

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Jean-François Arnoldi

Thèse dirigée par **Frédéric Faure**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**
et de l'école doctorale **Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique**

Résonances de Ruelle à la limite semiclassical

Thèse soutenue publiquement le **jeudi 18 octobre 2012**,
devant le jury composé de :

Frédéric Faure

MCF, Université Joseph Fourier, Directeur de thèse

Dietrich Häfner

Professeur, Université Joseph Fourier, Examineur

Stéphane Nonnenmacher

Ingénieur-Chercheur, CEA Saclay, Rapporteur

Hans Henrik Rugh (excusé)

Professeur, Université Paris Sud, Rapporteur

Johannes Sjöstrand

DR CNRS, Université de Bourgogne, Président



à *Tiphaine*.

Remerciements

"The system breaks man, child, and women into figures, two collum for who is
and who ain't niggaz"

-MOS DEF (MATHEMATICS).

L'usage exige que l'on commence par exprimer sa gratitude à l'égard de son directeur de thèse. Cette tradition bien naturelle pourrait donner l'impression que je me sens un peu obligé de te dire merci, Frédéric, de m'avoir encadré quatre années durant. Il n'en est rien et, bien au contraire, je saisis cette rare occasion pour te remercier du fond du coeur. Merci de m'avoir supporté malgré mes effroyables lacunes et faiblesses, et de m'avoir fait partager ton enthousiasme et ta vision si claire des mathématiques et de la physique. Bien souvent, l'esprit lourd et incertain je discutais quelques instants avec toi pour soudain reprendre goût à cette quête absurde qu'est la recherche fondamentale (en mathématique qui plus est). Ce qui me semblait vain un instant plus tôt m'apparaissait alors beau et digne de tous nos efforts. Quoique qu'il advienne de moi, ta curiosité naturelle et la rigueur de ta pensée seront une source d'inspiration dans ma vie future. Je mesure bien les soucis et que je t'ai causé et te cause encore : à l'heure où j'écris ces lignes tu tremble en silence dans ton bureau craignant que ma soutenance soit un effroyable fiasco te plongeant pour l'éternité dans les méandres de la honte.

Je tiens à remercier Françoise Martin qui a bien voulu imprimer cette thèse dans des délais ridiculement brefs. Ces remerciements vont de pairs avec mes plus plates excuses. De manière générale le personnel de l'institut a toujours été très agréable avec moi. Un grand merci à eux.

Le monde de la recherche mathématique est peuplé (en plus de nombreuses personnalités "exotiques") d'esprits vifs et puissants et c'est un grand honneur pour moi que de tels personnes figurent dans mon jury. Je tiens à remercier chaleureusement Hans-Henrik Rugh et Stéphane Nonnenmacher qui ont accepté de prendre le temps de lire et rapporter ce manuscrit. Je suis touché de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail au travers de leur nombreuses et pertinentes remarques. Enfin Je suis très honoré par la présence de Johannes Sjöstrand et Dietrich Häfner qui complètent mon jury de thèse. Leur présence s'accompagne bien sûr d'une certaine appréhension car je sais qu'ils ne laisseront rien passer.

Il me reste moins d'une heure pour finir d'écrire cette section qui pourtant est la plus importante de toutes. Schooté au flux d'adrénaline qui me traverse les veines depuis

quelques jours, je plonge dans ma mémoire pour y retrouver tous ceux et celles qui font que la vie est si chouette. J'ai la chance d'avoir des amis exceptionnels et qui sont chacun à leur manière une source d'inspiration dans ma route vers le nirvana¹. Je m'efforce d'être digne de ces braves types. Commençons par les matheux, c'est fou ce que ces jeunes gens sont intelligents : Julien (Koju), Mathieu, Alix, Thomas, Bashar, Max, Ariadna et même Simon, respect ma niggaz. Merci Tobias pour ton travail assidu. Je te dois énormément. Hiba et Kevin mes co-bureau quel contraste entre vous deux ! Hiba : il n'y a qu'avec toi que j'ai eu des conversations si étranges sur l'Islam et le Liban. Kevin : bonne chance à toi pour la suite, c'est toujours un plaisir de te croiser. Merci au dernier venu Simon, que j'empêche de travailler en lui posant des questions de grammaire et d'orthographe².

Heureusement pour moi je connais aussi des gens plus ou moins normaux qui pensent que l'étude des maths n'est qu'un moyen pour avoir l'air intelligent et qui préfèrent aller grimper plutôt que de se prendre la tête. Que serais-je sans ces amis-là ? Quentin, Thibault, Sylvain(s), Ben, Jerem, Ricou, Pierre-Jeannot, Thomas, mon frère spirituel Juanito, Rachel, Marion... ah ! mes frères je vous aime tous et toutes ! Mais j'en oublie tellement...

Enfin il y a ceux qui me supportent vraiment depuis (trop) longtemps. Papa et Maman vous faites tellement pour moi sans que je montre la moindre gratitude. Au moins cette thèse servira à cela, je vous le dis cette fois : vous êtes les meilleurs parents dont on puisse rêver. Claire et Mimi je suis pas sûr d'être un grand frère idéal mais je suis fier que vous soyez mes soeurs. Thomas mon frère (mon vrai frère cette fois) c'est toujours un émerveillement pour moi de t'observer. Tu es fou et j'en suis suis bien content ! Régine enfin, tu es presque notre nounou et je suis très heureux que tu puisse venir à ma soutenance. Puisse ta cuisine nous régaler encore longtemps.

Finalement Tiphaine, la personne la plus pure que je connaisse, tu as subi autant que moi le fardeau de ma thèse. Pour ce que ça vaut, celle-ci t'est dédiée.

Grenoble, 16 octobre 2012 (version corrigée du 21 novembre).

1. en effet j'aimerais bien savoir jouer et chanter comme Kurt Cobain
 2. Pourtant il en reste des fautes !

Introduction

”Out, out, brief candle! Life’s but a walking shadow ; a poor player, that struts and frets his hour upon the stage and then is heard no more. It is a tale told by an idiot, full of sound and fury, signifying nothing.”

-W. SHAKESPEARE (MACBETH).

Un système dynamique déterministe est la donnée d’une loi gouvernant l’évolution des points d’un espace métrique mesurable. Pour fixer les idées, disons, une application continue $f : X \rightarrow X$ agissant sur une variété riemannienne compacte X . La théorie du *chaos* est l’étude de systèmes dynamiques déterministes présentant une forte sensibilité aux conditions initiales. La plupart des trajectoires sont instables et, génériquement, deux points initialement proches s’éloignent rapidement et suivent des chemins très différents. A cause de cela, et bien que théoriquement possible, la connaissance exacte d’une trajectoire individuelle ne présente que peu d’intérêt. Par contre, un nuage de points suit en général une évolution universelle, il se disperse rapidement et s’équi-distribue selon une mesure invariante d’équilibre. L’évolution d’un nuage de points, et plus généralement d’une fonction continue $\varphi \in \mathcal{C}(X)$, est régie par (le dual de) l’opérateur *pull-back*, *de transfert*, ou *de Koopman* (cf. section 1.3 du chapitre 1) :

$$\hat{F} : \varphi \rightarrow \varphi \circ f.$$

Dans les systèmes *hyperboliques* ou plus simplement *expansifs* (voir section 1.2) les modes de Fourier de $\hat{F}^n \varphi$ fuient vers l’infini lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. La fonction $\hat{F}^n \varphi$ présente alors des variations sur des échelles de plus en plus petites. A terme l’information sur le nuage de point initial quitte l’échelle d’observation macroscopique et la dynamique semble irréversible. Dans les années 70 Ruelle [Rue] montrait, pour ces modèles, que la fuite vers l’équilibre statistique est gouvernée par certaines valeurs propres de \hat{F} appelées *résonances*. Plus précisément, les *résonances de Ruelle* correspondent au spectre de \hat{F} dans des espaces fonctionnels adaptés.

Cette approche à été considérablement améliorée depuis le milieu des années 90 par Rugh [Rug92], Baladi, Tsujii, Liverani, Blank, Keller et Gouezel [BT, BKL02, GL05, Liv05, BT07]. Il fut en particulier possible de prouver, pour de larges classes de modèles chaotiques, des propriétés statistiques fines tel que le théorème central limite et la décroissance des corrélations.

En physique mathématique les résonances sont traditionnellement associées à des états quantiques métastables, qui interviennent dans la théorie de l'émission spontanée de la lumière par les atomes et la décroissance de l'activité radioactive des noyaux. Elles apparaissent aussi dans l'étude des ondes amorties et de l'équation linéarisée des ondes gravitationnelles en relativité générale [BH10]. L'approche *semiclassique* consiste à étudier le spectre de résonances à la limite des hautes fréquences, ou de manière équivalente, lorsque la *constante de Planck* \hbar , ou n'importe quel autre paramètre semiclassical effectif, tend vers 0.

Les résonances de Ruelle sont quand à elles associées à des "fluctuations de densités" métastables et, pour l'opérateur de transfert, la fuite vers les hauts modes de Fourier peut être interprétée comme une limite semiclassical. Suivant cette analogie, Faure, Sjöstrand et Roy [FRS08] transposèrent les techniques développées pour les résonances quantiques depuis les années 80 par Helffer et Sjöstrand [HS86] aux systèmes chaotiques classiques.

Lorsque le système dynamique n'est que *partiellement hyperbolique* -i.e. neutre le long d'une direction privilégiée, les techniques fonctionnant dans le contexte uniformément hyperbolique doivent être affinées (on pourra en particulier consulter les récents articles de Tsujii sur le sujet [Tsu08, Tsu11]). Dans les cas les plus simples, comme par exemple pour l'extension

$$f : \begin{cases} X \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \rightarrow & X \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ (x, \theta) & \mapsto & (T(x), \theta + \tau(x) \bmod(2\pi)) \end{cases} \quad (0.0.1)$$

d'une application expansive $T : X \rightarrow X$, la présence de la fibration neutre impose à l'opérateur de transfert de préserver les modes de Fourier $e^{i\nu\theta}$ le long de cette direction (cf. (1.3.3) dans le chapitre 1). \hat{F} se décompose alors en une somme directe d'opérateurs \hat{F}_ν , composition d'un opérateur de Koopman expansif agissant sur X avec un opérateur de multiplication par une phase oscillante :

$$\hat{F}_\nu : \varphi \mapsto e^{i\nu\tau} (\varphi \circ T). \quad (0.0.2)$$

Ces opérateurs admettent un spectre discret de résonances (dans des espaces de Sobolev de distributions) et le paramètre de Fourier ν renforce d'avantage l'analogie avec les opérateurs d'évolution quantique si l'on pose formellement $\hbar \equiv \frac{1}{\nu}$. Dans le langage de l'analyse semiclassical \hat{F}_ν est un Opérateur Intégral de Fourier (OIF) associé à une application symplectique F sur le cotangent T^*X qui gouverne l'évolution en espace et en modes de Fourier des paquets d'ondes. Suivant cette remarque, Faure montre dans [Fau11] que le caractère expansif de T implique l'existence d'un ensemble captif compact $K \subset T^*X$ pour la dynamique symplectique. Des propriétés de la dynamique près de K il déduit l'existence générique d'un gap spectral asymptotique, impliquant le mélange exponentiel de la dynamique générée par f . On montrera que l'on peut aussi déduire des estimations de Weyl, bien connues dans le contexte quantique depuis l'article fondateur de Sjöstrand [Sjö90], pour le nombre de résonances à la limite $\hbar \searrow 0$. Plus précisément on verra que le nombre de résonances hors d'un rayon spectral arbitraire est majoré par le nombre de cellules de Planck³ contenues dans un $\sqrt{\hbar}$ -voisinage de K . Cette idée s'adapte

3. Boules de rayon $\sqrt{\hbar}$ [LL65]

aux extensions non-abéliennes d'applications expansives (ce sera l'objet du chapitre 3) mais aussi aux flots hyperboliques [FS11], étudiés de cette manière par Faure-Sjöstrand et Tsujii [Tsu11].

Si $X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ est une surface non compacte à courbure constante -1 , le rapport entre résonances quantiques (les pôles de la résolvante du Laplacien hyperbolique Δ_X) et les résonances de Ruelle du *flot géodésique* n'est pas une simple analogie. En effet, la *fonction zêta de Selberg* donne une correspondance entre le spectre de longueur des géodésiques fermées de X et les résonances de Δ_X . *L'application de Bowen-Series* code le flot géodésique par une suspension d'une application expansive sur l'ensemble limite au bord du plan hyperbolique. Les opérateurs de transferts qui apparaissent sont alors du type (0.0.2) mais où l'application expansive est "*ouverte*" (cf. chapitre 4) et admet un ensemble invariant de Cantor [Bor07].

Dans le chapitre 4 on étudie ce type d'opérateurs de transferts et l'on déduit, entre autres, une estimation de Weyl fractale pour la densité de leurs résonances à la limite semiclassique. Ce résultat est l'analogue classique du théorème de Lin-Guillopé-Zworski pour les résonances de Δ_X [GLZ04].

Plan de la thèse

Les chapitres 1 et 2 sont introductifs. On commence par présenter les problématiques actuelles du chaos classique en lien avec la thèse et on énonce les résultats obtenus. Dans le chapitre 2 on expose brièvement la théorie des opérateurs pseudo-différentiels dans le but de fournir une boîte à outils qui nous servira tout au long du mémoire.

Le chapitre 3 propose une approche semiclassique des extensions d'applications expansives vers des groupes de Lie compacts, dont l'exemple (0.0.1) est un cas particulier. On se restreindra essentiellement à l'extension non abélienne la plus simple mais on commentera brièvement le cas général, et les phénomènes nouveaux que l'on peut attendre. On verra que la décomposition (0.0.2) se transpose bien au contexte non-abélien. On se servira alors de la théorie des états cohérents pour les groupes de Lie, développée dans les années 70 par Perelomov [Per86] et Gilmore [Gil74], pour mettre en oeuvre les outils semiclassiques. On en déduira une estimation de Weyl et un gap spectral, prouvant que la fuite vers l'équilibre statistique dans ces modèles est gouvernée par un opérateur de rang fini (en accord avec les résultats obtenus par Tsujii [Tsu08] et Faure [Fau11] pour les semi-flots partiellement expansifs et les extensions abéliennes).

Dans le chapitre 4 on étend la démarche du chapitre précédent aux modèles "ouverts" pour lesquels la dynamique classique présente un ensemble captif de Cantor. On montrera l'existence d'un spectre discret de résonances et on prouve une loi de Weyl fractale, analogue classique du théorème de Lin-Guillopé-Zworski [GLZ04] pour les résonances du laplacien hyperbolique. On montre aussi un gap spectral asymptotique, de la même façon que dans le chapitre 3. On expliquera pourquoi ces modèles, au delà de leur intérêts pour les surfaces à courbure constante, semblent être des objets d'étude adaptés pour

approcher des questions importantes et difficiles du chaos classique ou quantique. On pense en particulier au problème de la minoration du nombre de résonances, étudié dans le contexte des applications quantiques par Nonnenmacher et Zworski [NZ07].

On notera pour finir que ces modèles simples, "ouverts" ou "fermés", peuvent être très simplement transformés en modèles présentant une *hyperbolicité non uniforme*, tels que ceux étudiés par Rugh dans [Rug99]. La dynamique admet alors un point fixe non hyperbolique, à l'origine de *l'intermittence* qui est une caractéristique fondamentale des systèmes chaotiques naturels, comme la turbulence [Vas00].

Table des matières

1	Systèmes dynamiques chaotiques	10
1.1	Ergodicité et mélange	11
1.2	Modèles hyperboliques et partiellement hyperboliques	13
1.3	L'opérateur de transfert	18
1.4	Chaos quantique : résonances du laplacien hyperbolique	22
2	Éléments d'analyse semiclassique	27
2.1	Opérateurs \hbar -Pseudo-Différentiels	27
2.2	Passage aux variétés	33
3	Extensions compactes d'applications expansives	36
3.1	Spectre de résonances	38
3.2	Applications canoniques	40
3.3	Gap spectral pour les extensions vers $SU(2)$	51
3.4	Loi de Weyl fractale pour les extensions vers $SU(2)$	54
3.5	Remarques diverses et perspectives	63
4	Systèmes ouverts	69
4.1	Le modèle	70
4.2	Spectre discret de résonances	75
4.3	Dynamique classique sur T^*I	78
4.4	Gap spectral asymptotique	87
4.5	Loi de Weyl fractale	93
4.6	Remarques diverses et perspectives	100
A	Lemmes d'analyse fonctionnelle	104
A.1	Une application du théorème Fredholm analytique	104
A.2	Perturbations auto-adjointes	105
A.3	Valeurs singulières d'opérateurs compacts	105
B	Théorème de Ruelle	107
C	Estimations de dérivées d'applications contractantes	110

Chapitre 1

Systèmes dynamiques chaotiques

"This generation may be the one that will face Armageddon."

-RONALD REAGAN (PEOPLE MAGAZINE, 1985).

Un système dynamique topologique (X, f) est la donnée d'un espace métrique compact (X, d) et d'une application continue $f : X \rightarrow X$. La dynamique sur X est engendré par itération. Si f^n dénote la composition n fois de l'application f , l'orbite d'un point x correspond à la suite $\{x, f(x), \dots, f^n(x)\dots\}$. Les systèmes dynamiques chaotiques ont la particularité de posséder de nombreuses trajectoires denses et de mélanger les points.

Plus précisément un système dynamique $f : X \rightarrow X$ est *topologiquement transitif* s'il existe un point $x \in X$ dont l'orbite $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans X . (En fait, Il suffit qu'il existe une trajectoire dense dans X pour que tout ouvert non vide U visite l'intégralité de X en temps fini¹ [KH95, lemme 1.4.2]). Un système dynamique est *topologiquement mélangeant* si, pour tout ouverts non vides $U, V \subset X$, $f^n(U)$ intersecte V pour tout n assez grand. Cette définition correspond avec l'image intuitive du mélange. Une goutte d'encre se mélange dans un verre d'eau en se répartissant de façon homogène dans tout le récipient. Tout système topologiquement mélangeant est nécessairement topologiquement transitif.

Exemple 1.1. Les applications expansives linéaire du cercle $E_k : x \mapsto kx \pmod{1}$, où k est un entier supérieur ou égal à 2, sont topologiquement mélangeantes. Plus généralement toute application expansive $E : S^1 \rightarrow S^1$ de degré k est mélangeante car continûment conjuguée à E_k . La translation $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$ est topologiquement transitive si α est irrationnel mais jamais mélangeante [KH95].

On peut considérer des dynamiques à temps continu en remplaçant f par un *flow*

$$\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X, (t, x) \mapsto \phi_t(x)$$

satisfaisant la propriété de (semi-)groupe

$$\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)), \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{R}_+)$$

1. Précisément, pour tout ouverts non vides U et V il existe n tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

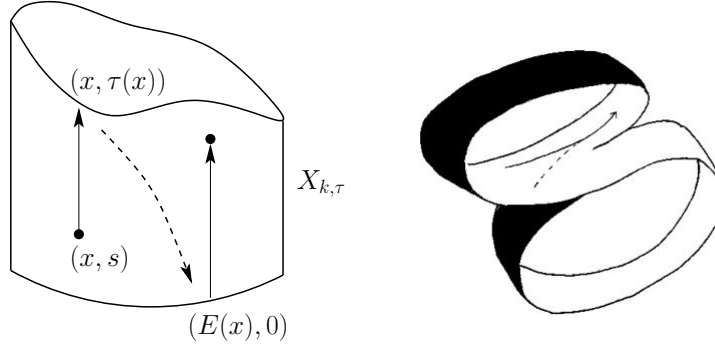


FIGURE 1.1 – Variété à 2 branches $X_{2,\tau}$ associée à la suspension d’une application expansive de degré 2.

Tout flot définit une application ϕ_t , avec t fixé. Inversement on peut construire des flots à partir d’applications par la procédure de suspension. Par exemple

Exemple 1.2. Soit $E : S^1 \rightarrow S^1$ une application expansive de degré k (cf. exemple 1.1), et $0 < \tau(x)$ une fonction ”toit” continue. On prescrit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in S^1$ et $0 \leq s < \tau(x)$,

$$\phi_t(x, s) = \left(E^n(x), s + t - \tau^{[n]}(x) \right),$$

où, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\tau^{[m]}(x) := \sum_{j=0}^{m-1} \tau(E^j(x))$ et n est l’unique entier vérifiant $0 \leq t + s - \tau^{[n]}(x) < \tau(E^n(x))$. ϕ est un semi-flot sur un sous ensemble de $X_{k,\tau} \subset S^1 \times \mathbb{R}$. Partant du point (x, s) une trajectoire évolue à vitesse unité le long de la direction s , puis, lorsque elle atteint $(x, s = \tau(x))$, ”saute” en position $(E(x), 0)$ et ainsi de suite. $X_{k,\tau}$ a la structure d’une variété compacte à k -branches :

$$X_{k,\tau} := \{(x, s) : x \in S^1 \times \mathbb{R}\} / \{(x, \tau(x)) \sim (E(x), 0)\}.$$

dont le revêtement est $S^1 \times \mathbb{R}$. On peut interpréter l’effet de τ comme une variation de la vitesse le long de la direction s dépendant du point base x pour voir que $X_{k,\tau}$ est difféomorphe à $X_{k,1}$ -cf. fig.(1.1). Bien que très simple, cette classe de systèmes exhibe un comportement chaotique subtil dont la compréhension n’est pas complète [Tsu08]. Les modèles étudiés dans cette thèse partagent de nombreux points commun avec ce type de suspensions.

1.1 Ergodicité et mélange

Si $f : X \rightarrow X$ est mesurable, alors le système dynamique généré est lui même *mesurable* lorsqu’il existe une mesure de probabilité μ , f -invariante sur X . Si les seuls ensembles mesurables f -invariants sont de mesure 0 ou 1 alors μ est *ergodique* pour f . En termes fonctionnels cela est équivalent à ce que toutes les fonctions mesurables

f -invariantes soit constantes μ -presque partout. L'ergodicité correspond à la propriété de transitivité topologique vue au travers d'une mesure invariante.

D'après le *théorème de Birkhoff*, pour toute observable $\varphi \in L^1(X, \mu)$, la moyenne temporelle $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$ converge, lorsque $n \nearrow \infty$ vers la moyenne spatiale $\int_X \varphi d\mu$ μ -p.p. si et seulement si μ est ergodique pour f .

L'existence d'une mesure ergodique n'est pas une caractéristique spécifique du chaos : si l'on choisit une mesure ne chargeant qu'un seul point fixé par f alors la mesure est trivialement ergodique pour f . On peut par contre se demander s'il existe une mesure μ pour laquelle le théorème de Birkhoff est vrai sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle. C'est le cas si μ est ergodique et absolument continue mais aussi, dans le contexte hyperbolique, lorsque μ est une mesure SRB (Sinai-Ruelle-Bowen) dont la restriction au feuilletage instable de X est absolument continue (dans ce contexte X est une variété différentiable). De telles mesure sont appelées *mesures physiques*.

Notons que si μ est ergodique et si $d\nu = \rho d\mu$ est une autre mesure invariante absolument continue par rapport à μ alors, $\forall \varphi$ mesurable,

$$\int \varphi d\nu = \int \varphi \cdot \rho d\mu = \int (\varphi \circ f) \cdot \rho d\mu = \int \varphi \cdot \rho \circ f^{-1} d\mu,$$

ainsi, $\rho \circ f^{-1} = \rho \Rightarrow \rho = 1$ μ -p.p. Par conséquent f n'admet aucune autre mesure invariante absolument continue par rapport à μ .

Un système dynamique mesurable (X, f, μ) est *mélangeant* si pour tout ensembles mesurables A, B ,

$$\mu(f^{-n}(A) \cap B) \rightarrow \mu(A) \mu(B)$$

lorsque n tend vers l' ∞ . Pour tout ensemble invariant A on a $\mu(f^{-n}(A) \cap X \setminus A) = \mu(A \cap X \setminus A) = 0$ et le mélange implique $\mu(A) \mu(X \setminus A) = 0$. μ est donc nécessairement ergodique. Pour caractériser le mélange de manière plus quantitative, à tout couple φ, ψ dans $L^2(X, \mu)$ on associe la *fonction de corrélation dynamique*

$$C_{\varphi, \psi}(n) := (\varphi \circ f^n; \psi)_{L^2(X, \mu)} - \int_X \varphi d\mu \int_X \psi d\mu$$

Le système dynamique est mélangeant si et seulement si, pour toutes observables φ, ψ appartenant à un système complet de fonctions de $L^2(X, \mu)$, $C_{\varphi, \psi}(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Les systèmes chaotiques qui nous intéressent seront généralement mélangeants par rapport à une mesure physique. Une question centrale concerne la vitesse de décroissance de la fonction de corrélation dynamique. En particulier, si il existe $\delta > 0$, et une constante C tels que, pour n suffisamment grand, et pour toutes observables suffisamment régulières

$$|C_{\varphi, \psi}(n)| \leq C e^{-\delta n}$$

le système dynamique est dit *exponentiellement mélangeant*. L'étude précise du taux de décroissance permet de déduire des propriétés statistiques fines tel que le théorème central limite ou encore le principe d'invariance presque sûre, qui traduisent le fait que la dynamique se comporte effectivement comme un phénomène stochastique [Liv96].

Exemple 1.3. Les applications lisses et expansives du cercle admettent des mesures invariantes μ , lisses et absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, et sont exponentiellement mélangeantes vis à vis de celles-ci. Les suspensions de ces applications sont génériquement exponentiellement mélangeantes pour la mesure $d\mu ds$ (Dolgopyat [Dol98] Tsujii [Tsu08]) mais la vitesse de mélange admet toujours une borne supérieure liée à l'entropie (Naud [Nau09]). La présence d'une direction neutre enrichit significativement la dynamique et peut être une obstruction au mélange.

1.2 Modèles hyperboliques et partiellement hyperboliques

On présente dans cette section des modèles chaotiques différentiables bien connus, mais pas forcément bien compris, dans un ordre -subjectif- croissant de complexité.

Applications expansives. Soit (X, g) une variété Riemannienne lisse, compacte, connexe et sans bords de dimension d sur laquelle agit une application C^∞

$$T : X \rightarrow X$$

telle qu'il existe $\lambda > 1$ satisfaisant, pour tout $x \in X, u \in T_x X$,

$$\|D_x T \cdot u\|_g \geq \lambda \|u\|_g. \tag{1.2.1}$$

Une telle application est dite *expansive* et définit un N -revêtement de X . Le système dynamique engendré est automatiquement topologiquement mélangeant car facteur d'un décalage sur l'espace des symboles à N lettres ([Bal00] chap. 2). D'après Shub [Shu70], le revêtement universel de X est nécessairement difféomorphe à \mathbb{R}^d et sa caractéristique d'Euler, nulle. Le tore ou plus généralement les *nil-variétés*, construites comme quotient compact de *groupes de Lie nilpotents*, sont de ce type.

Les exemples typiques si X est le cercle $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont les applications linéaires E_k (ex. 1.1) et leur petites perturbations. Plus généralement si X est le tore plat d -dimensionnel \mathbb{T}^d , on pourra penser à

$$T(x) = Ax + \psi(x)$$

avec $A \in Gl(d, \mathbb{Z})$ une matrice dilatante à coefficients entiers : $\forall u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \|Au\| \geq \lambda_0 \|u\|$; avec $\lambda_0 > 1$. Dans ce cas, l'application² $\psi : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ doit être choisie telle qu'il existe $\lambda_0 > \lambda > 1$ de sorte que, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$

$$\|D_x \psi \cdot u\| \leq (\lambda_0 - \lambda) \|u\|$$

$T : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ est alors λ -expansive et tout point de X admet $N = \det A$ antécédents. Toute application expansive C^∞ est exponentiellement mélangeante par rapport à une mesure invariante physique lisse (qui est aussi la mesure SRB [KH95]).

2. i.e. une fonction à valeur dans \mathbb{R}^d 1-périodique dans toute les variables

Difféomorphismes d'Anosov. Soit X est une variété au moins \mathcal{C}^1 . $f : X \rightarrow X$ est un *difféomorphisme Anosov* (ou *uniformément hyperbolique*) si il existe une métrique Riemannienne (pas forcément lisse) g et une décomposition invariante³ du fibré tangent $TX := \{T_x X\}_{x \in X}$

$$\forall x \in X; T_x X = E^s(x) \oplus E^u(x)$$

et $\lambda > 1$ de sorte que, pour tout $x \in X$

$$\forall v \in E^s(x), \forall n \geq 0, \|D_x f^n \cdot v\|_g \leq \lambda^{-n} \|v\|_g$$

$$\forall v \in E^u(x), \forall n \geq 0, \|D_x f^n \cdot v\|_g \geq \lambda^n \|v\|_g$$

Pour de tels systèmes il existe en tout point une direction stable et une direction instable, ces deux directions inversant leurs rôles suivant que l'on regarde l'évolution dans le passé ($n < 0$) ou le futur ($n > 0$).

Comme pour les applications expansives, l'existence d'un difféomorphisme Anosov agissant sur une variété est une contrainte topologique très restrictive. En fait, les seuls exemples connus de variétés admettant un difféomorphisme d'Anosov sont le tore et les nilvariétés [KH95, chap. 17]. Il est conjecturé que ce sont les seules. Durant les années 60, Anosov montra dans sa thèse que tout difféomorphisme \mathcal{C}^2 uniformément hyperbolique admettant une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est nécessairement mélangeant⁴.

Les systèmes d'Anosov ont été étudiés par de nombreux auteurs et l'état des connaissances à leur sujet est aujourd'hui assez bon. En particulier, on sait montrer l'existence de mesure SRB et le mélange exponentiel lorsque celle-ci est lisse, et bien plus. On se réfère à l'ouvrage de référence de Baladi [Bal00] pour de plus amples références et remarques historiques concernant ces modèles fondamentaux.

En lien direct avec cette thèse est l'article de Faure, Sjöstrand et Roy [FRS08] qui propose une approche semiclassique et retrouve des résultats de Baladi, Tsujii et autres en utilisant l'analyse micro-locale.

Flots d'Anosov. Sur une variété X de dimension supérieure ou égale à 3, $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ est un *flot d'Anosov* ou *uniformément hyperbolique*, s'il existe une métrique Riemannienne g , une constante $\lambda > 1$ et une décomposition invariante du fibré tangent

$$\forall x \in X; T_x X = E^s(x) \oplus E^u(x) \oplus \mathbb{R}V(x)$$

3. l'invariance de la décomposition signifiant que, pour tout $x \in X, \forall v \in E^s(x), D_x f \cdot v \in E^s(f(x))$ et de même pour la direction $E^u(x)$.

4. Un système dynamique est Lebesgue mélangeant ssi

$$C_{\varphi, \psi}^{Leb}(n) := (\varphi \circ f^n; \psi)_{L^2(X, m)} \rightarrow \left(\int_X \bar{\varphi} d\mu \right) \left(\int_X \psi dm \right)$$

ou μ est la mesure invariante SRB (pas forcément lisse) et dm la mesure volume sur X . Prouver que tout système d'Anosov est Lebesgue mélangeant reste un problème ouvert.

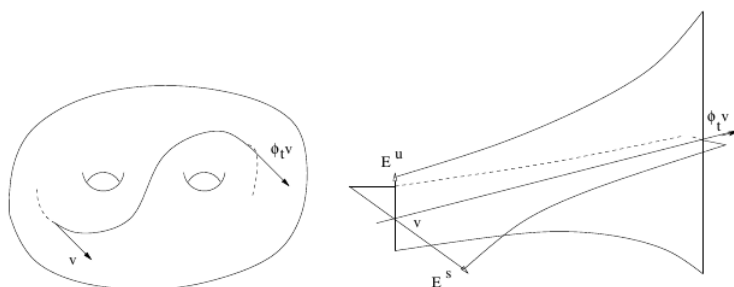


FIGURE 1.2 – Le flot géodésique sur les surfaces à courbure négatif est Anosov.

de sorte que pour tout $x \in X$

$$\forall v \in E^s(x), \forall t \geq 0, \|D_x \phi_t \cdot v\|_g \leq \lambda^{-t} \|v\|_g$$

$$\forall u \in E^u(x), \forall t \geq 0, \|D_x \phi_{-t} \cdot u\|_g \geq \lambda^t \|u\|_g$$

où on a noté $\mathbb{R}V$ la direction neutre engendrée par le générateur du flot :

$$\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t \right) (x) =: V(x) \in T_x X$$

Les applications et les flots d'Anosov sont des systèmes dynamiques bien distincts du fait de la présence d'une direction neutre pour les flots, inhérente à l'évolution à temps continu. Les flots Anosov lisses admettant une mesure invariante de densité continue par rapport à la mesure volume sont ergodique.

Les Flots uniformément hyperboliques les plus étudiés, connus bien avant Anosov, sont les flots géodésiques sur les surfaces compactes connexes à courbure négative :

Soit (M, g) une surface Riemannienne et SM son fibré tangent unitaire. *Le flot géodésique* $\phi_t : SM \rightarrow SM$ correspond au transport parallèle des vecteurs tangents de SM le long des géodésiques qu'ils génèrent. Plus précisément, à tout point $v \in S_x M$ il est associée une géodésique $\gamma_v : t \mapsto \gamma_v(t) \in X$ telle que $\gamma_v(0) = x$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Par définition

$$\phi_t : v \mapsto \dot{\gamma}_v(t) \in S_{\gamma_v(t)} M$$

Si (M, g) est une surface à courbure négative alors le flot géodésique sur $X := SM$ est Anosov [KH95, p.554]. Une mesure invariante naturelle pour ϕ_t est la *mesure de Liouville* sur SM , équivalente au volume.

L'ergodicité du flot géodésique pour la mesure de Liouville est connue depuis Hopf. En 1974 Ornstein, Weiss et Ratner montrèrent la propriété de mélange pour ces flots. Il fallut attendre 1998 pour que Dolgopyat démontre le mélange exponentiel [Dol98] pour les surfaces⁵. En 2003 Liverani put étendre le résultat de Dolgopyat à toutes les dimensions et plus généralement aux flots de contacts [Liv04].

5. Dans le cas courbure constante ce résultat était déjà établi par Moore en 1986 en mettant à profit le caractère algébrique de telles surfaces.

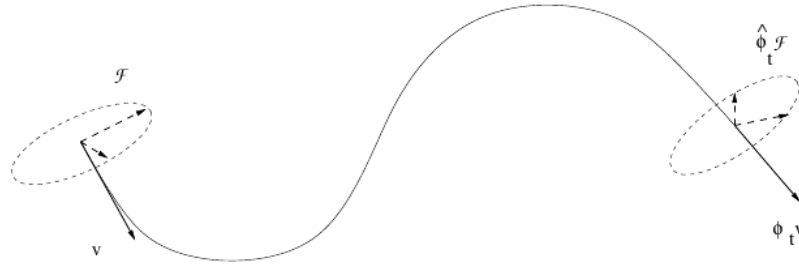


FIGURE 1.3 – Flot de repère sur une variété de dimension 3. La mesure invariante est dans ce cas $\mu \times \lambda_{U(1)}$.

Flots de repères. D’après le paragraphe précédent, Le flot géodésique sur une variété compacte M de dimension n à courbure sectionnelle négative est toujours mélangeant. A tout vecteur $v \in S_x M$ on peut associer $n - 1$ autres vecteurs afin de définir un repère orthonormal

$$\mathcal{R}_x = (v, u_1, \dots, u_{n-1})$$

de $T_x X$. Le flot géodésique ϕ_t transporte v en $\phi_t(v) \in S_{\gamma(t)} M$, où γ est la géodésique tangente à v à l’instant $t = 0$. Par transport parallèle le long de la géodésique, \mathcal{R}_x est transporté en

$$\mathcal{R}_{\gamma(t)} = (\phi_t(v), u'_1, \dots, u'_{n-1})$$

Si on note $\mathcal{R}M$ l’ensemble des repères orientés orthonormés de TM , cela définit un flot

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_t : \mathcal{R}M &\rightarrow \mathcal{R}M \\ \mathcal{R}_x &\mapsto \mathcal{R}_{\gamma(t)} \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

admettant comme mesure invariante naturelle $\hat{\mu} = \mu \times \lambda_{SO(n-1)}$, où μ la mesure de Liouville sur SM et $\lambda_{SO(n-1)}$ la mesure de Haar sur le groupe de Lie compact $SO(n - 1)$. En contraste avec les flots géodésiques, *Les flots de repères* (1.2.2) ne sont pas toujours ergodique. Dans [BG80] Brin et Gromov montrèrent l’ergodicité⁶ lorsque la dimension est impaire mais différente de 7. Les comportements quantitatifs de ces systèmes dynamiques sont particulièrement subtils de par la présence de fibres invariantes non abéliennes et beaucoup reste à faire sur ce sujet.

Extensions d’applications hyperboliques vers des groupes de Lie compacts .

Les flots géodésiques, et plus généralement les flots de repères, sur les variétés compactes à courbure sectionnelle négative, sont des exemples de *systèmes partiellement hyperboliques*, dans le sens où ils préservent un feuilletage neutre et sont hyperboliques dans la direction transverse.

6. Pollicott, Burns et Karcher purent généraliser ce résultat à toute variété de dimension impaire à courbure suffisamment pincée.

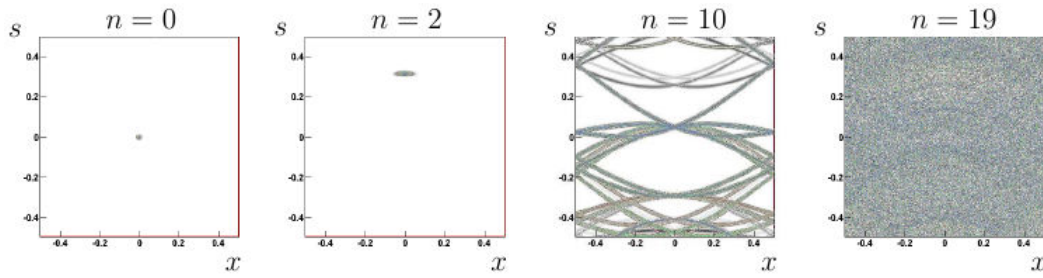


FIGURE 1.4 – Évolution numérique d'un nuage de points évoluant selon l'extension abélienne $\widehat{T}_\tau : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ de l'application expansive linéaire du cercle $T(x) = 2x \pmod{1}$. Dans cet exemple $\widehat{T}_\tau(x, s) = (T(x), s + \tau(x) \pmod{1})$ avec $\tau(x) = \cos(2\pi x)$. – issu de [Fau11].

Une classe attractive de modèles possédant ces caractéristiques, et que l'on étudiera en détail dans le chapitre 3, est celle des *extensions vers un groupe de Lie compact* de difféomorphismes hyperboliques (ou plus simplement d'applications expansives).

On se donne (f, X, μ) un système hyperbolique mélangeant et

$$\tau : X \rightarrow \mathbb{G}$$

une application différentiable de X vers un groupe de Lie connexe et compact. L'extension $\widehat{f}_\tau : X \times \mathbb{G} \rightarrow X \times \mathbb{G}$ s'écrit alors

$$\widehat{f}_\tau : (x, g) \mapsto (f(x), \tau(x) \cdot g),$$

et admet une mesure invariante naturelle $\widehat{\mu} := \mu \times \lambda_{\mathbb{G}}$; avec $\lambda_{\mathbb{G}}$ la mesure de Haar sur \mathbb{G} . Les propriétés qualitatives de ces modèles sont bien comprises depuis les travaux de Brin, Burns, Wilkinson, puis Parry-Pollicott. On peut montrer de manière très générale l'ergodicité et le mélange pour des choix génériques de fonctions τ [Bri75].

En 2002 Dolgopyat fit une percée significative en montrant que de telles extensions vers des groupes de Lie compacts, semi-simples et simplement connexes, sont génériquement rapidement mélangeantes, dans le sens où la vitesse de décroissance de la fonction de corrélation est supra-polynômiale. Il montra de plus que les extensions d'applications expansives sont génériquement exponentiellement mélangeantes [Dol02].

Du mélange exponentiel (plus généralement du mélange rapide) Field, Melbourne, Nicol et Török [MFT05] suivant de précédents travaux de Melbourne et Török [MT02] purent déduire le théorème central limite ou encore le principe d'invariance presque sûre, qui traduisent le fait que la dynamique se comporte effectivement comme un phénomène stochastique. (On pourra consulter à profit les articles cités pour plus de commentaires et références). D'un autre côté, très récemment, Naud [Nau11] dans le cadre analytique, sut exhiber une borne supérieure à la vitesse de mélange liée à l'entropie de f .

1.3 L'opérateur de transfert

L'étude quantitative des modèles décrits dans la section 1.2 se fait au travers d'une analyse spectrale d'un opérateur linéaire positif associé à la dynamique. Dans cette section on définit cet opérateur puis on énonce les résultats obtenus sur son spectre, dans le cas particulier des applications expansives puis des extensions partiellement expansives, qui feront l'objet du chapitre 3.

L'opérateur de Perron Frobenius. L'idée de Ruelle pour étudier les systèmes dynamiques chaotiques consiste à analyser l'évolution des densités de probabilités. Soit Ω la forme volume sur une variété X supposée différentiable et orientable. Soit $f : X \rightarrow X$ un difféomorphisme local. le *Jacobien* de f se définit par

$$(f^*\Omega)_x = \Omega_{f(x)}(D_x f(\cdot), \dots, D_x f(\cdot)) = |\det D_x f| \cdot \Omega_x$$

Pour tout ensemble mesurable $A \subset X$, on note $\mathbf{m}(A) := \int_A \Omega$ la mesure associée à Ω . On a donc

$$\mathbf{m}(f^{-1}A) := \int_{f^{-1}A} \Omega = \int_A (f^{-1})^* \Omega$$

avec, pour tout $x \in X$

$$\left((f^{-1})^* \Omega \right)_x := \left(\sum_{y \in f^{-1}(x)} |\det D_y f|^{-1} \right) \Omega_x$$

Ainsi, l'invariance de \mathbf{m} sous l'action induite par f se traduit localement par la condition

$$\sum_{y \in f^{-1}(x)} |\det D_y f|^{-1} = 1.$$

Plus généralement, si $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une densité, la mesure $d\mu = \rho d\mathbf{m}$ est transportée par la dynamique générée par $f : X \rightarrow X$ comme

$$(f^{-1})^* : d\mu = \rho d\mathbf{m} \rightarrow (\hat{F}^* \rho) d\mathbf{m}$$

où \hat{F}^* désigne l'opérateur positif de Perron-Frobenius

$$\left(\hat{F}^* \rho \right)(x) := \sum_{y \in f^{-1}(\{x\})} \frac{\rho(y)}{|\det D_y f|}. \quad (1.3.1)$$

bien définit sur $\mathcal{C}^\infty(X)$. L'adjoint $L^2(X, \mathbf{m})$ de \hat{F}^* , que l'on notera naturellement \hat{F} , n'est autre que l'opérateur pull-back, appelé aussi *opérateur de transfert* :

$$\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ f. \quad (1.3.2)$$

Si μ est une mesure invariante pour f , l'extension de \hat{F} à $L^2(X, \mu)$ est isométrique. De plus si μ est ergodique, la fonction constante μ -p.p. est la seule fonction propre de \hat{F} avec

valeur propre 1, donc 1 est une valeur propre simple de $\hat{F} : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$. Lorsque f est (faiblement) mélangeant, alors l'opérateur n'admet aucune valeur propre autre que 1 : son spectre est continu dans $L^2(X, \mu)$ [PY98a]. L'étude spectrale des opérateurs \hat{F} et \hat{F}^* dans des espaces fonctionnels adaptés constitue un angle d'attaque fructueux pour comprendre de manière quantitative la convergence vers l'équilibre statistique des systèmes chaotiques. Cette approche initiée, entre autres, par Ruelle et Bowen dans les années 70 [Rue] puis par Rugh [Rug92], connaît un essor nouveau depuis les travaux de Baladi [Bal00], Tsujii, [BT07, BT] Liverani, Blank et Keller [BKL02] et Gouezel [GL05].

