

## THESE

Pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
UFR des sciences fondamentales et appliquées  
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)  
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM  
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :  
Ali Alriyabi

### **Analyse de quelques équations différentielles à retard et EDP modélisant les instabilités de surfaces**

Directeur(s) de Thèse :  
Jean-Michel Rakotoson, Saïd Hilout

Soutenue le 08 mars 2013 devant le jury

#### Jury :

Président	<b>Mohammed Benlahsen</b>	Professeur des Universités, Université Jules Verne de Picardie
Rapporteur	<b>François Jauberteau</b>	Professeur des Universités, Université de Nantes
Rapporteur	<b>Jean-Paul Chehab</b>	Professeur des Universités, Université Jules Verne de Picardie
Membre	<b>Jean-Michel Rakotoson</b>	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	<b>Saïd Hilout</b>	Professeur, Collège Pierre Ronsard de Poitiers
Membre	<b>Jean Grilhé</b>	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	<b>Alain Miranville</b>	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	<b>Arnaud Rougirel</b>	Maître de conférences, Université de Poitiers

#### **Pour citer cette thèse :**

Ali Alriyabi . *Analyse de quelques équations différentielles à retard et EDP modélisant les instabilités de surfaces*  
[En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur  
Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS**

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National – Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale : **Sciences et Ingénierie pour l'Information Mathématiques**

Secteur de Recherche : **Mathématiques et leurs Interactions**

Présentée par :

**ALI ALRIYABI**

\*\*\*\*\*  
**Analyse de Quelques Équations Différentielles à Retard et  
EDP Modélisant les Instabilités de Surfaces**  
\*\*\*\*\*

Directeur de Thèse : **Jean-Michel RAKOTOSON**

Co-directeur de Thèse : **Saïd HILOUT**

Soutenue le 8 mars 2013

devant la Commission d'Examen

## Jury

Mohammed Benlahsen	Université de Picardie Jules Verne	Président du jury
François Jauberteau	Université de Nantes	Rapporteur
Jean-Paul Chehab	Université de Picardie Jules Verne	Rapporteur
Jean Grillhé	Université de Poitiers	Examineur
Alain Miranville	Université de Poitiers	Examineur
Arnaud Rougirel	Université de Poitiers	Examineur
Jean-Michel Rakotoson	Université de Poitiers	Directeur de thèse
Saïd Hilout	Collège Pierre de Ronsard-Poitiers	Co-directeur de thèse



Je dédie ce travail à :  
Mes chers Parents Hamdi & Najmah  
Mes chères sœurs et mes chers frères  
Ma chère femme Chiraz  
Mes chers enfants Ola, Alhassan, Abdullah et Abdurrahman



# Remerciements

Beaucoup de personnes resteront gravées dans ma mémoire, celles et ceux qui, à divers titres, ont aidé à la réalisation de cette thèse. Tout d'abord, je tiens à remercier de tout cœur mes directeurs de thèse Jean–Michel Rakotoson et Saïd Hilout pour leur confiance. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour leurs idées enrichissantes suite à nos multiples discussions, pour leur sens aigü du détail, pour leur rigueur scientifique, mais également pour leurs encouragements.

Je suis très touché de l'honneur que me font les professeurs François Jauberteau et Jean–Paul Chehab en acceptant d'être rapporteurs de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde considération. Mes vifs remerciements sont adressés aussi aux professeurs Jean Grilhé, Mohammed Benlahsen, Alain Miranville et Arnaud Rougirel pour l'honneur qu'ils me font d'être membres de jury de cette thèse.

Mes remerciements vont chaleureusement à tous les membres du Laboratoire de Mathématiques de Poitiers, en particulier au professeur Pierre Torasso, Directeur Adjoint de l'ED S2IM, pour son accueil aimable et ses conseils utiles, au professeur Pol Vanhaecke, Directeur du Laboratoire pour son aide qui m'a permis de continuer mes études dans les meilleures conditions et au professeur Abderrazak Bouaziz pour sa disponibilité.

Je tiens à remercier les personnels ita/iatos du département et du laboratoire : Jocelyne Attab, Nathalie Marlet, Brigitte Brault, Nathalie Mongin et Benoît Métrot,

pour la documentation scientifique, les démarches administratives et l'aide informatique tout au long de mes années d'études à Poitiers.

Je ne peux pas oublier, à cette occasion, mes professeurs de l'université de Damas, en particulier les professeurs M.B. Kabil, M. Alcheikh, N. Chamoun, S. Zaizoun, H. Hakmi, A. Hanano, et M. Alhamad. Je remercie également Monsieur Ahmad Alomar pour ses conseils.

Une pensée amicale aux doctorants : Appollinaire (pour nos débats scientifiques utiles et tes blagues amusantes), Florent, Daniel (avec qui j'ai passé de bons moments), Hélène, Haydi, Sami, Jules, Claire, Anis et mon cher ami Brice (en particulier pour tes remarques linguistiques et tes encouragements). Je souhaite une bonne continuation à tous. Par ailleurs, je remercie les anciens doctorants : Wesam (pour ton aide, tes conseils et ton accueil), Pol, Sami et Houssam (pour tes conseils et tes encouragements).

Un remerciement spécial à mes amis syriens en France : Abdurazzak (merci pour ton accueil), Azzam, Saïd, Munier, Manhal, Nasr, Mahmoud, Talal et Malaz pour leur soutien et leurs encouragements.

Je suis profondément reconnaissant envers toute ma famille : ma mère pour son soutien constant et ses encouragements, mes soeurs et frères, en particulier mes frères Fadel et Hamed et mon cousin Nawaf pour leur soutien, leurs encouragements et leurs aides spéciales en Syrie.

*Les moments critiques de ma thèse ont été partagés avec ma partenaire dans la vie, ma chère femme Chiraz, je te remercie de tout mon cœur, pour ta patience, ton soutien et tes encouragements.*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>Notations</b>	<b>18</b>
<b>1 Dislocations et déformation plastique</b>	<b>19</b>
1.1 Introduction . . . . .	19
1.2 Valeur estimée de la cission critique pour un réseau simple . . . . .	24
1.3 Notion de dislocation . . . . .	26
1.3.1 Observation des dislocations . . . . .	30
1.4 Vecteur de Burgers . . . . .	31
1.4.1 Dislocation coin . . . . .	35
1.4.2 Dislocation vis . . . . .	36
1.4.3 Dislocation mixte . . . . .	36
1.4.4 Conséquences des dislocations . . . . .	37
<b>2 Modèle linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé (MLMLG)</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Préliminaires sur les équations à retards . . . . .	40
2.2.1 Équations à retard . . . . .	40



2.2.2	Existence et unicité . . . . .	41
2.2.3	Stabilité . . . . .	42
2.3	Modélisation mathématique . . . . .	51
2.4	MLMLG à simple retard . . . . .	54
2.4.1	Résolution de l'équation d'évolution . . . . .	56
2.4.2	Analyse de la stabilité du MLMLG . . . . .	61
2.5	Validation numérique . . . . .	63
2.5.1	Discussions physiques . . . . .	68
2.6	MLMLG à double retard . . . . .	68
2.6.1	Existence et unicité . . . . .	70
2.6.2	Stabilité asymptotique . . . . .	71
2.6.3	Validation numérique . . . . .	75
2.6.4	Discussion et conclusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Modèle non linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé (MNLMLG)</b>	<b>83</b>
3.1	MNLMLG à simple retard . . . . .	83
3.1.1	Existence et unicité . . . . .	84
3.1.2	Stabilité . . . . .	88
3.1.3	Tests numériques . . . . .	91
3.2	MNLMLG à double retard . . . . .	94
3.2.1	Existence et unicité . . . . .	95
3.2.2	Stabilité . . . . .	97
3.2.3	Tests numériques . . . . .	100
3.3	Conclusion et perspective . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Instabilité de Rayleigh–Plateau</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	115
4.2	Rappels . . . . .	119

---

4.3	Dérivation de l'équation d'évolution . . . . .	123
4.4	Existence . . . . .	130
4.5	Unicité . . . . .	141
4.6	Tests numériques . . . . .	145
4.6.1	Discrétisation en espace . . . . .	145
4.6.2	Discrétisation en temps . . . . .	146
<b>A</b>		<b>151</b>
A.1	DDE23 . . . . .	151
<b>B</b>		<b>153</b>
B.1	. . . . .	153
B.2	. . . . .	156
B.3	. . . . .	157
<b>Bibliographie</b>		<b>159</b>



# Introduction

Cette thèse porte d'une part sur la modélisation et l'analyse mathématique des instabilités de la déformation plastique qui apparaissent à la surface d'un matériau sous contrainte, puis d'autre part sur l'analyse des instabilités de Plateau–Rayleigh dans le cas de la déformation élastique. Ce manuscrit est divisé en deux parties : la première partie (Chapitres 1, 2 et 3) concerne la déformation plastique et la deuxième partie (Chapitre 4) traite la déformation élastique.

Lorsque des matériaux (exemple : alliages métalliques) sont soumis à des contraintes de traction ou de compression, ils se déforment de manière discontinue ; c'est le phénomène *Portevin–Le Chatelier*. La déformation plastique des métaux et des alliages à température ambiante s'effectue le plus souvent par le glissement des dislocations. Les dislocations constituent l'une des classes d'imperfection ou de défauts cristallins. Elles sont présentes dans les matériaux industriels en quantité importante et influencent de manière décisive plusieurs propriétés macroscopiques, dont, au premier rang, les propriétés mécaniques.

La notion de dislocations a été créée pour la première fois par Volterra en 1907 d'après une étude théorique des défauts linéaires. Un grand progrès dans la compréhension du rôle des dislocations en physique des solides a été apporté dans les années trente du siècle dernier par Orowan [58], Polanyi [61] et Taylor [76], toujours sans aucune preuve directe de l'existence de tels défauts. Le développement de la

microscopie électronique par transmission dans les années 1950 a finalement permis l'observation de dislocation, par Bollmann [9], Hirsch, Horne et Whelan [38]. Ces observations ont permis de tester un certain nombre de prédictions théoriques. La taille de ces défauts microscopiques n'excède pas, dans la plupart du temps, le micromètre. Les dislocations sont naturellement présentes dans les matériaux cristallins du fait même de leurs conditions de croissance qui laisse une structure imparfaite quels que soient les moyens d'élaborations. La théorie des dislocations [40] a permis aux mécaniciens de mieux comprendre le comportement mécanique issu de la déformation plastique des matériaux cristallins.

Le premier chapitre est une introduction physique sous forme d'historique de la dislocation et son importance dans l'étude de la déformation plastique d'un matériau sous contrainte. Nous exposons les différents types de dislocations (coin, vis, mixte) avec des figures d'illustration à l'appui.

