



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : INFORMATIQUE
Laboratoire de Recherche en Informatique (LRI)

Discipline : INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 13/06/2013

par

Xavier ZEITOUN

Complexité des dynamiques de jeux

Directeur de thèse :	Michel de Rougemont	Professeur (Université Paris 2, CNRS)
Rapporteurs :	Évripidis Bampis	Professeur (UPMC)
	Bruno Escoffier	Maître de conférence (habilité) (Université Paris Dauphine)
Examineurs :	Yannis Manoussakis	Professeur (Université Paris Sud)
	Christoph Durr	Directeur de recherche (UPMC,CNRS)

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Michel de Rougemont qui par ses conseils et ses orientations m'a permis d'effectuer cette expérience de la recherche.

Je souhaite également remercier mes rapporteurs Bruno Escoffier et Evripidis Bampis pour le soin apporté à leur tâche. Merci également à Christoph Durr et Yannis Manoussakis d'avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.

Les deux laboratoires qui m'ont accueilli, le LRI et le LIAFA, sont de formidables structures d'encadrement de la recherche. Leurs membres sont accueillants et ont tous pour but commun d'aider la recherche. Ils ont grandement facilité mes démarches et mon travail. Je pense ainsi par exemple à Laifa, au STAFF, à Noëlle et Nathalie et au personnel de l'EDIPS. Merci aussi à toute l'équipe Algorithmique et Complexité de m'avoir accueilli et introduit dans ses thématiques.

Même si cela n'est pas lié à mon activité de recherche, je tiens également à remercier les responsables des enseignements sur lesquels j'étais chargé de TD qui m'ont beaucoup aidé dans cette tâche.

Ces années n'auraient pas eu la même saveur sans la présence de mes collègues de bureaux. Merci donc, entre autres, à Christian, Marc, Jamie, Antoine, Laure, André, Loick et Mathieu pour avoir agrémente les innombrables cafés de discussions toujours surprenantes.

Merci également à mes amis, Charles, Fabien, François, les Nicos, Nono, Giulio, Meven, Seb et tous les autres que j'oublie pour leur compréhension et pour avoir su me sortir de mes humeurs moroses. Je remercie aussi mes parents, mes frères et ma soeur, de m'avoir toujours soutenu.

Enfin, je ne pourrais jamais assez remercier Aurore, qui a partagé mes peines comme mes joies et m'a poussé à avancer.

Xavier Zeitoun

Résumé

Complexité des dynamiques des jeux

par Xavier ZEITOUN

Complexity theory allows to classify problems by their algorithmic hardness. The classical framework in which it applies is the one of a centralized algorithm that knows every information. With the development of networks and decentralized architectures, distributed dynamics was studied. In many problems, in optimization or economy, actions and computations are made by independent agents that don't share the same objective whose realization depends on the actions of other agents. Game theory is a natural framework to study solutions of this kind of problem. It provides solution concepts such as the Nash equilibrium.

A natural way to compute these solutions is to make the agents «react» ; if an agent sees the actions of the other player, or more generally the state of the game, he can decide to change his decision to reach his objective and updates the state of the game. We call «dynamics» this kind of algorithms.

We know some dynamics converges to a stable solution. We are interested by the speed of convergence of these dynamics. Some solution concepts are even complete for some complexity classes which make unrealistic the existence of fast converging dynamics. We used three ways to obtain a fast convergence : improving dynamics (using random bits), finding simple subcases, and finding an approximate solution.

We extend fast convergence results to an approximate Nash equilibria in negative congestion games. However, we proved that finding an approximate Nash equilibrium in a congestion games without sign restriction is PLS-complete. On matching game, we studied the speed of concurrent dynamics when players have partial information that depends on a social network. Especially, we improved natural dynamics for them to reach an equilibrium in $O(\log(n))$ rounds (with n is the number of players).

Résumé

Complexité des dynamiques des jeux

par Xavier ZEITOUN

La théorie de la complexité permet de classifier les problèmes en fonction de leur difficulté. Le cadre classique dans lequel elle s'applique est celui d'un algorithme centralisé qui dispose de toutes les informations. Avec l'essor des réseaux et des architectures décentralisées, l'algorithme distribué a été étudiée. Dans un grand nombre de problèmes, en optimisation et en économie, les décisions et les calculs sont effectués par des agents indépendants qui suivent des objectifs différents dont la réalisation dépend des décisions des autres agents. La théorie des jeux est un cadre naturel pour analyser les solutions de tels problèmes. Elle propose des concepts de stabilité, le plus classique étant l'équilibre de Nash.

Une manière naturelle de calculer de telles solutions est de « faire réagir » les agents ; si un agent voit quelles sont les décisions des autres joueurs ou plus généralement un « état du jeu », il peut décider de changer sa décision pour atteindre son objectif faisant ainsi évoluer l'état du jeu. On dit que ces algorithmes sont des « dynamiques ».

On sait que certaines dynamiques convergent vers un concept de solution. On s'intéresse à la vitesse de convergence des dynamiques. Certains concepts de solutions sont même complets pour certaines classes de complexité ce qui rend peu vraisemblable l'existence de dynamiques simples qui convergent rapidement vers ces solutions. On a utilisé alors trois approches pour obtenir une convergence rapide : améliorer la dynamique (en utilisant par exemple des bits aléatoires), restreindre la structure du problème, et rechercher une solution approchée.

Sur les jeux de congestion, on a étendu les résultats de convergence rapide vers un équilibre de Nash approché aux jeux négatifs. Cependant, on a montré que sur les jeux sans contrainte de signe, calculer un équilibre de Nash approché est PLS-complet. Sur les jeux d'appariement, on a étudié la vitesse de dynamiques concurrentes lorsque les joueurs ont une information partielle paramétrée par un réseau social. En particulier, on a amélioré des dynamiques naturelles afin qu'elles atteignent un équilibre en $O(\log(n))$ tours (avec n le nombre de joueurs).

Table des matières

Abstract	iii
Résumé	iv
Résumé	1
1 Préliminaires : allocation de ressources et jeux	4
1.1 Généralités sur les Jeux	4
1.1.1 Jeux sous forme stratégique	5
1.1.2 La représentation matricielle	5
1.1.3 Dynamiques	7
1.1.4 Dynamiques pour des jeux à information partielle	9
1.1.5 Efficacité des solutions	9
1.2 Jeux de congestion	10
1.2.1 Des jeux à n joueurs avec une représentation succincte	10
1.2.2 Existence d'un NEP et fonction de potentiel	13
1.3 Jeux d'appariement	14
1.3.1 Jeux d'appariement à liens asymétriques : jeux de suiveurs	15
1.3.2 Jeux à liens symétriques : les jeux de couplage	17
2 Dynamique du jeu fictif randomisée sur les jeux à somme nulle	21
2.1 Jeux matriciels à deux joueurs à somme nulle	21
2.1.1 Solution des jeux à somme nulle	22
2.1.2 La dynamique du jeu fictif	22
2.2 Dynamique du jeu fictif randomisée : une application de la méthode de mise à jour multiplicative des poids	23
2.2.1 Problème des experts et MPM	24
2.2.2 Jeu fictif randomisé : l'application aux jeux à somme nulle	25
Application du lemme	26
Conclusion	27
3 Complexité des équilibres sur les jeux de congestion	28
3.1 PLS et NEP	28
3.1.1 La classe PLS : Polynomial Local Search	28
3.1.2 La difficulté d'un NEP dans un jeu de congestion	30
3.2 Approfondir l'étude de la complexité du calcul d'un NEP dans un jeu de congestion	32
3.2.1 Restreindre la structure	32

3.2.2	Approcher la solution	35
3.3	Résultats sur les jeux sans contraintes de signes	37
4	Dynamiques sur les jeux de congestion	41
4.1	Sur les jeux positifs	41
4.1.1	Dynamiques de Nash	41
4.1.2	Convergence rapide de la dynamique ϵ -Nash	42
4.2	Convergence rapide sur les jeux négatifs	44
4.2.1	Avec des coûts croissants	44
4.2.2	Sur les jeux à coûts monotones	47
4.2.3	Résumé des résultats sur la complexité des NEP approchés	48
4.2.4	Question : jeux à coûts sans contrainte de signe indépendants?	49
5	Dynamiques sur les jeux d'appariement	51
5.1	Dynamiques sur les jeux de suiveurs	52
5.1.1	Dynamique de Nash concurrente	53
5.1.2	Dynamiques avec diffusion	54
5.2	Dynamiques sur les jeux de couplage	60
5.2.1	Dynamiques sur les jeux de couplage à information complète	60
5.2.2	Comment la vision limitée ralentit la convergence	70
5.2.3	Dynamiques avec exploration	73
	Conclusion	78
	Bibliographie	80

Résumé

Avec le développement des réseaux, de nombreux algorithmes distribués sont apparus pour résoudre des problèmes d'optimisation. La théorie des jeux est un cadre naturel pour l'analyse de ces algorithmes où chaque agent est modélisé par un joueur. Un équilibre du jeu correspond à la situation que l'on cherche à atteindre et il est alors naturel d'étudier la complexité des équilibres. L'étude des équilibres de Nash [1] a permis d'isoler de nouvelles classes de complexité, telles que PLS et PPAD des sous-classes de TFNP [2], la famille des problèmes de recherche NP pour lesquels il existe toujours une solution. Dans certains jeux, la recherche d'équilibres de Nash est un problème complet pour ces classes, et donc algorithmiquement difficiles.

Une solution possible pour la recherche d'équilibres est un algorithme qui répète le jeu, et simule les réactions des joueurs. A chaque tour, les joueurs peuvent mettre à jour leur stratégie en fonction de l'historique des itérations du jeu. Une dynamique de jeux détermine comment les joueurs réagissent. Certaines dynamiques, dans certains cas convergent vers un équilibre. Nous nous intéressons alors à la vitesse de convergence, en fonction du nombre de joueurs et de la taille de l'espace des stratégies.

Un cas classique est la dynamique du jeu fictif dans les jeux à somme nulle [3, 4]. Cette dynamique déterministe converge lentement vers l'équilibre [5, 6]. On peut se poser la question de savoir s'il existe des dynamiques randomisées plus efficaces.

La difficulté algorithmique des équilibres exacts a motivé l'étude des équilibres approchés. Des équilibres de Nash approchés ont été définis et étudiés à la fois dans un modèle d'approximation additive [7–13] et dans un modèle d'approximation multiplicative [14, 15].

La théorie de la complexité a montré que la combinaison de l'approximation et de la randomisation permet parfois de résoudre des problèmes difficiles. Ainsi le test de propriété permet de résoudre des problèmes NP-durs, PSPACE-durs et même indécidables, en introduisant ces deux notions. Un paramètre ε fixe l'approximation et un paramètre δ la probabilité d'erreur. Souvent $1 - \delta$ est la confiance, c'est-à-dire la probabilité d'atteindre une solution approchée. Il est donc naturel d'étudier des dynamiques randomisées pour approximer des équilibres.

On étudie certaines dynamiques dans des jeux à information partielle. L'information partielle dans les cas étudiés vient du fait que les joueurs font partie d'un réseau social, et n'apprennent des informations sur le jeu qu'en échangeant et créant des liens sur le réseau.

Notre travail se situe dans ce cadre. Certains résultats portent sur la complexité des équilibres et d'autres sur la convergence rapide de certaines dynamiques, qui peuvent dans certains cas être randomisées :

- comme résultat négatif, nous avons montré que trouver un équilibre approché sur les jeux de congestion sans contrainte de signe et à sauts bornés est PLS-complet.
- Comme résultat positif, nous avons exhibé une dynamique qui converge en temps polynomial vers un équilibre approché sur les jeux de congestion négatifs à sauts bornés. Sur les jeux d'appariements, nous avons exhibé des dynamiques concurrentes qui convergent très rapidement ($O(\log(n))$ tours avec n le nombre de joueurs) sur les jeux de suiveurs sur réseau social et dans les jeux de couplage sur réseau social.

Le chapitre 1 présente les notions utilisées, en particulier les jeux et les notions d'équilibres étudiées dans les chapitres suivants.

Le chapitre 2 présente une amélioration de la dynamique classique du jeu fictif pour les jeux à deux joueurs à somme nulle proposée par Grigoriadis et Khachian [16]. Ce chapitre ne comprend pas de nouveaux résultats, mais la méthode dite des poids multiplicatifs [17] montre comment approximation et randomisation permet de passer d'une convergence en $\Omega(2^n)$ tours à une convergence en $O(\log(n))$ tours.

Les chapitres 3 et 4 sont consacrés aux jeux de congestion, pour lesquels Fabrikant et al [18] ont montré que trouver équilibre de Nash pur est PLS-complet. La littérature fournit cependant des sous-classes des jeux de congestion dans lesquelles trouver un équilibre est faisable en temps polynomial [18–20]. On considère une approximation multiplicative d'un équilibre de Nash, c'est-à-dire des profils de stratégies dans lesquels les joueurs ne peuvent améliorer leur utilité d'un certain facteur. Dans ce contexte, Chien et Sinclair [14, 21] exhibent des conditions pour que la «dynamique ϵ -Nash» converge rapidement vers un équilibre. Skopalik et Vöcking [22] ont cependant montré que dans le cas général, trouver un équilibre de Nash approché reste PLS-complet. Le chapitre 3 présente le versant complexité du problème. En particulier, nous montrons comment étendre les résultats négatifs de Skopalik et Vöcking aux jeux de congestion sans contrainte de signe. Le chapitre 4 présente le versant dynamique du problème. En particulier, nous y étendons les résultats de Chien et Sinclair aux jeux de congestion négatifs.

Dans le chapitre 5, on s'intéresse aux jeux d'appariement dans lesquels le but des joueurs est de former des liens avec les autres joueurs. Les problèmes classiques du mariage stable ou de la collocation stable peuvent être représentés dans ce formalisme. Gale et Shapley [23] ont exposé un algorithme qui résout le problème du mariage stable en temps polynomial. Pour des généralisations du problème comme la collocation stable, l'existence d'une solution

n'est pas garantie, voire NP-complète [24]. La résolution de ces jeux par des dynamiques a été étudiée par [25, 26]. Dans un article très intéressant [27] Hofer a présenté un modèle de jeux *sur réseau social* dans lequel les joueurs ont une information partielle ; les joueurs sont des membres d'un réseau social et n'ont connaissance des autres joueurs qu'à travers ce réseau. Dans ce cadre on s'intéresse à deux types de jeux : les jeux de suiveurs et les jeux de couplage. Les jeux de suiveurs peuvent être interprétés comme un modèle simpliste de Twitter. Sans réseau social (c'est-à-dire si les joueurs ont une information complète), la «dynamique de Nash concurrente» converge en 1 tour sur ces jeux. Cependant, on montre que la dynamique de Nash concurrente nécessite $\Omega(n)$ tours sur les jeux de suiveurs sur réseau social. On propose alors une extension de la dynamique dans laquelle les joueurs effectuent une forme de diffusion. On présente une dynamique *avec diffusion* qui converge vers un équilibre en $O(\log(n))$ tours sur les jeux de suiveurs sur réseau social.

Hofer a montré que les dynamiques d'améliorations par paire (AP-dynamiques) sur les jeux de couplage atteignent un équilibre en $2^{\Omega(n)}$ tours avec n le nombre de joueurs. On a exhibé des conditions qui garantissent que sans le réseau social, les AP-dynamiques concurrentes *gloutonnes* convergent en $O(\log(n))$. Cependant même avec ces conditions, les AP-dynamiques nécessitent $\Omega(n)$ tours pour atteindre un équilibre dans les jeux de couplage sur réseau social. On propose alors une extension des dynamiques dans laquelle les joueurs effectuent une forme d'exploration qui permet d'atteindre un équilibre en $O(\log(n))$ tours.

Chapitre 1

Préliminaires : allocation de ressources et jeux

Ce chapitre introduit les problèmes et les concepts de solution étudiés dans les chapitres suivants.

La section 1.1 présente des concepts de base sur des jeux. Les sections 1.2 et 1.3 présentent les jeux de congestion et les jeux de couplage.

1.1 Généralités sur les Jeux

Il est naturel de représenter les problèmes d'allocation de ressources en utilisant deux ensembles : un ensemble de *ressources* et un ensemble d'*utilisateurs*. La définition des problèmes d'allocation de ressources est généralement complétée par un ensemble de contraintes que l'allocation doit satisfaire et une fonction objectif à maximiser.

Prenons comme illustration le problème qui se pose chaque année aux responsables des UFR : **affecter des cours à des enseignants**. Les ressources sont les enseignants, tandis que les utilisateurs sont les cours. Une solution au problème est une affectation des cours aux enseignants qui vérifie les contraintes (limite de charge d'enseignement, compétences de l'enseignant, couverture de tous les cours, contentement des enseignants...).

Une solution qui résout un problème d'allocation de façon centralisée nécessite, pour être applicable, qu'il y ait une autorité qui contrôle ce que font les utilisateurs et ce que font les ressources. Dans cette thèse nous considérons le cas où l'on n'a pas de telle autorité et que les utilisateurs que l'on appelle à partir de maintenant *joueurs* sont *égoïstes* ; c'est-à-dire qu'ils ne cherchent pas à optimiser un objectif global, mais à optimiser une fonction d'*utilité* qui leur est propre. Le problème devient alors un *jeu*. Des *solutions* aux jeux sont des allocations qui vérifient une notion de *stabilité*.

1.1.1 Jeux sous forme stratégique

Les jeux étudiés dans cette thèse sont *sous forme stratégique*. Cela signifie qu'ils sont définis par un triplet $\langle N, (\mathcal{S}_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ avec :

- $N = \{1 \dots n\}$ est un ensemble de *joueurs* ;
- pour chaque joueur i , \mathcal{S}_i est un ensemble de *stratégies* « pures » ;
- on appelle *profil de stratégies* $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N}$ un n -uplet qui contient la stratégie de chaque joueur. On note $\sigma_{-i} = (\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1} \dots \sigma_n)$ le profil de stratégies auquel il manque la stratégie du joueur i ;
- pour chaque joueur i , $u_i : (\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n) \rightarrow \mathbb{R}$ est une *fonction d'utilité* définie sur les profils de stratégies.

Le but des joueurs est de maximiser leur utilité. Dans certains jeux, l'objectif des joueurs est la minimisation d'une *fonction de coût*. On note alors pour chaque joueur i , $c_i : (\mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de coût du joueur i définie sur les profils de stratégies.

Le jeu se déroule «en un coup». Les joueurs révèlent leur stratégie simultanément. Ils constatent alors quelle est leur utilité sur le profil de stratégies dévoilé.

1.1.2 La représentation matricielle

La représentation matricielle stocke l'utilité de chaque joueur pour tous les profils de stratégies possibles. La taille de cette représentation est prohibitive lorsque le nombre de joueurs ou le nombre de stratégies est grand. Dans un jeu à n joueurs, tel que chaque joueur a deux stratégies différentes, il y a 2^n profils de stratégies différents.

On s'intéresse aux jeux sous forme matricielle à 2 joueurs, appelés **jeux bimatriciels**. On appelle les deux joueurs I et II . Un jeu bimatriciel est décrit par un couple de matrices $\langle A = (a_{i,j})_{i \leq n, j \leq m}, B = (b_{i,j})_{i \leq n, j \leq m} \rangle$ avec n le nombre de stratégies de I et m , le nombre de stratégies de II . Les coefficients représentent les utilités des joueurs; c'est-à-dire que $u_I(i, j) = a_{i,j}$ et $u_{II}(i, j) = b_{i,j}$.

L'exemple le plus célèbre de cette représentation est probablement le **dilemme du prisonnier** : les deux joueurs sont suspectés d'avoir commis un délit grave. Les preuves en possession des enquêteurs ne permettent cependant que de les inculper pour un délit mineur. I et II sont interrogés séparément par les enquêteurs et n'ont pas de moyen de communiquer entre eux. Ils ont deux stratégies : *se taire* ou *dénoncer*. S'ils se taisent tous les deux, ils sont inculpés pour le délit mineur et purgent chacun un an de prison. S'ils se dénoncent tous les deux, ils purgent chacun 5 ans de prison. Si l'un des deux dénonce l'autre, les enquêteurs passent l'éponge sur le délit mineur du délateur et l'autre purge 10 ans de prison. Ce jeu est représenté figure 1.1. Les stratégies du joueur I sont sur les lignes et celle du joueur II sur

	se taire	dénoncer
se taire	(-1 ; -1)	(-10 ;0)
dénoncer	(0 ;-10)	(-5 ;-5)

FIGURE 1.1: Représentation matricielle du dilemme du prisonnier

	pierre	feuille	ciseaux
pierre	(0 ; 0)	(-1 ;1)	(1 ;-1)
feuille	(1 ;-1)	(0 ;0)	(-1 ;1)
ciseaux	(-1 ;1)	(1 ;-1)	(0 ;0)

FIGURE 1.2: Représentation matricielle de pierre,feuille,ciseaux

les colonnes. Pour chaque couple de coefficients, le premier membre représente l'utilité du joueur I , le second représente l'utilité du joueur II .

Un premier concept de solution : l'Équilibre de Nash pur [40]. Un profil de stratégies est un *Équilibre de Nash Pur (NEP)* si aucun joueur ne peut améliorer son utilité en changeant sa stratégie unilatéralement ; c'est-à-dire, σ est un NEP si pour tout joueur i et pour toute stratégie σ'_i , $u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$.

Les NEP sont des solutions convaincantes mêmes pour des jeux qui se déroulent en un coups ; en effet, sur un tel profil, si les joueurs décidaient de se communiquer leur stratégie avant de jouer, aucun joueur ne changerait sa stratégie puisqu'il ne pourrait améliorer son utilité.

Même sans communication, dans certains jeux, les joueurs peuvent constater que quelles que soient les stratégies choisies par les autres joueurs, une stratégie est toujours meilleure que les autres. Par exemple dans le dilemme du prisonnier, quelle que soit la stratégie de II , l'utilité de I est toujours meilleure s'il choisit la stratégie dénoncer que s'il choisit la stratégie se taire. Si les deux joueurs font cette remarque, il semble raisonnable qu'ils choisissent tout les deux de dénoncer. Le profil (dénoncer, dénoncer) est un NEP (le seul) de ce jeu.

La procédure dite « d'élimination des stratégies dominées » permet également dans certains jeux de trouver un NEP.

Tous les jeux ne possèdent pas de NEP. Le jeu **pierre, feuille, ciseaux** n'en possède pas. Il est défini par les règles suivantes : chaque joueur choisit un élément parmi $\{pierre, feuille, ciseaux\}$; la pierre bat les ciseaux, les ciseaux battent la feuille et la feuille bat la pierre. Si les deux joueurs choisissent la même stratégie il y a égalité.

Par exemple, si le joueur I choisit la stratégie pierre et que le joueur II choisit ciseaux, l'utilité de I est 1 et l'utilité de II est -1. Si les deux joueurs choisissent la même stratégie, leur utilité est 0.

Ce jeu est représenté figure 1.2.

Le lecteur peut vérifier en regardant exhaustivement tous les profils de stratégies qu'aucun n'est un NEP ; c'est-à-dire qu'au moins un joueur a intérêt à changer de stratégie. Par exemple sur le profil (*pierre, feuille*), l'utilité du joueur I est -1. Il peut améliorer son utilité en changeant de stratégie pour *ciseaux*.

Équilibre de Nash, stratégie mixte, et représentation vectorielle des stratégies.

Le résultat de John Nash stipule que tous les jeux (finis) ont un équilibre de Nash (NE). Cependant, cet équilibre n'est pas nécessairement constitué de stratégies pures. Il peut nécessiter que les joueurs utilisent des stratégies randomisées appelées aussi *stratégies mixtes* ; c'est-à-dire une stratégie qui définit une distribution de probabilité sur les stratégies pures.

Une stratégie mixte est représentable par un vecteur à coefficients positifs de dimension égale au nombre de stratégies du joueur et dont la somme des coefficients vaut 1.

La représentation matricielle prend alors tout son sens. L'utilité d'un joueur sur un profil de stratégies mixtes est définie comme l'espérance de l'utilité sur les profils tirés selon la distribution définie par les stratégies mixtes des joueurs. Dans un jeu matriciel $\langle A, B \rangle$, l'utilité du joueur I sur un profil mixte (σ_I, σ_{II}) est égale à $\sigma_I^t A \sigma_{II}$.

Par exemple, l'unique NE du jeu pierre, feuille, ciseaux est le profil sur lequel les deux joueurs jouent chaque stratégie avec probabilité $\frac{1}{3}$. Sur ce profil l'utilité des deux joueurs est 0. Cependant, aucun joueur ne peut améliorer cette utilité en changeant unilatéralement de stratégie.

1.1.3 Dynamiques

Les *dynamiques* forment une classe d'algorithmes pour calculer une solution d'un jeu. Elles consistent à répéter le jeu et à faire effectuer des « mouvements » aux joueurs, c'est-à-dire des changements de stratégie en fonction de l'« historique ».

Cette thèse étudie des dynamiques discrètes où les évolutions se font par tour, par opposition aux dynamiques continues [28] où les mouvements sont spécifiés par des équations aux dérivées partielles. Sur une dynamique discrète, un historique est une séquence de profils $\sigma(1) \dots \sigma(t)$ avec $\sigma(t)$ le profil des stratégies jouées par les joueurs au tour t . Une dynamique discrète est représentable par une fonction de *mise à jour* qui détermine à partir de l'historique les mouvements pour le prochain tour.

Nous nous intéressons dans cette thèse à prouver la convergence rapide de dynamiques vers un équilibre. Pour cela il convient déjà de savoir quelles dynamiques convergent (et vers quoi). Il y a différentes notions de convergence.

Convergence. Le premier exemple d'utilisation d'une dynamique pour le calcul d'équilibre est à ma connaissance la *dynamique du jeu fictif* proposée par Brown [3] pour les jeux à deux joueurs à somme nulle. Dans cette dynamique, chaque joueur sélectionne à chaque tour la stratégie qui maximise l'utilité par rapport à la moyenne statistique des stratégies jouées par l'autre joueur dans l'historique ; c'est-à-dire un vecteur qui contient pour chaque stratégie, une probabilité proportionnelle au nombre de tours sur lesquels elle est sélectionnée (la dynamique est détaillée plus précisément au chapitre 2). Robinson [4] a prouvé que le profil constitué des moyennes statistique des stratégies jouées par les deux joueurs converge vers un profil de stratégies optimales sur les jeux à deux joueurs à somme nulle (ce qui correspond à un équilibre de Nash). Monderer et Shapley [29, 30] ont également prouvé que cette dynamique convergeait vers un équilibre de Nash sur les jeux de potentiel (définis section 1.3).

Lorsque le jeu n'est pas à deux joueurs et à somme nulle, la dynamique du jeu fictif ne converge plus vers un équilibre de Nash [31]. Il n'existe d'ailleurs pas de dynamique « naturelle » qui converge vers un équilibre de Nash dans le cas général. Calculer un équilibre de Nash dans ces jeux est PPAD-complet. Calculer un NE dans un jeu à somme nulle mais avec trois joueurs est PPAD-complet [1]. Cet énoncé est un corollaire de la PPAD-complétude d'un jeu matriciel à deux joueurs : un NE d'un jeu à deux joueurs est équivalent à un NE d'un jeu à 3 joueurs à somme nulle tel que l'utilité du troisième joueur, qui n'a qu'une stratégie, est définie de telle sorte que la somme des utilités vaut 0.

Nous nous sommes intéressés à une classe particulière de jeux, les jeux de congestion (définis section 1.2), pour lesquels des dynamiques très simples, où la mise-à-jour au tour t ne dépend pas de l'historique complet mais uniquement du tour précédent, convergent vers un NEP.

Convergence Rapide. Bien que la dynamique du jeu fictif converge dans les jeux à somme nulle, le nombre de tours nécessaires à la convergence peut être exponentiel dans le nombre de stratégies [5, 6]. Grigoriadis et Khachiyan [16] ont proposé une amélioration de la dynamique qui permet de converger en un nombre de tours logarithmique dans le nombre de stratégies vers un équilibre approché. Cette amélioration est présentée au chapitre 2.

Sur les jeux de congestion la situation est similaire. La dynamique simple évoquée précédemment converge en un nombre exponentiel de tours. Calculer un équilibre est complet pour la classe de complexité PLS, ce qui rend peu vraisemblable l'existence d'une dynamique qui converge rapidement. Chien et Sinclair [14] ont cependant exhibé des conditions pour qu'une dynamique simple converge rapidement vers un équilibre approché. Les résultats sur la complexité des équilibres dans les jeux de congestion sont présentés au chapitre 3, tandis que les résultats sur la convergence rapide sont présentés au chapitre 4.