Résonances de Ruelle dans les systèmes expansifs. *Les espaces de Sobolev*

$$H^{-m}(X) \subset \mathcal{S}'(X)$$

sont constitués de distributions (ou de fonctions continues si $m < d$) dont les coefficients de Fourier ne croissent pas plus vite que $\|\xi\|^\alpha$, avec $\alpha < m - \frac{d}{2}$ [Tay96a]. Par ailleurs, on peut définir par dualité l'action de \hat{F} sur les distributions $\alpha \in \mathcal{D}'(X)$ en posant, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$,

$$\left(\hat{F}\alpha\right)(\varphi) := \alpha\left(\overline{\hat{F}^*\varphi}\right)$$

où \hat{F}^* désigne l'opérateur de Perron-Frobenius (1.3.1). Le résultat fondamental suivant⁷ est dû à Ruelle dans les années 80.

Théorème 1.4. (Ruelle [Rue86]). *Soit $T : X \rightarrow X$ une application expansive telle que définie en 1.2. Pour tout m , L'opérateur de transfert (1.3.2) associé laisse invariant $H^{-m}(X)$. De plus*

$$\hat{F} : H^{-m}(X) \rightarrow H^{-m}(X)$$

est à spectre discret hors du disque de rayon

$$r_m = \lambda^{-m}(N/\lambda^d)^{1/2}$$

Les valeurs propres hors de ce disque, ainsi que leur espaces propres respectifs, ne dépendent pas de m et définissent les résonances de Ruelle de \hat{F} .

Par dualité,

$$\hat{F}^* : H^m(X) \rightarrow H^m(X)$$

admet du spectre discret hors du disque de rayon r_m . Si φ est une fonction propre de \hat{F}^* , comme φ ne dépend pas de m ,

$$\varphi \in \bigcap_{m>0} H^m(X) \cong \mathcal{C}^\infty(X).$$

Les fonctions propres de \hat{F}^* sont donc des fonctions lisses sur X . On sait par ailleurs (théorème de Perron Frobenius [KH95]) que la valeur propre 1 est simple et dominante et la fonction propre ρ associée strictement positive. La mesure SRB μ sur X est alors

7. On propose une preuve basé sur l'analyse semiclassique dans l'appendice.

$d\mu = \rho dm$. Si $\{\lambda_j\}_{j \geq 0} \in \mathbb{C}$ est la suite décroissante en module des valeurs propres (supposées simples), la décomposition spectrale de \hat{F} donne pour toutes fonctions test $\varphi, \psi \in C^\infty(X)$,

$$\left(\hat{F}^n \varphi; \psi \right)_{L^2(X, \mu)} = (1; \varphi)_{L^2(X, \mu)} (1; \bar{\psi})_{L^2(X, \mu)} + \mathcal{O}(|\lambda_1|^n).$$

En d'autres termes, les résonances de Ruelle gouvernent la convergence vers l'équilibre statistique dans les systèmes expansifs. Dans [KR04] Rugh et Keller construisent, lorsque $X = S^1$ et dans le contexte analytique, des exemples pour lesquels il existe bien des résonances autre que 1 hors du rayon spectral essentiel.

Le théorème de Ruelle reste vrai pour les difféomorphismes d'Anosov en remplaçant les espaces de Sobolev usuel par des espaces anisotropes [BKL02] [FRS08]. Dans ce cas la mesure SRB est un point fixe dans un espace de distributions pour l'opérateur de Perron-Frobenius. En général cette mesure est singulière sur le feuilletage stable.

Pour les systèmes partiellement hyperboliques la situation est rendue plus délicate par la présence d'une fibration neutre. Dans [Tsu08] Tsujii montre néanmoins que le spectre essentiel de l'opérateur de transfert associé aux semi-flots de l'exemple 1.2 est génériquement égal à $\Lambda^{-1/2}$ où $\Lambda > 1$ est le coefficient d'expansion minimal de l'application expansive suspendue, montrant le mélange exponentiel en précisant l'estimée de Dolgopyat. Il put ensuite généraliser cela au flots Anosov de contact [Tsu11].

Dans [Fau11] Faure retrouve le résultat de Tsujii pour les extensions abéliennes d'applications expansives. Dans le chapitre 3 on adapte l'approche de Faure à l'exemple non-abélien le plus simple $\mathbb{G} = \text{SU}(2)$, pour déduire sous une hypothèse sur la fonction d'extension τ , le résultat suivant :

Théorème 1.5. Gap spectral pour les extensions vers $\text{SU}(2)$ [Arn12]. *Soit*

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\tau : C^\infty(X \times \text{SU}(2)) \rightarrow C^\infty(X \times \text{SU}(2))$$

l'opérateur de transfert associé à l'extension vers $\text{SU}(2)$ d'une application expansive $T : X \rightarrow X$ telle que définie dans la section 1.2. Sous une hypothèse sur τ (partielle captivité cf. chap. 3), Pour tout $\rho > \lambda^{-\dim(X)/2}$, où $\lambda > 1$ est le taux minimal d'expansion de T , il existe un opérateur de rang fini \hat{k} tel que, pour tout jeu d'observables Φ, Ψ suffisamment régulières,

$$\left(\widehat{\mathfrak{F}}_\tau^n \Psi; \Phi \right)_{L^2(\hat{\mu})} = \left(\hat{k}^n \Psi; \Phi \right)_{L^2(\hat{\mu})} + \mathcal{O}(\rho^n),$$

où $\hat{\mu} := \mu \times \lambda_{\text{SU}(2)}$ est la mesure lisse invariante sur $X \times \text{SU}(2)$.

Ce résultat montre que la convergence vers l'équilibre statistique est contrôlée par un opérateur de rang fini, modulo des termes d'ordre ρ^n avec $1 > \rho > \lambda^{-d/2}$. L'analyse harmonique permet de décomposer l'opérateur de transfert en une somme directe et le rôle joué par la fibration neutre devient explicite. En effet, en utilisant le théorème de

Peter-Weyl, on peut montrer -voir la section introductive du chapitre 3- que

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\tau = \bigoplus_{\alpha} \bigoplus_{i=1}^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_\alpha)} \widehat{F}_\alpha \quad (1.3.3)$$

avec $\widehat{F}_\alpha := \widehat{\mathfrak{F}}_\tau|_{L^2(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha}$ et où \mathcal{D}_α sont les espaces de représentations unitaires irréductibles du groupe de Lie compact \mathbb{G} . Dans le cas abélien $\mathbb{G} = \mathrm{U}(1)$ cela coïncide avec la décomposition de Fourier des fonctions du cercle. Dans ce cas $\alpha \equiv \nu \in \mathbb{Z}$ et, agissant sur $C^\infty(X)$, les opérateurs \widehat{F}_α prennent la forme d'opérateurs de transfert à poids complexe

$$\widehat{F}_\nu \varphi = e^{i\nu\tau} (\varphi \circ T). \quad (1.3.4)$$

tels que définis en (0.0.2) dans l'introduction. Pour ceux-ci le théorème de Ruelle 1.4 s'applique directement et leur spectre est discret dans les espaces de Sobolev $H^{-m}(X)$. On montrera

Théorème 1.6. Loi de Weyl fractale pour les extensions abéliennes [Arn12].

Pour tout $\epsilon > 0$, m assez grand, dans la limite $\nu \rightarrow \infty$, $\forall \delta > \delta_0$

$$\# \left\{ \lambda_i^{(\nu)} \in \sigma \left(\widehat{F}_\nu|_{H^{-m}(X)} \right) \mid \left| \lambda_i^{(\nu)} \right| \geq \epsilon \right\} = \mathcal{O} \left(\nu^{\delta/2} \right) \quad (1.3.5)$$

*où $d \leq \delta_0 \leq 2d$ est la dimension de Minkowski de l'ensemble captif de la dynamique symplectique induite par \widehat{F}_ν sur le cotangent T^*X .*

Ce type d'estimation est bien connu dans le contexte de la diffusion quantique chaotique depuis l'article fondateur de Sjöstrand en 1990 [Sjö90]. Un analogue moins précis pour les flots Anosov fut déduit par Faure et Sjöstrand dans [FS11]. Prouver une borne inférieure optimale au nombre de résonances reste un problème ouvert.

De manière générale les opérateurs \widehat{F}_α ont une structure analogue aux opérateurs à poids complexes (1.3.4). On montre dans le chapitre 3 que leur spectre est discret dans les espaces de distributions $H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha$. Pour le groupe non-Abélien le plus simple $\alpha \equiv j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et on montrera comment étendre la Loi de Weyl pour obtenir

Théorème 1.7. Loi de Weyl fractale pour les extensions vers $\mathrm{SU}(2)$ [Arn12].

Pour tout $\epsilon > 0$, m assez grand, dans la limite $j \rightarrow \infty$, $\forall \delta > \delta_0$

$$\# \left\{ \lambda_i^{(j)} \in \sigma \left(\widehat{F}_j|_{H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j} \right) \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| \geq \epsilon \right\} = \mathcal{O} \left(j^{\delta/2} \right) \quad (1.3.6)$$

*où $d+2 \leq \delta_0 \leq 2d+2$ est la dimension de Minkowski de l'ensemble captif de la dynamique symplectique induite par \widehat{F}_j sur $T^*X \times \mathbb{S}^2$.*

Contrairement au cas $\mathrm{U}(1)$ la dynamique effective associé à \widehat{F}_j ne s'effectue plus seulement sur le cotangent : le caractère non abélien de $\mathrm{SU}(2)$ fait apparaître un couplage avec une dynamique sur le facteur compact \mathbb{S}^2 . On expliquera l'origine de ce couplage et le type de comportement que l'on peut attendre dans le cas général.

Lien avec les flots Anosov. L'approche traditionnelle due à Sinai, Bowen, Puis Parry-Pollicott et Ruelle pour étudier les Flots Anosov consiste, grâce à un subtil codage par partitions de Markov [PY98b, chap 4], à se ramener à l'étude d'un semi-flot construit comme suspension d'une application expansive (on pourra consulter à ce sujet l'excellent article de Alder et Flatto [AF91]). On considère donc $\phi_t : \Sigma_\tau \rightarrow \Sigma_\tau$ une suspension de $T : X \rightarrow X$ associée à une fonction toit $\tau \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}_+)$ avec μ la mesure SRB de T (cf. exemple 1.2). Données deux observables suffisamment régulières Ψ, Φ (supposées de moyenne nulle pour $d\mu ds$ par simplicité), la *transformée de Laplace* de la fonction de corrélation dynamique $C_{\Psi, \Phi}(t)$ s'écrit

$$\hat{C}_{\Psi, \Phi}(z) := \int_0^\infty e^{-izt} \underbrace{\left(\int_{\Sigma_\tau} \overline{(\Psi \circ \phi_t)}(x, s) \Phi(x, s) d\mu ds \right)}_{C_{\Psi, \Phi}(t)} dt.$$

$\hat{\rho}$ est analytique dans le domaine $\Im(z) < 0$. Un calcul direct montre que

$$\hat{C}_{\Psi, \Phi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X \left(\widehat{F}_z^n \Psi \right) (x) \Phi_z(x) d\mu$$

où $\Psi_z(x) := \int_0^{\tau(x)} e^{izs} \Psi(x, s) ds$, et $\widehat{F}_z \varphi = e^{iz\tau} (\varphi \circ T)$. Si l'on montre qu'il existe $\delta > 0$ t.q. $\hat{C}_{\Psi, \Phi}(z)$ admette une extension analytique dans le domaine $\Im(z) < \delta$ on peut déduire que $C_{\Psi, \Phi}(t)$ décroît exponentiellement vite, impliquant le mélange exponentiel du semi-flot. Les résonances de Ruelle sont les pôles de $\hat{C}_{\Psi, \Phi}(z)$. De plus, z est une pôle pour $\hat{C}_{\Psi, \Phi}(z)$ si et seulement si 1 est une résonance de \widehat{F}_z (pour lequel le théorème de Ruelle 1.4 s'applique [Pol99]).

1.4 Chaos quantique : résonances du laplacien hyperbolique

Lorsque la courbure d'une surface X est constante et négative, par le théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, X peut être vue comme un quotient

$$X = \Gamma \backslash \mathbb{H}^2 \tag{1.4.1}$$

où \mathbb{H}^2 est le demi-plan hyperbolique⁸

$$\mathbb{H}^2 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

muni de la métrique $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Dans (1.4.1), $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{R})$ est un sous-groupe d'isométries agissant comme $z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$; $|a|^2 - |b|^2 = 1$. On s'intéresse au cas particulier des surfaces à courbure constante et négative, de volume infini, convexes cocompactes (i.e. pour laquelle le flot géodésique admet un ensemble captif compact). C'est le cas lorsque Γ est un groupe de Schottky :

⁸ De manière équivalente on peut voir X comme un quotient du disque de Poincaré obtenu à partir de \mathbb{H}^2 par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Définition 1.8. Un groupe Γ est *de Schottky* s'il est généré par un nombre fini d'éléments $\gamma_j \in SL(2, \mathbb{R})$; $j = 1, \dots, 2r$ de sorte qu'il existe un système de demi-disques ouverts d'adhérences disjointes $\{\mathcal{D}_j\}$ dans $\overline{\mathbb{H}^2}$, orthogonaux à $\partial\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{R}$, et t.q. $\gamma_j(\mathcal{D}_j) = \hat{\mathbb{C}}/\overline{\mathcal{D}_{j+r}}$.

Les transformations γ_j sont hyperboliques avec un point fixe instable dans \mathcal{D}_j et un point fixe stable dans \mathcal{D}_{j+r} . La région $\mathcal{D} = \mathbb{H}^2 - \cup \mathcal{D}_j$ est un domaine fondamental pour l'action de Γ . Les générateurs γ_j définissent une application finalement expansive⁹ sur le bord du demi plan :

$$B : \cup_j I_j \rightarrow \cup_j I_j; I_j := \mathcal{D}_j \cap \partial\mathbb{H}^2$$

avec B définie par

$$B(x) := \gamma_j(x), \forall x \in I_j.$$

On appelle B l'*application de Bowen-Series*. Les points $x \in I := \cup_j I_j$ qui restent indéfiniment dans I sous l'action de B se trouvent sur un ensemble de Cantor $\Lambda(\Gamma)$ inclus dans l'intérieur de I et de dimension de Hausdorff $\delta < 1$. Un résultat célèbre de Series [Ser86] montre que l'application B code le flot géodésique sur X . En particulier les orbites périodiques de $B : I \rightarrow I$ sont en correspondance bi-univoque avec les géodésiques fermées et de plus, la longueur primitive des géodésiques en question est donnée par

$$\log |(B^n)'(x)|$$

où x est un point sur l'orbite périodique associée et n sa période.

L'objet d'étude fondamental en chaos quantique est le *Laplacien hyperbolique* Δ_X sur la surface $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$. La compréhension précise de son spectre est un enjeu central du domaine et matérialise un point de convergence entre la théorie des nombres (conjecture de Riemann) le chaos quantique (les ondes sur X) et le chaos classique (le flot géodésique sur la surface).

Le spectre L^2 de Δ_X est constitué d'une composante absolument continue $[\frac{1}{4}, \infty)$ et de spectre ponctuel fini dans $(0, \frac{1}{4})$. Mazzeo et Melrose [MM87] montrèrent dans les années 80 que *la résolvante*

$$\mathcal{R}_s := (\Delta_X - s(1-s))^{-1} : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$$

bien définie sur $\{\Re(s) > \frac{1}{2}\}$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe en tant qu'opérateur $L^2_{comp}(X) \rightarrow L^2_{loc}(X)$. Les pôles correspondent aux résonances de Laplacien. Si on note $\text{Res}(\Delta_X)$ l'ensemble des pôles de \mathcal{R}_s alors

Théorème 1.9. (Guillopé-Lin-Zworski [GLZ04]). *Pour tout $a > 0$ fixé,*

$$\#\{s \in \text{Res}(\Delta_X) : \Re(s) > -a, |\Im(s)| < \hbar^{-1}\} = \mathcal{O}(\hbar^{-\delta-1}),$$

lorsque $\hbar \rightarrow +\infty$.

9. Une application B est finalement expansive (*eventually expanding* en anglais) si il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. B^n soit expansive.

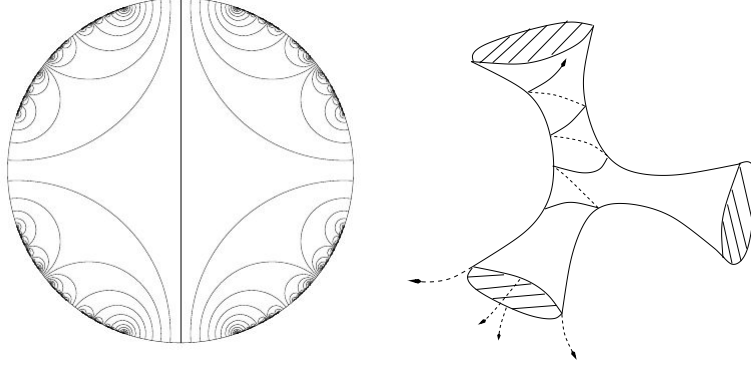


FIGURE 1.5 – Surface hyperbolique convexe cocompacte. À gauche le pavage en domaines fondamentaux sur le disque hyperbolique. À droite une représentation de la surface. Dans cet exemple $r = 2$ et l'ensemble limite de l'application de Bowen-Series est un ensemble de Cantor.

C'est la fameuse loi de Weyl fractale pour les surfaces de volume infini où la partie imaginaire des résonances joue le rôle du paramètre semiclassique. D'après les travaux de Sjöstrand sur la diffusion quantique chaotique [Sjö90], la puissance de croissance devrait être égale à la moitié de la dimension de l'ensemble captif de la dynamique classique associé, à savoir le flot géodésique sur X . Chaque géodésique captée peut être relevée sur \mathbb{H}^2 et est déterminée par ces points de départ et d'arrivée depuis $\Lambda(\Gamma)$. Reste à préciser la position sur la géodésique ainsi que la vitesse de déplacement. La dimension de l'ensemble captif est donc $2\delta + 2$, en accord avec le théorème de Guillopé-Lin-Zworski. Il est conjecturé que cette borne est optimale¹⁰.

Il existe un lien remarquable entre les résonances de Δ_X et les géodésiques fermées sur la surface. Cette connexion s'exprime par la fonction *zêta de Selberg*

$$Z_X(s) := \prod_{n=0}^{\infty} \prod_{\gamma_p} \left(1 - e^{-(s+n)\lambda(\gamma_p)}\right) \quad (1.4.2)$$

où γ_p désigne une géodésique fermée de longueur $\lambda(\gamma_p)$. La formule de trace de Selberg (exacte dans cas de la courbure constante [Bor07]) montre que les zéros non-triviaux de $Z_X(s)$ coïncident avec les pôles de la résolvante \mathcal{R}_s . Par ailleurs, l'application de Bowen-series donne un codage du flot géodésique sur X . On pose $\tau = \log |B'(x)|$ pour définir

$$(\mathcal{L}_s \varphi)(x) = \sum_{y \in B^{-1}\{x\}} e^{-s\tau(y)} \varphi(y); \quad u \in \mathcal{C}(I); \quad s \in \mathbb{C}. \quad (1.4.3)$$

qui est un opérateur à trace lorsque restreint à son action sur les fonctions réelles analytiques de I . En implémentant le codage dans l'expression de Z_X on peut montrer

10. Dyatlov et Datchev ont très récemment étendu ce résultat aux surfaces asymptotiquement hyperboliques [KD12].

l'identité fondamentale [PP90] :

$$Z_X(s) = \det(I - \mathcal{L}_s). \quad (1.4.4)$$

On retrouve le même type de résultat que pour les semi-flots : les résonances du Laplacien sur X correspondent aux valeurs de $s \in \mathbb{C}$ telles que \mathcal{L}_s admette 1 comme valeur propre. Cette identité reste vraie dans l'exemple important de *la surface modulaire*. L'application de Bowen-series doit alors être remplacé par *l'application de Gauss* [May91] [AF91].

Dans le chapitre 4, on étudie des opérateurs de transferts construits dans le but de mimer les caractéristiques des opérateurs \mathcal{L}_s définis en (1.4.3). On se donne pour cela une union d'intervalles d'adhérences disjointes $I = \cup I_i$ et

$$\phi_{j,i} : I_i \rightarrow \text{int}(I_j)$$

une famille d'applications \mathcal{C}^∞ uniformément contractantes, satisfaisant une hypothèse de séparation forte de sorte que leurs inverses définissent une application expansive univaluée

$$\mathcal{T} : \phi(I) \rightarrow I$$

Cette application admet un unique ensemble invariant $K \subset \text{int}(I)$. Généralement, K est un ensemble de Cantor. On se donne alors deux fonctions réelles lisses sur I : τ et V , et on s'intéresse à l'opérateur

$$\hat{F}_{\hbar,\alpha} : \varphi \mapsto e^{i\tau/\hbar} e^{\alpha V} \varphi \circ \mathcal{T}; \quad \hbar > 0$$

bien définit sur $\mathcal{C}_0^\infty(I)$. L'adjoint L^2 de l'opérateur \mathcal{L}_s définit en (1.4.3) est de ce type avec $\mathcal{T} = B$, $\tau = V = \log |B'(x)|$, $\Re(s) = 1 - \alpha$ et $\Im(s) = \hbar^{-1}$. On montre dans le chapitre 4 que ces opérateurs admettent un spectre discret de résonances $\text{Res}(\hat{F}_{\hbar,\alpha})$ dans des espaces de distributions supportées sur K . De plus, sous une condition explicite sur la fonction τ (cf. définition 4.10) on retrouve :

Théorème 1.10. Loi de Weyl et Gap spectral dans les systèmes ouverts. *Pour tout $a > 0$ fixé, si δ_0 est la dimension de Hausdorff de K , pour tout $\delta > \delta_0$, lorsque $\hbar \searrow 0$,*

$$\#\left\{ \zeta \in \text{Res}(\hat{F}_{\hbar,\alpha}) : |\zeta| > a, \right\} = \mathcal{O}(\hbar^{-\delta}),$$

et

$$\sup \left\{ |\zeta| : \zeta \in \text{Res}(\hat{F}_{\hbar,\alpha}) \right\} \leq \exp \left(\frac{1}{2} \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} \mu(2\alpha V - J) \right) + o(1),$$

où $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}$ désigne l'ensemble des mesures de probabilités sur K invariantes sous l'action de \mathcal{T} et $J = \log |\mathcal{T}'| > 1$.

Le gap que l'on obtient n'est certainement pas optimal, le résultat espéré étant :

Conjecture 1.11. (Pollicott, Dolgopyat [DM98, p.9]) lorsque $\hbar \searrow 0$,

$$\sup \left\{ |\zeta| : \zeta \in \text{Res} \left(\hat{F}_{\hbar, \alpha} \right) \right\} \leq \exp \left(\frac{1}{2} \text{Pr} (2(\alpha V - J)) \right) + o(1),$$

où Pr est la fonctionnelle de pression topologique (cf. (4.1.6) dans le chapitre 4).

Appliquée à l'application de Bowen-Series cette conjecture prend la forme

Corollaire 1.12. Si la conjecture 1.11 est vraie, alors lorsque $\Im(s) \nearrow +\infty$,

$$\sup \left\{ |\zeta| : \zeta \in \text{Res} (\mathcal{L}_s^*) \right\} \leq \exp \left(\frac{1}{2} \text{Pr} (-2\Re(s)J) \right) + o(1),$$

où \mathcal{L}_s est l'opérateur de transfert (1.4.3) associé au codage du flot géodésique sur une surface hyperbolique convexe cocompacte donnée X .

Par la formule de Bowen [Fal97],

$$\text{Pr} (-\delta_0 J) = 0$$

où δ_0 est la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\Lambda(\Gamma) \subset \partial\mathbb{H}^2$. Avec (1.4.4) et la formule de trace de Selberg, la conjecture 1.11 impliquerait que le nombre de résonances du Laplacien sur X de parties réelles supérieures à $\frac{\delta_0}{2}$ est fini, ce qui correspond à une conjecture de Jakobson et Naud.

Le théorème 1.10 (disponible prochainement sur *Arxiv*) a été obtenu en collaboration avec Frédéric Faure (Institut Fourier, Grenoble) et Tobias Weich, en thèse à l'université de Marburg (Allemagne).

Chapitre 2

Éléments d'analyse semiclassique

"Il y a d'un côté le bien, de l'autre le mal et au centre, une arme absolue du bien contre le mal." -LUC BESSON (LE CINQUIÈME ÉLÉMENT).

Dans ce court chapitre on présente l'heuristique centrale de l'approche semiclassique qui consiste à interpréter les opérateurs de transferts comme des Opérateurs Intégraux de Fourier (OIF) associés à une dynamique symplectique sur le cotangent. La mise en application de cette idée utilise l'analyse des opérateurs pseudo-différentiels (PDO) à laquelle on consacre une section introductive¹. Ce chapitre nous donnera l'occasion de fixer certaines notations et donne une première saveur du type de résultats que l'on pourra espérer déduire dans les chapitres suivants.

2.1 Opérateurs \hbar -Pseudo-Différentiels

En mécanique classique l'état d'une particule (ou plus généralement d'un ensemble de particules) est entièrement déterminé par sa position $x \in \mathbb{R}^d$ et sa vitesse $v \in \mathbb{R}^d$ (par exemple $d = 3N$ si le système est constitué de N particules dans \mathbb{R}^3). Dans l'approche hamiltonienne on préfère décrire une particule par sa position et sa quantité de mouvement $\xi = mv$. On interprète ξ comme la variable duale de la vitesse avec $\frac{1}{2} \langle \xi, v \rangle \in \mathbb{R}_+$, l'énergie cinétique. On voit donc l'espace des phases $\{(x, \xi)\} \simeq \mathbb{R}^{2d}$ comme le fibré cotangent $\cup_x T_x^* \mathbb{R}^d$ au dessus de l'espace des positions $\{x\}$. On note $\pi : T^* \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la projection naturelle $\pi : \rho = (x, \xi) \mapsto x$. Le cotangent est muni d'une 1-forme canonique θ que l'on peut construire, indépendamment de tout système de coordonnées, en posant, pour tout vecteur tangent $X \in T_\rho T^* \mathbb{R}^d$

$$\theta(X) := \xi(\pi_* X)$$

et qui s'écrit en coordonnées $\theta = \xi dx := \sum_{i=1}^d \xi^i dx_i$. On note alors $\omega = d\theta$ la 2-forme symplectique exacte et non dégénérée associée. En coordonnées $\omega = d\xi \wedge dx = \sum_{i=1}^d d\xi^i \wedge dx_i$

1. Les ouvrages de référence sont [dV02] [EZ03] [GS94] [Hör85].

dx_i . Un fait remarquable est que la structure symplectique de l'espace des phases

$$\left(\mathbb{R}^{2d}, \omega\right)$$

est une traduction géométrique des postulats de la mécanique Hamiltonienne [Arn76]. Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}; \mathbb{R})$ est une observable classique (e.g. l'énergie) alors l'unique champ de vecteur X_f réalisant

$$\omega(X_f, \cdot) = df$$

génère le flot classique $\varphi_f^t := e^{tX_f}$ sur l'espace des phases et préserve ω . Plus formellement, la forme symplectique fait de l'ensemble des observables classiques une algèbre de Poisson pour le crochet

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$$

qui relie les observables entre elles au travers des dynamiques qu'elles génèrent :

$$\frac{d}{dt}(g \circ \varphi_f^t) = \{f, g \circ \varphi_f^t\}.$$

Ce formalisme indépendant du choix de coordonnées permet de décrire de manière intrinsèque le mouvement de particules évoluant sur une variété Riemannienne X (c'est le cas pour le problème à n -corps). L'espace des phases correspond alors au fibré cotangent T^*X . Le théorème de Darboux montre que la forme symplectique $\omega = d\theta$ s'écrit toujours localement comme $d\xi \wedge dx$.

La théorie des *Opérateurs \hbar -Pseudo-différentiels* (PDO) peut se comprendre comme une tentative de transposer l'algèbre de Poisson des observables classiques à l'ensemble des opérateurs formellement auto-adjoints agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$: l'espace de Hilbert de la mécanique quantique (plus généralement $L^2(X)$ où X est une variété Riemannienne de dimension d représentant l'espace classique des positions).

A une observable $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ on associe sa *quantification de Weyl*, définie par son action sur les fonctions test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ comme :

$$\text{Op}_\hbar^w(f)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int e^{i\xi(x-y)} f\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \varphi(y) dy d\xi \quad (2.1.1)$$

$\forall \hbar > 0$. f est le *symbole de Weyl* de $\text{Op}_\hbar^w(f) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Si f est à valeurs réelles, l'opérateur est formellement auto-adjoint. La dynamique quantique associée à f est générée non plus par un champ de vecteur mais par l'opérateur $\text{Op}_\hbar^w(f)$ au travers de l'équation de Schrödinger (cf.(2.1.9) plus bas). En physique $\hbar > 0$ est la constante de Planck [LL65][CBF]. A la limite $\hbar \searrow 0$ on doit retrouver la dynamique Hamiltonienne générée par f .

En fait, la classe de Schwartz n'est pas satisfaisante en tant qu'ensemble des observables admissibles (une raison évidente est qu'elle ne contient pas le Hamiltonien correspondant au mouvement libre $\|\xi\|^2$ qui après quantification (2.1.1) devient $-\hbar^2\Delta$). Un premier résultat de la théorie stipule que l'on peut étendre les observables à la classe suivante

Définition 2.1. [DS99], pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$ la classe $S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d})$ est constituée de familles $(a_\hbar)_{\hbar>0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ telles que

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d; \exists C_{\alpha\beta}; \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_\hbar(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \hbar^{-\mu(|\alpha|+|\beta|)} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|} \quad (2.1.2)$$

où les constantes $C_{\alpha\beta}$ doivent être uniformes en \hbar et $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \|\xi\|^2}$. Pour tout $(a_\hbar)_{\hbar>0} \in S_\mu^m(\mathbb{R}^d)$, $(\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar))_{\hbar>0}$ est une famille d'opérateurs agissant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et s'étendent continûment en opérateurs $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On note OPS_μ^m pour l'ensemble des (familles d') opérateurs issus de $S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d})$. On notera parfois $S_\mu^{-\infty}(\mathbb{R}^{2d}) := \bigcap_{m<0} S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d})$.

La classe $S_\mu^m(\mathbb{R}^d)$ contient des symboles présentant des variations jusqu'aux échelles de l'ordre des cellules de Planck. On aura besoin dans les chapitres suivants de considérer de telles observables afin de déduire les loi de Weyl fractales pour certains opérateurs de transferts.

Dans la suite on notera, sauf en cas d'ambiguïté, a à la place de $(a_\hbar)_{\hbar>0}$ pour les symboles de $S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d})$ bien qu'ils soient en général des familles à un paramètre de fonctions. De la même manière on écrira $\text{Op}_\hbar^w(a)$ plutôt que $\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)$ pour les opérateurs de OPS_μ^m .

2.1.1 Continuité dans L^2

Les symboles bornés ($m = 0$ dans (2.1.2)) sont quantifiés en opérateurs continus par (2.1.1). C'est l'objet du lemme suivant, aussi connu sous le nom de *théorème de Calderón-Vaillancourt* :

Lemme 2.2. (*L^2 -continuité* [EZ03, thm. 5.1]). *Si $a \in S_\mu^0(\mathbb{R}^{2d})$ alors pour tout $\hbar \in (0, 1]$, $\text{Op}_\hbar^w(a)$ s'étend en un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Lorsque $\hbar \rightarrow 0$:*

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \sup_{\hbar>0} \|a\|_\infty + \mathcal{O}(\hbar^{1-2\mu}). \quad (2.1.3)$$

En outre si $|a(x, \xi)| \rightarrow 0$ lorsque $(x, \xi) \rightarrow \infty$ alors $\forall \hbar \in (0, 1]$,

$$\text{Op}_\hbar^w(a) : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

est compact [Mar02].

Si, en plus d'être dans la classe $S_\mu^0(\mathbb{R}^{2d})$, le symbole a satisfait une estimation de régularité en x :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d; \exists C_{\alpha\beta}; \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha\beta} \hbar^{-\mu(|\alpha|+|\beta|)} \langle x \rangle^{-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-|\beta|} \quad (2.1.4)$$

on peut déduire du lemme 2.2 un corollaire fondamental, qui précise l'idée intuitive selon laquelle les opérateurs dont le symbole est petit hors d'un domaine compact de l'espace de phase sont eux-mêmes quasi-compact :

Corollaire 2.3. (Quasi-compacité [FRS08, p.44]). Soit $\hbar \in (0, 1]$ fixé. Si a satisfait à (2.1.4) alors pour tout $\epsilon > 0$,

$$\text{Op}_\hbar^w(a) = \hat{k}_\epsilon + \hat{r}_\epsilon, \quad (2.1.5)$$

avec \hat{k}_ϵ compact et $\|\hat{r}_\epsilon\| \leq L + \epsilon$, où

$$L_\hbar = \limsup_{|(x,\xi)| \rightarrow \infty} |a(x, \xi)|$$

On dit de $\text{Op}_\hbar^w(a)$ qu'il est quasi-compact car son spectre essentiel est contenu dans le disque de rayon L_\hbar dans \mathbb{C} .

L'idée de la preuve est assez représentative du type de techniques utilisées en analyse semiclassique. Si (2.1.5) est vrai, le fait que $\text{Op}_\hbar^w(a)$ est à spectre discret hors du domaine spectral délimité par le cercle de rayon L est une conséquence du théorème Fredholm analytique. On prouve cela dans l'appendice (lemme A.1). Prenons $\hbar = 1$. Soit $0 \leq \chi(x, \xi) \leq 1$ une fonction lisse de \mathbb{R}^{2d} supporté dans la boule unité et égal à 1 dans une boule plus petite. Pour tout $\epsilon > 0$ on note $\chi_\epsilon(\xi, x) := \chi(\epsilon\xi, \epsilon x)$. On écrit alors $a = \chi_\epsilon a + (1 - \chi_\epsilon)a = k_\epsilon + r_\epsilon$. D'après le lemme (2.2) $\text{Op}_1^w(k_\epsilon)$ est compact pour tout $\epsilon > 0$. D'un autre côté, si on effectue le changement de variable $(x, \xi) \rightarrow (x_\epsilon := \epsilon x, \xi_\epsilon := \epsilon\xi)$, en posant $r(x_\epsilon, \xi_\epsilon) := r_\epsilon(\epsilon^{-1}x_\epsilon, \epsilon^{-1}\xi_\epsilon)$, par (2.1.4)

$$\left| \partial_{x_\epsilon}^\alpha \partial_{\xi_\epsilon}^\beta r \right| \leq C_{\alpha\beta} \epsilon^{-|\beta| - |\alpha|} \langle \epsilon^{-1}x_\epsilon \rangle^{-|\alpha|} \langle \epsilon^{-1}\xi_\epsilon \rangle^{-|\beta|} \leq \tilde{C}_{\alpha\beta} \langle x_\epsilon \rangle^{-|\alpha|} \langle \xi_\epsilon \rangle^{-|\beta|}.$$

r est donc un symbole dans $S^0(\mathbb{R}^{2d})$ vis à vis du paramètre semiclassique ϵ . On vérifie sans peine que $\text{Op}_1^w(r_\epsilon) = \text{Op}_\epsilon^w(r)$, avec par le lemme (2.2), $\|\text{Op}_\epsilon^w(r)\| \leq L + \mathcal{O}(\epsilon)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$.

2.1.2 Algèbre d'opérateurs

L'ensemble des \hbar -PDO construits par la quantification de Weyl est une algèbre et définit une algèbre sur l'espace des symboles, qui coïncide au premier ordre avec l'algèbre de Poisson de $C^\infty(\mathbb{R}^{2d})$:

Lemme 2.4. Composition [Fol88, p.109]. $\forall a \in S_\mu^{m_1}(\mathbb{R}^{2d}), b \in S_\mu^{m_2}(\mathbb{R}^{2d})$

$$\text{Op}_\hbar^w(a)\text{Op}_\hbar^w(b) \in OPS_\mu^{m_1+m_2} \quad (2.1.6)$$

définissant ainsi le produit de Moyal $a\#b$ t.q. $\text{Op}_\hbar^w(a)\text{Op}_\hbar^w(b) = \text{Op}_\hbar^w(a\#b)$. On a

$$a\#b = ab \bmod \hbar^{1-2\mu} S_\mu^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^{2d}) \quad \text{avec de plus :} \quad (2.1.7)$$

$$[\text{Op}_\hbar^w(a), \text{Op}_\hbar^w(b)] = -i\hbar \text{Op}_\hbar^w(\{a, b\}) \bmod \hbar^{2(1-2\mu)} OPS_\mu^{m_1+m_2-2} \quad (2.1.8)$$

La conséquence majeure de ce fait est la suivante : Si U_t est un groupe à un paramètre de d'opérateurs unitaires solutions de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t U_t := \text{Op}_\hbar^w(H)U_t, \quad (2.1.9)$$

où H est un symbole réel, alors les dynamiques classique et quantique sont liées au premier ordre par le célèbre *théorème d'Egorov* :

Lemme 2.5. Egorov. [EZ03, section 9.2]. $\forall a \in S_\mu^m$, $U_{-t}\text{Op}_\hbar^w(a)U_t \in OPS_\mu^m$ et son symbole est $a \circ e^{tX_H} \bmod \hbar^{1-2\mu}S_\mu^{m-1}(\mathbb{R}^{2d})$, avec e^{tX_H} le flot au temps t généré par le champ de vecteur Hamiltonien X_H .

Les opérateurs unitaires U_t solutions de (2.1.9) sont des exemples fondamentaux d'Opérateurs \hbar -Fourier-Intégraux (OIF) [Dui73]. Les OIFs sont toujours associés à une application préservant la forme symplectique sur l'espace des phases classique et constituent en ce sens la version quantique des symplectomorphismes. Une question naturelle, fondamentale pour pouvoir étendre le calcul pseudo aux variétés, concerne l'effet d'un changement de coordonnées $x \mapsto y = f(x)$ sur l'expression d'un PDO. Si φ est une fonction lisse de \mathbb{R}^d on pose $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)$, i.e. $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$. Dans ce contexte le théorème d'Egorov répond positivement à la question : *peut-on écrire $(\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi)(y)$ comme $\text{Op}_\hbar^w(b)\tilde{\varphi}(y)$ pour un certain symbole $b(y, \zeta)$?*

Si on note F le relevé canonique de f sur le cotangent $T^*\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^{2d}$:

$$\begin{aligned} F : T^*\mathbb{R}^d &\rightarrow T^*\mathbb{R}^d \\ (x, \xi) &\mapsto (y = f^{-1}(x), {}^tD_y f \cdot \xi) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

On a alors

Lemme 2.6. Egorov pour les difféomorphismes [Mar02, p.150]. Soit $\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ où f un difféomorphisme C^∞ de \mathbb{R}^d . Pour tout $a \in S_\mu^m$, $\hat{F}^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a)\hat{F} \in OPS_\mu^m$, et son symbole est $a \circ F \bmod \hbar^{1-2\mu}S_\mu^{m-1}(\mathbb{R}^{2d})$, avec F le relevé canonique de f sur le cotangent (2.1.10).

Ce résultat fondamental pour le passage aux variétés se démontre de manière assez directe en utilisant, par exemple, la théorie des semi-densités [EZ03, chap. 8].

2.1.3 Loi de Weyl et symboles à support compacts

Un des résultat principal de cette thèse concerne une estimation de type Weyl pour les résonances de certains opérateurs de transferts. La preuve de celle ci repose sur une estimations du nombre de valeurs propres de PDO dont le symbole est à support compact (mais dépendant de \hbar).

Lemme 2.7. (Loi de Weyl [DS99, p. 116]) Soit $a = (a_\hbar)_{\hbar>0} \in S_\mu^{-\infty}(\mathbb{R}^{2d})$ un symbole réel à support compact (pour tout \hbar). On sait que $\forall \hbar > 0$, $\hat{A} := \text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)$ est auto-adjoint

et à trace sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $\hbar \rightarrow 0$:

$$(2\pi\hbar)^d \# \left\{ \lambda_i^h \in \sigma(\hat{A}) \mid |\lambda_i^h| \geq \epsilon \right\} = \text{Leb} \{(x, \xi); |a_h| > \epsilon\} + o(\text{Leb} \{(x, \xi); |a_h| > 0\}). \quad (2.1.11)$$

Voici une esquisse de preuve de ce résultat classique. (On peut le déduire en reprenant la preuve du théorème 9.6. dans le livre [DS99] qui utilise le calcul fonctionnel pour les PDOs). Pour simplifier, supposons $\mu = 0$ et a positif. On considère $1_{[\epsilon, \infty)}$, la fonction caractéristique de $[\epsilon, \infty)$. Par définition

$$\text{tr} 1_{[\epsilon, \infty)}(\hat{A}) = \# \left\{ \lambda_i^h \in \sigma(\hat{A}) \mid |\lambda_i^h| \geq \epsilon \right\}$$

Pour tout $\delta > 0$, soit \bar{f} et \underline{f} deux polynômes de degré $n = n(\delta)$ s'annulant en zéro et approximant $1_{[\epsilon, \infty)}$ sur $[0; c]$, avec $c > \sup \|a_h\|_\infty$ de sorte que $\forall t \in [0; c]$

$$1_{[\epsilon+\delta, \infty)}(t) - \delta \leq \underline{f}(t) \leq 1_{[\epsilon, \infty)}(t)$$

et

$$1_{[\epsilon, \infty)}(t) \leq \bar{f}(t) \leq 1_{[\epsilon-\delta, \infty)}(t) + \delta$$

Par le théorème de composition, les opérateurs $\underline{f}(\hat{A})$ et $\bar{f}(\hat{A})$ sont des PDOs dans $OPS^{-\infty}$ de symboles principaux $\underline{f}(a)$ et $\bar{f}(a)$.

Définition 2.8. [Ler10, EZ03] Soit $\hat{A} \in OPS^m$ de symbole $a(x, \xi)$. Le support essentiel de \hat{A} , noté $\text{essupp}\hat{A}$, est le complémentaire de l'ensemble des points (x, ξ) dans le voisinage desquels

$$\forall N, \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq C_{\alpha, \beta, N} \hbar^N, \quad (2.1.12)$$

En particulier, pour tout PDOs \hat{A} , et \hat{B} :

$$\text{essupp}\hat{A}\hat{B} \subseteq \text{essupp}\hat{A} \cap \text{essupp}\hat{B}. \quad (2.1.13)$$

De (2.1.13), on déduit que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\text{essupp}\hat{A}^j \subseteq \text{essupp}\hat{A}$. Comme les polynômes \bar{f} et \underline{f} n'ont pas de terme constant, on a que $\text{essupp}\underline{f}(\hat{A}) \subseteq \text{essupp}\hat{A} \subseteq \text{supp}a$ et même pour $\bar{f}(\hat{A})$. Ainsi

$$\bar{f}(\hat{A}) = \text{Op}_\hbar^w(\bar{f}(a_h) + \hbar \bar{b}_h)$$

avec $\bar{b}_h \in S^{-\infty}$ et, par (2.1.12), $|\bar{b}_h| = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$ hors de $\text{supp}a_h$. Il existe en outre pour tout $p \in S^0 \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, une formule exacte donnant la trace du PDO associé à p [DS99, p. 115] :

$$(2\pi\hbar)^d \text{tr}(\text{Op}_\hbar^w(p)) = \int p(x, \xi) dx d\xi \quad (2.1.14)$$

de laquelle on déduit que $(2\pi\hbar)^d \operatorname{tr} \bar{f}(\hat{A}) = \int (\bar{f}(a_\hbar) + \hbar \bar{b}_\hbar) dx d\xi$. Par construction on a

$$(2\pi\hbar)^d \operatorname{tr} \bar{f}(\hat{A}) \leq \operatorname{Leb} \{(x, \xi); |a_\hbar| > \epsilon - \delta\} + (\delta + \mathcal{O}_n(\hbar)) \operatorname{Leb} \{(x, \xi); |a_\hbar| > 0\} \quad (2.1.15)$$

et de la même manière

$$(2\pi\hbar)^d \operatorname{tr} \underline{f}(\hat{A}) \geq \operatorname{Leb} \{(x, \xi); |a_\hbar| > \epsilon + \delta\} - (\delta + \mathcal{O}_n(\hbar)) \operatorname{Leb} \{(x, \xi); |a_\hbar| > 0\} \quad (2.1.16)$$

Par le théorème spectral et la L^2 -continuité, pour tout $\hbar > 0$ assez petit,

$$\operatorname{tr} \underline{f}(\hat{A}) \leq \operatorname{tr} 1_{[\epsilon, \infty)}(\hat{A}) \leq \operatorname{tr} \bar{f}(\hat{A})$$

Avec (2.1.15) et (2.1.16), en prenant les limites $\hbar \rightarrow 0$ puis $n \rightarrow \infty$ on déduit (2.1.11).