Dans le second chapitre, nous présentons un modèle linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé. Les instabilités de la déformation plastique d'un matériau cristallin sous contrainte uniaxiale sont observées et peuvent s'expliquer par un temps de retard dans la réponse du système aux sollicitations. Cette remarque a été faite pour la première fois par Grilhé et al. en 1984 [30]. Une première modélisation "linéaire" de ce problème conduit à une équation linéaire à un seul retard sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -a\sigma(t - \tau) + a\sigma_0 & \text{si } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t) & \text{si } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

où,  $\tau$  est le temps de retard,  $\sigma$  est la contrainte,  $\sigma_0$  est la contrainte initiale,  $a$  est un paramètre physique, et  $\phi$  est une fonction définie et continue sur  $[-\tau, 0]$ . Hilout et al. ont donné une étude mathématique complète de ce problème en utilisant les fonctions de Lambert [36]. En outre comme l'activation de plusieurs systèmes de déformation conduit à introduire plusieurs temps de retards, nous considérons une modélisation

linéaire dans le cas de deux systèmes de déformation (c'est à dire à deux temps de retard  $\tau_1$  et  $\tau_2$ ) :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -\alpha \sigma(t - \tau_1) - \beta \sigma(t - \tau_2) + \gamma & \text{si } t > 0 \\ \sigma(t) = \phi(t) & \text{si } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

avec,  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$  et  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont des paramètres physiques. Ce travail a été initié par Hilout et al. [37]. Nous présentons aussi dans le chapitre 2 un résultat théorique pour les problèmes à  $n$  retards pour  $n \geq 3$ , des remarques et des interprétations physiques.

Suite à une discussion avec le professeur Jean Grilhé, il a été suggéré d'étudier le modèle non linéaire pour mieux comprendre l'instabilité de la déformation plastique en temps long. C'est l'objectif de notre troisième chapitre qui porte sur la modélisation non linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé, et qui décrit l'évolution temporelle de l'instabilité de la déformation plastique d'un cristal sous contrainte. Cette nouvelle modélisation étend les problèmes linéaires étudiés au chapitre 2.

La première modélisation non linéaire nous ramène au problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -\beta\sigma^2(t - \tau) - \theta\sigma(t - \tau) - \xi, & \text{si } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t), & \text{si } t \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

avec  $\beta$ ,  $\theta$ , et  $\xi$  sont des paramètres physiques. Nous présentons des résultats théoriques concernant l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. Nous validons les résultats théoriques de stabilité par des tests numériques sous MATLAB.

Expérimentalement (expériences menées par l'équipe de Jean Grilhé au laboratoire PyhMath du Futuroscope), plusieurs systèmes de glissement sont actifs et dépendent de leur orientation par rapport à l'axe de traction. Nous nous intéressons à la modélisation des instabilités de la déformation plastique quand deux retards sont introduits (chacun correspond à un système de déformation), ce qui nous conduit à

une deuxième modélisation non linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = - \sum_{i=1}^2 \beta_i \sigma^2(t - \tau_i) - \sum_{i=1}^2 \theta_i \sigma(t - \tau_i) + \gamma, & \text{si } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t), & \text{si } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

où  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\gamma$  sont des paramètres physiques. Nous définissons la solution fondamentale de notre problème (1) afin d'étudier et d'analyser l'instabilité de la déformation plastique correspondante au problème (1). Comme nous l'avons fait aux précédents chapitres, nous présentons des vérifications numériques sous MATLAB. Suite à une discussion avec le professeur Jean Michel Rakotoson, nous proposons aussi dans ce chapitre une comparaison numérique entre les cas linéaire et non linéaire.

La deuxième partie de cette thèse (chapitre 4) concerne l'étude de l'instabilité de Plateau-Rayleigh. Cette étude porte sur les instabilités de surface d'un pore cylindrique sans contraintes. Ces instabilités sont dites de Rayleigh-Plateau [59]. Dans [59], les auteurs montrent l'apparition d'instabilités à la surface d'un fluide lors de jets d'eau cylindriques, ils montrent aussi que ces instabilités dépendent des fluctuations pour des longueurs d'ondes supérieures à la circonférence du cylindre. Des résultats semblables concernant des solides sont obtenus par Nichols et Mullins [53, 55, 56] pour les tiges cylindriques. Ils généralisent ensuite ces résultats pour des pores et des précipités cylindriques dans les solides [56]. En particulier, Nichols et Mullins se sont intéressés à l'évolution morphologique de la surface libre d'un corps cylindrique par diffusion de surface ou de volume. Grilhé et son équipe, Grinfeld et autres font partie des premiers chercheurs à étudier l'évolution d'un pore par diffusion de surface quand la matrice est soumise à des contraintes. Leur travail est limité à une contrainte constante et uniaxiale dans le cas axisymétrique. Les mêmes auteurs ont généralisé ce formalisme à des matériaux sous contrainte possédant une structure 2D et la propriété de symétrie cylindrique.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à une EDP parabolique non linéaire

d'ordre 4 de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \text{ sur } (0, T) \times (0, 1), \\ h(t, \cdot) \text{ est une fonction p\u00e9riodique sur } (0, 1), \\ h(0, \cdot) = h_0 > 0 \text{ est une fonction p\u00e9riodique donn\u00e9e sur } (0, 1). \end{array} \right.$$

Nous montrons l'existence et l'unicit\u00e9 de la solution de ce probl\u00e8me en utilisant la m\u00e9thode de Faedo–Galerkin. Nous utilisons aussi des techniques d'estimations initi\u00e9es dans des travaux r\u00e9cents de Jean Michel Rakotoson. Le r\u00e9sultat principal est l'existence globale de la solution et la convergence vers la valeur moyenne de la donn\u00e9e initiale en temps long. L'\u00e9tude th\u00e9orique est aussi appuy\u00e9e comme dans les autres chapitres d'une validation num\u00e9rique en utilisant cette fois-ci un code de calcul *via* FORTRAN d\u00e9velopp\u00e9 par D'Angelo, Boutat, Hilout et Lods.





# Nomenclature

PLC	Phénomène de Portevin–Le Chatelier .....	16
EDFR	Équation différentielle fonctionnelle à retard .....	37
MLMLG	Modèle linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé.....	35
MNLMLG	Modèle non linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé.....	77
$\mathbb{R}$	Espace des nombres réels .....	35
$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien de dimension $n$ .....	35
$\mathbb{C}$	Espace des nombres complexes.....	35
$\int_{(c)}$	$:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT}$ , $c \in \mathbb{R}$ .....	40
$\mathbb{C}^+$	$:= \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0\}$ .....	58
$\mathbb{C}^0$	$:= \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}$ .....	69
$\mathcal{B}(x_0, r)$	Boule ouverte de centre $x_0$ et de rayon $r$ .....	38
$W$	Fonction de Lambert .....	53
$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^n)$	Espace des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ .....	36
$\mathcal{C}_{r,n}$	$:= \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ , $r > 0$ , $n \in \mathbb{N}^*$ .....	36
$\mathcal{C}_r$	$:= \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R})$ , $r > 0$ .....	78

---

$\mathcal{L}(f)$	La transformée de Laplace de $f$ .....	40
$W^{m,p}$	Espace de Sobolev : $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq  \alpha  \leq m\}$ , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, $1 \leq p \leq \infty$ , $m \in \mathbb{N}$ .....	113
$H^m$	Espace de Sobolev : $H^m = W^{m,2}$ .....	113
$H_{per}^m$	$H_{per}^m]0, 1[ = \{f \in H^m]0, 1[, f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m-1\}$ ...	113

# Chapitre 1

## Dislocations et déformation plastique

### 1.1 Introduction

La connaissance et le contrôle de la déformation plastique sont des défis importants en science des matériaux et en mécanique. Il est donc nécessaire de connaître le processus de développement de la déformation plastique (tréfilage, emboutissage, laminage, forgeage, ...) et de comprendre l'évolution temporelle des matériaux sous contrainte afin de calculer la quantité de l'énergie absorbée (plaquette de frein d'une voiture par exemple). La maîtrise des mécanismes liés à la déformation plastique est très importante, en particulier pour les branches industrielles concernant la fabrication et l'utilisation des matériaux à résistance mécanique élevée dans les domaines de l'aérospatiale, de la marine, du nucléaire, de la sidérurgie, de l'industrie automobile et d'autres. Le contrôle des phénomènes qui affectent la plasticité nous conduit à améliorer la performance des matériaux qui représentent un défi industriel très important. D'une part, une bonne compréhension de la relation entre les propriétés microscopiques d'un matériau et son comportement à l'échelle est fondamentale et d'autre part, les développements récents dans le domaine de la miniaturisation et

des nanotechnologies rendent la nécessité d'obtenir une description plus détaillée des mécanismes microscopiques responsables de la déformation plastique.

Les modifications morphologiques des solides utilisées pour de nombreuses applications technologiques en génie métallurgique et en science des matériaux ont été largement étudiées au cours des dernières années. La recherche des propriétés de la matière (mécaniques, électriques, magnétiques, ...) étant toujours plus efficace, cela a conduit à de nombreuses études des mécanismes associés à la déformation plastique.

Pour comprendre le comportement mécanique des matériaux en plasticité, la notion de dislocation en physique a été introduite par Taylor [76], Orowan et d'autres auteurs entre 1930 et 1940. Cette notion explique le comportement des atomes dans un cristal au cours de sa déformation. Les dislocations ont été observées fréquemment en utilisant le microscope électronique (voir les figures 1.1 et 1.2<sup>1</sup>). Ils aident à expliquer les phénomènes de déformation plastique [27], [39], [54], aussi bien que d'autres propriétés des solides, comme la croissance cristalline et les propriétés électriques des semi-conducteurs [42]. Lorsqu'on teste la traction d'un matériau, en imposant une force pour assurer une vitesse de déformation constante, la déformation se produit par des dislocations glissantes. Les courbes contrainte-déformation (caractéristiques des matériaux) sont généralement continues et monotones. Cependant, dans certains cas, ces courbes présentent des oscillations rapides dues aux difficultés de la création ou de la propagation des dislocations : phénomène de Portevin-Le Chatelier PLC, Bandes de Piobert-Lüders, maclage, avalanches de dislocations, ...

Certains critères de localisation de la déformation plastique sont proposés dans [50], par exemple, le phénomène PLC est observé dans de nombreux alliages dans un domaine précis des taux de déformations et de températures. L'origine physique de l'effet PLC résulte d'un processus microstructural désigné par le vieillissement de la déformation dynamique, dû à l'interaction dynamique entre dislocations mo-