Notation. On classe les dynamiques en fonction des critères suivants :

- mises à jour dépendantes **de l'historique complet** ou dépendante uniquement **du profil courant** ; la dynamique du jeu fictif par exemple, dépend de l'historique complet (on peut

cependant l'implémenter en ne conservant à chaque tour que la moyenne statistique des stratégies jouées). Les dynamiques de Nash étudiées sur les jeux de congestion en revanche n'ont besoin que du profil courant.

- mises à jour **déterministes** ou **probabilistes** : dans une dynamique probabiliste la mise à jour fait appel à des bits aléatoires. Cela permet une certaine flexibilité sur la notion de convergence. Les résultats obtenus établissent la convergence rapide avec une grande probabilité.
- mises à jour **concurrentes** ou **séquentielles** : dans une dynamique séquentielle, un seul joueur par tour change de stratégie, alors que dans une dynamique concurrente, plusieurs joueurs par tour peuvent changer de stratégie. La dynamique de Nash sur les jeux de congestion est séquentielle alors que les dynamiques étudiées pour les jeux à somme nulle à deux joueurs et les jeux d'appariements sont concurrentes. Comme plusieurs joueurs effectuent des mouvements à chaque tour, les dynamiques concurrentes peuvent nécessiter un nombre de tours sous-linéaire dans le nombre de joueurs pour converger.

1.1.4 Dynamiques pour des jeux à information partielle

Un jeu est dit à *information complète* si tous les joueurs connaissent tous les espaces de stratégies et toutes les fonction d'utilités. Sinon le jeu est dit à *information partielle*. Les *enchères* peuvent être vues comme un exemple des jeux à information partielle. Les joueurs sont les acheteurs. Ils ne connaissent pas à combien l'objet mis en vente est évalué par les autres acheteurs. Ces jeux ont une place centrale dans le domaine de la «conception de mécanismes» (mechanism design).

La notion d'information complète est différente de la notion d'*information parfaite* dans un jeu sous forme extensive [32]. Dans un jeu sous forme extensive les joueurs jouent l'un après l'autre et non simultanément. Un jeu est à information parfaite si au moment où un joueur prend sa décision, il connaît toutes les décisions antérieures.

Nous nous intéressons à un type d'information partielle un peu particulier ; les joueurs ne connaissent pas toutes les stratégies qu'ils peuvent choisir comme dans un jeu sous forme stratégique standard. L'espace des stratégies qu'ils connaissent et peuvent donc sélectionner est déterminé par un profil « courant ». Le chapitre 5 présente les résultats obtenus sur l'impact de l'information partielle de ce type sur la vitesse de convergence de dynamiques sur les jeux d'appariement (définis section 1.3).

1.1.5 Efficacité des solutions

La question de l'efficacité des solutions n'est pas centrale dans document, mais nous y faisons occasionnellement référence.

Un objectif global standard est d'optimiser le *bien-être global*, défini par la somme des utilités des joueurs. Les solutions, bien que satisfaisant une notion de stabilité, ne sont pas nécessairement optimales pour un objectif global.

Papadimitriou et Koutsoupias [33] ont nommé *prix de l'anarchie* d'une classe de jeux \mathcal{C} le rapport suivant :

$$\text{Max}_{G \in \mathcal{C}} \frac{\text{bien-être global sur l'optimum de } G}{\text{bien-être global sur le pire NE de } G}$$

Ce rapport mesure la détérioration entre une solution trouvée par des agents laissés libres et une solution trouvée par un dictateur bienveillant et tout puissant qui chercherait à optimiser le bien-être global. Le prix de l'anarchie est dans le cas général non borné. Il a été étudié dans les jeux de congestion [34, 35], et les jeux de partages de réseau [36].

Une littérature florissante depuis [37–39] s'intéresse à borner et à comparer ce type rapport d'efficacité sur différents jeux et concepts d'équilibres et aux mécanismes de coordination.

1.2 Jeux de congestion

On présente dans cette section les **jeux de congestion** auxquels les chapitres 3 et 4 sont consacrés.

1.2.1 Des jeux à n joueurs avec une représentation succincte

Ces jeux ont été exposés pour la première fois par Rosenthal [40]. Ce sont des jeux à n joueurs représentables de façon succincte qui ont la particularité de toujours posséder un NEP.

Il s'agit de jeux sous forme stratégique dans lesquels les joueurs doivent utiliser des *ressources*. Une stratégie est un sous-ensemble de l'ensemble des ressources. L'utilisation d'une ressource est soumise à un *délat*. Le délat d'une ressource est déterminé par une fonction qui prend en argument un entier. Cet entier représente le nombre de joueurs qui utilisent la ressource. Les joueurs doivent payer les délat des ressources dans leur stratégie qui sont dépendants de la stratégie des autres joueurs.

Ce modèle peut représenter par exemple le trafic routier. Les joueurs sont des conducteurs qui cherchent à aller d'une origine du réseau à une destination. L'ensemble des stratégies d'un joueur est l'ensemble des chemins de son origine à sa destination. Les fonctions de délat sur les axes représentent le temps nécessaire pour les traverser. L'objectif des joueurs est de **minimiser** leur temps de trajet, ce qui correspond à minimiser la somme des délat des axes utilisés.

Sur l'exemple de la figure 1.3, si un joueur souhaite aller de Porte de Bagnolet à Porte d'Auteuil, on peut extraire 3 stratégies :

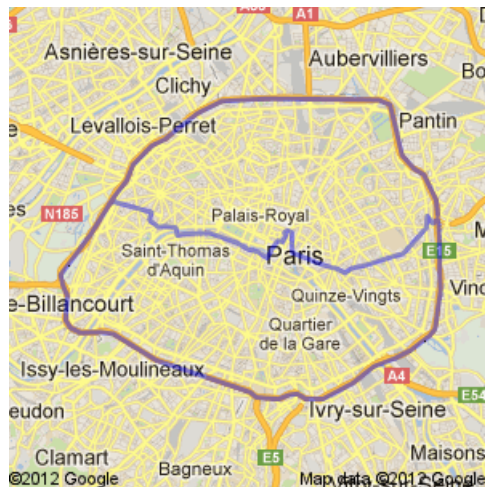


FIGURE 1.3: jeux de congestion à Paris

- passer par le boulevard périphérique Sud ;
- passer par le boulevard périphérique Nord ;
- passer par l'intérieur de Paris.

La meilleure stratégie dépend du niveau de congestion des différentes routes. Les routes de l'intérieur de Paris, plus petites ont une fonction de délai qui augmente plus vite que les tronçons du boulevard périphérique.

On donne formellement la définition d'un jeu de congestion :

Definition 1.1. Un *jeu de congestion* est un 4-uplet $\langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, (\mathcal{S}_i)_{i \in N} \rangle$ avec :

- $N = [n]$ est l'ensemble des joueurs ;
- \mathcal{R} est l'ensemble des ressources ;
- pour chaque $r \in \mathcal{R}$, $d_r : [n] \rightarrow \mathbb{Z}$ est une fonction de délai ;
- pour chaque $i \in N$; \mathcal{S}_i contient des sous-ensembles de \mathcal{R} ;
- La fonction de coût c_i , que chaque joueur cherche à minimiser est définie par

$$c_i(\sigma) = \sum_{r \in \sigma_i} d_r(\#_r(\sigma))$$

avec $\#_r(\sigma)$ le nombre de joueurs dont la stratégie contient r sur le profil σ .

On dit qu'un jeu de congestion est *positif* si les fonctions de délai de toutes les ressources du jeu sont toujours positives. De la même manière, on dit qu'un jeu de congestion est *négatif* si les fonctions de délai de toutes les ressources sont toujours négatives. Si un jeu présente des fonctions de délai positives et négatives, on dit que le jeu est *sans contrainte de signe*

Jeux de congestion négatifs : maximiser une utilité. L'exemple du trafic routier ne semble pas réaliste pour motiver l'étude des jeux de congestion négatifs. En effet, une route à délai négatif serait dans cet exemple une route qui permet de remonter dans le temps...

Un jeu de congestion négatif est en fait un jeu de maximisation d'utilité qui serait constitué de la somme de « profits » représenté par l'opposé des délais. Les **jeux de partage de marchés** proposés par [41] rentrent dans ce cadre de maximisation de profits. Dans les jeux de partage de marchés, les ressources sont des marchés et les joueurs sont des vendeurs ambulants. Les stratégies des joueurs représentent les marchés sur lesquels les joueurs souhaitent vendre leurs produits tandis que les « délais négatifs » représentent les profits réalisés dont il faut minimiser la somme. Chaque marché a une *valeur* qui représente le profit qui peut être obtenu sur ce marché. On suppose que si plusieurs joueurs vendent sur un même marché, ils se partagent la valeur du marché équitablement.

Formellement la définition est la suivante :

Definition 1.2 (Jeux de partage de marchés). Un jeu de partage de marchés est un 4-uplet $\langle N, \mathcal{M}, (v_m)_{m \in \mathcal{M}}, (\mathcal{S}_i)_{i \in N} \rangle$ avec :

- N est un ensemble de joueurs ;
- \mathcal{M} est un ensemble de marchés ;
- pour tout marché m , $v_m \in \mathbb{R}$ représente la valeur du marché m ;
- pour tout i , \mathcal{S}_i contient des sous-ensembles de \mathcal{M} ;
- l'utilité u_i que les joueurs souhaitent maximiser est définie par $u_i(\sigma) = \sum_{m \in \sigma_i} \frac{v_m}{\#_m(\sigma)}$ avec $\#_m(\sigma)$: le nombre de joueurs dont la stratégie contient m sur le profil σ .

Exemple 1.1 (Partage de marchés parisiens). *Les joueurs sont des vendeurs de légumes sur des marchés parisiens. La figure 1.4 représente les 4 ressources du jeu. Chaque marché a une valeur qui correspond à la demande en légume des clients du marché. Les marchés ont également des jours d'ouverture. Un vendeur ne peut pas être présent sur plusieurs marchés qui ouvrent le même jour. On considère que quand un vendeur sélectionne un marché dans sa stratégie, il doit être présent tous les jours où le marché est ouvert. Ainsi, un vendeur ne peut sélectionner le marché 1 et le marché 4 qui ouvrent tous deux le lundi. Sélectionner le marché 3 et le marché 4 est un exemple de stratégie correcte. Quand plusieurs vendeurs sélectionnent un même marché, ils se partagent (équitablement) la demande de ce marché.*

De la même manière, un jeu sans contrainte de signe peut être vu comme un jeu où les joueurs doivent optimiser leur utilité tout en ayant à gérer des délais et des profits. On pourrait étendre par exemple le jeu de partage de marché parisiens pour inclure les coûts liés aux déplacements entre les marchés et obtenir un exemple de jeu à délais positifs et négatifs.

Variantes. Ce modèle connaît les variantes suivantes :

- dans les **jeux de congestion non atomiques** [42, 43], les joueurs ne sont plus en nombre fini. Cela signifie que les fonctions de délai prennent en argument un réel qui représente la proportion de joueurs qui utilisent la ressource. Ce modèle est adapté pour représenter des flux de joueurs ;

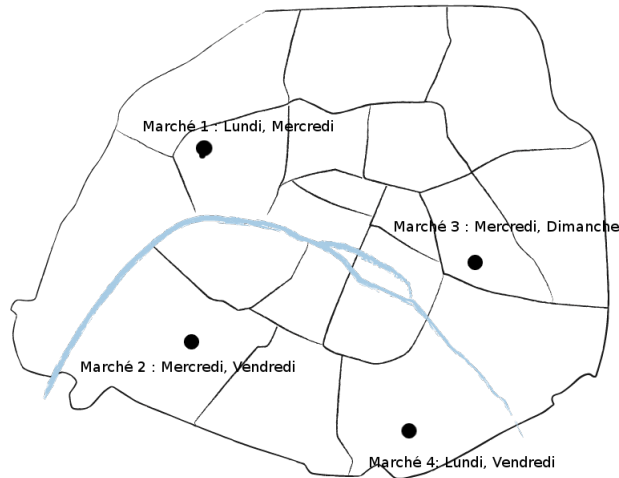


FIGURE 1.4: Partage de marchés parisiens

- dans les **jeux de congestion pondérés** [44, 45], les joueurs possèdent des poids différents ; c'est-à-dire que le délai d'une ressource dépend de la somme des poids des joueurs qui l'utilisent. Un jeu de congestion classique est un jeu de congestion pondéré tel que le poids de chaque joueur vaut 1. Ces jeux comme les variantes exposés ci-dessous n'admettent pas toujours de NEP.
- dans les **jeux de congestion à fonctions de coût spécifiques** [46, 47], chaque joueur endure un délai qui lui est propre pour l'utilisation d'une ressource ;
- dans les **jeux de congestion à goulot d'étranglement** [48, 49] la fonction d'utilité est le maximum des délais des ressources utilisées (et non plus la somme comme dans les jeux de congestion classiques).

1.2.2 Existence d'un NEP et fonction de potentiel

Monderer et Shapley ont défini la notion de *fonction de potentiel* (exacte) d'un jeu.

Definition 1.3 ([50]). Une fonction Φ définie sur les profils de stratégies d'un jeu $\langle N, (\mathcal{S}_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ est une *fonction de potentiel exacte* si et seulement si

$$\forall i \in N, \forall \sigma \in \mathcal{S}_1 \times \dots \times \mathcal{S}_n, \forall \sigma'_i \in \mathcal{S}_i, \quad \Phi(\sigma) - \Phi(\sigma_{-i}, \sigma'_i) = u_i(\sigma) - u_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) \quad (1.1)$$

Un **jeu de potentiel** est un jeu qui admet une fonction de potentiel ;

Proposition 1.4 ([29]). *Tout jeu de potentiel possède un NEP.*

Démonstration. On note Φ la fonction de potentiel du jeu. Adoptons, sans perte de généralité la convention que le but des joueurs est de minimiser leur coût noté c_i pour un joueur i . Un profil σ^* est un *minimum local* de Φ si $\forall \sigma'$ obtenu en changeant la stratégie d'un seul joueur

par rapport à σ^* ,

$\Phi(\sigma^*) \leq \Phi(\sigma')$. La preuve quasi immédiate, consiste à remarquer que les minimums locaux du potentiel sont exactement les NEP. En effet, soit σ un minimum local de Φ . Supposons que σ n'est pas un NEP, cela signifie qu'un joueur peut faire décroître son coût. En faisant cela il ferait également décroître le Φ , ce qui contredit que σ est un minimum local. Cette preuve est constructive. On peut en déduire une procédure qui, tant que l'on n'est pas sur un NEP, sélectionne un joueur qui améliore son coût et fait donc décroître Φ . Cette procédure s'arrête car le nombre de profils est fini. Lorsqu'elle s'arrête, elle a atteint un NEP. \square

Théorème 1.5 ([40]). *Les jeux de congestion possèdent un NEP.*

Ce théorème est établi en montrant que la fonction $\Phi(\sigma) = \sum_r \sum_{t=1}^{\#r(\sigma)} c_r(t)$ est une fonction de potentiel exacte.

Monderer et Shapley montrent dans ce même article pour tout jeu de potentiel il existe un jeu de congestion « équivalent ». La notion d'équivalence adoptée stipule que deux jeux sont équivalents s'ils présentent « la même structure de meilleure réponse » ; c'est-à-dire que deux jeux $J1$ et $J2$ sont équivalents s'il existe une bijection f entre les stratégies de $J1$ et de $J2$ telle que : si σ'_i améliore l'utilité du joueur i sur σ , alors $f(\sigma'_i)$ améliore l'utilité du joueur i sur $(f(\sigma_1), \dots, f(\sigma_n))$. Par exemple un jeu de potentiel est équivalent à un jeu dans lequel tous les joueurs ont la même fonction d'utilité qui est la fonction de potentiel.

1.3 Jeux d'appariement

Les **jeux d'appariement** sont des jeux à n joueurs sous forme stratégique. dans lesquels les joueurs forment des *liens* entre eux. L'utilité des joueurs dépend de l'ensemble des liens formés.

On rappelle qu'un *graphe* est défini par un couple $\langle S, E \rangle$ avec :

- un ensemble de sommets S ;
- un ensemble d'arêtes $E \subseteq S \times S$.

Une arête *non-orientée* désigne deux arête (i, j) et (j, i) .

Un graphe $G = \langle S, E \rangle$ est dit *non orienté* si toutes les arêtes dans E sont non-orientées ; c'est-à-dire que pour toute arête (i, j) appartenant à E , l'arête (j, i) appartient également à E .

Dans le cas contraire G est dit *orienté*.

Un *chemin* d'un sommet i à j dans un graphe est une séquence d'arêtes du graphe $(i, j_1)(j_1, j_2) \dots (j_k, j)$.

La longueur d'un chemin est donné par le nombre d'arêtes qui le compose.

FIGURE 1.5: *i* suit *j*

Liens et formation de liens. On considère dans ce document deux types de liens : les liens asymétriques et les liens symétriques.

- un *lien asymétrique* est une arête entre deux joueurs. Un lien asymétrique est formé unilatéralement à l’initiative de la cible du lien ; c’est-à-dire que (j, i) est formé si la stratégie de i contient j ;
- un *lien symétrique* est une arête non-orientée (donc 2 arêtes) entre deux joueurs ; on définit qu’un lien symétrique est formé par consentement mutuel ; c’est-à-dire que (j, i) est formée si la stratégie de i contient j et que la stratégie de j contient i .

Soit σ un profil de stratégies sur un jeu d’appariement, on note $C(\sigma)$ l’ensemble des liens formés sur le profil σ .

Remarque 1.6. Les jeux de congestion peuvent être représentés comme des jeux d’appariement asymétriques où les ressources seraient des « joueurs » qui n’ont qu’une stratégie vide.

1.3.1 Jeux d’appariement à liens asymétriques : jeux de suiveurs

Les **jeux de suiveurs** peuvent être vus comme un modèle simpliste de *Twitter*. Ce n’est en réalité pas vraiment un modèle de jeu car l’utilité d’un joueur dépend uniquement de sa stratégie et pas de celle des autres joueurs. Le but de modèle est d’illustrer comment l’information partielle peut considérablement ralentir des dynamiques même dans des jeux très simples.

On définit tout d’abord la version à information complète. Le but des joueurs est de *suivre* d’autres joueurs qui parlent de sujets qui les intéressent. Les joueurs peuvent donc sélectionner les joueurs qu’ils souhaitent suivre, mais un joueur ne peut pas sélectionner ses « suiveurs ». Les liens formés dans ces jeux sont asymétriques. S’il existe un lien de j vers i , on dit que *i* suit j (illustré par la figure 1.5).

Une stratégie d’un joueur j contient l’ensemble des joueurs que j suit. Pour illustrer la notion avec Twitter, si j suit i , j reçoit les tweets de i .

Soit N l’ensemble des joueurs. Une *valuation* v est une fonction sur les couples de joueurs, $v : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$. Cette valuation représente le gain d’utilité d’un joueur à suivre un autre joueur ; c’est-à-dire que $v(i, j)$ représente l’utilité gagnée par le joueur j à suivre du joueur i .

On donne formellement la définition d’un jeu de suiveurs :

Définition 1.7. Un *jeu de suiveurs* est défini par un couple $\langle N, v \rangle$ avec :

- $N = \{1 \dots n\}$ est l'ensemble de joueurs ;
- l'ensemble des stratégies d'un joueur contient tous les sous-ensembles de N ;
- v est une valuation sur les couples de joueurs ;
- la fonction d'utilité u_i du joueur i est définie par : $u_i(\sigma) = \sum_{j \in \sigma_i} v(j, i)$.

L'ensemble des liens formés sur le profil σ noté $C(\sigma)$ est l'ensemble des (i, j) tels que $i \in \sigma_j$. Notez que $\langle N, C(\sigma) \rangle$ est un graphe orienté.

Remarque 1.8. Le NEP de ce jeu contient tous les liens à valuation positive. Il peut éventuellement y en avoir plusieurs si il existe des liens à valuation nulle (car ils ne perturbent pas l'utilité). La somme des utilités des joueurs est une fonction de potentiel exacte pour ces jeux. Les liens à valuation négative ou nulle peuvent être ignorés car les joueurs n'ont pas de raison de les former.

On rapproche ce modèle de Twitter car la décision de suivre un autre membre du réseau est unilatérale.

Jeux des suiveurs sur un réseau social. Ces jeux sont à information partielle déterminée par un profil courant. On appelle *réseau social* un graphe dont l'ensemble de sommets est l'ensemble des joueurs. L'impacte de cette information partielle à été étudié par Hoefler [27] pour les jeux de couplage (qui sont décrits dans la section suivante) et Arcaute et Vassilvskii [26] dans le cas particulier de couplages entre des employés et des entreprises.

Définition 1.9 (Vision sur graphe). Soit $G = \langle N, E \rangle$ un graphe. Soit $i \in N$ et $j \in N$. On définit que i voit j sur G s'il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 2 de j vers i dans G .

Remarque 1.10. L'orientation des liens et de la vision est choisie pour représenter la propagation de messages dans le réseau social ; c'est-à-dire que s'il existe un chemin $(a, b), (b, c)$, c voit a car b diffuse les messages de a à ses voisins dont c fait partie. On pourrait définir que les joueurs voient plus loin qu'à distance 2. Cela a un impact négatif sur la convergence des dynamique étudiées et les résultats obtenus sont pour cette distance. En revanche si on fixe la distance de visibilité à 1, l'espace des stratégies ne peut plus évoluer au cours d'une dynamique.

Dans les jeux de suiveurs sur réseau social, une stratégie est toujours un sous ensemble de l'ensemble des joueurs, cependant l'espace de stratégies qu'un joueur peut sélectionner dépend d'un profil de stratégie σ « courant » de la manière suivante : un joueur peut en suivre un autre s'il le voit sur le graphe qui contient le réseau social et les liens formés sur σ . On considère donc le réseau social comme un ensemble de liens fixes, et les liens de suivis comme des liens dépendants des décisions des joueurs. Les deux contribuent à la vision.

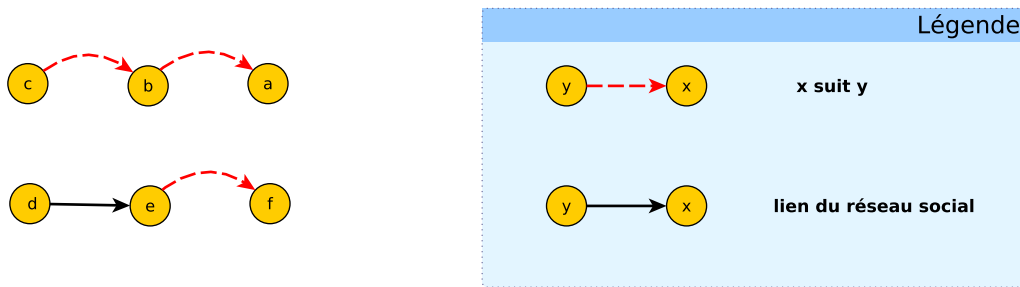


FIGURE 1.6: Vision limitée dans un jeu de suiveurs

Definition 1.11. Un jeu de suiveurs sur un réseau social est un 3-uplet $\langle N, v, E \rangle$ pour lequel :

- $N = \{1 \dots n\}$ est l'ensemble de joueurs ;
- Soit σ un profil de stratégies courant. L'ensemble des stratégies d'un joueur i sur le profil σ contient tous les sous-ensembles de joueurs que i voit dans le graphe $G(\sigma) = \langle N, E \cup C(\sigma) \rangle$;
- v est une valuation sur les couples de joueurs ;
- la fonction d'utilité u_i du joueur i est définie par : $u_i(\sigma) = \sum_{j \in \sigma_i} v(j, i)$.

Exemple : La vision à distance 2 représente une situation dans laquelle les membres du réseau « retwite » les messages de leurs voisins directs (depuis lesquels il existe un chemin de longueur 1) à leurs suiveurs ; ainsi, sur la figure 1.6, a suit b et b suit c . Le joueur a voit donc le joueur c puisqu'il existe un chemin de c vers a de longueur 2. Le chemin peut utiliser également des arêtes du réseau social, ainsi, f et e voit d .

1.3.2 Jeux à liens symétriques : les jeux de couplage

On utilise également une valuation v sur les couples de joueurs. On dit qu'une valuation v est *symétrique* si pour tout couple de joueurs (i, j) , on a $v(i, j) = v(j, i)$.

Dans les **jeux de couplage**, le but des joueurs est de créer un unique lien symétrique. La stratégie d'un joueur contient donc un unique joueur avec lequel créer ce lien. On appelle *couple* ce lien symétrique formé par consentement mutuel entre deux joueurs ; l'ensemble des couples formés sur un profil σ noté $C(\sigma)$ contient l'ensemble des (i, j) tels que $i \in \sigma_j$ et $j \in \sigma_i$.

On appelle *couplage* tout graphe sur l'ensemble des joueurs tel que tout joueur a au plus 1 lien symétrique avec un autre joueur.

Un couplage est dit *maximal* sur un graphe si pour toute arête du graphe, un des deux sommets de l'arête appartient au couplage. Un couplage sur un graphe est *maximum* s'il est de taille maximum parmi les couplages sur ce graphe.

On rappelle une propriété classique qui relie la taille d'un couplage maximum et celle d'un couplage maximal : un couplage maximum est au plus deux fois plus grand qu'un couplage maximal.

Definition 1.12. Un jeu de couplage est un 2-uplet $\langle N, v \rangle$ pour lequel :

- N est l'ensemble de joueurs ;
- pour tout joueur i , l'ensemble des stratégies de i , noté $S_i = N$;
- v est une valuation sur les couples de joueurs ;
- la fonction d'utilité u_i du joueur i est définie comme suit

$$u_i(\sigma) = \begin{cases} v(i, j) & \text{si le lien } \{i, j\} \in C(\sigma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.13. – si σ est un profil de stratégies d'un jeu de couplage, la stratégie σ_i désigne un joueur.

- si la stratégie du joueur i égale i , il ne forme pas de lien ;
- un joueur n'a jamais intérêt à former un lien si la valuation est négative.

NEP, une solution peu convaincante.

Proposition 1.14. *Il existe toujours un NEP dans un jeu de couplage.*

Démonstration. Le profil de stratégies σ sur lequel pour chaque joueur i , σ_i égale i est un NEP. En effet comme la formation d'un couple nécessite un consentement mutuel, si un joueur change seul de stratégie, il ne peut former un lien et améliorer son utilité qui vaut pourtant 0. □

Ce n'est toutefois pas un profil « efficace » au sens du prix de l'anarchie puisque l'utilité de chaque joueur est 0. Le prix de l'anarchie dans ce jeu est donc infini.

Les NEP peuvent être inefficaces même sur les profils sur lesquels les joueurs « essayent » de créer des liens ; c'est-à-dire les profils sur lesquels pour tout joueur i $\sigma_i \neq i$.

Dans le jeu de couplage représenté par la figure 1.7, les lignes dessinées représentent les liens dont la valuation symétrique est égale à 1. Pour tout autre lien la valuation est 0.

Considérons le profil σ tel que :

- $\sigma_1 = 2$;
- $\sigma_x = 1$ pour tout x différent de 1.

Le couple (1, 2) est le seul formé sur ce profil. Cependant aucun joueur ne peut améliorer son utilité en changeant sa stratégie unilatéralement, puisqu'il ne peut former de couple.

Escoffier et al [51] ont montré que le prix de l'anarchie d'un jeu de couplage à valuation symétrique dans $\{0, 1\}$ est égal à $\max(\frac{2}{N}, \frac{1}{d})$ où d est le degré maximum des joueurs dans le graphe où les arêtes sont les liens à valeur 1.

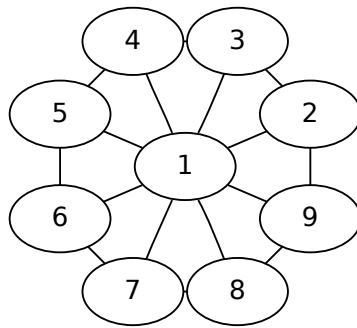


FIGURE 1.7: Un jeu avec un NEP peu convaincant

Existence des EP. Comme les liens sont formés par consentement mutuel, il est plus naturel de s'intéresser aux profils stables pour des déviations par paires de joueurs (appelés également « équilibre 2-stable »).

Definition 1.15. un profil de stratégies σ est un équilibre par paires (EP) d'un jeu

$\langle N, (\mathcal{S}_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ si pour toute paire de joueurs $\{i, j\}$,

et pour tout σ'_i, σ'_j , $u_i(\sigma_{-i,-j}, \sigma'_i \sigma'_j) > u_i(\sigma) \implies u_j(\sigma_{-i,-j}, \sigma'_i \sigma'_j) \leq u_j(\sigma)$

Un jeu de couplage ne possède pas nécessairement d'EP. Le jeu de couplage exposé ci-dessous n'en possède pas :

- 3 joueurs : A , B et C ;
- $v(A, B) = v(B, C) = v(C, A) = 2$;
- $v(B, A) = v(C, B) = v(A, C) = 1$.