2.2 Passage aux variétés

La classe S_μ^m définie en (2.1.2) est invariante par changement différentiable de coordonnées. Elle permet alors la quantification sur une variété lisse compacte X de dimension d avec (2.1.1) pris en un sens local :

Définition 2.9. [Tay96b, p.30] Un opérateur linéaire $\hat{A} : \mathcal{C}^\infty(X) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X)$ est un PDO dans $OPS_\mu^m(T^*X)$ si pour tout atlas sur X et pour toutes cartes U_κ de cet atlas, il existe un symbole $a_\kappa \in S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d})$ t.q. pour tout $\chi, \chi' \in \mathcal{C}_0^\infty(U_\kappa)$, si $\kappa_*\varphi = \varphi \circ \kappa^{-1}$,

$$\chi' \cdot \hat{A} \cdot \chi = \chi' (\kappa_*^{-1} \circ \operatorname{Op}_\hbar^w(a_\kappa) \circ \kappa_*) \chi \quad (2.2.1)$$

Dans cette définition, seul le symbole principal d'un PDO est indépendant du système de coordonnées -[Tay96b] chap. 7 et appendice E dans [EZ03]. Par le théorème d'Egorov (Lemme 2.6) le symbole principal peut être interprété comme une fonction sur le fibré cotangent T^*X de X . Réciproquement, donné un symbole $a \in \mathcal{C}^\infty(T^*X)$, en utilisant une partition de l'unité : $\{\chi_\kappa\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(U_\kappa)$ avec $\sum_{\kappa \in \mathcal{F}} \chi_\kappa^2 = 1$, et $\mathcal{F} = \{\kappa : U_\kappa \rightarrow \mathbb{R}^d\}$ un atlas de X , on pose :

$$\operatorname{Op}_\hbar^w(a) := \sum_{\kappa \in \mathcal{F}} \chi_\kappa (\kappa_*^{-1} \circ \operatorname{Op}_\hbar^w(a_\kappa) \circ \kappa_*) \chi_\kappa \quad (2.2.2)$$

et on dira que a est dans la classe $S_\mu^m(T^*X)$ si et seulement si (localement), pour tout $\kappa \in \mathcal{F}$

$$a_\kappa(x, \xi) := a(\kappa^{-1}(x), {}^t D_{\kappa^{-1}(x)} \kappa \cdot \xi) \in S_\mu^m(\mathbb{R}^{2d}). \quad (2.2.3)$$

dans ce cas $\operatorname{Op}_\hbar^w(a)$ est un PDO dans la classe $OPS_\mu^m(T^*X)$ de symbole a .

Avec la construction (2.2.2), la loi de Weyl (lemme 2.7) se traduit sans changement pour $\operatorname{Op}_\hbar^w(a)$ où $a \in S_\mu^{-\infty}(T^*X)$ est un symbole à support compact. Le volume sur le cotangent est celui issu de la forme symplectique canonique, indépendamment d'une éventuelle structure métrique. Enfin, par compacité de la variété X , le corollaire 2.1.5 sera toujours vrai pour les opérateurs de $OPS_\mu^0(T^*X)$.

2.2.1 Théorème d'Egorov pour les opérateurs de transfert

En combinant le lemme 2.6 avec la définition 2.2.1, on peut à présent énoncer le théorème d'Egorov pour les difféomorphismes sur une variété lisse compacte X . Cela nous permettra de voir les opérateurs de transferts comme des OIF associés à leur relevé canonique sur le cotangent.

Lemme 2.10. *Soit $\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ f$ où f un difféomorphisme de X . Pour tout $a \in S_\mu^m(T^*X)$, $\hat{F}^{-1} \text{Op}_\hbar^w(a) \hat{F} \in OPS_\mu^m(T^*X)$, et son symbole est $a \circ F \text{ mod } \hbar^{1-2\mu} S_\mu^{m-1}$, avec F le relevé canonique (2.1.10) de f sur T^*X .*

Si $T : X \rightarrow X$ n'est pas inversible, si T est toutefois un difféomorphisme local (par exemple si T est une application expansive, cf. chapitre suivant) alors le théorème d'Egorov peut être énoncé en utilisant l'opérateur de Perron-Frobenius \hat{F}^* à la place de \hat{F}^{-1} . Cela donne, en utilisant (1.3.1)

Lemme 2.11. *Soit $\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ T$ où T une application localement inversible de X . Pour tout $a \in S_\mu^m(T^*X)$, $\hat{F}^* \text{Op}_\hbar^w(a) \hat{F} \in OPS_\mu^m(T^*X)$, et son symbole principal s'écrit*

$$\sum_{y \in T^{-1}\{x\}} |\det D_y T|^{-1} a(y, {}^t D_y T \cdot \xi). \quad (2.2.4)$$

Transport de paquet d'ondes. Pour comprendre de manière intuitive le lemme 2.10, il est instructif de comprendre la dynamique générée par les opérateurs de transferts sur les paquets d'ondes. A cette fin, on considère la famille suivante de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ que l'on appelle états cohérents ou paquets d'ondes gaussiens :

$$\varphi_{(x,\xi)}^\hbar(y) := e^{\frac{i}{\hbar} \xi \cdot y} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\hbar}}; \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}. \quad (2.2.5)$$

Ces fonctions² ont la particularité d'être localisées, lorsque $\hbar \rightarrow 0$, au voisinage de $x \in \mathbb{R}^d$ et leur transformée de Fourier près de $\hbar^{-1} \xi \in (\mathbb{R}^d)^*$. On dit que de tels états sont micro-localisés en (x, ξ) [HJ00].

Le paramètre \hbar apparaît ici comme un changement d'échelle sur l'espace de Fourier. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme. On s'intéresse pour (x, ξ) fixé et lorsque $\hbar \rightarrow 0$, à la famille d'états : $\varphi_{(x,\xi)}^\hbar \circ f$. Clairement $\varphi_{(x,\xi)}^\hbar \circ f$ sera localisé au voisinage de $f^{-1}(x)$.

On évalue alors $I_\hbar := \left\langle \varphi_{(x,\xi)}^\hbar \circ f; \varphi_{(f^{-1}(x), \eta)}^\hbar \right\rangle_{L^2}$ qui s'écrit explicitement comme

$$I_\hbar = \int e^{\frac{i}{\hbar} (\xi \cdot f(y) - \eta \cdot y)} e^{-\frac{1}{2\hbar} (\|x - f(y)\|^2 + \|f^{-1}(x) - y\|^2)} dy.$$

Pour que cette intégrale ne soit pas négligeable lorsque $\hbar \rightarrow 0$, la phase $\phi(y) := \xi \cdot f(y) - \eta \cdot y$ doit être stationnaire en $y = f^{-1}(x)$. En interprétant ξ, η comme des 1-formes sur \mathbb{R}^d on obtient

$$\phi(y) = \xi \cdot f(y) - \eta \cdot y \Rightarrow d\phi_y(u) = \xi(D_y f(u)) - \eta(u); \forall u \in T_y \mathbb{R}^d,$$

2. $\forall \hbar > 0, \{\varphi_{(x,\xi)}^\hbar; (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}\}$ est une famille sur-complète de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$$\Rightarrow d\phi_{f^{-1}(x)} = 0 \Leftrightarrow \eta = {}^t D_{f^{-1}(x)} f \cdot \xi.$$

l'état $\tilde{\varphi}_{F(x,\xi)}^{\hbar} := \varphi_{(x,\xi)}^{\hbar} \circ f$ est donc micro-localisé en

$$F(x, \xi) := (f^{-1}(x), {}^t D_{f^{-1}(x)} f \cdot \xi)$$

Le changement d'échelle induit par l'introduction du petit paramètre \hbar révèle le comportement effectif des hautes fréquences, incarné par le relevé canonique de f sur le cotangent (2.1.10), préservant la 2-forme symplectique. On peut définir de la même manière des états cohérents sur une variété Riemannienne compacte X , en utilisant habilement des partitions de l'unité et l'application exponentielle (cf appendice de [FS11]). Dans des cartes, ces états prendront la forme (2.2.5). Dans ce cas l'interprétation de ξ comme une 1-forme prend tout son sens car la dynamique effective s'effectue sur le fibré vectoriel T^*X .

Pour faire le lien avec le calcul symbolique de la section précédente il faut interpréter les PDO comme des opérateurs multiplicatifs dans l'espace de phase. Sur un paquet d'ondes tels que défini en (2.2.5), un PDO $\text{Op}_{\hbar}^w(a)$ agit grossièrement comme

$$\text{Op}_{\hbar}^w(a) : \varphi_{(x,\xi)}^{\hbar} \mapsto a(x, \xi) \varphi_{(x,\xi)}^{\hbar},$$

modulo des termes négligeables lorsque $\hbar \rightarrow 0$. Puisque un difféomorphisme f transporte $\varphi_{(x,\xi)}^{\hbar}$ en $\tilde{\varphi}_{F(x,\xi)}^{\hbar}$, le théorème d'Egorov se schématise de la façon suivante, si $\hat{A} := \text{Op}_{\hbar}^w(a)$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{(x,\xi)}^{\hbar} & \xrightarrow{\hat{F}} & \tilde{\varphi}_{F(x,\xi)}^{\hbar} \\ \hat{F}^{-1} \hat{A} \hat{F} \downarrow & & \downarrow \hat{A} \\ a \circ F(x, \xi) \tilde{\varphi}_{(x,\xi)}^{\hbar} & \xleftarrow{\hat{F}^{-1}} & a \circ F(x, \xi) \tilde{\varphi}_{F(x,\xi)}^{\hbar} \end{array}$$

Cette idée simple est explicite lorsque l'on considère, plutôt que la quantification de Weyl, la quantification de Toeplitz qui fait intervenir dans sa définition les paquets d'ondes [Fol88]. On utilise alors la transformée FBI [Mar02]. Cette dernière a récemment été utilisée en systèmes dynamiques par Tsujii dans son excellent article [Tsu11] sur les flots Anosov de contact.

Chapitre 3

Extensions compactes d'applications expansives

"Most smart people tend to feel queasy when the conversation turns to topics like *certain death* or *total failure* (...)

Not me, I am comfortable with these themes." -HUNTER S. THOMPSON.

Les systèmes partiellement hyperboliques forment une classe de systèmes dynamiques chaotiques d'un type plus subtil que ceux issus du cadre simplement hyperbolique, ces derniers étant à ce jour assez bien compris. Ces modèles sont caractérisés par la présence d'une fibration neutre qui peut ralentir drastiquement -et même empêcher- la convergence vers l'équilibre statistique. Les extensions d'applications expansives vers des groupes de Lie compacts forment une classe attractive de systèmes dynamiques d'un tel type, où la théorie des représentations permet de rendre explicite le rôle joué par la fibration neutre -les fibres sont ici homéomorphe à un groupe de Lie donné et le système agit isométriquement entre les fibres.

Soit (X, g) une variété Riemannienne lisse, compacte, connexe et sans bords de dimension d sur laquelle agit une application C^∞ $T : X \rightarrow X$ expansive. L'expansivité signifie qu'il existe $\lambda > 1$ t.q. pour tout $x \in X$, $u \in T_x X$,

$$\|D_x T \cdot u\| \geq \lambda \|u\|. \quad (3.0.1)$$

(pour la norme sur le fibré tangent TX induite par g). Une application expansive définit un N revêtement de X et on supposera dans la suite qu'il existe N branches inverses¹ $\{T_\epsilon^{-1}\}$, t.q. $T : T_\epsilon^{-1}(X) \rightarrow X$ soit un difféomorphisme pour tout $\epsilon = 1, \dots, N$. C'est le cas pour dans les exemples données en section 1.2 du chapitre introduit. On rappelle que toute application expansive C^∞ est exponentiellement mélangeante par rapport à une mesure invariante lisse μ , appelée mesure SRB, absolument continue par rapport à la mesure volume m sur X .

1. En général les branches inverses ne sont pas globalement définies. Dans la suite il suffit qu'elles existent localement.

Soit \mathbb{G} un groupe Lie compact muni de sa mesure de Haar normalisée h . Pour toute application lisse $\tau : X \mapsto \mathbb{G}$, l'extension $\widehat{T}_\tau : X \times \mathbb{G} \rightarrow X \times \mathbb{G}$ du système expansif (X, T) se définit par

$$\widehat{T}_\tau(x, g) = (T(x), \tau(x)g) \quad (3.0.2)$$

et la mesure $\hat{\mu} := \mu \times h$ est une mesure invariante sous \widehat{T}_τ (voir la section 1.2 du chapitre 1). Depuis les travaux de Ruelle, Bowen puis Rugh on sait que la convergence vers l'équilibre statistique dans les systèmes chaotiques est contrôlé par le spectre de résonances de l'opérateur de transfert

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\tau : \Psi \mapsto \Psi \circ \widehat{T}_\tau, \Psi \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{G}), \quad (3.0.3)$$

restreint à des espaces de distributions adaptés (cf. section 1.3). Dans notre contexte, la théorie des représentations, où analyse harmonique, permet de considérablement simplifier son étude. En particulier le théorème de Peter-Weyl [Tay96a] donne

$$L^2(\mathbb{G}) = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha}^L \otimes \mathcal{D}_{\alpha}^R \quad (3.0.4)$$

où $\mathcal{D}_{\alpha}^{L,R}$ sont les espaces de représentations irréductibles pour, respectivement, l'action à gauche et à droite de \mathbb{G} sur $L^2(\mathbb{G})$. Pour $\mathbb{G} \equiv \mathrm{U}(1)$, c'est tout simplement la décomposition de Fourier des fonctions du cercle. L'opérateur de transfert (3.0.3) s'étend en un opérateur continu sur $L^2(X \times \mathbb{G}) = L^2(X) \otimes L^2(\mathbb{G})$ et agit comme la représentation gauche de $\tau(x)$ sur le facteur $L^2(\mathbb{G})$, donc trivialement sur $\mathcal{D}_{\alpha}^R, \forall \alpha$. (3.0.4) devient :

$$\widehat{\mathfrak{F}}_\tau = \bigoplus_{\alpha} \underbrace{\widehat{F}_{\alpha} \oplus \dots \oplus \widehat{F}_{\alpha}}_{\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{\alpha}) \text{ copies}} \quad (3.0.5)$$

avec $\mathcal{D}_{\alpha} := \mathcal{D}_{\alpha}^L$ et $\widehat{F}_{\alpha} := \widehat{\mathfrak{F}}_\tau|_{L^2(S^1) \otimes \mathcal{D}_{\alpha}}$, agissant sur les fonctions $\varphi : X \rightarrow \mathcal{D}_{\alpha}$ comme

$$\left(\widehat{F}_{\alpha}\varphi\right)(x) = \hat{\tau}_{\alpha}(x)\varphi(T(x)), \quad (3.0.6)$$

où $\hat{\tau}_{\alpha}(x)$ dénote la représentation dans \mathcal{D}_{α} de $\tau(x) \in \mathbb{G}$. Les opérateurs \widehat{F}_{α} (3.0.6) agissent par dualité sur les distributions \mathbf{w} de $\mathcal{D}'(S^1) \otimes \mathcal{D}_{\alpha}$ comme

$$\left(\widehat{F}_{\alpha}\mathbf{w}\right)(\bar{\varphi}) := \mathbf{w}\left(\widehat{F}_{\alpha}^*\varphi\right)$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) \otimes \mathcal{D}_{\alpha}$ et où l'adjoint L^2 n'est autre qu'une généralisation de l'opérateur de Perron-Frobenius à poids complexe :

$$\left(\widehat{F}_{\alpha}^*\varphi\right)(x) = \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} |\det D_y T|^{-1} \hat{\tau}_{\alpha}(y)^* \varphi(y). \quad (3.0.7)$$

avec $\hat{\tau}_{\alpha}(y)^*$ l'adjoint (pour le produit scalaire hermitien) dans \mathcal{D}_{α} de la matrice $\hat{\tau}_{\alpha}(y)$. Dans ce chapitre on commence par montrer que les opérateurs \widehat{F}_{α} admettent un spectre discret de résonances dans des espaces de distributions

$$H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_{\alpha}$$

où $H^{-m}(X)$ dénote les espaces de Sobolev usuels.

On montre ensuite, en se restreignant aux groupes les plus simples -U(1) et SU(2)- que l'on peut interpréter ces opérateurs comme des OIFs et on exhibe la dynamique canonique associée. Dans le cas Abélien cette dynamique s'effectue sur le fibré cotangent mais dans le cas non Abélien le plus simple, l'espace de phase associé admet un facteur S^2 en plus du cotangent. On expliquera brièvement comment on peut espérer généraliser cette construction aux autres groupes de Lie compacts.

Les sections suivantes mettent en application l'approche semiclassique et sont consacrées à la preuve du gap spectral (théorème 3.9) pour les extensions vers SU(2), puis à la loi de Weyl fractale (théorème 3.12).

On termine le chapitre en commentant les différentes pistes qu'il reste à arpenter et les questions laissées sans réponses.

3.1 Spectre de résonances

Les espaces de Sobolev usuels $H^{-m}(X)$ peuvent se construire comme

$$H^{-m}(X) := \hat{A}_m^{-1}(L^2(X)); m \in \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

où $\hat{A}_m := \text{Op}_1^w(A_m)$ et $A_m \in S_0^{-m}(T^*X)$ est le symbole borné d'ordre $-m$

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &= 1 && \text{si } \|\xi\| \leq 1 \\ &= \|\xi\|^{-m} && \text{si } \|\xi\| \geq 1 + \eta \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

avec $\eta > 0$ fixé mais arbitrairement petit et Op_1^w la quantification de Weyl définie en (2.1.1). Munis du produit scalaire

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{H^{-m}} := \langle \text{Op}^w(A_m)\psi, \text{Op}^w(A_m)\varphi \rangle_{L^2}$$

les espaces $H^{-m}(X)$ sont des espaces de Hilbert.

Théorème 3.1. (Ruelle) *Soit \mathbb{G} un groupe de Lie compact et \hat{F}_α l'opérateur défini en (3.0.5) et (3.0.6). $\forall m, \forall \alpha$, \hat{F}_α agit dans $H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha$ et est à spectre discret hors d'un disque de rayon $r_m := \lambda^{-m}(N/\lambda^d)^{1/2}$, où $\lambda > 1$ est le coefficient d'expansion minimal de $T : X \rightarrow X$. Les valeurs propres de $\hat{F}_\alpha|_{H^{-m} \otimes \mathcal{D}_\alpha}$ ainsi que leurs espaces propres respectifs ne dépendent pas de m et définissent les résonances de Ruelle de \hat{F}_α - cf. figure 3.1.*

Démonstration. On procède comme dans la preuve du théorème de Ruelle 1.4 (on se réfère à l'appendice B pour les détails). Fixons m et α . Par (3.1.1)

$$H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha = \left(\hat{A}_m^{-1} \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) (L^2(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha).$$

Considérons

$$\hat{Q}_{m,\alpha} := \left(\hat{A}_m \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) \hat{F}_\alpha \left(\hat{A}_m^{-1} \otimes \mathbb{I}_\alpha \right).$$

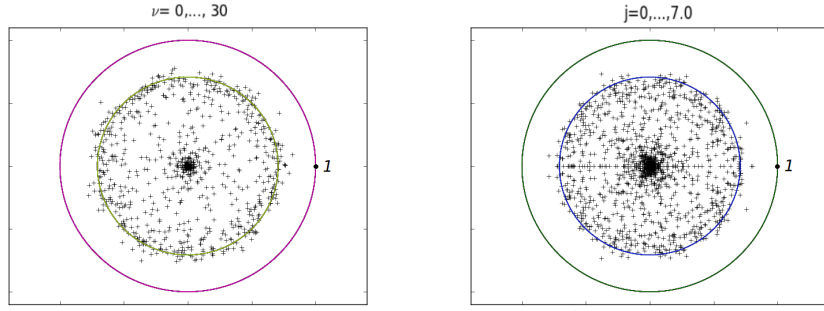


Figure 3.1: Calcul numérique de la superposition du spectre de résonances de \hat{F}_α (3.0.6) pour deux extensions particulières de l'application linéaire $T(x) = 2x \bmod 1$ du cercle. À gauche $\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)$ vu comme un élément du groupe abélien \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Dans ce cas $\alpha \equiv \nu \in \mathbb{Z}$. À droite $\tau(x) = e^{i \cos(2\pi x) J_3} e^{i\theta J_2} e^{i \cos(2\pi x) J_3} \in \text{SU}(2)$ avec $iJ_l; l = 1, 2, 3$ les générateurs de l'algèbre et $\theta \neq 0$ une constante arbitraire. Dans ce cas $\alpha \equiv j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$. Sur les deux figures, le cercle intérieur correspond au gap asymptotique du théorème 3.9 et le point noir à la valeur propre dominante 1.

Notons $\hat{\tau}_\alpha$ l'opérateur unitaire sur $L^2(X) \otimes \mathcal{D}_\alpha$ défini par $(\hat{\tau}_\alpha \varphi)(x) = \hat{\tau}_\alpha(x) \varphi(x)$. On peut voir $\hat{\tau}_\alpha$ comme une matrice de taille $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_\alpha$ dont les coefficients sont des opérateurs multiplicatifs (donc des PDOs d'ordre 0). Soit

$$\hat{P}_\alpha := \hat{Q}_{m,\alpha}^* \hat{Q}_{m,\alpha} = \left(\hat{A}_m^{-1} \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) \hat{B}_\alpha \left(\hat{A}_m^{-1} \otimes \mathbb{I}_\alpha \right),$$

où

$$\begin{aligned} \hat{B}_\alpha &= \left(\hat{F}^* \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) \hat{\tau}_\alpha^{-1} \left(\hat{A}_m^2 \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) \hat{\tau}_\alpha \left(\hat{F} \otimes \mathbb{I}_\alpha \right) \\ &= \hat{F}^* \hat{A}_m^2 \hat{F} \otimes \mathbb{I}_\alpha + \hat{C}_{2m-1}, \end{aligned}$$

avec \hat{C}_{2m-1} une matrice de taille $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_\alpha$ dont les coefficients sont des PDOs d'ordre $2m - 1$ qui apparaît lors de la permutation de $\hat{\tau}_\alpha$ et $\left(\hat{A}_m^2 \otimes \mathbb{I}_\alpha \right)$, et

$$\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ T, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X),$$

est l'opérateur de transfert classique associé à $T : X \rightarrow X$. Par composition

$$\hat{P}_\alpha = \hat{P} \otimes \mathbb{I}_\alpha + \hat{C}_{-1},$$

où \hat{P} est comme en (B.0.4) et (B.0.5) et \hat{C}_{-1} une matrice de taille $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_\alpha$ dont les coefficients sont des PDOs d'ordre -1 donc un opérateur compact. Comme l'unique terme non-compact est diagonal on peut appliquer telle qu'elle la fin de la preuve du théorème B.2 pour conclure. \square

3.2 Applications canoniques

On a décomposé $\hat{\mathfrak{F}}_\tau$ en une famille d'opérateurs quasi-compacts $\{\hat{F}_\alpha\}$. On va montrer dans cette section, en se restreignant à des exemples simples de groupe de Lie -U(1) et SU(2)- que l'indice α peut être interprété comme un paramètre semiclassique, faisant des opérateurs \hat{F}_α des \hbar -OIF d'une nature plus subtile, et associés à des dynamiques symplectiques plus complexes, que l'opérateur de Ruelle classique \hat{F} associé à $T : X \rightarrow X$.

3.2.1 Cas Abélien

Lorsque $\mathbb{G} \equiv \text{U}(1)$, la décomposition (3.0.4) coïncide avec la décomposition de Fourier des fonctions du cercle, et $\alpha \equiv \nu \in \mathbb{Z}$. Les opérateurs de transferts \hat{F}_α définis en (3.0.6) prennent la forme

$$\hat{F}_\nu = e^{i\nu\Omega} \hat{F}; \nu \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.1)$$

avec $\Omega \in \mathcal{C}^\infty(X)$. \hat{F}_ν peut être vu comme un \hbar -OIF, avec ν^{-1} dans le rôle du paramètre semiclassique. \hat{F} est en effet un exemple très simple d'OIF est associé au relevé canonique (lemme 2.11)

$$F_\epsilon : \begin{array}{ccc} T_x^* X & \rightarrow & T_{x_\epsilon}^* X \\ \xi & \mapsto & {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi \end{array}; \epsilon = 1, \dots, N \quad (3.2.2)$$

où $\{x_\epsilon = T_\epsilon^{-1}(x)\}_{\epsilon=1}^N$ dénote les N antécédents du point $x \in X$. Cette dynamique effective préserve la section nulle $\{\xi = 0\} \simeq X$. D'un autre côté l'opérateur multiplicatif $e^{i\Omega/\hbar}$ constitue lui aussi un exemple élémentaire d' \hbar -OIF et est associé au flot au temps 1 :

$$(x, \xi) \mapsto (x, \xi + d\Omega(x))$$

généralisé par le Hamiltonien Ω (lemme 2.5). Ainsi l'application canonique associée à \hat{F}_ν est multi-valuée et prend la forme

$$F_\epsilon : \begin{array}{ccc} T_x^* X & \rightarrow & T_{x_\epsilon}^* X \\ \xi & \mapsto & \xi_\epsilon := {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi + d\Omega_{x_\epsilon} \end{array}; \epsilon = 1, \dots, N. \quad (3.2.3)$$

La translation induite par la 1-forme $d\Omega$ complique significativement la dynamique sur T^*X . Néanmoins, loin de la section nulle les trajectoires continuent de fuir de manière contrôlée :

Lemme 3.2. *Pour tout $1 < \kappa < \lambda$, il existe $R > 0$, tel que*

$$\|\xi\| \geq R \Rightarrow \|\xi_\epsilon\| \geq \kappa \|\xi\|; \forall \epsilon \in \{1, \dots, N\} \quad (3.2.4)$$

Démonstration. Pour tout ϵ ,

$$\begin{aligned} \|\xi_\epsilon\| &= \left\| {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi + d\Omega_{x_\epsilon} \right\| \\ &\geq \left| \left\| {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi \right\| - \|d\Omega_{x_\epsilon}\| \right| \end{aligned}$$

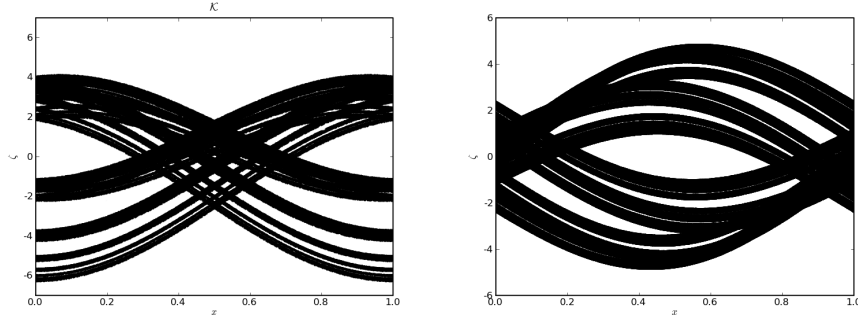


FIGURE 3.2 – Approximation numérique de K pour l'extension abélienne de l'application linéaire $T(x) = 2x \pmod{1}$ du cercle, pour deux expressions particulières de τ . À gauche $\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x)$ et à droite $\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$. Des ensembles similaires, nommés "Attracteurs solénoïdeaux" sont étudiés dans [Tsu01].

Pour $\|\xi\| \geq \lambda^{-1} \sup_x \|d\Omega_x\|$,

$$\begin{aligned} \|\xi_\epsilon\| &\geq \left\| {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi \right\| - \|d\Omega_{x_\epsilon}\| \\ &\geq \lambda \|\xi\| - \sup_x \|d\Omega_x\| \end{aligned}$$

ainsi, pour tout $0 \leq \kappa < \lambda$, $\|\xi_\epsilon\| \geq \kappa \|\xi\|$ si $\|\xi\| \geq \frac{\sup_x \|d\Omega_x\|}{\lambda - \kappa} =: R$. \square

Il subsiste en conséquence près de $\{\xi = 0\}$ un ensemble compact non-vide K depuis lequel certaines trajectoires -parmi les N^n issues d'un point (x, ξ) donné- sont captés. En effet, en prenant $R > 0$ assez grand et

$$Z := \bigcup_{x \in X} \{\xi \in T_x^* X \mid \|\xi\| \leq R\}, \quad (3.2.5)$$

K peut être défini comme l'ensemble limite d'une suite de compacts emboîtés :

$$K := \bigcap_{n \geq 0} (F^{-1})^n(Z). \quad (3.2.6)$$

où $F^{-1} : T_x^* X \rightarrow T_{T(x)}^* X$ est l'application inverse (uni-valuée) :

$$\begin{aligned} F^{-1} : T_x^* X &\rightarrow T_{T(x)}^* X \\ \xi &\mapsto ({}^t D_x T)^{-1} \cdot (\xi - d\Omega_x) \end{aligned}$$

Partant d'un point de K une trajectoire au moins parmi les N^n est captée. On aura besoin dans la suite d'une estimation sur le nombre maximal de trajectoires qui restent dans Z :

Définition 3.3. (partielle captivité[Fau11]) Soit

$$\mathcal{N}(n) = \max_{x \in X} \max_{\xi \in T_x^* X} \#\{F^n(\xi) \subseteq Z\} \leq N^n,$$

le nombre maximal de trajectoires qui restent dans Z après n itérations. La dynamique sera dite *partiellement captive* ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\mathcal{N}(n))}{n} = 0. \quad (3.2.7)$$

Tsujii su montrer [Tsu08] que cette condition est générique vis à vis du choix de fonction Ω . (on pourra consulter le rapport de diplôme de Tobias Weich [Wei10] pour une preuve détaillée de ce fait). La partielle captivité n'est clairement pas vérifiée si $d\Omega = 0$ mais aussi si Ω est un co-bord c'est à dire s'écrit comme $\eta \circ T - \eta$, pour $\eta \in \mathcal{C}^\infty(X)$ (cf [Fau11] appendice A). On reviendra sur cette notion.

3.2.2 Cas non-abélien le plus simple

Lorsque $\mathbb{G} \equiv \mathrm{SU}(2)$, les espaces de représentations \mathcal{D}_α sont univoquement indexés par leur dimension. Il est d'usage de poser $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $\mathcal{D}_\alpha \equiv \mathcal{D}_j$ de sorte que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_j = 2j + 1$ [Tay96a]. Les opérateurs de transferts prennent dans ce cas la forme

$$\hat{F}_j = \hat{\tau}_j \left(\hat{F} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{D}_j} \right); \quad j \in \frac{1}{2}\mathbb{N},$$

où $(\hat{\tau}_j \varphi)(x) := \hat{\tau}_j(x) \varphi(x)$; $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X) \otimes \mathcal{D}_j$. Comme dans le cas abélien, on cherche à comprendre ce que l'opérateur unitaire $\hat{\tau}_j$ a de commun avec les OIF et sur quel espace son éventuelle application canonique agirait. En d'autres termes on veut définir des paquets d'ondes sur $\mathcal{C}^\infty(X) \otimes \mathcal{D}_j$ et exhiber l'action de $\hat{\tau}_j$ sur ces derniers. Pour cela on vas utiliser la théorie des états cohérents pour les groupes de Lie développée dans les années 70 par Perelomov [Per86], et Gilmore [Gil74].

3.2.2.1 États cohérent de $\mathrm{SU}(2)$

$\mathrm{SU}(2)$ est le groupe des matrices 2×2 spéciales unitaires, i.e.

$$\mathrm{SU}(2) := \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \cong S^3. \quad (3.2.8)$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2) \cong \mathbb{R}^3$ est sous-tendue par les générateurs $iJ_k = -\frac{1}{2}\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$, où σ_k sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En identifiant $Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}^2$ à une matrice 1×2 , on construit une représentation naturelle du groupe sur les polynômes en Z_1, Z_2 :

$$\pi : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}[Z_1, Z_2]), \quad (\pi(g)P)(Z) := P(Zg).$$

Cette représentation est clairement réductible, et dans cette réalisation les espaces \mathcal{D}_j peuvent être vus comme ensembles de polynômes homogènes de degré $2j \in \mathbb{N}$; i.e.

$$\mathcal{D}_j \equiv \left\{ P \in \mathbb{C}[Z_1, Z_2] \mid P(Z_1, Z_2) = \sum_{k=0}^{2j} a_k Z_1^k Z_2^{2j-k}; a_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Il y a en outre une correspondance univoque entre les polynômes homogènes sur \mathbb{C}^2 et les polynômes de degré inférieur à $2j + 1$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2$. En effet,

$$P(Z_1, Z_2) = Z_2^{2j} \sum_{k=0}^{2j} a_k \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)^k,$$

si $z = \frac{Z_1}{Z_2}$ dénote la projection stéréographique de Z sur \mathbb{P}^1 , à P on associe $p(z) = \sum_{k=0}^{2j} a_k z^k$ et vice versa. Le produit scalaire rendant cette représentation unitaire s'écrit ([Per86] p.58) :

$$\langle p_1, p_2 \rangle = \frac{2j+1}{\pi} \int \frac{\overline{p_1(z)} p_2(z)}{(1+|z|^2)^{2j+2}} dz, \quad (3.2.9)$$

et une base orthonormée sur \mathcal{D}_j est donnée par les monômes normalisés

$$p_\mu(z) := c_\mu z^{j+\mu}; \quad c_\mu = \sqrt{\frac{2j!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}}; \quad \mu = -j, \dots, j.$$

Finalement, la réduction de π à cette réalisation de \mathcal{D}_j prend la forme, avec la paramétrisation de $\mathrm{SU}(2)$ définie en (3.2.8),

$$(\hat{g}_j p)(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2j} p(R_g^{-1} z); \quad R_g^{-1} z := \frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}. \quad (3.2.10)$$

Cette dernière équation permet une élégante interprétation semiclassique : R_g est la rotation sur \mathbb{S}^2 induite par g vue au travers de la projection stéréographique (cf. fig. 3.3), et un calcul direct montre que

$$(\beta z + \bar{\alpha})^{2j} = e^{ijS(z,g)} \quad (3.2.11)$$

avec $S(z, g)$ l'action classique de la trajectoire libre $z \mapsto R_g z$ sur \mathbb{S}^2 [Per86, p. 59] :

$$S(z, g) = \int_0^z (\theta - R_g^* \theta) + S(0, g),$$

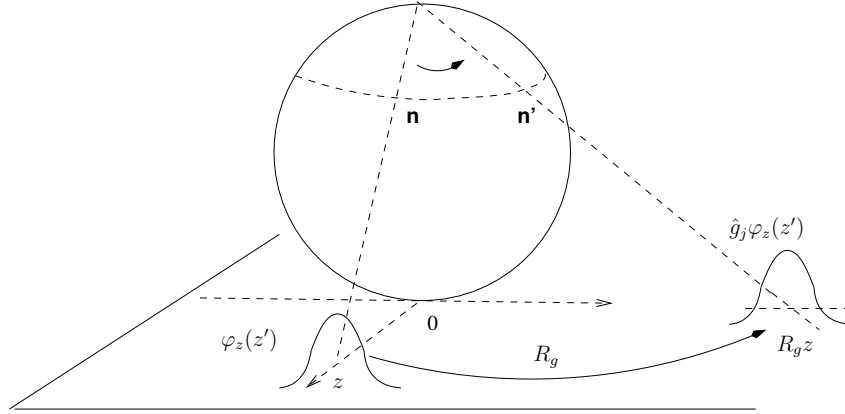


FIGURE 3.3 – Projection stéréographique de la sphère \mathbb{S}^2 sur \mathbb{C} . $R_g \in \text{SO}(3)$ est la rotation envoyant le point $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ en \mathbf{n}' . Sur le plan complexe c'est une transformation de Möbius $\zeta \mapsto \frac{\bar{\alpha}\zeta + \beta}{\alpha - \bar{\beta}\zeta}$. Les états cohérents sont micro-localisés sur la sphère et suivent ce mouvement classique.

où θ est la forme canonique

$$\theta = \frac{\bar{z}dz}{1 + |z|^2} \Rightarrow d\theta = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} =: \omega_{\mathbb{S}^2}.$$

De ce point de vue, \hat{g}_j peut être interprétée comme la quantification géométrique de la rotation classique R_g sur \mathbb{S}^2 , avec \mathcal{D}_j comme espace de Hilbert quantique².

On peut définir un calcul symbolique sur \mathcal{D}_j via la quantification de Toeplitz -ou Anti-Wick. On considère pour cela une famille de projecteurs de rang 1 sur \mathcal{D}_j paramétrés par les points de \mathbb{P}^1 . Notons π la projection canonique $\mathcal{D}_j \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{D}_j)$, et on pose

$$\mathcal{E} := \{ \pi(\hat{g}_j p_j); g \in \mathbb{G}; p_j(z) = z^{2j} \} \subset \mathbb{P}(\mathcal{D}_j), \quad (3.2.12)$$

l'ensemble des droites complexes passant par 0 dans \mathcal{D}_j généré par l'orbite de p_j . Comme

$$(\hat{g}_j p_j)(z) = \bar{\beta}^{2j} (1 + \bar{\zeta}z)^{2j}; \zeta := -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{P}^1,$$

on constate que $\mathcal{E} \cong \mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2$.

Définition 3.4. A tout $\zeta \in \mathbb{P}^1$ on associe l'état cohérent noté $\varphi_\zeta \in \mathcal{D}_j$ définit³ par

$$\varphi_\zeta(z) := (1 + \bar{\zeta}z)^{2j} \quad (3.2.13)$$

2. En quantification géométrique, l'espace de Hilbert quantique est construit comme ensemble de sections holomorphes d'un fibré non-trivial au-dessus d'une variété de Kähler. Ici l'espace des polynômes homogènes de degré $2j$ sur \mathbb{C}^2 peut être vu comme ensemble de sections holomorphes de $H^{\otimes 2j} \rightarrow \mathbb{P}^1$ où $H \rightarrow \mathbb{P}^1$ est le dual du fibré tautologique $L \rightarrow \mathbb{P}^1$ [Woo92, Fau07].

3. φ_ζ n'est pas normé.

On note $|\zeta\rangle\langle\zeta|$ le projecteur de rang 1 associé⁴ Si \mathbf{n} est le point sur la sphère \mathbb{S}^2 dont la projection stéréographique⁵ correspond à ζ on notera parfois $\varphi_{\mathbf{n}}$ au lieu de φ_{ζ} et $|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}|$ au lieu de $|\zeta\rangle\langle\zeta|$ -cf. fig.3.3.

Par (3.2.9) on déduit la micro-localisation des états cohérents sur \mathbb{S}^2 :

$$\frac{|\varphi_{\zeta}(z)|^2}{\|\varphi_{\zeta}\|^2} = \frac{|1 + z\bar{\zeta}|^{2j}}{(1 + |\zeta|^2)^{2j}},$$

d'ordre $\mathcal{O}(j^{-\infty})$ lorsque j augmente si $\zeta \neq z$ -fig. 3.3. En appliquant (3.2.10) et (3.2.11) on a aussi que

$$\hat{g}_j : (1 + \bar{\zeta}z)^{2j} \mapsto (\bar{\alpha} - \beta\bar{\zeta})^{2j} (1 + z\overline{R_g\zeta})^{2j},$$

les états cohérents évoluent ainsi selon la dynamique classique sur $\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2$:

$$\pi(\hat{g}_j\varphi_{\zeta}) = \pi(\varphi_{R_g\zeta}) \Leftrightarrow \hat{g}_j|\zeta\rangle\langle\zeta|\hat{g}_j^{-1} = |R_g\zeta\rangle\langle R_g\zeta|; \forall g \in \text{SU}(2), \zeta \in \mathbb{P}^1.$$

En outre, puisque l'opérateur suivant, agissant sur \mathcal{D}_j

$$\int_{\text{SU}(2)} \hat{g}_j|0\rangle\langle 0|\hat{g}_j^{-1}dg = \int_{\mathbb{C}} |\zeta\rangle\langle\zeta| \frac{d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^2} = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{S}^2} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| d\mathbf{n}$$

commute avec tous les éléments du groupe, le lemme de Schur lui impose d'être un multiple de l'identité $\mathbb{I}_{\mathcal{D}_j}$. En fait, un calcul algébrique donne -[Per86] p. 63 :

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| d\mathbf{n} = \mathbb{I}_{\mathcal{D}_j}. \quad (3.2.14)$$

C'est la relation de complétude des états cohérents. Cela suggère l'introduction de l'application surjective :

$$\text{Op}_j^{\text{AW}} : \begin{cases} \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}^2) & \rightarrow \text{End}(\mathcal{D}_j) \\ a(\mathbf{n}) & \mapsto \frac{2j+1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} a(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| d\mathbf{n}. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

transformant les fonctions lisses de \mathbb{S}^2 en endomorphismes de \mathcal{D}_j . C'est la *quantification géométrique* de $\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2$. De ce point de vue le résultat suivant est un cas particulier :

Théorème 3.5. (Cahen-Gutt-Rawnsley [MCR93]). *Pour tout $a, b \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}^2)$,*

$$\text{Op}_j^{\text{AW}}(a)\text{Op}_j^{\text{AW}}(b) = \text{Op}_j^{\text{AW}}(a\sharp b); \text{ avec } a\sharp b = ab + \mathcal{O}(j^{-1}). \quad (3.2.16)$$

De plus,

$$-ij [\text{Op}_j^{\text{AW}}(a), \text{Op}_j^{\text{AW}}(b)] = \text{Op}_j^{\text{AW}}(\{a, b\}_{\omega_{\mathbb{S}^2}}) + \mathcal{O}_{\text{End}(\mathcal{D}_j)}(j^{-1}). \quad (3.2.17)$$

4. Projétant sur les polynômes de degré $2j$ possédant une unique racine en $\zeta \in \mathbb{C}$.

5. Avec cette convention $p_j \equiv \varphi_{\infty}$.

L'ensemble des opérateurs ainsi construits est une algèbre et définit une algèbre sur les observables qui coïncide au premier ordre avec l'algèbre de Poisson. Une première conséquence importante de ce fait découle de la remarque suivante, puisque

$$\hat{g}_j^{-1} \text{Op}_j^{AW}(a) \hat{g}_j = \text{Op}_j^{AW}(a \circ R_g),$$

les représentations d'éléments du groupe constituent des exemples naturels d'OIF dans ce contexte. On peut toujours écrire $\hat{g}_j = e^{iu \cdot \hat{J}}$ où $u \in \mathbb{R}^3$ et $\hat{J} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$, avec \hat{J}_k les représentations des générateurs du groupe. On doit donc avoir

$$u \cdot \hat{J} = j \cdot \text{Op}_j^{AW}(u \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(j^{-1})) \quad (3.2.18)$$

pour que le flot Hamiltonien au temps 1 sur \mathbb{S}^2 généré par $u \cdot \mathbf{n}$ (équations de Bloch) coïncide avec la rotation R_g telle que définie en (3.2.10).