---

1. Laboratoire de Physique des Matériaux-Poitiers.

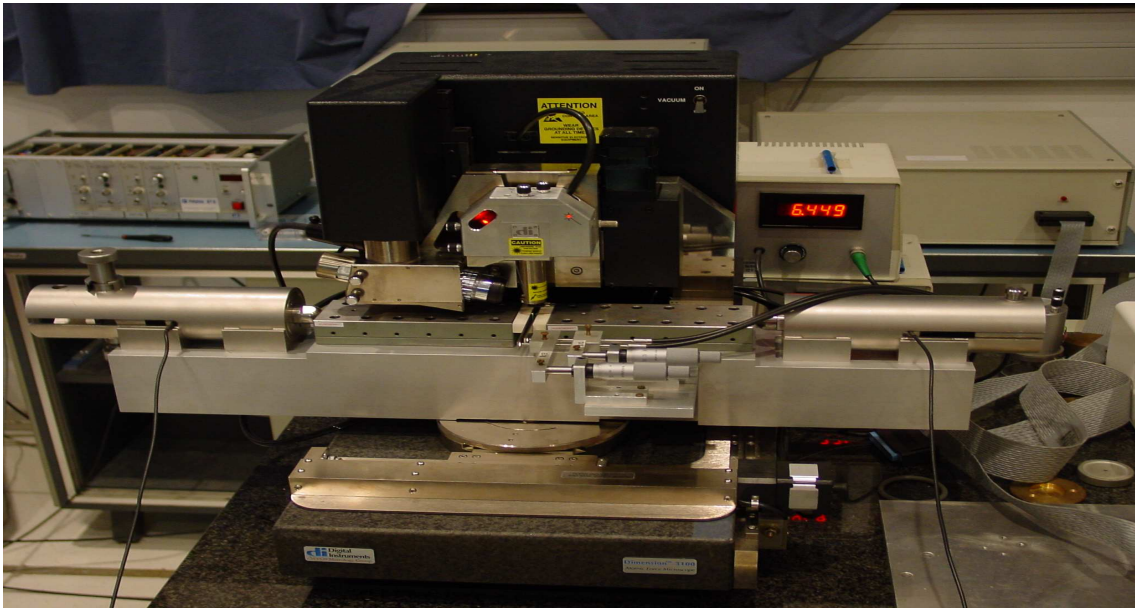


FIGURE 1.1 – Couplage microscope à force atomique / micro-machine de déformation

**Essais sous contraintes de compression**

biles et atomes de soluté mobiles. Louchet et Bréchet [26] présentent les différents types de dislocations motifs lors de la déformation uniaxiale en fonction des principaux paramètres physiques comme la structure cristalline; ils montrent que cette déformation est générée par une concurrence entre la production de dislocation et les réarrangements. De même ils démontrent que ce phénomène est contrôlé par le taux de déformation et de température. Un modèle numérique simplifié pour étudier la déformation des cristaux de glace est présenté par Miguel et al. [52]; Ils analysent l'avalanche comme les réarrangements des dislocations au cours de l'évolution dynamique et caractérisent la déformation viscoplastique de la glace ou d'autres matières cristallines similaires sous la forme de non-équilibre mécanique statistique. L'interaction entre les atomes de soluté et les dislocations mobiles au cours de la déformation plastique dans un alliage d'aluminium est considéré dans [84]. Graff et al. [29, 28] proposent des simulations par éléments finis, et des observations expérimentales de

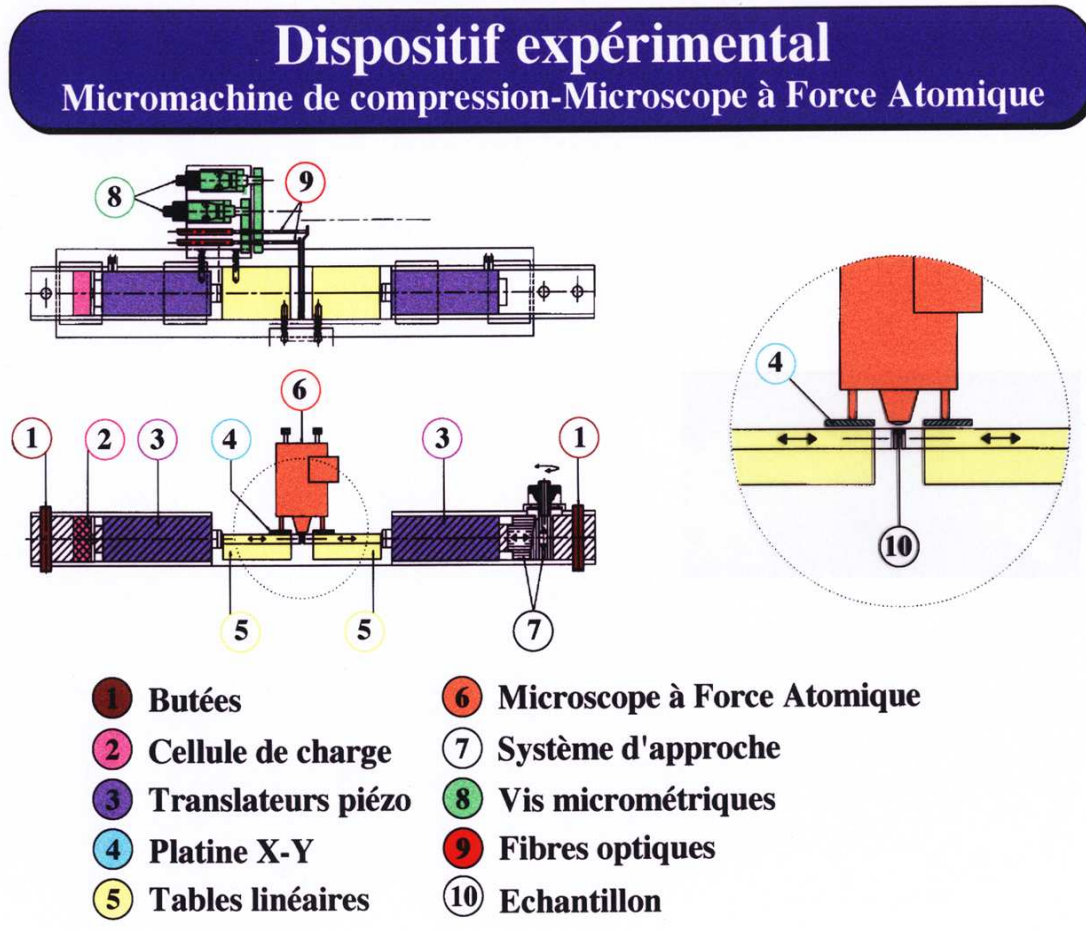


FIGURE 1.2

l'effet PLC et de la propagation des bandes de Lüders dans des échantillons de traction entaillés et compacts de l'aluminium en utilisant le modèle PLC microscopique constitutif.

On peut remarquer qu'il y a deux types de cristaux suivant l'assemblage des atomes : cristaux parfaits et cristaux présentant des imperfections. Pour un cristal parfait, les atomes forment un réseau régulier tel qu'un réseau cubique à faces centrées ou un réseau cubique centré (les matériaux de ce type sont appelés des *bonnes matières*). Pour un cristal présentant des imperfections, une petite région du cristal où le réseau régulier disparaît car quelques atomes n'ont plus leurs voisins immédiats normaux (les matériaux de ce type sont appelés des *mauvaises matières*). Remarquons que dans des régions petites, seulement quelques distances atomiques, du moins dans une direction, sont intéressées par l'imperfection. Une lacune est un exemple simple d'imperfection. Nous n'utiliserons pas le terme imperfection pour parler des déformations élastiques, des vibrations thermiques ou d'autres distorsions faibles qui permettent de reconnaître clairement la structure du cristal.

La théorie des cristaux parfaits a réalisé la plupart des développements dans la physique cristalline. On peut comprendre la plupart des propriétés des cristaux en les considérant comme des solides parfaits. En d'autres termes en supposant que les imperfections ne contribuent au changement des propriétés qu'en fonction de leur volume relatif propre. En effet, dans les cristaux relativement bons, on peut négliger ces imperfections. Deux types de propriétés caractérisent les cristaux parfaits. Des propriétés dites "insensibles à la structure" (Structure insensibles propriétés sont celles qui ne sont pas influencées de manière significative par des changements de microstructure ou macrostructure), on peut citer par exemple les constantes élastiques, la capacité calorifique, la densité et la résistivité. Pour les autres propriétés, où la résistance mécanique est très sensible à la perfection du cristal, nous pouvons bien choisir une imperfection unique, permettant ainsi à réduire la résistance de plusieurs



ordres de grandeur. Nous pouvons citer des exemples des propriétés sensibles à la structure : le frottement interne et la vitesse du fluage (le fluage est le phénomène physique qui provoque la déformation irréversible d'un matériau soumis à une contrainte constante pendant une durée suffisante). Dans [68] l'auteur traite des imperfections de structure, comme les fautes d'empilement dans les cristaux compacts, les joints de macles et surtout les dislocations, les atomes interstitiels, les atomes impurs et les lacunes. Notons aussi qu'il y a une différence entre les imperfections structurales et les imperfections électroniques (comme les trous dans les liaisons de valence des semi-conducteurs).

La théorie des dislocations a été développée dans [68] comme une partie de l'étude des imperfections. De façon très condensée, nous pouvons décrire les positions d'un grand nombre d'atomes en utilisant le concept d'imperfection. Il est noté que l'établissement de la liste des atomes d'un cristal pour le décrire, est bien plus facile que la précision de la position de chacun de ses atomes. La théorie des imperfections est utile pour décrire les structures, calculer les énergies et décrire des mécanismes comme la déformation. La théorie des dislocations joue un rôle majeur dans la description abrégée des cristaux par les imperfections.

## 1.2 Valeur estimée de la cission critique pour un réseau simple

La figure 1.3<sup>1</sup> (voir [25]) illustre la différence entre la déformation élastique et la déformation plastique dans le cas d'un cisaillement pur (cf. [25]). En fait, la déformation plastique est une déformation irréversible et hétérogène, pendant que , la déformation élastique est réversible et homogène. Dans le cas de la déformation plas-

---

1. pspicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

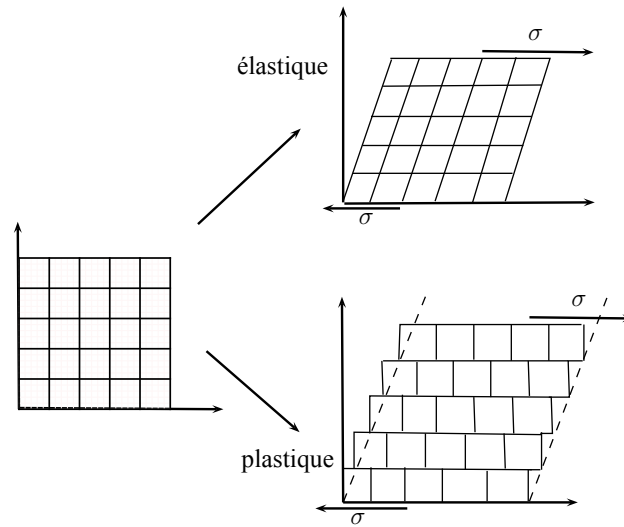


FIGURE 1.3 – Comparaison entre la déformation plastique et de la déformation élastique.

tique, nous observons un glissement d'une partie du cristal par rapport à l'autre dans un plan selon une direction connue. Pour simplifier, nous considérons le cas où la déformation s'est limitée au glissement de la moitié du cristal par rapport à l'autre (voir la figure 1.4<sup>1</sup>, cf. [25]). Supposons que  $W(x)$  représente l'énergie d'interaction entre deux parties du cristal sont décalées de  $x$ , sachant que cette énergie est considérée à l'unité de la surface. La fonction  $W(x)$  est minimale à chaque moment où le cristal reprend sa forme normale, autrement dit, pour  $x = 0, b, 2b, 3b, \dots$  ( $b$  est la longueur de la maille). Nous pouvons donc prédire que la fonction  $W(x)$  est périodique. L'énergie approximée est initialement donnée sous la forme suivante :

$$W(x) = W_0 - W_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right). \quad (1.1)$$

Pour assurer la continuité du décalage des deux parties du

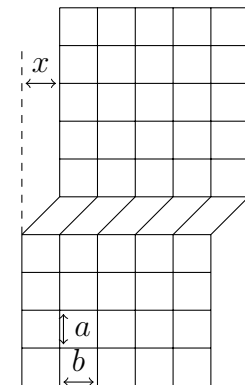


FIGURE 1.4

1. tikzpicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

cristal, nous avons besoin d'appliquer une cission donnée

par :

$$\tau(x) = -\frac{dW}{dx} = \frac{2\pi}{b}W_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right). \quad (1.2)$$

Pour  $x$  petit, la loi de Hooke en élasticité, nous donne :

$$\tau(x) = \mu \frac{x}{a}, \quad (1.3)$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement. Nous supposons que les constantes  $a$  et  $b$  données respectivement dans (1.3) et (1.1) sont de même grandeur et de même ordre. En remplaçant le sinus par son argument,  $W_1$  dans (1.1) et  $\tau_c$  dans (1.2) sont donnés respectivement par :

$$W_1 = \frac{\mu b^2}{4\pi^2 a},$$

et

$$\tau_c(x) = \frac{\mu b}{2\pi a} \sin\left(2\pi \frac{x}{b}\right),$$

où  $\tau_c$  désigne la valeur de la cission critique correspond à la valeur maximale de  $\tau(x)$  donnée par (1.3).  $\tau_c$  est donnée pour  $x = b/4$  par :

$$\tau_c = \tau\left(\frac{b}{4}\right) = \frac{\mu b}{2\pi a} \approx 0.16\mu. \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) simplifie la relation entre la valeur du module de cisaillement et celle de la cission critique.