Quel que soit le profil de stratégies, au plus un couple est formé. Aucun couple n'est formé si le profil est de la forme d'une permutation cyclique de longueur 3 sur l'ensemble des joueurs. Par exemple si la stratégie de A contient B , la stratégie de B contient C et la stratégie de C contient A . Si le profil contient une permutation de longueur 2, un unique couple est formé. Cependant, quel que soit le couple formé, un de ses membres peut améliorer son utilité en formant un couple avec le troisième joueur. Par exemple si le couple (A, B) est formé, B et C peuvent améliorer leur utilité en formant (B, C) à la place de (A, B) car B gagnerait 2 ce qui est mieux que 1 et C , 1 ce qui est mieux que 0.

Abraham et al [52] ont observé que si la valuation est symétrique, il existe toujours un EP.

Un mot sur l'efficacité. Escoffier et al [51] précisent que le rapport d'efficacité entre un EP et l'optimum est $\frac{1}{2}$. Cela correspond au rapport de taille entre un couplage maximal et un couplage maximum.

Jeux de couplage sur réseau social. Les joueurs ont dans ces jeux une notion de vision limitée semblable à celle définie pour les jeux des suiveurs ;

Definition 1.16 (Vision sur un graphe). Soit $G = \langle N, E \rangle$ un graphe non orienté. Soit $i \in N$ et $j \in N$. On définit que i voit j sur G s'il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 2 entre i et j dans G .

Dans les jeux de couplage sur réseau social, l'espace de stratégies des joueurs dépend d'un profil de stratégie σ de la manière suivante : un joueur peut en sélectionner un autre s'il le voit sur le graphe qui contient le réseau social et les couples formés sur σ .

Definition 1.17. Un jeu de couplage sur un réseau social est un 3-uplet $\langle N, v, E \rangle$ pour lequel :

- $N = \{1 \dots n\}$ est l'ensemble de joueurs ;
- soit σ un profil de stratégie, l'ensemble des stratégies d'un joueur i sur le profil σ contient tous les joueurs que i voit dans le graphe $G(\sigma) = \langle N, E \cup C(\sigma) \rangle$;
- v est une valuation sur les couples de joueurs ;
- la fonction d'utilité u_i du joueur i est définie par : $u_i(\sigma) = \sum_{j \in \sigma_i} v(j, i)$.

Chapitre 2

Dynamique du jeu fictif randomisée sur les jeux à somme nulle

Ce chapitre présente la dynamique du jeu fictif randomisé qui converge rapidement pour les jeux matriciels à somme nulle à deux joueurs. La preuve de convergence rapide partage l'utilisation de l'approximation et l'utilisation d'un potentiel comme similarité avec celles exposé dans les chapitres suivants. Elle a cependant des différences notables : la solution recherchée dans les chapitres suivants est un équilibre pur, ce qui n'est pas le cas dans ce chapitre, car les jeux à somme nulle ne présentent pas toujours de solution en stratégie pure. De plus, ce n'est pas le profil des stratégies jouées par les joueurs qui converge vers un équilibre mais la moyenne statistique des stratégies jouées.

La dynamique présentée converge en temps logarithmique dans le nombre de stratégies et est une amélioration de la dynamique de jeu fictif. Cette amélioration est une application de la méthode par mise à jour multiplicative des poids (MPM). Cette méthode utilise la randomisation de manière très efficace. Il y a d'ailleurs une borne inférieure qui stipule qu'un algorithme déterministe ne peut pas être aussi rapide.

La preuve de convergence rapide est tirée de [53].

2.1 Jeux matriciels à deux joueurs à somme nulle

Dans un jeu à deux joueurs à somme nulle, les joueurs sont des adversaires ; cela signifie que ce que gagne un joueur, l'autre le perd.

Ces jeux sont représentables sous forme matricielle avec une seule matrice $A = (a_{i,j})_{i \leq n, j \leq m}$ avec n le nombre de stratégies de I et m le nombre de stratégies de II . Les fonctions d'utilité des joueurs sont définies comme suit : pour tout $i \leq n$ et $j \leq m$, $u_I(i, j) = a_{i,j}$ et $u_{II}(i, j) =$

$-u_I(i, j)$. On note u la fonction u_I . On rappelle qu'une stratégie mixte est un vecteur de probabilité sur un ensemble de stratégies pures. Une stratégie pure est une stratégie mixte dont les coefficients sont des 0 et un 1. Si I utilise une stratégie mixte σ_I , et II utilise une stratégie mixte σ_{II} , alors $u(\sigma_I, \sigma_{II}) = \sigma_I^t A \sigma_{II}$.

On note $MR_I(\sigma)$ (resp. $MR_{II}(\sigma)$), une *meilleure réponse* du joueur I (resp. du joueur II) si le joueur I (resp. II) joue σ ; c'est-à-dire une stratégie pure s qui maximise (resp. minimise) $u(s, \sigma)$ (resp. $u(\sigma, s)$).

2.1.1 Solution des jeux à somme nulle

Von Neumann a démontré l'existence d'un *profil de stratégies optimales* (cette notion est équivalente aux équilibres de Nash pour les jeux à deux joueurs à somme nulle). Un profil (σ_I, σ_{II}) est constitué de stratégies optimales si $u(MR_I(\sigma_{II}), \sigma_{II}) \leq u(\sigma_I, \sigma_{II}) \leq u(\sigma_I, MR_{II}(\sigma_I))$. La *valeur du jeu* est définie comme l'utilité du joueur I sur un profil de stratégies optimales.

Le *saut de dualité* d'un profil (σ_I, σ_{II}) noté $\tau(\sigma_I, \sigma_{II})$ est défini comme suit :

$$\tau(\sigma_I, \sigma_{II}) = u(MR_I(\sigma_I), \sigma_{II}) - u(\sigma_I, MR_{II}(\sigma_{II}))$$

Remarque 2.1. Sur un profil de stratégies optimales le saut de dualité vaut 0.

On peut calculer un profil de stratégies optimales par programmation linéaire mais on va se focaliser dans ce chapitre sur une *dynamique du jeu fictif* a été proposée par Brown [3]. Bien qu'assurée de converger [4], la dynamique peut nécessiter un nombre exponentiel de tours pour atteindre un équilibre [5, 6].

On s'intéresse alors à une approximation additive d'une solution. On dit qu'un profil de stratégies (σ_I, σ_{II}) contient des stratégies ϵ -optimales (additivement) si

$$u(MR_I(\sigma_{II}), \sigma_{II}) - \epsilon \leq u(\sigma_I, \sigma_{II}) \leq u(\sigma_I, MR_{II}(\sigma_I)) + \epsilon$$

.

Remarque 2.2. Si le saut de dualité d'un profil (σ_I, σ_{II}) est inférieur à ϵ , (σ_I, σ_{II}) est un profil de stratégies ϵ -optimales.

2.1.2 La dynamique du jeu fictif

Dans la dynamique du jeu fictif, décrite figure 2.1, le jeu est répété et les joueurs choisissent une stratégie pure à chaque tour. Pour la choisir, les joueurs font comme si l'adversaire

FIGURE 2.1: Dynamique du jeu fictif

INITIALISATION DES ESTIMATIONS

1. $\theta_I(0)$ et $\theta_{II}(0) :=$ le vecteur nulle
2. Tant que $(\theta_I(t), \theta_{II}(t))$ n'est pas optimale{

CHOIX DE LA STRATEGIE AU TOUR t

- (a) $\sigma_I(t) = MR_I(\theta_{II}(t))$

- (b) $\sigma_{II}(t) = MR_{II}(\theta_I(t))$

MISE A JOUR DES ESTIMATEURS AVEC LES

STRATEGIES JOUEES AU TOUR t

- (c) $\theta_I(t+1) := \theta_I(t) \cdot \frac{t}{t+1} + \frac{\sigma_I(t)}{t+1}$;

- (d) $\theta_{II}(t+1) := \theta_{II}(t) \cdot \frac{t}{t+1} + \frac{\sigma_{II}(t)}{t+1}$

}

3. Retourner $(\theta_I(t), \theta_{II}(t))$

avait une stratégie randomisée fixe. Chaque joueur estime cette stratégie fixe de la manière suivante :

Sur un historique de profils de stratégies pures $[(\sigma_I(1), \sigma_{II}(1)) \dots (\sigma_I(T), \sigma_{II}(T))]$, l'estimation du joueur I au tour $T+1$ la stratégie fixe du joueur II notée $\theta_{II}(T)$, est la moyenne statistique des stratégies jouées par II ; c'est-à-dire que $\theta_{II}(T) = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_{II}(t)}{T}$

De la même manière $\theta_I(T) = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_I(t)}{T}$.

Pour le tour suivant, les joueurs choisissent la meilleure réponse face à leurs estimations.

Robinson [4] a montré que la séquence des estimations des deux joueurs converge vers un profil de stratégies optimales dans le sens suivant : Pour tout $\epsilon > 0, \exists T$ tel que $\forall T' > T$, $(\theta_I(T'), \theta_{II}(T'))$ est un profil de stratégies ϵ -optimales.

2.2 Dynamique du jeu fictif randomisée : une application de la méthode de mise à jour multiplicative des poids

On présente dans cette section une version randomisée de la dynamique du jeu fictif due à Grigoriadis et Khachian [16] qui trouve un équilibre approché en $O(\log(n.m))$ tours, avec n et m le nombre de stratégies des deux joueurs. La complexité totale de l'algorithme est $O((n+m) \cdot \log(n.m))$. Grigoriadis et Khachian ont d'ailleurs remarqué qu'il s'agissait là d'un cas où l'utilisation de bits aléatoires est nécessaire ; aucun algorithme déterministe ne peut trouver un équilibre approché en temps inférieur à $\Omega(m.n)$.

L'idée est la suivante : plutôt que jouer la meilleure réponse face à l'estimation, les joueurs jouent une meilleure réponse « bruitée » ; c'est-à-dire qu'ils tirent leur stratégie en suivant une distribution qui met beaucoup de poids sur les bonnes stratégies.

Cette meilleure réponse bruitée correspond à une application de la méthode par mise à jour multiplicative de poids (Multiplicative Weight Update Method), que l'on notera MPM [17].

2.2.1 Problème des experts et MPM

Considérons comme une illustration du **problème des experts** le cas d'un parieur sur des courses de chevaux compulsif et ignare. Le parieur doit (il est compulsif) à chaque course décider sur quel cheval parier. Il n'a aucune connaissance des courses de chevaux. Cependant le parieur a accès à un ensemble d'*experts* qui avant chaque course lui proposent une décision. Le parieur décide à chaque course de suivre la décision proposée par un des experts. Après chaque course, le parieur constate le vainqueur. Il peut constater combien il aurait gagné s'il avait suivi la décision proposée par un autre expert.

Le problème des experts est représentable par un couple $\langle N, (u_t)_{t=1\dots T} \rangle$ avec :

- N est un ensemble d'experts ;
- $u_t : N \rightarrow [-1, 1]$, est une fonction telle que $u_t(i)$ est l'utilité obtenue en suivant l'expert i au temps t ;

Le problème est *en ligne*, c'est-à-dire qu'à chaque tour t , le parieur doit choisir un expert à suivre sans connaître u_t . Cependant, le parieur connaît l'historique, c'est-à-dire la séquence des $u_{t'}$ pour $t' < t$.

La MPM détermine de façon randomisée à chaque tour un expert à suivre. Avec cette méthode, en un temps relativement court, le parieur gagnera autant que le meilleur expert.

L'algorithme fonctionne en attribuant à chaque tour t et à chaque expert i un poids noté $p_i(t)$. A chaque tour, l'expert suivi est tiré aléatoirement selon une distribution proportionnelle aux poids des experts ; c'est à dire que i est choisi avec probabilité $\frac{p_i(t)}{\sum_{i'} p_{i'}(t)}$.

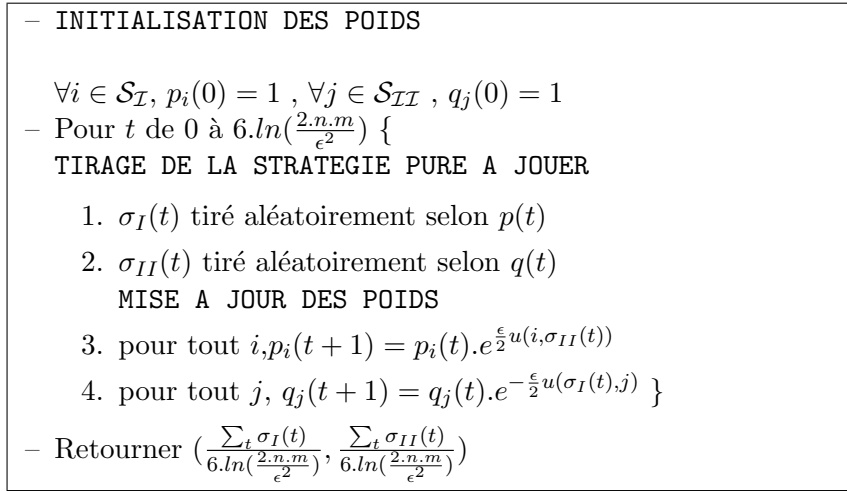
Après chaque tour, l'algorithme met à jour les poids multiplicativement en fonction des performances des experts.

La mise à jour des poids La mise à jour dépend d'un paramètre réel $\epsilon > 0$. Les experts commencent avec un poids initial égal à 1. Le poids est mise à jour selon la règle suivante : $p_i(t+1) = p_i(t).e^{\epsilon u_t(i)}$.

On exprime maintenant le théorème qui garantit les performances obtenues en suivant la MPM.

Théorème 2.3 ([17]). *Soit $\sigma_1 \dots \sigma_t$ les experts suivis aux tours $\{1 \dots t\}$ déterminés en suivant la MPM de paramètre ϵ , pour tout $T > \frac{3 \ln(n)}{\epsilon^2}$ on a :*

$$\forall i, \mathbb{E}\left(\frac{\sum_t^T u_t(\sigma(t))}{T}\right) \geq \frac{\sum_t^T u_t(i)}{T} - \epsilon$$

FIGURE 2.2: Jeu fictif Randomisé (ϵ)

2.2.2 Jeu fictif randomisé : l'application aux jeux à somme nulle

Dans l'application de la méthode aux jeux à somme nulle, on considère que chaque joueur a un expert par stratégie pure qui conseille toujours cette stratégie pure.

La dynamique du jeu fictif randomisé est décrite figure 2.2.

La moyenne statistique des coups joués $(\theta_I(t), \theta_{II}(t))$ converge, comme sur la dynamique du jeu fictif, vers un profil de stratégies optimales.

Au lieu de jouer la meilleure réponse face à ces estimations, les joueurs jouent une stratégie pure en suivant une distribution calculée par la MPM de paramètre ϵ :

On note $p_i(t)$ le poids de la i^{eme} stratégie du joueur I et $q_i(t)$, le poids de la i^{eme} stratégie du joueur II , au tour t , $\sigma_I(t) = i$ avec probabilité $\frac{p_i(t)}{\sum_{i'} p_{i'}(t)}$. De la même manière, $\sigma_{II}(t) = j$ avec probabilité $\frac{q_j(t)}{\sum_{j'} q_{j'}(t)}$. On note $p(t)$ et $q(t)$ ces distributions sur les stratégies.

La mise à jour est effectuée selon la règle suivante :

$$\begin{aligned} - p_i(t+1) &= p_i(t) \cdot e^{\frac{\epsilon}{2} u(i, \sigma_{II}(t))} \\ - q_j(t+1) &= q_j(t) \cdot e^{\frac{\epsilon}{2} u(\sigma_I(t), j)} \end{aligned}$$

Remarque 2.4. La distribution calculée par la MPM peut être exprimée en fonction des estimation $\theta(t)$ de la manière suivante.

$$\begin{aligned} - p_i(t) &= e^{\frac{t\epsilon}{2} u(i, \theta_{II}(t))} \\ - q_j(t) &= e^{\frac{t\epsilon}{2} u(\theta_I(t), j)} \end{aligned}$$

Cette distribution attribue un poids aux dépendant des performances stratégies performantes face à l'estimation. Ce poids relatif est dépendant du facteur $\frac{t\epsilon}{2}$. Si $t = \infty$, tout le poids est mis sur la meilleure réponse. Si $t = 0$, la distribution est uniforme. Au cours de la dynamique le « bruit » diminue, et la distribution se rapproche de la meilleure réponse.

Théorème 2.5. *Dans un jeu matriciel à 2 joueurs à somme nulle pour lequel les joueurs ont stratégies de dimension $n \times m$, à utilités sont dans $[-1 ; 1]$, pour tout $\epsilon > 0$, la dynamique du jeu fictif randomisé avec mise à jour des poids paramétrée par ϵ renvoie un profil de stratégie ϵ -optimal au tour $T = \frac{6 \log(2nm)}{\epsilon^2}$ avec probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$*

Démonstration. La preuve consiste à montrer que le saut de dualité du profil atteint est inférieur à ϵ . Pour ce faire on s'appuie sur la fonction suivante qui a le rôle d'un potentiel :

$$\Phi(t) = \left(\sum_{i=1}^n p_i(t) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m q_j(t) \right)$$

.

En développant $\Phi(t)$ on a :

$$\Phi(t) = \sum_{i,j} e^{\frac{\epsilon}{2} t \cdot [u(i, \theta_{II}(t)) - u(\theta_I(t), j)]}$$

Il existe un couple (i, j) tel que $u(i, \theta_{II}(t)) - u(\theta_I(t), j)$ soit égal au saut de dualité du profil $(\theta_I(t), \theta_{II}(t))$.

Comme tous les termes de la somme sont positifs on a :

$$\Phi(t) \geq e^{\frac{\epsilon}{2} \cdot t \cdot \tau(\theta_I(t), \theta_{II}(t))}.$$

On en déduit l'inéquation suivante :

$$\tau(\theta_I(t), \theta_{II}(t)) \leq \ln(\Phi(t)) \cdot \frac{2}{\epsilon \cdot t} \quad (2.1)$$

On remarque alors que pour garantir la convergence vers un profil de stratégie ϵ -optimal, il suffit de montrer que $\ln(\Phi(t))$ croît moins vite que t .

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.6. *pour tout t , $\mathbb{E}(\Phi(t+1)) \leq (1 + \frac{\epsilon^2}{6})^2 \mathbb{E}(\Phi(t))$*

Application du lemme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Phi(t)) &\leq \left(1 + \frac{\epsilon^2}{6}\right)^2 \mathbb{E}(\Phi(t-1)) \\ &\leq \mathbb{E}[\Phi(0)] \cdot (1 + \epsilon^2/6)^{2t} \\ &\leq \mathbb{E}[\Phi(0)] \cdot e^{\frac{\epsilon^2 t}{3}} \end{aligned}$$

On passe de la première inégalité à la seconde en itérant le lemme de t fois. La troisième inégalité est obtenu en utilisant que pour tout réel x , $1 + x \leq e^x$.

On rappelle l'inégalité de Markov :

$$\text{Prob}[X \geq 2\mathbb{E}(X)] \leq \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

Ce qui appliqué à $\Phi(t)$, donne : $\frac{1}{2}, \Phi(t) \leq 2\Phi(0).e^{\frac{\varepsilon^2 t}{3}}$

On a alors d'après l'équation 2.1 ; avec probabilité supérieur à $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \tau(\theta_I(t), \theta_{II}(t)) &\leq \ln[2\Phi(0)e^{\frac{\varepsilon^2 t}{3}}] \frac{2}{\varepsilon t} \\ &\leq [\ln(2\Phi(0)) + \frac{\varepsilon^2 t}{3}] \frac{2}{\varepsilon t} \\ &\leq \frac{2\ln(2\Phi(0))}{\varepsilon t} + \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Or $\Phi(0) = n.m$. Donc :

$$\tau(\theta_I(t), \theta_{II}(t)) \leq \frac{2\ln(2nm)}{\varepsilon t} + \frac{2\varepsilon}{3}$$

On a donc avec probabilité supérieure $\frac{1}{2}$, si t est supérieur à $\frac{6\ln(2.n.m)}{\varepsilon^2}$, $\tau(\theta_I(t), \theta_{II}(t)) < \varepsilon$. □

Conclusion On a vu dans ce chapitre comment l'utilisation de l'approximation et de la randomisation pouvaient améliorer la vitesse de convergence d'une dynamique. La borne sur la vitesse de convergence est établie en montrant qu'une fonction qui joue le rôle de potentiel décroît rapidement. Cette démarche va être utilisée dans les prochains chapitres.

Chapitre 3

Complexité des équilibres sur les jeux de congestion

Ce chapitre présente des résultats qui stipulent que les équilibres de Nash purs sur les jeux de congestion sont difficiles à calculer. Cette difficulté s'exprime en établissant que calculer un équilibre de Nash dans un jeu de congestion est un problème complet pour la classe de complexité PLS. S'il n'existe pas d'algorithme qui calcule efficacement un équilibre de Nash, il n'y a pas non plus de dynamique raisonnable qui converge rapidement.

La section 3.1 revient sur le résultat de Fabrikant et al [18] qui relie le problème du calcul d'un NEP dans un jeu de congestion et la classe PLS. La section 3.2 présente les deux approches utilisées dans la littérature pour décortiquer les paramètres qui rendent le problème difficile : déterminer des sous-problèmes résolubles en temps polynomial, et rechercher une solution approchée. Les résultats évoqués dans ces sections portent sur les jeux de congestion positifs. La section 3.3 présente nos résultats qui étendent les précédents aux jeux sans contrainte de signe [54].

3.1 PLS et NEP

3.1.1 La classe PLS : Polynomial Local Search

La difficulté du problème SAT (NP-complet) vient-elle uniquement du fait que l'on cherche un optimum global ? Un optimum local serait-il plus simple à trouver ? C'est en tentant de répondre à cette question que Johnson, Papadimitriou et Yannakakis [55] ont défini la classe PLS. Un optimum local est une solution qui est optimale dans son *voisinage*.

La classe de complexité PLS contient les problèmes de recherche d'optimum local pour lesquels le voisinage d'une solution peut être exploré efficacement. Il s'agit d'une sous-classe de TFNP,

la famille des problèmes de recherche dans NP pour lesquels il est garanti qu'il existe une solution. Bien que PLS soit incluse dans $NP \cap coNP$, il est globalement admis que cette classe n'est pas résoluble en temps polynomial.

Un **problème de recherche d'optimum local** est défini par un quadruplet

$\langle \mathcal{I}, F, (c_I)_{I \in \mathcal{I}}, (N_I)_{I \in \mathcal{I}} \rangle$ avec :

- \mathcal{I} est un *ensemble d'instances* du problème ;
- $F(I)$ pour $I \in \mathcal{I}$ est l'ensemble des solutions faisables pour l'instance I ;
- $c_I : F(I) \rightarrow \mathbb{Z}$ est une *fonction de coût* calculable en temps polynomiale définie sur $F(I)$;
- $N_I : F(I) \rightarrow 2^{F(I)}$ est une fonction qui définit le voisinage d'une solution dans $F(I)$.

Soit $\Pi : \langle \mathcal{I}, F, (c_I)_{I \in \mathcal{I}}, (N_I)_{I \in \mathcal{I}} \rangle$, une solution $s \in F(I)$ est un *minimum local* de Π si pour toute solution $s' \in N_I(s)$, $c_I(s) \leq c_I(s')$.

Un problème de recherche d'optimum local $\Pi : \langle \mathcal{I}, F, (c_I)_{I \in \mathcal{I}}, (N_I)_{I \in \mathcal{I}} \rangle$ **appartient à PLS** s'il existe deux fonctions INITIALISE, et AMELIORE calculables en temps polynomial telles que :

- INITIALISE prend en argument une instance et renvoie une solution faisable ;
- AMELIORE : $F(I) \rightarrow (F(I) \cup \text{VRAI})$ avec

$$\text{AMELIORE}(s) = \begin{cases} \text{VRAI} & \text{si } s \text{ est un optimum local} \\ s' \in N_i(s) \text{ telle que } c_i(s) > c_i(s') & \text{sinon} \end{cases}$$

La classe est structurée à l'aide d'une notion de réduction qui stipule : « si un problème Π_1 se réduit à un problème Π_2 , alors s'il existait un moyen de trouver un optimum local de Π_2 en temps polynomial, on pourrait trouver un optimum local de Π_1 en temps polynomial ».

On note \preceq_{PLS} la notion de réduction associée à la classe PLS. Soient $\Pi_1 = \langle \mathcal{I}_1, F_1, c_1, N_1 \rangle$ et $\Pi_2 = \langle \mathcal{I}_2, F_2, c_2, N_2 \rangle$ deux problèmes de recherche d'optimum local, on a $\Pi_1 \preceq_{\text{PLS}} \Pi_2$ s'il existe deux fonctions $f : \mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2$ et $g : F(f(I_1)) \rightarrow F(I_1)$ calculables en temps polynomial telles que :

- f renvoie une instance de Π_2 pour toute instance de Π_1 ;
- si s est un minimum local de $f(I)$ alors $g(s)$ est un minimum local de I .

Un problème Π est *PLS-complet* s'il est dans PLS et que pour tout problème $\Pi' \in \text{PLS}$, $\Pi' \preceq_{\text{PLS}} \Pi$.

On donne maintenant un exemple de problème dans PLS.

Max SAT FLIP pondéré :

- Entrée :
 - X un ensemble de variables booléennes ;
 - C un ensemble de clauses sous forme normale conjonctive sur X ;
 - $\forall c \in C$ un entier w_c qui représente le poids de la clause c ;
 - l'ensemble des solutions faisables est l'ensemble des valuations sur X ;

- le voisinage d’une valuation σ , appelé voisinage par flip noté $FLIP(\sigma)$ contient toutes les valuations σ' qui diffèrent de σ sur au plus une variable.
- Sortie : une valuation σ telle que pour toute valuation $\sigma' \in FLIP(\sigma)$, $\sum_{c|\sigma' \neq \sigma} w_c \leq \sum_{c|\sigma \neq \sigma'} w_c$.

Ce problème est prouvé PLS-complet par une réduction depuis **CIRCUIT-FLIP** [55]. **Max SAT FLIP** est dans P si tous les poids sont égaux.

CIRCUIT-FLIP

- Entrée :
 - Un circuit booléen C qui prend une suite de n bits en entrée et dont la sortie est sur m bits ;
 - La sortie d’une entrée x est interprétée comme la notation binaire d’un entier que l’on note $eval_C(x)$;
 - L’espace des solutions faisables est l’ensemble des entrées possibles (donc de taille 2^n) ;
 - Le voisinage est le voisinage par flip.
 - Sortie : une entrée x telle que pour tout x' dans le voisinage par flip, $eval_C(x) \leq eval_C(x')$.
- Des versions locales d’autres problèmes d’optimisation classique sont PLS-complètes :
- des versions locales de **MAX CUT** et du **problème du voyageur de commerce** [56] ;
 - des problèmes de type **Max SAT pondéré** avec des formes de clauses particulières [57].

3.1.2 La difficulté d’un NEP dans un jeu de congestion

On expose la preuve de PLS-complétude du calcul d’un NEP dans un jeu de congestion comme un exemple de PLS-réduction.

Théorème 3.1 ([18]). *Trouver un NEP dans un jeu de congestion est PLS-Complet*

Démonstration. La preuve est obtenue par une réduction depuis le problème **3NAE-SAT** pondéré (Not-All-Equal) dont la PLS-complétude est prouvée par Schaffer et Yannakakis [57].

3NAE-SAT pondéré FLIP

- Entrée :
 - un ensemble de variables X ;
 - un ensemble C de 3NAE-clauses sur X . Une 3NAE-clause est déterminée par un triplet de littéraux (x_1, x_2, x_3) . Elle est vérifiée dès lors qu’il existe un littéral parmi les trois qui n’a pas la même valuation que les deux autres (c’est-à-dire, 2 littéraux à VRAI et 1 à FAUX, ou 2 à FAUX et un à VRAI) ;
 - pour chaque clause c dans C , un poids entier w_c ;
- Sortie : une valuation σ sur les variables telle que dans le voisinage par FLIP de cette valuation, la somme des poids des clauses non satisfaites ne diminue pas.

Verification que le calcul d'un NEP est dans PLS L'ensemble des solutions faisables est l'ensemble des profils. Le voisinage d'un profil σ contient tous les profils σ' sur lesquels la stratégie d'un seul joueur diffère par rapport à σ . En sortie, on recherche un profil qui est un minimum local du potentiel de Rosenthal, ce qui est équivalent à un NEP. La procédure *INITIALISE* peut être implémentée en prenant pour chaque joueur la première stratégie de son espace de stratégies. La procédure *AMELIORE*, peut être implémentée dès lors que le nombre de stratégies est borné polynomialement dans la taille de la description du jeu, en vérifiant exhaustivement pour chaque joueur et chaque stratégie si elle améliore son coût.

