigma \in \mathcal{A}_k$, $k < m$, sont définies sur Γ^m par

$$h_\sigma \equiv g_\sigma|_{f_\tau(\Gamma^\infty)} \text{ sur } \Gamma^\tau, \tau \in \mathcal{A}_m.$$

On note que l'ondelette de Haar g_σ est constante sur $f_\tau(\Gamma^\infty)$ pour tout $\tau \in \mathcal{A}_m$. On obtient alors la donnée de Neumann projetée sur Γ^∞

$$\zeta^N = \beta g + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma g_\sigma.$$

On approche alors la solution du problème dans Ω^m par la restriction de $U(0, \zeta^N)$ à Ω^m donnée par

$$\beta e + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k} \beta_\sigma e_\sigma,$$

les fonctions e_σ ayant été calculées préalablement, et étant stockées.

REMARQUE 4.6.1 – Notons que le Théorème 4.6.3 permet d'éviter de calculer e_σ dans Ω tout entier : le théorème assure que lorsque $\sigma \in \mathcal{A}_n$ pour n grand, la fonction $e_{\sigma|_{Y_k}}$ est très proche de 0 si $n - k$ est assez grand. En pratique, on approche e_σ par 0 lorsque $n - k \geq 3$.

4.7 ANNEXE : CALCUL EXPLICITE DES INTÉGRALES

On détaille ici le calcul explicite des intégrales $s_{i,j}$ et $d_{i,j}$ données en (4.34). Soient deux entiers i et j tels que $1 \leq i, j \leq M$, où M est le nombre de segments dans le découpage de $\partial\Omega^m$. On rappelle que les intégrales s'écrivent

$$s_{i,j} = -\frac{1}{2\pi|S_i|} \int_{S_i} \int_{S_j} \ln|y-x| dy dx \quad \text{et} \quad d_{i,j} = -\frac{1}{2\pi|S_i|} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{(y-x) \cdot n(y)}{|y-x|^2} dy dx,$$

où $n(y)$ désigne la normale au segment S_j au point $y \in S_j$, dirigée vers l'extérieur du domaine Ω .

Calcul de l'intégrale $s_{i,j}$ On appelle φ l'angle algébrique entre les segments orientés S_i et S_j . On considère d'abord le cas où $\varphi \neq 0$. On se place dans le repère $\mathcal{R} = (O, v_i, v_j)$, où O est l'intersection des droites engendrées par les deux segments, et v_i et v_j sont les vecteurs directeurs respectifs de S_i et S_j . Soient $(\lambda, 0)$ et $(0, \mu)$ les coordonnées respectives des origines de S_i et S_j dans le repère \mathcal{R} , voir Figure 4.5.

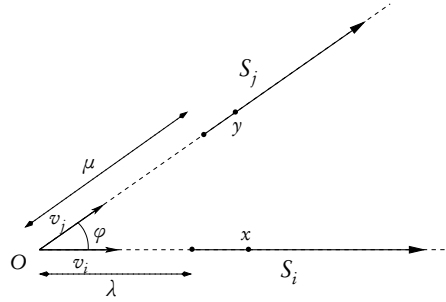


FIGURE 4.5 - Le repère dans le cas où $\varphi \neq 0$

On peut réécrire $s_{i,j}$ de la manière suivante :

$$s_{i,j} = -\frac{1}{2\pi l_1} \int_{\lambda}^{\lambda+l_1} \int_{\mu}^{\mu+l_2} \frac{1}{2} \ln(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \varphi + \eta^2) d\eta d\xi, \quad (4.70)$$

où l_1 et l_2 sont les longueurs respectives des segments S_i et S_j .