3.2.2.2 L'application canonique

On peut à présent définir une quantification sur l'espace des phases élargi

$$(M, \omega_M) := (T^*X \times \mathbb{S}^2; \omega_{T^*X} + \omega_{\mathbb{S}^2}) \quad (3.2.19)$$

associant à toute observable $a \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$ l'opérateur linéaire

$$\text{Op}_{\hbar, j}(a) := \text{Op}_\hbar^w \otimes \text{Op}_j^{AW}(a) : \mathcal{C}^\infty(X) \otimes \mathcal{D}_j \rightarrow \mathcal{D}'(X) \otimes \mathcal{D}_j, \quad (3.2.20)$$

avec Op_\hbar^w ; $\hbar > 0$ la quantification de Weyl (2.1.1) sur T^*X . En choisissant

$$\hbar \equiv \frac{1}{j}$$

on munit l'ensemble des PDO construits par (3.2.20) d'une structure d'algèbre induisant sur les observables une structure d'algèbre de Poisson associée à la forme symplectique totale

$$\omega_M = \omega_{T^*X} + \omega_{\mathbb{S}^2}.$$

En effet, si on note pour tout $a, b \in \mathcal{C}_0^\infty(M)$

$$\hat{a}_\hbar(\mathbf{n}) := \text{Op}_\hbar^w(a(\cdot; \mathbf{n})) \in OPS^{-\infty}(T^*X)$$

alors par le théorème 3.5, on a

$$\begin{aligned} \text{Op}_{\hbar, j}(a) \text{Op}_{\hbar, j}(b) &= \text{Op}_j^{AW}(\hat{a}_\hbar) \text{Op}_j^{AW}(\hat{b}_\hbar) \\ &= \text{Op}_j^{AW}(\hat{a}_\hbar \natural_j \hat{b}_\hbar) \end{aligned}$$

avec

$$\hat{a}_\hbar \natural_j \hat{b}_\hbar(\mathbf{n}) = \hat{a}_\hbar(\mathbf{n}) \hat{b}_\hbar(\mathbf{n}) + \frac{i}{2j} f^{AW}(\hat{a}_\hbar, \hat{b}_\hbar)(\mathbf{n}) + \mathcal{O}(j^{-2})$$

où f^{AW} est un opérateur différentiel bilinéaire d'ordre 2 en la variable \mathbf{n} de sorte que

$$f^{AW}(a, b) - f^{AW}(b, a) = 2 \{a, b\}_{\omega_{\mathbb{S}^2}}.$$

D'un autre côté, du lemme de composition 2.4 on sait que

$$\hat{a}_{\hbar}(\mathbf{n}) \hat{b}_{\hbar}(\mathbf{n}) = \text{Op}_{\hbar}^w(a(\cdot; \mathbf{n}) \#_{\hbar} b(\cdot; \mathbf{n}))$$

avec

$$a(\cdot; \mathbf{n}) \#_{\hbar} b(\cdot; \mathbf{n}) = a(\cdot; \mathbf{n}) b(\cdot; \mathbf{n}) + i \frac{\hbar}{2} \{a(\cdot; \mathbf{n}), b(\cdot; \mathbf{n})\}_{\omega_{T^*X}} + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

Pour le choix très particulier $\hbar = j^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Op}_{j^{-1}, j}(a) \text{Op}_{j^{-1}, j}(b) &= \text{Op}_{j^{-1}, j}(ab) + \\ &+ \frac{i}{2j} \text{Op}_{j^{-1}, j} \left(\{a(\cdot; \mathbf{n}), b(\cdot; \mathbf{n})\}_{\omega_{T^*X}} + f^{AW}(a, b) \right) + \mathcal{O}(j^{-2}) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$-ij [\text{Op}_{j^{-1}, j}(a), \text{Op}_{j^{-1}, j}(b)] = \text{Op}_{j^{-1}, j} \left(\{a, b\}_{\omega_{T^*X}} + \{a, b\}_{\omega_{\mathbb{S}^2}} \right) + \mathcal{O}(j^{-1}).$$

Ainsi, la quantification

$$\text{Op}_j \equiv \text{Op}_{j^{-1}, j}$$

obéit au principe de correspondance : la composition de deux PDOs est un PDO dont le symbole principal est le produit des symboles et le terme dominant du symbole du commutateur est donné par la crochet de Poisson des symboles.

On va montrer que pour cette quantification, $\hat{\tau}_j$ prend la forme d'un OIF de type (2.1.9). Comme $\text{SU}(2)$ est simplement connexe, on peut écrire $\hat{\tau}_j(x) = e^{i\Omega_x \cdot \hat{J}}$ avec $\Omega \in \mathcal{C}^\infty(X; \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteur lisse sur X .

Par (3.2.18), et en utilisant (3.2.20) on remarque alors que $\hat{\tau}_j = e^{ij \text{Op}_j(a)}$ avec $a(x, \mathbf{n}) = \Omega_x \cdot \mathbf{n} + \mathcal{O}(j^{-1})$. C'est précisément l'expression formelle d'un OIF associé au flot au temps 1 généré par le champ de vecteur qui s'écrit :

$$\dot{x} = 0; \quad \dot{\xi} = d\Omega_x \cdot \mathbf{n}; \quad \dot{\mathbf{n}} = \Omega_x \wedge \mathbf{n}.$$

Par intégration on déduit l'expression en coordonnées du flot au temps 1

$$(x, \xi, \mathbf{n}) \mapsto (x, \xi + \mathfrak{h}_{x, \mathbf{n}}, R_{\tau(x)} \mathbf{n}), \quad (3.2.21)$$

avec $\mathfrak{h}_{x, \mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \int_0^1 \tilde{R}_{-t\Omega_x} d\Omega_x dt$, où \tilde{R}_u dénote la rotation dans \mathbb{R}^3 d'axe u . Avec la formule de Campbell-Hausdorff ([Tay96a] p. 541) et l'eq.(4.3.18) p.62 dans [Per86] on

peut montrer que⁶

$$\mathfrak{h}_{x,\mathbf{n}} = (ij)^{-1} \langle \varphi_{\mathbf{n}} | \left(\hat{\tau}_j^{-1} d\hat{\tau}_j \right) (x) | \varphi_{\mathbf{n}}^n \rangle / \langle \varphi_{\mathbf{n}}, \varphi_{\mathbf{n}} \rangle \in T_x^* X, \quad (3.2.22)$$

le symbole de Wick [MCR93] de $(\tau^{-1} d\tau)(x) \in \mathfrak{su}(2) \otimes T_x^* X$. revenant à l'opérateur $\hat{F}_j = \hat{\tau}_j \left(\hat{F} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{D}_j} \right)$ on constate qu'il prend la forme d'un OIF associé à l'application canonique multi-valuée sur M :

$$F_\epsilon : T_x^* X \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow T_{x_\epsilon}^* X \times \mathbb{S}^2 \\ (\xi, \mathbf{n}) \longmapsto ({}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi + \mathfrak{h}_{x_\epsilon, \mathbf{n}}, R_{\tau(x_\epsilon)} \mathbf{n}) \quad (3.2.23)$$

avec $\epsilon = 1, \dots, N$. Contrairement au cas $U(1)$ la dynamique effective associée à \hat{F}_j ne s'effectue plus seulement sur le cotangent : le caractère non abélien de $SU(2)$ fait apparaître un couplage avec une dynamique sur le facteur compact \mathbb{S}^2 . La dynamique sur $T^* X$ reste néanmoins très similaire à celle déduite en (3.2.3). En particulier, *mutatis mutandis*, on montre une estimation similaire celle obtenue dans le lemme 3.2 :

Lemme 3.6. *Si on note $\xi_\epsilon := {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi + \mathfrak{h}_{x_\epsilon, \mathbf{n}}$, alors pour tout $1 < \kappa < \lambda$, il existe $R > 0$, t.q. pour tout $\epsilon \in \{1, \dots, N\}$,*

$$\|\xi\| \geq R \Rightarrow \|\xi_\epsilon\| \geq \kappa \|\xi\|. \quad (3.2.24)$$

Il existe par conséquent un ensemble captif K que l'on peut construire, partant du compact

$$Z := \bigcup_{x \in X} \{\xi \in T_x^* X \mid \|\xi\| \leq R\} \times \mathbb{S}^2, \quad (3.2.25)$$

6. Ce résultat n'est pas surprenant si l'on considère le transport par $\hat{\tau}_j$ de paquets d'ondes (normalisés) généralisés $\varphi_{x,\xi,\mathbf{n}} := \varphi_{x,\xi} \otimes \varphi_{\mathbf{n}}^n$ avec $\varphi_{x,\xi}$ un paquet d'ondes gaussien de largeur $j^{-1/2}$ sur X prenant localement la forme (2.2.5). Par la propriété de micro-localisation des états cohérent et des paquets d'ondes gaussiens, on déduit que

$$\langle \varphi_{y,\eta,\mathbf{n}'} | \hat{\tau}_j \varphi_{x,\xi,\mathbf{n}} \rangle_{L^2(X) \otimes \mathcal{D}_j} := \int_X \overline{\varphi_{y,\eta}(z)} \varphi_{x,\xi}(z) \langle \varphi_{\mathbf{n}}^n | \hat{\tau}_j(z) \varphi_{\mathbf{n}}^n \rangle dm(z)$$

sera négligeable lorsque $j \rightarrow \infty$ si $y \neq x$ et si $y = x$ négligeable si $\mathbf{n}' \neq R_{\tau(x)} \mathbf{n}$. Localement

$$\left| \langle \varphi_{y,\eta,R_{\tau(x)} \mathbf{n}'} | \hat{\tau}_j \varphi_{x,\xi,\mathbf{n}} \rangle \right| \simeq \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-j\|x-z\|^2} e^{ij(\xi \cdot z - \eta \cdot z)} \langle \varphi_{\mathbf{n}}^n | \hat{\tau}_j(x)^{-1} \hat{\tau}_j(z) \varphi_{\mathbf{n}}^n \rangle dm(z) \right|$$

$\langle \varphi_{\mathbf{n}}^n | \hat{\tau}_j(x)^{-1} \hat{\tau}_j(z) \varphi_{\mathbf{n}}^n \rangle$ est maximal et égal à 1 pour $z = x$. Si on écrit ce terme comme $\rho(z) e^{ij\psi(z)}$ alors le théorème de la phase stationnaire implique que l'expression ci-dessus est négligeable si

$$\xi - \eta + d\psi(x) \neq 0.$$

avec

$$d\psi(x) = (ij)^{-1} \langle \varphi_{\mathbf{n}}^n | (\hat{\tau}_j^{-1} d\hat{\tau}_j)(x) | \varphi_{\mathbf{n}}^n \rangle.$$

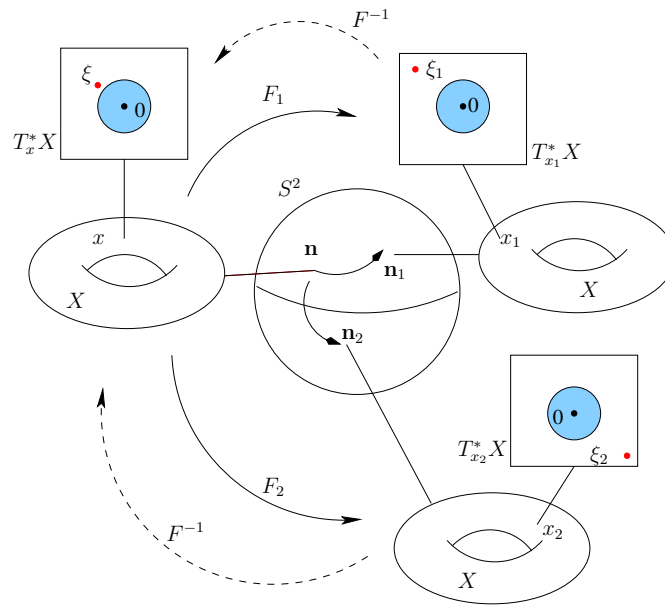


Figure 3.4: Représentation schématique de la dynamique sur M , lorsque $X = \mathbb{T}^2$, induite par l'application canonique multi-valuée F associée à \hat{F}_j .

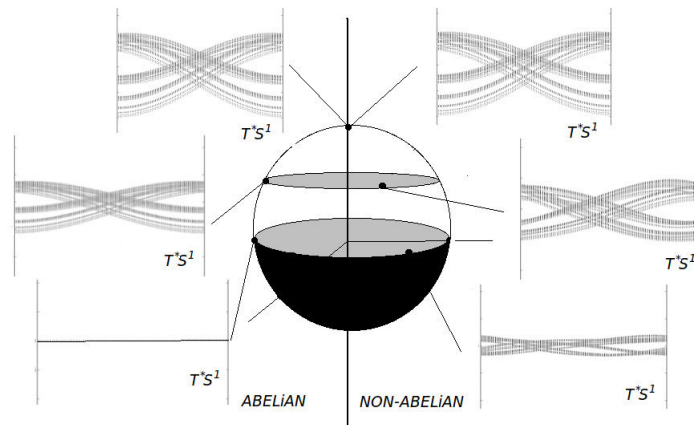


Figure 3.5: Approximation numérique de K pour l'extension de l'application linéaire $T(x) = 2x \pmod{1}$ du cercle, pour deux expressions particulières de τ . A gauche $\tau(x) = e^{i \cos(2\pi x) J_3}$ avec J_3 le générateur des rotations autour de l'axe vertical. Dans ce cas τ envoie $X = S^1$ vers un sous groupe $U(1)$ de $SU(2)$. La dynamique induite sur la sphère n'est pas transitive car elle laisse invariante les géodésiques parallèles à l'équateur. Au dessus de chacune d'elles, l'ensemble captif correspond à celui associé à une extension abélienne de T avec $\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{n}_3 \cos(2\pi x)$. Ces ensembles dégénèrent au dessus de l'équateur et la dynamique ne satisfait pas à la propriété de partielle captivité. Sur la droite on brise cette dégénérescence en prenant $\tau(x) = e^{i \cos(2\pi x) J_3 + i 0.2 \cos(2\pi x) J_1}$.

comme :

$$K := \bigcap_{n \geq 0} (F^{-1})^n (Z). \quad (3.2.26)$$

où

$$\begin{aligned} F^{-1} : T_x^* X \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow T_{T(x)}^* X \times \mathbb{S}^2 \\ (\xi, \mathbf{n}) &\longmapsto \left(({}^t D_x T)^{-1} (\xi - \mathfrak{h}_{x, R_{\tau(x)}^{-1}} \mathbf{n}), R_{\tau(x)}^{-1} \mathbf{n} \right) \end{aligned}$$

-cf. fig. 3.5. Depuis un point dans K , une trajectoire au moins parmi les N^n est captée. Comme dans le cas abélien on dira que l'application F_ϵ est partiellement captive si la plus part des trajectoires issues de K s'échappent dans la direction non compacte (def. 3.3).

3.2.2.3 Théorème d'Egorov dans le contexte non-Abélien

Avec j^{-1} dans le rôle du paramètre semiclassique on définit une classe de symboles sur M similaire à celle donnée en (2.1.2) :

Définition 3.7. Pour tout $m \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$, on considère le sous ensemble suivant, noté $S_\mu^m(M)$, de familles à un paramètre de fonctions $a_j \in \mathcal{C}^\infty(M)$ qui, pour tout $x \in X$, satisfont en coordonnées locales $U_x \times \mathbb{R}^d \times U_{\mathbf{n}}$; $U_x \subset \mathbb{R}^d$, $U_{\mathbf{n}} \subset \mathbb{R}^2$, l'estimation

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_{\mathbf{n}}^\gamma a_j(x, \xi, \mathbf{n})| \leq C_{\alpha\beta\gamma} j^{\mu(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)} \langle \xi \rangle^{m-|\beta|}. \quad (3.2.27)$$

On notera $OP S_\mu^m(M)$ l'ensemble des opérateurs linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(X) \otimes \mathcal{D}_j$ associés aux symboles de $S_\mu^m(M)$ par la règle de quantification (3.2.20).

Dans ce contexte le théorème d'Egorov prend la forme :

Lemme 3.8. $\forall a \in S_\mu^m(M)$, $\hat{F}_j^* \text{Op}_j(a) \hat{F}_j \in OP S_\mu^m(M)$ et son symbole s'écrit, avec F_ϵ définie en (3.2.23), comme

$$\sum_{\epsilon=1}^N |\det DT|^{-1} a \circ F_\epsilon \bmod j^{2\mu-1} S_\mu^{m-1}(M). \quad (3.2.28)$$

3.2.3 Commentaires concernant le cas général

La construction des états cohérents décrite dans la section précédente s'étend de manière assez directe au contexte général ([Per86] chap. 2). Soit \mathbb{G} un groupe de Lie compact et \mathcal{D} un espace de représentation irréductible et unitaire de \mathbb{G} .

On commence par choisir un vecteur u dans \mathcal{D} pour définir le sous ensemble

$$\mathcal{E} = \{\pi(\hat{g}u); g \in \mathbb{G}\}$$

de $\mathbb{P}(\mathcal{D})$. \mathcal{E} is isomorphe à l'espace homogène \mathbb{G}/H où H est le sous groupe d'isotropie de $\pi(u)$. Si u est un vecteur de poids maximal ([GS84] p. 168) on sait montrer que \mathcal{E}

hérite de la structure Kählerienne du projectif $\mathbb{P}(\mathcal{D})$. Soit z un point de \mathcal{E} vu comme une variété complexe, et $|z\rangle\langle z|$ le projecteur de rang 1 associé à l'état cohérent $\hat{g}u$, $g \in [z]$. La mesure de Haar sur \mathbb{G} induit une mesure sur \mathcal{E} et par le lemme de Shur

$$\int_{\mathcal{E}} |z\rangle\langle z| dz = C_u^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{D}},$$

avec $C_u \neq 0$ une constante dépendant à priori du vecteur initial $u \in \mathcal{D}$. On peut alors, comme pour $SU(2)$, définir l'application surjective suivante :

$$\text{Op} : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathcal{E}) & \rightarrow \text{End}(\mathcal{D}) \\ a(z) & \mapsto C_u \int_{\mathcal{E}} a(z) |z\rangle\langle z| dz. \end{cases}$$

Si u est un vecteur de poids maximal, cette application correspond à la quantification géométrique de la variété de Kähler \mathcal{E} et \mathcal{D} est réalisé comme espace de section holomorphes d'un fibré en droites $L^{\otimes m} \rightarrow \mathcal{E}$ au dessus de \mathcal{E} [Woo92]. Le paramètre semiclassique m donne la dimension de \mathcal{D} et le théorème 3.5 tiens dans à la limite $m \rightarrow \infty$.

La principale différence avec l'exemple non Abélien le plus simple réside dans le fait qu'il y a en général plusieurs vecteurs de poids maximal dans \mathcal{D} ou, de manière équivalente, plusieurs familles d'espaces de représentations irréductibles (que l'on schématise par les diagrammes de Young). On pourra donc s'attendre à ce que plusieurs paramètres semiclassiques et possiblement plusieurs espaces de phases différents prennent part dans la dynamique effective induite par les opérateurs de transferts (3.0.6).

3.3 Gap spectral pour les extensions vers $SU(2)$

Dans le cas Abélien $\mathbb{G} \equiv U(1)$ Faure [Fau11], dans une approche en tout point similaire à celle présentée jusque ici, su montrer l'existence générique d'un gap spectral asymptotique pour les résonances de \hat{F}_ν (1.3.4) impliquant pour l'opérateur classique $\hat{\mathfrak{F}}_\tau$ une borne supérieure d'ordre $\lambda^{-d/2} < 1$ sur son rayon spectral essentiel. Ce résultat déjà connu par Tsujii [Tsu08] pour les semi-flots construits comme suspension d'applications expansives, montre que, modulo des termes d'ordre ρ^n , $1 > \rho > \lambda^{-d/2}$, la convergence vers l'équilibre statistique pour le système dynamique partiellement expansif (0.0.1) est contrôlée par un opérateur de rang fini (théorème 5 dans [Fau11] and Eq.(1) dans [Tsu08]). On montre dans cette section que ce résultat s'étend à l'extension non-abélienne la plus simple, i.e. lorsque $\mathbb{G} \equiv SU(2)$:

Théorème 3.9. [Arn12] -cf. figure 3.1. *Pour $m > 0$ suffisamment grand, si la dynamique canonique sur M (3.2.23) induite par l'opérateur de transfert \hat{F}_j (3.0.6) est partiellement captive (définition 3.3), alors le rayon spectral de $\hat{F}_j : H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j \rightarrow H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j$ satisfait, dans la limite semiclassique $j \rightarrow \infty$*

$$r_s(\hat{F}_j) \leq \Lambda^{-1/2} + o(1), \quad (3.3.1)$$

où Λ est le taux minimal d'expansion de $T : X \rightarrow X$:

$$\Lambda := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\min_x |\det DT_x^n| \right)^{1/n} \geq \lambda^d > 1. \quad (3.3.2)$$

De plus, $\forall \rho > \Lambda^{-1/2}$, il existe $n_0, j_0, m_0 > 0$ t.q. $\forall j \geq j_0, m \leq m_0$,

$$\left\| \hat{F}_j^{n_0} \right\|_{H_{1/j}^{-m} \otimes \mathcal{D}_\alpha} \leq \rho^{n_0}, \quad (3.3.3)$$

avec $\|\cdot\|_{H_{1/j}^m}$ la norme Sobolev semiclassical $\|\psi\|_{H_{1/j}^{-m}} := \left\| \text{Op}_{j^{-1}}^w(A_m) \psi \right\|_{L^2}$.

Comme expliqué en détail dans [Fau11, section 2.5], de ce résultat et de la décomposition (3.0.5) on déduit le mélange exponentiel du système dynamique partiellement expansif $(\widehat{T}_\tau, X \times \text{SU}(2))$:

Corollaire 3.10. *Lorsque le théorème 3.9 s'applique, alors pour tout $\rho > \Lambda^{-1/2}$ il existe un opérateur de rang fini \hat{k} tel que, pour tout jeu d'observables $\Phi, \Psi \in \mathcal{C}^\infty(X \times \text{SU}(2))$,*

$$\left(\widehat{\mathfrak{F}}_\tau^n \Psi; \Phi \right)_{L^2(\hat{\mu})} = \left(\hat{k}^n \Psi; \Phi \right)_{L^2(\hat{\mu})} + \mathcal{O}(\rho^n).$$

Notons Π_0 le projecteur sur l'espace de représentation trivial \mathcal{D}_0 . Si $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de $\widehat{\mathfrak{F}}_\tau$ sur le cercle unité alors \hat{k} admet une décomposition spectrale de la forme $\hat{k} = |1\rangle \langle \rho| \otimes \Pi_0 + \hat{r}$, $r_s(\hat{r}) < 1$ avec $\langle \rho | \varphi \rangle := \int_X \varphi \rho d\mathbf{m} = \int_X \varphi d\mu$, où μ est la mesure SRB de (T, X) . Ainsi

$$C_{\Psi, \Phi}(n) - \int \bar{\Psi} d\hat{\mu} \int \Phi d\hat{\mu} = (\hat{r}^n \Psi; \Phi)_{L^2(\hat{\mu})} + \mathcal{O}(\rho^n),$$

et $(\widehat{T}_\tau, X \times \text{SU}(2))$ est par conséquent exponentiellement mélangeant pour la mesure $\hat{\mu}$.

Démonstration. (du théorème 3.9). La suite est une adaptation quasi directe de la preuve de Faure au cas où $\mathbb{G} \equiv \text{SU}(2)$. Dorénavant $1 < \kappa < \lambda$ et $R > 0$ sont choisis pour satisfaire au lemme 3.6. Considérons $A_m \in S_0^{-m}(M)$; $A_m(\xi, \mathbf{n}) \in (0, 1]$ t.q.

$$\begin{aligned} A_m(\xi, \mathbf{n}) = A_m(\|\xi\|) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \|\xi\| \leq R \\ \left(\frac{R}{\|\xi\|}\right)^m & \text{si } \|\xi\| \geq R + \eta \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

avec $\eta > 0$ fixé (mais arbitrairement petit). Par la règle de quantification (3.2.20), pour tout $j > 0, m \in \mathbb{R}$, on construit l'espace de Hilbert de distributions (muni du produit scalaire induit par celui de L^2)

$$H_{j^{-1}}^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j = \text{Op}_j(A_m)^{-1}(L^2 \otimes \mathcal{D}_j).$$

Pour tout $j > 0$, en tant que sous-espaces de $\mathcal{D}'(S^1)$, $H_{j^{-1}}^{-m}(X)$ et $H^{-m}(X)$ (3.1.1) sont isomorphes bien que munis de normes différentes. Le spectre ne dépend pas de la

norme, le spectre de $\hat{F}_j : H_{j-1}^m(X) \otimes \mathcal{D}_j \rightarrow H_{j-1}^m(X) \otimes \mathcal{D}_j$ n'est autre que le spectre de résonances de Ruelle du théorème 3.1. Considérons

$$\hat{Q}_m := \text{Op}_j(A_m) \hat{F}_j \text{Op}_j(A_m)^{-1}.$$

Par construction \hat{Q}_m agit dans $L^2(X) \otimes \mathcal{D}_j$ est unitairement équivalent à $\hat{F}_j|_{H_{j-1}^m \otimes \mathcal{D}_j}$. D'un autre côté [Kat95] $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$r_s(\hat{Q}_m) \leq \left\| \hat{Q}_m^n \right\|^{\frac{1}{n}} \leq \left\| \hat{Q}_m^{n*} \hat{Q}_m^n \right\|^{\frac{1}{2n}}.$$

Posons

$$\hat{P}^{(n)} := \hat{Q}_m^{n*} \hat{Q}_m^n = \text{Op}_j(A_m)^{-1} \hat{F}_j^{n*} \text{Op}_j(A_m^n) \hat{F}_j^n \text{Op}_j(A_m)^{-1}.$$

Du théorème d'Egorov (3.2.28) et par le lemme de composition (lemme 2.4), on a que $\hat{P}^{(n)} \in OPS_0^m(M)$. Afin d'écrire de façon concise le symbole de $\hat{P}^{(n)}$, fixons quelques notations : Soit $\mathcal{A} := \{1, \dots, N\}$ et

$$\mathcal{A}^n := \{\epsilon = \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n; \epsilon_i \in \mathcal{A}\},$$

l'ensemble des N^n mots de taille $n > 0$ écrits avec l'alphabet \mathcal{A} . Pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}^n$ on pose

$$x_\epsilon := T_\epsilon^{-n}(x) := T_{\epsilon_n}^{-1} \circ \dots \circ T_{\epsilon_1}^{-1}(x). \quad (3.3.5)$$

La différentielle le long de la trajectoire $T^n : x_\epsilon \rightarrow x$ sur X s'écrit alors

$$D_{x_\epsilon} T^n = D_{x_{\epsilon_1}} T \cdot \dots \cdot D_{x_{\epsilon_j}} T \cdot \dots \cdot D_{x_{\epsilon_n}} T : T_{x_\epsilon} X \rightarrow T_x X \quad (3.3.6)$$

avec $\epsilon|_j := \epsilon_1 \dots \epsilon_j$ la troncation à la j -ième lettre du mot ϵ . Si $F_\epsilon^n = F_{\epsilon_n} \circ \dots \circ F_{\epsilon_1}$ on écrira

$$\begin{aligned} F_\epsilon^n : T_x^* X \times \mathbb{S}^2 &\longrightarrow T_{x_\epsilon}^* X \times \mathbb{S}^2 \\ (\xi, \mathbf{n}) &\longmapsto (\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Avec ces notations le symbole de $\hat{P}^{(n)}$ prend la forme ⁷

$$P^{(n)}(\xi, \mathbf{n}) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} |\det D_{x_\epsilon} T^n|^{-1} \cdot \frac{A_m^2(\|\xi_\epsilon\|)}{A_m^2(\|\xi\|)} \text{ mod } j^{-1} S_0^{-1}(M).$$

L'idée de Faure consiste à utiliser les propriétés élémentaires de la dynamique classique sur M pour borner ce symbole, puis d'utiliser la L^2 -continuité pour conclure. On distingue trois cas. Par le lemme 3.6 :

1. Si $\|\xi\| > R$, alors $\forall \epsilon \in \mathcal{A}^n$, $\frac{A_m^2(\|\xi_\epsilon\|)}{A_m^2(\|\xi\|)} \leq (\kappa^{-2m})^n$.

7. Il est important de noter que ξ_ϵ dépend du point de départ \mathbf{n} sur la sphère.

2. Si $\|\xi\| \leq R$ mais $\|\xi_{\epsilon|_{n-1}}\| > R$ alors on peut écrire

$$\frac{A_m^2(\|\xi_\epsilon\|)}{A_m^2(\|\xi\|)} = \overbrace{\frac{A_m^2(\|\xi_\epsilon\|)}{A_m^2(\|\xi_{\epsilon|_{n-1}}\|)}}^{\leq \kappa^{-2m}} \overbrace{\frac{A_m^2(\|\xi_{\epsilon|_{n-1}}\|)}{A_m^2(\|\xi_{\epsilon|_{n-2}}\|)} \cdots \frac{A_m^2(\|\xi_{\epsilon_1}\|)}{A_m^2(\|\xi\|)}}^{\leq 1} \leq \kappa^{-2m}.$$

3. Dans tous les autres cas, i.e. $\|\xi\| \leq R$ et $\|\xi_{\epsilon|_{n-1}}\| \leq R$, alors $\frac{A_m^2(\|\xi_\epsilon\|)}{A_m^2(\|\xi\|)} \leq 1$ mais par définition 3.3, le nombre de telles trajectoires est borné par $\mathcal{N}(n-1)$.

Avec cette discrimination on obtient la borne

$$\left\| P^{(n)} \right\|_\infty \leq \Lambda^{-n} \left((N^n - \mathcal{N}(n-1)) \kappa^{-2m} + \mathcal{N}(n-1) \right) + \mathcal{O}_n(j^{-1}).$$

Posons $\mathcal{B}(n) := (N\Lambda^{-1})^n \kappa^{-2m} + \Lambda^{-n} \mathcal{N}(n-1)$. Remarquons que, à n fixé, le premier terme du membre de droite de $\mathcal{B}(n)$ peut être rendu arbitrairement petit en prenant m assez grand. Le théorème de L^2 -continuité permet d'écrire (lemme 2.2)

$$\left\| \hat{P}^{(n)} \right\| \leq \mathcal{B}(n) + \mathcal{O}_n(j^{-1}),$$

et ainsi

$$r_s(\hat{Q}_m) \leq (\mathcal{B}(n) + \mathcal{O}_n(j^{-1}))^{\frac{1}{2n}}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Avec en outre $r_s(\hat{Q}_m)$ indépendant de n et m , pourvu que m soit choisit suffisamment grand. En prenant les limites dans le bon ordre : $j \rightarrow \infty$, puis $m \rightarrow \infty$ et finalement $n \rightarrow \infty$ on obtient l'expression suivante :

$$r_s(\hat{F}_j|_{H^{-m} \otimes \mathcal{D}_j}) \leq \sqrt{\Lambda^{-1} \exp\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(\mathcal{N}(n))}{n}\right)\right)} + o(1).$$

L'hypothèse de partielle captivité (3.2.7) donne alors directement (3.3.1). L'estimation

(3.3.3) dans le théorème 3.9 est obtenue en utilisant la relation $\left\| \hat{Q}_m^n \right\| \leq \sqrt{\left\| \hat{P}^{(n)} \right\|} = (\mathcal{B}(n) + \mathcal{O}_n(j^{-1}))^{\frac{1}{2}}$ (décomposition polaire [GGK00]). Par l'hypothèse de partielle captivité, pour tout $c > 0$ et n assez grand $\mathcal{N}(n) < e^{nc}$, donc pour tout $\rho > \Lambda^{-1/2}$, $\Lambda^{-n} \mathcal{N}(n) < \rho^{2n}$. Ainsi pour tout m, j, n assez grands $\left\| \hat{Q}_m^n \right\| := \left\| \hat{F}^n \right\|_{H_{j-1}^m \otimes \mathcal{D}_j} \leq \rho^n$. \square

3.4 Loi de Weyl fractale pour les extensions vers SU(2)

On poursuit dans cette section, l'étude semiclassique de l'extension vers SU(2) de l'application expansive $T : X \rightarrow X$. En étudiant plus précisément la dynamique classique sur $M := T^*X \times S^2$ associée à l'OIF \hat{F}_j -cf. section 3.2, on va chercher à estimer le nombre de résonances de l'opérateur de transfert hors d'un petit rayon spectral.

Pour tout ensemble borné A de \mathbb{R}^D on notera A_δ son δ -voisinage fermé. Dans ce cette section $D = 2d + 2$.

Définition 3.11. [Mat95] La dimension supérieure de Minkowski⁸ $\dim_M A$ d'un sous ensemble borné non vide A de \mathbb{R}^D est $D - \text{codim}_M A$ avec

$$\text{codim}_M A := \sup \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \limsup_{\delta \downarrow 0} \delta^{-s} \cdot \text{Vol}^D(A_\delta) < +\infty \right\}. \quad (3.4.1)$$

En général, il n'est pas vrai que $\limsup_{\delta \downarrow 0} \delta^{-\text{codim}_M A} \cdot \text{Vol}^D(A_\delta)$ est fini⁹, néanmoins on a toujours, lorsque δ tend vers zéro et pour tout $\eta > 0$, $\text{Vol}^D(A_\delta) = \mathcal{O}(\delta^{\text{codim}_M A - \eta})$, ce que l'on notera parfois $\text{Vol}^D(A_\delta) = \mathcal{O}(\delta^{\text{codim}_M A - 0})$.

Dans l'esprit des articles de Sjöstrand et Zworski [Sjö90, SZ07] écrits dans le contexte de la diffusion quantique ou encore des travaux de Zworski-Lin-Guillepé [GLZ04] pour les résonances du Laplacien on se propose de montrer que

Théorème 3.12. [Arn12]. *Soit $d + 2 \leq \dim_M(K) \leq 2d + 2$ la dimension supérieure de Minkowski (définition 3.11) de l'ensemble captif de la dynamique (3.2.23) sur $M := T^*X \times \mathbb{S}^2$. Pour tout $\epsilon > 0$, m assez grand, et pour tout $\delta > \dim_M(K)$, à la limite $j \rightarrow \infty$,*

$$\# \left\{ \lambda_i^{(j)} \in \sigma \left(\hat{F}_j|_{H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j} \right) \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| \geq \epsilon \right\} = \mathcal{O} \left(j^{\frac{1}{2}\delta} \right) \quad (3.4.2)$$

Ce résultat peut s'énoncer pour les extensions abéliennes en remplaçant $j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$ par $\nu \in \mathbb{Z}^*$ (modes de Fourier). K est alors l'ensemble captif de la dynamique canonique (3.2.3) sur T^*X et sa dimension est comprise entre d et $2d$. Ce comportement est testé numériquement sur la figure 3.6.

Pour montrer la majoration de Weyl, on commence par caractériser plus précisément l'ensemble captif (3.2.26). On procède ensuite à la construction d'une fonction de fuite appartenant à la classe de symboles $S_\mu^{-m}(M)$ grâce à laquelle il sera possible de ramener l'étude spectrale de \hat{F}_j à celle d'un PDO dont le symbole sera arbitrairement petit hors d'un $j^{-\mu}$ -voisinage de K . Ces symboles étant construits pour s'approcher au plus près de K dans la limite $j \rightarrow \infty$, l'utilisation de la classe S_μ^{-m} trouvera enfin tout son intérêt.

Les estimations de Weyl du chapitre précédent ainsi qu'un lemme sur les valeurs singulières d'opérateurs compacts permettront de conclure, en utilisant au passage la définition de la dimension de Minkowski, particulièrement adapté au contexte.

3.4.1 Dynamique près de l'ensemble captif

On rappelle que \mathcal{A} désigne le N -alphabet $\{1, \dots, N\}$ et \mathcal{A}^n les mots de taille n écrits avec \mathcal{A} . On notera \mathcal{A}^∞ l'ensemble des mots de longueur infinie. Si l'on pose

$$R_{\tau^{(n)}(x)} := R_{\tau(x)} \circ R_{\tau(Tx)} \circ \dots \circ R_{\tau(T^{n-1}x)}$$

8. Dans les cas usuels la dimension de Minkowski coïncide avec la dimension de Hausdorff \dim_H , mais en général $\dim_H A \leq \dim_M A$.

9. Lorsque c'est le cas A est dit de dimension pure, cf. [Sjö90] pour des commentaires et références.

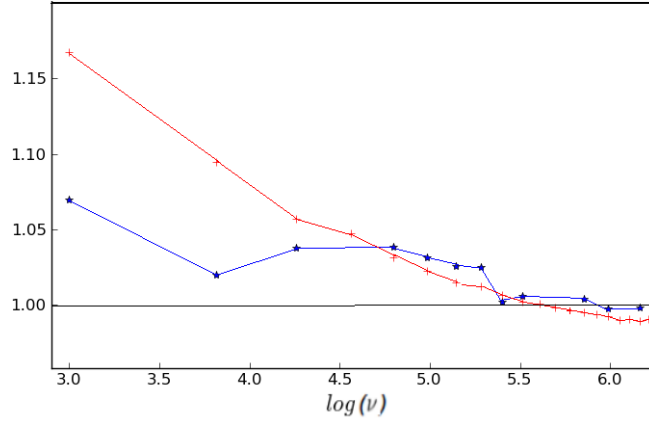


Figure 3.6: On se restreint ici à l'extension abélienne de l'application linéaire $T(x) = 2x \bmod 1$ sur le cercle, avec $\tau(x) = \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Les croix représentent $\log(N_\nu)/\log(\nu)$ avec N_ν le nombre de résonances de \hat{F}_ν de module supérieur à $\epsilon > 0$ fixé. Les étoiles représentent $1 + \log \text{Vol}(K_\nu)/\log(\nu)$ avec K_ν une approximation numérique du volume d'un $\nu^{-\frac{1}{2}}$ -voisinage de K pour $20 \leq \nu \leq 600$. Si le théorème 3.12 était optimal, alors ces deux quantités devraient converger à même vitesse vers $\frac{1}{2} \dim K \sim 1$ (cf. lemme 3.15). Les expériences numériques suggèrent donc que c'est bien le cas.

en composant F (3.2.23) le long d'une trajectoire $\epsilon \in \mathcal{A}^n$ on obtient,

$$F_\epsilon^n : \begin{cases} \xi \mapsto & \xi_\epsilon := {}^t D_{x_\epsilon} T^n \cdot (\xi - \zeta_{x,\mathbf{n}}^\epsilon) \\ \mathbf{n} \mapsto & \mathbf{n}_\epsilon := R_{\tau^{(n)}(x_\epsilon)} \mathbf{n} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

révélant ainsi la suite de sections

$$\zeta_{x,\mathbf{n}}^\epsilon := - \sum_{j=1}^n \left({}^t D_{x_{\epsilon|_j}} T^j \right)^{-1} \cdot \mathfrak{h}_{x_{\epsilon|_j}, \mathbf{n}_{\epsilon|_j}}^\dagger; \quad \mathfrak{h}_{x,\mathbf{n}}^\dagger := \mathfrak{h}_{x, R_{\tau^{(x)}}^{-1} \mathbf{n}} \in T_x^* X \quad (3.4.4)$$

où \mathfrak{h} est la 1-forme définie en (3.2.23) et $\epsilon|_j := \epsilon_1 \dots \epsilon_j$ désigne la troncation à la j -ème lettre du mot ϵ .

Fixons un mot $\epsilon \in \mathcal{A}^\infty$. Par expansivité de l'application $T : X \rightarrow X$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\| \zeta_{x,\mathbf{n}}^{\epsilon|_n} - \zeta_{x,\mathbf{n}}^{\epsilon|_{n+k}} \right\| \leq \lambda^{-n} \zeta_{\max}; \quad \zeta_{\max} := \frac{\|\mathfrak{h}\|_\infty}{\lambda - 1} \quad (3.4.5)$$

impliquant la convergence ponctuelle de la suite $\{\zeta^{\epsilon|_n}\}_{n>0}$. On note ζ^ϵ la section limite dans $\mathcal{C}^0(X \times \mathbb{S}^2; T^*X)$. En fait :

Lemme 3.13. $\forall \epsilon \in \mathcal{A}^\infty$, ζ^ϵ est lisse avec une borne uniforme sur ses variations vis à vis de l'ensemble \mathcal{A}^∞ . En outre, l'ensemble captif K (3.2.26) peut s'écrire comme

$$K = \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{A}^\infty} \text{Graph} \zeta^\epsilon \quad (3.4.6)$$

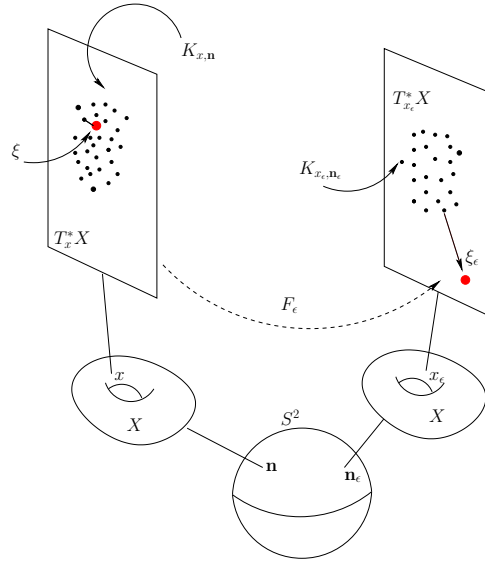


FIGURE 3.7 – Représentation schématique de l'ensemble $K_{x,\mathbf{n}}$, restriction, à $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^2$ fixé, de K à la fibre T_x^*X . Si (ξ, \mathbf{n}) est hors de l'ensemble captif ξ s'éloigne de $K_{x_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon}$ de manière contrôlée. C'est l'objet du lemme 3.13.

Si on note $K_{x,\mathbf{n}} := K \cap T_x^*X \times \{\mathbf{n}\}$ alors $\forall \epsilon \in \mathcal{A}$

$$\text{dist}(\xi_\epsilon, K_{x_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon}) \geq \lambda \text{dist}(\xi, K_{x, \mathbf{n}}). \quad (3.4.7)$$

Ce résultat, et notamment (3.4.7), affine sensiblement l'estimé du lemme 3.6 et est de première importance dans la preuve de la loi de Weyl. La fig.(3.7) illustre ce comportement.

Démonstration. K peut s'écrire comme

$$\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} \tilde{K}_\epsilon \text{ avec } \tilde{K}_\epsilon \cap T_x^*X \times \{\mathbf{n}\} := F^{-n}(B_{x_\epsilon}^*(0, R) \times \{\mathbf{n}_\epsilon\})$$

où $B_x^*(0, R)$ est la boule de rayon R dans T_x^*X . Fixons $\epsilon \in \mathcal{A}^\infty$ un mot de longueur infinie. (3.4.3) donne

$$F^{-n} : T_{x_{\epsilon|n}}^*X \times \mathbb{S}^2 \rightarrow T_x^*X \times \mathbb{S}^2 \\ (\xi, \mathbf{n}_{\epsilon|n}) \mapsto \left(\left({}^t D_{x_{\epsilon|n}} T^n \right)^{-1} \cdot \xi + \zeta_{x, \mathbf{n}}^{\epsilon|n}, \mathbf{n} \right)$$

avec $\left\| \left({}^t D_{x_{\epsilon|n}} T^n \right)^{-1} \cdot \xi \right\| \leq R\lambda^{-n}$ puisque $\|\xi\| \leq R$. Si l'on note $\mathcal{G}_\epsilon^{(n)}$ le $R\lambda^{-n}$ -voisinage fermé du graphe de $\zeta^{\epsilon|n}$ alors $K_{\epsilon|n} \subseteq \mathcal{G}_\epsilon^{(n)}$. De (3.4.4) on a que $\left\| \zeta_{x, \mathbf{n}}^{\epsilon|n} - \zeta_{x, \mathbf{n}}^{\epsilon|n+1} \right\| \leq \lambda^{-n} \|\mathfrak{h}\|_\infty$, donc si R est choisit plus grand que $\frac{\lambda}{\lambda-1} \|\mathfrak{h}\|_\infty$ alors

$$\mathcal{G}_\epsilon^{(n+1)} \subseteq \mathcal{G}_\epsilon^{(n)}.$$

Ainsi $\cup_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} \mathcal{G}_\epsilon^{(n)} \supseteq K$ et converge vers K lorsque $n \rightarrow \infty$. D'un autre côté $\mathcal{G}_\epsilon^{(n)}$ converge vers $\text{Graph} \zeta^\epsilon$. On montre que $\cup_{\epsilon \in \mathcal{A}^\infty} \text{Graph} \zeta^\epsilon$ est fermé en remarquant que chaque branche ζ^ϵ est un point d'accumulation de la suite de sections $\zeta^{\epsilon'}$ pour lesquelles $\epsilon'|_n = \epsilon|_n$.

Le fait que les sections ζ^ϵ soit lisses est une conséquence directe du caractère expansif de $T : X \rightarrow X$ (cf. lemme C.1 dans l'appendice).

Pour terminer on remarque que, de (3.4.3) et (3.4.4) on a, pour tout $\epsilon' \in \mathcal{A}$

$$\left\| \xi_{\epsilon'} - \zeta_{x_{\epsilon'}, \mathbf{n}_{\epsilon'}}^\epsilon \right\| = \left\| {}^t D_{x_{\epsilon'}} T \cdot \left(\xi - \zeta_{x, \mathbf{n}}^{\epsilon' \epsilon} \right) \right\| \geq \lambda \left\| \xi - \zeta_{x, \mathbf{n}}^{\epsilon' \epsilon} \right\| \quad (3.4.8)$$

avec $\epsilon' \epsilon = \epsilon' \epsilon_1 \dots \in \mathcal{A}^\infty$ le mot obtenu par concaténation. Grâce à (3.4.6) on en déduit (3.4.7). \square

3.4.2 La fonction de fuite

On procède à présent à la construction d'un symbole particulier dans la classe $S_\mu^{-m}(M)$. Pour cela on va se servir de manière essentielle du lemme 3.13 obtenu dans la section précédente.