La réduction La PLS-réduction construit à partir d'un ensemble de clauses un jeu de congestion pour lequel, si l'on dispose d'un NEP, on peut trouver une valuation qui est un minimum local.

Soit une instance de 3NAE-Sat pondérée avec, d_1, \dots, d_m un ensemble de 3NAE-clauses sur l'ensemble de variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ assorties des poids w_1, \dots, w_m .

Pour définir le jeu de congestion, il faut et il suffit de définir :

1. un ensemble de joueurs ;
 2. un ensemble de ressources avec leurs fonctions de délai ;
 3. les espaces de stratégies de joueurs.
- les joueurs : à chaque variable x_i correspond un joueur i ;
 - les ressources : pour chaque clause d_j , on construit deux ressources e_j^1 et e_j^0 . Les fonctions de délai pour ces deux ressources sont identiques et définies ainsi :

$$d_{e_j^1}(x) = d_{e_j^0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ w_j & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

- les stratégies : chaque joueur x_i a deux stratégies, la stratégie 1 et la stratégie 0. La stratégie 1 du joueur i contient toutes les clauses e_j^1 telles que d_j contient la variable x_i . De la même manière, la stratégie 0 du joueur i contient toutes les clauses e_j^0 telle que d_j contient la variable x_i ;

La transformation d'un profil de stratégies σ du jeu de congestion en une valuation $val(\sigma)$ sur X se fait en attribuant à chaque variable x_i VRAI si le joueur i choisit la stratégie 1 et FAUX s'il choisit la stratégie 0.

Il reste à montrer que pour tout NEP σ , $val(\sigma)$ est un minimum local pour la somme des poids des clauses non satisfaites. Pour cela on remarque avec les équations suivantes que la fonction de potentiel de ce jeu de congestion (voir section 1.2) est égale à la somme des

pois des clauses non satisfaites :

$$\Phi(\sigma) = \sum_{e_j} \sum_{t=1}^{\#e_j} d_{e_j}(x) \quad (3.1)$$

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\{e_j | \#e_j=3\}} w_j \quad (3.2)$$

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\{d_j | \text{val}(\sigma) \neq d_j\}} w_j \quad (3.3)$$

Sur un NEP, aucun joueur ne peut faire baisser ce potentiel. Donc sur la valuation correspondante, aucun changement sur une seule variable ne peut améliorer la somme des poids des clauses non satisfaites. \square

3.2 Approfondir l'étude de la complexité du calcul d'un NEP dans un jeu de congestion

Dans cette section, on présente les approches utilisées pour analyser plus finement quels paramètres rendent le calcul d'un NEP difficile. Dans la sous-section 3.2.1, on présentera les sous-problèmes pour lesquels il existe des algorithmes qui trouvent un NEP en temps polynomial. Dans la sous-section 3.2.2 on s'intéressera à une relaxation du problème : trouver un NEP approché.

Dans toute cette section, qui regroupe des résultats de la littérature, on prend pour hypothèse que les délais ressources sont positifs.

3.2.1 Restreindre la structure

La recherche de sous-cas simples est inhérente à tout problème prouvé difficile. Cette recherche permet de mieux apprécier ce qui fait la difficulté d'un problème. Le parallèle peut être fait avec le problème du calcul d'un NE dans les jeux matriciels [58]. Pour les jeux de congestion, on va présenter deux résultats instructifs de la littérature.

Les jeux de congestion symétriques sur réseau

Les **jeux de congestion sur réseaux** sont décrits par un graphe non orienté $G(V, E)$, un ensemble de joueurs, et pour chaque joueur i , un couple de sommets origine-destination (o_i, d_i) . Les ressources sont les arêtes de G . Les stratégies d'un joueur sont les chemins dans G qui permettent de connecter son origine et sa destination.

Un jeu est *symétrique* si pour tout profil σ et tout couple de joueurs (i, j) , $c_i(\sigma) = c_j(\sigma_{-i,j}, \sigma'_i, \sigma'_j)$ avec $\sigma'_i = \sigma_j$ et $\sigma'_j = \sigma_i$.

Informellement, la symétrie signifie que les joueurs sont identiques. Dans les jeux de congestion, la fonction de coût implique que pour être symétrique, il faut et il suffit que les joueurs aient le même espace de stratégies. Sur un jeu de congestion sur réseau, cela signifie que les joueurs ont le même couple origine-destination.

Fabrikant et al [18] ont remarqué que trouver un minimum global du potentiel dans un jeu de congestion symétrique sur réseau revenait à résoudre un problème de flot de délai minimal (résoluble en temps polynomial par programmation linéaire). Or il suffit d'un minimum local du potentiel pour trouver un NEP, et un minimum global est a fortiori un minimum local.

Si on prend ces deux contraintes séparément, la symétrie et le fait que les stratégies soient des chemins dans un graphe, obtient on un jeu pour lequel calculer un équilibre de Nash est faisable temps polynomial? Les auteurs répondent par la négative en montrant que le problème est PLS-complet dans les jeux de congestion symétriques et dans les jeux de congestion sur réseau.

La réduction pour le cas symétrique est simple, on ne va donc pas se priver de l'exposer. Elle se fait depuis le cas d'un jeu de congestion asymétrique. On réduit un jeu avec un espace de stratégies spécifique à chaque joueur, à un jeu où tous les joueurs ont le même espace de stratégies.

Tout d'abord on modifie l'espace de stratégies de chaque joueur i en ajoutant à chaque stratégie dans S_i une ressource e_i . On note \tilde{S}_i cet espace de stratégie modifié. Le délai des ressources e_i est défini comme suit :

$$d_{e_i}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ M & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

avec M une valeur prohibitive qui garantit qu'aucun joueur n'a intérêt à payer ce délai.

L'espace de stratégie commun à tous les joueurs est $\bigcup_i \tilde{S}_i$.

Les délais des ressources e_i garantissent que sur un NEP, l'espace de stratégie de chaque joueur est utilisé exactement une fois. En effet, un joueur a toujours intérêt à changer de stratégie pour un espace de stratégie non utilisé plutôt que payer M . On peut alors canoniquement convertir le NEP trouvé en un NEP du jeu original en assignant au joueur i la stratégie du joueur qui utilise la ressource e_i dans le jeu modifié. Sur un NEP ce joueur existe et est unique. En effet s'il n'existe pas, c'est que deux joueurs utilisent une ressource e_j . Ce n'est donc pas un NEP puisque les deux joueurs paient au moins M , ce qui est une valeur prohibitive, dont ils pourraient s'exempter en utilisant la ressource e_i . Ce joueur est unique pour la même raison.

FIGURE 3.1: Dynamique de meilleure réponse

A chaque tour, s'il existe un joueur j qui peut améliorer son coût :

- $\sigma = (\sigma_{-j}, \sigma'_j)$ avec $\sigma'_j = MR_j(\sigma_{-j})$

Retourner σ

Jeux avec des ressources indépendantes

Les matroïdes sont des structure qui se caractérisent par une notion d'« indépendance » entre ses éléments.

Definition 3.2. Un couple $\langle \mathcal{S}, \mathcal{R} \rangle$ est un matroïde si \mathcal{R} est un ensemble fini de ressources et \mathcal{S} est une famille non vide de sous ensemble de \mathcal{R} telle que si $s \in \mathcal{S}$ et $s' \subseteq s$ alors $s' \in \mathcal{S}$, et si pour tout $s, s' \in \mathcal{S}$ avec $|s'| < |s|$, il existe un $e \in s - s'$ tel que $s' \cup e \in \mathcal{S}$.

Une *base* d'un matroïde est un élément de taille maximal. Cette taille est appelé *rang du matroïde*.

Ackermann et al [19] ont défini les **jeux de congestion sur matroïde** comme étant des jeux de congestion pour lesquels l'espace de stratégies des joueurs est constitué de l'ensemble des bases d'un matroïde sur l'ensemble des ressources.

Ieong et al [20] ont montré que si les stratégies des joueurs ne contiennent qu'une ressource, alors on peut trouver un NEP en temps polynomial à l'aide de la *dynamique de meilleure réponse* décrite figure 3.1.

La meilleure réponse d'un joueur i à un profil σ_{-i} noté $MR_i(\sigma_{-i})$, la stratégie σ'_i de S_i qui minimise $c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$.

Ce résultat a été étendue par Ackermann et al [19] aux jeux de congestion sur matroïde.

Remarque 3.3. La dynamique de meilleure réponse termine car le potentiel décroît à chaque tour. Cependant, le potentiel peut ne décroître que très légèrement et nécessiter un nombre de tours exponentiel dans le nombre de joueurs avant d'atteindre un NEP.

Proposition 3.4 ([59]). *Soit s_1 et s_2 deux base d'un matroid $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$. On note $G(s_1 \Delta s_2)$ le graphe bipartite (V, E) tel que $V = s_1 - s_2 \cup s_2 - s_1$ et $E = \{r_1, r_2 | r_1 \in s_1 - s_2 \text{ et } r_2 \in s_2 - s_1\}$.*

1. *soit $r_2 \in s_2 - s_1$, il existe r_1 in $s_1 - s_2$ tel que $s_1 - r_1 \cup r_2 \in \mathcal{S}$;*
2. *il existe un couplage parfait dans $G(s_1 \Delta s_2)$.*

Ces propriétés permettent d'établir le lemme suivant :

Lemme 3.5. *La fonction suivante décroît à chaque tour de la dynamique de meilleure réponse*

$$\tilde{\Phi}(\sigma) = \sum_{r \in R} \sum_{t=1}^{\#_r(\sigma)} \tilde{d}_r(t) \quad (3.4)$$

avec $\tilde{d}_r(t)$, la position de $d_r(t)$ dans une liste qui contiendrai les délais $\{d_{r'}(k)\}_{r',k \in N \times N}$ triés par ordre croissant.

Démonstration. On pose que depuis un profil σ , le joueur i change de stratégie pour sa meilleure réponse σ'_i . Soit $R = \{r_1 \dots r_k\}$ l'ensemble des ressources qui sont dans $\sigma_i - \sigma'_i$ et $R' = \{r'_1 \dots r'_k\}$, l'ensemble des ressources dans $\sigma'_i - \sigma_i$. Les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- il existe une façon de construire un couplage parfait entre les ressources de R et R' de telle sorte pour tout (r, r') dans le couplage on ait $d_{r'}(\#_{r'_j}(\sigma)) \leq d_r(\#_{r_j}(\sigma))$;
- pour au moins un couple (r, r') du couplage , $d_{r'}(\#_{r'_j}(\sigma)) < d_r(\#_{r_j}(\sigma))$.

Si la première propriété n'est pas vérifiée, alors σ' n'est pas la meilleur réponse. Si la seconde n'est pas vérifiée alors σ' n'améliore pas le coût. \square

Théorème 3.6 ([19]). *Dans un jeu de couplage sur matroïde à n joueurs, la dynamique de meilleure réponse passe au plus $n^2.m.k$ fois par la boucle avec m le nombre de ressources et k le nombre de ressources maximum dans une stratégie.*

Démonstration. Le nombre de délais différents est inférieur ou égal à $m.n$ donc $\tilde{c}_r(\sigma) \leq m.n$. On peut donc établir que pour tout σ , $\tilde{\Phi}(\sigma) < n^2.m.k$ D'après le lemme 3.5, $\tilde{\Phi}$ décroît au moins de 1 à chaque passage dans la boucle. Cette valeur correspond à un profil dans lequel tous les joueurs utilisent k ressources ayant le plus fort délai possible. \square

3.2.2 Approcher la solution

Un NEP étant difficile à calculer, la communauté a cherché à calculer un profil « approximativement » stable. On peut concevoir cette approximation comme une tolérance des joueurs vis-à-vis de leur coût sur leur meilleure réponse.

Un état est approximativement stable si les joueurs ne peuvent améliorer leur coût par un terme additif dans le cas d'une approximation additive, ou par un facteur dans le cas d'une approximation multiplicative.

Cette approche révèle des différences selon le type d'approximation choisi.

Sur les jeux bimatriels, il existe un schéma d'approximation en temps quasi-polynomial pour trouver un EN (mixte) approché additivement [8] tandis que trouver un EN approché multiplicativement reste PPAD-complet et ce, quel que soit le facteur d'approximation [60].

Sur les jeux de congestion, le constat est plutôt opposé. L'approximation additive ne permet pas d'avancée significative sur la complexité, tandis que l'approximation multiplicative permet d'obtenir de nouveaux cas résolubles en temps polynomial.

Approximation additive

Soit $\epsilon > 0$, on dit qu'un profil de stratégies σ est un ϵ -NEP additif si pour tout joueur i et pour tout $\sigma'_i \in S_i$, $c_i(\sigma) \leq c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) + \epsilon$.

Proposition 3.7. *Pour tout $\epsilon > 0$, calculer ϵ -NEP additif dans un jeu de congestion est PLS-complet.*

Démonstration. Calculer d'un NEP est déjà PLS-complet déjà si les délais sont des entiers.

Soit $G = \langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}, (S_i)_{i \in N}} \rangle$ un jeu de congestion à délais entiers.

Soit $\tilde{G} = \langle N, \mathcal{R}, (\tilde{d}_r)_{r \in \mathcal{R}, (S_i)_{i \in N}} \rangle$ avec pour tout x , $\tilde{d}_r(x) = d_r(x) \cdot (\epsilon + \delta)$ avec $\delta > 0$.

Tout ϵ -NEP additif de \tilde{G} est un NEP de G . Comme trouver un NEP dans G est PLS-complet, c'est le cas également pour un ϵ -NEP dans \tilde{G} \square

Approximation multiplicative

Soit $\epsilon \geq 1$, un profil de stratégies σ est un ϵ -NEP si pour tout i et pour tout $\sigma'_i \in S_i$,

$$c_i(\sigma) \leq \begin{cases} \epsilon c_i(\sigma) & \text{si } c_i(\sigma) \geq 0 \\ \frac{c_i(\sigma)}{\epsilon} & \text{si } c_i(\sigma) < 0 \end{cases}$$

Skopalik et Vöcking [22] ont montré que si l'on ne restreint pas la structure du jeu, cette approximation ne peut donner lieu à une résolution en temps polynomial à moins que $\text{PLS} \subseteq \text{P}$.

Théorème 3.8 ([22]). *Pour tout $\epsilon > 1$, calculer un ϵ -NEP dans un jeu de congestion est PLS-complet.*

La preuve de ce théorème est obtenue à l'aide d'une réduction fort complexe depuis le problème **CIRCUIT-FLIP** que nous n'exposerons pas ici.

Cette preuve laisse tout de même de la place à des sous-cas polynomiaux. Cette place avait été en partie éclairée par les résultats de Chien et Sinclair en 2006 [14] : Si le jeu est symétrique et que les fonctions de délai sont positives et à sauts bornés, la dynamique ϵ -Nash (décrite dans le chapitre 4) converge en temps polynomial vers un ϵ -NEP. Balghat et al [21] montrent que cette même dynamique converge rapidement si les ressources ont des fonctions de délai « similaires », c'est-à-dire des fonctions égales à un facteur polynomial près pour chaque niveau de congestion. Une fonction de délai d positive a des sauts α -borné, pour $\alpha \geq 1$ si pour tout $x \geq 1$, $d(x+1) \leq \alpha d(x)$.

La PLS-complétude du calcul d'un ϵ -NEP est maintenue si le jeu est symétrique. On réduit le cas asymétrique au cas symétrique en utilisant la même réduction que pour le calcul d'un NEP exact ; c'est-à-dire que l'on rajoute une ressource pour chaque espace de stratégies dont le délai dissuade l'utilisation d'un même espace par deux joueurs.

3.3 Résultats sur les jeux sans contraintes de signes

Les résultats évoqués précédemment portent sur les jeux positifs. Ceux-ci ne s'étendent pas trivialement aux jeux sans contrainte de signe. Cette section comment notre extension des résultats de Skopalik et Voeking [54].

Nous avons montré que sans la contrainte de positivité des fonctions de délai, les contraintes de symétrie et de sauts bornés ne suffisent pas à étendre les résultats positifs de [14].

Pour cela, on définit ce qu'est une fonction à sauts bornés lorsque les délais peuvent être positifs et négatifs. On présente deux cas : dans le premier on n'autorise pas les changements de signe, et dans le second on les autorise.

Une fonction de délai d positive ou négative est à sauts α -bornés sans changement de signe pour $\alpha \geq 1$ si pour tout $x \geq 1$, $c(x) \leq \alpha c(x+1)$.

$$d(x+1) \leq \begin{cases} \alpha d(x) & \text{si } d(x) \geq 0 \\ \frac{d(x)}{\alpha} & \text{si } d(x) < 0 \end{cases}$$

Si les fonctions de délai peuvent changer de signe, trouver un ϵ -Nash est déjà PLS-complet pour des fonctions très simples : *fonctions flip*.

Une fonction de délai est une fonction flip s'il existe des entiers D et $1 \leq k \leq n$ tels que

$$d(x) = \begin{cases} -D & \text{si } x < k \\ D & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

Les fonctions flip sont 1-bornées avec changement de signe. Ce sont les fonctions les plus simples possibles à sauts bornés avec changement de signe. Dans un *jeu de congestion à fonction flip*, toutes les fonctions de délai sont des fonctions flip.

On montre que le calcul d'un ϵ -NEP est difficile sur les jeux de congestion symétriques à sauts bornés avec changement de signe. Pour ce faire, on montre que c'est déjà le cas pour les jeux de congestion à fonctions flip.

Théorème 3.9. *Pour tout $\epsilon > 1$, calculer un ϵ -NEP, sur un jeu de congestion symétrique à fonctions flip, sans contraintes de signe est PLS-complet.*

Démonstration. Comme stipulé précédemment, trouver un ε -NEP dans un jeu de congestion positif même symétrique est PLS-complet [22]. On propose la réduction suivante :

ε -NEP dans un jeu de congestion positif symétrique \preceq_{PLS} ε -NEP dans un jeu de congestion symétrique à fonctions flip.

Soit $G = (n, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, \mathcal{S})$ un jeu de congestion symétrique et positif, et soit $\alpha > 1$ une constante. Dans cette réduction, on fait correspondre G à un jeu symétrique à fonctions flip $\tilde{G} = (n, \tilde{\mathcal{R}}, (d_r)_{r \in \tilde{\mathcal{R}}}, \tilde{\mathcal{S}})$ que l'on définit maintenant. Pour tout ressource $r \in \mathcal{R}$, on pose $R_r = \{r_1, r_2^+, r_2^-, \dots, r_n^+, r_n^-\}$, et pour toute stratégie $s \subseteq \mathcal{S}$, on définit $\tilde{s} = \bigcup_{r \in \sigma} R_r$ (et par conséquent, $\tilde{\mathcal{R}} = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} R_r$). L'ensemble des stratégies est défini comme $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{s} | s \in \mathcal{S}\}$. Enfin les fonctions de délai sont définies comme suit : le délai d_{r_1} est simplement la fonction constante égale à $d_r(1)$. Pour $k \geq 2$, on pose

$$d_{r_k^+}(t) = \frac{d_r(k) - d_r(k-1)}{2}$$

et

$$d_{r_k^-}(t) = \begin{cases} \frac{-(d_r(k) - d_r(k-1))}{2} & \text{if } t < k, \\ \frac{(d_r(k) - d_r(k-1))}{2} & \text{if } t \geq k. \end{cases}$$

Le jeu \tilde{G} est clairement à fonctions flip.

Notez la bijection entre les profils de G et de \tilde{G} . En effet, les profils de \tilde{G} sont de la forme $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n)$, où $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{S}^n$ est un profil de G . Pour la réduction on montre que si s' est un ε -NEP dans \tilde{G} alors σ est un ε -NEP dans G . On montre en fait un énoncé plus fort sur les fonctions de délai : pour tout profil σ , et pour tout joueur i , le coût du joueur i sur σ dans G est la même que le coût du joueur i sur $\tilde{\sigma}$ dans \tilde{G} .

Les ressources r_k^+ et r_k^- sont telles que la somme de délais de leurs fonctions simule le saut $d_r(k) - d_r(k-1)$ quand $t \geq k$. Par conséquent la somme des délais des ressources dans R_r est simplement d_r , ce qui est énoncé dans le lemme suivant.

Lemme 3.10. *Pour toute ressource $r \in \mathcal{R}$, et pour tout $1 \leq t \leq n$,*

$$\sum_{r' \in R_r} d_{r'}(t) = d_r(t).$$

Démonstration. Il est immédiat depuis leur définition que les délais satisfont pour tout $2 \leq k \leq n$, et $1 \leq t \leq n$,

$$d_{r_k^+}(t) + d_{r_k^-}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < k, \\ d_r(k) - d_r(k-1) & \text{si } t \geq k. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{r' \in R_r} d_{r'}(t) &= d_r(1) + \sum_{k=2}^t (d_{r_k^+}(t) + d_{r_k^-}(t)) \\
&= d_r(1) + \sum_{k=2}^t (d_r(k) - d_r(k-1)) \\
&= d_r(t).
\end{aligned}$$

□

Ce qui implique la relation forte entre les coûts des joueurs dans les deux jeux.

Lemme 3.11. *Pour tout profil $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de G , et tout joueur i , on a*

$$c_i(\tilde{\sigma}) = c_i(\sigma),$$

où $\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_n)$.

Démonstration. On vérifie directement la séquence d'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
c_i(\tilde{\sigma}) &= \sum_{r' \in \tilde{\sigma}_i} d_{r'}(\#_{r'}(\tilde{\sigma})) \\
&= \sum_{r \in \sigma_i} \sum_{r' \in R_r} d_{r'}(\#_{r'}(\tilde{\sigma})) \\
&= \sum_{r \in \sigma_i} \sum_{r' \in R_r} d_{r'}(\#_{r'}(\sigma)) \\
&= \sum_{r \in \sigma_i} d_r(\#_r(\sigma)) \\
&= c_i(\sigma).
\end{aligned}$$

En effet, la première et la dernière égalités résultent des définitions des fonctions de délai, et la deuxième est vérifiée par définition de $\tilde{\sigma}_i$. La troisième égalité est vérifiée car pour tout $r \in \mathcal{R}$, tout $r' \in R_r$, et tout joueur i , la stratégie σ_i contient r si et seulement si $\tilde{\sigma}$ contient R_r , et par conséquent, pour tout $r' \in R_r$ $\#_{r'}(\tilde{\sigma}) = \#_{r'}(\sigma)$. La quatrième égalité provient du lemme 3.10. □

Par le lemme 3.11 on peut trivialement obtenir un ϵ -NEP pour G , à partir d'un ϵ -NEP pour G' . □

Théorème 3.12. *Pour tout $\alpha > 1$, pour tout $\epsilon > 1$, calculer un ϵ -NEP, sur un jeu de congestion symétrique à sauts α -bornés sans changement de signe, et sans contrainte de signe est PLS-complet.*

Remarque 3.13. Les fonctions 1-bornées sans changement de signe sont les fonctions constantes. C'est pourquoi la PLS-complétude ne s'étend pas au cas $\alpha = 1$ sans changement de signe. Dans ce cas la dynamique de meilleure réponse converge en n tours puisque lorsqu'un joueur a choisi sa meilleure stratégie, il ne va pas plus changer puisque les coûts des stratégies ne changent pas.

Démonstration. La preuve se fait à l'aide d'une réduction qui partage le même squelette de preuve que la preuve du théorème 3.9. On adapte juste les nouvelles fonctions de délai des ressources :

$$d_{r_k^+}(t) = \begin{cases} (d_r(k) - d_r(k-1)) \frac{\alpha}{\alpha^2-1} & \text{si } t < k, \\ (d_r(k) - d_r(k-1)) \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} & \text{si } t \geq k. \end{cases}$$

et

$$d_{r_k^-}(t) = \begin{cases} -(d_r(k) - d_r(k-1)) \frac{\alpha}{\alpha^2-1} & \text{si } t < k, \\ -(d_r(k) - d_r(k-1)) \frac{1}{\alpha^2-1} & \text{si } t \geq k. \end{cases}$$

□

Chapitre 4

Dynamiques sur les jeux de congestion

Dans ce chapitre, on décrit des dynamiques à mises à jour déterministes, séquentielles, dépendantes uniquement du profil courant. Chien et Sinclair [14] ont montré que la dynamique ϵ -Nash converge vers un ϵ -NEP en un nombre de tours polynomial sur les jeux de congestion positifs, symétriques à fonctions de coût croissantes à sauts bornés. Nous avons montré que la convergence rapide s'étend aux jeux de congestion négatifs, symétriques à fonctions de coût croissantes à sauts bornés. De plus, nous étendons la preuve de convergence rapides sur les jeux négatifs, symétriques, à fonctions de coûts monotones à sauts bornés.

4.1 Sur les jeux positifs

Dans cette section on présente les dynamiques étudiées puis, on expose les résultats de Chien et Sinclair [14] sur les jeux de congestion positifs.

4.1.1 Dynamiques de Nash

On appelle *mouvement d'amélioration* un changement de stratégie d'un joueur tel que le coût de ce joueur diminue après le changement ; c'est-à-dire que sur un profil σ , le changement de stratégie du joueur i de σ_i vers σ'_i est un mouvement d'amélioration si et seulement si $c_i(\sigma) > c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$.

La classe des *dynamiques de Nash* comprend les dynamiques telles que chaque mise à jour de stratégie est le résultat d'un mouvement d'amélioration. La dynamique de meilleure réponse du chapitre précédent est dans cette classe de dynamique.

On appelle *mouvement d' ϵ -amélioration* (ϵ -mouvement) un changement de stratégie d'un joueur tel que le coût de ce joueur diminue après le changement d'un facteur $(1 - \epsilon)$; c'est-à-dire que sur un profil σ , le changement de stratégie du joueur i de σ_i vers σ'_i est un mouvement d' ϵ -amélioration si et seulement si $c_i(\sigma)(1 - \epsilon) > c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$.

La classe des *dynamiques ϵ -Nash* comprend les dynamiques telles que chaque mise à jour de stratégie est le résultat d'un mouvement d' ϵ -amélioration.

Dans un tour de la dynamique *ϵ -Nash gloutonne*, le mouvement sélectionné est celui qui maximise la différence de coût gagnée parmi les ϵ -mouvements ; c'est-à-dire que depuis un profil σ , le joueur i effectue le mouvement σ'_i dans un tour de la dynamique ϵ -Nash gloutonne si pour tout j ayant un mouvement d' ϵ -amélioration, et tout σ'_j , $c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) \geq c_j(\sigma) - c_j(\sigma_{-j}, \sigma'_j)$.

4.1.2 Convergence rapide de la dynamique ϵ -Nash

Chien et Sinclair ont montré le théorème suivant qui stipule que la dynamique ϵ -Nash gloutonne converge rapidement.

Théorème 4.1. *Pour tout $\alpha \geq 1$ et $0 < \epsilon < 1$, dans un jeu de congestion à n joueurs, symétrique, à fonction de délai positives croissantes et à sauts α -bornés, la dynamique ϵ -Nash gloutonne converge depuis n'importe quel profil initial en $O(n\alpha\epsilon^{-1} \log(nmD))$ tours, où $m = |\mathcal{R}|$, et $D = \max\{d_r(n) : r \in \mathcal{R}\}$ est une borne supérieure sur les délais.*

Remarque 4.2. L'approximation est nécessaire afin d'obtenir une convergence rapide. En effet, même sur un jeu symétrique à délais positifs et à sauts bornés, calculer un NEP exact reste PLS-complet. La preuve est obtenue en modifiant les fonctions de délai de la réduction depuis 3NAE-Sat, pour qu'elles soient à sauts bornés.

Démonstration. La preuve s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 4.3. *Soit i le joueur qui change de stratégie depuis le profil σ , pour tout j $c_i(\sigma) > \frac{c_j(\sigma)}{\alpha}$*

Preuve du lemme 4.3. Soit σ'_i la stratégie de i sur son ϵ -mouvement. Puisque le jeu est symétrique, j peut utiliser la stratégie σ'_i . Or on sait que :

$$\begin{aligned} c_j(\sigma_{-j}, \sigma'_i) &= \sum_{r \in \sigma'_i} d_r(\#_r(\sigma_{-j}, \sigma'_i)) \\ &\leq \sum_{r \in \sigma'_i} d_r(\#_r(\sigma_{-i}, \sigma'_i) + 1) \\ &\leq \sum_{r \in \sigma'_i} \alpha \cdot d_r(\#_r(\sigma_{-i}, \sigma'_i)) \\ &= \alpha \cdot c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) \end{aligned}$$

Pour la première inégalité on remarque que pour tout $r \in \sigma'_i$, $\sharp_r(\sigma_{-j}, \sigma'_i) \leq \sharp_r(\sigma_{-i}, \sigma'_i) + 1$. Pour la seconde inégalité, on utilise le fait que les fonctions de délai ont des sauts α -bornés.