Si on note $\omega =]\lambda, \lambda + l_1[\times]\mu, \mu + l_2[$, on a par la formule de Green

$$s_{i,j} = \frac{1}{2\pi l_1} \left(\frac{l_1 l_2}{2} - \frac{1}{4} \int_{\partial\omega} (\xi, \eta) \cdot \nu(\xi, \eta) \ln(\xi^2 - 2\xi\eta \cos \varphi + \eta^2) d\sigma(\xi, \eta) \right), \quad (4.71)$$

où $\nu(\xi, \eta)$ est la normale sortante à ω au point $(\xi, \eta) \in \partial\omega$, et σ la mesure surfacique associée à $\partial\omega$. On obtient ainsi

$$s_{i,j} = \frac{1}{2\pi l_1} \left(\frac{l_1 l_2}{2} - \frac{1}{4} \left((\lambda + l_1) I_{\lambda+l_1}^{\mu, \mu+l_2} - \lambda I_{\lambda}^{\mu, \mu+l_2} + (\mu + l_2) I_{\mu+l_2}^{\lambda, \lambda+l_1} - \mu I_{\mu}^{\lambda, \lambda+l_1} \right) \right), \quad (4.72)$$

où $I_{\gamma}^{\alpha, \beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \ln(\zeta^2 - 2\zeta\gamma \cos \varphi + \gamma^2) d\zeta$, pour des réels α, β, γ .

Une intégration par parties et un calcul explicite montrent que

$$\begin{aligned}
 I_{\gamma}^{\alpha, \beta} &= 2(\beta - \alpha) + (\beta - \gamma \cos \varphi) \ln(\beta^2 - 2\beta\gamma \cos \varphi + \gamma^2) \\
 &\quad - (\alpha - \gamma \cos \varphi) \ln(\alpha^2 - 2\alpha\gamma \cos \varphi + \gamma^2) \\
 &\quad - 2\gamma \sin \varphi \left(\arctan \frac{\beta - \gamma \cos \varphi}{\gamma \sin \varphi} - \arctan \frac{\alpha - \gamma \cos \varphi}{\gamma \sin \varphi} \right).
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

On considère maintenant le cas où $\varphi = 0$, c'est-à-dire que les segments S_i et S_j sont parallèles. On se place dans le repère orthonormal (A, w, w_{\perp}) , où A est la première extrémité du segment S_i et w est le vecteur directeur du segment S_i . On note (λ, μ) les coordonnées de la première extrémité du segment S_j dans ce repère. On note l_1 la longueur de S_i et l_2 la longueur algébrique de S_j , de sorte que la deuxième extrémité de S_j a pour coordonnées $(\mu + l_2, \lambda)$, voir Figure 4.6.

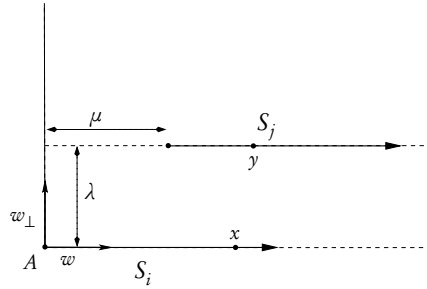


FIGURE 4.6 - Le repère dans le cas où $\varphi = 0$

Dans ce cas,

$$s_{i,j} = -\frac{1}{2\pi l_1} \int_0^{l_1} \int_{\mu}^{\mu+l_2} \frac{1}{2} \ln((\xi - \eta)^2 + \lambda^2) d\eta d\xi,$$

et par la formule de Green,

$$s_{i,j} = \frac{1}{4\pi l_1} \left(\iint_{\omega} \frac{(\xi - \eta)^2}{(\xi - \eta)^2 + \lambda^2} d\eta d\xi - \frac{1}{2} \int_{\partial\omega} (\xi, \eta) \cdot \nu(\xi, \eta) \ln((\xi - \eta)^2 + \lambda^2) d\sigma(\xi, \eta) \right),$$

où on note $\omega =]0, l_1[\times]\mu, \mu + l_2[$, et $\nu(\xi, \eta)$ représente la normale extérieure à ω au point $(\xi, \eta) \in \partial\omega$.

$$s_{i,j} = \frac{1}{4\pi l_1} \left(l_1 l_2 - \lambda^2 \iint_{\omega} \frac{1}{(\xi - \eta)^2 + \lambda^2} d\eta d\xi - \frac{1}{2} (l_1 J_{l_1}^{\mu, \mu+l_2} + (\mu + l_2) J_{\mu+l_2}^{0, l_1} - \mu J_{\mu}^{0, l_1}) \right),$$

où $J_{\gamma}^{\alpha, \beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \ln((\zeta - \gamma)^2 + \lambda^2) d\zeta$ pour des réels α, β, γ .