### 1.3 Notion de dislocation

Toute matière solide va se déformer sous l'application d'une pression mécanique. Les tests expérimentaux nous donnent une explication de cette déformation en utilisant le microscope, et déterminent ses lois de comportement. Si la contrainte exercée sur l'objet est inférieure à une certaine valeur (la limite d'élasticité), alors son

comportement sera réversible. Autrement dit, si la contrainte appliquée s'annule, le matériau revient à son état initial. D'autre part, si la contrainte appliquée dépasse la limite d'élasticité, le matériau se déformera continûment même si après la décharge ; c'est la déformation plastique (voir la figure 1.5<sup>1</sup>, cf. [69]). La déformation plastique est alors (essentiellement) irréversible. En général, elle est isochore (le volume de l'objet qui se déforme reste inchangé tout au long du processus de la déformation plastique).

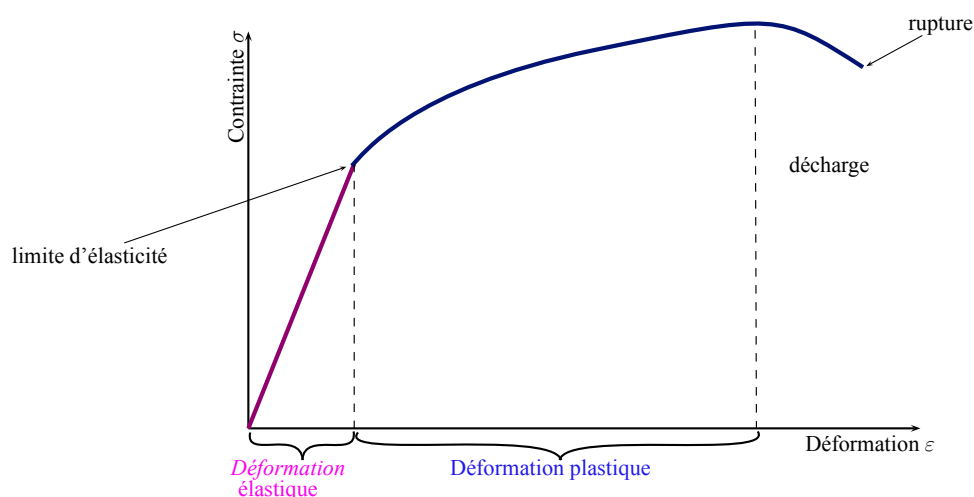


FIGURE 1.5 – La courbe de traction.

Il est possible de créer la déformation plastique pour les objets cristallins par les mouvements de défauts topologiques avec une dimension. Ces imperfections unidimensionnelles de l'organisation des atomes conduisent au glissement de plans cristallins. Comme le cas du tapis de Mott (Figure 1.6<sup>2</sup>, cf. [25]), nous déplaçons le tapis par création puis propagation d'un pli ; pour déformer un cristal, il est plus convenable de créer et propager des dislocations. En effet, à chaque étape un tel déplacement

---

1. pspicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

2. pspicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

n'implique que peu de liaisons entre les atomes et nécessite donc moins d'effort qu'un glissement rigide et instantané d'une moitié du cristal sur l'autre.

Pour donner une explication de glissement d'un plan sur un autre sans réaliser cette action en une seule fois, on accepte l'existence de défauts dans l'arrangement des atomes du cristal dans ce plan. Pour imaginer l'imperfection responsable de la possession de la cission critique d'une faible valeur expérimentale, nous utilisons l'analogie du tapis, créée par Mott [25], en remarquant qu'il est plus facile de déplacer un tapis placé sur une moquette en créant puis faisant propager un pli. Pratiquement, ce type de déplacement est plus facile.

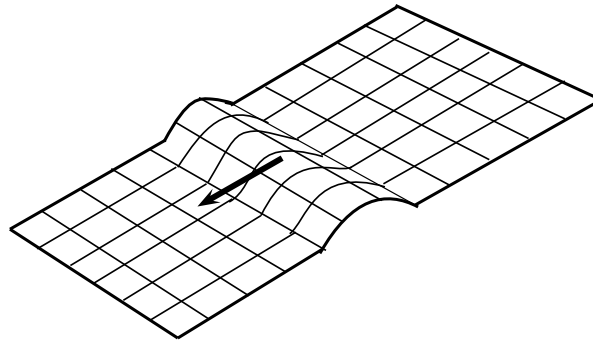


FIGURE 1.6 – Analogie de tapis de Mott. Pour déplacer le tapis, il est plus facile de fabriquer un pli et de déplacer ce pli.

En quelque sorte les dislocations construisent des vecteurs de la déformation plastique ; le cristal se déforme par cisaillement lorsque ces vecteurs se déplacent. Dans le cadre du déplacement d'une dislocation, la déformation élémentaire propagée peut être représentée par un vecteur  $\vec{b}$ . Ce vecteur  $\vec{b}$  est appelé vecteur de Burgers. Si le vecteur de Burgers est perpendiculaire à la ligne de dislocation, la dislocation est dite *coin*, la dislocation est *vis* si le vecteur de Burger est parallèle à la ligne de dislocation et elle est *mixte* dans les autres cas. La figure 1.7 (cf. [46]) illustre le déplacement d'une dislocation coin dans un cristal. Lorsque la dislocation traverse le

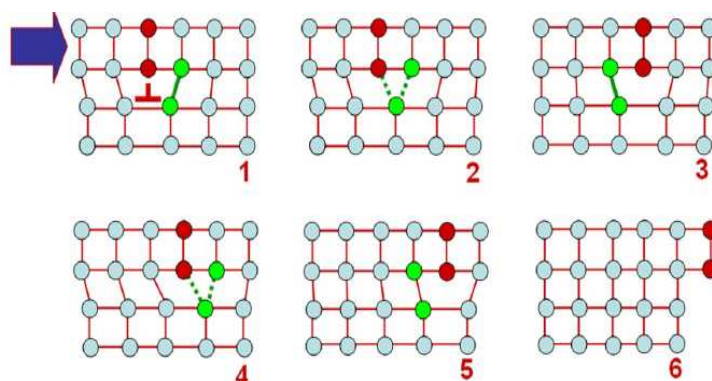


FIGURE 1.7 – Déplacement d’une dislocation coin dans un cristal.

cristal, la partie inférieure de celui-ci glisse de la distance  $b$  par rapport à la partie supérieure. Ainsi, lorsqu’une dislocation traverse le cristal jusqu’à sa surface, elle y laisse une marche de hauteur  $b$ .

Pour propager la déformation, il suffit donc de fabriquer un défaut et de fournir la contrainte nécessaire pour le propager. Dans un cristal, le défaut est créé en coupant les liaisons à proximité de la ligne du défaut pour les reformer avec la rangée voisine. Le défaut ainsi formé est nommé dislocation sur le schéma, il a l’aspect d’un demi-plan se déplaçant de la gauche vers la droite, et par analogie on représente souvent une dislocation par le signe “ $\perp$ ”. Pour introduire une dislocation dans un cristal, on peut opérer de la façon suivante (processus de Volterra) (voir la figure 1.8<sup>1</sup>, cf. [25]) :

1. On coupe toutes les liaisons atomiques entre les plans  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$ .
2. On applique une contrainte externe de façon à translater le plan  $A'B'C'D'$  du vecteur  $\overrightarrow{AA_1}$ , la translation n’étant possible qu’en dehors de la zone voisine de  $CD$ .
3. On remplit le vide éventuellement créé, ou on enlève la matière en excès.
4. On recolle le cristal et on supprime la contrainte.

---

1. tikzpicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

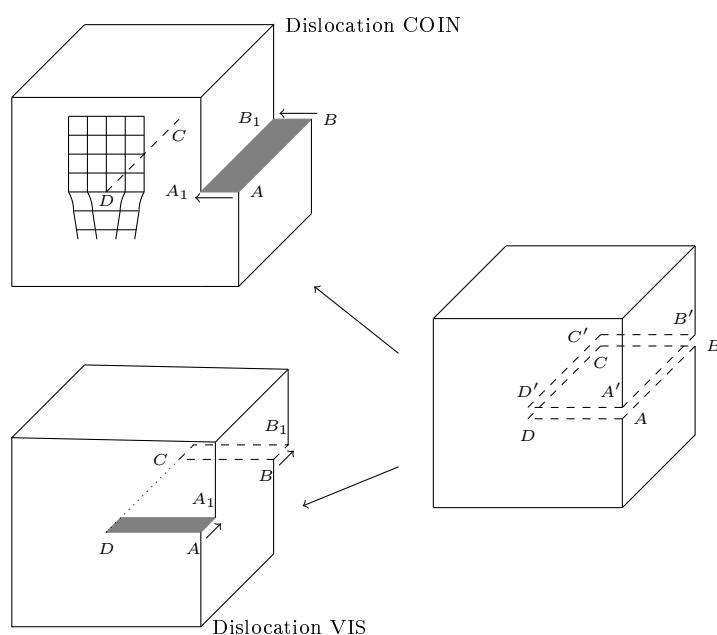


FIGURE 1.8 – Schéma de création d’une dislocation coin et d’une dislocation vis.

Suivant que l’on translate le plan  $A'B'C'D'$  perpendiculairement à  $CD$  ou parallèlement, on obtient des dislocations dont les propriétés sont sensiblement différentes (dislocation coin et dislocation vis). Finalement, une boucle de dislocation est créée par le même processus de coupure et de déplacement lorsque la surface de coupure est complètement comprise à l’intérieur du cristal (voir figure 1.9<sup>1</sup>, cf. [25]).

### 1.3.1 Observation des dislocations

Les dislocations ont initialement été observées indirectement, en mettant en évidence par attaque chimique les ponts d’émergence des dislocations à la surface du cristal. C’est par microscopie électronique en transmission qu’on obtient des informations expérimentales les plus fines sur les dislocations. Les électrons diffractent sur les atomes du cristal et l’existence d’un défaut comme une dislocation à l’intérieur du

1. pspicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

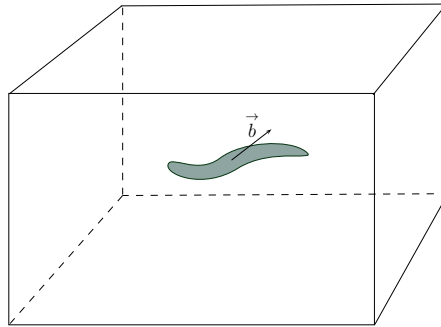


FIGURE 1.9 – Schéma de création d’une boucle entière de dislocation à l’intérieur du cristal.

cristal modifie les conditions de diffraction du cristal. En sélectionnant par exemple les électrons qui ont diffracté, nous pouvons obtenir une image du défaut (voir figures 1.10, 1.11)<sup>2</sup>.