Supposons maintenant que $c_j(\sigma) > \alpha \cdot c_i(\sigma)$, alors

$$c_j(\sigma) - c_j(\sigma_{-j}, \sigma'_i) > c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$$

Il y a alors contradiction avec le fait que i est le joueur qui change de stratégie. \square

Remarquez que nmD est une borne supérieure du potentiel sur le profil initial. La preuve du théorème consiste à montrer que le potentiel décroît exponentiellement vite. Il décroît en fait à chaque tour d'une fraction plus grande que $\frac{\epsilon}{\alpha \cdot n}$ ce qui permet d'aboutir au temps de convergence du théorème. En utilisant le fait que les coûts des ressources sont positifs et croissants, on a :

$$\Phi(\sigma) \leq \sum_i c_i(\sigma) \quad (4.1)$$

Il existe donc un joueur j dont le coût est supérieure à la moyenne; c'est-à-dire telle que $c_j(\sigma) \geq \frac{\Phi(\sigma)}{n}$. En utilisant le lemme 4.3, on a, si i est le joueur qui change de stratégie depuis σ , $c_i(\sigma) \geq \frac{\Phi(\sigma)}{\alpha \cdot n}$. Comme i effectue un ϵ -mouvement vers σ'_i , on a :

$$\Phi(\sigma) - \Phi((\sigma_{-i}, \sigma'_i)) = c_i(\sigma) - c_i((\sigma_{-i}, \sigma'_i)) > \frac{\epsilon}{\alpha \cdot n} \Phi(\sigma) \quad (4.2)$$

\square

Ce théorème de convergence rapide s'étend sur les ϵ -Nash dynamiques pour lesquelles le joueur qui change de stratégie est choisi différemment :

- le joueur qui change de stratégie est celui qui maximise le facteur de coût gagné. On peut également dans ce cas vérifier que le joueur qui change de stratégie à chaque tour a un coût élevé comparé au potentiel ;
- tous les T tours tous les joueurs ont l'opportunité de changer de stratégie au moins une fois. Cela permet de garantir que les joueurs qui ont un coût élevé par rapport au potentiel effectuent un mouvement tous les T tours.

La convergence rapide est maintenue pour les jeux asymétriques pour lesquels il existe un nombre constant de « type de joueurs »; c'est-à-dire que le nombre d'espaces de stratégies différents est constant. La borne supérieure sur le nombre de tours avant de converger est exponentielle dans ce nombre de types. Nous donnons l'intuition de la preuve pour 2 types de joueurs que l'on note a et b . Si les joueurs de type a et ceux de type b ont des coûts égaux à un facteur polynomial près, le potentiel décroît rapidement car on peut à nouveau trouver un joueur avec un coût élevé par rapport au potentiels dans les deux types. Le cas qui diffère est celui où les joueurs de type a , ont des coûts beaucoup plus élevés que les joueurs de

type b . Quand un joueur de type a effectue un ϵ -mouvement, il fait effectivement baisser le potentiel d'une fraction polynomiale. Cependant ce n'est pas le cas lorsqu'un joueur de type b effectue un ϵ -mouvement. Mais si les joueurs de type b effectuent tous les mouvements durant $O(n\alpha\epsilon^{-1}\log(nmD))$ tours, ils sont sur un ϵ -NEP (par le théorème 4.1), sauf si un joueur de type a dispose alors d'un ϵ -mouvement. Les joueurs de type a effectuent donc un mouvement au moins tous les $O(n\alpha\epsilon^{-1}\log(nmD))$ tours, ce qui signifie que le potentiel décroît d'une fraction polynomiale tous les $O(n\alpha\epsilon^{-1}\log(nmD))$ tours. La convergence vers un ϵ -NEP pour deux types de joueurs est obtenue en $O((n\alpha\epsilon^{-1}\log(nmD))^2)$ tours.

S'il y a plus de types, on peut toujours construire une chaîne de types de telle sorte que chaque maillon effectue un mouvement lorsque le maillon précédent a effectué $O(n\alpha\epsilon^{-1}\log(nmD))$ mouvements, ce qui nous donne la complexité exponentielle dans le nombre de types.

4.2 Convergence rapide sur les jeux négatifs

La dynamique ϵ -Nash converge-t-elle rapidement lorsque les délais des ressources sont négatifs ? Dans le chapitre précédent nous avons répondu par la négative à cette question sur des jeux sans contrainte de signe. En effet, les théorèmes 3.12 et 3.9 montrent que si le jeu comporte à la fois des ressources à délai positif et à délai négatif, calculer un ϵ -NEP est PLS-complet.

La question reste légitime pour les jeux négatifs.

4.2.1 Avec des coûts croissants

Nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Pour tout $\alpha \geq 1$, dans un jeu de congestion négatif à n joueurs symétrique avec des fonctions croissantes, et à sauts α -bornés, la dynamique ϵ -Nash converge depuis un état initial arbitraire en $O((\alpha n^2 + nm)\epsilon^{-1}\log(nmD))$ tours où $m = |\mathcal{R}|$, et $D = \max\{-d_r(1) : r \in \mathcal{R}\}$ est une borne supérieure sur la valeur absolue des délais.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que toute ressource apparaît dans une stratégie (sinon cette ressource pourrait être supprimée de \mathcal{R}). On commence par définir un potentiel plus approprié à la mesure de la progression de la dynamique ϵ -Nash dans le cas de coûts négatifs. Soit ψ défini sur les profils de stratégie comme $\psi(\sigma) = -\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{t=\#_r(\sigma)+1}^n d_r(t)$. Cette fonction est clairement positive, et nous affirmons qu'il s'agit d'une fonction de potentiel c'est-à-dire que $\psi(\sigma) - \psi(\sigma') = d_i(\sigma) - d_i(\sigma')$ si les profils σ et σ' diffèrent uniquement sur la stratégie du joueur i . Cette propriété découle du fait que pour tout profil σ , $\psi(\sigma) = \phi(\sigma) - k$, où $\phi(s)$ est la fonction de potentiel classique, et k est la constante $-\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{t=1}^n d_r(t)$. Remarquez que $\psi(\sigma)$ est borné supérieurement par nmD , pour tout profil σ .

Soit un profil initial $\sigma^{(0)}$, soit $\sigma^{(k)}$ le k^{eme} profil atteint par la dynamique d' ϵ -Nash. Nous affirmons que $\psi(\sigma^{(k+1)}) \leq \psi(\sigma^{(k)})(1 - \epsilon/4(\alpha n^2 + nm))$, pour tout k , ce qui implique clairement le théorème. Supposons que $\sigma^{(k)} = \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ n'est pas un ϵ -Nash, et soit i le joueur qui peut effectuer le ϵ -mouvement qui maximise la différence de coût. Afin de prouver notre affirmation, on va montrer qu'il existe une stratégie σ'_i pour le joueur i telle que $c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) \geq \psi(\sigma)\epsilon/4(\alpha n^2 + nm)$.

La première idée consiste à prouver, de manière analogue au cas des jeux à coûts positifs, que pour un joueur j , l'opposé de son coût $-c_j(\sigma)$ est une fraction polynomiale de $\psi(\sigma)$. Ce n'est en réalité pas toujours vérifié. La somme $\sum_{j=1}^n c_j(\sigma)$ n'est pas nécessairement une fraction polynomiale de $\psi(\sigma)$ car les ressources non utilisées dans σ ne contribuent pas à la somme des coûts, mais contribuent au potentiel. C'est pourquoi nous introduisons la fonction ψ' comme étant ψ restreinte aux ressources utilisées par au moins un joueur ce qui conduit à l'expression suivante : $\psi'(\sigma) = -\sum_{\#_r(\sigma) \neq 0} \sum_{t=\#_r(\sigma)+1}^n d_r(t)$.

Le lemme suivant montre qu'il existe un $c_j(\sigma)$ qui est au moins une fraction polynomiale de $\psi'(\sigma)$.

Lemme 4.5. *Il existe un joueur j tel que*

$$-c_j(\sigma) \geq \psi'(\sigma)/n^2.$$

Démonstration. Nous affirmons l'équation :

$$-n \sum_{j=1}^n d_j(\sigma) \geq \psi'(\sigma),$$

depuis laquelle l'énoncé découle clairement.

Afin de prouver cette affirmation, on procède à la série d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} -n \sum_{j=1}^n c_j(\sigma) &= -n \sum_{\#_r(\sigma) \neq 0} \#_r(\sigma) \cdot d_r(\#_r(\sigma)) \\ &\geq -n \sum_{\#_r(\sigma) \neq 0} d_r(\#_r(\sigma)) \\ &\geq - \sum_{\#_r(\sigma) \neq 0} \sum_{t=\#_r(\sigma)+1}^n d_r(t) \\ &= \psi'(\sigma), \end{aligned}$$

La seconde inégalité est vérifiée car les fonctions de délai sont croissantes. \square

On fixe un joueur j qui satisfait le lemme 4.5 pour le reste de la preuve. Afin de borner supérieurement $\psi(s)$, on doit aussi considérer les ressources telles que $\#_r(\sigma) = 0$, en plus des

ressources qui contribuent à $\psi'(s)$. On a, en utilisant la croissance des coûts :

$$\psi'(s) - n \sum_{\#_r(\sigma)=0} d_r(1) \geq \psi(s),$$

Cela implique que soit $\psi'(\sigma) \geq \psi(\sigma)/2$, soit $-n \sum_{\#_r(\sigma)=0} d_r(1) \geq \psi(\sigma)/2$, et la preuve s'établit en distinguant ces deux cas.

Cas 1 : $\psi'(\sigma) \geq \psi(\sigma)/2$. On raisonne alors en deux sous cas qui comparent $c_i(\sigma)$ à $\psi'(\sigma)/2\alpha n^2$. Si $-c_i(\sigma) \geq \psi'(\sigma)/2\alpha n^2$, alors soit σ'_i la stratégie qui produit la plus grande différence de coût pour le joueur i . On a alors :

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) &\geq -\epsilon c_i(\sigma) \\ &\geq \epsilon \psi(\sigma)/4\alpha n^2, \end{aligned}$$

La première inégalité découle du fait que le mouvement de i est un ϵ -mouvement, et la seconde inégalité est vérifiée à cause des hypothèses. Si $-c_i(\sigma) < \psi'(\sigma)/2\alpha n^2$, alors soit $\sigma'_i = \sigma_j$, la stratégie du joueur j dans le profil σ . Observez que σ_j est une stratégie valable pour le joueur i car le jeu est symétrique. Alors,

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) &\geq c_i(\sigma) - c_j(\sigma)/\alpha \\ &\geq \psi'(\sigma)/\alpha n^2 - \psi'(\sigma)/2\alpha n^2 \\ &\geq \psi(\sigma)/4\alpha n^2. \end{aligned}$$

Ici, la première inégalité est vérifiée parce que les délais sont à sauts α -bornés. La seconde inégalité découle des hypothèses et du fait que $c_j(\sigma) \geq \psi'(\sigma)/n^2$. Enfin, la troisième inégalité est vérifiée car $\psi'(\sigma) \geq \psi(\sigma)/2$.

Cas 2 : $-n \sum_{\#_r(\sigma)=0} d_r(1) \geq \psi(\sigma)/2$. Alors il existe une ressource r telle que $\#_r(\sigma) = 0$, et $-d_r(1) \geq \psi(\sigma)/2nm$. On fixe une telle ressource r . On distingue à nouveau deux sous-cas en comparant les valeurs de $c_i(\sigma)$ à $d_r(1)/2$. Si $c_i(\sigma) \leq d_r(1)/2$ alors soit σ'_i la stratégie qui maximise la différence de coût pour le joueur i . Ensuite, de manière similaire au premier sous cas du cas 1, en utilisant les hypothèses et le fait que le joueur i accomplit un ϵ -mouvement, on a :

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) &\geq -\epsilon c_i(\sigma) \\ &\geq \epsilon \psi(\sigma)/4nm. \end{aligned}$$

Si $c_i(\sigma) > d_r(1)/2$ alors on note σ'_i une stratégie qui contient r . Une telle stratégie existe car sinon la ressource aurait été supprimée de \mathcal{R} . On a alors $\#_r(\sigma_{-i}, \sigma'_i) = 1$ car $\#_r(\sigma) = 0$ et σ ne diffère de (σ_{-i}, σ'_i) que sur le joueur i . Cela, implique que $c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) \leq d_r(1)$, comme les

coûts sont négatifs. Par conséquent

$$\begin{aligned} c_i(\sigma) - c_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i) &\geq c_i(\sigma) - d_r(1) \\ &\geq -d_r(1)/2 \\ &\geq \psi(\sigma)/4nm, \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités découlent des hypothèses. □

On peut directement appliquer ce théorème aux jeux de partage de marchés (décrits au chapitre 1).

Corollaire 4.6. *La dynamique ϵ -Nash converge depuis un état initial arbitraire en $O((n^2 + nm)\epsilon^{-1} \log(nmD))$ tours où $m = |\mathcal{R}|$, et $D = \max\{-d_r(1) : r \in \mathcal{R}\}$ est une borne supérieure sur la valeur absolue des délais.*

Démonstration. Les fonctions de délai des jeux de partage de marchés sont à sauts 2-bornés. □

4.2.2 Sur les jeux à coûts monotones

Une fonction est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante. Nous avons étendu le théorème 4.4 au cas où l'ensemble des ressources \mathcal{R} est partitionnable en deux ensembles \mathcal{R}^\uparrow qui contient les ressources à coûts croissants et \mathcal{R}^\downarrow qui contient les ressources à coûts décroissants.

Remarque 4.7. Si \mathcal{R}^\uparrow est vide, alors trouver un équilibre de Nash devient trivial. En effet, le profil σ^* sur lequel tous les joueurs sélectionnent la stratégie s qui minimise $\sum_{r \in s} d_r(n)$ est un NEP.

Théorème 4.8. *Pour tout $\alpha \geq 1$ et tout $\epsilon > 0$, dans un jeu de congestion à n joueur symétrique, à fonctions de coût négatives, monotone et à saut α -bornés, la dynamique ϵ -Nash converge depuis un état initial arbitraire en $O((\alpha n^2 + nm)\epsilon^{-1} \log(nmD))$ tours où $m = |\mathcal{R}|$, et $D = \max\{-d_r(t) : r \in \mathcal{R}, t \in [n]\}$ est une borne supérieure de la valeur absolue des coûts.*

Démonstration. La preuve repose sur un autre potentiel qui combine le potentiel original pour les ressources décroissantes et le potentiel de la preuve précédente pour les ressources décroissantes :

$$\psi(\sigma) = \sum_{r \in \mathcal{R}^\uparrow} \sum_{t=\#_r(\sigma)+1}^n -d_r(t) + \sum_{r \in \mathcal{R}^\downarrow} \sum_{t'=1}^{\#_r(\sigma)} d_r(t')$$

On définit également ψ' ainsi :

$$\psi(\sigma) = \sum_{r \in \mathcal{R}^\uparrow} \sum_{t=\#_r(\sigma)+1}^n -d_r(t) + \sum_{r \in \mathcal{R}^\downarrow \text{ et } \#_r(\sigma) \geq 1} \sum_{t'=1}^{\#_r(\sigma)} d_r(t')$$

Ce potentiel peut avoir une valeur négative. On doit donc (légèrement) modifier le lemme 4.5 pour s'adapter au fait que ψ' peut prendre une valeur négative.

Lemme 4.9. *Il existe un joueur j tel que*

$$-c_j(\sigma) \geq |\psi'(\sigma)|/n^2$$

Les arguments du théorème 4.4 s'appliquent et montrent que le potentiel décroît au moins d'une fraction $\frac{\epsilon}{\alpha m \cdot n^2}$ à chaque tour. Il convient de préciser que si le potentiel peut être négatif, il reste inférieur à nmD en valeur absolue. Ainsi on peut observer deux phases, une première durant laquelle le potentiel est positif et décroît en valeur absolue, et une seconde durant laquelle le potentiel est négatif et croît en valeur absolue. \square

Remarque 4.10. Nous n'avons pas pu étendre la convergence rapide pour les fonctions monotones positives. Le cas 2 ne fonctionne plus. En effet une ressource non utilisée qui a un délai élevé en valeur absolue n'est plus une ressource que le joueur aurait intérêt à utiliser pour faire décroître son coût.

4.2.3 Résumé des résultats sur la complexité des NEP approchés

Le tableau ci-dessous résume les résultats énoncés dans ce chapitre et le précédent sur la complexité du calcul d'un ϵ -NEP dans un jeu de congestion.

Conditions sur le jeu	Résultat
Symétrique+Positif+sauts bornés	ϵ -Nash dynamiques rapide [14]
Symétrique+Négatif+sauts bornés	ϵ -Nash dynamiques rapide [54]
Symétrique+Positif	PLS-complet [22]
Symétrique+sauts bornés	PLS-complet [54]

Le principal cas ouvert porte sur les jeux de congestion positifs à sauts bornés mais asymétriques. Ce cas n'est que partiellement traité :

- la dynamiques ϵ -Nash n'est pas rapide sur ces jeux [22]
- si les fonctions de coût sont des polynômes à coefficients positifs de degré borné par d , il existe un algorithme qui trouve un ϵ -Nash pour $\epsilon = d^{O(d)}$ [61]

4.2.4 Question : jeux à coûts sans contrainte de signe indépendants ?

On pose maintenant une question qui semble abordable.

On rappelle les résultats suivants :

- dans un jeu symétrique, sans contrainte de signe, à sauts bornés, trouver un ϵ -NEP est PLS-complet ;
- dans un jeu positif, symétrique, à sauts bornés, la dynamique ϵ -Nash gloutonne converge rapidement [14] ;
- dans un jeu négatif, symétrique, à sauts bornés, la dynamique ϵ -Nash gloutonne converge rapidement (théorème 4.4)
- dans un jeu à ressources indépendantes, la dynamique de Nash converge rapidement

On souhaiterait incorporer cette notion d'indépendance pour la convergence des dynamiques ϵ -Nash dans les jeux sans contrainte de signe.

On appelle fusion de jeu indépendante la fonction qui associe à deux jeux $\langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, \mathcal{S} \rangle_{i \in N}$ et $\langle N, \mathcal{R}', (c'_r)_{r \in \mathcal{R}'}, \mathcal{S}' \rangle_{i \in N}$ le troisième jeu suivant : $\langle N, \mathcal{R}'', (c''_r)_{r \in \mathcal{R}'}, \mathcal{S}'' \rangle_{i \in N}$ avec :

- $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$;
- les fonctions de coût ne changent pas ;
- pour tout joueur i , la stratégie $\sigma''_i \in \mathcal{S}''_i$ si et seulement si $\sigma''_i = \sigma_i \cup \sigma'_i$ avec $\sigma_i \in \mathcal{S}_i$ et $\sigma'_i \in \mathcal{S}'_i$.

La fusion de jeux indépendante consiste pour les joueurs à jouer à deux jeux différents et à additionner leurs gains.

Question La fusion indépendante d'un jeu symétrique positif à sauts bornés et d'un jeu négatif symétrique à saut borné produit-elle un jeu sur lequel la dynamique ϵ -Nash converge rapidement ?

Plus généralement, la convergence rapide des dynamiques ϵ -Nash est elle préservée par la fusion indépendante ?

Éléments de réponse Tout d'abord, on ne peut plus construire la réduction qui prouve le théorème 3.12.

De plus, si $\langle N, \mathcal{R}'', (d_r)_{r \in \mathcal{R}'}, (\mathcal{S}''_i)_{i \in N} \rangle$ est obtenu par fusion indépendante de $\langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, (\mathcal{S}_i)_{i \in N} \rangle$ et $\langle N, \mathcal{R}', (d_r)_{r \in \mathcal{R}'}, (\mathcal{S}'_i)_{i \in N} \rangle$, on peut montrer que l'on converge rapidement vers un profil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ avec $\sigma_i^* = \sigma_i \cup \sigma'_i$ tel que $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est un ϵ -Nash de $\langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, (\mathcal{S}_i)_{i \in N} \rangle$ et $(\sigma') = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$ est un ϵ -Nash de $\langle N, \mathcal{R}', (d_r)_{r \in \mathcal{R}'}, (\mathcal{S}'_i)_{i \in N} \rangle$.

Le problème est que cela ne garantit pas que σ^* soit un ϵ -Nash de $\langle N, \mathcal{R}'', (d_r)_{r \in \mathcal{R}'}, (\mathcal{S}''_i)_{i \in N} \rangle$ car la somme de coûts négatifs et positifs peut se compenser pour être très petite en valeur

absolue. Ainsi un mouvement qui n'est pas un ϵ -mouvement sur $\langle N, \mathcal{R}, (d_r)_{r \in \mathcal{R}}, (\mathcal{S}_i)_{i \in N} \rangle$ peut en être un sur $\langle N, \mathcal{R}'' , (d_r)_{r \in \mathcal{R}''}, (\mathcal{S}''_i)_{i \in N} \rangle$.

Chapitre 5

Dynamiques sur les jeux d'appariement

Ce chapitre présente des dynamiques sur les jeux d'appariement. Nous nous sommes intéressés en particulier à la vitesse de convergence de dynamiques sur des jeux d'appariement sur réseau social, sur lesquels les joueurs ont une information partielle sur le jeu. Les mises à jour des dynamiques considérées sont concurrentes, dépendantes uniquement du profil courant et ont parfois recours à la randomisation.

La section 5.1 exhibe l'impact de l'information partielle sur la vitesse de convergence de dynamiques de Nash concurrentes sur les jeux de suiveurs sur réseaux social. Sur ces jeux très simples, on constate déjà que la vision limitée est susceptible de ralentir considérablement ($\Omega(n)$ tours) des dynamiques pourtant extrêmement rapides sans limitation de vision. Nous proposons alors une extension de la dynamique que l'on nomme *avec diffusion* pour contrecarrer les effets de la vision limitée. Notre résultat de convergence rapide pour la dynamique avec diffusion nécessite cependant une hypothèse sur les valuations des liens : qu'elles soient déterminées à l'aide d'un nombre borné de catégories. On récapitule dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus sur le nombre de tours nécessaire aux dynamiques étudiées avant d'atteindre un profil stable sur les jeux de suiveurs sur réseaux social :

	Nash	avec diffusion
sans contrainte	$\Omega(n)$	$\Omega(n)$
k catégories	$\Omega(n)$	$O(\log(n).k)$

La section 5.2 présente les *dynamiques d'amélioration par paire* (AP-dynamiques) qui convergent vers un EP sur les jeux de couplage à valuation symétrique. Ces dynamiques sont similaires aux dynamiques étudiées dans les articles suivants [25, 62]. Hofer [27] a exhibé des jeux sur réseau social pour lesquels les AP-dynamiques nécessitent $2^{\Omega(n)} \ll \text{AP-mouvements} \gg$ (avec n le nombre de joueurs) pour atteindre un EP. Notre objectif est de déterminer des conditions pour que des dynamiques concurrentes atteignent un EP en

$O(\log(n))$ tours. Pour comprendre ce qui permet à une dynamique concurrente de converger vite, nous étudions d'abord la vitesse de convergence de dynamiques simples sur les jeux de couplages à information complète. Nous montrons en nous appuyant sur un *potentiel ordinal* que si on limite le nombre de valeurs que peuvent prendre les valuations, les AP-dynamiques atteignent un EP en $O(n)$ AP-mouvements. On peut alors espérer que les AP-dynamiques concurrentes ont une vitesse de convergence plus rapide (en terme de nombre de tours) si beaucoup d'AP-mouvements sont effectués à chaque tour sur ces dynamiques. Nous proposons alors les AP-dynamiques *gloutonnes* sur lesquelles à chaque tour, si une paire de joueur peut améliorer son utilité, au moins un des deux joueurs effectue un mouvement. Nous montrons que les AP-dynamiques *gloutonnes* atteignent un EP en $O(\log(n))$ tours dans les jeux de couplage à information complète.

Cependant dans les jeux de couplage sur réseau social les AP-dynamiques même concurrentes nécessitent $\Omega(n)$ tours pour atteindre un EP. Nous pensons avoir cerné les deux structures qui ralentissent la convergence que nous nommons « chemins concaténés » et « goulots d'étranglements ». En effet, lorsque l'on neutralise ces deux structures on retrouve une convergence en $O(\log(n))$. Pour neutraliser les goulots d'étranglements, nous restreignons la classe de jeux étudiés ; si le graphe de réseau social a un degré borné, il ne peut plus y avoir de goulot d'étranglement. Pour neutraliser les chemins concaténés, nous proposons d'étendre les dynamiques en ajoutant des « mouvements d'exploration ». Nous montrons en appliquant un de nos résultats sur les dynamiques gloutonnes pour les jeux à information complète que la *dynamique de sélection aléatoire avec exploration* atteint un EP $O(\log(n).Poly(d))$ tours avec d le degré maximum d'un sommet sur le réseau social. On récapitule dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus sur le nombre de tours nécessaire aux dynamiques étudiées avant d'atteindre un profil stable sur les jeux de couplage sur réseaux social :

	gloutonnes	sélection aléatoire avec exploration
Information complète	$\Omega(k), O(\log(n).2^k)$	/
sur réseau social	$\Omega(n)$	$\Omega(n)$
sur réseau de degré borné par d	$\Omega(n)$	$O(\log(n).d^{2k})$

avec k le nombre de valeurs différentes que peuvent prendre les valuations des couples.

Une partie des résultats de ce chapitre a été présentée à la conférence ROADEF'13 [63].

5.1 Dynamiques sur les jeux de suiveurs

On s'intéresse dans cette section aux jeux de suiveurs (définis au chapitre 1 section 1.3).

5.1.1 Dynamique de Nash concurrente

Un changement de stratégie d'un joueur i depuis un profil σ vers (σ_{-i}, σ'_i) est un *mouvement d'amélioration* si $u_i(\sigma) < u_i(\sigma_{-i}, \sigma'_i)$. Dans un jeu de suiveurs un mouvement d'amélioration d'un joueur i depuis un profil σ peut être la combinaison de deux actions de base :

- suivre de nouveaux joueurs $j \notin \sigma_i$ tels que $v(j, i) > 0$;
- arrêter de suivre des joueurs j' dans σ_i tels que $v(j', i) < 0$.

Le *mouvement d'amélioration optimal* d'un joueur i depuis un profil σ , consiste à suivre tous les joueurs j tels que $v(j, i) > 0$ et ne plus suivre les joueurs j' tels que $v(j', i) < 0$.

On considère pour ces jeux la *dynamique de Nash concurrente*. A chaque tour de cette dynamique, tous les joueurs effectuent leur mouvement d'amélioration optimal.

La dynamique de Nash concurrente atteint un NEP en un tour. Le temps de convergence des dynamiques de Nash concurrentes est plus intéressant à analyser sur les jeux de suiveurs sur réseau social.

Remarque 5.1. La dynamique de Nash concurrente ne converge pas en général vers un NEP sur les jeux de congestion. Considérez par exemple le jeu de congestion symétrique suivant :

- deux joueurs ;
- deux ressources r_1 et r_2 avec la même fonction de délai d telle que $d(1) = 0$ et $d(2) = 1$;
- deux stratégies, $s_1 = \{r_1\}$ et $s_2 = \{r_2\}$;

La dynamique de Nash concurrente cycle sur jeu si le profil initial place les deux joueurs sur la même stratégie. En effet, supposons que les deux joueurs utilisent la stratégie s_1 sur le profil s_1 . Ils ont tous deux intérêt à choisir la stratégie s_2 et comme la dynamique est concurrente, au tour suivant ils seront tous les deux sur s_2 . De la même manière, ils vont au troisième tour tous les deux retourner sur s_1 . Ainsi la dynamique oscille sans atteindre le NEP.

Théorème 5.2. *Pour tout n , il existe un jeu de suiveurs à n joueurs sur un réseau social tel que la dynamique de Nash concurrente nécessite $\Omega(n)$ tours pour atteindre un NEP.*

Démonstration. Considérons le jeu illustré par la figure 5.1. Le réseau social consiste en une ligne A, X_1, \dots, X_n . Pour tout i ; les liens (A, X_i) (en rouge sur la figure) ont une valuation égale à 1. Tout autre lien a une valuation égale à -1.

Dans le profil initial, aucun lien n'est formé.