On suppose $\lambda \neq 0$. En intégrant une première fois, puis en intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} \frac{1}{(\xi - \eta)^2 + \lambda^2} d\eta d\xi &= \frac{1}{\lambda} \left(\arctan \frac{\xi - \mu}{\lambda} - \arctan \frac{\xi - (\mu + l_2)}{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(\mu^2 + \lambda^2)((l_1 - (\mu + l_2))^2 + \lambda^2)}{((\mu + l_2)^2 + \lambda^2)((1 - \mu)^2 + \lambda^2)} \\ &\quad + \frac{l_1 - \mu}{\lambda} \arctan \frac{l_1 - \mu}{\lambda} - \frac{l_1 - (\mu + l_2)}{\lambda} \arctan \frac{l_1 - (\mu + l_2)}{\lambda} \\ &\quad + \frac{\mu + l_2}{\lambda} \arctan \frac{\mu + l_2}{\lambda} - \frac{\mu}{\lambda} \arctan \frac{\mu}{\lambda}. \end{aligned}$$

D'autre part, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} J_{\gamma}^{\alpha, \beta} &= 2(\alpha - \beta) + 2\lambda \left(\arctan \frac{\beta - \gamma}{\lambda} - \arctan \frac{\alpha - \gamma}{\lambda} \right) \\ &\quad + (\beta - \gamma) \ln((\beta - \gamma)^2 + \lambda^2) - (\alpha - \gamma) \ln((\alpha - \gamma)^2 + \lambda^2). \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$, on a

$$s_{i,j} = \frac{1}{4\pi l_1} \left(l_1 l_2 - \frac{1}{2} (l_1 J_{l_1}^{\mu, \mu+l_2} + (\mu + l_2) J_{\mu+l_2}^{0, l_1} - \mu J_{\mu}^{0, l_1}) \right),$$

où $J_{\gamma}^{\alpha, \beta} = 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \ln((\beta - \gamma)^2) - (\alpha - \gamma) \ln((\alpha - \gamma)^2)$.

Calcul de l'intégrale $d_{i,j}$ Dans le cas où $\varphi \neq 0$, on se place dans le même repère que précédemment, voir Figure 4.5. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a

$$d_{i,j} = -\frac{1}{2\pi l_1} \int_{\lambda}^{\lambda+l_1} \int_{\mu}^{\mu+l_2} \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 - 2\xi \eta \cos \varphi + \eta^2} d\eta d\xi,$$

et, par la formule de Green,

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= -\frac{1}{4\pi l_1} \left(\iint_{\omega} \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 - 2\xi \eta \cos \varphi + \eta^2} d\eta d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial \omega} (\xi, \eta) \cdot \nu(\xi, \eta) \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 - 2\xi \eta \cos \varphi + \eta^2} d\sigma(\xi, \eta) \right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$d_{i,j} = -\frac{1}{2\pi l_1} \int_{\partial \omega} (\xi, \eta) \cdot \nu(\xi, \eta) \frac{\xi \sin \varphi}{\xi^2 - 2\xi \eta \cos \varphi + \eta^2} d\sigma(\xi, \eta). \quad (4.74)$$

Alors,

$$d_{i,j} = -\frac{\sin \varphi}{2\pi l_1} ((\lambda + l_1)^2 I_{\lambda+l_1} - \lambda^2 I_{\lambda} + (\mu + l_2) J_{\mu+l_2} - \mu J_{\mu}), \quad (4.75)$$

où $I_{\alpha} = \int_{\mu}^{\mu+l_2} \frac{1}{\eta^2 - 2\eta \alpha \cos \varphi + \alpha^2} d\eta$, et $J_{\beta} = \int_{\lambda}^{\lambda+l_1} \frac{\xi}{\xi^2 - 2\xi \beta \cos \varphi + \beta^2} d\xi$ pour α, β non nuls, et $I_0 = J_0 = 0$.