## 1.4 Vecteur de Burgers

Le vecteur de Burgers est le défaut de fermeture d’une boucle d’un type particulier, appelé *circuit de Burgers*. Un circuit de Burgers va d’un atome à l’autre dans la bonne matière, en suivant des vecteurs  $\vec{t}$  ; on admet que les vecteurs  $\vec{t}$  varient avec la déformation élastique locale. Un circuit de Burgers est défini par les deux conditions suivantes :

1. Le circuit doit être tracé entièrement dans de la bonne matière, bien qu’il puisse en entourer de la mauvaise.
2. La même suite de “pas” d’un atome à l’autre, doit former dans le cristal parfait un trajet fermé.

---

2. Laboratoire de Physique des Matériaux–Poitiers.



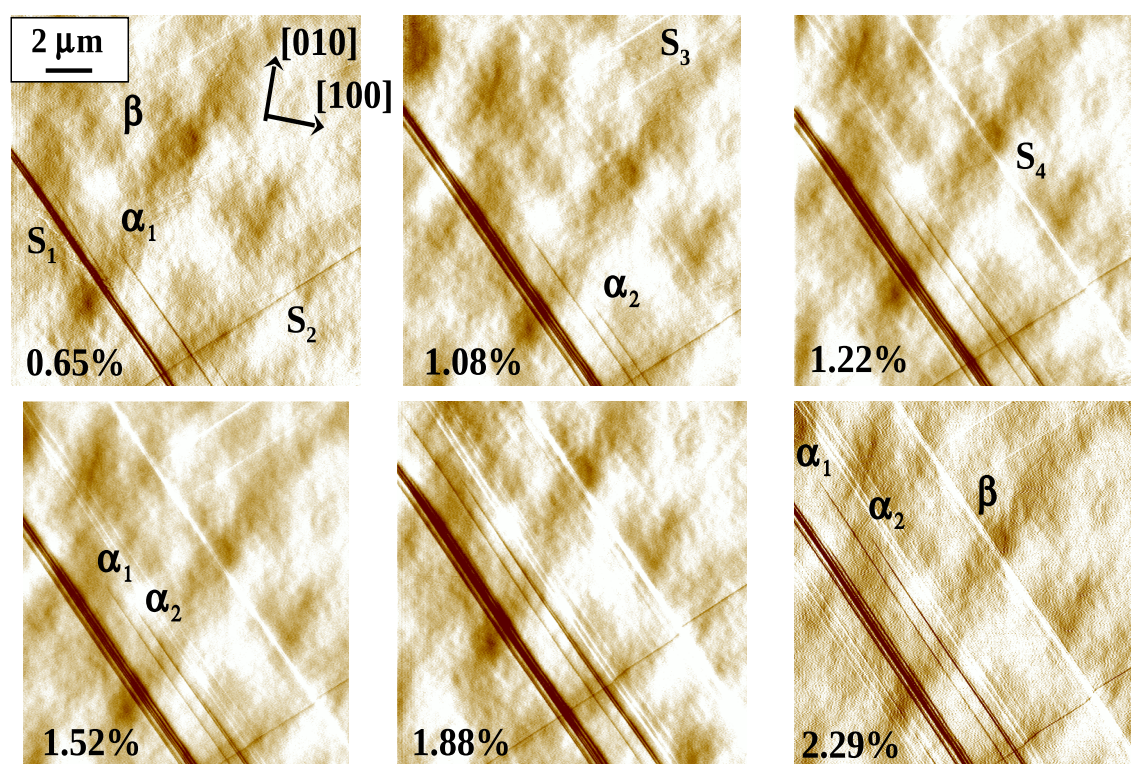


FIGURE 1.10 – Etude des mécanismes de plasticité par AFM (microscopie à force atomique), “traces des dislocations émergeant en surface”

**phase  $\gamma$  des superalliages base Ni**

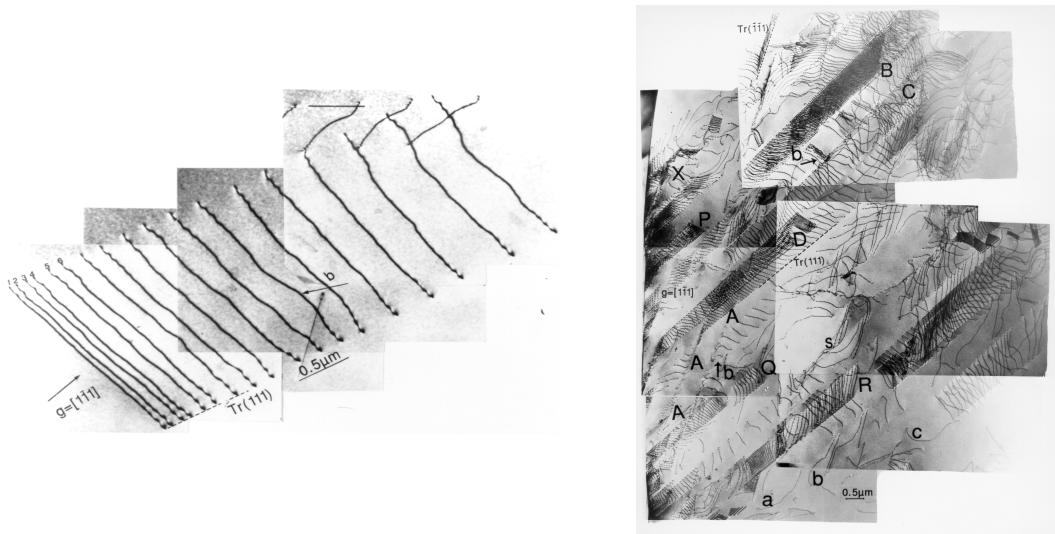


FIGURE 1.11 – Etude des mécanismes de plasticité par MET (équivalent métabolique), “dislocation en volume”

### phase $\gamma$ des superalliages base Ni

Dans un cristal parfait, le circuit de Burgers ne se ferme pas forcément. Le défaut de fermeture du circuit de Burgers est appelé *vecteur de Burgers* et est désigné par  $\vec{b}$ . Le fait que le circuit de Burgers ne se ferme pas, bien qu’il soit tracé dans de la bonne matière, est dû à la déformation élastique. L’effet cumulatif de la déformation élastique autour du circuit peut avoir généré un défaut de fermeture. On peut démontrer que ce défaut est un vecteur de translation de réseau, c’est-à-dire un vecteur  $\vec{t}$ , ou la somme de plusieurs vecteurs  $\vec{t}$  (READ et SHOCKLEY en 1952).

Il est clair que le vecteur  $\overrightarrow{AA_1}$  (voir la figure 1.8) constitue une caractéristique importante de la dislocation. Ainsi, si  $\overrightarrow{AA_1}$  est un vecteur du réseau cristallin, on peut rétablir parfaitement les liaisons atomiques entre les plans  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  et on retrouvera l’arrangement atomique normal (sauf au voisinage de  $CD$  où le défaut subsiste). Si  $\overrightarrow{AA_1}$  n’est pas un vecteur du réseau cristallin, il subsistera entre les plans  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  un défaut plan correspondant à l’interaction des liaisons

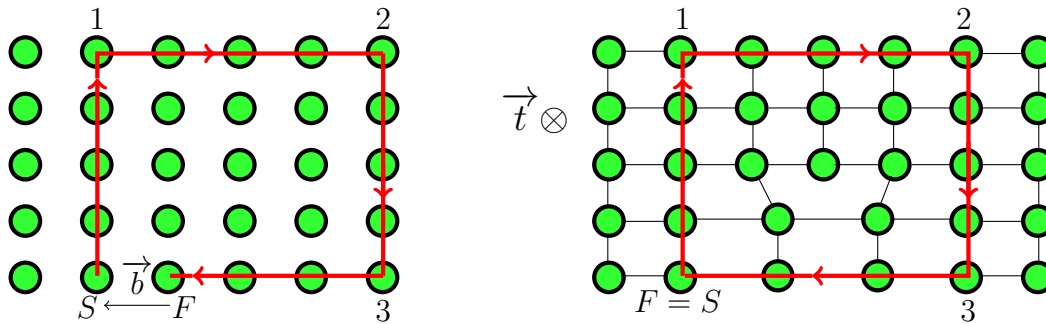


FIGURE 1.12 – Convention  $\overrightarrow{FS} / RH$  de définition du vecteur de Burgers ( $RH$  pour right hand). La dislocation se déplace vers l’arrière de la figure.

entre les atomes de ces plans. Ce vecteur  $\overrightarrow{AA_1}$  est le vecteur de Burgers de la dislocation. Lorsque la dislocation traverse le cristal, elle déplace les deux parties du cristal du vecteur  $\overrightarrow{AA_1}$  : le vecteur de Burgers représente donc l’amplitude de déformation transportée par la dislocation.

Sauf cas particulier, il est énergétiquement moins coûteux de ne pas créer un défaut de surface en même temps que l’on fabrique la dislocation. Le cristal choisit donc le plus souvent les vecteurs de Burgers qui sont des translations parfaites du cristal.

Considérons une dislocation dans un réseau cubique simple. Nous cherchons à caractériser son vecteur de Burgers. On effectue un circuit fermé (circuit de Burgers) à l’intérieur du cristal parfait en tournant dans le sens des aiguilles d’une montre. On effectue ensuite le même circuit que dans le cristal parfait, c’est-à-dire le même nombre de “pas” dans chaque direction, mais cette fois-ci dans le cristal avec le défaut, en prenant soin d’entourer le défaut. Si la ligne orientée de la dislocation est dirigée vers l’arrière de la feuille, le défaut de fermeture  $\overrightarrow{SF}$  est appelé par convention le vecteur de Burgers  $\vec{b}$  de la dislocation (voir figure 1.12<sup>1</sup>, cf. [25]). Notons qu’il est important

1. tikzpicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

de se préoccuper de l'orientation de la ligne de dislocation et de changer la direction de ligne d'une dislocation en son opposé. Ceci nous conduit aussi à transformer le vecteur de Burgers en son opposé. D'une manière générale,  $\vec{b}$  est défini par :

$$\vec{b} = \int_C \frac{\partial \vec{u}}{\partial l} dl$$

où  $C$  est la courbe entourant le défaut et  $\vec{u}$  le champ de déplacement.

### 1.4.1 Dislocation coin

Une fois que nous appliquons la contrainte de cisaillement sur le cristal, la déformation plastique va commencer à partir d'une face libre et elle va se propager jusqu'à l'autre côté. Alors, ce qui glisse c'est les atomes rangés l'un après l'autre, et ce n'est pas le plan de glissement en entier.