Au premier tour, X_1 et X_2 peuvent effectuer un mouvement d'amélioration en suivant A . Lorsqu'un lien (A, X_t) est formé, X_{t+1} voit le joueur A . Ainsi, à chaque tour de la dynamique, A gagne un unique nouveau suiveur. La dynamique nécessite donc $n - 1$ tours pour que tous les joueurs $X_1 \dots X_n$ suivent le joueur A . □

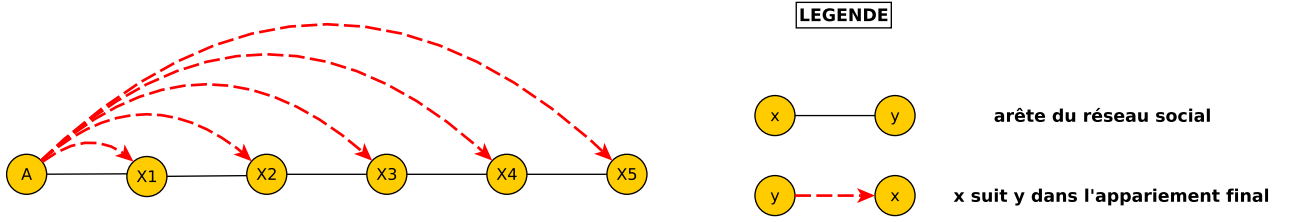


FIGURE 5.1: Exemple de convergence lente dans un jeu de suiveurs sur réseau social

5.1.2 Dynamiques avec diffusion

Sur un réseau tel que Twitter, les utilisateurs ne voient pas seulement les messages produits directement par les utilisateurs qu'ils suivent. La force de ces réseaux est leur pouvoir de diffusion ; les utilisateurs « retwittent » des messages. Quand un utilisateur reçoit un message retwitté par un des utilisateurs qu'il suit, il peut décider de suivre l'émetteur initial du message.

On modélise le retwite en étendant les stratégies ; elles contiennent deux ensemble de joueurs, un ensemble des joueurs suivis, et un ensemble de joueurs « retwittés ». Ce second ensemble de joueurs ne modifie pas l'utilité, cependant, si a « retwitte » b , les suiveurs de a voient alors b .

La preuve de convergence lente du théorème 5.2 repose sur un chemin de longueur linéaire en n . On va montrer comment la diffusion peut permettre de parcourir rapidement ces longs chemins.

Remarque 5.3. Les joueurs sont retwittés dans ce modèle car les messages ne sont pas représentés.

Une *stratégie avec diffusion* s_i d'un joueur i depuis un profil courant σ est un couple d'ensembles de joueurs (s_i^{suit}, s_i^{dif}) tel que :

- l'ensemble s_i^{suit} est l'ensemble des joueurs suivis par i ;
- l'ensemble s_i^{dif} est l'ensemble des joueurs retwittés par i ;
- pour inclure un joueur j dans ces ensembles i doit voir j sur σ . La vision introduite au chapitre 1 est étendue selon la définition 5.4 ;
- l'utilité d'un joueur sur un profil de stratégies $\tilde{\sigma}$ avec diffusion est défini comme suit : $u_i(\tilde{\sigma}) = \sum_{(j,i) \in C(\tilde{\sigma})} v(j,i)$ avec $C(\tilde{\sigma})$ (et par conséquent l'utilité des joueurs) est calculé à partir de cet ensemble de joueurs ; c'est-à-dire que $(j,i) \in C(\tilde{\sigma}) \iff j \in \tilde{\sigma}_i^{suit}$;

Definition 5.4 (Vision sur un profil avec diffusion). Sur un jeu de suiveurs sur réseau social $\langle N, v, E \rangle$ un joueur i voit un joueur j sur un profil de stratégies avec diffusion σ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- il existe un chemin de longueur 2 de j vers i dans le graphe $\langle N, E \cup C(\sigma) \rangle$;
- il existe un joueur j' tel que $(j', i) \in E \cup C(\sigma)$ et $j \in \sigma_{j'}^{dif}$.

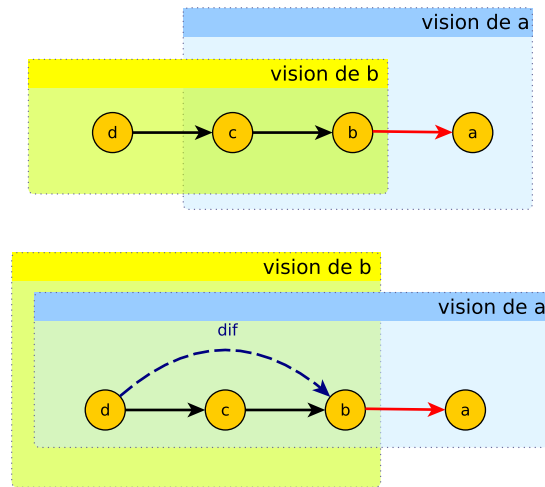


FIGURE 5.2: Exemple : vision avec diffusion

Exemple 5.1. La figure 5.2 présente un jeu dont les joueurs sont a, b, c et d sur deux profils de stratégies différents ;

- sur le premier profil, $\sigma_a^{suit} = \{b\}$ et $\sigma_a^{dif} = \emptyset$. Pour tout autre joueur x , $\sigma_x^{suit} = \sigma_x^{dif} = \emptyset$. Le joueur a voit donc b et c car il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à 2 de c à a et de b à a . Cependant a ne voit pas d . Le joueur b voit c et d .
- sur le second profil, $\sigma_b^{dif} = \{d\}$. Ainsi, a voit d via b .

On propose la *dynamique de Nash concurrente avec diffusion* sur un jeu de suiveur sur réseau social. On note $\sigma(t)$ le profil atteint au t^{ieme} tour. La mise à jour du profil est effectuée comme suit :

1. pour tout joueur i , le joueur $j \in \sigma_i^{dif}(t+1)$ si i voit j sur $\sigma(t)$;
2. pour tout joueur i , le joueur $j \in \sigma_i^{suit}(t+1)$ si i voit j sur $\sigma(t)$ et que $v(j, i) > 0$.

On dit qu'un profil d'un jeu d'appariement est *stable pour une dynamique* s'il existe un tour t à partir duquel $C(\sigma_t)$ n'est plus modifié.

Remarque sur la dynamique avec diffusion .

- Avec la diffusion , quel que soit le profil initial, le nombre de tours nécessaire pour qu'un joueur j voit un autre joueur i est borné supérieurement par la taille du plus court chemin de i vers j ;
- S'il existe un chemin dans le réseau social de i vers j et que $v(i, j) > 0$, alors j suit i dans le profil stable. En effet, la diffusion permet à j de connaître i par ce chemin. La dynamique se stabilise donc sur le même NEP que si l'information était complète si tous les joueurs sont dans une même composante fortement connexe.

Une valuation à base de catégories. Nous proposons d'exprimer les valuations en fonction de catégories. L'utilisation du terme catégorie se rapproche de celle faite dans un article de Eppstein et al [64] qui s'intéresse au phénomène « petit monde » dans les réseaux sociaux. Dans cet article, les catégories désignent des caractéristiques des agents. Ils décrivent des conditions pour qu'un algorithme de routage basé sur ces catégories permette de retrouver efficacement un agent dans le réseau. On utilise ici le terme catégorie pour désigner les sujets des « tweets » envoyés.

Soit Cat un ensemble de catégories. Chaque joueur i est caractérisé par un ensemble de catégories d'entrée $in(i) \subseteq Cat$ qui représentent les sujets qui l'intéressent, et par un ensemble de catégories de sortie $out(i) \subseteq Cat$ qui représentent les sujets sur lesquels il « twitte ».

On suppose que pour tout joueur i , $out(i) \neq \emptyset$ et $out(i) \subseteq in(i)$. Cette restriction signifie que tous les joueurs twittent et le font sur des sujet qui les intéressent.

Definition 5.5. Un jeu de *suiveurs avec des catégories* sur réseau social est défini par un 5-uplet $\langle N, Cat, (in(i))_{i \in N}, (out(i))_{i \in N}, E \rangle$ tel que $\langle N, v, E \rangle$ est un jeu de suiveurs sur réseau social avec v une valuation définie comme suit :

$$v(j, i) = \begin{cases} 1 & \text{si il existe une catégorie } c \in in(i) \cap out(j) \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 5.6. On peut représenter tout jeu de suiveurs à valuation dans $\{-1, 1\}$ par un jeu de suiveurs avec catégories de la manière suivante : pour tout couple (i, j) si $v(i, j) = 1$ on introduit une catégorie $c_{i,j}$ telle que $c_{i,j} \in out(i)$ et $c_{i,j} \in in(j)$.

La dynamique avec diffusion peut nécessiter $\Omega(n)$ tours dans un jeu avec catégories. Un exemple est obtenu à partir de celui de la preuve du théorème 5.2. On le modifie pour que ce soit un jeu avec catégories avec la méthode de la remarque 5.6. Cette méthode construit un jeu avec n catégories.

Le théorème suivant exprime que même si le nombre de catégories est borné par une constante, la dynamique de Nash concurrente ne converge pas rapidement ($\Omega(n)$ tours).

Théorème 5.7. *Pour tout n , il existe un jeu de suiveurs à n joueurs avec 6 catégories sur un réseau social tel que la dynamique de Nash concurrente nécessite $\Omega(n)$ tours avant d'atteindre un NEP.*

Démonstration. On construit un jeu et un réseau social dans lequel il faut former n liens pour atteindre un NEP et dans lequel un seul lien est formé à chaque tour. Il faut alors n tours pour atteindre le NEP.

Le jeu est illustré figure 5.3.

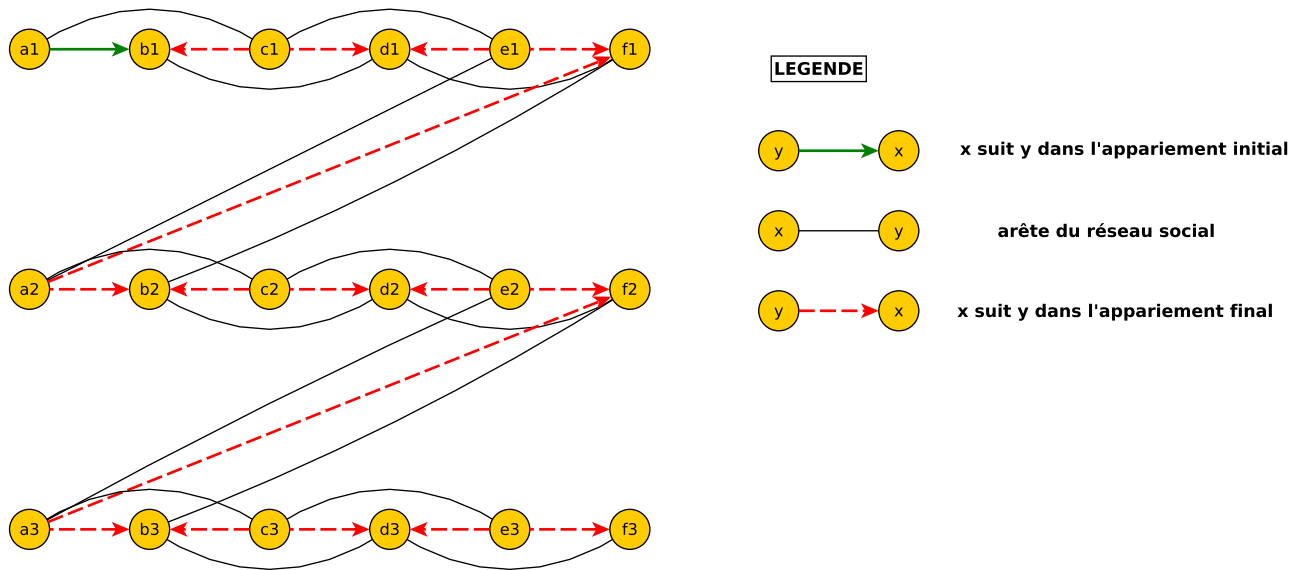


FIGURE 5.3: Jeu avec une dynamique de Nash concurrente lente

L'ensemble des catégories est $\{1, \dots, 6\}$. Dans ce jeu, il y a 6 types de joueurs notés a, b, c, d, e et f . Deux joueurs du même type ont les mêmes catégories d'entrée et de sortie ; c'est-à-dire que les catégories de $a1$ et ax sont identiques pour tout x .

Les catégories d'entrée et de sortie des joueurs sont décrites dans le tableau ci-dessous.

	a	b	c	d	e	f
catégories d'entrée	1	1 ; 2 ; 3	3	3 ; 4 ; 5	5	1 : 5 : 6
catégorie de sortie	1	2	3	4	5	6

L'assignation des catégories stipule que :

- $v(a, a) = 1$, pour tout x de type différent de a , $v(x, a) = -1$.
- $v(a, b) = v(b, b) = v(c, b) = 1$, pour tout x dont le type n'est pas dans $\{a, b, c\}$, $v(x, b) = -1$
- $v(c, c) = 1$, pour tout x de type différent de c , $v(x, c) = -1$.
- $v(c, d) = v(d, d) = v(e, d) = 1$, pour tout x dont le type n'est pas dans $\{c, d, e\}$, $v(x, d) = -1$
- $v(e, e) = 1$, pour tout x de type différent de e , $v(x, e) = -1$.
- $v(f, e) = v(f, f) = v(a, f) = 1$, pour tout x dont le type n'est pas dans $\{e, f, a\}$, $v(x, f) = -1$

Cela implique que les joueurs ont intérêt à suivre des joueurs du même type qu'eux et donc à se suivre.

Profil initial : Dans le profil initial, seul b_1 suit a_1 . Le joueur b_1 dispose du seul mouvement d'amélioration depuis ce profil qui consiste à suivre c_1 .

Mise à jour : A chaque fois qu'un lien est formé, il donne la vision sur un nouveau lien ce qui permet un mouvement d'amélioration.

- lorsque (a_i, b_i) est formé, b_i voit c_i ;
- lorsque (c_i, b_i) est formé, d_i voit c_i ;
- lorsque (c_i, d_i) est formé, d_i voit e_i ;
- lorsque (e_i, d_i) est formé, f_i voit e_i ;
- lorsque (e_i, f_i) est formé, f_i voit a_{i+1} ;
- lorsque (a_{i+1}, f_i) est formé, b_{i+1} voit a_{i+1} ;

A chaque tour de la dynamique une seul mouvement d'amélioration est disponible. Il faut donc $\Omega(n)$ tours pour former les n liens du NEP local (dessiné en rouge). \square

On exprime maintenant un résultat de convergence rapide.

Théorème 5.8. *Dans un jeu de suiveurs avec catégories sur réseau social $\langle N, Cat, in(i), out(i), E \rangle$, tel que $|Cat| = k$, la dynamique de Nash avec diffusion est stabilisée en $O(\log(n).k)$ tours.*

Avant de donner la preuve, on donne l'intuition sur une dynamique plus simple (sans diffusion).

On considère la *dynamique de suivi total (puis filtrage)*. On note $\sigma(t)$ le profil atteint au t^{ieme} tour. La mise à jour du profil est effectuée comme suit :

1. (suivi total) pour $t = 0$ à $\log(n)$, pour tout joueur i , si i voit j sur $\sigma(t)$ alors $j \in \sigma_i(t+1)$;
2. (filtrage) au tour $t = \log(n)$, si i voit j sur $\sigma(t)$ et que $v(j, i) > 0$ alors $j \in \sigma_i(t+1)$, sinon $j \notin \sigma_i(t+1)$.

La différence entre la dynamique de suivi total (puis filtrage) et la dynamique avec diffusion est que sur la première, les joueurs n'optimisent pas leur utilité à chaque tour.

Théorème 5.9. *Pour tout jeu de suiveurs à n joueurs sur réseau social $\langle N, v, E \rangle$, la dynamique de suivi total (puis filtrage) atteint un profil stable au tour $2\log(n)$.*

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que pour tout i , $\sigma_i(0) = \emptyset$. En effet, si un lien est formé au départ, il est soit supprimé au premier tour si il a une valuation négative, soit toujours conservé, ce qui fait qu'il est équivalent à un lien du réseau social. On note $G(t)$ le graphe $\langle N, E \cup C(\sigma(t)) \rangle$.

Tout d'abord on remarque que si à un moment, un joueur i voit un joueur j , c'est qu'il existe un chemin de i vers j dans $G(0)$. En effet les liens formés sont ajoutés entre deux joueurs pour lesquels il existe déjà un chemin. Il ne modifient donc pas la propriété d'accessibilité.

La preuve consiste à remarquer que la taille du plus court chemin entre deux joueurs est divisé par 2 à chaque tour. En effet, supposons qu'au tour t , le plus court chemin de i vers j soit $i = X_1, X_2 \dots X_m = j$ (de longueur m). Pour tout $1 \leq p \leq m$, X_{p+2} voit X_p puisqu'il existe un chemin de longueur 2. Donc au tour $t+1$, pour tout p , $X_p \in \sigma_{X_{p+2}}$ et le lien

(X_p, X_{p+2}) est formé. Au tour $t + 1$ il y a donc de i vers j le chemin suivant $X_1, X_3 \dots X_m$ qui ne contient que les X_p d'indice impair. La taille de ce chemin est $\lceil \frac{m}{2} \rceil$.

Comme la longueur du plus court chemin entre 2 joueurs initialement est bornée supérieurement par n , en $\log(n)$ les chemins entre tous les joueurs sont de longueur 1 (ou ∞). Les joueurs voient donc tous les joueurs qui sont dans la même composante connexe. Ils peuvent alors sélectionner uniquement ceux dont la valuation est positive ce qui forme un profil stable. \square

Démonstration du théorème 5.8. La preuve est similaire. On utilise le lemme suivant pour montrer que la taille du plus court chemin entre deux joueurs, si elle est supérieur à $4k$, elle diminue d'un facteur 2 tous les $4k$.

Lemme 5.10. *Dans un jeu de suiveurs avec catégories sur réseau social $\langle N, Cat, in(i), out(i), E \rangle$, tel que $|Cat| = k$, si la taille du plus court chemin de A vers B est égale à $4k$, après $4k$ tours le plus court chemin de A vers B est de taille inférieure à $2k$.*

Remarque 5.11. La diffusion n'est pas comptabilisé comme une arête d'un chemin, mais permet de rapidement construire des liens de suiveurs.

Application du lemme Soit $X_1, X_2 \dots X_{D-1}, X_D$ (avec $X_1 = A$ et $X_D = B$) le plus court chemin de A vers B . Remarquez tout d'abord qu'une fois qu'un lien est créé il ne sera pas supprimé. Par conséquent, la longueur du plus court chemin de A vers B ne fait que décroître.

On décompose ce chemin en sous-chemins de longueurs $4k$. En utilisant le lemme 5.10, on obtient qu'après $4k$ tours de la dynamique, le chemin le plus court de X_m vers X_{m+4k} est de taille au plus $2k$. Le chemin le plus court de X_1 vers X_D est de taille inférieure à la concaténation des chemins les plus courts entre les X_m et X_{m+4k} . La longueur de chacun de ces segments est au moins divisé par deux en $4k$ tours. C'est donc aussi le cas du plus court chemin entre A et B .

Le plus court chemin entre deux joueurs est au départ de taille bornée par n . Comme la taille du plus court chemin entre deux joueurs est divisée par 2 tout les $4k$ tours jusqu'à être de longueur inférieure à $2k$. En $O(\log(n).k)$ tours le plus court chemin de A vers B est de taille inférieure à $2k$ et la diffusion permet alors à B de voir A en $2k$ tours. \square

Pour montrer le lemme 5.10, on commence par remarquer une borne sur la taille du plus court chemin entre deux joueurs dans un profil stable de la dynamique de Nash concurrente avec diffusion .

Lemme 5.12. *Soit un jeu de suiveurs avec catégories sur réseau social $\langle N, Cat, in(i), out(i), E \rangle$, avec $|Cat| = k$. Soit σ^* un profil stable pour la dynamique de*



FIGURE 5.4: AP-mouvement

Nash concurrente avec diffusion. Soit deux joueurs i et j tels qu'il existe un chemin de i vers j . Le plus court chemin entre i et j dans $E \cup C(\sigma^*)$ est de longueur inférieure à $2k$.

Démonstration. Supposons qu'il existe A et B tels que $X_1, X_2 \dots X_{D-1}, X_D$ (avec $X_1 = A$ et $X_D = B$) soit le plus court chemin entre A et B de longueur $D > 2k$. Puisqu'il n'y a que k catégories différentes, il existe au moins trois joueurs X_a, X_b, X_c avec $a < b < c$ qui ont une catégorie de sortie en commun. Si X_c voit X_a , X_c devrait suivre X_a . Or il y a un chemin de X_c à X_a donc si la dynamique était stabilisée X_c devrait suivre X_a et le plus court chemin ne passerait pas par X_b puisqu'il y aurait un lien directe de X_a vers X_c . \square

Démonstration du lemme 5.10. On note $A = X_1 \dots X_{4k} = B$ le plus court chemin entre A et B de longueur $4k - 1$. Au bout de $4k$ tours, pour tout $a > b$, X_a voit un X_b (au moins par la diffusion sur le chemin $X_b \dots X_a$). On peut alors appliquer le même raisonnement que pour le lemme 5.12 et établir qu'au bout de $4k$ tours, la longueur du plus court chemin entre A et B est de longueur inférieure à $2k$. \square

5.2 Dynamiques sur les jeux de couplage

On s'intéresse dans cette section à des dynamiques sur les jeux de couplage à valuation symétrique (définis au chapitre 1 section 1.3).

5.2.1 Dynamiques sur les jeux de couplage à information complète

Un changement de stratégies d'une paire de joueurs est un *mouvement d'Amélioration par Paire (AP-mouvement)* sur un profil σ si les deux joueurs améliorent strictement leur utilité en formant un couple ensemble; c'est-à-dire que depuis un profil σ , les joueurs i et j ont un AP-mouvement que l'on désigne par le couple (i, j) si $u_i(\sigma_{-\{i,j\}}, \sigma'_i, \sigma'_j) > u_i(\sigma)$ et $u_j(\sigma_{-\{i,j\}}, \sigma'_i, \sigma'_j) > u_j(\sigma)$ avec $\sigma'_i = j$ et $\sigma'_j = i$.

Un AP-mouvement peut détruire deux couples dont la valuation est inférieure à celle du couple formé. La figure 5.4 présente une situation dans laquelle les joueurs 2 et 3 peuvent effectuer l'AP-mouvement en $(2, 3)$, ce qui détruirait les couples $(1, 2)$ et $(3, 4)$.

On définit pour un profil σ , l'ensemble $AP(\sigma)$ comme l'ensemble des couples qui sont des AP-mouvements sur le profil σ .

La classe des *dynamiques d'amélioration par paire* (AP-dynamiques) est constituée de dynamiques pour lesquelles les mises à jour du profil de stratégies résultent d'AP-mouvements par rapport au profil du tour précédent.

Remarquez qu'un EP correspond par définition à un profil sur lequel il n'y a aucun AP-mouvement. Les EPs sont donc des point fixes des AP-dynamiques. Le théorème suivant stipule que celles-ci convergent dès lors que la valuation est symétrique.

Théorème 5.13. *Dans un jeu de couplage à valuation symétrique, les AP-dynamiques convergent vers un EP.*

Démonstration. On note $Seuls(\sigma)$ l'ensemble des joueurs qui ne forme pas de couple sur σ . La preuve consiste à montrer que la fonction Φ définie ci-dessous est une fonction de *potentiel ordinal pour les AP-dynamiques* ; c'est-à-dire qu'à chaque AP-mouvement, cette fonction croît strictement.

$$\Phi(\sigma) = \sum_{(i,j) \in C(\sigma)} 2^{v(i,j)} + |Seuls(\sigma)| \quad (5.1)$$

Sans perte de généralité, on suppose que les valuations des couples sont des entiers positifs. Sans cette hypothèse, la preuve est similaire, mais on remplace dans le potentiel la valuation par le rang de la valuation du couple formé par le joueur si on ordonnait les valuations selon un ordre croissant.

Cette fonction de potentiel est inspirée du « potentiel lexicographique » de [25].

Soit un AP-mouvement (i, j) depuis le profil σ . On note σ' le profil obtenu par ce mouvement depuis σ . On suppose sans perte de généralité que sur σ , les joueurs i et j forment les couples (i, i') et (j, j') .

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma') - \Phi(\sigma) &= 2^{v(i,j)} + 2^{v(j,i)} + 2 - 2^{v(i,i')} - 2^{v(i',i)} - 2^{v(j,j')} - 2^{v(j',j)} \\ &= 2(2^{v(i,j)} + 1 - 2^{v(i,i')} - 2^{v(j,j')} + 1) \end{aligned}$$

On la première équation est obtenue en utilisant le fait que i' et j' ne forment plus de couple avec d'autre joueurs après le mouvement. Ils sont alors dans $Solo(\sigma)$, ce qui ajoute donc 2 au potentiel sur σ' . La troisième équation est obtenue en utilisant la symétrie de la valuation.

Posons que $v(i, i') \geq v(j, j')$. On a alors

$$\Phi(\sigma') - \Phi(\sigma) \geq 2(2^{v(i,j)} - 2 \cdot 2^{v(i,i')} + 1)$$

Les valuations étant entières et $v(i, j) > v(i, i')$, on alors $v(i, j) > v(i, i') - 1$. D'où :

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma') - \Phi(\sigma) &\geq 2(2^{v(i,j)} - 2 \cdot 2^{v(i,j)-1}) \\ &> 2 \end{aligned}$$

Le potentiel augmente strictement d'au moins 2 sur un AP-mouvement. □

Ce théorème permet également d'extraire une borne supérieure sur le nombre d'AP-mouvements nécessaire avant d'atteindre un EP. Si les valuations des couples sont dans $\{0 \dots k\}$, on peut borner linéairement en n (mais exponentiellement en k) le nombre maximum d'AP-mouvements avant d'atteindre un EP. En effet, chaque AP-mouvement incrémente le potentiel Φ d'au moins 2. De plus la valeur maximale de Φ est $n \cdot 2^k$. Cette valeur est atteinte sur un couplage parfait constitué de couples à valuation égale à k . Le nombre d'AP-mouvements avant d'atteindre un EP est donc borné supérieurement par $\frac{2^k \cdot n}{2}$.

Hofer [27] a exhibé des séquences d'AP-mouvements de longueur $2^{\Omega(n)}$ avec des valuations sont dans $\{0 \dots \Omega(n)\}$.

AP-dynamiques gloutonnes. Une AP-dynamique concurrente sélectionne à chaque tour depuis un profil σ une liste de mouvements dans $AP(\sigma)$, tel qu'un joueur dispose d'au plus un mouvement dans cette liste. Le profil au tour suivant est déterminé en effectuant ces mouvements ; c'est-à-dire que depuis un profil $\sigma(t)$, le profil de stratégies au tour suivant $\sigma(t+1)$ est défini comme suit :

- pour tout (i, j) qui fait partie de la liste d'AP-mouvements sélectionnés par la dynamique, $\sigma_i(t+1) = j$ et $\sigma_j(t+1) = i$;
- pour tout i qui ne fait pas partie d'un mouvement de la liste $\sigma_i(t+1) = \sigma_i(t)$.

On propose comme exemple l'AP-dynamique GLOUTON décrit figure 5.5.

On repose alors sur le principe suivant : si plusieurs AP-mouvements sont effectués en un tours, le potentiel décroît plus vite que si ces AP-mouvements étaient effectués en plusieurs tours. On cherche alors à déterminer des propriétés sur les AP-dynamiques concurrentes qui permettent d'établir des garanties en terme de nombre de mouvements par tours effectués.

Definition 5.14 (Dynamiques gloutonnes). On dit qu'une AP-dynamique est *gloutonne* si pour tout profil σ , pour tout AP-mouvement d'une paire de joueurs $(i, j) \in AP(\sigma)$, la dynamique sur un profil σ sélectionne un AP-mouvement pour le joueur i ou pour le joueur j .

FIGURE 5.5: Un tour de la dynamique GLOUTON depuis un profil $\sigma(t)$

1. stocker dans E l'ensemble $AP(\sigma(t))$;
2. initier la liste d'AP-mouvements à effectuer $L = \emptyset$;
3. Tant que l'ensemble E n'est pas vide
 - (a) ajouter un mouvement (i, j) de E à L ;
 - (b) supprimer de E les mouvements impliquant les joueurs i ou j ;
4. effectuer les AP-mouvements dans L ;

FIGURE 5.6: Un tour de la dynamique de sélection aléatoire depuis un profil σ

1. chaque joueur choisit un autre joueur choisi aléatoirement uniformément ;
2. si deux joueurs i et j se choisissent mutuellement et que $(i, j) \in AP(\sigma)$, le mouvement (i, j) est sélectionné dans la liste de mouvement à effectuer.

Une AP-dynamique (probabiliste) est (p, τ) -gloutonne pour $p \in]0, 1]$ et $t \in \mathbb{N}^*$ si pour tout $\sigma(t)$ et pour tout AP-mouvement $(i, j) \in AP(\sigma(t))$, la dynamique sélectionne un AP-mouvement pour i ou pour j durant les τ prochains tours avec probabilité supérieure à p ; c'est-à-dire pour tout $\sigma(t)$ si $\sigma(t+1) \dots \sigma(t+\tau)$ sont les profils obtenus en τ tours par la dynamique, on a pour tout AP-mouvement (i, j) sur $\sigma(t)$, qu'avec probabilité supérieure à p , il existe un $t' \in [t, t+\tau]$ tel que la dynamique sélectionne un AP-mouvement sur $\sigma(t')$ pour i ou pour j .