Un calcul explicite montre que si $\alpha, \beta \neq 0$,

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha \sin \varphi} \left(\arctan \frac{\mu + l_2 - \alpha \cos \varphi}{\alpha \sin \varphi} - \arctan \frac{\mu - \alpha \cos \varphi}{\alpha \sin \varphi} \right),$$

$$J_\beta = \frac{1}{2} \ln \frac{(\lambda + l_1)^2 - 2(\lambda + l_1)\beta \cos \varphi + \beta^2}{\lambda^2 - 2\lambda\beta \cos \varphi + \beta^2}$$

$$+ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \left(\arctan \frac{\lambda + l_2 - \beta \cos \varphi}{\beta \sin \varphi} - \arctan \frac{\lambda - \beta \cos \varphi}{\beta \sin \varphi} \right).$$

On considère maintenant dans le cas où $\varphi = 0$. On se place dans le repère de la Figure 4.6 et on utilise les mêmes notations que pour le calcul de $s_{i,j}$. On a

$$d_{i,j} = -\frac{1}{2\pi l_1} \int_0^{l_1} \int_\mu^{\mu+l_2} \frac{\lambda}{(\xi - \eta)^2 + \lambda^2} d\eta d\xi.$$

Si $\lambda = 0$, on a $d_{i,j} = 0$. Si $\lambda \neq 0$, une intégration par parties donne :

$$d_{i,j} = \frac{1}{2\pi l_1} \left(\frac{\lambda}{2} \ln \frac{((\mu + l_2)^2 + \lambda^2)((l_1 - \mu)^2 + \lambda^2)}{(\mu^2 + \lambda^2)((l_1 - (\mu + l_2))^2 + \lambda^2)} + (\mu + l_2) \arctan \frac{\mu + l_2}{\lambda} - \mu \arctan \frac{\mu}{\lambda} \right.$$

$$\left. + (l_1 - \mu) \arctan \frac{l_1 - \mu}{\lambda} - (l_1 - (\mu + l_2)) \arctan \frac{l_1 - (\mu + l_2)}{\lambda} \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [AB10] P. AUSCHER et N. BADR – « Sobolev spaces on multiple cones », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **19** (2010), no. 3-4, p. 707-733.
- [ADN59] S. AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG – « Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I », *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), p. 623-727.
- [ADT] Y. ACHDOU, T. DEHEUEVELS et N. TCHOU – « Comparison of different definitions of traces for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries », Submitted.
- [ADT12] Y. ACHDOU, T. DEHEUEVELS et N. TCHOU – « $JLip$ versus Sobolev spaces on a class of self-similar fractal foliages », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **97** (2012), p. 142-172.
- [Ahl66] L. AHLFORS – *Lectures on quasiconformal mappings*, Manuscript prepared with the assistance of Clifford J. Earle, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10, D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.-New York-London, 1966.
- [AST06] Y. ACHDOU, C. SABOT et N. TCHOU – « Diffusion and propagation problems in some ramified domains with a fractal boundary », *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **40** (2006), no. 4, p. 623-652.
- [AST06] Y. ACHDOU, C. SABOT et N. TCHOU – « A multiscale numerical method for Poisson problems in some ramified domains with a fractal boundary », *Multiscale Model. Simul.* **5** (2006), no. 3, p. 828-860 (electronic).
- [AST07] Y. ACHDOU, C. SABOT et N. TCHOU – « Transparent boundary conditions for the Helmholtz equation in some ramified domains with a fractal boundary », *J. Comput. Phys.* **220** (2007), no. 2, p. 712-739.
- [AT07] Y. ACHDOU et N. TCHOU – « Neumann conditions on fractal boundaries », *Asymptotic Analysis* **53** (2007), no. 1-2, p. 61-82.
- [AT08] Y. ACHDOU et N. TCHOU – « Trace results on domains with self-similar fractal boundaries », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **89** (2008), p. 596-623.