Lemme 3.14. (Fonction de fuite) $\exists C_0 > 0$, t.q. $\forall 1 < \kappa < \lambda, \forall m > 0, 0 \leq \mu < \frac{1}{2}$; il existe un symbole $A_{m, \mu}$ dans $S_\mu^{-m}(M)$ tel que $A_{m, \mu}^{-1}$ soit dans $j^{\mu m} S_\mu^m(M)$, décroissant strictement le long des trajectoires de F hors d'un $C_0 j^{-\mu}$ -voisinage de K

$$\forall \epsilon \in \mathcal{A}, \frac{A_{m, \mu} \circ F_\epsilon}{A_{m, \mu}} \leq \kappa^{-m}, \quad (3.4.9)$$

et satisfaisant $\frac{A_{m, \mu} \circ F_\epsilon}{A_{m, \mu}} \leq 1$ partout ailleurs. De plus,

$$A_{m, \mu} \# A_{m, \mu}^{-1} - 1 \in j^{2\mu-1} S_\mu^{-1}(M) \quad (3.4.10)$$

Démonstration. D'après le lemme 3.13 la fonction

$$(\xi, \mathbf{n}) \mapsto \langle j^\mu \text{dist}(\xi, K_{x, \mathbf{n}}) \rangle^{-m}$$

où $\langle x \rangle := \sqrt{1+x^2}$, présente de bonnes caractéristiques de fonction de fuite lorsque $m > 0$. En effet, lorsque $\text{dist}(\xi, K_{x, \mathbf{n}}) \geq j^{-\mu}$ on a, pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$

$$\langle j^\mu \text{dist}(\xi_\epsilon, K_{x_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon}) \rangle^{-m} / \langle j^\mu \text{dist}(\xi, K_{x, \mathbf{n}}) \rangle^{-m} \leq \left(\frac{2}{\lambda+1} \right)^m \rightarrow_{m \nearrow +\infty} 0.$$

Malheureusement, la fonction

$$d^* : \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\xi, \mathbf{n}) & \mapsto & \text{dist}(\xi, K_{x, \mathbf{n}}) \end{array}$$

n'est pas régulière, mais seulement C -Lipschitz, avec C dépendant de la norme maximale des différentielles de ζ^ϵ (d'après (3.4.6)). On doit donc régulariser d^* pour qu'elle soit contenue dans une classe de symboles. On procède par convolution.

Soit $\{\chi_i^2\}_{i \in I}$ une partition finie de l'unité de $X \times \mathbb{S}^2$ subordonné à l'atlas

$$\mathcal{F} = \{U^i \times V^i, \phi_i = \kappa_i \otimes \lambda_i\}_{i \in I}$$

de $X \times \mathbb{S}^2$ où

$$\phi_i = \kappa_i \otimes \lambda_i : U^i \times V^i \subset X \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^2$$

Considérons

$$d_i^* : (\xi, \mathbf{n}) \mapsto d^*(\xi, \mathbf{n}) \chi_i(x, \mathbf{n})$$

supporté sur $T^*U_i \times V_i$. On peut tirer en arrière d_i^* pour définir une fonction d_i^\sharp sur \mathbb{R}^D avec $D = 2d + 2$, la dimension de la variété symplectique M . On pose

$$\begin{aligned} d_i^\sharp : \quad \mathbb{R}^D &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \rho = (x, \xi, z) &\mapsto d_i^* \left({}^t D_{\kappa_i^{-1}(x)} \kappa_i \cdot \xi; \lambda_i^{-1}(z) \right) \end{aligned}$$

M est munie d'une forme volume naturelle $\frac{\wedge^{d+1} \omega_M}{(d+1)!}$ induite par ω_M . Tirée en arrière sur \mathbb{R}^D elle devient $d\mu_i(\rho) := \frac{d\rho}{|D\phi_i|}$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. La fonction régularisante se construit alors comme suit. On définit, pour tout $\ell > 0$ et $i \in I$

$$f_\ell^i : \rho \mapsto \begin{cases} \frac{\Omega_i}{\ell^D} \exp\left(\frac{-|\rho|^2}{\ell^2 - |\rho|^2}\right) & \text{si } |\rho| < \ell \\ 0 & \text{si } |\rho| \geq \ell \end{cases} \quad (3.4.11)$$

avec

$$\Omega_i^{-1} := \int_{|\rho| < 1} \exp\left(\frac{-|\rho|^2}{1 - |\rho|^2}\right) d\mu_i(\rho)$$

une constante de normalisation pour la norme $L^1(\mathbb{R}^D, d\mu_i)$. On note $d_i^\sharp * f_\ell^i$ la convolution de d_i^\sharp par f_ℓ^i . Comme d_i^\sharp est C -Lipschitz on montre directement que, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^D$

$$\left| d_i^\sharp * f_\ell^i(\rho) - d_i^\sharp(\rho) \right| \leq C\ell \quad (3.4.12)$$

On pose alors

$$\delta_{i,\ell} = \chi_i \left(d_i^\sharp * f_\ell^i \right)^\flat \in C^\infty(M) \quad (3.4.13)$$

où \flat dénote l'opération de rapatriement sur M . La fonction globale régularisée est

$$\delta_\ell^* := \sum_{i \in I} \delta_{i,\ell} \in C^\infty(M) \quad (3.4.14)$$

Par (3.4.12), (3.4.13) et (3.4.14), on a que

$$\begin{aligned}
 |\delta_\ell^*(\xi, \mathbf{n}) - d^*(\xi, \mathbf{n})| &= \left| \sum_i \delta_{i,\ell}(\xi, \mathbf{n}) - \sum_i \chi_i^2 d^*(\xi, \mathbf{n}) \right| \\
 &\leq \sum_i \left| \chi_i \left(d_i^\# * f_\ell^i \right)^b - \chi_i d^* \chi_i(\xi, \mathbf{n}) \right| \\
 &\leq \sum_i \sup_\rho \left| d_i^\# * f_\ell^i(\rho) - d_i^\#(\rho) \right| \\
 &\leq \underbrace{(\#I)C}_=:C' \ell
 \end{aligned}$$

On choisit à présent

$$\ell \equiv \eta j^{-\mu}$$

avec $\eta > 0$ suffisamment petit et $\mu \in [0, \frac{1}{2})$. On note dans la suite

$$\delta_\mu := \delta_{\eta j^{-\mu}}^*$$

Un calcul direct montre que δ_μ est contenu dans la classe de symbole $S_\mu^1(M)$.

Supposons que $\text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) \geq j^{-\mu}$. Alors $\delta_\mu(\xi, \mathbf{n}) \geq (1 - C'\eta) j^{-\mu}$ où on aura pris soin de choisir $0 < \eta < C'^{-1}$. Avec l'estimation (3.4.7) on obtient, quelque soit la trajectoire $\epsilon \in \mathcal{A}$ suivie, pour tout $1 < \kappa < \lambda$ et si η est choisi assez petit

$$\delta_\mu(\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon) \geq \underbrace{(\lambda - \eta C'(1 + \lambda))}_{\leq \kappa} \delta_\mu(\xi, \mathbf{n}) \quad (3.4.15)$$

A ce stade on pourrait choisir pour fonction de fuite

$$(\xi, \mathbf{n}) \mapsto \langle j^\mu \delta_\mu(\xi, \mathbf{n}) \rangle^{-m}$$

qui est une fonction dans $S_{2\mu}^{-m}(M)$. Il nous sera toutefois nécessaire de construire un symbole dans la classe plus régulière $S_\mu^{-m}(M)$. Pour cela on choisit un symbole $0 \leq \chi_\mu \leq 1$ dans la classe $S_\mu^{-\infty}(M)$, égal à 1 sur le $j^{-\mu}$ -voisinage de K et supporté sur son $\kappa j^{-\mu}$ -voisinage¹⁰. La fonction de fuite peut alors être construite en posant

$$A_{m,\mu} := \chi_\mu + \Omega_{\mu,m} (1 - \chi_\mu) \delta_\mu^{-m} \quad (3.4.16)$$

et $\Omega_{\mu,m} = \mathcal{O}(j^{-\mu m})$ est une constante choisie de sorte que $\Omega_{\mu,m} \delta_\mu^{-m} \leq 1$ lorsque $\text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) \geq j^{-\mu}$. Par construction $0 < A_{m,\mu} \leq 1$ est un symbole dans la classe $S_\mu^{-m}(M)$ et son inverse est dans $j^{\mu m} S_\mu^m(M)$. On distingue trois cas :

1. Si $\text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) \leq j^{-\mu}$, alors clairement

$$\frac{A_{m,\mu}(\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon)}{A_{m,\mu}(\xi, \mathbf{n})} \leq 1.$$

10. χ_μ peut être construite en convoluant, de la façon décrite pour d^* , la fonction caractéristique du $c j^{-\mu}$ -voisinage de K et en choisissant judicieusement c et le paramètre $\epsilon = \eta j^{-\mu}$ dans la fonction régularisante (3.4.11).

2. Si $j^{-\mu} < \text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) \leq \kappa j^{-\mu}$, de (3.4.7) et par définition de χ_μ , $\chi_\mu(\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon) = 0$. De (3.4.16), et (3.4.15) on déduit

$$\begin{aligned} A_{m,\mu} - A_{m,\mu} \circ F_\epsilon &\geq \chi_\mu + \Omega_{\mu,m} (1 - \chi_\mu - \kappa^{-m}) \delta_\mu^{-m} \\ &\geq 1 - \underbrace{\kappa^{-m} \Omega_{\mu,m} \delta_\mu^{-m}}_{\leq 1} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a toujours

$$\frac{A_{m,\mu}(\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon)}{A_{m,\mu}(\xi, \mathbf{n})} < 1.$$

3. Finalement, si $\text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) > \kappa j^{-\mu}$ alors par (3.4.15) et (3.4.16),

$$\frac{A_{m,\mu}(\xi_\epsilon, \mathbf{n}_\epsilon)}{A_{m,\mu}(\xi, \mathbf{n})} \leq \kappa^{-m}.$$

Pour une constante $C_0 > 0$ bien choisie, le lemme 3.13 montre que la condition

$$\text{dist}(\xi, K_{x,\mathbf{n}}) \geq \kappa h^\mu$$

force (ξ, \mathbf{n}) à être à distance au moins $C_0 j^{-\mu}$ de l'ensemble captif. Pour conclure la preuve du lemme 3.14 et montrer (3.4.10) on utilise l'expression explicite (cf. [DS99]) du produit de Moyal défini dans le théorème 3.5 et de la fonction de fuite. \square

3.4.3 Comptage de résonances

Grâce à (3.4.10) on peut, par la procédure usuelle [EZ03, p. 67], construire un inverse pour $\text{Op}_j(A_{m,\mu})$ dont le symbole principal est $A_{m,\mu}^{-1}$. Puisque $A_{m,\mu}$ est d'ordre m , pour tout $j > 0$, les espaces de distributions

$$\mathcal{H}_{j,\mu}^{-m} := \text{Op}_j(A_{m,\mu})^{-1} (L^2(X) \otimes \mathcal{D}_j) \quad (3.4.17)$$

sont des espaces de Hilbert vis à vis de la norme hérité de L^2 et coïncident en tend que sous espaces vectoriels de $\mathcal{D}'(X) \otimes \mathcal{D}_j$ avec $H^{-m}(X) \otimes \mathcal{D}_j$. Le théorème 3.12 ce réduit essentiellement à l'affirmation :

Lemme 3.15. *Soit $C > C_0$, où C_0 est choisie pour satisfaire au lemme 3.6. Pour tout $\epsilon > 0$, $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$, m, j suffisamment grands, à la limite semiclassique $j \rightarrow \infty$*

$$\#\left\{ \lambda_i^{(j)} \in \sigma\left(\hat{F}_j|_{\mathcal{H}_{j,\mu}^{-m}}\right) \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| > \epsilon \right\} \leq \frac{2j^{d+1} + j^d}{2(2\pi)^{d+1}} \text{Vol}\{K_{Cj^{-\mu}}\} (1 + o(1)). \quad (3.4.18)$$

En effet, le spectre discret de $\hat{F}_j|_{\mathcal{H}_{j,\mu}^{-m}}$ n'est autre que le spectre de résonances de \hat{F}_j , ce dernier indépendant de μ ou m . D'un autre côté la définition 3.11 de la dimension de Minkowski, donne pour tout $\delta > 0$

$$\text{Vol} \{K_{\mathbb{C}j^{-\mu}}\} = \mathcal{O} \left(j^{-\mu \text{codim}_M(K) + \delta} \right)$$

avec $\dim M = 2d + 2$. Puisque le membre de gauche de (3.4.18) ne dépend pas de μ on obtient, pour m assez grand et à la limite $j \rightarrow \infty$,

$$\# \left\{ \lambda_i^{(j)} \in \sigma \left(\hat{F}_j|_{\mathcal{H}_{j,\mu}^{-m}} \right) \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| > \epsilon \right\} = \mathcal{O} \left(j^{\frac{1}{2} \dim_M(K) + \delta} \right)$$

i.e. le théorème 3.12.

Démonstration. (du lemme 3.15). $\hat{F}_j : \mathcal{H}_{j,\mu}^{-m} \rightarrow \mathcal{H}_{j,\mu}^{-m}$ est par construction unitairement équivalent à

$$\hat{Q}_{m,\mu} := \text{Op}_j(A_{m,\mu}) \hat{F}_j \text{Op}_j(A_{m,\mu})^{-1} : L^2(X) \otimes \mathcal{D}_j \rightarrow L^2(X) \otimes \mathcal{D}_j.$$

On considère,

$$\hat{P}_\mu := \hat{Q}_{m,\mu}^* \hat{Q}_{m,\mu} = \text{Op}_j(A_{m,\mu})^{-1} \hat{F}_j^* \text{Op}_j(A_{m,\mu})^2 \hat{F}_j \text{Op}_j(A_{m,\mu})^{-1}.$$

Par les théorèmes de composition et Egorov (lemmes 2.4 et 3.8), $\hat{P}_\mu \in OPS_\mu^0(M)$ et son symbole s'écrit¹¹

$$P_\mu = \sum_{\epsilon \in \mathcal{A}} |\det D_\epsilon T|^{-1} \frac{A_{m,\mu}^2 \circ F_\epsilon}{A_{m,\mu}^2} \text{ mod } j^{2\mu-1} S_\mu^{-1}(M).$$

Du lemme 3.14, P_μ se décompose en

$$P_\mu = k_\mu + r_\mu$$

avec $k_\mu, r_\mu \in S_\mu^0(M)$ réels et k_μ supporté sur $K_{\mathbb{C}j^{-\mu}}$ pour une constante bien choisie $C > C_0$. Le lemme 3.14 permet en outre de choisir r_μ t.q.

$$\|r_\mu\|_\infty \leq \underbrace{N\lambda^{-d}}_{=:C} \kappa^{-2m} + \mathcal{O}(j^{2\mu-1}).$$

En notant $\hat{k}_\mu := \text{Op}_j(k_\mu)$ le PDO à trace associé à k_μ , la L^2 -continuité (lemme 2.2) permet de transposer cette décomposition au niveaux des opérateurs

$$\hat{P}_\mu = \underbrace{\hat{k}_\mu}_{\text{compact}} + \underbrace{\hat{r}_\mu}_{\text{borné}}, \quad \|\hat{r}_\mu\| \leq C\kappa^{-2m} + \mathcal{O}(j^{2\mu-1})$$

11. Un subtilité subsiste du fait que $A_{m,\mu}^{-1}$ soit dans la classe $j^{\mu m} S_\mu^m(M)$ et non $S_\mu^m(M)$. En principe cela pourrait créer des termes d'erreur non négligeables dans le symbole de P_μ . Néanmoins en écrivant explicitement le développement asymptotique dans le théorème d'Egorov on peut vérifier qu'il n'en est rien.

les deux opérateurs restants auto-adjoints. Du lemme 2.7 énoncé dans le chapitre précédent (Loi de Weyl), adapté au contexte de la quantification (3.2.20). De (3.2.15) et (2.1.14) on a, $\forall a \in S_\mu^0(M) \cap L^1(M)$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Op}_j(a)) = \Omega_{j,d} \int_M a \frac{\wedge^{d+1} \omega_M}{(d+1)!}; \quad \Omega_{j,d} := \frac{2j^{d+1} + j^d}{2(2\pi)^{d+1}}, \quad (3.4.19)$$

où $\frac{\wedge^{d+1} \omega_M}{(d+1)!}$ la mesure de Lebesgue sur M induite par la forme symplectique. En reproduisant le lemme 2.7 en utilisant (3.4.19) on obtient, en appliquant le résultat à l'opérateur compact \hat{k}_μ , $\forall \epsilon > 0$, et à la limite $j \rightarrow \infty$,

$$\# \left\{ \lambda_{i,\mu}^{(j)} \in \sigma(\hat{k}_\mu) \mid \left| \lambda_{i,\mu}^{(j)} \right| > \epsilon \right\} \leq \Omega_{j,d} \mathrm{Vol} \{K_{C_{j-\mu}}\} (1 + o(1)). \quad (3.4.20)$$

Par perturbation (lemme A.2 dans l'appendice), pour une constante ϵ éventuellement plus grande, pour m et j suffisamment grands, (3.4.20) reste vrai si l'on remplace \hat{k}_μ par \hat{P}_μ . En d'autres termes l'estimation (3.4.20) se transpose aux valeurs singulières de $\hat{Q}_{m,\mu}$. Le corollaire A.4 énoncé en appendice permet d'étendre ce résultat aux valeurs propres de $\hat{Q}_{m,\mu}$ dans la limite semiclassique $j \rightarrow \infty$, ce qui achève la preuve. \square

3.5 Remarques diverses et perspectives

3.5.1 Sur la partielle captivité

Depuis tout point de l'ensemble captif $K \subset T^*X \times S^2$, pour tout $n > 0$, au moins une des N^n trajectoires reste dans K . Du lemme 3.13 on peut exhiber certaines trajectoires captées en remarquant que $\forall \epsilon \in \mathcal{A}^\infty$, $\forall \epsilon_0 \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} F_{\epsilon_0} : T_x^*X \times S^2 &\rightarrow T_{x_{\epsilon_0}}^*X \times S^2 \\ (\zeta_{x,\mathbf{n}}^{\epsilon_0\epsilon}, \mathbf{n}) &\mapsto (\zeta_{x_{\epsilon_0},\mathbf{n}_{\epsilon_0}}^\epsilon, \mathbf{n}_{\epsilon_0}) \end{aligned}$$

Ainsi, un point de K situé sur la branche $\zeta^{\epsilon_0\epsilon}$ saute sur la branche ζ^ϵ et ainsi de suite. Pour qu'une autre trajectoire $\epsilon'_0 \neq \epsilon_0$, reste dans K il faudrait que

$$F_{\epsilon'_0} : \zeta_{x,\mathbf{n}}^{\epsilon_0\epsilon} \mapsto \zeta_{x_{\epsilon'_0},\mathbf{n}_{\epsilon'_0}}^{\epsilon'}$$

pour un certain mot $\epsilon' \in \mathcal{A}^\infty$. Cela imposerait à $\zeta^{\epsilon_0\epsilon}$ et $\zeta^{\epsilon'_0\epsilon'}$ de s'intersecter en (x, \mathbf{n}) . Ainsi, pour que le nombre de trajectoires issues de l'ensemble captif se multiplie avec n il est nécessaire que les points d'intersections entre au moins deux branches ζ soit envoyés en d'autres points d'intersections et ainsi de suite. La faible probabilité pour que cela se produise si τ est choisie indépendamment de T est l'idée centrale dans la preuve de la genericité de la partielle captivité par Tsujii, pour le cas abélien. Il semble raisonnable d'espérer pouvoir étendre sa preuve au cas général.

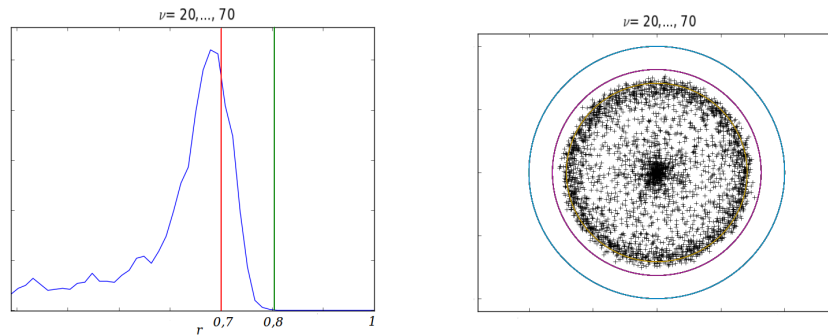


FIGURE 3.8 – Profil de densité radiale de résonances pour la superpositions des spectres de \hat{F}_ν , $\nu \in \{20, \dots, 70\}$, avec \hat{F}_ν les opérateurs de transferts associées a l'extension abélienne de $T : x \rightarrow 2x + \frac{\delta}{2\pi} \sin(2\pi x) \bmod 1$ sur S^1 , $\tau(x) = (2\pi)^{-1} \cos(2\pi x)$. Sur le graphe de gauche, les lignes verticales représentent respectivement, de gauche à droite, $\Lambda_{SRB}^{-1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\Lambda^{-1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{1,5}}$. La figure de droite montre, en plus d'une concentration près du le rayon spectral $\Lambda_{SRB}^{-1/2}$, une répartition angulaire homogène des résonances.

3.5.2 Sur la dimension de l'ensemble captif

La caractérisation du lemme 3.13 permet de montrer assez facilement que, au dessus d'un point $(x, \mathbf{n}) \in X \times \mathbb{S}^2$ fixé, l'ensemble captif (3.2.26) est soit réduit à un unique point soit n'admet aucun point isolé. Néanmoins, cela ne précise pas la dimension de K au delà de $d + 2 \leq \dim K \leq 2d + 2$. Une interrogation demeure :

Question. *K peut-il être de dimension fractale non-entière ?*

Pour des modèles très proches, lorsque la dynamique augmente le volume, Tsujii démontre dans [Tsu01] que les ensembles K supportent une mesure absolument continue. Leur dimension est dans ce cas entière et maximale. Notre cas est cependant critique car F préserve la forme symplectique sur M . Une autre question concerne le lien entre dimension de Minkowski et dimension de Hausdorff, ainsi que le fait d'être ou ne pas être de dimension pure.

Dans un cadre sensiblement différent, ces questions trouveront réponses dans le chapitre suivant où l'on considère des extensions abéliennes de modèles dits "ouverts" où la dynamique sur l'espace de base admet déjà un ensemble captif fractal. Ces systèmes a priori plus complexes, s'avèrent en réalité de bon modèles pour se défaire de certaines difficultés techniques rencontrées dans le cas fermé et causées par l'auto-intersection de l'ensemble captif.

3.5.3 Résonances près du gap spectral

Pour toute fonction Hölder continue f sur X sa somme de Birkhoff est

$$S_n f := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j.$$

L'ergodicité de la mesure SRB μ , absolument continue par rapport à la mesure volume sur X , implique que pour μ -presque tout x , $\frac{1}{n} S_n f(x)$ converge vers $\int f d\mu$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En d'autres termes si

$$A(n, \delta) := \left\{ x \in X \mid \left| \frac{1}{n} S_n f(x) - \int f d\mu \right| \geq \delta \right\} \subseteq X, \quad (3.5.1)$$

alors pour tout $\delta > 0$, $\mu(A(n, \delta)) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Des théorèmes 3.9 et 3.12 en mettant à profit l'ergodicité de $T : X \rightarrow X$ on peut améliorer légèrement l'estimation (3.4.2) lorsque l'on compte les résonances proches du gap spectral. Dans ce paragraphe on se propose de montrer¹² :

Proposition 3.16. *Si μ_{srb} est la mesure SRB pour T et si*

$$\log \Lambda_{\text{srb}} := \int_X \log |\det DT| d\mu_{\text{srb}} \geq \log \Lambda, \quad (3.5.2)$$

alors, lorsque le théorème 3.9 s'applique, pour tout $\delta > \dim_M K$, à la limite semiclassique $j \rightarrow \infty$

$$\# \left\{ \lambda_i^{(j)} \in \text{Res} \hat{F}_j \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| > \Lambda_{\text{srb}}^{-1/2} \right\} = o \left(j^{\frac{\delta}{2}} \right).$$

Remarque 3.17. Ce résultat est un analogue d'un théorème de Sjöstrand pour les ondes amorties sur les surfaces pour lesquelles le flot géodésique est ergodique [Sjö00, thm. 0.2].

Démonstration. On procède comme dans les preuves des théorèmes 3.9 et 3.12, on se réfère aux sections en question pour les détails. On sait que l'étude spectrale de $\hat{F}_j|_{H^{-m} \otimes \mathcal{D}_j}$ se ramène à l'étude de l'opérateur L^2 -continu $\hat{Q}_{m,\mu} := \text{Op}_h^w(A_{m,\mu}) \hat{F}_h \text{Op}_h^w(A_{m,\mu})^{-1}$ où $A_{m,\mu}$ est la fonction de fuite du lemme 3.14 ($1 < \kappa < \lambda$ et \mathbf{C}_0 sont choisies pour satisfaire au lemme en question). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ que l'on choisira finalement très grand, on s'intéresse à :

$$\hat{P}_\mu^{(n)} = \hat{Q}_{m,\mu}^{*n} \hat{Q}_{m,\mu}^n$$

A n fixé par rapport à j , $\hat{P}_\mu^{(n)}$ est un PDO dans $OPS_\mu^0(M)$. Si $\forall \epsilon \in \mathcal{A}^n$ on note $\det D_\epsilon T^n : x \rightarrow \det D_{x_\epsilon} T^n = \prod_{j=1}^n \det D_{x_{\epsilon|j}} T$, alors son symbole s'écrit

$$P_\mu^{(n)} = \sum_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} |\det D_\epsilon T^n|^{-1} \frac{A_m^2 \circ F_\epsilon^n}{A_m^2}$$

12. Par rapport à la borne du théorème 3.12 le \mathcal{O} est remplacé par o .

modulo des termes d'ordre inférieurs (mais dépendant de n). Grâce à la propriété (3.4.9) de la fonction de fuite, $P_\mu^{(n)}$ est inférieur à

$$(N\Lambda^{-1}\kappa^{-2m})^n + \mathcal{O}_n(j^{2\mu-1})$$

hors du voisinage $K_{\mathcal{C}_0j^{-\mu}}$ de l'ensemble captif. On choisit m et j assez grand pour que ce terme soit négligeable. On cherche alors à contrôler le volume symplectique de

$$K(n, \mu, \delta) := \left\{ (\xi, \mathbf{n}) \in M \mid P_\mu^{(n)}(\xi, \mathbf{n}) \geq e^{n\delta} \Lambda_{\text{srb}}^{-n} \right\} \subseteq K_{\mathcal{C}_0j^{-\mu}},$$

pour $\delta > 0$ petit. En discriminant les différentes trajectoires issues de $K_{\mathcal{C}_0j^{-\mu}}$ on a

$$P_\mu^{(n)}(\xi, \mathbf{n}) \leq \underbrace{\mathcal{N}(n) \left(\min_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} |\det D_{x_\epsilon} T^n| \right)^{-1}}_{\text{contributions des traj. captées}} + \underbrace{(N\Lambda^{-1})^n \kappa^{-2m}}_{\text{traj. qui s'échappent au tps } n-1} \quad (3.5.3)$$

modulo des termes d'ordre $\mathcal{O}_n(j^{2\mu-1})$. On peut déjà remarquer que

$$\min_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} |\det D_{x_\epsilon} T^n| = \min_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} \exp(S_n \log |\det D_{x_\epsilon} T|).$$

D'un autre côté, l'hypothèse de partielle captivité (3.2.7) implique que

$$\forall c > 0 \exists n_c > 0; \text{ t.q. } \forall n \geq n_c, \mathcal{N}(n) \leq e^{cn}$$

et pour tout n fixé on peut rendre le terme $(N\Lambda^{-1})^n \kappa^{-2m}$ dans (3.5.3) arbitrairement petit. Ainsi, pour tout $c, \delta > 0$, et n assez grand, il existe $m_0 > 0$ t.q. $\forall m > m_0$, j assez grand :

$$P_\mu^{(n)}(\xi, \mathbf{n}) \geq e^{n(c+\delta)} \Lambda_{\text{srb}}^{-n} \Rightarrow \min_{\epsilon \in \mathcal{A}^n} \frac{1}{n} S_n \log |\det D_{x_\epsilon} T| \leq \log \Lambda_{\text{srb}} - \delta \quad (3.5.4)$$

Si on considère l'ensemble $A(n, \delta)$ tel que définit en (3.5.1) avec $\det DT$ dans le rôle de la fonction f , on remarque que l'ensemble des points $x \in X$ tels qu'il existe une trajectoire $\epsilon \in \mathcal{A}^n$, réalisant $|\frac{1}{n} S_n f(x_\epsilon) - \int_X f d\mu| \geq \delta$ peut s'écrire comme $T^{-n}(X) \cap A(n, \delta)$ et est donc égal à $A(n, \delta)$. L'expression (3.5.4) se traduit alors par :

$$\forall c > 0, \forall n \geq n_c, (\xi, \mathbf{n}) \in K(n, \mu, \delta + c) \Rightarrow x \in A(n, \delta)$$

par ergodicité de $T : X \rightarrow X$ vis à vis de la mesure μ_{srb} (absolument continue) et comme $K_{\mathcal{C}_0j^{-\mu}}$ est un voisinage d'une superposition de branches régulières (lemme 3.13), il existe $C > 0$ t.q.

$$\text{Vol} \{K(n, \mu, \delta + c)\} \leq C \mu_{\text{srb}}(A(n, \delta)) \text{Vol} \{K_{\mathcal{C}_0j^{-\mu}}\}.$$

mutatis mutandis, la fin de la preuve du théorème 3.12 donne alors pour m, j assez grands, pour tout $\ell > 0$, à la limite $j \rightarrow \infty$

$$\#\{\lambda_i^{(j)} \in \sigma(\hat{Q}_{m,\mu}) \mid |\lambda_i^{(j)}| > e^{c+\delta} \Lambda_{\text{srb}}^{-\frac{1}{2}}\} \leq$$

$$\leq \underbrace{\mu_{\text{srb}}(A(n, \delta))}_{\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0} \mathcal{O}\left(j^{D(\frac{1}{2}-\mu)+\mu \dim_M K+\ell}\right)$$

en prenant les limites $j \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow \frac{1}{2}$ puis finalement $n \rightarrow \infty$ on déduit l'estimé de la proposition 3.16. \square

Conclusion 3.18. Pour améliorer ce résultat et obtenir une borne fractale dépendant du rayon sur la densité radiale du nombre de résonances, comme c'est le cas pour les applications quantiques ouvertes [Sch09] où pour les ondes amorties, et comme le suggère les simulations numériques présentées en fig.3.8) il faut mettre à profit la propriété de mélange exponentiel de (X, T, μ) . En effet, dans le contexte des ondes amorties et lorsque la dynamique sous-jacente est exponentiellement mélangeante, Anantharaman [Ana10] à montré qu'il est possible de déduire des estimations fortes sur la répartition des résonances. Elle utilise pour cela le théorème des grandes déviations¹³ de Kifer qui donne une estimation précise sur le comportement de la mesure de l'ensemble déviant. Dans notre contexte celui-ci s'énonce ainsi :

Lemme 3.19. (Grandes déviations [Kif94]). Soit f une fonction Hölder continue sur X et $A(n, \delta) \subseteq X$ l'ensemble déviant associé tel que défini en (3.5.1). Alors pour tout $\delta < \|f\|_\infty - \int_X f d\mu$, pour n assez grand, $\mu(A(n, \delta)) = \mathcal{O}(e^{-nI_\delta})$, où I_δ est une fonction positive strictement croissante égale à 0 en $\delta = 0$.

Pour améliorer la proposition 3.16 en mettant à profit les grandes déviations on est tenté de choisir pour n le temps d'Ehrensfest, dépendant du paramètre semiclassique. Malheureusement, comme m est fixé p.r. au paramètre j , le terme

$$(N\Lambda^{-1})^n \kappa^{-2m}$$

apparaissant dans le symbole de $P_\mu^{(n)}$ divergera à la limite semiclassique, sauf si il existe une borne uniforme sur le nombre de trajectoires captées issues de K , ce qui peut être vrai pour les applications ouvertes du chapitre suivant (il se peut que ce soit le cas dans notre contexte mais la propriété de partielle captivité est déjà très difficile à vérifier). Le problème est remplacé par un autre, probablement plus simple : traduire le théorème de grandes déviations pour les applications ouvertes en faisant apparaître dans son énoncé la mesure de Lebesgue.

3.5.4 Sur la minoration du nombre de résonances

La loi de Weyl Fractale (3.4.2) est consistante avec les observations numériques. Néanmoins, montrer qu'elle est optimale reste un problème ouvert, dans ce contexte mais aussi dans les problèmes de diffusion quantique, domaine dans lequel elle fut pour la première fois énoncé par Sjöstrand en 90 [Sjö90].

De nombreux travaux autour du problème de comptage de résonances ont mis en évidence une certaine universalité de genre de loi¹⁴ : pour les résonances du Laplacien sur

13. On pourra consulter [DK01],[Sch09] p.71 ou encore [Liv96] pour des preuves de ce résultats et d'autres références.

14. On pourra consulter les articles [Non08] [Zwo99] pour de plus amples références sur ce sujet.

les surfaces à courbure négative par Zworski-Lin-Guillopé [GLZ04], pour les applications quantiques par Nonnemacher et Zworski [NZ07][NZ09] mais aussi récemment en informatique par Chepelianskii et Shepelyansky pour les valeurs propres de matrices intervenants dans le noyau Linux [LE10].

La difficulté théorique majeure à surmonter pour montrer une borne inférieure sur le nombre de résonances provient du fait que les opérateurs dont on cherche à contrôler le spectre ne sont pas auto-adjoints, ni même normaux¹⁵. Une approche naïve consisterait à montrer que l'opérateur de transfert peut être rendu presque normal pour un choix de norme optimal, à la limite semiclassique. Si cela était vrai¹⁶ le théorème de Huaxin Lin [Lin97], démontrant la conjecture selon laquelle une matrice presque normale est proche d'une matrice normale, permettrait de conclure à partir de l'estimation de Weyl obtenue pour les valeurs singulières dans la preuve du théorème 3.12.

La stabilité numérique du spectre de résonances donne une raison de croire en cela. En effet si le spectre d'opérateurs normaux est stable sous perturbation ce n'est en général pas le cas des opérateurs non-normaux où la notion essentielle est le pseudo-spectre [Tre92].

15. Un opérateur est dit normal si il commute avec son adjoint.

16. C'est le cas pour l'opérateur classique $\varphi(x) \rightarrow \varphi(2x)$ sur le cercle, mais celui-ci n'admet aucune résonance non triviale.

Chapitre 4

Systèmes ouverts

”Tout changeait de pôle et d’épaule; La pièce était-elle ou non drôle;
Moi si j’y tenais mal mon rôle, c’était de n’y comprendre rien.” -LOUIS ARAGON.

Dans ce chapitre on introduit une famille semiclassique d’opérateurs de transfert à poids complexe, conçu pour mimer les opérateurs intervenant dans la fonction zêta de Selberg associée aux surfaces hyperboliques convexes cocompactes (cf. section 1.4 du chapitre introductif 1). Plus précisément, on étudie les propriétés spectrales d’opérateurs de type

$$\hat{F}_\hbar : \varphi \mapsto e^{\frac{i}{\hbar}\tau} e^V \varphi \circ \mathcal{T}, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I) \quad (4.0.1)$$

où I est une union d’intervalles d’adhérences disjointes et $\mathcal{T} : \mathcal{T}^{-1}(I) \rightarrow I$ est une application expansive *ouverte* : son ensemble invariant K est de mesure nulle (c’est en général un ensemble de Cantor). τ et V sont deux fonctions lisses, avec τ à valeurs réelles et la limite semiclassique correspond naturellement à $\hbar \searrow 0$. Ces opérateurs partagent de nombreux points communs avec les applications quantiques ouvertes, étudiées notamment par Nonnemacher et Zworski [NZ07] et par Schenk dans sa thèse [Sch09]. Dans son mémoire de diplôme, sous la direction de Khul, Weich [Wei10] étudie en parallèle de tels opérateurs et une réalisation expérimentale du système à trois disques, archétype des systèmes quantiques ouverts (On se réfère [Wei10] pour des références historiques concernant l’étude des systèmes ouverts en physique).

Après avoir défini le spectre de résonances de Ruelle de \hat{F}_\hbar (4.0.1), les théorèmes 4.18 et 4.24 que l’on prouve dans ce chapitre donnent, respectivement, une borne supérieure asymptotique sur le rayon spectral de \hat{F}_\hbar et une borne sur la densité de résonances, liée à la *dimension de Hausdorff* de l’ensemble \mathcal{T} -invariant $K \subset I$. Comme dans le chapitre précédent, ces résultats reposent sur une analyse de la dynamique symplectique sous-jacente sur le cotangent T^*I associée à \hat{F}_\hbar .

4.1 Le modèle

Soit $I_1, \dots, I_N \subset \mathbb{R}$, une collection finie d'intervalles fermés et disjoints et

$$I := \bigcup_{i=1}^N I_i \quad (4.1.1)$$

Soit $A = (A_{ji})$ une matrice $N \times N$, que l'on appellera dorénavant *matrice de transition*¹, telle que $A_{ji} = 0$ ou 1. On notera $i \rightsquigarrow j$ si $A_{ji} = 1$. A tout couple i, j tel que $i \rightsquigarrow j$ on se donne une application inversible lisse

$$\phi_{j,i} : I_i \rightarrow \phi_{j,i}(I_i) \subset \text{int}(I_j)$$

strictement contractante : il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$0 < \left| \phi'_{j,i}(x) \right| \leq \theta < 1 \quad (4.1.2)$$

On suppose de plus une condition de *séparation forte*, imposant aux images des différentes applications $\phi_{j,i}$ de ne pas s'intersecter :

$$\phi_{j,i}(I_i) \cap \phi_{l,k}(I_k) \neq \emptyset \Rightarrow i = k \text{ et } j = l. \quad (4.1.3)$$

Grâce à cette hypothèse, les applications $\phi_{j,i}$ peuvent être vues comme les branches inverses d'une *application expansive uni-valuée*

$$\mathcal{T} : \phi(I) \rightarrow I$$

où

$$\phi(I) = \bigcup_{i=1}^N \{ \phi_{j,i}(x) \mid j; i \rightsquigarrow j; x \in I_i \}$$

dénote l'ensemble des points $\{y\}$ tels que $\mathcal{T}(y) \in I$. L'ensemble invariant sous l'action de \mathcal{T} se construit par itération. On part de $K_{(0)} = I$ et on définit

$$K_{(n)} := \phi^n(I) \quad (4.1.4)$$

Par contraction $K_{(n+1)} \subset K_{(n)}$ et l'ensemble limite

$$K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{(n)} \quad (4.1.5)$$

est appelé *ensemble captif*. Dans la plupart des cas c'est un ensemble de Cantor de dimension de Hausdorff $\dim_H K$ strictement plus petite que 1 -cf. figure (4.1).

1. Cette matrice définit un graphe orienté Γ_A à N sommets $\{v_i\}_{i=1}^N$, avec v_i et v_j reliés par une arête orientée lorsque $i \rightsquigarrow j$.

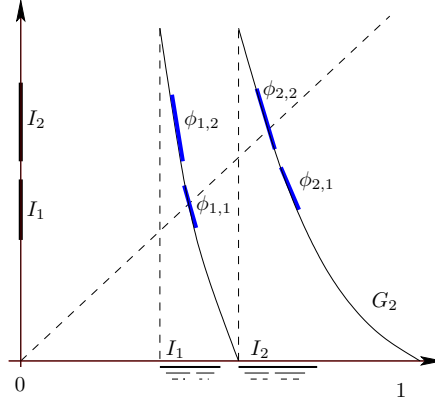


FIGURE 4.1 – L’application de Gauss tronquée $\mathcal{T}(x) \equiv G_2(x) := \left\{ \frac{1}{x} \right\}$ si $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ et 0 sinon. Lorsque restreinte à $G_2^{-2}([0, 1]) = [\frac{1}{3}; \frac{2}{7}] \cup [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}] = I$, G_2 peut être vue comme l’application inverse d’un système d’applications contractantes $\{\phi_{j,i}\}$ associé à la matrice de transition $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. L’ensemble invariant $K_2 \subset I$ est un Cantor formé des nombres réels dont le développement en fraction continue ne comporte que 1 et 2. La dimension de Hausdorff de K_2 est proche de 0,5 -cf. fig(4.2).

Définition 4.1. [Fal97, p.72] La pression topologique d’une fonction f continue sur I est définie comme

$$\Pr(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{x=\mathcal{T}^n(x)} \exp \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \mathcal{T}^k(x) \right) \quad (4.1.6)$$

où la première somme porte sur les points n -périodiques de $\mathcal{T} : K \rightarrow K$.

Une fonction dont la pression est particulièrement intéressante est $J = \log |\mathcal{T}'| > 0$. En effet, la formule de Bowen [Fal97, p.77] montre qu’elle relie à la dimension de Hausdorff de K et donne un moyen pratique de calculer (numériquement) cette dimension :

Lemme 4.2. (Bowen). $\Pr(-\beta J)$ est continue et strictement décroissante en $\beta \in \mathbb{R}$. Son unique zéro est $\dim_H K$.

L’ensemble K défini par l’application \mathcal{T} est approximativement *autosimilaire* [Fal97, p.72]. Pour ce type d’ensemble la dimension de Hausdorff coïncide avec la *dimension de Minkowski*, qui donne le comportement du volume d’un δ voisinage de K lorsque $\delta \searrow 0$. (def. 3.11 dans le chapitre précédent) [Fal95].

4.1.0.1 L’opérateur de transfert

On se donne deux fonctions lisses $\tau \in \mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{C}^\infty(I; \mathbb{R})$. Respectivement, la *fonction toit* et le *potentiel*, en rapport avec leurs occurrence dans les suspensions

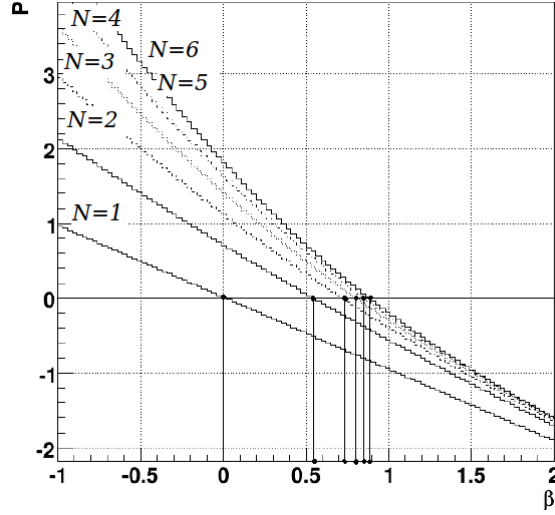


FIGURE 4.2 – Calcul numérique de la pression topologique $\text{Pr}(-\beta J)$ pour les applications de Gauss tronquées aux N premières branches, $N = 1, \dots, 6$ -cf. fig.(4.1). Par la formule de Bowen l'unique zéro de la pression correspond à la dimension de Hausdorff de l'ensemble invariant K_N de la dynamique. Pour une seule branche cet ensemble se réduit à un point (le nombre d'or) et la dimension de K_1 est donc nulle. La dimension augmente avec N et on a $\dim_H(K_2) = 0.55 \pm 0.2$, $\dim_H(K_3) = 0.72 \pm 0.2$, et $\dim_H(K_4) = 0.8 \pm 0.2$ etc...-Image réalisée par Frédéric Faure.

d'applications ouvertes pour τ et dans le formalisme thermodynamique pour V . A partir de \mathcal{T} , τ et V on va construire un opérateur de transfert à poids complexe. Dans la suite

$$\mathcal{C}_U^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$$

dénote l'ensemble des fonctions lisses à support contenu dans un certain compact $U \subset \mathbb{R}$. Soit $\hbar > 0$ un petit paramètre (que l'on considère fixe pour commencer). L'opérateur de transfert

$$\hat{F} : \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_{\phi(I)}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$$

que l'on va étudier dans ce chapitre s'écrit

$$\hat{F} : \varphi \mapsto \begin{cases} e^{V+i\frac{1}{\hbar}\tau}(\varphi \circ \mathcal{T})(x) & \text{si } x \in \phi(I) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

On remarque au passage que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$, $n \geq 0$ on a

$$\text{supp}(\hat{F}^n \varphi) \subset K_{(n)} \quad (4.1.8)$$

où $K_{(n)}$ est défini en (4.1.4). Comme expliqué dans le chapitre introductif ces opérateurs interviennent dans l'étude des résonances du Laplacien hyperbolique sur les surfaces à courbure négative convexes cocompactes, et reproduisent certains aspects des applications quantiques ouvertes [Bor07, NZ07].