Si une dynamique est gloutonne, alors l'ensemble des AP-mouvements sélectionnés sur un profil σ est un *couplage maximal* dans $AP(\sigma)$.

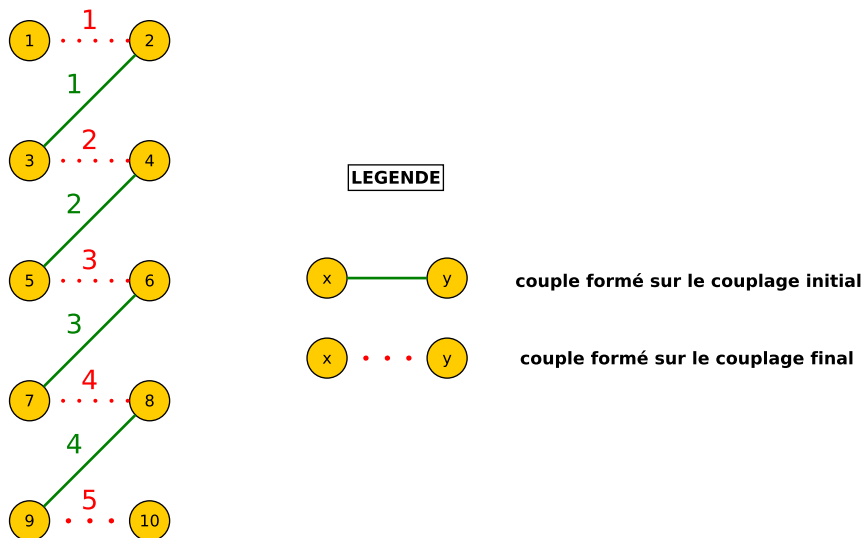
Par exemple, la dynamique GLOUTON de la figure 5.5 est clairement gloutonne.

La *dynamique de sélection aléatoire* décrite par la figure 5.6 est $(\frac{1}{(n-1)^2}, 1)$ -gloutonne. En effet chaque paire de joueurs a une probabilité de se choisir mutuellement égale à $\frac{1}{(n-1)^2}$.

Objectif : on va montrer que les AP-dynamiques gloutonnes et (p, t) -gloutonnes convergent en $O(\log(n))$ tours dans les jeux de couplages à information complète (théorèmes 5.13 et 5.17). On applique le théorème 5.17 pour obtenir le résultat de convergence rapide sur les jeux de couplage sur réseau social (théorème 5.28).

Une borne inférieure simple. On note que les AP-dynamiques dynamiques même concurrentes convergent en $\Omega(k)$ tours si $k < O(n)$.

FIGURE 5.7: jeu en échelle



Dans le jeu décrit par la figure 5.7, toute AP-dynamique nécessite 5 tours avant d'atteindre un EP. Dans le profil initial, le seul AP mouvement est (9, 10). Les autres mouvements ne sont pas des AP-mouvements ; par exemple (7, 9) n'est pas un AP-mouvement car 8 n'améliorerait pas son utilité. Cependant une fois que 9 et 10 ont formé un couple, 8 est seul. Les joueurs 7 et 8 peuvent alors former un couple, ce qui libère le joueur 6... On peut généraliser ce graphe « en échelle » pour n'importe quel k .

Convergence rapide des dynamiques gloutonnes. On montre maintenant que les AP-dynamiques gloutonnes atteignent des EP dans des jeux de couplage à valuation dans $\{0 \dots k\}$ en $O(\log(n))$ tours. La borne exhibée est exponentielle en k . On ne pense pas que cette borne soit atteinte.

Une *exécution d'une dynamique* est une séquence de profil $\sigma(1) \dots \sigma(t)$ produite par la cette dynamique.

On définit le potentiel Ψ respectivement à une exécution d'une AP-dynamique : $\Psi(\sigma) = \Phi(\sigma^*) - \Phi(\sigma)$ où σ^* est l'EP atteint par l'exécution de la dynamique et Φ est la fonction de potentiel introduite dans la preuve du théorème 5.13.

On énonce le lemme principal permettant d'établir la convergence rapide des dynamiques gloutonnes.

Lemme 5.15. *Dans un jeu de couplage à valuation dans $\{0 \dots k\}$, pour tout profil σ , la taille du couplage maximum dans $AP(\sigma)$ est supérieure à $\frac{\Psi(\sigma)}{2^{2k+1}}$.*

Application du lemme 5.15

Théorème 5.16. *Les AP-dynamiques gloutonnes, sur un jeu de couplage à valuation dans $\{0\dots k\}$, convergent vers un EP en $O(\log(n+k).2^{2k})$ tours avec n le nombre de joueurs.*

Démonstration. On montre que Ψ décroît d'un facteur $(1 - \frac{1}{2^{2k}})$ à chaque tour. On note que Ψ décroît de deux unités pour chaque AP-mouvement effectué (car Φ augmente de deux unités pour chaque mouvement effectué). On montre alors que le nombre d'AP-mouvements effectués à chaque tour est supérieur à $\frac{\Psi(\sigma)}{2.2^{2k+1}}$. La borne du théorème est obtenue en remarquant que pour les mêmes raisons que Φ , $\Psi(\sigma) < n.2^k$ pour tout σ .

Comme la dynamique est gloutonne, l'ensemble des mouvements effectués est un couplage maximal dans $AP(\sigma)$. On rappelle que la taille d'un couplage maximal est supérieure à la moitié de la taille d'un couplage maximum.

Le lemme 5.15 stipule que le couplage maximum est de taille supérieure à $\frac{\Psi(\sigma)}{2.2^{2k}}$.

On obtient donc que le nombre d'AP-mouvements effectués est supérieur à $\frac{\Psi(\sigma)}{2.2^{2k+1}}$. \square

Nous étendons ce résultat de convergence rapide aux dynamiques (p, τ) -gloutonnes.

Théorème 5.17. *Les AP-dynamiques (p, τ) -gloutonnes sur des jeux de couplage à valuation dans $\{0..k\}$ atteignent un EP en $O(\tau.Poly(\frac{1}{p}).\log(n).2^{2k})$ tours avec probabilité supérieure à $\frac{p}{3}$.*

Pour tout $\delta > 0$, on peut rendre la probabilité d'atteindre un EP supérieure à $1 - \delta$ en itérant ce nombre de tours de la dynamique encore $O(\frac{1}{p}.\log(\frac{1}{\delta}))$ fois.

Esquisse de preuve : On montre que :

1. (en utilisant l'inégalité de Markov) que le nombre de mouvements effectués durant le « bloc » de τ tours suivant un profil σ est supérieur à une $O(\frac{p^2}{2^k})$ -fraction de $\Psi(\sigma)$ avec probabilité $O(p)$;
2. on dit ensuite qu'un bloc de τ tours est *efficace* si Ψ décroît d'un facteur $(1 - O(\frac{p^2}{2^k}))$. Comme Ψ est inférieure à $n.2^k$, le nombre de blocs efficaces pour atteindre un EP est en $O(\log(n)\frac{2^k}{p^2})$;
3. (en utilisant à nouveau l'inégalité de Markov) en itérant durant suffisamment de tours la dynamique, on a suffisamment de blocs efficaces pour atteindre un EP avec probabilité $\Omega(p)$.

Lemme 5.18. *Pour tout profil σ , soit σ' le profil atteint en τ tours par une AP-dynamique (p, τ) -gloutonne, $\Psi(\sigma') \leq \Psi(\sigma)(1 - \frac{p^2}{2^{2k+2}})$ avec probabilité supérieure à $\frac{p}{1+p}$.*

Démonstration. Soit M^* un couplage maximum dans $AP(\sigma)$.

On définit pour tout $(i, j) \in M^*$ la variable aléatoire $X_{(i,j)}(\sigma)$ comme suit :

$$X_{(i,j)}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ ET } j \text{ n'effectuent pas d'AP-mouvement durant les } \tau \text{ tours suivant } \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme la dynamique est (p, τ) -gloutonne, $\mathbb{E}[X_{(i,j)}(\sigma)] \leq 1 - p$ pour tout $(i, j) \in M^*$.

Soit $X(\sigma) = \sum_{(i,j) \in M^*} X_{(i,j)}$. On a par linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}[X(\sigma)] \leq (1 - p) \cdot |M^*|$.

On rappelle l'inégalité de Markov : Pour $X > 0$, $Prob[X > a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

Appliquée à la $X_t(\sigma)$ on a que :

$$Prob[X(\sigma) > (1 + p)(1 - p) \cdot |M^*|] \leq \frac{1}{1 + p}$$

d'où :

$$Prob[X(\sigma) > (1 - p^2) \cdot |M^*|] \leq \frac{1}{1 + p} \quad (5.2)$$

Cela signifie qu'avec probabilité supérieure à $\frac{p}{1+p}$, on a $p^2|M^*|$ joueurs effectuent un AP-mouvement. Ce qui implique que le nombre d'AP-mouvements effectués en τ tours est supérieur à $\frac{p^2|M^*|}{2}$ avec probabilité supérieure à $\frac{p}{1+p}$ (car un AP-mouvement implique deux joueurs).

Le lemme 5.15 stipule que $|M^*| \geq \frac{\Psi(\sigma)}{2^{2k+1}}$. Le nombre d'AP-mouvements effectués en τ tours depuis σ est donc supérieur à $\frac{p^2\Psi(\sigma)}{2 \cdot 2^{2k+1}}$ avec probabilité $\frac{p}{1+p}$.

$\Psi(\sigma)$ décroît donc en τ tours d'un facteur $(1 - \frac{p^2}{2^{2k+2}})$ avec probabilité supérieure à $\frac{p}{1+p}$. \square

Démonstration du théorème 5.17. . Soit σ_0 le profil initial. On décompose maintenant le temps en blocs de τ tours. On dit qu'un bloc de τ tours est *efficace* si le facteur de décroissance $(1 - \frac{p^2}{2^{2k+2}})$ est atteint. Le nombre de blocs efficaces nécessaires avant d'atteindre un EP est inférieure à $\log_{\frac{1}{(1 - \frac{p^2}{2^{2k+2}})}}[\Psi(\sigma_0)] \leq \log_{1 + \frac{p^2}{2^{2k+2}}}[\Psi(\sigma_0)]$. Or $\Psi(\sigma_0) \leq n \cdot 2^k$, donc le nombre de blocs efficaces nécessaires avant d'atteindre un EP est inférieure à $k \cdot \log_{1 + \frac{p^2}{2^{2k+2}}} \log(n)$, ce qui lorsque $p \in [0, 1]$ est inférieur à $\frac{k \cdot \log(n) \cdot 2^{2k+3}}{p^2}$.

On pose Y_i une variable aléatoire qui vaut 0 si le i^{eme} bloc de τ mouvements est efficace et 1 sinon. On utilise cette variable aléatoire pour majorer le nombre de blocs qui ne sont pas efficaces dans une séquence de T blocs.

Comme un bloc est efficace avec probabilité supérieure à $\frac{p}{1+p}$ (par le lemme 5.18), on a pour tout i ,

$\mathbb{E}(Y_i) \leq 1 - \frac{p}{1+p}$. En utilisant la linéarité de l'espérance, on a, sur T blocs de τ tours :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{z=1}^T Y_i\right] \leq \left(1 - \frac{p}{1+p}\right) \cdot T$$

On applique alors l'inégalité de Markov pour obtenir

$$\text{Prob}\left[\sum_{z=1}^T Y_i > \left(1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)^2\right)T\right] \leq \frac{1}{1 + \frac{p}{1+p}} \quad (5.3)$$

Cela signifie que sur T blocs, le nombre de blocs efficaces est supérieur à $\left(\frac{p}{1+p}\right)^2 T$ avec probabilité supérieure à $\frac{\frac{p}{1+p}}{1 + \frac{p}{1+p}} > \frac{p}{3}$ (car $p \in]0; 1[$).

Si $T > \left(\frac{1+p}{p}\right)^2 \times \frac{k \cdot \log(n) \cdot 2^{2k+3}}{p^2}$, le nombre de blocs efficaces est supérieur à $\frac{k \cdot \log(n) \cdot 2^{2k+3}}{p^2}$ avec probabilité supérieure à $\frac{p}{3}$.

Les dynamiques (p, τ) -gloutonne atteignent donc un EP avec probabilité supérieure à $p/3$ en $O(\text{Poly}(2^k \cdot \frac{1}{p}) \cdot \log(n) \cdot \tau)$ tours.

□

Remarque 5.19. Des conditions plus fortes d'indépendances des tirages effectués à chaque tours permettent certainement d'obtenir une preuve plus courte.

Preuve du lemme 5.15 On montre maintenant le lemme principal.

Démonstration du lemme 5.15. Soit M^* un couplage maximum dans $AP(\sigma)$ et σ^* l'EP atteint par la dynamique. On remarque que la taille de M^* est supérieure à la taille du couplage $C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)$ (qui est un couplage quelconque dans $AP(\sigma)$). On va montrer que le nombre de couples dans $C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)$ représente une $\frac{1}{2^{2k+1}}$ -fraction de $\Psi(\sigma)$.

On appelle *poids* (dans le potentiel) d'un couple (i, j) la valeur $2^{v(i,j)}$. Le poids d'un ensemble de couples est la somme des poids de cette ensemble de couples.

On pose $\tilde{\Psi}(\sigma) = \sum_{(i,j) \in C(\sigma^*) - C(\sigma)} 2^{v(i,j)}$. On a que $\tilde{\Psi}(\sigma) = \Psi(\sigma) + \sum_{(i,j) \in C(\sigma) - C(\sigma^*)} 2^{v(i,j)}$. Donc $\tilde{\Psi}(\sigma) \geq \Psi(\sigma)$.

On décompose $\tilde{\Psi}(\sigma)$ en deux parties :

$$\tilde{\Psi}(\sigma) = \tilde{\Psi}_{AP}(\sigma) + \tilde{\Psi}_{-AP}(\sigma) \quad (5.4)$$

avec $\tilde{\Psi}_{AP}(\sigma) = \sum_{(i,j) \in C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)} 2^{v(i,j)}$ et $\tilde{\Psi}_{-AP}(\sigma) = \sum_{(i,j) \in C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)} 2^{v(i,j)}$.

Comme les valuations sont inférieures ou égales à k , le poids d'un couple est inférieur à 2^k . On en déduit que :

$$|C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)| \geq \frac{\tilde{\Psi}_{AP}(\sigma)}{2^k} \quad (5.5)$$

On cherche alors à établir que $\tilde{\Psi}_{AP}(\sigma) \geq \frac{\Psi(\sigma)}{2^{k+1}}$. On suppose pour cela, l'existence d'une relation R (que l'on construit plus tard) telle que pour tout $(i, j) \in C^*(\sigma)$, $R(i, j)$ est un ensemble de couples dans $C^*(\sigma)$. La relation R vérifie le lemme suivant.

Lemme 5.20. *Dans un jeu de couplage à valeur dans $\{0 \dots k\}$, pour tout σ , et tout EP σ^* atteint par une AP-dynamique depuis σ la relation R vérifie :*

1. *Pour tout $(i, j) \in C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)$ il existe un $(i^*, j^*) \in C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)$ tel que $(i, j) \in R(i^*, j^*)$*
2. *Pour tout (i, j) , $(2^{k+1} - 1) \cdot 2^{v(i, j)} \geq \sum_{(i', j') \in R(i, j)} 2^{v(i', j')}$*

De la propriété 1 du lemme on déduit que :

$$\sum_{(i', j') \in C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)} 2^{v(i', j')} \leq \sum_{\{(i^*, j^*) \in C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)\}} \sum_{\{(i'', j'') \in R(i^*, j^*)\}} 2^{v(i'', j'')}$$

On déduit alors en appliquant la propriété 2 du lemme l'inégalité suivante :

$$(2^{k+1} - 1) \sum_{(i, j) \in C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)} 2^{v(i, j)} \geq \sum_{(i', j') \in C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)} 2^{v(i', j')} \quad (5.6)$$

Ce qui se réécrit ainsi :

$$(2^{k+1} - 1) \tilde{\Psi}_{AP}(\sigma) \leq \tilde{\Psi}_{-AP}(\sigma) \quad (5.7)$$

d'où par la décomposition donnée dans l'équation 5.4.

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\sigma) &\leq 2^{k+1} \tilde{\Psi}_{AP}(\sigma) \\ &\leq 2^{2k+1} |C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)| \end{aligned}$$

Et comme $|M^*| \geq |C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)|$ et que $\tilde{\Psi}(\sigma) \geq \Psi(\sigma)$, en déduit que $|M^*| \geq \frac{\Psi(\sigma)}{2^{2k+1}}$ \square

Construction de la relation R . On dit qu'un couple (i, j) bloque un couple (i, j') si $v(i, j) \geq v(i, j')$. On définit qu'un *chemin de couples* (améliorants) est une séquence de couple (j_t, j'_t) telle que $j_{t+1} \in \{j_t, j'_t\}$ et $v(j_{t+1}, j'_{t+1}) > v(j_t, j'_t)$.

Soit un couple (i^*, j^*) de $C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)$. Si (i^*, j^*) n'est pas un AP-mouvement sur σ , c'est par définition qu'un couple de $C(\sigma)$ bloque (i^*, j^*) . On rappelle que σ^* est atteint depuis σ . Le couple (i^*, j^*) doit donc être un AP-mouvement à un moment durant la dynamique. Cela signifie donc que le couple qui bloque (i^*, j^*) est détruit à un moment afin de former un couple avec une plus grande valuation. Ce nouveau couple peut à son tour être également détruit pour un autre avec encore une meilleure valuation ce qui définit un chemin de couples. Ce chemin de couples finit nécessairement sur un couple que ne sera pas détruit ; c'est-à-dire un couple de $C(\sigma^*)$. On peut donc relier les couples (i, j) dans $C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)$ à d'autres couples de $C(\sigma^*)$ en suivant le chemin de couples qui commence par le couple qui bloque (i, j) . On utilise cette relation pour construire R .

On définit $H(i, j)$ l' *historique* d'un couple (i, j) dans $C(\sigma^*)$ comme étant l'ensemble des couples qui sont dans un chemin de couples parcouru par la dynamique qui aboutit à (i, j) depuis σ ; c'est-à-dire que si on note $\sigma_1 \dots \sigma_T$ l'ensemble des profils de stratégies sélectionnés au cours de la dynamique depuis le profil σ , $(i', j') \in H(i, j)$ si il existe t tel que (i', j') est formé sur $s\sigma_t$ et le chemin de couple formé par la dynamique depuis (i', j') se termine sur (i, j) ;

Sur un AP-mouvement, il est possible que deux couples soient supprimés pour en former un seul. L'historique d'un couple a donc la forme d'un arbre binaire dont les feuilles sont des couples de $C(\sigma)$.

On définit maintenant la relation suivante pour tout $(i, j) \in C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)$, $R(i, j) = \bigcup_{i=0}^k R^i(i, j)$ avec :

- $R^0((i, j)) = \{(i', j') \in C(\sigma^*) \mid \text{le couple qui bloque } (i', j') \text{ est dans } H(i, j)\}$
- $\forall x > 0, R^x(i, j) = \{(i', j') \in C(\sigma^*) \mid \exists (i'', j'') \text{ le couple qui bloque } (i', j') \text{ est dans } H(i'', j'') \text{ et } (i'', j'') \in R^{x-1}(i, j)\}$

Informellement la relation exprime : $\ll (i', j') \in R(i, j)$ si (i', j') est bloqué par un couple qui va être détruit pour former le couple $(i, j) \gg$;

Démonstration de la propriété 1 du lemme 5.20. Soit un couple (i, j) dans $C(\sigma^*) - C(\sigma) - AP(\sigma)$. Par définition il y a un couple (i', j') qui bloque (i, j) . Si on suit le chemin de couples qui part de (i', j') selon l'historique, on aboutit à un couple de $(i', j') \in C(\sigma^*)$. Si (i', j') est dans $AP(\sigma)$ alors $(i, j) \in R^0(i', j')$. Sinon cela signifie que (i', j') est bloqué dans σ . On itère alors le procédé qui consiste à suivre le chemin depuis le couple bloquant. On remarque que la séquence des couples atteints par ce procédé ne peuvent former de cycle puisque la valuation augmente strictement lorsque l'on suit un chemin de couples. Ce procédé s'arrête lorsqu'il atteint un couple de $C(\sigma^*)$ non bloqué par un couple $C(\sigma)$; c'est-à-dire un couple de $C(\sigma^*) \cap AP(\sigma)$. \square

Vérification la propriété 2 du lemme 5.20

On borne tout d'abord le rapport de poids entre $R^0(i, j)$ et (i, j)

Lemme 5.21. *Pour tout $(i, j) \in \sigma^* \cap AP(\sigma)$,*
$$\sum_{(i', j') \in R^0(i, j)} 2^{v(i', j')} \leq 2 \cdot 2^{v(i, j)}.$$

Démonstration. Le potentiel est construit de telle sorte que le poids des couples formés compense le poids des couples détruits. Les couples bloquants sont détruits pour ultimement former (i, j) . Le poids des couples bloquant les couples de $R^0(i, j)$ est donc inférieur ou égal au poids de (i, j) . Chaque couple bloquant est susceptible de bloquer jusqu'à 2 couples de poids inférieur ou égal. Le poids des couples de $R^0(i, j)$ peut donc être jusqu'à 2 fois supérieur au poids de (i, j) . \square

Démonstration de la propriété 2 du lemme 5.20. En appliquant le lemme 5.21, on a que pour tout t et pour tout $(i', j') \in R^t(i, j)$,
$$\sum_{(i'', j'') \in R^0(i', j')} 2^{v(i'', j'')} \leq 2 \cdot 2^{v(i', j')}.$$
 D'où pour tout (i, j) ,

$$\sum_{(i'', j'') \in R^t(i, j)} 2^{v(i'', j'')} \leq 2^t 2^{v(i, j)}$$

Or à chaque fois que l'on passe de R^t à R^{t+1} , les valeurs diminuent puisque l'on a suivi au moins un AP-mouvement pour détruire une arête bloquante. On a donc pour tout $t > k$, R^t est donc vide.

Ainsi pour tout (i, j) , $2^{v(i, j)} \geq \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{(i', j') \in R(i, j)} 2^{v(i', j')}$ \square

5.2.2 Comment la vision limitée ralentit la convergence

Dans cette section, on présente deux jeux de couplage sur réseau social pour lesquels la convergence des AP-dynamiques, même gloutonnes, est lente ($\Omega(n)$ tours). Cela nous permet dans la section suivante de modifier la dynamique de façon à « neutraliser » le ralentissement dû à ces jeux.

Avant cela, regardons quels couples peuvent être formés par une AP-dynamique dans un jeu de couplage sur réseau social.

On définit qu'un *chemin de couples (améliorant) locaux* dans un jeu de couplage sur réseau social est une séquence de couple (j_t, j'_t) telle que $j_{t+1} \in (j_t, j'_t)$ et $v(j_{t+1}, j'_{t+1}) > v(j_t, j'_t)$. De plus, pour tout t , (j_{t+1}, j'_{t+1}) sont à distance au plus 2 dans le graphe contenant le réseau social (non orienté) et (j_t, j'_t) . Cela implique que j_{t+1} et j'_{t+1} se voient si (j_t, j'_t) est formé et que (j_{t+1}, j'_{t+1}) est un AP-mouvement qui peut alors être effectué.

Exemple 5.2. *La figure 5.8 présente un exemple de chemin de couples locaux. Par exemple si $(1, 2)$ est formé, alors 2 et 3 sont à distance 2. De plus la valuation de $(2, 3)$ est supérieure à celle de $(1, 2)$.*

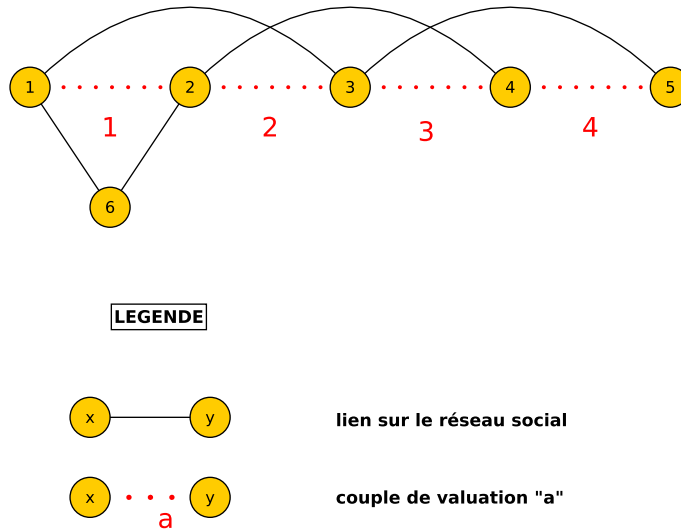


FIGURE 5.8: Chemin de couples locaux : $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)$

On définit qu'un couple (i, j) est *atteignable* dans un jeu de couplage sur réseau social depuis un profil σ si une AP-dynamique qui démarre sur le profil σ peut former le couple (i, j) .

Remarque 5.22. Pour tout mouvement (i, j) atteignable depuis un profil σ , il existe un chemin de couples locaux dont le premier couple est un couple de joueurs à distance 2 dans le graphe contenant le réseau social et $C(\sigma)$. Cependant un tel chemin peut être bloqué par un couple de $C(\sigma)$ comme on va le voir avec l'exemple des chemins concaténés. Les couples atteignables sont les couples qui sont susceptibles d'être formés au court d'une AP-dynamique dans un jeu sur réseau social, après éventuellement la déletion d'un couple bloquant.

L'exemple des « chemins concaténés » Dans les exemples de Hoefler [27], les séquences d'AP-mouvements de longueur exponentielle exhibées reposent sur un chemin de couples de taille $\Omega(n)$ qui comporte des « remises à 0 », ce qui permet de construire un « compteur binaire ». Avec des valuations dans $\{0 \dots k\}$, les chemins de couples sont de taille bornée par k . La valeur maximum que peut alors atteindre le compteur est 2^k .

Cependant, on peut construire un exemple qui « concatène » des chemins de couples locaux de taille constante.

Théorème 5.23. *Pour tout n , il existe un jeu de couplage à n joueurs à valuation dans $\{0 \dots 4\}$ sur un réseau social G , tel que, depuis un profil donné σ , toute AP-dynamique nécessite $\Omega(n)$ tours pour atteindre un EP.*

Démonstration. La structure de l'exemple est décrite par la figure 5.9. De courts chemins de couples locaux sont séparés par le couple (X_i, Y_i) . Tous les chemins sont de longueur bornée mais, pour commencer le i^{eme} chemin, les AP-dynamiques doivent finir le chemin précédent pour détruire le couple (X_i, Y_i) .

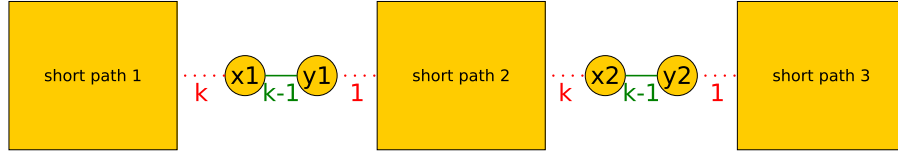


FIGURE 5.9: Structure de l'exemple des chemins concaténés

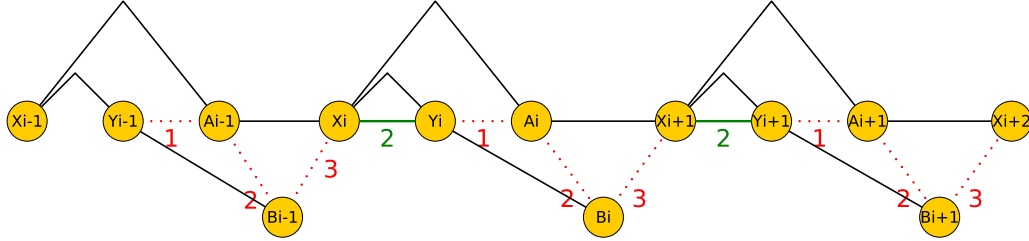


FIGURE 5.10: Exemple des chemins concaténés détaillé

Un exemple complet est décrit par la figure 5.10. Les chemins de couples locaux sont de la forme $(Y_i, A_i) \rightarrow (A_i, B_i) \rightarrow (B_i, X_{i+1})$. Cependant pour commencer ce chemin, les AP-dynamiques doivent détruire le couple (X_i, Y_i) , ce qui nécessite de finir le précédent chemin.

Toute AP-dynamique qui commence par le profil dans lequel les couples (X_i, Y_i) sont formés pour tout i , nécessite donc $\Omega(n)$ tours pour former le couple (B_n, X_{n+1}) .

□

Remarque 5.24. En incorporant comme court chemin la structure de l'exemple de Hoefler, on obtient un exemple sur lequel il faut $\Omega(n \cdot 2^{\frac{k}{4}})$ tours pour atteindre un EP.