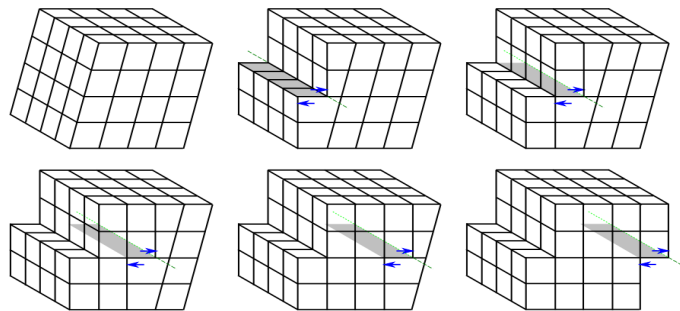


FIGURE 1.13 – Déformation plastique par déplacement d'une dislocation coin.

Dans la figure 1.13 (voir [13]), la région de glissement est représentée par la partie grise. Cette région a une petite largeur devant les dimensions du cristal, elle est représentée par une ligne verte pointillée (c'est la ligne de dislocation). Si la ligne de dislocation est perpendiculaire à la direction du glissement (le vecteur de Burgers est perpendiculaire à la ligne de dislocation), on parle de *dislocation coin* (voir figure 1.13). Le déplacement de la dislocation d'une rangée atomique vers une autre (appelée

saute), concerne la distance entre les deux rangées. On voit que le glissement sur un plan atomique dense sera le plus facile. Nous observons que le déplacement de dislocation va aboutir à une diffusion de l'énergie élastique.

### 1.4.2 Dislocation vis

Si la direction de glissement est parallèle à la ligne de dislocation (le vecteur de Burgers est parallèle à la ligne de dislocation), nous parlons alors de la *dislocation vis* (voir figure 1.14, cf. [13]). On voit aussi que les plans atomiques denses rendent le glissement plus facile.

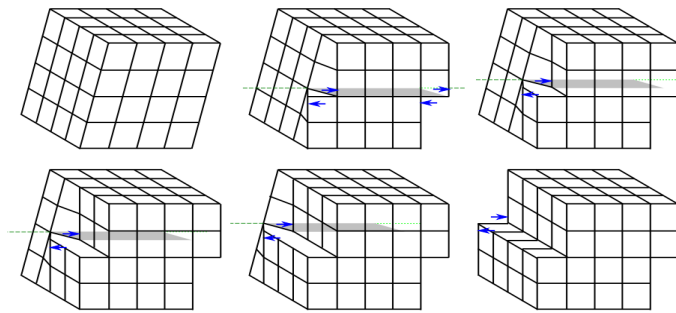


FIGURE 1.14 – Déformation plastique par déplacement d'une dislocation vis.

### 1.4.3 Dislocation mixte

En fait, la ligne de dislocation n'est pas obligatoirement droite. La dislocation courbe possède des parties de type vis, des parties coin, et des parties ni vis ni coin. Une telle dislocation est appelée *dislocation mixte*. C'est en fait le cas général (voir figure 1.15, cf. [13]).

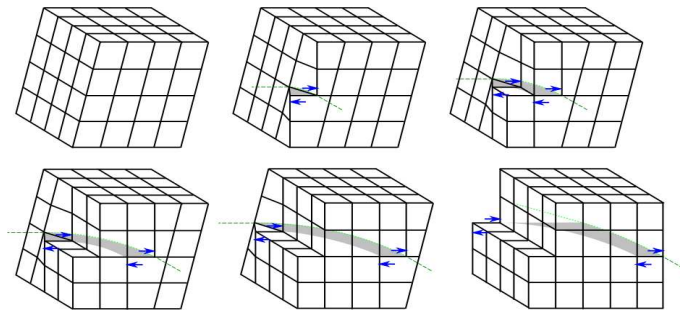


FIGURE 1.15 – Déformation plastique par déplacement d’une dislocation mixte.

#### 1.4.4 Conséquences des dislocations

Les dislocations sont alors des défauts linéaires, qui, en traversant le cristal, forment la déformation plastique qui est irréversible. Notons que, la pièce contient plus de dislocations, si elle est plus déformée.

Pour de nombreux phénomènes, nous pouvons négliger l’arrangement des atomes et imaginer la dislocation comme un fil élastique qui parcourt le cristal. Le mouvement du fil peut être bloqué par des barrages, autrement dit, par d’autres défauts du cristal, il y a donc un effet solidifiant ces défauts. La théorie des dislocations permet d’expliquer :

1. Pourquoi la déformation plastique commence à une force très petite par rapport à celle prévue avec la théorie de l’élasticité du cristal parfait.
2. Pourquoi les pièces déformées plastiquement ont des lignes visibles sur les côtés polis.
3. Pourquoi on voit des matériaux se déformer plus facilement que d’autres.
4. Pourquoi la pièce déformée plastiquement est en écrouissage.
5. La variation de la ductilité d’un matériau (taille des grains, pureté , vitesse de déformation, température ambiante...).



# Chapitre 2

## Modèle linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé (MLMLG)

### 2.1 Introduction

Nous considérons un matériau monocristallin sous contrainte uniaxiale. Dans ce cas les interactions entre les dislocations et la rotation de l'axe de traction conduisent à une activation d'autres systèmes de glissement. Alors, les instabilités de la déformation plastique sont observées et peuvent s'expliquer par un temps de retard dans la réponse du système aux sollicitations. Cette remarque a été faite pour la première fois par Grilhé<sup>1</sup> et autres en 1984 [30]. En 2007, Hilout, Boutat et Grilhé ont établi une étude mathématique complète de ce problème à un seul retard en utilisant les fonctions de Lambert [36]. La stabilité asymptotique de la contrainte est analysée en fonction des différents paramètres physiques du matériau, de la contrainte initiale et du temps de retard. Cette modélisation suppose qu'un seul système de déformation est actif, ce qui conduit à n'introduisant qu'un seul temps de retard. Cependant, dans

---

1. Laboratoire de Physique des Matériaux–l'Université de Poitiers.



la majorité des expériences de déformation, plusieurs systèmes de glissement rentrent en jeu et leur activité dépend de leur orientation par rapport à l'axe de traction. Même quand au départ, un seul système de déformation est actif, le cristal subit une rotation et des systèmes de glissement secondaires sont alors activés.

Les différents systèmes de glissement ayant des activités plus ou moins grandes, ils leur correspondent des temps de retard différents  $\tau_i$ . Notre but est de modéliser les instabilités de la déformation plastique quand plusieurs temps de retard sont introduits, chacun correspondant à un système de déformation, généralisant ainsi le modèle établi avec un seul retard.

## 2.2 Préliminaires sur les équations à retards

Les équations différentielles à retard apparaissent dans de nombreux domaines de la modélisation mathématique. Par exemple : dynamique des populations, la cinétique chimique, les problèmes des sciences biologiques, et plus générale dans les problèmes de contrôle. Dans cette étude, le système est régi par un principe de causalité : *l'état futur du système est indépendant de l'état passé et est déterminé uniquement par le présent.*

### 2.2.1 Équations à retard

**Définitions 2.2.1** Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathcal{C}_{r,n} := \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$  est muni de la norme :  $|\phi| = \max_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| := m_\phi$ .

1. Si  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $A \geq 0$  et  $x \in \mathcal{C}([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ , alors pour tout  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ , nous définissons  $x_t \in \mathcal{C}_{r,n}$  par :  $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ ;  $-r \leq \theta \leq 0$ .
2. Si  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{C}_{r,n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction donnée,  $x_t \in \mathcal{C}_{r,n}$  et  $\dot{x}(t)$  est la

dérivée par rapport à la variable  $t$ , alors, nous disons que la relation :

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (2.1)$$

est une **équation différentielle fonctionnelle à retard (EDFR)**.

3. La fonction  $x$  est une solution de (2.1) sur  $[\sigma - r, \sigma + A]$ , avec  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $A > 0$ , si  $x \in \mathcal{C}([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$ ,  $(t, x_t) \in \mathcal{D}$  et  $x(t)$  vérifie l'équation (2.1) pour  $t \in [\sigma, \sigma + A]$ .
4. Pour  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_{r,n}$  données,  $x(\sigma, \phi, f)$  est une solution de l'équation (2.1) via  $(\sigma, \phi)$ , s'il existe  $A > 0$  telle que  $x(\sigma, \phi, f)$  est une solution de (2.1) sur  $[\sigma - r, \sigma + A]$  et  $x_\sigma(\sigma, \phi, f) = \phi$ .
5. L'équation (2.1) est linéaire si  $f(t, \phi) = L(t)\phi + h(t)$ , où  $L(t)$  est linéaire. Cette équation est dite homogène si  $h(t) \equiv 0$ .
6. (2.1) est une équation autonome si  $f(t, \phi) = g(\phi)$ , avec  $g$  une fonction indépendante de  $t$ .

## 2.2.2 Existence et unicité

**Lemme 2.2.2** [35, p. 39] Si  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_{r,n}$  sont données, et  $f(t, \cdot)$  est continue par rapport à la deuxième variable, alors l'existence d'une solution de (2.1) via  $(\sigma, \phi)$  est équivalent à résoudre l'équation intégrale suivante :

$$\begin{cases} x_\sigma(\theta) = \phi(\theta), & \text{si } -r \leq \theta \leq 0, \\ x(t) = \phi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, & \text{si } t \geq \sigma. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Théorème 2.2.3** [35, p. 44] Soit  $\Omega$  un ouvert dans  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{r,n}$ .  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue et  $f(t, \phi)$  est lipschitzienne en  $\phi$  sur tout compact de  $\Omega$ . Si  $(\sigma, \phi) \in \Omega$ , alors il existe une solution unique de (2.1) via  $(\sigma, \phi)$ .

**Idée de la preuve.** Le [31, théorème 1.1.1] nous donne l'existence. Soit  $I_\alpha = [0, \alpha]$ , on suppose que  $x$  et  $y$  deux solutions de (2.1) sur  $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$  avec  $x_\sigma = y_\sigma = \phi$ . Alors :

$$x(t) - y(t) = \int_\sigma^t [f(s, x_s) - f(s, y_s)] ds, \quad t \geq \sigma,$$

$$x_\sigma - y_\sigma = 0.$$

Si  $f(t, \phi)$  est  $k$ -lipschitzienne dans tout compact contenant les trajectoires  $\{(t, x_t)\}, \{(t, y_t)\}; t \in I_\alpha$ , on prend  $\bar{\alpha}$  tel que  $k\bar{\alpha} < 1$ , nous avons donc :

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_\sigma^t k|x_s - y_s| ds = k(t - \sigma) \sup_{\sigma \leq s \leq t} |x_s - y_s| \leq k\bar{\alpha} \sup_{\sigma \leq s \leq t} |x_s - y_s|.$$

Pour  $t \in I_{\bar{\alpha}}$  nous déduisons que  $x(t) = y(t)$ . On peut continuer la démonstration successivement sur des intervalles de longueur  $\bar{\alpha}$ .  $\square$

### 2.2.3 Stabilité

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_{r,n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue (pour ce paragraphe voir [35, 70, 72]). On considère l'équation différentielle à retard (2.1). Nous supposons que  $f$  est une fonction complètement continue ( $f$  est continue et si  $B$  est un ensemble fermé et borné dans  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_{r,n}$ , alors,  $f(B)$  est aussi fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ ) et est lisse suffisamment pour assurer la continuité de la solution  $x(\sigma, \phi)$  de (2.1) via  $(\sigma, \phi)$  en  $(\sigma, \phi, t)$  dans le domaine de définition de la solution.