- [AT10] Y. ACHDOU et N. TCHOU – « Trace theorems for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries », *SIAM J. of Math. Anal.* **42** (2010), no. 4, p. 828–860 (electronic).
- [BB89] M. T. BARLOW et R. F. BASS – « The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), no. 3, p. 225–257.
- [BB09] P. M. BLISS et D. A. BROWN – « Geometric properties of three-dimensional fractal trees », *Chaos Solitons Fractals* **42** (2009), no. 1, p. 119–124.
- [BBV06] P. BAGNERINI, A. BUFFA et E. VACCA – « Finite elements for a prefractal transmission problem », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 3, p. 211–214.
- [BK95] S. BUCKLEY et P. KOSKELA – « Sobolev-Poincaré implies John », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 5, p. 577–593.
- [Boj88] B. BOJARSKI – « Remarks on Sobolev imbedding inequalities », in *Complex analysis, Joensuu 1987*, Lecture Notes in Math., vol. 1351, Springer, Berlin, 1988, p. 52–68.
- [Bre11] H. BREZIS – *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [Cal61] A.-P. CALDERÓN – « Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions », in *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. IV*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961, p. 33–49.
- [Cap10] R. CAPITANELLI – « Asymptotics for mixed Dirichlet-Robin problems in irregular domains », *J. Math. Anal. Appl.* **362** (2010), no. 2, p. 450–459.
- [CDN99] M. COSTABEL, M. DAUGE et S. NICAISE – « Singularities of Maxwell interface problems », *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33** (1999), no. 3, p. 627–649.
- [CRW] S.-K. CHUA, S. RODNEY et R. L. WHEEDEN – « A compact embedding theorem for generalized Sobolev spaces », arXiv :1110.6907.
- [CS85] M. COSTABEL et E. STEPHAN – « Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation », in *Mathematical models and methods in mechanics*, Banach Center Publ., vol. 15, PWN, Warsaw, 1985, p. 175–251.
- [DD02] A. DAMLAMIAN et P. DONATO – « Which sequences of holes are admissible for periodic homogenization with Neumann boundary condition ? », *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **8** (2002), p. 555–585 (electronic), A tribute to J. L. Lions.
- [Deh] T. DEHEUVELS – « Sobolev extension property for tree-shaped domains with self-contacting fractal boundary », Submitted.
- [DL92] R. A. DEVORE et B. J. LUCIER – « Wavelets », in *Acta numerica, 1992*, Acta Numer., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, p. 1–56.
- [Fal86] K. FALCONER – *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 85, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [Fal97] K. FALCONER – *Techniques in fractal geometry*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
- [FLBo7] R. M. FRONGILLO, E. LOCK et D. A. BROWN – « Symmetric fractal trees in three dimensions », *Chaos Solitons Fractals* **32** (2007), no. 2, p. 284–295.
- [FS00] M. FILOCHE et B. SAPOVAL – « Transfer across random versus deterministic fractal interfaces », *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), p. 5776–5779.
- [Gag57] E. GAGLIARDO – « Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **27** (1957), p. 284–305.
- [Gol87] S. GOLDSTEIN – « Random walks and diffusions on fractals », in *Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems (Minneapolis, Minn., 1984–1985)*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 8, Springer, New York, 1987, p. 121–129.
- [Gri85] P. GRISVARD – *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [HK91] D. A. HERRON et P. KOSKELA – « Uniform, Sobolev extension and quasiconformal circle domains », *J. Anal. Math.* **57** (1991), p. 172–202.
- [HK92] D. A. HERRON et P. KOSKELA – « Uniform and Sobolev extension domains », *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), no. 2, p. 483–489.
- [HKT08] P. HAJLASZ, P. KOSKELA et H. TUOMINEN – « Measure density and extendability of Sobolev functions », *Rev. Mat. Iberoam.* **24** (2008), no. 2, p. 645–669.
- [HKT08] P. HAJLASZ, P. KOSKELA et H. TUOMINEN – « Sobolev embeddings, extensions and measure density condition », *J. Funct. Anal.* **254** (2008), no. 5, p. 1217–1234.
- [Hut81] J. HUTCHINSON – « Fractals and self-similarity », *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), no. 5, p. 713–747.
- [Joh61] F. JOHN – « Rotation and strain », *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), p. 391–413.
- [Jon81] P. JONES – « Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces », *Acta Math.* **147** (1981), no. 1–2, p. 71–88.
- [Jon96] A. JONSSON – « Brownian motion on fractals and function spaces », *Math. Z.* **222** (1996), no. 3, p. 495–504.
- [Jon98] A. JONSSON – « Wavelets on fractals and Besov spaces », *J. Fourier Anal. Appl.* **4** (1998), no. 3, p. 329–340.
- [Jono4] A. JONSSON – « Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions », *J. Math. Anal. Appl.* **290** (2004), no. 1, p. 86–104.
- [JS11] P. JOLY et A. SEMIN – « Mathematical and numerical modeling of wave propagation in fractal trees », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), no. 19–20, p. 1047–1051.
- [JW78] A. JONSSON et H. WALLIN – « A Whitney extension theorem in L^p and Besov spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **28** (1978), no. 1, p. vi, 139–192.