Exemple 4.3. Un résultat célèbre de Mayer [May91] montre que la fonction zêta de la surface modulaire $X = PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^2$, peut s'écrire comme

$$\zeta_X(s) = \det(I - \mathcal{L}_s); s \in \mathbb{C}$$

où \mathcal{L}_s est l'opérateur de Gauss-Mayer construit à partir de l'application de Gauss

$$G: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

Si on note $\mathcal{G}_n: x \mapsto \frac{1}{x+n}; n \in \mathbb{N}^*$, les branches inverses de G , alors \mathcal{L}_s s'écrit

$$(\mathcal{L}_s \varphi)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{s \log(\mathcal{G}_n(x))^2} \varphi(\mathcal{G}_n(x)); \varphi \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad s \in \mathbb{C}$$

Pour ce ramener à un opérateur du type (4.1.7), on commence par tronquer G à ses N premières branches. Cela revient à poser

$$\mathcal{T}(x) \equiv G_N(x) = \begin{cases} G(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{N+1}; 1 \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que $G_N^{-1}([0, 1]) = \left[\frac{1}{N+1}; 1 \right]$ et $G_N^{-2}([0, 1]) = \bigcup_{j=1}^N I_j =: I$ où les intervalles I_j sont strictement disjoints². Restreinte à son action sur I , G_N peut être vue comme l'inverse d'un système d'applications contractantes $\phi_{j,i}: I_i \rightarrow I_j \quad i, j \in \{1, \dots, N\}$ (cf. fig.4.1). On pose alors

$$\left(\hat{F} \varphi \right) (x) = e^{\left(\frac{i}{h} - \alpha \right) \log x^2} \varphi(G_N(x)); \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$$

que l'on appellera dans la suite *opérateur de Gauss-Mayer tronqué*. On présente tout au long du chapitre des résultats de simulations numériques effectués pour cet exemple.

4.1.1 Extension aux distributions

L'opérateur \hat{F} défini en (4.1.7) agit sur $\mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$. Pour étendre son action aux distributions on introduit une *fonction cut-off*

$$\chi \in \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$$

telle que $0 < \chi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \text{Int}(I)$ et $\chi(x) = 1$ sur $\phi(I)$. On dénote par $\hat{\chi}$ l'opérateur de multiplication par χ . On définit alors

$$\hat{F}_\chi := \hat{F} \hat{\chi}. \tag{4.1.9}$$

2. Précisément :

$$I_j := \left[\frac{1}{N+2-j}; \frac{1+N}{(1+N)(N+1-j)+1} \right]$$

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{\phi(I)}^{\infty}(\mathbb{R})$ on a $\hat{\chi}\varphi = \varphi$ et donc $\hat{F}_{\chi}\varphi = \hat{F}\varphi$. Comme

$$\hat{\chi} : \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_I^{\infty}(\mathbb{R})$$

\hat{F}_{χ} est bien défini sur $\mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Grâce à la fonction cut-off, l'adjoint L^2 de \hat{F}_{χ} a un sens en tant qu'opérateur

$$\hat{F}_{\chi}^* : \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_I^{\infty}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

En effet,

$$\left\langle \hat{F}_{\chi}\psi, \varphi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\phi(I)} e^{V(x) - i\frac{1}{\hbar}\tau(x)} \chi(\mathcal{T}(x)) \varphi(x) \overline{\psi}(\mathcal{T}(x)) dx$$

pour tout $x \in \mathcal{T}^{-1}(I)$ on pose $y = \mathcal{T}(x)$. L'équation ci-dessus devient

$$\int_I \overline{\psi}(y) \chi(y) \sum_{z \in \phi(y)} e^{V(z) - J(z)} e^{-i\frac{1}{\hbar}\tau(z)} \varphi(z) dy =: \left\langle \psi, \hat{F}_{\chi}^* \varphi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

avec $J = \log |\mathcal{T}'|$. Ainsi

$$\left(\hat{F}_{\chi}^* \varphi \right)(x) = \chi(x) \sum_{y \in \phi(x)} e^{\mathcal{V}(y) - i\frac{1}{\hbar}\tau(y)} \varphi(y) \quad (4.1.10)$$

si $x \in I$ et 0 sinon. On a posé

$$\mathcal{V} = V - J$$

Il est important de remarquer que sans χ , l'image de \hat{F}^* pourrait ne pas être continue à la frontière de I .

Remarque 4.4. Lorsque $\tau = 0$ on reconnaît en (4.1.10) l'opérateur de Perron-Frobenius usuel que l'on note naturellement \hat{F}_0^* . \hat{F}_0^* agit sur les fonctions continues de K comme :

$$\left(\hat{F}_0^* v \right)(x) = \sum_{y \in \phi(x)} e^{\mathcal{V}(y)} v(y)$$

Le théorème de Perron-Frobenius [Fal97, p. 80] montre que \hat{F}_0^* admet une fonction propre strictement positive $w \in \mathcal{C}(K)$ telle que

$$\hat{F}_0^* w = e^{\text{Pr}(\mathcal{V})} w$$

avec $\text{Pr}(\mathcal{V})$ la pression topologique du *potentiel effectif* $\mathcal{V} = V - J$. Il existe de plus une mesure de probabilité μ sur K telle que, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(K)$

$$\int \left(\hat{F}_0^* g \right) d\mu = e^{\text{Pr}(\mathcal{V})} \int g d\mu$$

la mesure $w d\mu$ est alors une mesure invariante et ergodique sur K , appelée *mesure de Gibbs*.

La fonction cut-off nous dispense de travailler sur l'espace peu commode des fonctions continues sur K qui est en général un ensemble de Cantor. De plus :

Proposition 4.5. *L'opérateur de transfert (4.1.9) s'étend par dualité aux distributions :*

$$\hat{F}_\chi : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (4.1.11)$$

En outre, pour tout $n \geq 1$, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\text{supp}(\hat{F}_\chi^n \alpha) \subset K_{(n)} \quad (4.1.12)$$

avec $K_{(n)}$ tel que défini en (4.1.4).

Démonstration. Comme \hat{F}_χ^* préserve $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on peut définir l'action de \hat{F}_χ sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ par dualité en posant, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\hat{F}_\chi(\alpha)(\psi) := \alpha(\overline{\hat{F}_\chi^* \psi})$$

On remarque alors que si $\psi = 0$ dans $\phi(I)$ alors, par (4.1.10), $\hat{F}_\chi^* \psi \equiv 0$. Plus généralement si $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp}(\psi) \cap K_{(n)} = \emptyset$

$$\left(\hat{F}_\chi^*\right)^n \psi \equiv 0$$

Pour tout $\alpha \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on aura alors $\left(\hat{F}_\chi^n \alpha\right)(\bar{\psi}) = \alpha\left(\overline{\left(\hat{F}_\chi^*\right)^n \psi}\right) = 0$. Par définition cela implique que le support de $\hat{F}_\chi^n \alpha$ est contenu dans $K_{(n)}$. \square

4.2 Spectre discret de résonances

Le théorème 4.6 présenté dans cette section montre que l'opérateur \hat{F}_χ admet un spectre discret de *résonances de Ruelle* dans les espaces de Sobolev ordinaires $H^{-m}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ce spectre se trouve être indépendant de m et de la fonction cut-off χ ce qui donne tout son intérêt à cette approche. Comme dans le chapitre 3, les espaces qui nous intéressent sont construits comme

$$H^{-m}(\mathbb{R}) := \hat{A}_m^{-1}(L^2(\mathbb{R}))$$

où $\hat{A}_m := \text{Op}_1^w(A_m)$ et $A_m \in S_0^{-m}(\mathbb{R}^2)$ est le symbole borné d'ordre $-m$

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &= 1 && \text{si } |\xi| \leq 1 \\ &= |\xi|^{-m} && \text{si } |\xi| \geq 1 + \eta \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

avec $\eta > 0$ fixé mais arbitrairement petit et Op_1^w la quantification de Weyl définie en (2.1.1).

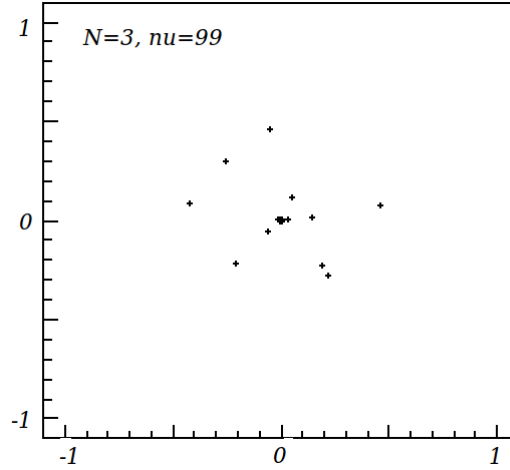


FIGURE 4.3 – Spectre de résonances de l’opérateur de Gauss-Mayer tronqué aux 3 premières branches (cf. ex. 4.3) pour $\hbar^{-1} = 99$, $\alpha = 0$. Image réalisée par Frédéric Faure.

Théorème 4.6. Spectre discret de résonances. *Pour tout $\hbar > 0$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l’opérateur \hat{F}_χ défini en (4.1.11) laisse invariant les espaces de Sobolev $H^{-m}(\mathbb{R})$.*

$$\hat{F}_\chi : H^{-m}(\mathbb{R}) \rightarrow H^{-m}(\mathbb{R})$$

est à spectre discret dans le domaine $|z| > r_m$, avec

$$r_m = \theta^m e^{V_M} \sqrt{N\theta} \quad (4.2.2)$$

où $0 < \theta < 1$ est le taux de contraction minimal (4.1.2) et $V_M = \max_{x \in I} \Re(V(x))$. Les valeurs propres de \hat{F}_χ ainsi que leurs espaces propres respectifs ne dépendent ni de m ni de χ et définissent les résonances de Ruelle

$$\text{Res}(\hat{F}) := \{\lambda_i\}_i \subset \mathbb{C}^*$$

de l’opérateur de transfert \hat{F} . Le support des distributions propres est contenu dans l’ensemble captif K .

Démonstration. On peut d’ores et déjà montrer qu’une distribution propre α de \hat{F}_χ , si elle existe, est nécessairement supporté sur K et ne dépend par conséquent pas de χ . En effet, si

$$\hat{F}_\chi \alpha = \lambda \alpha$$

avec $\lambda \neq 0$, alors

$$\alpha = \frac{1}{\lambda^n} \hat{F}_\chi^n \alpha$$

pour tout $n \geq 1$. L’expression (4.1.12) dans la proposition 4.1.11, montre alors que

$$\text{supp}(\alpha) \subset K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{(n)}$$

Sur l'ensemble captif $\chi = 1$ donc les distributions propres et valeurs propres de \hat{F}_χ ne dépendent pas de χ .

La preuve de l'existence d'un spectre discret de résonances est essentiellement la même que celle du théorème B.2 de Ruelle pour les applications expansives "fermées", prouvé dans l'appendice. En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I_i)$, alors pour tout j tel que $i \rightsquigarrow j$, l'opérateur *pull-back*

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \phi_{j,i}^{-1}$$

est un exemple élémentaire *d'opérateur intégral de Fourier* (OIF) associé au relevé canonique de $\phi_{j,i}^{-1}$ au cotangent T^*I

$$\begin{aligned} F_{j,i} : T_x^*I_i &\rightarrow T_{\phi_{j,i}(x)}^*I_j \\ \xi &\mapsto \phi'_{j,i}(x)^{-1} \cdot \xi \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Lorsque \hbar est fixé l'opérateur de multiplication par $e^V e^{\frac{i}{\hbar}\tau} \chi \circ \phi_{j,i}^{-1}$, apparaissant dans la définition (4.1.7) et (4.1.9), ne contribue pas au transport (c'est simplement un PDO d'ordre 0). Grâce à la fonction cut-off on peut énoncer l'analogie du théorème d'Egorov dans ce contexte. Une précaution s'impose toutefois :

Définition 4.7. [GS94] Un opérateur \hat{A} est proprement supporté si il préserve $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

Lemme 4.8. Egorov pour \hbar fixé. Si $a \in S^m(\mathbb{R}^2)$ est le symbole d'un opérateur proprement supporté $\hat{A} \in OPS^m$ alors $\hat{F}_\chi^* \hat{A} \hat{F}_\chi$ est un PDO dans OPS^m proprement supporté. Son symbole, nul en dehors de T^*I , s'écrit

$$\chi^2(x) \sum_{i \rightsquigarrow j} e^{(2V+J)(\phi_{j,i}(x))} a(F_{j,i}(x, \xi)) \text{ mod } S^{m-1}(\mathbb{R}^2)$$

où $\mathcal{V} := V - J$ est le potentiel effectif.

Démonstration. Si \hat{A} est proprement supporté, la preuve est la même que pour les opérateurs pull-back usuels [EZ03]. le pré-facteur $e^{(2V+J)(\phi_{j,i}(x))}$ provient simplement de la définition (4.1.7) et de (4.1.10). \square

Pour montrer le théorème 4.6, on s'intéresse à

$$\hat{Q}_m := \hat{A}_m \hat{F}_\chi \hat{A}_m^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}).$$

qui est unitairement équivalent à $\hat{F}_\chi : H^{-m}(\mathbb{R}) \rightarrow H^{-m}(\mathbb{R})$. Dans cette expression \hat{A}_m^{-1} n'est pas proprement supporté. Cette difficulté technique peut être contournée en approximant \hat{A}_m^{-1} par un opérateur proprement supporté Λ_m . Cette astuce est expliquée en détail dans [GS94, p.45]. \hat{Q}_m est alors défini sur le domaine dense $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. On considère

$$\hat{P} := \hat{Q}_m^* \hat{Q}_m = \hat{A}_m^{-1} \left(\hat{F}_\chi^* \hat{A}_m^2 \hat{F}_\chi \right) \hat{A}_m^{-1} \quad (4.2.4)$$

En appliquant le théorème d'Egorov et le lemme de composition des PDO, on a que \hat{P} est un PDO dans $OPS^0(\mathbb{R}^2)$ et son symbole principal s'écrit :

$$P(x, \xi) = \chi^2(x) \sum_{i \rightsquigarrow j} e^{(2\nu+J)(\phi_{j,i}(x))} \frac{A_m^2 \circ F_{j,i}(x, \xi)}{A_m^2(x, \xi)}$$

De (4.2.1) et (4.2.3), pour tout $x \in I$ et $|\xi| > 1 + \eta$:

$$|P(x, \xi)| \leq \chi^2(x) \theta^{2m} \sum_{i \rightsquigarrow j} e^{(2\nu+J)(\phi_{j,i}(x))} \leq N \theta^{2m} e^{2V_M + \log \theta}$$

avec $V_M = \max_{x \in I} V(x)$. A partir de là, la fin de la preuve du théorème B.2 s'applique sans changements, en utilisant le lemme 2.2 et son corollaire. Le fait que les résonances ne dépendent pas de m est une conséquence de la densité des espaces de Sobolev les uns dans les autres. □

4.3 Dynamique classique sur T^*I

A partir de maintenant le paramètre $\hbar > 0$ dans la définition de l'opérateur de transfert (4.1.7) n'est plus fixé. Pour mettre cela en évidence on écrira $\hat{F}_{\chi, \hbar}$ à la place de \hat{F}_χ et pour alléger la notation on omet l'indice χ , $\hat{F}_\hbar \equiv \hat{F}_{\chi, \hbar}$.

Comme dans le chapitre précédent, notre approche consiste tout d'abord en une analyse de la dynamique sous-jacente sur le cotangent associée à \hat{F}_\hbar , vu comme un opérateur intégral de Fourier (OIF) semiclassique. Par rapport au cas fermé du chapitre 3, on sera en mesure de donner une description beaucoup plus précise de l'ensemble captif associé à l'application canonique.

4.3.1 L'application canonique sur T^*I

$$\hat{F}_\hbar : \varphi \rightarrow \overbrace{(\chi \circ \mathcal{T})}^{\text{PDO}} e^V \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar} \tau}}_{\text{OIF}} \overbrace{(\varphi \circ \mathcal{T})}^{\text{OIF}}$$

Comme $\hbar > 0$ n'est plus fixé, la famille d'opérateurs $\left(e^{\frac{i}{\hbar} \tau} \right)_{\hbar > 0}$ est un OIF associé à l'application $(x, \xi) \rightarrow (x, \xi + \frac{d\tau}{dx})$. Par composition avec (4.2.3), l'application canonique associée à $\left(\hat{F}_\hbar \right)_{\hbar > 0}$ s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} F_{j,i} : T_x^* I_i &\mapsto T_{\phi_{j,i}(x)}^* I_j \\ \xi &\mapsto \phi'_{j,i}(x)^{-1} \cdot \xi + \tau'(\phi_{j,i}(x)) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

pour tout i, j tels que $i \rightsquigarrow j$. Bien que différente, on garde la même notation que pour l'application (4.2.3). Le lemme ci-dessous montre que loin de la section nulle les trajectoires fuient de manière contrôlée :

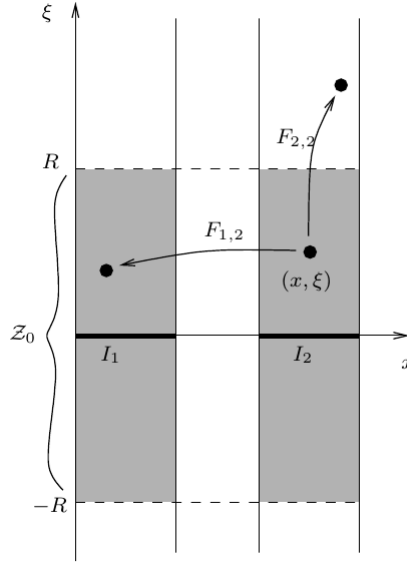


Figure 4.4 – La propriété de minimale captivité.

Lemme 4.9. *Pour tout $1 < \kappa < 1/\theta$, il existe $R \geq 0$ tel que, pour tout $|\xi| > R$ et pour tout $i \rightsquigarrow j$,*

$$|\xi'| > \kappa |\xi| \quad (4.3.2)$$

où $(x', \xi') = F_{j,i}(x, \xi)$.

Démonstration. De (4.3.1), on a que $\xi' = \phi'_{j,i}(x)^{-1} \xi + \tau'(x')$. Ainsi

$$|\xi'| - \kappa |\xi| = \left| \phi'_{j,i}(x)^{-1} \cdot \xi + \tau'(x') \right| - \kappa |\xi| \geq (\theta^{-1} - \kappa) |\xi| - \max_I |\tau'| > 0,$$

la dernière inégalité est vraie à condition que $|\xi| > R := \frac{\max_I |\tau'|}{\theta^{-1} - \kappa}$. \square

Il existe alors un ensemble captif compact, et en général fractal, pour $F := \{F_{j,i}\}_{i \rightsquigarrow j}$. On part de

$$\mathcal{Z} := K \times [-R, R] \quad (4.3.3)$$

où $K \subset I$ est l'ensemble ϕ^{-1} -invariant défini en (4.1.5) et R est choisit pour satisfaire le lemme 4.9 pour un certain $1 < \kappa < \frac{1}{\theta}$. On a

$$F^{-1}(\mathcal{Z}) \Subset \mathcal{Z}$$

et de manière récursive $F^{-n}(\mathcal{Z}) \subset F^{-(n-1)}(\mathcal{Z})$ pour tout $n \geq 1$. l'ensemble limite $\tilde{K} \subset T^*I$ est l'ensemble captif de F :

$$\tilde{K} := \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{-n}(\mathcal{Z}) \quad (4.3.4)$$

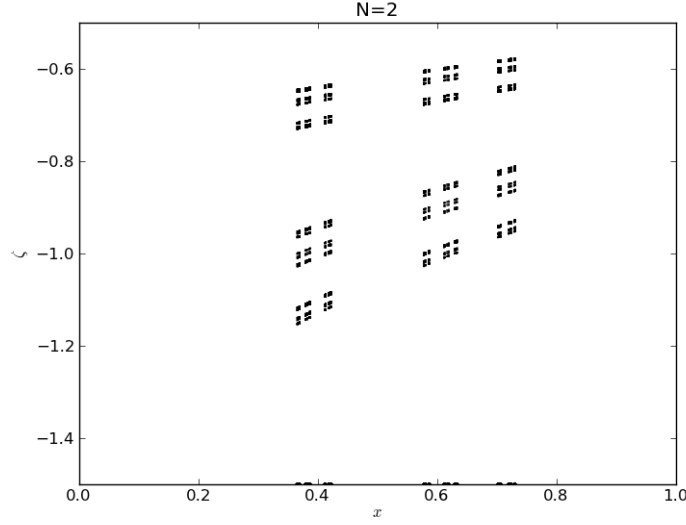


FIGURE 4.5 – Calcul numérique de l'ensemble captif associé à l'opérateur Gauss-Mayer tronqué aux deux premières branches -ex. 4.3. L'application canonique s'écrit $F(x, \xi) = \{F_n(x, \xi); n = 1, 2\}$ avec $F_n(x, \xi) = \left(\frac{1}{x+n}; -(x+n)^2 \left(\xi + \frac{2}{x+n}\right)\right)$.

Par construction, depuis un point dans \tilde{K} une trajectoire au moins est captée pour tout temps. On désire bien plus :

Définition 4.10. Soit R choisit pour satisfaire le lemme 4.9 pour un certain $1 < \kappa < \frac{1}{\theta}$. L'application F est *minimalement captive* si, depuis tout point $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_0 := I \times [-R, R]$ il existe au plus *une seule trajectoire* restant dans \mathcal{Z}_0 :

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{Z}_0, \# \{F(x, \xi) \cap \mathcal{Z}_0\} \leq 1 \quad (4.3.5)$$

Remarque 4.11. Cette propriété est beaucoup plus forte que la *partielle captivité* définie dans le chapitre précédent def.(3.3). On pourrait l'affaiblir en autorisant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall (x, \xi) \in \mathcal{Z}_0, \# \{F^n(x, \xi) \cap \mathcal{Z}_0\} \leq 1$$

ce qui est équivalent à (4.3.5) en remplaçant \mathcal{Z}_0 par un ϵ -voisinage de \tilde{K} pour un certain $\epsilon > 0$. Par simplicité on se contentera dans la suite de la définition 4.10 ci-dessus.

Proposition 4.12. F est minimalement captive si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, pour tout j, k tels que $j \neq k$, $i \rightsquigarrow j$, $i \rightsquigarrow k$,

$$F^{-1}(\phi_{j,i}(I_i) \times [-R, R]) \cap F^{-1}(\phi_{k,i}(I_i) \times [-R, R]) = \emptyset \quad (4.3.6)$$

La figure 4.6 illustre (4.3.6).

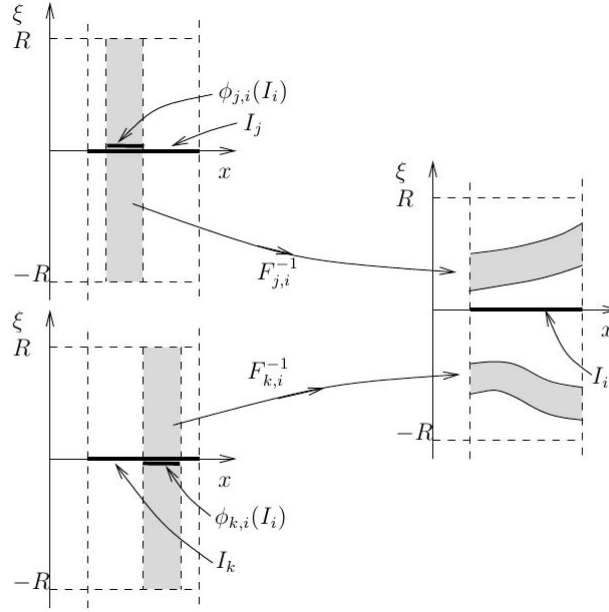


Figure 4.6: Illustration de la condition (4.3.6) qui implique la minimale captivité de F .

Démonstration. Soit $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_0$ avec $x \in I_i$. Supposons que

$$\#\{F(x, \xi) \cap \mathcal{Z}_0\} \geq 2$$

alors il existe j, k tels que $j \neq k$, $i \rightsquigarrow j$, $i \rightsquigarrow k$, tels que

$$F_{j,i}(x, \xi) \in \phi_{j,i}(I_i) \times [-R, R] \text{ et } F_{k,i}(x, \xi) \in \phi_{k,i}(I_i) \times [-R, R]$$

Ainsi

$$(x, \xi) \in \left\{ F^{-1}(\phi_{j,i}(I_i) \times [-R, R]) \cap F^{-1}(\phi_{k,i}(I_i) \times [-R, R]) \right\}$$

en contradiction avec (4.3.6). La réciproque est évidente. \square

4.3.2 Dynamique symbolique

Dans cette section on construit un codage symbolique de la dynamique. Cette procédure est standard dans l'étude des applications expansives [BS02].

Codage symbolique de K . On commence par définir l'ensemble des *mots admissibles*

$$\mathcal{W}_+ := \left\{ (w_0, w_1, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}; w_\ell \rightsquigarrow w_{\ell-1}, \forall \ell \geq 1 \right\} \quad (4.3.7)$$

et

$$\mathcal{W}_n := \left\{ (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \{1, \dots, N\}^{n+1}; w_\ell \rightsquigarrow w_{\ell-1}, \forall 1 \leq \ell \leq n \right\}$$

les mots admissibles de *longueur* n . Pour $w \in \mathcal{W}_+$ et $i < j$ on note $w_{i,j} := (w_i, w_{i+1}, \dots, w_j) \in \mathcal{W}_n$ la suite admissible extraite avec $n = j - i \geq 1$. On pose

$$\phi_{w_{i,j}} := \phi_{w_i, w_{i+1}} \circ \dots \circ \phi_{w_{j-1}, w_j} : I_{w_j} \rightarrow I_{w_i} \quad (4.3.8)$$

et pour tout $x \in I_{w_n}$, on notera $\phi^n(x) = \{\phi_{w_{0,n}}(x); w_{0,n} \in \mathcal{W}_n\}$ l'ensemble des images de x au temps n .

Afin de coder les points de l'ensemble captif K on considère la suite d'intervalles

$$I_{w_{0,n}} := \phi_{w_{0,n}}(I_{w_n}) \subset I_{w_0} \quad (4.3.9)$$

Pour tout $0 < m < n$, $I_{w_{0,n}} \subset I_{w_{0,m}} \subset I_{w_0}$ et d'après (4.1.2), la longueur de $I_{w_{0,n}}$ est borné par $\theta^n |I_{w_n}| \rightarrow_{n \nearrow \infty} 0$. On remarque alors que $K_{(n)}$ défini en (4.1.4) peut s'écrire comme

$$K_{(n)} = \bigcup_{w_{0,n} \in \mathcal{W}_n} I_{w_{0,n}} \quad (4.3.10)$$

et converge vers l'ensemble captif K . $(I_{w_{0,n}})_{n \geq 1}$ définie en (4.3.9) est une suite décroissante non vide d'intervalles fermés et converge par conséquent vers un point

$$x_w := I_w := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{w_{0,n}} \in K \quad (4.3.11)$$

Cela définit un codage symbolique des points de l'ensemble captif

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} : \mathcal{W}_+ &\rightarrow K \\ w &\mapsto x_w \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

L'application $\mathfrak{S} : \mathcal{W}_+ \rightarrow K$ est surjective par construction.

Lemme 4.13. *Avec l'hypothèse de séparation forte (4.1.3) $\mathfrak{S} : \mathcal{W}_+ \rightarrow K$ est bijective.*

Démonstration. Soit $w, w' \in \mathcal{W}_+$ avec $w \neq w'$: il existe $k \geq 0$ tel que $w_k \neq w'_k$. De (4.1.3) on a

$$\phi_{w_{k-1}, w_k}(I_{w_k}) \cap \phi_{w'_{k-1}, w'_k}(I_{w'_k}) = \emptyset$$

Par récurrence

$$\phi_{w_{0,k}}(I_{w_k}) \cap \phi_{w'_{0,k}}(I_{w'_k}) = \emptyset$$

Comme $\mathfrak{S}(w) \in \phi_{w_{0,k}}(I_{w_k})$ et $\mathfrak{S}(w') \in \phi_{w'_{0,k}}(I_{w'_k})$ on déduit que $\mathfrak{S}(w) \neq \mathfrak{S}(w')$ ce qui montre que \mathfrak{S} est injective. \square

Dynamique symbolique sur $\tilde{K} \subset T^*I$. Soit

$$\mathcal{W} := \left\{ (\dots w_{-2}, w_{-1} | w_0, w_1, \dots) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}; w_\ell \rightsquigarrow w_{\ell-1}, \forall \ell \in \mathbb{Z} \right\}$$

Le *shift à droite* $\mathcal{R} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ est défini comme $(\mathcal{R}(w))_k = w_{k+1}$, i.e.

$$\mathcal{R}(w) = (\dots w_{-2}, w_{-1}, w_0 | w_1, w_2 \dots)$$

(la barre de séparation $|$ se déplace vers la droite). A tout mot $w \in \mathcal{W}$ on associe

$$w_+ := (w_0, w_1, \dots) \in \mathcal{W}_+$$

L'action de \mathcal{R} est bien définie sur les mots de \mathcal{W}_+ et code la dynamique sur K engendrée par ϕ^{-1} . En effet

$$\mathcal{R}(w_+) = (w_1, w_2 \dots) \in \mathcal{W}_+$$

et, par (4.3.12), si $x_{w_+} = \mathfrak{S}(w_+) \in K$ on a que

$$\mathcal{T}(x_{w_+}) = x_{\mathcal{R}(w_+)}. \quad (4.3.13)$$

l'inverse sur \mathcal{W} de \mathcal{R} , Le *shift à gauche* $\mathcal{L} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$, donne $(\mathcal{L}(w))_k = w_{k-1}$, i.e.

$$\mathcal{L}(w) = (\dots w_{-2} | w_{-1}, w_0, w_1, w_2 \dots)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}^n(w)_+ = (w_{-n}, w_{-n+1} \dots w_{-1} w_0 w_1 \dots) \in \mathcal{W}_+$. On considère alors l'ensemble unidimensionnel $x_{\mathcal{L}^n(w)_+} \times [-R, R]$ et son image par F^{-n} :

$$\tilde{K}_{w,n} := F^{-n} \left(x_{\mathcal{L}^n(w)_+} \times [-R, R] \right)$$

Par (4.3.13) et (4.3.1)

$$\tilde{K}_{w,n} = x_{w_+} \times \mathcal{J}_{w,n} \quad (4.3.14)$$

où $(\mathcal{J}_{w,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'intervalles commençant par $\mathcal{J}_{w,0} = [-R, R]$, avec $\mathcal{J}_{w,n+1} \Subset \mathcal{J}_{w,n}$ et $|\mathcal{J}_{w,n+1}| \leq \theta |\mathcal{J}_{w,n}|$ où $\theta < 1$ est donné par (4.1.2). Cette suite converge vers un point ξ_w définissant ainsi le codage sur \tilde{K} :

$$\tilde{\mathfrak{S}} : \begin{cases} \mathcal{W} & \rightarrow \tilde{K} \\ w & \rightarrow (x_{w_+}, \xi_w) \end{cases} \quad (4.3.15)$$

qui étend (4.3.12). De plus, la dynamique $F : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ est conjuguée au shift à gauche \mathcal{L} sur \mathcal{W} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{W} \\ \tilde{\mathfrak{S}} \downarrow & & \tilde{\mathfrak{S}} \downarrow \\ \tilde{K} & \xrightarrow{F} & \tilde{K} \end{array} \quad (4.3.16)$$

Proposition 4.14. *Si F est minimalement captive (définition 4.10) alors $\tilde{\mathfrak{S}}$ est bijective. Par conséquent $F : \tilde{K} \rightarrow \tilde{K}$ est bijective et le diagramme (4.3.16) est commutatif.*

Démonstration. On a montré dans le lemme 4.13 que $\mathfrak{S} : \mathcal{W}_+ \rightarrow \mathcal{W}_+$ est bijective. Soit $w, w' \in \mathcal{W}$ avec $w_+ = w'_+$ mais $w \neq w'$. On veut montrer que

$$\xi_w \neq \xi_{w'}$$

Soit n le plus petit entier tel que $w_{-n} \neq w'_{-n}$. Alors

$$\mathcal{L}^n(w)_+ \neq \mathcal{L}^n(w')_+$$

Comme \mathfrak{S} est bijective, cela implique que

$$\mathfrak{S}(\mathcal{L}^n(w)_+) := x_{\mathcal{L}^n(w)_+} \neq x_{\mathcal{L}^n(w')_+} =: \mathfrak{S}(\mathcal{L}^n(w')_+)$$

Pour simplifier on pose $x_m := x_{\mathcal{L}^m(w)_+}$ et $x'_m := x_{\mathcal{L}^m(w')_+}$. On a que $x_n \neq x'_n$ et $x_m = x'_m$ pour tout $0 \leq m < n$. D'après la proposition 4.12, la minimale captivité impose à

$$F^{-n}(x_n \times [-R, R]) \text{ et } F^{-n}(x'_n \times [-R, R])$$

d'être disjoints car $x_m = x'_m$ pour tout $m < n$. □

4.3.3 Dimension de l'ensemble captif \tilde{K}

Théorème 4.15. *Lorsque F est minimalement captive (définition 4.10) et la matrice de transition symétrique ($i \rightsquigarrow j \Rightarrow j \rightsquigarrow i$) alors*

$$\dim_M \tilde{K} = 2 \dim_M K$$

où \dim_M est la dimension de Minkowski définie en (3.4.1) dans le chapitre 3.

Remarque 4.16. On sait par ailleurs [Fal97] que la dimension de Hausdorff et de Minkowski coïncident pour K . Par conséquent $\dim_M \tilde{K} = 2 \dim_H K$ et la formule de Bowen (lemme 4.2) donne un moyen d'évaluer numériquement $\dim_H K$.

Démonstration. À $w = (w_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{W}$ on associe $w_+ = (w_0, w_1, \dots) \in \mathcal{W}_+$ et $w_- = (\dots w_{-2} w_{-1})$. Soit

$$\overline{w_-} := (w_{-1}, w_{-2}, \dots)$$

le mot renversé. Comme la matrice de transition est supposée symétrique $\overline{w_-} \in \mathcal{W}_+$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : \mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{W}_+ \tilde{\times} \mathcal{W}_+ \subset \mathcal{W}_+ \times \mathcal{W}_+ \\ w &\rightarrow (w_+, \overline{w_-}) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{W}_+ \tilde{\times} \mathcal{W}_+ := \{(w, w') \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}; w_0 \rightsquigarrow w'_0\} \quad (4.3.17)$$

La proposition 4.14 montre que $\tilde{\mathfrak{S}} : \mathcal{W} \rightarrow \tilde{K}$ définie en (4.3.15) est bijective lorsque F est minimalement captive. On considère alors

$$\Phi := (\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}) \circ \mathcal{D} \circ \tilde{\mathfrak{S}}^{-1} : \tilde{K} \rightarrow K \times K$$

Soit

$$K \tilde{\times} K := (\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}) (\mathcal{W}_+ \tilde{\times} \mathcal{W}_+) \subset K \times K \quad (4.3.18)$$

Par construction $\Phi : \tilde{K} \rightarrow K \tilde{\times} K$ est bijective. De plus :

Lemme 4.17. *L'application $\Phi : \tilde{K} \rightarrow K \tilde{\times} K$ est bi-lipchitz.*

Le lemme 4.17 suffit pour déduire le théorème 4.15. En effet, comme la dimension de Minkowski est invariante sous les applications bi-lipchitz [Fal97, p.24] :

$$\dim_M (\tilde{K}) = \dim_M (K \tilde{\times} K) \quad (4.3.19)$$

De plus, si on note $K_i := K \cap I_i$ de (4.3.18) on a que

$$K \tilde{\times} K = \bigcup_{i \rightsquigarrow j} K_i \times K_j$$

par un résultat de Tricot [Tri82] on a que $\dim_M (K_i \times K_j) = \dim_M (K_i) + \dim_M (K_j)$ donc

$$\dim_M (K \tilde{\times} K) = \sup_{i \rightsquigarrow j} (\dim_M K_i + \dim_M K_j)$$

Puisque A est symétrique, si $i \rightsquigarrow j$ alors $j \rightsquigarrow i$. Comme les applications $\phi_{j,i} : K_i \rightarrow K_j$, $\phi_{i,j} : K_j \rightarrow K_i$ sont lipschitz $\dim_M K_i = \dim_M K_j$. Ainsi

$$\dim_M (K \tilde{\times} K) = 2 \sup_i (\dim_M K_i) = 2 \dim_M K \quad (4.3.20)$$

Avec (4.3.19) cela achève la preuve du théorème 4.15. On doit donc s'assurer que le lemme 4.17 est vrai. On choisit $w \in \mathcal{W}$ et on note $\rho = (x_{w_+}, \xi_w) = \tilde{\mathfrak{S}}(w) \in \tilde{K}$. De même, pour un autre mot $w' \in \mathcal{W}$ on écrit $\rho' = (x_{w'_+}, \xi_{w'}) \in \tilde{K}$. Par définition, comme $\mathcal{D} \circ \tilde{\mathfrak{S}}^{-1}(x_{w_+}, \xi_w) = \mathcal{D}(w) = (w_+, \overline{w_-})$,

$$\Phi(\rho) = (x_{w_+}, x_{\overline{w_-}}) \in K \tilde{\times} K.$$

Φ est bi-lipchitz si et seulement si

$$|\Phi(\rho) - \Phi(\rho')| \asymp |\rho - \rho'|$$

uniformément³ en ρ, ρ' . De façon équivalente, Φ est bi-lipchitz si

$$\left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + \left| x_{\overline{w_-}} - x_{\overline{w'_-}} \right| \asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + |\xi_w - \xi_{w'}| \quad (4.3.21)$$

3. $|\Phi(\rho) - \Phi(\rho')| \asymp |\rho - \rho'|$ ssi il existe $C > 0$ telle que pour tout ρ, ρ' , $C^{-1}|\rho - \rho'| \leq |\Phi(\rho) - \Phi(\rho')| \leq C|\rho - \rho'|$.

uniformément en $w, w' \in \mathcal{W}$.

On va montrer que (4.3.21) est vraie. Soit $w, w' \in \mathcal{W}$ et supposons que $(w_-)_j = (w'_-)_j$ pour $-n \leq j \leq 0$ mais tels que $(w_-)_{-n-1} \neq (w'_-)_{-n-1}$. Par définition (4.3.9) des intervalles $I_{w_0, n}$, on constate que les deux points $x_{\overline{w_-}}$, $x_{\overline{w'_-}}$ appartiennent au même intervalle $I_{(\overline{w_-})_{0, n}}$ mais sont contenus dans deux sous-intervalles disjoints $I_{(\overline{w_-})_{0, n+1}}$ et $I_{(\overline{w'_-})_{0, n+1}}$, respectivement. Ainsi

$$\left| x_{\overline{w_-}} - x_{\overline{w'_-}} \right| \asymp \left| I_{(\overline{w_-})_{0, n}} \right|$$

uniformément en $w, w' \in \mathcal{W}$. De la définition (4.3.14) des intervalles $\mathcal{J}_{w, n}$ on a que ρ et ρ' sont contenus respectivement dans $x_{w_+} \times \mathcal{J}_{w, n}$ et $x_{w'_+} \times \mathcal{J}_{w', n}$.

Posons $v' := (w'_-, w_+)$. Ainsi

$$\begin{aligned} |\rho - \rho'| &= \left| (x_{w_+}, \xi_w) - (x_{w'_+}, \xi_{w'}) \right| \\ &\asymp \left| (x_{w_+}, \xi_w) - (x_{w_+}, \xi_{v'}) \right| + \left| (x_{w_+}, \xi_{v'}) - (x_{w'_+}, \xi_{w'}) \right| \\ &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + |\xi_w - \xi_{v'}| \end{aligned}$$

Les points $\xi_w, \xi_{v'}$ sont contenus dans le même intervalle $\mathcal{J}_{w, n}$ au dessus de $x_{w_+} \in K$. Cependant, lorsque l'hypothèse de minimale captivité est vérifié, $\xi_w, \xi_{v'}$ sont contenus dans deux sous-intervalles disjoints $\mathcal{J}_{w, n+1}$ et $\mathcal{J}_{v', n+1}$, respectivement. Ainsi

$$|\xi_w - \xi_{v'}| \asymp |\mathcal{J}_{w, n}| \quad (4.3.22)$$

Par le principe de distorsion borné (voir [Fal97, chap. 4] pour une preuve) on a que

$$\forall x, y \in I_{w_n}, \left| \phi'_{w_0, n}(x) \right| \asymp \left| \phi'_{w_0, n}(y) \right| \asymp |I_{w_0, n}|$$

uniformément en w, n, x, y . En utilisant l'expression explicite (4.3.1) de F , la définition de $\mathcal{J}_{w, n}$ écrite en (4.3.14) et le principe de distorsion bornée on a que

$$|\mathcal{J}_{w, n}| \asymp \left| \phi'_{w-n, 0}(x) \right|, \quad \forall x \in I_{w_0},$$

uniformément en w, n, x . Finalement, tout cela donne

$$\begin{aligned} \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + |\xi_w - \xi_{w'}| &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + |\xi_w - \xi_{v'}| \\ &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + |\mathcal{J}_{w, n}| \\ &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + \left| \phi'_{w-n, 0}(x) \right|; \quad \forall x \in I_{w_0}, \\ &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + \left| I_{(\overline{w_-})_{0, n}} \right| \\ &\asymp \left| x_{w_+} - x_{w'_+} \right| + \left| x_{\overline{w_-}} - x_{\overline{w'_-}} \right|, \end{aligned}$$

on a montré (4.3.21) ce qui termine la preuve du lemme 4.17 et donc du théorème 4.15. \square

4.4 Gap spectral asymptotique

Théorème 4.18. Gap spectral à la limite semiclassique. *Lorsque F est minimalement captive (définition 4.10), pour m assez grand, le rayon spectral de $\hat{F}_\hbar : H^{-m}(\mathbb{R}) \rightarrow H^{-m}(\mathbb{R})$ satisfait, à la limite $\hbar \searrow 0$:*

$$r_s(\hat{F}_\hbar) \leq \sqrt{\theta_\infty} + o(1) \quad (4.4.1)$$

avec

$$\log \theta_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x, w} \frac{1}{n} (2\mathcal{V} + J)_{w_{0,n}}(x) \right) \quad (4.4.2)$$

où, pour tout $w_{0,n} \in \mathcal{W}_n$,

$$(2\mathcal{V} + J)_{w_{0,n}}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} 2\mathcal{V}(\phi_{w_{k,n}}(x)) + J(\phi_{w_{k,n}}(x))$$

est la somme de Birkhoff de $2\mathcal{V} + J$ le long de la trajectoire associée à $w_{0,n}$, avec $\mathcal{V} = V - J$ le potentiel effectif.

Remarques concernant la valeur du gap spectral.