**Définition 2.2.4** *Supposons que  $f(t, 0) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . La solution  $x = 0$  de (2.1) est dite :*

1. *Stable (Lyapunov 1892) si pour chaque  $\sigma \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $\delta = \delta(\varepsilon, \sigma) > 0$  telle que si  $\phi \in \mathcal{B}(0, \delta)$ , alors,  $x_t(\sigma, \phi) \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$  pour tout  $t \geq \sigma$ .*

2. Uniformément stable (*Persidski 1933*) si la constante  $\delta$  dans cette définition est indépendante de  $\sigma$  ( $\delta$  et  $\sigma$  sont définies dans 1).
3. Asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe une constante  $b_0 = b_0(\sigma) > 0$  telle que pour  $\phi \in \mathcal{B}(0, b_0)$ ,  $x(\sigma, \phi)(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .

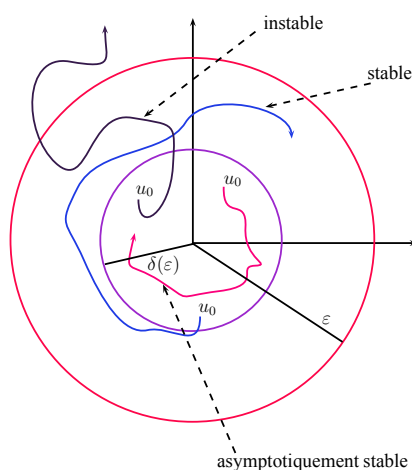


FIGURE 2.1 – Stabilité / Instabilité / Stabilité asymptotique (pspicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X).

**Définition 2.2.5** Si  $y(t)$  est une solution de (2.1),  $y$  est dite stable si la solution  $z = 0$  de l'équation :

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t), \quad (2.3)$$

est stable au sens de Lyapunov.

Nous définissons les autres concepts de stabilité de la définition 2.2.4 de la même manière.

**Lemme 2.2.6** [35, Lemme 5.1] Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue par morceaux et qui vérifie l'inégalité suivante :

$$|f(t)| \leq a e^{bt}, \quad t \in [0, +\infty[,$$

avec  $a, b$  sont des constantes. Les assertions suivantes sont vraies :

1. La transformée de Laplace  $\mathcal{L}(f)$  définie par :

$$F(\lambda) = \mathcal{L}(f)(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

existe pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(\lambda) > b$ . De plus  $F(\lambda)$  est infiniment dérivable sur  $[b, +\infty[$ .

2. Si on définit le produit de convolution comme suit :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds,$$

alors,

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g). \quad (2.4)$$

**Lemme 2.2.7** (voir [35, Théorème d'inversion] et [7, Théorème 1.2, page 8]) Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction donnée,  $b > 0$  une constante telle que  $f$  est une fonction à variation bornée sur tout ensemble compact, et  $t \rightarrow f(t)e^{-bt}$  est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur  $[0, \infty[$ . Alors,

$$\int_{(c)} \mathcal{L}(f)(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda = \begin{cases} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, & t > 0, \\ \frac{f(0^+)}{2}, & t = 0, \end{cases}$$

où  $f(t^+) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} f(t+s)$  et  $f(t^-) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ s > 0}} f(t-s)$ .

Considérons le Problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t-r_1), x(t-r_2)), & \text{pour } t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & \text{pour } t \in [-r, 0], \end{cases} \quad (2.5)$$

avec :  $f(u, v) = -au - bv + cu^2 + dv^2 + \gamma$ , où  $a, b, c, d$  et  $\gamma$  sont des constantes réelles, et  $r = \max\{r_1, r_2\}$ .

**Lemme 2.2.8** *On considère l'équation linéaire homogène associée à (2.5) :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t - r_1) - bx(t - r_2), & t > 0, \\ x(t) = \phi(t), & t \in [-r, 0]. \end{cases} \quad (2.6)$$

*La solution de (2.6) est bornée exponentiellement, c'est à dire, il existe deux constantes  $\mu$  et  $\nu$  telles que :*

$$|x(t)| \leq \mu m_\phi e^{\nu t}, \quad t \geq 0,$$

où  $m_\phi$  est définie dans 2.2.1.

**Preuve.** Nous avons :

$$x(t) = \phi(0) - \int_0^t (ax(s - r_1) + bx(s - r_2)) ds, \quad t > 0.$$

$x(t) = \phi(t)$  pour tout  $t \in [-r, 0]$ , alors pour  $t \geq 0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq m_\phi + |a| \int_0^t |x(s - r_1)| ds + |b| \int_0^t |x(s - r_2)| ds \\ &\leq m_\phi + |a| \int_{-r_1}^{t-r_1} |x(s)| ds + |b| \int_{-r_2}^{t-r_2} |x(s)| ds \\ &\leq m_\phi + |a| \int_{-r_1}^t |x(s)| ds + |b| \int_{-r_2}^t |x(s)| ds \\ &= m_\phi + |a| \int_{-r_1}^0 |x(s)| ds + |b| \int_{-r_2}^0 |x(s)| ds + (|a| + |b|) \int_0^t |x(s)| ds \\ &\leq m_\phi + |a| m_\phi r_1 + |b| m_\phi r_2 + (|a| + |b|) \int_0^t |x(s)| ds \\ &\leq \mu m_\phi + \nu \int_0^t |x(s)| ds, \end{aligned}$$

où  $\mu = 1 + |a|r_1 + |b|r_2$ ,  $\nu = |a| + |b|$ . D'après le lemme de Gronwall on trouve que :

$$|x(t)| \leq \mu m_\phi e^{\nu t}, \quad t \geq 0.$$

□

### Solution fondamentale

L'équation caractéristique associée à (2.6) est :

$$h(\lambda) = \lambda + ae^{-\lambda r_1} + be^{-\lambda r_2} = 0. \quad (2.7)$$

**Définition 2.2.9** Une solution  $X(t)$  de (2.6) est dite fondamentale si :

$$\mathcal{L}(X(t)) = h^{-1}(\lambda) := \frac{1}{h(\lambda)},$$

où  $\mathcal{L}$  est la transformée de Laplace.

**Remarque 2.2.10** D'après le lemme 2.2.8, la solution fondamentale est bornée exponentiellement, alors le lemme 2.2.6 affirme que sa transformée de Laplace a un sens.

**Proposition 2.2.11** Soit  $X(t)$  une solution de (2.6) pour  $t \geq 0$ , et qui vérifie la condition suivante :

$$X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Alors,  $X(t)$  est une solution fondamentale de (2.6). De plus, pour tout  $c > \nu$ , nous avons :

$$X(t) = \int_{(c)} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

avec  $\nu$  est comme dans le lemme 2.2.8.

**Preuve.** D'après le lemme 2.2.8, la transformée de Laplace de  $X(t)$  a un sens. On multiplie (2.6) par  $e^{-\lambda t}$  et on intègre entre 0 et  $\infty$  :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \dot{X}(t) dt = -a \int_0^\infty e^{-\lambda t} X(t - r_1) dt - b \int_0^\infty e^{-\lambda t} X(t - r_2) dt.$$

Une intégration par parties donne :

$$-1 = (-\lambda - ae^{-\lambda r_1} - be^{-\lambda r_2}) \int_0^\infty e^{-\lambda t} X(t) dt,$$

d'où

$$\mathcal{L}(X)(\lambda) = h^{-1}(\lambda). \quad (2.10)$$

$X(t)$  est alors une solution fondamentale. Comme  $X(t)$  est une fonction intégrable sur tout compact, alors le lemme 2.2.7 nous permet d'écrire :

$$X(t) = \int_{(c)} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda.$$

□

En adaptant la démonstration du [35, théorème 5.2], nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème 2.2.12** *Pour  $\alpha > \alpha_0 = \max\{Re\lambda; h(\lambda) = 0\}$ , il existe une constante  $k > 0$ , telle que :*

$$|X(t)| \leq ke^{\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

*En particulier, si  $\alpha_0 < 0$ , alors on peut choisir  $\alpha_0 < \alpha < 0$ , tel que  $X(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .*

**Preuve.** Pour  $c$  est un réel assez grand, on a :

$$X(t) = \int_{(c)} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda. \quad (2.11)$$

On peut prendre  $c > \alpha$ . On veut démontrer que :

$$X(t) = \int_{(\alpha)} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda. \quad (2.12)$$

On intègre la fonction  $e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda)$  autour du bord du rectangle  $ABCD$  dans la plan complexe avec le bord  $L_1 M_1 L_2 M_2$  dans la direction indiquée (voir Fig. 2.2), telle que :



$L_1 = \{c+ir; -T \leq r \leq T\}$ ,  $L_2 = \{\alpha+ir; -T \leq r \leq T\}$ ,  $M_1 = \{x+iT; \alpha \leq x \leq c\}$ ,  
 $M_2 = \{x-iT; \alpha \leq x \leq c\}$ . Comme  $h(\lambda)$  n'a pas de zéro dans  $\Gamma$  (voir fig. 2.2)<sup>1</sup>,  
alors l'intégrale sur le bord s'annule et la relation (2.12) est valide si :

$$\int_{M_1} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda \rightarrow 0, \int_{M_2} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda \rightarrow 0 \text{ lorsque } T \rightarrow \infty.$$

On choisit  $T_0$  tel que pour tout  $T \geq T_0$  :

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{T^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{T}(|a|e^{-r_1\alpha} + |b|e^{-r_2\alpha}) \geq \frac{1}{2}.$$

Si  $T \geq T_0$  et  $\lambda \in M_1$  (c'est à dire  $\lambda = x + iT$ ), et  $\alpha \leq x \leq c$ , alors :

$$|h^{-1}(\lambda)| \leq \frac{1}{(x^2 + T^2)^{1/2} - |a|e^{-r_1\alpha} - |b|e^{-r_2\alpha}} \leq \frac{2}{T}.$$

Donc,

$$\left| \int_{M_1} e^{\lambda t} h^{-1}(\lambda) d\lambda \right| \leq \frac{2}{T} e^{ct} (c - \alpha) \rightarrow 0 \text{ lorsque } T \rightarrow \infty.$$

De même, l'intégrale sur  $M_2$  tend vers 0 lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Supposons  $T_0$  comme ci-

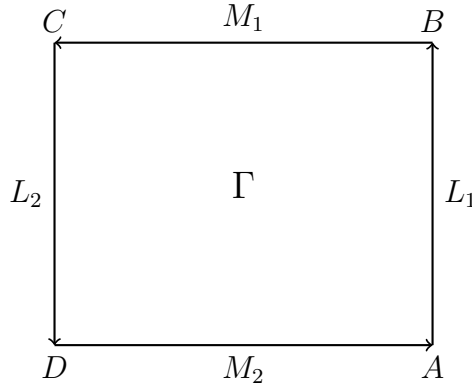


FIGURE 2.2 –  $\Gamma$  : L'intérieur du rectangle  $ABCD$ .

dessus, si  $g(\lambda) = h^{-1}(\lambda) - (\lambda - \alpha_0)^{-1}$ , alors pour  $\lambda = \alpha + iT$ ;  $|T| \geq T_0$ , nous

1. tikzpicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

avons :