- [JW84] A. JONSSON et H. WALLIN – « Function spaces on subsets of \mathbf{R}^n », *Math. Rep.* **2** (1984), no. 1, p. xiv + 221.
- [JW95] A. JONSSON et H. WALLIN – « The dual of Besov spaces on fractals », *Studia Math.* **112** (1995), no. 3, p. 285–300.
- [Kig89] J. KIGAMI – « A harmonic calculus on the Sierpiński spaces », *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), no. 2, p. 259–290.
- [Kig93] J. KIGAMI – « Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets », *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), no. 2, p. 721–755.
- [Kig01] J. KIGAMI – *Analysis on fractals*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Kos98] P. KOSKELA – « Extensions and imbeddings », *J. Funct. Anal.* **159** (1998), no. 2, p. 369–383.
- [Kos99] P. KOSKELA – « Removable sets for Sobolev spaces », *Ark. Mat.* **37** (1999), no. 2, p. 291–304.
- [Kus87] S. KUSUOKA – « A diffusion process on a fractal », in *Probabilistic methods in mathematical physics (Katata/Kyoto, 1985)*, Academic Press, Boston, MA, 1987, p. 251–274.
- [Lano2] M. LANCIA – « A transmission problem with a fractal interface », *Z. Anal. Anwendungen* **21** (2002), no. 1, p. 113–133.
- [Lano3] M. LANCIA – « Second order transmission problems across a fractal surface », *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5)* **27** (2003), p. 191–213.
- [Lano4] M. R. LANCIA – « On some second order transmission problems », *Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues* **29** (2004), no. 2, p. 85–100.
- [LV73] O. LEHTO et K. I. VIRTANEN – *Quasiconformal mappings in the plane*, second éd., Springer-Verlag, New York, 1973, Translated from the German by K. W. Lucas, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 126.
- [LV99] M. R. LANCIA et M. A. VIVALDI – « Lipschitz spaces and Besov traces on self-similar fractals », *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5)* **23** (1999), p. 101–116.
- [LV03] M. R. LANCIA et M. A. VIVALDI – « Asymptotic convergence of transmission energy forms », *Adv. Math. Sci. Appl.* **13** (2003), no. 1, p. 315–341.
- [LV10] M. R. LANCIA et P. VERNOLE – « Irregular heat flow problems », *SIAM J. Math. Anal.* **42** (2010), no. 4, p. 1539–1567.
- [LV12] M. R. LANCIA et P. VERNOLE – « Semilinear evolution transmission problems across fractal layers », *Nonlinear Anal.* **75** (2012), no. 11, p. 4222–4240.
- [Man82] B. B. MANDELBROT – *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982, Schriftenreihe für den Referenten. [Series for the Referee].
- [Maz85] V. MAZ'JA – *Sobolev spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova.