Remarque 4.19. On peut écrire

$$\log \theta_\infty = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{T}} \mu(2\mathcal{V} + J) \quad (4.4.3)$$

où $\mathcal{M}_\mathcal{T}$ désigne l'ensemble (compact) des mesures de probabilités sur K invariantes sous l'action de \mathcal{T} . Pour voir cela on commence par remarquer que, pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz, la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{w \in \mathcal{W}_n} \sup_{x \in I} \frac{1}{n} f_{w_{0,n}}(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in K_{(n)}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathcal{T}^k(x)) \right) =: \mu_\infty(f)$$

existe et l'on a bien $\mu_\infty(f \circ \mathcal{T}) = \mu_\infty(f)$. On vérifie immédiatement que si $f|_K = 0$ alors $\mu_\infty(f) = 0$. μ_∞ est une forme linéaire, positive et définie ainsi une mesure de probabilité ($\mu_\infty(1) = 1$) invariante sur K . On veut à présent montrer que, si $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{T}$ alors

$$\mu(f) \leq \mu_\infty(f). \quad (4.4.4)$$

Pour cela on se sert de l'invariance de μ : pour tout n

$$\mu(f) = \int_K \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \mathcal{T}^k d\mu$$

en particulier, pour tout n

$$\begin{aligned} \mu(f) &\leq \sup_{x \in K} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathcal{T}^k(x)) \right) \\ &\leq \sup_{x \in K_{(n)}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathcal{T}^k(x)) \right) \end{aligned}$$

à la limite $n \rightarrow \infty$ on retrouve (4.4.4).

Remarque 4.20. D'après le théorème 4.6, par dualité, les fonctions propres de \hat{F}_\hbar^* sont des fonctions lisses sur \mathbb{R} . Or, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $x \in I$

$$\left(\hat{F}_\hbar^{*n}\varphi\right)(x) = \chi(x) \sum_{w \in \mathcal{W}_n} e^{(V_w - J_w)(x) - \frac{i}{\hbar}\tau_w(x)} \varphi(\phi_w(x))$$

où, pour toute fonction continue f , on a noté f_w sa somme de Birkhoff le long de la trajectoire $w \in \mathcal{W}_n$. Le module carré de $\left(\hat{F}_\hbar^{*n}\varphi\right)(x)$ s'écrit alors

$$\chi^2(x) \sum_{w, w' \in \mathcal{W}_n} e^{(V_w - J_w)(x) + (V_{w'} - J_{w'})(x) - \frac{i}{\hbar}(\tau_w - \tau_{w'})(x)} \overline{\varphi(\phi_{w'}(x))} \varphi(\phi_w(x))$$

Par un argument heuristique standard dans la littérature physique, lorsque τ est "générique", on s'attend à ce que les termes non diagonaux pour lesquels la phase est rapidement oscillante quand $\hbar \searrow 0$, s'annulent mutuellement. Si cela est vrai on obtient, sur I , pour n grand et lorsque $\hbar \searrow 0$

$$\left|\hat{F}_\hbar^{*n}\varphi(x)\right|^2 \lesssim \sum_{w \in \mathcal{W}_n} e^{2(V_w - J_w)(x)} |\chi(x)\varphi(\phi_w(x))|^2$$

De plus, pour tout $w \in \mathcal{W}_+$, $x \in I_{w_0}$, $\phi_{w_0, n}(x) \rightarrow x_w \in K$. Finalement cela donne, pour n assez grand, lorsque $\hbar \searrow 0$

$$\left\|\hat{F}_\hbar^{*n}\varphi\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^{\frac{1}{n}} \lesssim \underbrace{\left(\sup_{x \in I} |\varphi(x)|^2\right)^{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow_{n \nearrow \infty} 1} \sup_{x \in I} \left(\sum_{w \in \mathcal{W}_n} e^{2V_w(x)}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

En comparant cette expression avec la définition de la pression topologique (4.1.6) (voir aussi [Fal97, thm. 5.1]) on constate que l'approximation diagonale suggère une borne différente sur le rayon spectral asymptotique que celle donnée par le théorème 4.18, précisément :

Conjecture 4.21. [DM98] *Génériquement, pour m assez grand, le rayon spectral de $\hat{F}_\hbar : H^{-m}(\mathbb{R}) \rightarrow H^{-m}(\mathbb{R})$ satisfait, à la limite $\hbar \searrow 0$:*

$$\log r_s(\hat{F}_\hbar) \sim \frac{1}{2} \Pr(2\mathcal{V}).$$

où $\Pr(\cdot)$ dénote la fonctionnelle de pression topologique définie en (4.1.6) et $\mathcal{V} = V - J$ le potentiel effectif.

Remarque 4.22. Il n'est pas évident a priori que la conjecture ci-dessus donne une borne plus fine que celle du théorème 4.18. Pour vérifier que c'est bien le cas, on se sert de l'expression (4.4.3) et de la formule variationnelle pour la pression [Fal97, chap. 5.4]

$$\Pr(f) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{T}} (h_\mu + \mu(f)) \quad (4.4.5)$$

avec

$$h_\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \sum_{w \in \mathcal{W}_n} \mu(I_{w_0, n}) \log \mu(I_{w_0, n})$$

l'entropie de la mesure μ . On a

$$\begin{aligned} \Pr(2\mathcal{V}) &= \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} (h_\mu + \mu(2\mathcal{V} + J) - \mu(J)) \\ &= h_{\mu'} - \mu'(J) + \mu'(2\mathcal{V} + J) \\ &\leq \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{T}}} (h_\mu - \mu(J)) + \mu'(2\mathcal{V} + J) \\ &\leq \Pr(-J) + \mu_\infty(2\mathcal{V} + J) \end{aligned}$$

comme l'application \mathcal{T} est supposée ouverte, $\dim_H(K) < 1$ ce qui implique, par le lemme 4.2, que $\Pr(-J) < 0$. Ainsi, dans les systèmes ouverts,

$$\Pr(2\mathcal{V}) < \log \theta_\infty.$$

Enfin, en remarquant, par (4.4.5), que pour toutes fonctions Lipschitz f et g , $\Pr(f + g) \leq \Pr(f) + \Pr(g)$ on a

$$\frac{1}{2} \Pr(2\mathcal{V}) \leq \Pr(\mathcal{V})$$

ce qui implique, si la conjecture est vraie, un gap spectral asymptotique inférieur à la valeur propre dominante $e^{\Pr(\mathcal{V})}$ de l'opérateur de Perron-Frobenius classique \hat{F}_0^* (cf. remarque 4.4). Au passage on observe de plus que

$$\Pr(\mathcal{V}) = \Pr(V - J) \leq \Pr\left(-\frac{J}{2}\right) + \underbrace{\mu_\infty\left(V - \frac{J}{2}\right)}_{=\frac{1}{2} \log \theta_\infty}$$

le résultat du théorème 3.9 est donc vide si $\Pr(-\frac{J}{2}) < 0$ autrement dit, si $\dim_H K < \frac{1}{2}$. Inversement on a que [Fal97, lemme 5.2]

$$\Pr(\mathcal{V}) = \Pr\left(V - \frac{J}{2} - \frac{J}{2}\right) \geq \Pr\left(-\frac{J}{2}\right) + V_{\min} - \frac{1}{2}J_{\max}$$

et

$$\frac{1}{2} \log \theta_\infty \leq V_{\max} - \frac{1}{2}J_{\min}$$

donc

$$\Pr(\mathcal{V}) - \frac{1}{2} \log \theta_\infty \geq \Pr\left(-\frac{J}{2}\right) - (V_{\max} - V_{\min}) - \frac{1}{2}(J_{\max} - J_{\min})$$

à $(V_{\max} - V_{\min})$ et $(J_{\max} - J_{\min})$ fixé, si la pression $\Pr(-\frac{J}{2})$ est suffisamment grande, le théorème 3.9 donne bien un gap asymptotique (cf. fig. 4.7).

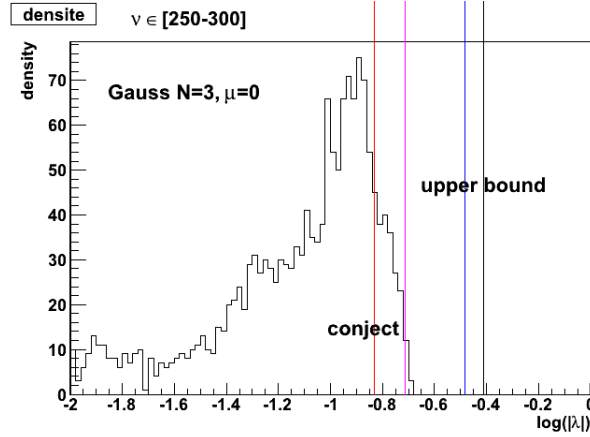


FIGURE 4.7 – Profil de la superposition du spectre de résonances pour l’opérateur de Gauss-Mayer tronqué aux trois premières branches (cf. ex. 4.3). $\hbar^{-1} \in [250, 300]$. La première ligne verticale en partant de la droite correspond à $\text{Pr}(\mathcal{V})$, le log de la valeur propre dominante de l’opérateur \hat{F}_0^* . Le gap spectral du théorème 4.18 correspond à la deuxième ligne verticale en partant de la droite. La conjecture basée sur une approximation diagonale semble au contraire légèrement forte (troisième ligne). On donne à la fin du chapitre (section 4.6.1) une argumentation heuristique expliquant la forme du profil de résonances et en particulier la position du pic (dernière ligne verticale). *Image réalisée par Frédéric Faure.*

La Preuve du théorème 4.18 est essentiellement la même que celle du théorème 3.9 pour les application fermées. On utilise les notations propres à ce chapitre introduites dans la section précédente. Soit $m > 0$, $\eta > 0$ (petit) et $A_m(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{aligned} A_m(x, \xi) &:= \frac{R^m}{|\xi|^m} \quad \text{for } |\xi| > R + \eta \\ &:= 1 \quad \text{for } \xi \leq R \end{aligned}$$

A_m appartient à la classe de symbole $S_0^{-m}(\mathbb{R}^2)$ définie dans le chapitre 2. Dans la suite \hbar n’est pas fixé et on note

$$\hat{A}_m := \text{Op}_\hbar^w(A_m)$$

La quantification de Weyl de A_m . On considère alors les espaces de *Sobolev semiclassiques*

$$H_\hbar^{-m}(\mathbb{R}) := \hat{A}_m^{-1}(L^2(\mathbb{R}))$$

qui coïncident en tant que sous espaces vectoriels avec les espaces de Sobolev usuels mais possèdent une norme qui dépend de $\hbar > 0$.

$$\hat{F}_\hbar : H_\hbar^{-m}(\mathbb{R}) \rightarrow H_\hbar^{-m}(\mathbb{R})$$

est par définition unitairement équivalent⁴ à

$$\hat{Q}_m := \hat{A}_m \hat{F}_h \hat{A}_m^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un temps fixé que l'on choisira grand à la fin de la preuve. On s'intéresse à

$$\hat{P}^{(n)} := \hat{Q}_m^{*n} \hat{Q}_m^n = \hat{A}_m^{-1} \hat{F}_h^{*n} \hat{A}_m^2 \hat{F}_h^n \hat{A}_m^{-1} \quad (4.4.6)$$

On invoque à présent le théorème d'Egorov énoncé ci-dessous dans le contexte de la quantification avec petit paramètre \hbar . On se réfère au chapitre 2 concernant les définitions des classes de symboles :

Lemme 4.23. Egorov semiclassique. *Si $a \in S_\mu^m(\mathbb{R}^2)$ est le symbole d'un opérateur proprement supporté $\hat{A} \in OPS_\mu^m$ alors $\hat{F}_h^* \hat{A} \hat{F}_h$ est un PDO dans OPS_μ^m proprement supporté. Son symbole, nul en dehors de T^*I , s'écrit*

$$\chi^2(x) \sum_{i \rightsquigarrow j} e^{(2\mathcal{V}+J)(\phi_{j,i}(x))} a(F_{j,i}(x, \xi)) \text{ mod } \hbar^{1-2\mu} S_\mu^{m-1}(\mathbb{R}^2)$$

où $\mathcal{V} := V - J$ est le potentiel effectif.

Grâce à ce lemme, et par le théorème de composition des PDO (lemme 2.4 dans le chapitre 2) On déduit de (4.4.6) que $\hat{P}^{(n)}$ est un PDO d'ordre 0 et son symbole, nul en dehors de T^*I s'écrit

$$P^{(n)}(x, \xi) = \chi^2(x) \sum_{w \in \mathcal{W}_n} e^{(2\mathcal{V}+J)_{w_0,n}(x)} \frac{A_m^2(F_{w_0,n}(x, \xi))}{A_m^2(x, \xi)} + \mathcal{O}_n(\hbar) \quad (4.4.7)$$

où \mathcal{W}_n est l'ensemble des mots admissibles de longueur n et $\tilde{\mathcal{V}}_{w_0,n}(x)$ la somme de Birkhoff du potentiel effectif $\tilde{\mathcal{V}} = 2\Re V - \log |\mathcal{T}'|$ le long de la trajectoire associée à w_0,n . Dans (4.4.7) on a fait usage de la notation abrégée

$$F_{w_0,n} = F_{w_0,w_1} \circ \dots \circ F_{w_{n-1},w_n}$$

pour la composition des applications canoniques $F_{j,i} : T_x^*I_i \rightarrow T_{\phi_{j,i}(x)}^*I_j$. On pose

$$\log \theta_{(n)} := \sup_{x \in I, w \in \mathcal{W}_+} \frac{1}{n} (2\mathcal{V} + J)_{w_0,n}(x)$$

On cherche une borne supérieure au symbole $P^{(n)}(x, \xi)$. On considère pour cela les différentes trajectoires possibles $F_{w_0,n}(x, \xi)$:

4. Comme dans la preuve du théorème 4.6 sur le spectre discret de résonances, pour tout \hbar on peut approximer \hat{A}_m^{-1} par un opérateur proprement supporté afin que \hat{Q}_m soit bien défini sur le sous espace dense $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$.

1. Si $(x, \xi) \notin \mathcal{Z}_0 = I \times [-R, R]$ alors, du lemme 4.9, toutes les trajectoires s'éloignent de \mathcal{Z}_0 et on a,

$$\frac{A_m^2(F_{w_{0,n}}(x, \xi))}{A_m^2(x, \xi)} = \frac{A_m^2(F_{w_{0,n}}(x, \xi))}{A_m^2(F_{w_{1,n}}(x, \xi))} \cdots \frac{A^2(F_{w_{n-1,n}}(x, \xi))}{A^2(x, \xi)} \leq (\kappa^{-2m})^n \quad (4.4.8)$$

ainsi

$$P^{(n)}(x, \xi) \leq (\#\mathcal{W}_n) \theta_{(n)}^n (\kappa^{-2m})^n \leq (N\theta_{(n)}\kappa^{-2m})^n$$

car $\#\mathcal{W}_n \leq N^n$.

2. Si $(x, \xi) \in \mathcal{Z}_0$ par l'hypothèse de minimale captivité, au temps 1 un seul point au plus de l'ensemble $F(x, \xi)$ reste dans \mathcal{Z}_0 . Pour ceux qui quittent \mathcal{Z}_0 le raisonnement ci-dessus donne $\frac{A_m^2(F_{w_{0,n}}(x, \xi))}{A_m^2(x, \xi)} \leq (\kappa^{-2m})^{n-1}$ et pour le point exceptionnel on a toujours $\frac{A_m^2(F_{w_{0,n}}(x, \xi))}{A_m^2(x, \xi)} \leq 1$. Finalement

$$P^{(n)}(x, \xi) \leq \theta_{(n)}^n \left((\#\mathcal{W}_n - 1) (\kappa^{-2m})^{n-1} + 1 \right) \leq \theta_{(n)}^n \left((N\kappa^{-2m})^n \kappa^{2m} + 1 \right)$$

Pour tout $C > 1$, en choisissant m assez grand, il existe $n_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$

$$\sup_{(x, \xi)} \left| P^{(n)}(x, \xi) \right| \leq C\theta_{(n)}^n$$

Par Le théorème de L^2 -continuité (lemme 2.2), à la limite $\hbar \rightarrow 0$

$$\left\| \hat{P}^{(n)} \right\| \leq C\theta_{(n)}^n + \mathcal{O}_n(\hbar)$$

La décomposition polaire \hat{Q}_m^n donne alors

$$\left\| \hat{Q}_m^n \right\| \leq \left\| \left\| \hat{Q}_m^n \right\| \right\| = \sqrt{\left\| \hat{P}^{(n)} \right\|} \leq \left(C\theta_{(n)}^n + \mathcal{O}_n(\hbar) \right)^{1/2}$$

le rayon spectral de \hat{Q}_m satisfait à

$$r_s(\hat{Q}_m) \leq \left\| \hat{Q}_m^n \right\|^{1/n} \leq \left(C\theta_{(n)}^n + \mathcal{O}_n(\hbar) \right)^{1/(2n)} = C_{(n)} \sqrt{\theta_{(n)}} + \mathcal{O}_n(\hbar)$$

avec $C_{(n)} := C^{\frac{1}{2n}} \rightarrow_{n \nearrow \infty} 1$. Soit $\theta_\infty := \limsup_{n \rightarrow \infty} \theta_{(n)}$. En prenant la limite $\hbar \rightarrow 0$ puis $n \rightarrow \infty$ on obtient

$$r_s(\hat{Q}_m) \leq \sqrt{\theta_\infty} + o(1)$$

ce qui termine la preuve du théorème 4.18.

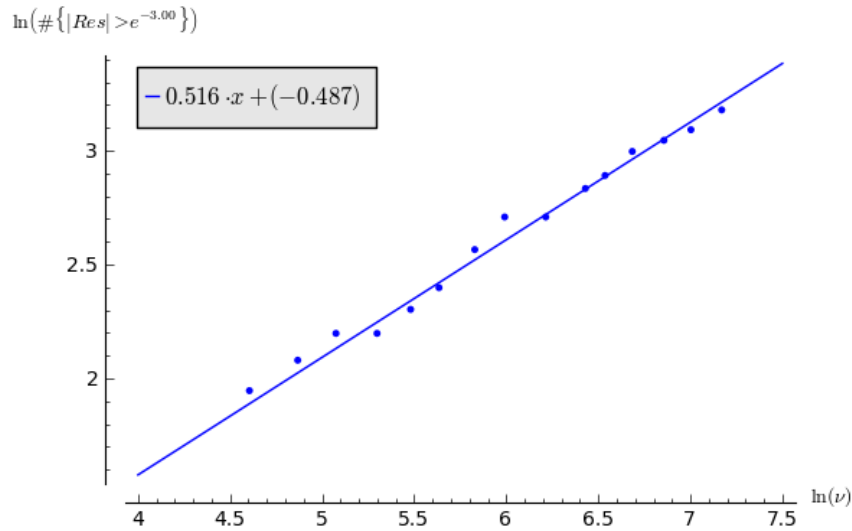


FIGURE 4.8 – Ici $\hbar^{-1} =: \nu$. Taux de croissance du nombre de résonances de l’opérateur de Gauss-Mayer tronqués aux deux premières branches. Comparée avec la fig.(4.2) qui donne une dimension de Hausdorff de l’ensemble captif K_2 proche de 0,5 ; cette figure suggère que la loi de Weyl (théorème 4.24) pourrait être optimale. *Image réalisée par Tobias Weich.*

4.5 Loi de Weyl fractale

Théorème 4.24. Loi de Weyl Fractale. *Lorsque la matrice de transition entrant dans la définition de l’application $\phi : I \rightarrow I$ est symétrique et si F est minimalement captive (def. 4.10), alors pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\delta > \dim_H(K)$ lorsque $\hbar \searrow 0$,*

$$\#\left\{ \lambda_i^{\hbar} \in \text{Res}(\hat{F}_{\hbar}) \mid \left| \lambda_i^{\hbar} \right| \geq \epsilon \right\} = \mathcal{O}\left(\hbar^{-\delta}\right) \tag{4.5.1}$$

Pour montrer ce résultat, le dernier de cette thèse, on cherche tout d’abord à caractériser précisément le comportement de la dynamique canonique (4.3.1) près de de l’ensemble captif $\tilde{K} \subset T^*I$. On construit alors une fonction de fuite décroissant strictement le long des trajectoires classiques et on applique les techniques de Helffer-Sjöstrand [HS86] pour en déduire le théorème 4.24 ci-dessus.

Dans la section suivante on commence par montrer que l’ensemble captif peut être vu comme la restriction à K d’une union de branches lisses au dessus de I .

4.5.1 Branches de l’ensemble captif \tilde{K}

Soit

$$\mathcal{W}_- := \left\{ (\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0) \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}; w_{\ell} \rightsquigarrow w_{\ell-1}, \forall \ell \leq -1 \right\}$$

l'ensemble des suite admissibles infinies vers la gauche⁵.

Proposition 4.25. *L'ensemble captif $\tilde{K} \subset T^*I$ défini en (4.3.4) peut être vu comme l'intersection*

$$\tilde{K} = \tilde{\mathcal{K}} \cap \{K \times \mathbb{R}\}$$

où

$$\tilde{\mathcal{K}} := \{(x, \zeta_w(x)); x \in I, w \in \mathcal{W}_-\} \quad (4.5.2)$$

est l'union de sections lisses de T^*I explicitement données, pour tout $w \in \mathcal{W}_-$ et $x \in I_{w_0}$, par

$$\zeta_w(x) = - \sum_{k \geq 1} (\tau \circ \phi_{w_{-k},0})'(x) \quad (4.5.3)$$

On a de plus une borne uniforme en w sur les variations de $\zeta_w : \forall \alpha \in \mathbb{N}, \exists C_\alpha > 0, \forall w \in \mathcal{W}_-, \forall x \in I, |(\partial_x^\alpha \zeta_w)(x)| \leq C_\alpha$.

Démonstration. Soit $w = (\dots, w_{-1}, w_0) \in \mathcal{W}_-$ et $x \in I_{w_0}$. Soit $R > 0$ tel que défini dans le lemme 4.9. On peut généraliser la définition (4.3.14) des intervalles $\mathcal{J}_{w,n}$ si l'on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F^{-n}(\phi_{w_{-n},0}(x) \times [-R; R]) = x \times \mathcal{J}_{w,n}(x) \subset T^*I. \quad (4.5.4)$$

Par contraction, les intervalles non vides $\mathcal{J}_{w,n}(x)$ forment une suite emboîtés convergeant vers un point

$$\zeta_w(x) = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{J}_{w,n}(x)$$

satisfaisant (4.5.2) par définition de K et \tilde{K} . Pour montrer que ζ_w correspond bien à (4.5.3) on compose F (4.3.1) le long de la trajectoire w . Cela donne

$$\begin{aligned} F_{w_{-n},0}^n : T_x^* I_{w_0} &\rightarrow T_{\phi_{w_{-n},0}(x)}^* I_{w_n} \\ \xi &\mapsto \phi'_{w_{-n},0}(x)^{-1} \cdot (\xi - \zeta_{w_{-n},0}(x)) \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

ce qui révèle la suite de sections

$$\zeta_{w_{-n},0}(x) := - \sum_{j=1}^n \phi'_{w_{-j},0}(x) \cdot \tau'(\phi_{w_{-j},0}(x)) = - \sum_{j=1}^n (\tau \circ \phi_{w_{-j},0})'(x) \in T_x^* I. \quad (4.5.6)$$

par contraction de $\phi : I \rightarrow I$, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$|\zeta_{w_{-n},0}(x) - \zeta_{w_{-n-k},0}(x)| \leq \theta^n \zeta_{\max}; \quad \zeta_{\max} := \|\tau'\|_\infty \frac{\theta}{1-\theta}, \quad (4.5.7)$$

montrant la convergence uniforme de la suite $(\zeta_{w_{-n},0})$ lorsque n augmente. De (4.5.5) on a

$$F^{-n}(\phi_{w_{-n},0}(x), \xi) = \left(x, \phi'_{w_{-n},0}(x) \cdot \xi + \zeta_{w_{-n},0}(x)\right),$$

5. Par rapport aux notations $w = (w_- | w_+) \in \mathcal{W}$ des sections précédentes on a inclut w_0 à la définition de w_- pour simplifier la suite.

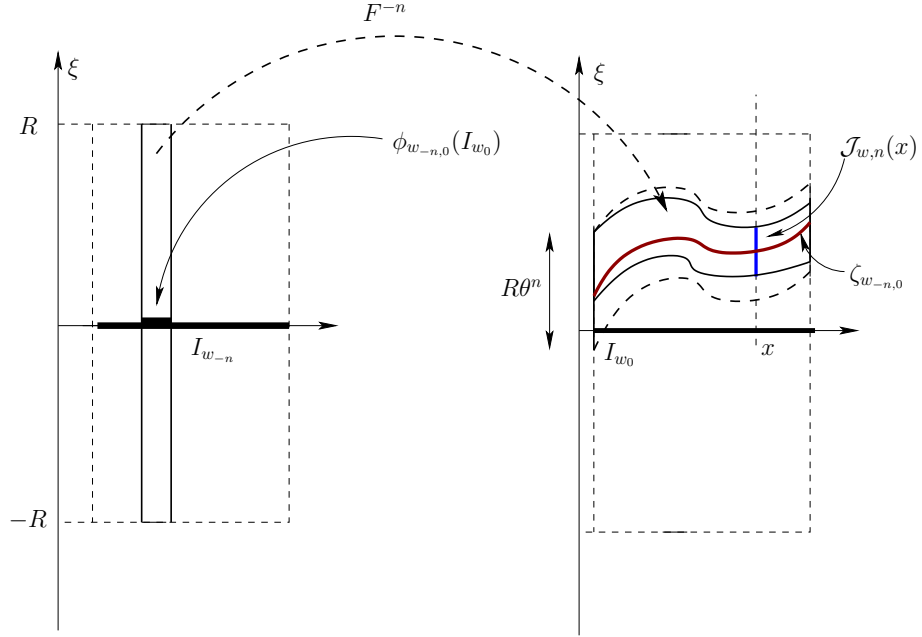


Figure 4.9: Illustration de la proposition 4.25 et de sa preuve.

ce qui montre que

$$\mathcal{J}_{w,n}(x) \subseteq [\zeta_{w-n,0}(x) - \theta^n R ; \zeta_{w-n,0}(x) + \theta^n R]$$

et on a bien $\zeta_w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{w-n,0}(x)$. Le fait que les sections ζ_w soit lisses est une application directe du lemme C.1 dans l'appendice. \square

Le lemme suivant améliore sensiblement l'estimation de fuite du lemme 4.9. Il nous sera utile pour construire une fonction de fuite bien adaptée à la dynamique classique.

Lemme 4.26. *Pour tout $x \in I$ on pose $\tilde{\mathcal{K}}(x) = \tilde{\mathcal{K}} \cap T_x^* I$. On note $d_v : T^* I \rightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction continue qui à tout (x, ξ) associe $\text{dist}(\xi, \tilde{\mathcal{K}}(x))$, la distance "verticale" de ξ à l'ensemble $\tilde{\mathcal{K}}$. Pour tout i , pour tout $(x, \xi) \in T^* I_i$ et pour tout j tel que $i \rightsquigarrow j$,*

$$d_v \circ F_{j,i}(x, \xi) \geq \theta^{-1} d_v(x, \xi)$$

La distance verticale à l'ensemble $\tilde{\mathcal{K}}$ augmente de façon contrôlée le long des trajectoires de F .

Démonstration. Soit $x \in I_i$, d'après la proposition 4.25, $\tilde{\mathcal{K}}(x) = \{(x, \zeta_w(x)); w \in \mathcal{W}_-\}$. Par conséquent

$$d_v(x, \xi) = \inf_{w \in \mathcal{W}_-} |\xi - \zeta_w(x)|$$

Si on note $(x', \xi') = F_{j,i}(x, \xi)$ alors, en utilisant (4.3.1) et (4.5.3), pour tout $w = (\dots w_{-2}, w_{-1}, j) \in \mathcal{W}_-$ on a

$$\xi' - \zeta_w(x') = \phi'_{j,i}(x)^{-1} (\xi - \zeta_{\mathcal{R}_i(w)}(x))$$

où $\mathcal{R}_i : (\dots w_{-2}, w_{-1}, j) \mapsto (\dots w_{-2}, w_{-1}, j, i) \in \mathcal{W}_-$. Ainsi

$$\inf_{w \in \mathcal{W}_-} |\xi' - \zeta_w(x')| \geq \theta^{-1} \inf_{w \in \mathcal{W}_-} |\xi - \zeta_{\mathcal{R}_i(w)}(x)| \geq \theta^{-1} \inf_{w \in \mathcal{W}_-} |\xi - \zeta_w(x)|$$

ce qui prouve le lemme. \square

4.5.2 La fonction de Fuite

Proposition 4.27. $\forall 1 < \kappa < \theta^{-1}, \forall m > 0, 0 \leq \mu < \frac{1}{2}$; il existe un symbole strictement positif $A_{m,\mu} \in S_{\mu}^{-m}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A_{m,\mu}^{-1} \in \hbar^{-m\mu} S_{\mu}^m(\mathbb{R}^2)$ décroissant strictement le long des trajectoires classiques de F :

pour tout $(x, \xi) \in T^*I_i$, si $d_v(x, \xi) \geq \kappa \hbar^{\mu}$, pour tout j tel que $i \rightsquigarrow j$,

$$\frac{A_{m,\mu} \circ F_{j,i}}{A_{m,\mu}}(x, \xi) \leq \kappa^{-m}, \quad (4.5.8)$$

et $\frac{A_{m,\mu} \circ F_{j,i}}{A_{m,\mu}} \leq 1$ partout dans T^*I . De plus

$$A_{m,\mu} \# A_{m,\mu}^{-1} - 1 \in \hbar^{1-2\mu} S_{\mu}^{-1}(\mathbb{R}^2) \quad (4.5.9)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.26, la fonction

$$(x, \xi) \mapsto \left(1 + \frac{d_v(x, \xi)}{\hbar^{\mu}}\right)^{-m}$$

satisfait à (4.5.8) pour tout $m > 0$ avec $\kappa = \frac{1+\theta}{2\theta} > 1$. La fonction d_v n'est cependant pas régulière, mais seulement C -Lipschitz, avec C dépendant de la norme maximale des différentielles de ζ^e (d'après (3.4.6)). On va la régulariser pour qu'elle soit contenue dans une classe de symboles.

d_v est définie sur $T^*I \subset \mathbb{R}^2$. On note \bar{d}_v un prolongement continu de d_v à \mathbb{R}^2 tel que $\bar{d}_v(x, \xi) \asymp |\xi|$, uniformément en (x, ξ) . Soit $0 \leq f \leq 1$ une fonction lisse de \mathbb{R}^2 supportée dans $B(0, \eta) \subset \mathbb{R}^2$, la boule de rayon $\eta > 0$ (η sera choisie en fonction de $1 < \kappa < \theta^{-1}$ dans la suite)

Pour tout $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$ on note

$$f_{\mu}(x, \xi) = \frac{1}{\hbar^{2\mu} \|f\|_{L^1}} f(\hbar^{-\mu} x, \hbar^{-\mu} \xi) \in S_{\mu}^{-\infty}(\mathbb{R}^2)$$

supportée sur $B(0, \eta \hbar^{\mu})$ et normalisée pour la norme L^1 . La fonction distance régularisée peut se construire comme

$$\delta_{\mu} := \bar{d}_v * f_{\mu}$$

δ_{μ} est alors un symbole dans $S_{\mu}^1(\mathbb{R}^2)$ et pour tout $(x, \xi) \in T^*I$

$$|\delta_{\mu}(x, \xi) - d_v(x, \xi)| \leq C \eta \hbar^{\mu}$$

Lemme 4.28. *Pour tout $1 < \kappa < \theta^{-1}$, pour tout $(x, \xi) \in T^*I_i$, si $d_v(x, \xi) \geq \hbar^\mu$, alors pour tout j tel que $i \rightsquigarrow j$, si on note $(x', \xi') = F_{j,i}(x, \xi)$*

$$\delta_\mu(x', \xi') \geq \kappa \delta_\mu(x, \xi) \quad (4.5.10)$$

Démonstration. Si $d_v(x, \xi) \geq \hbar^\mu$ alors $\delta_\mu(x, \xi) \geq (1 - C\eta) \hbar^\mu$ et en prendra soin de choisir $\eta < C^{-1}$. D'après le lemme 4.26,

$$\delta_\mu(x', \xi') + C\eta \hbar^\mu \geq d_v(x', \xi') \geq \theta^{-1} d_v(x, \xi) \geq \theta^{-1} (\delta_\mu(x, \xi) - C\eta \hbar^\mu)$$

Ainsi,

$$\delta_\mu(x', \xi') \geq \theta^{-1} (1 - C\eta(1 + \theta)) \delta_\mu(x, \xi)$$

dans la dernière inégalité, si η est choisit suffisamment petit on a (4.5.10). \square

On choisit pour finir un symbole $0 \leq \chi_\mu \leq 1$ dans la classe $S_\mu^{-\infty}(\mathbb{R}^2)$, égal à 1 sur le \hbar^μ -voisinage de K et supporté sur son $\kappa \hbar^\mu$ -voisinage. La fonction de fuite peut alors être construite en posant

$$A_{m,\mu} := \chi_\mu + \Omega_{\mu,m} (1 - \chi_\mu) \delta_\mu^{-m} \quad (4.5.11)$$

et $\Omega_{\mu,m} = \mathcal{O}(\hbar^{\mu m})$ est une constante choisie de sorte que $\Omega_{\mu,m} \delta_\mu^{-m} \leq 1$ lorsque $d_v(x, \xi) \geq \hbar^\mu$. Par construction $0 < A_{m,\mu} \leq 1$ est un symbole dans la classe $S_\mu^{-m}(\mathbb{R}^2)$ et son inverse appartient à la classe $\hbar^{-\mu m} S_\mu^m(\mathbb{R}^2)$. On distingue trois cas dans T^*I :

1. Si $d_v(x, \xi) \leq \hbar^\mu$, alors clairement $\frac{A_{m,\mu}(x', \xi')}{A_{m,\mu}(x, \xi)} \leq 1$.
2. Si $\hbar^\mu < d_v(x, \xi) \leq \kappa \hbar^\mu$, de (4.5.10) et par définition de χ_μ , $\chi_\mu(x', \xi') = 0$. De (4.5.11), on déduit

$$\begin{aligned} A_{m,\mu}(x, \xi) - A_{m,\mu}(x', \xi') &\geq \chi_\mu(x, \xi) + \Omega_{\mu,m} (1 - \chi_\mu(x, \xi) - \kappa^{-m}) \delta_\mu^{-m}(x, \xi) \\ &\geq 1 - \underbrace{\kappa^{-m} \Omega_{\mu,m} \delta_\mu^{-m}(x, \xi)}_{\leq 1} \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on a toujours $\frac{A_{m,\mu}(x', \xi')}{A_{m,\mu}(x, \xi)} \leq 1$.

3. Finalement, si $d_v(x, \xi) \geq \kappa \hbar^\mu$ alors par (4.5.10) et (4.5.11),

$$\frac{A_{m,\mu}(x', \xi')}{A_{m,\mu}(x, \xi)} \leq \kappa^{-m}.$$

Pour conclure la preuve de la proposition 4.27 et montrer (4.5.9) on utilise l'expression explicite du produit de Moyal [DS99] et de la fonction de fuite. \square

4.5.3 Fonction cut-off semiclassique

Dans la section 4.1.1 on a vu comme étendre l'opérateur de transfert $\hat{F} : \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$ en un opérateur $\hat{F}_\chi := \hat{F}\hat{\chi} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ à l'aide d'une fonction cut-off arbitraire $\chi \in \mathcal{C}_I^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur K . Pour montrer la loi de Weyl on choisit une fonction localisée dans un proche voisinage de K .

Soit K_{\hbar^μ} le \hbar^μ -voisinage de K . Pour tout $0 < \mu < \frac{1}{2}$, $K_{\hbar^\mu} \subset \phi(I)$ pour \hbar suffisamment petit. De plus

$$K_{\hbar^\mu} \Subset \mathcal{T}(K_{\hbar^\mu}) \subset I$$

et on peut construire une fonction χ_μ supportée sur $\mathcal{T}(K_{\hbar^\mu})$ et égale à 1 sur K_{\hbar^μ} . En tant que fonction sur \mathbb{R}^2

$$\tilde{\chi}_\mu : (x, \xi) \mapsto \chi_\mu(x) \quad (4.5.12)$$

est un symbole dans la classe $S_\mu^0(\mathbb{R}^2)$. On note $\hat{\chi}_\mu := \text{Op}_\hbar^w(\tilde{\chi}_\mu) \in OPS_\mu^0$ l'opérateur de multiplication par χ_μ et on s'intéresse dans la suite à

$$\hat{F}_{\hbar, \mu} := \hat{F}\hat{\chi}_\mu : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (4.5.13)$$

Le spectre de résonances de $\hat{F}_{\hbar, \mu}$ est le même que celui de \hat{F} car les distributions propres sont supportées sur K (cf. théorème 4.6).

4.5.4 Comptage de résonances

Grâce à (4.5.9) on peut par la procédure usuelle [EZ03, p. 67] construire un inverse pour $\text{Op}_\hbar^w(A_{m, \mu})$ dont le symbole principal est $A_{m, \mu}^{-1}$. Puisque $A_{m, \mu}$ est d'ordre m , pour tout $\hbar > 0$, les espaces de distributions

$$\mathcal{H}_\mu^{-m} := \text{Op}_\hbar^w(A_{m, \mu})^{-1}(L^2(\mathbb{R})) \quad (4.5.14)$$

sont des espaces de Hilbert vis à vis de la norme héritée de L^2 et coïncident en tend que sous espaces vectoriels avec $H^{-m}(\mathbb{R})$, mais possède une norme dépendant de \hbar et μ . Dans la suite on écrit

$$\hat{A}_{m, \mu} := \text{Op}_\hbar^w(A_{m, \mu}) \in OPS_\mu^{-m}$$

Le théorème 3.12 ce réduit essentiellement à l'affirmation :

Lemme 4.29. *Il existe $C > 0$, telle que pour tout $\epsilon > 0$, $0 \leq \mu < \frac{1}{2}$, m suffisamment grands, à la limite $\hbar \searrow 0$*

$$\#\left\{ \lambda_i^\hbar \in \sigma\left(\hat{F}_{\hbar, \mu}|_{\mathcal{H}_\mu^{-m}}\right) \mid \left| \lambda_i^\hbar \right| > \epsilon \right\} \leq \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Leb}\left\{ \tilde{K}_{C\hbar^\mu} \right\} (1 + o(1)), \quad (4.5.15)$$

où $\tilde{K}_{C\hbar^\mu}$ dénote le $C\hbar^\mu$ -voisinage de l'ensemble captif \tilde{K} et $\hat{F}_{\hbar, \mu}$ est l'opérateur défini en (4.5.13).

En effet, le spectre discret de $\hat{F}_{\hbar,\mu}|_{\mathcal{H}_\mu^{-m}}$ n'est autre que le spectre de résonances de \hat{F} , ce dernier indépendant de μ ou m . D'un autre côté la définition 3.11 de la dimension de Minkowski, donne

$$\text{Leb} \left\{ \tilde{K}_{C\hbar^\mu} \right\} = \mathcal{O} \left(\hbar^{\mu \text{codim}_M(K)} \right)$$

Puisque le membre de gauche de (4.5.15) ne dépend pas de μ on obtient, pour m assez grand et à la limite $\hbar \searrow 0$:

$$\# \left\{ \lambda_i^{(j)} \in \sigma \left(\hat{F}_{\hbar} |_{\mathcal{H}_\mu^{-m}} \right) \mid \left| \lambda_i^{(j)} \right| > \epsilon \right\} = \mathcal{O} \left(\hbar^{-\frac{1}{2} \dim_M(K)+0} \right)$$

Avec le théorème 4.15, l'hypothèse de minimale captivité de F implique le théorème 3.12.

Démonstration. (du lemme 4.29). $\hat{F}_{\hbar,\mu}|_{\mathcal{H}_\mu^{-m}}$ est par construction unitairement équivalent à

$$\hat{Q}_{m,\mu} := \hat{A}_{m,\mu} \hat{F}_{\hbar,\mu} \hat{A}_{m,\mu}^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}). \quad (4.5.16)$$

(modulo la subtilité technique pour rendre $\hat{A}_{m,\mu}^{-1}$ proprement supporté). On considère alors

$$\hat{P}_\mu := \hat{Q}_{m,\mu}^* \hat{Q}_{m,\mu} = \hat{A}_{m,\mu}^{-1} \hat{F}_{\hbar,\mu}^* \hat{A}_{m,\mu}^2 \hat{F}_{\hbar,\mu} \hat{A}_{m,\mu}^{-1}. \quad (4.5.17)$$

Par les théorèmes de composition et Egorov (lemmes 2.4 et 4.23), $\hat{P}_\mu \in OPS_\mu^0$ et son symbole, nul en dehors de T^*I , s'écrit⁶

$$P_\mu(x, \xi) = \chi^2(x) \sum_{i \rightsquigarrow j} e^{\tilde{V}(\phi_{j,i}(x))} \frac{A_{m,\mu}^2(F_{j,i}(x, \xi))}{A_{m,\mu}^2(x, \xi)} + \mathcal{O}(\hbar^{1-2\mu}).$$

De la proposition 4.27, on remarque que P_μ se décompose en

$$P_\mu = k_\mu + r_\mu$$

avec $k_\mu, r_\mu \in S_\mu^0(\mathbb{R}^2)$ réels et k_μ supporté sur $K_{C\hbar^\mu}$ pour une constante bien choisie $C > 1$. Le lemme 4.27 permet en outre de choisir r_μ t.q.

$$\|r_\mu\|_\infty \leq \underbrace{N e^{\max_I \tilde{V}(x)}}_{=:C} \kappa^{-2m} + \mathcal{O}(\hbar^{1-2\mu}).$$

En notant $\hat{k}_\mu := \text{Op}_\hbar^w(k_\mu)$ le PDO à trace associé à k_μ , la L^2 -continuité (lemme 2.2) permet de transposer cette décomposition au niveaux des opérateurs

$$\hat{P}_\mu = \underbrace{\hat{k}_\mu}_{\text{compact}} + \underbrace{\hat{r}_\mu}_{\text{borné}}, \quad \|\hat{r}_\mu\| \leq C \kappa^{-2m} + \mathcal{O}(\hbar^{1-2\mu})$$

6. Une subtilité subsiste du fait que $A_{m,\mu}^{-1}$ soit dans la classe $\hbar^{-\mu m} S_\mu^m(\mathbb{R}^2)$ et non $S_\mu^m(\mathbb{R}^2)$. En principe cela pourrait créer des termes d'erreur non négligeables dans le symbole de \hat{P}_μ . Néanmoins en écrivant explicitement le développement asymptotique dans le théorème d'Egorov on peut vérifier qu'il n'en est rien.

les deux opérateurs restants auto-adjoints. Du lemme 2.7 énoncé dans le chapitre 2 (Loi de Weyl)

$$\# \left\{ \lambda_{i,\mu}^{(j)} \in \sigma \left(\hat{k}_\mu \right) \mid \left| \lambda_{i,\mu}^{(j)} \right| > \epsilon \right\} \leq \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Leb} \{ K_{C\hbar\mu} \} (1 + o(1)). \quad (4.5.18)$$

Par perturbation (lemme A.2 dans l'appendice), pour une constante ϵ éventuellement plus grande, pour m suffisamment grand et $\hbar > 0$ suffisamment petit (4.5.18) reste vrai si l'on remplace \hat{k}_μ par \hat{P}_μ . En d'autres termes l'estimation (4.5.18) se transpose aux valeurs singulières de $\hat{Q}_{m,\mu}$. Le corollaire A.4 énoncé en appendice permet d'étendre ce résultat aux valeurs propres de $\hat{Q}_{m,\mu}$ dans la limite semiclassique ce qui achève la preuve. \square

4.6 Remarques diverses et perspectives

On reprend dans cette section certains questionnement soulevés dans le contexte fermé du chapitre 3 section 3.5.