L'exemple du goulot d'étranglement. La seconde structure qui ralentit la dynamique est le *goulot d'étranglement*; dans cet exemple tous les chemins de couples locaux passent par un même joueur x .

Théorème 5.25. *Pour tout n , il existe un jeu de couplage à n joueurs à valuation dans $\{0, 1, 2\}$ sur un réseau social G , tel que, depuis un profil initial sur lequel aucun couple n'est formé, toute AP-dynamique nécessite $\Omega(n)$ tours pour atteindre un EP local.*

L'exemple est décrit par la figure 5.11. Dans ce jeu le seul EP local contient tous les couples « verticaux » (i, i') . Le rôle du joueur x est de "conduire" les joueurs "du bas" aux joueurs "du haut"; en effet le seul AP-mouvement que voit tout joueur i' du bas est le couple (x, i') . Une fois (x, i') formé, i et i' se voient et peuvent former un couple. Comme x ne peut conduire qu'un joueur à la fois, le temps de convergence est linéaire. □

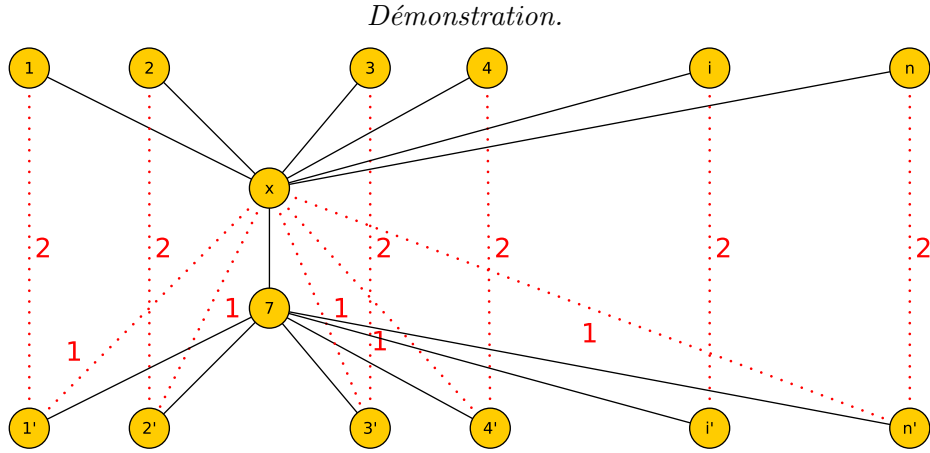


FIGURE 5.11: congestion gadget

On va montrer que si l'on neutralise ces deux exemples, les AP-dynamiques convergent rapidement. Pour neutraliser les goulots d'étranglements, on restreint la classe de jeux étudiée aux jeux tel que le réseau social à un degré borné par une constante. Pour neutraliser les chemins concaténés, on modifie la dynamique de telle sorte que les joueurs effectuent une forme d'exploration

5.2.3 Dynamiques avec exploration

De la même manière que l'on a étendu les stratégies des jeux de suiveurs pour incorporer de la diffusion, on propose d'étendre les stratégies des jeux de couplage pour incorporer de l'exploration. Cette exploration est effectuée par les joueurs en formant un second *couple d'exploration* qui leur permet d'augmenter leur vision mais ne modifie pas leur utilité. Ces couples d'exploration sont également formés par consentement mutuel. Cette forme d'extension semble moins puissante que la diffusion présentée au chapitre précédent. Cependant, on montre qu'elle est suffisante pour neutraliser les exemples des chemins concaténés.

Une *stratégie avec exploration* s_i d'un joueur i sur un profil σ contient deux joueurs $(s_i^{couple}, s_i^{exp})$ tel que :

- le joueur s_i^{couple} est celui avec lequel i essaye de former un couple. L'ensemble des couples formés sur un profil $\tilde{\sigma}$ noté $C(\tilde{\sigma})$ est déterminé à partir des $\tilde{\sigma}_i^{couple}$ de la manière suivante : $(i, j) \in C(\tilde{\sigma})$ si et seulement si $i \in \tilde{\sigma}_j^{couple}$ et $j \in \tilde{\sigma}_i^{couple}$;
- le joueur s_i^{exp} est celui avec lequel i essaye de former un couple d'exploration. L'ensemble des couples d'exploration formés sur un profil $\tilde{\sigma}$ noté $C^{exp}(\tilde{\sigma})$ est déterminé à partir des $\tilde{\sigma}_i^{exp}$ de la manière suivante : $(i, j) \in C^{exp}(\tilde{\sigma})$ si et seulement si $i \in \tilde{\sigma}_j^{exp}$ et $j \in \tilde{\sigma}_i^{exp}$;
- pour sélectionner un joueur j dans sa stratégie, i doit voir j sur σ . La vision est cependant étendue par rapport à la notion précédente comme spécifiée dans la définition 5.26 ;

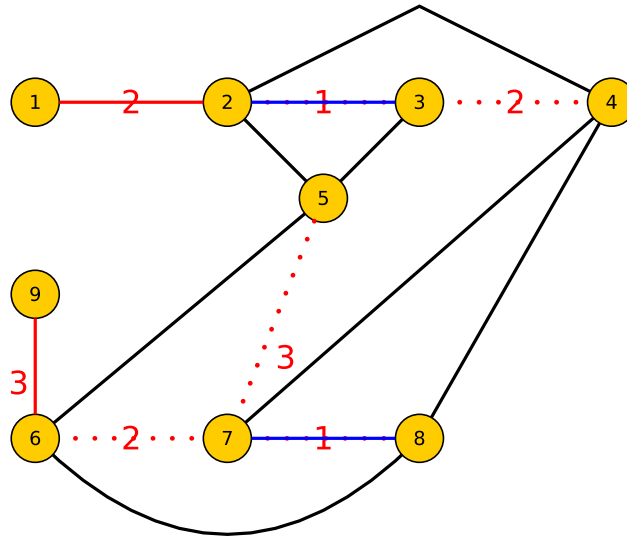


FIGURE 5.12: Exemples de couples d'exploration

– l'utilité d'un joueur i sur un profil $\tilde{\sigma}$ est calculé comme suit :

$$u_i(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} v(i, j) & \text{si } \{i, j\} \in C(\tilde{\sigma}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Definition 5.26. Dans un jeu de couplage sur réseau social $\langle N, v, E \rangle$, un joueur i voit un joueur j sur un profil de stratégies avec exploration σ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- il existe un chemin de longueur 2 de j vers i dans $E \cup C(\sigma)$
- il existe un chemin de longueur 2 de j vers i dans $E \cup C^{exp}(\sigma)$

Pour un profil de stratégies avec exploration σ d'un jeu de couplage sur réseau social, on dit qu'un couple (i, j) est un couple d'exploration améliorante si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- il existe un chemin de longueur 2 entre i et j dans E ;
- il existe un chemin de longueur 2 entre i et j dans $E \cup C(\sigma)$ ou dans $E \cup C^{exp}(\sigma)$ tel que $(i', i) \in C(\sigma) \cup C^{exp}(\sigma)$ et $v(i, j) > v(i, i')$.

Remarque 5.27. La première condition implique qu'un couple de faible valeur peut être un couple d'exploration améliorante même si les deux joueurs explore déjà quelqu'un. Cette définition n'est pas naturelle et est construite pour permettre à notre dynamique de converger rapidement. Elle a tout de même le bénéfice d'être totalement locale. Un joueur est capable de savoir quels sont les couples d'exploration améliorante en ayant uniquement une vision à distance 2.

Exemple 5.3 (Vision avec exploration et exploration améliorante). *L'exemple est décrit par la figure 5.12. Sur cet exemple le profil courant contient les couples $(1,2)$, $(6,7)$ et le couple d'exploration $(8,9)$. Sur ce profil :*

FIGURE 5.13: Dynamique de sélection aléatoire avec exploration améliorante depuis $\sigma(t)$

1. chaque joueur choisit un autre joueur uniformément aléatoirement parmi les joueurs qu'il voit sur $\sigma(t)$;
2. si deux joueurs i et j se choisissent mutuellement et que :
 - $(i, j) \in AP(\sigma)$, ils forment ce couple ; c'est-à-dire que sur $\sigma(t+1)$, $\sigma_i^{couple}(t+1) = j$ et $\sigma_j^{couple}(t+1) = i$;
 - sinon si (i, j) est un couple d'exploration améliorante, ils forment ce couple d'exploration ; c'est-à-dire que sur $\sigma(t+1)$, $\sigma_i^{exp}(t+1) = j$ et $\sigma_j^{exp}(t+1) = i$.

- bien que le couple $(1, 2)$ soit formé, $(2, 3)$ est un couple d'exploration améliorante car il existe un chemin de longueur 2 dans le réseau social. Si le couple d'exploration $(2, 3)$ était formé, 3 pourrait alors former un (vrai) couple avec 4 car il le verrait par le chemin $(3, 2), (2, 4)$;
- bien que $(6, 7)$ soit formé, $(7, 8)$ est également un couple d'exploration améliorante ; en effet 7 et 8 se voient car $(7, 9), (9, 8)$ est un chemin de longueur 2 dans le profil courant (qui utilise un couple d'exploration). De plus le couple $(7, 8)$ a une valuation supérieure au couple d'exploration $(9, 8)$, c'est donc un couple d'exploration améliorante ;
- Notez bien que le chemin de longueur 2 doit impliquer un couple du réseau social pour permettre la vision. Par exemple, si le couple $(5, 8)$ est formé, et que le couple d'exploration $(8, 9)$ est formé, les joueurs 9 et 5 ne se voient pas.

On propose la *dynamique de sélection aléatoire avec exploration améliorante* dont les mouvements sont sélectionnés selon la dynamique décrit figure 5.13.

L'intuition derrière la dynamique avec exploration améliorante : elle est construite de telle sorte qu'elle suit des chemins d'améliorations locaux, mais n'est pas bloquée par un couple déjà formé.

Théorème 5.28. *La dynamique de sélection aléatoire avec exploration améliorante dans un jeu de couplage sur réseau social $\langle N, v, E \rangle$ à valuation dans $\{0 \dots k\}$ et tel que le degré maximum dans E est d atteint un EP local en $O(\log(n) \cdot \text{Poly}(d^{4k}) \log(\frac{1}{\delta}))$ avec probabilité supérieure à $1 - \delta$.*

Démonstration. La preuve consiste à montrer que la dynamique est $(k, \frac{1}{(d+2)^{4k}})$ -gloutonne sur le jeu de couplage à information complète restreint aux couples atteignables ; c'est-à-dire que pour tout AP-mouvement (i, j) atteignable, la dynamique sélectionne un AP-mouvement pour i ou pour j en k tours avec probabilité supérieure à $\frac{1}{(d+2)^{4k}}$. Cela provient du fait que comme le degré et les valeurs sont bornés, l'ensemble des couples atteignables, qui est contenu dans une « boule de rayon k » autour du joueur est de taille également bornée.

En effet, si un couple n'est pas atteignable, il ne sera pas formé par la dynamique. Soit (i, j) un couple atteignable depuis le profil courant et $(X_1, X_2) \dots (X_k, X_{k+1})$ avec $(X_k, X_{k+1}) = (i, j)$ le chemin de couples améliorants locaux qui atteint (i, j) .

La probabilité qu'en k tours ce chemin soit parcouru par des AP-mouvements ou des couples d'exploration améliorante est supérieure à $\frac{1}{(d+2)^{4k}}$. En effet, si (X_t, X_{t+1}) est formé, la probabilité que X_{t+1} et X_{t+2} se choisissent est supérieure à $(d+2)^4$. En effet, comme (X_t, X_{t+1}) est formé, X_{t+1} et X_{t+2} se voient (par définition d'un chemin de couples améliorant locaux). De plus, l'ensemble de joueurs qu'un joueur voit est l'ensemble des joueurs à distance 2 dans le graphe contenant le réseau social, les couples d'exploration et les couples formés. Le réseau social étant à degré borné, cette ensemble est de taille inférieure ou égale $(d+2)^2$ (d pour les arêtes du réseau social et 2 de plus pour les éventuels couples et couples d'exploration).

Comme la dynamique est $(k, \frac{1}{(d+2)^{4k}})$ -gloutonne sur le jeu restreint aux couples atteignables, on peut alors appliquer le théorème 5.17 pour borner le temps de convergence. \square

Si on relâche la condition de degré borné, l'exemple du goulot d'étranglement (figure 5.11) peut alors apparaître. Les dynamiques avec exploration décrites ici convergent en $\Omega(n)$ tours. En effet le joueur au milieu doit toujours construire un nombre de couples linéaire en n pour que la dynamique atteignent un EP alors qu'il ne peut en construire que 2 à chaque tour.

Remarque sur des extensions. Si on autorise les joueurs à former plusieurs couples, ou qu'ils ont une vision à distance 3, les AP-dynamiques ne suivent plus des chemins de couples locaux. On ne peut donc plus appliquer le résultat de convergence rapide des stratégies avec exploration.

Conclusion

On a montré dans ce chapitre que les dynamiques standard pour les jeux de couplage et les jeux de suiveurs étaient lentes à converger lorsque l'information dont disposent les joueurs est paramétrée par un réseau social. Pour les jeux de suiveurs, on propose une extension de la dynamique dans laquelle les joueurs diffusent l'information. La dynamique proposée est cependant assez peu réaliste car elle demande à ce que tous les joueurs participent sans limitation à la diffusion. Or lire des messages et éventuellement les « retwitter » prend du temps et un utilisateur peut dédier un temps borné à son activité sur le réseau. Cette problématique est d'ailleurs cohérente avec la limitation de la taille des messages à 255 caractères sur Twitter. Cette limitation permet aux membres d'optimiser ce temps borné en décidant très vite quoi faire d'un message : poursuivre les liens hypertextes inclus dans le message pour avoir plus d'informations, le diffuser à ses suiveurs ou l'ignorer.

On souhaiterait alors étudier les paramètres qui déterminent la vitesse de convergence d'une dynamique avec une diffusion plus raisonnable que celle présentée dans ce chapitre. En particulier peut-on obtenir des garanties de vitesse de convergence sur des graphes aléatoires qui ressemblent à des réseaux sociaux concrets. Peut-être que les techniques sur les protocoles de propagation de rumeurs peuvent être appliquées dans ce cadre [65]. Il faudrait probablement, pour poursuivre dans cette direction, déterminer un modèle de génération des messages.

Sur les jeux de couplage, on montre que les AP-dynamiques gloutonnes, convergent rapidement. La borne obtenue est logarithmique dans le nombre de joueurs. Cependant elle est exponentielle dans le nombre de valeurs. On ne pense pas que la borne soit atteinte. On cherche également comment obtenir une dynamique distribuée qui soit gloutonne sur n'importe quel jeu. Lorsque le jeu est sur un réseau social, on montre qu'une exploration permet d'accélérer la convergence lorsque le graphe a un degré borné. Dans le cas contraire, cette forme d'exploration n'est pas efficace. On souhaiterait caractériser les jeux pour lesquels on dispose d'une exploration efficace mais tout de même limitée.

Les exemples sur lesquels sont basées les bornes inférieures sur le temps de convergence des dynamiques reposent sur le fait que les valuations sont arbitraires et déconnectées du réseau social. Il serait intéressant de caractériser des conditions reliant les valuations et le réseau qui permettent de converger rapidement. Dans cet esprit, on peut considérer que le réseau social $\langle N, E \rangle$ est le résultat d'un premier jeu d'appariement J1. Peut-on évaluer la vitesse de convergence d'une dynamique sur un second jeu d'appariement sur le réseau social $\langle N, E \rangle$ en fonction de la corrélation entre les utilités de J1 et de J2 ?

Conclusion

On a exposé des outils qui permettent d'évaluer la vitesse de convergence de dynamiques vers des équilibres dans des jeux à n joueurs.

Sur les jeux de congestion, on a montré que trouver un équilibre approché est un problème PLS-complet dans les jeux de congestion symétriques sans contrainte de signe avec des fonctions de coût à sauts bornés. Cependant, on a montré dans les jeux de congestion négatifs symétriques avec des fonctions de coût à sauts bornés, la dynamique ϵ -Nash converge en un nombre de tours polynomial. Cela reste vrai dans les jeux à fonctions des coûts monotones et non plus croissantes.

On a montré que les dynamiques « standard » sur les jeux d'appariement sur réseau social, c'est-à-dire les dynamiques de Nash pour les jeux de suiveurs et les AP-dynamiques pour les jeux de couplage, convergent lentement (en $\Omega(n)$ tours) même avec des contraintes fortes sur les valuations et sur la structure du réseau social. On a montré que la diffusion et l'exploration sont des composantes qui permettent parfois une convergence rapide (en $O(\log(n))$ tours) avec ces mêmes contraintes.

Bien entendu, une première direction de recherches futures consiste à élargir la portée de ces outils et évaluer la vitesse de convergence de dynamiques sur d'autres sous-classes de jeux.

Sur les jeux de congestion, il faudrait élucider quel est exactement l'impact du sens de variation des fonctions de coûts sur la complexité des ϵ -NEP. Peut-on trouver un ϵ -NEP efficacement sur les jeux sans contrainte de signe mais constitués de deux parties indépendantes de signes opposés ?

Sur les jeux d'appariement sur réseau social, la vitesse de convergence des dynamiques dépend à la fois de la valuation et du réseau social. On peut relier ces deux conditions en prenant pour hypothèse que le réseau social est un équilibre pour un premier jeu, et que la valuation est corrélée à ce premier jeu. Peut-on évaluer la vitesse de convergence d'une dynamique sur deuxième jeu à partir d'une mesure de la corrélation entre les deux jeux ?

Une autre possibilité consiste à étudier des dynamiques avec conseils. Ces conseils seraient fournis par un superviseur qui a une connaissance globale du réseau. Cependant cette connaissance globale représente des données massives. Le superviseur peut-il calculer des conseils efficacement, c'est-à-dire avec des requêtes locales sur ces données massives ?

Enfin, les modèles de jeux sur réseau social présentés ne s'intéressent pas aux messages échangés. Si les messages sont générés par les joueurs selon un jeu à paramètres dont la valeur n'est pas connue, peut-on estimer la valeur de ces paramètres à partir d'observations partielles de ces messages ? En particulier, si l'on considère que les messages résultent d'une situation d'équilibre du jeu.

Bibliographie

- [1] Constantinos Daskalakis, Paul W. Goldberg, and Christos H. Papadimitriou. The complexity of computing a nash equilibrium. In *STOC*, pages 71–78, 2006.
- [2] Nimrod Megiddo and Christos H. Papadimitriou. On total functions, existence theorems and computational complexity. *Theor. Comput. Sci.*, 81(2) :317–324, 1991.
- [3] G. W. Brown. Iterative solutions of games by fictitious play. In *Activity Analysis of Production and Allocation*, pages 374–376. Wiley, 1951.
- [4] Julia Robinson. An iterative method of solving a game. *Annals of Mathematics*, 54 : 296–301, 1951.
- [5] Harold N. Shapiro. Note on a computation method in the theory of games. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 11(4).
- [6] Felix Brandt, Felix Fischer, and Paul Harrenstein. On the rate of convergence of fictitious play. In *Proceedings of the Third international conference on Algorithmic game theory, SAGT'10*, 2010.
- [7] Michael J. Kearns and Yishay Mansour. Efficient nash computation in large population games with bounded influence. In *UAI*, pages 259–266, 2002.
- [8] Richard J. Lipton, Evangelos Markakis, and Aranyak Mehta. Playing large games using simple strategies. In *Proceedings of the 4th ACM conference on Electronic commerce, EC '03*, 2003.
- [9] Xi Chen and Xiaotie Deng. Settling the complexity of two-player nash equilibrium. In *Proceedings of the 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS '06*, 2006.
- [10] Constantinos Daskalakis, Aranyak Mehta, and Christos H. Papadimitriou. A note on approximate nash equilibria. In *WINE*, pages 297–306, 2006.
- [11] Constantinos Daskalakis, Aranyak Mehta, and Christos H. Papadimitriou. Progress in approximate nash equilibria. In *ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 355–358, 2007.

-
- [12] Tomas Feder, Hamid Nazerzadeh, and Amin Saberi. Approximating nash equilibria using small-support strategies. In *Proceedings of the 8th ACM conference on Electronic commerce, EC '07*, 2007.
- [13] Haralampos Tsaknakis and Paul G. Spirakis. An optimization approach for approximate nash equilibria. *Internet Mathematics*, 5(4) :365–382, 2008.
- [14] Steve Chien and Alistair Sinclair. Convergence to approximate nash equilibria in congestion games. In *SODA*, pages 169–178, 2007.
- [15] Susanne Albers and Pascal Lenzner. On approximate nash equilibria in network design. In *Proceedings of the 6th international conference on Internet and network economics, WINE'10*, 2010.
- [16] Michael D. Grigoriadis and Leonid G. Khachiyan. A sublinear-time randomized approximation algorithm for matrix games. *Oper. Res. Lett.*, 18(2), September 1995.
- [17] Sanjeev Arora, Elad Hazan, and Satyen Kale. The multiplicative weights update method : a meta-algorithm and applications. pages 121–164, 2012.
- [18] Alex Fabrikant, Christos H. Papadimitriou, and Kunal Talwar. The complexity of pure nash equilibria. In *STOC*, pages 604–612, 2004.
- [19] Heiner Ackermann, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. On the impact of combinatorial structure on congestion games. In *FOCS*, pages 613–622, 2006.
- [20] Samuel Ieong, Robert McGrew, Eugene Nudelman, Yoav Shoham, and Qixiang Sun. Fast and compact : A simple class of congestion games. In *AAAI*, pages 489–494, 2005.
- [21] Anand Bhalgat, Tanmoy Chakraborty, and Sanjeev Khanna. Nash dynamics in congestion games with similar resources. In *WINE*, pages 362–373, 2009.
- [22] Alexander Skopalik and Berthold Vöcking. Inapproximability of pure nash equilibria. In *STOC*, pages 355–364, 2008.
- [23] D. Gale and L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1) :9–15.
- [24] Robert W. Irving and David Manlove. The stable roommates problem with ties. *J. Algorithms*, 43(1) :85–105, 2002.
- [25] Heiner Ackermann, Paul W. Goldberg, Vahab S. Mirrokni, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. A unified approach to congestion games and two-sided markets.
- [26] Esteban Arcaute and Sergei Vassilvitskii. Social networks and stable matchings in the job market. In *WINE*, pages 220–231, 2009.

-
- [27] Martin Hoefer. Local matching dynamics in social networks. *Inf. Comput.*, 222 :20–35, 2013.
- [28] Josef Hofbauer, Sylvain Sorin, and Yannick Viossat. Time average replicator and best-reply dynamics. *Math. Oper. Res.*, 34(2) :263–269, 2009.
- [29] Dov Monderer and Lloyd S. Shapley. Fictitious play property for games with identical interests. *Journal of Economic Theory*, 68(1) :258 – 265, 1996.
- [30] Ulrich Berger. Brown’s original fictitious play. *Journal of Economic Theory*, 135(1) : 572 – 578, 2007.
- [31] L.S. Shapley and RAND CORP SANTA MONICA CALIF. *Some Topics in Two-person Games*. Rand Corporation, 1963.
- [32] Fabien Teytaud and Olivier Teytaud. Lemmas on partial observation, with application to phantom games. In *CIG*, pages 243–249, 2011.
- [33] Elias Koutsoupias and Christos H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In *STACS*, pages 404–413, 1999.
- [34] Tim Roughgarden and Éva Tardos. How bad is selfish routing? *J. ACM*, 49(2) :236–259, 2002.
- [35] George Christodoulou and Elias Koutsoupias. The price of anarchy of finite congestion games. In *STOC*, pages 67–73, 2005.
- [36] Tim Roughgarden and Mukund Sundararajan. Optimal efficiency guarantees for network design mechanisms. In *IPCO*, pages 469–483, 2007.
- [37] George Christodoulou, Elias Koutsoupias, and Paul G. Spirakis. On the performance of approximate equilibria in congestion games. In *ESA*, pages 251–262, 2009.
- [38] Vittorio Bilò, Alessandro Celi, Michele Flammini, and Vasco Gallotti. Social context congestion games. In *Proceedings of the 18th international conference on Structural information and communication complexity, SIROCCO’11*, pages 282–293, 2011.
- [39] Robert Kleinberg, Georgios Piliouras, and Éva Tardos. Multiplicative updates outperform generic no-regret learning in congestion games : extended abstract. In *STOC*, pages 533–542, 2009.
- [40] R. W. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria. *International Journal of Game Theory*, 2 :65–67, 1973.
- [41] Michel X. Goemans, Li Li, Vahab S. Mirrokni, and Marina Thottan. Market sharing games applied to content distribution in ad hoc networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 24(5) :1020–1033, 2006.

-
- [42] Tim Roughgarden and Éva Tardos. Bounding the inefficiency of equilibria in nonatomic congestion games. *Games and Economic Behavior*, 47(2) :389–403, 2004.
- [43] Simon Fischer, Harald Räcke, and Berthold Vöcking. Fast convergence to wardrop equilibria by adaptive sampling methods. *SIAM J. Comput.*, 39(8) :3700–3735, 2010.
- [44] Tobias Harks and Max Klimm. On the existence of pure nash equilibria in weighted congestion games. *Math. Oper. Res.*, 37(3) :419–436, 2012.
- [45] Igal Milchtaich. Weighted congestion games with separable preferences. *Games and Economic Behavior*, 67(2) :750–757, 2009.
- [46] Igal Milchtaich. Congestion games with player-specific payoff functions. *Games and Economic Behavior*, 13(1) :111–124, March 1996.
- [47] Marios Mavronicolas, Igal Milchtaich, Burkhard Monien, and Karsten Tiemann. Congestion games with player-specific constants. In *MFCS*, pages 633–644, 2007.
- [48] Tobias Harks, Martin Hoefer, Max Klimm, and Alexander Skopalik. Computing pure nash and strong equilibria in bottleneck congestion games. In *ESA (2)*, pages 29–38, 2010.
- [49] Rajgopal Kannan and Costas Busch. Bottleneck congestion games with logarithmic price of anarchy. In *SAGT*, pages 222–233, 2010.
- [50] Potential games. *Games and Economic Behavior*, 14(1) :124 – 143, 1996.
- [51] Bruno Escoffier, Laurent Gourves, and Jerome Monnot. The price of optimum in a matching game. In *Proceedings of the 4th international conference on Algorithmic game theory*, SAGT’11, pages 81–92, 2011.
- [52] David J. Abraham, Ariel Levavi, David Manlove, and Gregg O’Malley. The stable roommates problem with globally ranked pairs. *Internet Mathematics*, 5(4) :493–515, 2008.
- [53] K. Elbassioni. Lecture’s note on randomized fictitious play. URL <http://www.mpi-inf.mpg.de/~elbassio/lec/fpc-lecture1.pdf>.
- [54] Frédéric Magniez, Michel de Rougemont, Miklos Santha, and Xavier Zeitoun. The complexity of approximate nash equilibrium in congestion games with negative delays. In *WINE*, pages 266–277, 2011.
- [55] David S. Johnson, Christos H. Papadimitriou, and Mihalis Yannakakis. How easy is local search? *J. Comput. Syst. Sci.*, 37(1) :79–100, 1988.
- [56] Mihalis Yannakakis. Equilibria, fixed points, and complexity classes. *Computer Science Review*, 3(2) :71–85, 2009.

-
- [57] Alejandro A. Schäffer and Mihalis Yannakakis. Simple local search problems that are hard to solve. *SIAM J. Comput.*, 20(1) :56–87, 1991.
- [58] Ravi Kannan and Thorsten Theobald. Games of fixed rank : a hierarchy of bimatrix games. In *SODA*, pages 1124–1132, 2007.
- [59] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficiency*. Springer, 2003.
- [60] Constantinos Daskalakis. On the complexity of approximating a nash equilibrium. In *SODA*, pages 1498–1517, 2011.
- [61] Ioannis Caragiannis, Angelo Fanelli, Nick Gravin, and Alexander Skopalik. Efficient computation of approximate pure nash equilibria in congestion games. In *FOCS*, pages 532–541, 2011.
- [62] Martin Hoefer and Lisa Wagner. Locally stable matching with general preferences. *CoRR*, abs/1207.1265, 2012.
- [63] X. Zeitoun. Le gain de l’exploration dans les jeux de couplage sur réseau social. In *14ème Congrès de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d’Aide à la Décision (ROADEF 2013)*, Troyes, 2013.
- [64] David Eppstein, Michael T. Goodrich, Maarten Löffler, Darren Strash, and Lowell Trott. Category-based routing in social networks : Membership dimension and the small-world phenomenon. In *CASoN*, pages 102–107, 2011.
- [65] Benjamin Doerr, Mahmoud Fouz, and Tobias Friedrich. Social networks spread rumors in sublogarithmic time. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38 :303–308, 2011.