- [Mey75] N. MEYERS – « Continuity properties of potentials », *Duke Math. J.* **42** (1975), p. 157–166.
- [MF99] B. MANDELBROT et M. FRAME – « The canopy and shortest path in a self-contacting fractal tree », *Math. Intelligencer* **21** (1999), no. 2, p. 18–27.
- [Mor46] P. MORAN – « Additive functions of intervals and Hausdorff measure », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **42** (1946), p. 15–23.
- [Mos67] U. MOSCO – « Approximation of the solutions of some variational inequalities », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)* **21** (1967), 373–394; *erratum, ibid. (3)* **21** (1967), p. 765.
- [Mos69] U. MOSCO – « Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities », *Advances in Math.* **3** (1969), p. 510–585.
- [Mos95] U. MOSCO – « Variational metrics on self-similar fractals », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), no. 6, p. 715–720.
- [Mos97] U. MOSCO – « Variational fractals », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **25** (1997), no. 3-4, p. 683–712 (1998), Dedicated to Ennio De Giorgi.
- [Mos98] U. MOSCO – « Dirichlet forms and self-similarity », in *New directions in Dirichlet forms*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, p. 117–155.
- [Mos02] U. MOSCO – « Energy functionals on certain fractal structures », *J. Convex Anal.* **9** (2002), no. 2, p. 581–600, Special issue on optimization (Montpellier, 2000).
- [Mos04] U. MOSCO – « An elementary introduction to fractal analysis », in *Nonlinear analysis and applications to physical sciences*, Springer Italia, Milan, 2004, p. 51–90.
- [MS79] O. MARTIO et J. SARVAS – « Injectivity theorems in plane and space », *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **4** (1979), no. 2, p. 383–401.
- [MSV09] B. MAURY, D. SALORT et C. VANNIER – « Trace theorems for trees and application to the human lungs », *Netw. Heterog. Media* **4** (2009), no. 3, p. 469–500.
- [MV03] U. MOSCO et M. VIVALDI – « Variational problems with fractal layers », *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5)* **27** (2003), p. 237–251.
- [MV09] U. MOSCO et M. A. VIVALDI – « Fractal reinforcement of elastic membranes », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **194** (2009), no. 1, p. 49–74.
- [Neč67] J. NEČAS – *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [Sap94] B. SAPOVAL – « General formulation of laplacian transfer across irregular surfaces », *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), p. 3314–3316.
- [SS88] G. SCHMIDT et H. STRESE – « The convergence of a direct BEM for the plane mixed boundary value problem of the Laplacian », *Numer. Math.* **54** (1988), no. 2, p. 145–165.
- [Ste70] E. STEIN – *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

- [Str99] R. STRICHARTZ – « Analysis on fractals », *Notices Amer. Math. Soc.* **46** (1999), no. 10, p. 1199–1208.
- [Stro3] R. STRICHARTZ – « Function spaces on fractals », *J. Funct. Anal.* **198** (2003), no. 1, p. 43–83.
- [SW85] E. STEPHAN et W. L. WENDLAND – « An augmented Galerkin procedure for the boundary integral method applied to mixed boundary value problems », *Appl. Numer. Math.* **1** (1985), no. 2, p. 121–143.
- [Tay07] T. D. TAYLOR – « Homeomorphism classes of self-contacting symmetric binary fractal trees », *Fractals* **15** (2007), no. 1, p. 9–25.
- [Tay09] T. D. TAYLOR – « A new classification of non-overlapping symmetric binary fractal trees using epsilon hulls », *Fractals* **17** (2009), no. 3, p. 365–384.
- [Tri97] H. TRIEBEL – *Fractals and spectra*, Monographs in Mathematics, vol. 91, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, Related to Fourier analysis and function spaces.
- [VdV92] H. A. VAN DER VORST – « Bi-CGSTAB : a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems », *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* **13** (1992), no. 2, p. 631–644.
- [VGL79] S. K. VODOP'JANOV, V. M. GOL'DŠTEĪN et T. G. LATFULLIN – « A criterion for the extension of functions of the class L_2^1 from unbounded plane domains », *Sibirsk. Mat. Zh.* **20** (1979), no. 2, p. 416–419, 464.
- [Yan06] S. YANG – « A Sobolev extension domain that is not uniform », *Manuscripta Math.* **120** (2006), no. 2, p. 241–251.