4.6.1 Sur le profil de densité de résonances

Il apparaît clairement lors du calcul numérique que la densité du spectre de résonances décroît à partir d'un certain rayon jusqu'à s'annuler en la valeur du gap asymptotique -voir fig.(4.7). Pour comprendre l'origine de ce phénomène on reproduit la preuve du théorème 4.18 en utilisant la fonction de fuite $A_{m,\mu}$ et la fonction cut-off χ_μ construites à l'occasion de la preuve de la loi de Weyl (proposition 4.27 et eq.(4.5.12)). La restriction de $\hat{F}_{\hbar,\mu} := \hat{F}_{\hbar}\chi_\mu$ aux espaces de Hilbert 4.5.14 est unitairement équivalente à l'opérateur L^2 -continu $\hat{Q}_{m,\mu}$ défini en (4.5.16). Pour tout n , $\hat{P}_\mu^{(n)} := \left(\hat{Q}_{m,\mu}^* \right)^n \left(\hat{Q}_{m,\mu} \right)^n$ est un PDO dans la classe OPS_μ^0 et son symbole, nul en dehors de $K_{\hbar\mu} \times \mathbb{R}$ s'écrit

$$P_\mu^{(n)}(x, \xi) = \chi_\mu^2(x) \sum_{w \in \mathcal{W}_n} e^{(2\mathcal{V}+J)w_{0,n}(x)} \frac{A_{m,\mu}^2(F_{w_{0,n}}(x, \xi))}{A_{m,\mu}^2(x, \xi)} + \mathcal{O}_n(\hbar^{1-2\mu})$$

avec $\mathcal{V} = V - J$ le potentiel effectif. De part les propriétés de la fonction de fuite, hors du voisinage $\tilde{K}_{C\hbar\mu}$ de l'ensemble captif, ce symbole est borné par $(Ne^{\max(2\mathcal{V}+J)(x)}\kappa^{-m})^n$. Pour m assez grand ce terme tend vers 0 lorsque $n \nearrow \infty$. Depuis $\tilde{K}_{C\hbar\mu}$, sous l'hypothèse de minimale captivité, une seule trajectoire au plus est captée. On en déduit que

$$P_\mu^{(n)}(x, \xi) \leq \underbrace{e^{(2\mathcal{V}+J)w_{0,n}(x)}}_{\text{traj. captée}} + \kappa^m \left(Ne^{\max(2\mathcal{V}+J)}\kappa^{-m} \right)^n + \mathcal{O}_n(\hbar^{1-2\mu})$$

Finalement, pour m, n assez grands et à la limite $\hbar \searrow 0$ un seul terme contribue significativement au symbole de $\hat{P}_\mu^{(n)}$. Soit μ_{gibbs} la mesure de Gibbs sur K (cf.remarque 4.4) associée au potentiel $-J$. Le théorème de grandes déviations pour l'application $\mathcal{T} : I \rightarrow I$ s'énonce comme suit :

Lemme 4.30. [DK01] *Pour toute fonction f Hölder continue sur K , pour tout δ , lorsque $n \nearrow \infty$,*

$$\mu \left\{ x \in K \mid \left| \frac{1}{n} f_n(x) - \mu_{\text{gibbs}}(f) \right| > \delta \right\} \sim C e^{-H(\delta)n}$$

où $H(\delta)$ est une fonction positive strictement croissante en δ et $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \mathcal{T}^k$.

La mesure de Gibbs de l'ensemble déviant n'est malheureusement pas celle qui nous intéresse. Il nous faudrait plutôt une estimation (probablement trop forte pour être vraie) du type

Conjecture 4.31. *Pour toute fonction f Hölder continue sur K , Il existe $C, n_0 > 0$ tel que, pour tout ensemble mesurable $A \supseteq K$, pour tout $\delta > 0$, si $n \geq n_0$*

$$\text{Leb} \left\{ x \in A \mid \exists w \in \mathcal{W}_n \left| \frac{1}{n} f_{w_0, n}(x) - \mu_{\text{gibbs}}(f) \right| > \delta \right\} \leq C \cdot \text{Leb}(A) e^{-H(\delta)n}$$

Si cela est vrai alors le volume des points de $T^*\mathbb{R}$ tels que

$$P_\mu^{(n)}(x, \xi) \geq C' \exp(n\mu_{\text{gibbs}}(2\mathcal{V} + J))$$

serait borné par

$$C \cdot \text{Leb} \left(\tilde{K}_{Ch^\mu} \right) e^{-H(\delta)n}$$

A partir de là, en choisissant $n = \nu \frac{\log \hbar}{\log \theta_{\min}}$; où $\theta_{\min} = \min |\phi'_{j,i}(x)|$ et $\nu + \mu < \frac{1}{2}$ (temps d'Erhenfest) on déduirait, de la même façon que l'on a montré le lemme 4.29

$$\begin{aligned} \# \left\{ \lambda_i^\hbar \in \sigma \left(\hat{F}_{\hbar, \mu} |_{\mathcal{H}_\mu^{-m}} \right) \mid \left| \lambda_i^\hbar \right| > \frac{1}{2} \mu_{\text{gibbs}}(2\mathcal{V} + J) + \delta \right\} &\leq \\ &\leq \frac{C}{2\pi\hbar} \underbrace{e^{-H(\delta)n}}_{\hbar^{\nu \frac{H(\delta)}{\log \theta_{\min}}}} \underbrace{\text{Leb} \left\{ \tilde{K}_{Ch^\mu} \right\}}_{\hbar^{\mu \text{codim}_M \tilde{K}}} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

On énonce alors

Conjecture 4.32. *Sous l'hypothèse de minimale captivité, pour tout $\delta > 0$, à la limite $\hbar \searrow 0$*

$$\# \left\{ \lambda_i^\hbar \in \text{Res} \hat{F}_\hbar \mid \left| \lambda_i^\hbar \right| > \frac{1}{2} \mu_{\text{gibbs}}(2\mathcal{V} + J) + \delta \right\} = \mathcal{O} \left(\hbar^{\nu(\delta)-0} \right).$$

où, si on pose $H_\theta := H / |\log \theta_{\min}|$,

$$\nu(\delta) := -\dim_H K + \max_{0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}} \nu (H_\theta(\delta) - 2\text{codim}_H K).$$

En conséquence, si δ_0 est solution de $\frac{1}{2}H_\theta(\delta) - \text{codim}_H K = 0$, alors

$$\nu(\delta) = \begin{cases} -\dim_H K & \text{si } \delta \leq \delta_0 \\ \frac{1}{2}H_\theta(\delta) - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce genre de résultat est connu dans l'étude des résonances d'applications quantiques amorties (cf. section 3.5.3 à la fin du précédent chapitre).

4.6.2 Sur la minoration du nombre de résonances

Comme pour les applications fermées du chapitre précédent, la loi de Weyl est en bon accord avec les simulations numériques (on se réfère à la section 3.5.4 du chapitre 3 pour des exemples et références sur la loi de Weyl Fractale dans d'autres contextes). De plus avec l'hypothèse de minimale captivité, un argument heuristique sur le transport de paquet d'ondes suggère que l'opérateur de transfert est quasi-normal dans des espaces de distributions adaptées à la dynamique. Dans cette section on explique cet argument.

La restriction de $\hat{F}_{\hbar,\mu}$ (cf. (4.5.13)) aux espaces de Hilbert (4.5.14) est unitairement équivalente à l'opérateur L^2 -continu $\hat{Q}_{m,\mu}$ défini en (4.5.16). On cherche à contrôler, à la limite semiclassique, la norme L^2 du commutateur

$$\left[\hat{Q}_{m,\mu}^*, \hat{Q}_{m,\mu} \right] = \underbrace{\hat{Q}_{m,\mu}^* \hat{Q}_{m,\mu}}_{PDO} - \underbrace{\hat{Q}_{m,\mu} \hat{Q}_{m,\mu}^*}_{OIF}$$

où

$$\hat{Q}_{m,\mu} \hat{Q}_{m,\mu}^* = \hat{A}_{m,\mu} \hat{F}_{\hbar,\mu} \left(\hat{A}_{m,\mu}^{-1} \right)^2 \hat{F}_{\hbar,\mu}^* \hat{A}_{m,\mu}$$

n'est pas un PDO mais un OIF associé à l'application multi-valuée $F \circ F^{-1}$. Soit $\varphi_{q,p}^{\hbar} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ un paquet d'onde gaussien tel que défini en (2.2.5) dans le chapitre 2. On suppose par simplicité que le jacobien des applications $\phi_{j,i}$ est constant et égal à $\theta < 1$. On a (approximativement et à la limite $\hbar \searrow 0$) que, si $q \in I_i$

$$\hat{Q}_{m,\mu}^* \hat{Q}_{m,\mu} : \varphi_{q,p}^{\hbar} \rightarrow \left(\chi_\mu^2 \sum_{i \rightsquigarrow j} \frac{A_{m,\mu}^2(F_{j,i}(q,p))}{A_{m,\mu}^2(q,p)} \right) \theta \varphi_{q,p}^{\hbar}$$

Si (q,p) est hors du voisinage $\tilde{K}_{C\hbar\mu}$ de l'ensemble captif, tous les termes dans la parenthèse sont négligeables pour m assez grand. De même, dans

$$\hat{Q}_{m,\mu} \hat{Q}_{m,\mu}^* : \varphi_{q,p}^{\hbar} \rightarrow \theta \chi_\mu \circ \phi^{-1} \sum_{(q',p') \in F \circ F^{-1}(q,p)} \frac{A_{m,\mu}^2(q,p)}{A_{m,\mu}(q',p') A_{m,\mu}(F^{-1}(q,p))} \varphi_{q',p'}^{\hbar}$$

le préfacteur du membre de droite est négligeable loin de l'ensemble captif. D'un autre côté, sur \tilde{K} et grâce à l'hypothèse de minimale captivité 4.10, $\hat{Q}_{m,\mu} \hat{Q}_{m,\mu}^*$ se réduit essentiellement à un PDO, au sens où, pour tout $(q,p) \in \tilde{K}$

$$\hat{Q}_{m,\mu} \hat{Q}_{m,\mu}^* \varphi_{q,p}^{\hbar} \simeq \theta \varphi_{q,p}^{\hbar}$$

car (q,p) est le seul point restant proche de \tilde{K} parmi les points de $F \circ F^{-1}(q,p)$ (proposition 4.14) et $A_{m,\mu} = 1$ sur \tilde{K} . De plus,

$$\hat{Q}_{m,\mu}^* \hat{Q}_{m,\mu} \varphi_{q,p}^{\hbar} \simeq \theta \varphi_{q,p}^{\hbar}$$

Microlocalement, $[\hat{Q}_{m,\mu}^*, \hat{Q}_{m,\mu}]$ est donc négligeable loin de l'ensemble captif *et* sur l'ensemble captif. On ne peut pas contrôler aussi facilement la norme dans la zone transitoire et il est même probable que cela soit impossible tant que $A_{m,\mu}$ est dans une classe usuelle de symboles. Néanmoins cette difficulté semble purement technique, et en affinant l'analyse il reste un espoir de montrer que l'opérateur de transfert est quasi normal dans de bon espaces. le théorème de Huaxin Lin [Lin97], démontrant la conjecture selon laquelle une matrice presque normale est proche d'une matrice normale, permettrait de conclure à partir de l'estimation de Weyl obtenue pour les valeurs singulières dans la preuve du théorème 4.29.

Annexe A

Lemmes d'analyse fonctionnelle

Dans cette appendice, \mathcal{H} dénote un espace de Hilbert séparable et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs bornés agissant dans \mathcal{H} .

A.1 Une application du théorème Fredholm analytique

Lemme A.1. *Soit K un opérateur compact et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ t.q.*

$$r_s(B) \leq \epsilon \tag{A.1.1}$$

où r_s dénote le rayon spectral. Considérons $A := K + B$. Alors $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ admet du spectre discret de multiplicité finie dans le domaine $\mathbb{C} \setminus D_\epsilon$, $D_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \epsilon\}$.

Démonstration. Par hypothèse (A.1.1) la résolvante $R_B(z) := (B - z)^{-1}$ existe et est bornée pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon$. On cherche à construire un inverse pour $(A - z)$ lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon$. On a

$$(A - z) \circ (B - z)^{-1} = (B - z + K) \circ R_B(z) \tag{A.1.2}$$

$$= \mathbb{I} + K \circ R_B(z) = \mathbb{I} - f(z) \tag{A.1.3}$$

où $f(z) := -K \circ R_B(z)$. $f(z)$ est le produit d'un opérateur compact et d'un opérateur borné, donc est compact pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon$. En outre, $f : \mathbb{C} \setminus D_\epsilon \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est analytique, ce qui autorise le Théorème de Fredholm analytique (cf. [RS72] p. 201) à s'appliquer : soit $(\mathbb{I} - f(z))^{-1}$ existe pour aucun $z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon$, soit $(\mathbb{I} - f(z))^{-1}$ existe pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon \setminus \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est un ensemble discret de \mathbb{C} . Dans ce dernier cas les résidus aux pôles sont des opérateurs de rang fini. On peut éliminer le premier cas puisque, comme A est borné, $(A - z)^{-1}$ existe pour $|z|$ assez grand et

$$(\mathbb{I} - f(z))^{-1} = (B - z) \circ (A - z)^{-1}$$

Posons $C := (B - z)^{-1} \circ (\mathbb{I} - f(z))^{-1}$. par (A.1.2) et (A.1.3) :

$$(A - z) \circ C = \mathbb{I} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon \setminus \mathcal{S}$$

$(A - z)$ admet donc un inverse à droite dans $\mathbb{C} \setminus D_\epsilon \setminus \mathcal{S}$. De la même manière on peut construire un inverse à gauche :

$$C' \circ (A - z) = \mathbb{I} \forall z \in \mathbb{C} \setminus D_\epsilon \setminus \mathcal{S}'$$

Avec \mathcal{S}' un autre ensemble discret¹. Ainsi $R_A(z)$ existe et est bornée pour tout $z \in D_\epsilon \setminus \mathbb{C} \setminus D_\epsilon \setminus (\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$. En d'autres termes A admet du spectre discret dans $\mathbb{C} \setminus D_\epsilon$. \square

A.2 Perturbations auto-adjointes

Lemme A.2. Soit $K, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjoints avec K compact et $\|R\| \leq \delta$. On considère

$$P := K + R.$$

du lemme (A.1), le rayon spectral essentiel de P est borné par δ et si l'on note $\{\lambda_j(P)\}_{j \geq 0}$ (resp. $\{\lambda_j(K)\}_{j \geq 0}$) la suite ordonnée des valeurs propres de P (resp. de K) avec possiblement une multiplicité infinie sur le rayon spectral, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $C_K := 2\|K\| + \delta$,

$$\lambda_j(K)^2 + C_K \delta \geq \lambda_j(P)^2 \geq \lambda_j(K)^2 - C_K \delta. \quad (\text{A.2.1})$$

En conséquence, pour tout $\epsilon > 0$ assez grand

$$\#\{j \mid \lambda_j(P)^2 > \epsilon + C_K \delta\} \leq \#\{j \mid \lambda_j(K)^2 > \epsilon\}.$$

Démonstration. Par la formule du "min-max" [RS72]

$$\begin{aligned} \lambda_j(P)^2 &= \max_{U_j \subset \mathcal{H}; \dim U_j = j} \min_{u \in U_j \setminus 0} \frac{\langle P^2 u, u \rangle}{\|u\|^2} \\ &= \max_{U_j \subset \mathcal{H}; \dim U_j = j} \min_{u \in U_j \setminus 0} \frac{\|Ku\|^2 + \langle Qu, u \rangle}{\|u\|^2}, \end{aligned}$$

où $Q = KR + RK + R^2$. Ainsi

$$\lambda_j(P)^2 \geq \max_{U_j \subset \mathcal{H}; \dim U_j = j} \min_{u \in U_j \setminus 0} \frac{\|Ku\|^2}{\|u\|^2} - \|Q\| \geq \lambda_j(K)^2 - C_K \delta.$$

L'inégalité opposé se montre de la même manière. \square

A.3 Valeurs singulières d'opérateurs compacts

Considérons une famille $(P_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs compacts agissant dans \mathcal{H} . Pour tout P_ν on note $(\lambda_{j,\nu})_{j \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}$ la suite ordonnée de ses valeurs propres, en tenant compte de la multiplicité :

$$|\lambda_{1,\nu}| \geq |\lambda_{2,\nu}| \geq \dots$$

De même on définit $(\mu_{j,\nu})_{j \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^+$, la suite décroissante des valeurs singulières de P_ν -i.e. les valeurs propres de $\sqrt{P_\nu^* P_\nu}$.

1. $C' = (1 - g(z))^{-1} \circ (B - z)^{-1}$, avec $g(z) = -R_B(z) \circ K$. donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ if $[K, B] = 0$.

Lemme A.3. *Supposons qu'il existe une fonction $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ t.q. $N(\nu) \rightarrow \infty$ et $\mu_{N(\nu),\nu} \rightarrow 0$ lorsque ν croît. Alors $\forall C > 1$, $|\lambda_{[C \cdot N(\nu)],\nu}| \rightarrow_{\nu \rightarrow \infty} 0$.*

Corollaire A.4. *Soit $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ comme dans le lemme A.3. Si $\forall \epsilon > 0$, il existe $A_\epsilon \geq 0$ t.q. $\forall \nu \geq A_\epsilon$; $\#\{j \in \mathbb{N}^* \mid \mu_{j,\nu} > \epsilon\} < N(\nu)$, alors pour tout $C > 1$, $\epsilon > 0$ il existe $B_{C,\epsilon} \geq 0$ t.q.*

$$\forall \nu \geq B_{C,\epsilon}; \#\{j \in \mathbb{N}^* \mid |\lambda_{j,\nu}| > \epsilon\} \leq [C \cdot N(\nu)]. \quad (\text{A.3.1})$$

Démonstration. (Du corollaire A.4). Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang A_ϵ au delà duquel $\#\{j \in \mathbb{N}^* \mid \mu_{j,\nu} > \epsilon\} < N(\nu)$ cela implique que $\mu_{N(\nu),\nu} \rightarrow_{\nu \rightarrow \infty} 0$. Du lemme A.3, $\forall C > 1$, $|\lambda_{[C \cdot N(\nu)],\nu}| \rightarrow_{\nu \rightarrow \infty} 0$, ce qui implique (A.3.1). \square

Démonstration. (Du lemme A.3) La relation principale entre les valeurs propres et valeurs singulières est donnée par les inégalités de Weyl (cf. [GGK00] p. 50 pour une preuve) :

$$\prod_{j=1}^k \mu_{j,\nu} \leq \prod_{j=1}^k |\lambda_{j,\nu}|; \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (\text{A.3.2})$$

Notons $m_{j,\nu} := -\log(\mu_{j,\nu})$, $l_{j,\nu} := -\log(|\lambda_{j,\nu}|)$ afin de définir $M_{k,\nu} := \sum_{j=1}^k m_{j,\nu}$, et $L_{k,\nu} := \sum_{j=1}^k l_{j,\nu}$. Les inégalités de Weyl (A.3.2) s'écrivent alors comme :

$$M_{k,\nu} \leq L_{k,\nu}; \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Les suites $(l_{j,\nu})_{j \geq 1}$ et $(m_{j,\nu})_{j \geq 1}$ étant croissantes on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k \cdot l_{k,\nu} \geq L_{k,\nu}$, and for any $k, K \in \mathbb{N}^*$,

$$M_{k+K,\nu} \geq K \cdot m_{k,\nu}. \quad (\text{A.3.3})$$

Supposons que $\mu_{N(\nu),\nu} \rightarrow 0$ (donc $m_{N(\nu),\nu} \rightarrow \infty$) lorsque $\nu \rightarrow \infty$ et choisissons une constante $C > 1$. Par (A.3.3) on a que :

$$M_{[C \cdot N(\nu)],\nu} \geq ([C \cdot N(\nu)] - N(\nu)) \cdot m_{N(\nu),\nu}, \quad (\text{A.3.4})$$

comme $l_{[C \cdot N(\nu)],\nu} \geq \frac{1}{[C \cdot N(\nu)]} \cdot L_{[C \cdot N(\nu)],\nu} \geq \frac{1}{[C \cdot N(\nu)]} M_{[C \cdot N(\nu)],\nu}$, de (A.3.4) on obtient

$$l_{[C \cdot N(\nu)],\nu} \geq \frac{[C \cdot N(\nu)] - N(\nu)}{[C \cdot N(\nu)]} \cdot m_{[CN(\nu)],\nu}. \quad (\text{A.3.5})$$

Puisque $[C \cdot N(\nu)] - N(\nu) > 0$ pour ν assez grand (A.3.5) prouve le lemme. \square

Annexe B

Théorème de Ruelle

Dans cette section on va prouver l'existence du spectre de résonances de l'opérateur l'opérateur de transfert de Ruelle

$$\hat{F} : \varphi \mapsto \varphi \circ T, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X),$$

associé à une application expansive $T : X \rightarrow X$ telle que définie en 1.2. Suivant Faure-Roy-Sjöstrand [FRS08], on revisite ainsi un résultat classique de Ruelle [Rue86] en utilisant la théorie des PDOs. Le théorème d'Egorov énoncé dans le chapitre 2 permet d'interpréter \hat{F} comme un Opérateur Intégral de Fourier (OIF) associé à l'application canonique N -valuée sur le cotangent

$$F_\epsilon : \begin{array}{ccc} T_x^* X & \rightarrow & T_{x_\epsilon}^* X \\ \xi & \mapsto & {}^t D_{x_\epsilon} T \cdot \xi \end{array} ; \epsilon = 1, \dots, N \quad (\text{B.0.1})$$

où $\{x_\epsilon\}_{\epsilon=1}^N = T^{-1}(x)$ dénote les N antécédents du point $x \in X$. Cette dynamique effective est très simple puisque la section nulle $\{\xi = 0\} \simeq X$ est le seul ensemble invariant qui soit compact (ensemble captif). Cette propriété élémentaire est centrale dans la preuve du théorème de Ruelle.

\hat{F} s'étend continûment à $L^2(X, m) =: L^2(X)$ et son adjoint n'est autre que l'opérateur de Perron-Frobenius :

$$\left(\hat{F}^* \varphi\right)(x) = \sum_{y \in T^{-1}\{x\}} |\det D_y T|^{-1} \varphi(y).$$

Ce dernier permet de définir l'action de \hat{F} sur les distributions

$$\left(\hat{F} \alpha\right)(\bar{\varphi}) := \alpha\left(\overline{\hat{F}^* \varphi}\right); \alpha \in \mathcal{D}'(X); \varphi \in \mathcal{C}^\infty(X).$$

Définition B.1. [Tay96a] Les espaces de Sobolev, notés $H^{-m}(X)$, $m \in \mathbb{R}$ et définis par :

$$H^{-m}(X) := \text{Op}^w(A_m)^{-1}(L^2(X)), \quad (\text{B.0.2})$$

où $\text{Op}^w := \text{Op}_1^w$ définie en (2.1.1) et $A_m \in S_0^{-m}(T^*X)$ est le symbole borné d'ordre $-m$

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &= 1 && \text{si } \|\xi\| \leq 1 \\ &= \|\xi\|^{-m} && \text{si } \|\xi\| \geq 1 + \eta \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

avec $\eta > 0$ fixé mais arbitrairement petit ; sont (par Plancherel), constitués de distributions (ou de fonctions continues si $m < d$) dont les coefficients de Fourier ne croissent pas plus vite que $\|\xi\|^\alpha$, avec $\alpha < m - \frac{d}{2}$. Munis du produit scalaire

$$\langle \psi, \varphi \rangle_{H^{-m}} := \langle \text{Op}^w(A_m)\psi, \text{Op}^w(A_m)\varphi \rangle_{L^2}$$

les espaces $H^{-m}(X)$ sont des espaces de Hilbert. De plus, pour tout $m' < m$, $H^{-m'}(X)$ est un sous-espace vectoriel dense de $H^{-m}(X)$.

Théorème B.2. [Rue86] $\forall m$, \hat{F} laisse invariant $H^{-m}(X)$. De plus $\hat{F}|_{H^{-m}}$ est à spectre discret hors du disque de rayon $r_m = \lambda^{-m}(N/\lambda^d)^{1/2}$. Les valeurs propres hors de ce disque, ainsi que leur espaces propres respectifs, ne dépendent pas de m et définissent les résonances de Ruelle de \hat{F} .

Démonstration. Considérons l'opérateur

$$\hat{Q}_m := \text{Op}^w(A_m)\hat{F}\text{Op}^w(A_m)^{-1}.$$

Montrer que \hat{F} laisse invariant $H^{-m}(X)$ revient à montrer que \hat{Q}_m est L^2 -continu. On introduit

$$\hat{P} := \hat{Q}_m^* \hat{Q}_m = \text{Op}^w(A_m)^{-1} \underbrace{\hat{F}^* \text{Op}^w(A_m)^2 \hat{F}}_{=: \hat{B}} \text{Op}^w(A_m)^{-1}. \quad (\text{B.0.4})$$

Par le théorème d'Egorov (lemme 2.11) l'opérateur \hat{B} qui apparaît dans \hat{P} est un PDO d'ordre $-2m$. Par composition (lemme 2.4) \hat{P} est un PDO positif d'ordre 0 donc borné. La décomposition polaire (cf. [GGK00]) de \hat{Q}_m donne

$$\hat{Q}_m = \hat{U} \sqrt{\hat{P}},$$

où \hat{U} est un unitaire. \hat{Q}_m est donc continu. De plus le symbole principal de \hat{P} s'écrit

$$P(x, \xi) := \sum_{\epsilon=1}^N |\det D_{x_\epsilon} T|^{-1} \frac{A_m^2(F_\epsilon(\xi))}{A_m^2(\xi)},$$

borné par $r_m^2 = (N \cdot \lambda^{-d}) \lambda^{-2m}$ hors de la boule $\{\|\xi\| = 1\}$. Le théorème de L^2 -continuité (corollaire 2.1.5) donne alors, pour tout $\epsilon > 0$

$$\hat{P} = \hat{k}_\epsilon + \hat{r}_\epsilon, \quad (\text{B.0.5})$$

où \hat{k}_ϵ est compact et $\|\hat{r}_\epsilon\| \leq r_m^2 + \epsilon$. La décomposition polaire implique un résultat similaire pour \hat{Q}_m en remplaçant r_m^2 par r_m . Par le théorème Fedholm analytique (lemme A.1) cela montre que \hat{Q}_m est à spectre discret hors du domaine spectral $\{|z| > r_m\}$.

Montrons que ce spectre ne dépend pas de m . Soit $m' < m$, alors $H^{-m'}(X)$ est un sous espace vectoriel dense de $H^{-m}(X)$. Soit $\epsilon > r_{m'}$. $\hat{F}|_{H^{-m}}$ et $\hat{F}|_{H^{-m'}}$ ont un spectre discret dans le domaine $\{|z| \geq \epsilon\}$. Comme la restriction de $\hat{F}|_{H^{-m}}$ à $H^{-m'}(X)$ coïncide avec $\hat{F}|_{H^{-m'}}$ on a directement que toute valeur propre de $\hat{F}|_{H^{-m'}}$ est valeur propre de $\hat{F}|_{H^{-m}}$. Appelons $\hat{\pi}_m$ et $\hat{\pi}_{m'}$ les projecteurs spectraux (de rang fini) associés respectivement à $\hat{F}|_{H^{-m}}$ et $\hat{F}|_{H^{-m'}}$ sur le domaine spectral $\{|z| \geq \epsilon\}$. On vient de montrer que

$$\hat{\pi}_m|_{H^{-m'}} = \hat{\pi}_{m'}.$$

Pour qu'il existe une valeur propre de $\hat{F}|_{H^{-m}}$ dans $\{|z| \geq \epsilon\}$ qui ne soit pas valeur propre de $\hat{F}|_{H^{-m'}}$ il doit exister un élément $\psi \in H^{-m}(X)$ dans l'image $\text{Im} \hat{\pi}_m$ de $\hat{\pi}_m$ mais hors de $\text{Im} \hat{\pi}_{m'}$. Comme $H^{-m'}(X)$ est dense dans $H^{-m}(X)$ il existe une suite $\phi_i \in H^{-m'}(X) \rightarrow \psi$. On peut décomposer $\phi_i = \psi_i + \theta_i$ où $\psi_i \in \text{Im} \hat{\pi}_{m'}$ et $\theta_i \in \ker \hat{\pi}_{m'}$. Par continuité de $\hat{\pi}_m$ on doit avoir

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\pi}_m(\phi_i) = \psi$$

mais comme $\hat{\pi}_{m'}$ et $\hat{\pi}_m$ coïncident sur $H^{-m'}(X)$ cela peut s'écrire

$$\psi = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi_i; \psi_i \in \text{Im} \hat{\pi}_{m'}.$$

Or $\text{Im} \hat{\pi}_{m'}$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc ψ est nécessairement dans $\text{Im} \hat{\pi}_{m'}$. \square

Annexe C

Estimations de dérivées d'applications contractantes

On considère une famille de $\{\phi_\ell\}_{\ell=1}^N$ de N applications $\phi_\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\theta < 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout ℓ ,

$$|\phi'_\ell(x)| \leq \theta.$$

On suppose de plus qu'il existe une borne uniforme pour chaque ordre de dérivation :

$$\forall \alpha, \exists C_\alpha; \forall x \in \mathbb{R}, |\phi_\ell^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha.$$

On note $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des mots de longueur infinie $w = \ell_1 \ell_2 \dots \ell_n \dots$ où $\ell_i \in \{1, \dots, N\}$. On écrira $w_{1,n}$ la troncation

$$\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n$$

du mot w à la n -ème lettre. On s'intéresse pour tout $w \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}$ et pour tout n , à la composition

$$\phi_{w_{1,n}} := \phi_{\ell_1} \circ \phi_{\ell_2} \circ \dots \circ \phi_{\ell_n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

On va prouver l'estimation suivante

Lemme C.1. $\forall \alpha, \exists C_\alpha$ tel que, pour tout mot $w \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}$, pour tout n et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\phi_{w_{1,n}}^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha \theta^n$.

Corollaire C.2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. $\forall \alpha, \exists C_\alpha$ tel que, pour tout mot $w \in \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}$, pour tout n et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|(\varphi \circ \phi_{w_{1,n}})^{(\alpha)}(x)| \leq C_\alpha \theta^n$.

Démonstration. On procède par récurrence forte. On choisit un mot w et on note $u_n^{(\alpha)}$ pour $\left\| \phi_{w_{1,n}}^{(\alpha)} \right\|_\infty$. Le lemme est vrai ssi, $\forall n, \alpha$,

$$u_n^{(\alpha)} \leq C_\alpha \theta^n$$

avec C_α indépendant de w .

Par hypothèse $u_n^{(1)} \leq \theta^n$. De plus, en écrivant $\phi_{w_1, n+1} = \phi_{w_1, n} \circ \phi_{\ell_{n+1}}$ on obtient

$$\underbrace{\phi_{w_1, n+1}''}_{u_{n+1}^{(2)}} = \phi_{\ell_{n+1}}'' \underbrace{\left(\phi_{w_1, n}' \circ \phi_{\ell_{n+1}} \right)}_{\theta^n} + \left(\phi_{\ell_{n+1}}' \right)^2 \underbrace{\phi_{w_1, n}'' \circ \phi_{\ell_{n+1}}}_{u_n^{(2)}}$$

d'où, pour tout $n > 1$,

$$u_{n+1}^{(2)} \leq u_1^{(2)} \theta^n + u_n^{(2)} \theta^2 \Rightarrow u_n^{(2)} \leq \frac{u_1^{(2)}}{1 - \theta} \theta^{n-1}.$$

En choisissant $C_1 = 1$ et $C_2 := \max \left\| \phi_\ell'' \right\|_\infty / \theta(1 - \theta)$ on a l'estimation du lemme pour $\alpha = 1$ et 2.

On suppose le lemme vrai pour tout ordre de dérivation inférieur à $\alpha > 2$. On écrit une fois de plus $\phi_{w_1, n+1}$ comme $\phi_{w_1, n} \circ \phi_{\ell_{n+1}}$. La formule de *Faa di Bruno* ([Tre09] p. 109) donne

$$\begin{aligned} \underbrace{\phi_{w_1, n+1}^{(\alpha)}}_{u_{n+1}^{(\alpha)}} &= \sum_{l=1}^{\alpha-1} \underbrace{\phi_{w_1, n}^{(l)} \circ \phi_{\ell_{n+1}}}_{u_n^{(l)}} \sum_r C_r \underbrace{\left(\phi_{\ell_{n+1}}' \right)^{r_1} \dots \left(\phi_{\ell_{n+1}}^{(\alpha)} \right)^{r_\alpha}}_{\text{unif. borné p.r. à } \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}^*}} + \dots \\ &\dots + \underbrace{\left(\phi_{\ell_{n+1}}' \right)^\alpha}_{\theta^\alpha} \underbrace{\phi_{w_1, n}^{(\alpha)} \circ \phi_{\ell_{n+1}}}_{u_n^{(\alpha)}} \end{aligned}$$

où la somme est prise sur $r \in \mathbb{N}^\alpha$ t.q.

$$r_1 + \dots + r_\alpha = l$$

et

$$r_1 + 2r_2 + \dots + \alpha r_\alpha = \alpha$$

Par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1}^{(\alpha)} \leq C'_\alpha \theta^n + u_n^{(\alpha)} \theta^\alpha \leq C'_\alpha \theta^n + u_n^{(\alpha)} \theta^2$$

ce qui donne comme précédemment

$$u_n^{(\alpha)} \leq \frac{\theta^{-1}}{1 - \theta} \max \left\{ C'_\alpha, \max \left\| \phi_\ell^{(\alpha)} \right\|_\infty \right\} \theta^n =: C_\alpha \theta^n$$

ce qui prouve le lemme. Le corollaire se montre en appliquant la formule de *Faa di Bruno* à $\varphi \circ \phi_{w_1, n}$ et en invoquant le lemme. \square

Bibliographie

- [AF91] R. Adler and L. Flatto. Geodesic flows, interval maps, and symbolic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 25(2) :229–334, 1991.
- [Ana10] N. Anantharaman. Spectral deviations for the damped wave equation. *Geom. Funct. Anal.*, 20(3) :593–626, 2010.
- [Arn76] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [Arn12] J.F. Arnoldi. Fractal weyl law for skew extensions of expanding maps. *Nonlinearity*, 25 :1671–1693, 2012.
- [Bal00] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*. Singapore : World Scientific, 2000.
- [BG80] M. Brin and M. Gromov. On the ergodicity of frame flows. *Invent. Math.*, 60(1) :1–7, 1980.
- [BH10] J. F. Bony and D. Häfner. The semilinear wave equation on asymptotically Euclidean manifolds. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(1) :23–67, 2010.
- [BKL02] M. Blank, G. Keller, and C. Liverani. Ruelle-Perronn-Frobenius spectrum for Anosov maps. *Nonlinearity*, 15 :1905–1973, 2002.
- [Bor07] D. Borthwick. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, volume 256 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007.
- [Bri75] M. I. Brin. Topological transitivity of a certain class of dynamical systems, and flows of frames on manifolds of negative curvature. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(1) :9–19, 1975.
- [BS02] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [BT] V. Baladi and M. Tsujii. Dynamical determinants and spectrum for hyperbolic diffeomorphisms. *Probabilistic and Geometric Structures in Dynamics, K. Burns, D. Dolgopyat and Ya. Pesin (eds), Contemp. Math. (Amer. Math. Soc.), Volume in honour of M. Brin's 60th birthday. To appear. <http://arxiv.org/abs/math/0606434>*.
- [BT07] V. Baladi and M. Tsujii. Anisotropic Hölder and Sobolev spaces for hyperbolic diffeomorphisms. *Ann. Inst. Fourier*, 57 :127–154, 2007.

- [CBF] C. Cohen-Tanoudji, B. Du, and F. Lalo. *Mécanique quantique*.
- [DK01] M. Denker and M. Kesseböhmer. Thermodynamic formalism, large deviation, and multifractals. In *Stochastic climate models (Chorin, 1999)*, volume 49 of *Progr. Probab.*, pages 159–169. Birkhäuser, Basel, 2001.
- [DM98] D. Dolgopyat and P. Mark. Addendum to : “Periodic orbits and dynamical spectra” [Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), no. 2, 255–292 ; MR1619556 (2000h :37031)] by V. Baladi. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(2) :293–301, 1998.
- [Dol98] D. Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :357–390, 1998.
- [Dol02] D. Dolgopyat. On mixing properties of compact group extensions of hyperbolic systems. *Israel J. Math.*, 130 :157–205, 2002.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit*. Cambridge University Press. London Mathematical Society Lecture Notes, Vol. 268, 1999.
- [Dui73] Duistermaat. *Fourier integral operators*. 1973.
- [dV02] Y. Colin de Verdière. *Méthodes semi-classiques et théorie spectrale. Book in progress*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~ycolver/>. 2002.
- [EZ03] L. Evans and M. Zworski. *Lectures on semiclassical analysis*. <http://math.berkeley.edu/~zworski>, 2003.
- [Fal95] K. J. Falconer. On the Minkowski measurability of fractals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(4) :1115–1124, 1995.
- [Fal97] K. Falconer. *Techniques in fractal geometry*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [Fau07] F. Faure. Prequantum chaos : Resonances of the prequantum cat map. *Journal of Modern Dynamics*, 1(2) :255–285, 2007.
- [Fau11] F. Faure. Semiclassical origin of the spectral gap for transfer operators of partially expanding maps. *Nonlinearity*, 24 :1473–1498, 2011.
- [Fol88] G. Folland. *Harmonic Analysis in phase space*. Princeton University Press, 1988.
- [FRS08] F. Faure, N. Roy, and J. Sjöstrand. A semiclassical approach for anosov diffeomorphisms and ruelle resonances. *Open Math. Journal*, 1 :35–81, 2008.
- [FS11] F. Faure and J. Sjöstrand. Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows. *Comm. Math. Phys.*, 308(2) :325–364, 2011.
- [GGK00] I. Gohberg, S. Goldberg, and N. Krupnik. *Traces and Determinants of Linear Operators*. Birkhauser, 2000.
- [Gil74] R. Gilmore. *Lie groups, Lie Algebras, and Some of their Applications*. 1974.
- [GL05] S. Gouzel and C. Liverani. Banach spaces adapted to Anosov systems. *Ergodic Theory and dynamical systems*, 26 :189–217, 2005.

- [GLZ04] L. Guillope, K. Lin, and M. Zworski. The Selberg zeta function for convex co-compact. Schottky groups. *Comm. Math. Phys.*, 245(1) :149–176, 2004.
- [GS84] V. Guillemin and S. Sternberg. *Symplectic Techniques in Physics*. 1984.
- [GS94] A. Grigis and J. Sjöstrand. *Microlocal analysis for differential operators*, volume 196 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. An introduction.
- [HJ00] G.A. Hagedorn and A. Joye. Exponentially accurate semiclassical dynamics : Propagation, localization, Ehrenfest times, scattering, and more general states. *Ann. Henri Poincaré*, 1 :837–883, 2000.
- [Hör85] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*, volume 274 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Pseudodifferential operators.
- [HS86] B. Helffer and J. Sjöstrand. Résonances en limite semi-classique. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (24-25) :iv+228, 1986.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1995.
- [KD12] Dyatlov S. Kiril D. Fractal weyl laws for asymptotically hyperbolic manifolds. *arXiv :1206.2255v1 [math.AP]*, 2012.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [Kif94] Y. Kifer. Large deviations, averaging and periodic orbits of dynamical systems. *Comm. Math. Phys.*, 162(1) :33–46, 1994.
- [KR04] G. Keller and H. H. Rugh. Eigenfunctions for smooth expanding circle maps. *Nonlinearity*, 17(5) :1723–1730, 2004.
- [LE10] D. L. Shepelyansky L. Ermann, A. D. Chepelianskii. Fractal weyl law for linux kernel architecture. *arXiv :1005.1395v3 [cs.CE]*, 2010.
- [Ler10] N. Lerner. *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, volume 3 of *Pseudo-Differential Operators. Theory and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [Lin97] H Lin. Almost commuting selfadjoint matrices and applications. In *Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995)*, volume 13 of *Fields Inst. Commun.*, pages 193–233. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [Liv96] C. Liverani. Central limit theorem for deterministic systems. In *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, volume 362 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 56–75. Longman, Harlow, 1996.
- [Liv04] C. Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [Liv05] C. Liverani. Fredholm determinants, anosov maps and ruelle resonances. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 13(5) :1203–1215, 2005.

- [LL65] E.M. Lifshitz L.D. Landau. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, 1965.
- [Mar02] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext. New York, NY : Springer, 2002.
- [Mat95] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in euclidian spaces*. Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge, 1995.
- [May91] D. H. Mayer. Continued fractions and related transformations. In *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, Oxford Sci. Publ., pages 175–222. Oxford Univ. Press, New York, 1991.
- [MCR93] S. Gutt M. Cahen and J. Rawnsley. Quantization of kahler manifold ii. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 337 :73–98, 1993.
- [MFT05] M. Nicol M. Field, I. Melbourne and A. Török. Statistical properties of compact group extensions of hyperbolic flows and their time-one maps. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 12-1 :76, 2005.
- [MM87] R. R. Mazzeo and R. B. Melrose. Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, 75(2) :260–310, 1987.
- [MT02] I. Melbourne and A. Török. Central limit theorems and invariance principles for time-one maps of hyperbolic flows. *Commun. Math. Phys*, 229 :57, 2002.
- [Nau09] F. Naud. Entropy and decay of correlations for real analytic semi-flows. *Ann. Henri Poincaré*, 10 :429–451, 2009.
- [Nau11] F. Naud. Rates of mixing for compact extensions of expanding maps. *In progress*, 2011.
- [Non08] S. Nonnenmacher. Some open questions in 'wave chaos'. *Nonlinearity*, 21(8), 2008.
- [NZ07] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Distribution of resonances for open quantum maps. *Comm. Math. Phys.*, 269(2) :311–365, 2007.
- [NZ09] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Quantum decay rates in chaotic scattering. *Acta Math.*, 203(2) :149–233, 2009.
- [Per86] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*. Springer-Verlag., 1986.
- [Pol99] M. Pollicott. On the mixing of Axiom A attracting flows and a conjecture of Ruelle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(2) :535–548, 1999.
- [PP90] W. Parry and M Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188) :268, 1990.
- [PY98a] M. Pollicott and M. Yuri. *Dynamical systems and ergodic theory*, volume 40 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [PY98b] M. Pollicott and M. Yuri. *Dynamical Systems and Ergodic theory*. Cambridge University Press, 1998.

- [RS72] M. Reed and B. Simon. *Mathematical methods in physics, vol I : Functional Analysis*. Academic press, New York, 1972.
- [Rue] D. Ruelle. *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of classical equilibrium. Statistical mechanics. With a foreword by Giovanni Gallavotti*.
- [Rue86] D. Ruelle. Locating resonances for axiom A dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 44 :281–292, 1986.
- [Rug92] H. H. Rugh. The correlation spectrum for hyperbolic analytic maps. *Nonlinearity*, 5(6) :1237–1263, 1992.
- [Rug99] H. H. Rugh. Intermittency and regularized Fredholm determinants. *Invent. Math.*, 135(1) :1–24, 1999.
- [Sch09] E. Schenck. *Systèmes quantiques ouverts et méthodes semi-classiques*. 2009. Thèse –Université Pierre et Marie Curie.
- [Ser86] C. Series. Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 6(4) :601–625, 1986.
- [Shu70] M. Shub. Expanding maps. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 273–276. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [Sjö90] J. Sjöstrand. Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems. *Duke Math. J.*, 60(1) :1–57, 1990.
- [Sjö00] Johannes Sjöstrand. Asymptotic distribution of eigenfrequencies for damped wave equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 36(5) :573–611, 2000.
- [SZ07] J. Sjöstrand and M. Zworski. Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances. *Duke Math. J.*, 137 :381459,, 2007.
- [Tay96a] M. E. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [Tay96b] M. E. Taylor. *Partial differential equations, Vol II*. Springer, 1996.
- [Tre92] L. N. Trefethen. Pseudospectra of matrices. *Numerical analysis*, 1992.
- [Tre09] W.F. Trench. *Introduction to Real Analysis*. Prentice Hall, 2009.
- [Tri82] J.C. Tricot. Two definitions of fractional dimension. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 91(1) :57–74, 1982.
- [Tsu01] M. Tsujii. Fat solenoidal attractors. *Nonlinearity*, 14(5) :1011–1027, 2001.
- [Tsu08] M. Tsujii. Decay of correlations in suspension semi-flows of angle-multiplying maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(1) :291–317, 2008.
- [Tsu11] M. Tsujii. Contact anosov flows and the fourier-bros-iagolnitzer transform. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, FirstView :1–36, 2011.
- [Vas00] J. C. Vassilicos. *Intermittency in Turbulent Flows*. Fluid dynamics and solid mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [Wei10] T. Weich. *Resonances in open expanding maps and in an experimental realization of the three disk system*. 2010. Diploma Thesis –Phillips Universtät, Marburg.

- [Woo92] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [Zwo99] M. Zworski. Resonances in physics and geometry. *Notices of the A.M.S.*, 46(3), 1999.