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| &= \left| \frac{1}{\lambda + ae^{-r_1\lambda} + be^{-r_2\lambda}} - \frac{1}{\lambda - \alpha_0} \right| \\ &= \left| \frac{-ae^{-r_1\lambda} - be^{-r_2\lambda} - \alpha_0}{\lambda - \alpha_0} h^{-1}(\lambda) \right| \\ &\leq \frac{2}{T^2} (|a|e^{-r_1\alpha} + |b|e^{-r_2\alpha} + |\alpha_0|). \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{(\alpha)} |g(\lambda)| d\lambda < \infty, \quad \text{et} \quad \int_{(\alpha)} |e^{\lambda t} g(\lambda)| d\lambda \leq k_1 e^{\alpha t}, \quad t > 0,$$

où,  $k_1$  est une constante. D'autre part  $\int_{(\alpha)} e^{\lambda t} (\lambda - \alpha_0)^{-1} d\lambda$  est bornée et

$$\int_{(\alpha)} e^{\lambda t} (\lambda - \alpha_0)^{-1} d\lambda \leq k_2 e^{\alpha t}, \quad t > 0.$$

D'où :

$$|X(t)| \leq k e^{\alpha t}, \quad t > 0, \quad k = k_1 + k_2.$$

□

**Théorème 2.2.13** Pour  $t \geq 0$ , la solution de (2.6) est donnée sous la forme :

$$x(\phi, 0)(t) = X(t)\phi(0) - a \int_{-r_1}^0 X(t-r-r_1)\phi(r)dr - b \int_{-r_2}^0 X(t-r-r_2)\phi(r)dr. \quad (2.13)$$

**Preuve.** On multiplie (2.6) par  $e^{-\lambda t}$  et on intègre par parties :

$$-\phi(0) + h(\lambda)\mathcal{L}(x)(\lambda) = -ae^{-\lambda r_1} \int_{-r_1}^0 e^{-\lambda r} \phi(r)dr - be^{-\lambda r_2} \int_{-r_2}^0 e^{-\lambda r} \phi(r)dr. \quad (2.14)$$

Pour  $c$  assez grand, on a :

$$x(t) = \int_{(c)} h^{-1}(\lambda) [\phi(0) - ae^{-\lambda r_1} \int_{-r_1}^0 e^{-\lambda r} \phi(r)dr - be^{-\lambda r_2} \int_{-r_2}^0 e^{-\lambda r} \phi(r)dr] d\lambda. \quad (2.15)$$

Pour  $i = 1, 2$ , on prend la fonction  $w_i : [-r_i, \infty[ \rightarrow [0, 1]$ , telle que  $w_i(r) = 0$  si  $r \geq 0$  et  $w_i(r) = 1$ , si  $r < 0$ , alors on peut définir  $\phi$  sur  $[-r, \infty[$  par  $\phi(r) = \phi(0)$  pour  $r \geq 0$ .

Pour  $i = 1, 2$ , nous avons :

$$e^{-\lambda r_i} \int_{-r_i}^0 e^{-\lambda r} \phi(r) dr = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \phi(-r_i + s) w_i(-r_i + s) ds = \mathcal{L}(\phi(-r_i + \cdot) w_i(-r_i + \cdot)).$$

D'après (2.4), nous avons :

$$\begin{aligned} x(t) = & X(t)\phi(0) - a \int_0^t X(t-s)\phi(-r_1+s)w(-r_1+s)ds \\ & - b \int_0^t X(t-s)\phi(-r_2+s)w(-r_2+s)ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nous pouvons écrire alors :

$$x(t) = X(t)\phi(0) - a \int_0^{r_1} X(t-s)\phi(-r_1+s)ds - b \int_0^{r_2} X(t-s)\phi(-r_2+s)ds. \quad (2.17)$$

On pose  $r_i = -r_i + s$  pour  $i = 1, 2$ , d'où :

$$x(t) = X(t)\phi(0) - a \int_{-r_1}^0 X(t-r_1-r_1)\phi(r_1)dr_1 - b \int_{-r_2}^0 X(t-r_2-r_2)\phi(r_2)dr_2, \quad (2.18)$$

ou encore :

$$x(t) = X(t)\phi(0) - a \int_{-r_1}^0 X(t-r-r_1)\phi(r)dr - b \int_{-r_2}^0 X(t-r-r_2)\phi(r)dr. \quad (2.19)$$

□

**Corollaire 2.2.14** Soit  $\alpha_0 = \max\{Re(\lambda); h(\lambda) = 0\}$ ,  $x(\phi)(t)$  est la solution de (2.6), alors, pour tout  $\alpha > \alpha_0$ , il existe une constante  $k = k(\alpha)$ , telle que :

$$|x(\phi)(t)| \leq km_\phi e^{\alpha t}, \quad t \geq 0,$$

où  $m_\phi$  est définie dans 2.2.1. En particulier, si  $\alpha_0 < 0$ , alors on peut choisir  $\alpha_0 < \alpha < 0$ , telle que toute solution de (2.6) tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

**Preuve.** D'après le théorème 2.2.12, il existe une constante  $k_1 > 0$ , telle que  $|X(t)| \leq k_1 e^{\alpha t}$ . D'autre part, d'après le théorème 2.2.13, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|x(\phi)(t)| &\leq |X(t)|m_\phi + |a|m_\phi \int_{-r_1}^0 |X(t-r-r_1)|dr + |b|m_\phi \int_{-r_2}^0 |X(t-r-r_2)|dr \\
&\leq k_1 m_\phi e^{\alpha t} + |a|k_1 m_\phi \int_{-r_1}^0 e^{\alpha(t-r_1-r)}dr + |b|k_1 m_\phi \int_{-r_2}^0 e^{\alpha(t-r_2-r)}dr \\
&\leq m_\phi e^{\alpha t} \left( k_1 + \frac{|a|}{\alpha} k_1 (1 + e^{-\alpha r_1}) + \frac{|b|}{\alpha} k_1 (1 + e^{-\alpha r_2}) \right) \\
&\leq km_\phi e^{\alpha t}.
\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.15** [35, p. 25] *Il faut savoir que le comportement asymptotique des solutions de l'équation différence différentielle homogène est régi par les solutions de l'équation caractéristique. Il est possible d'utiliser la formule de Duhamel pour déterminer le comportement asymptotique des systèmes non linéaires perturbés de la forme :*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-r) + f(x(t), x(t-r)). \quad (2.20)$$

On suppose l'existence du problème de la valeur initiale, alors la solution  $x = x(\phi)$  de (2.20) avec la donnée initiale  $\phi$  sur  $[-r, 0]$  est donnée par (cf. [7]) :

$$x(t) = y(t) + \int_0^t X(t-s)f(x(s), x(s-r))ds, \quad (2.21)$$

avec  $y = y(\phi)$  et  $X(t)$  sont respectivement la solution et la solution fondamentale de l'équation linéaire associée à (2.20) avec la donnée initiale  $\phi$  sur  $[-r, 0]$ .

## 2.3 Modélisation mathématique

Dans cette section, nous présentons la dérivation de l'équation de Mecking–Lücke. Nous considérons un cristal soumis à une contrainte moyenne  $\sigma_0$ , le matériau est placé entre deux traverses, une traverse fixe et une autre traverse mobile (voir figure 2.3).

Cette expérience a été faite par l'équipe de Grilhé au laboratoire de Physique des Matériaux (Université de Poitiers) en utilisant des machines compression/traction (voir figure 2.4<sup>1</sup>). En fait, le taux de la déformation  $\dot{\epsilon}$  est la somme du taux de la

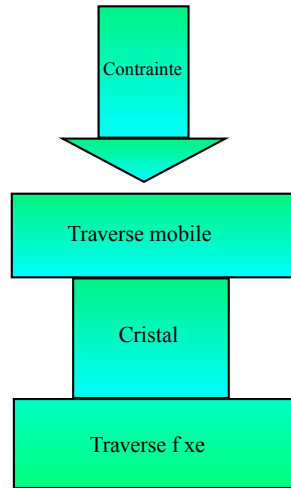


FIGURE 2.3 – Le cristal sous contrainte.

déformation plastique  $\dot{\epsilon}_p$  du spécimen et du taux de la déformation élastique  $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}/M$  de l'échantillon combiné et le chargement du système (avec la rigidité  $M$ ) :

$$\dot{\epsilon}(t) = \dot{\epsilon}_p(t) + \dot{\epsilon}_e(t). \quad (2.22)$$

Nous nous intéressons à l'expression du taux de la déformation plastique. On peut écrire :

$$\dot{\epsilon}_p(t) = \frac{b\dot{\Sigma}(t)}{V}, \quad (2.23)$$

avec  $V$  est le volume de l'échantillon qui est supposé constant,  $b$  est la magnitude du vecteur de Burger le long de l'axe de traction, et  $\Sigma(t)$  est la région dans laquelle la dislocation a lieu. La relation (2.23) est dépendante du mécanisme de dislocation qui opère dans le cristal. Dans le cas où la densité des dislocations  $\rho(t)$  et la vitesse

---

1. Laboratoire de Physique des Matériaux–Université de Poitiers.



FIGURE 2.4

Machine compression/traction

moyenne  $\nu(t)$  varie lentement et de manière monotone, nous supposons que la déformation plastique est régie par la force de Peierl<sup>1</sup>, (2.23) devient alors :

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = b\rho(t)\nu(t). \quad (2.24)$$

La déformation plastique peut également être contrôlée par l'émission de boucles de dislocation à partir du modèle type de sources de Frank–Read<sup>2</sup>. Notons par  $n$  du nombre des boucles qui se posent à l'instant  $t$  dans le volume unitaire et pendant l'unité de temps et par  $S$  de la surface moyenne balayée par les boucles qui est supposée constante pendant les périodes qui sont assez longues par rapport aux périodes

---

1. La force de Peierls correspond à la force de frottement du réseau cristallin qui s'oppose au glissement des dislocations.

2. Une source de Frank–Read permet la multiplication des dislocations dans les matériaux massifs.

d'instabilités. (2.23) devient :

$$\dot{\epsilon}_p(t) = bn(t)S. \quad (2.25)$$

En effet, la surface  $S$  dépend de la densité instantanée et donc de l'historique de la déformation précédente de l'échantillon. Nous supposons donc que  $S$  varie lentement. Si  $L$  est le libre parcours moyen de dislocation, on peut définir le taux de création de la dislocation de la manière suivante :

$$\dot{\rho}(t) \simeq \frac{n(t)S}{L}. \quad (2.26)$$

En remplaçant dans (2.25), on obtient la relation donnée par Mecking et Lücke [51] :

$$\dot{\epsilon}_p(t) = b\dot{\rho}(t)L, \quad (2.27)$$

qui illustre l'influence d'une variation rapide de la densité des dislocations survenantes dans certains types de déformation.

Les relations (2.25) et (2.27) sont établies en supposant que la surface  $S$  est instantanément balayée par chaque dislocation dès qu'elle est émise. En enlevant cette hypothèse, on va voir dans le paragraphe suivant qu'avec des valeurs finies des vitesses de dislocation, un temps de phases "shift" aura lieu entre l'émission d'une boucle et la déformation du cristal qui sera induite par la suite.

## 2.4 MLMLG à simple retard

Avec une vitesse finie de la dislocation, la surface balayée par une boucle nucléée à un moment  $t = 0$  est une fonction  $S(t)$  qui dépend du mécanisme considéré (glissement, maclages, etc) et de l'état du cristal, via la densité des obstacles qui peuvent entraver ou bloquer le mouvement de dislocations. Après le temps de retard  $\tau'$  (flight-time), la dislocation mobile est épinglée et atteint la surface libre de l'échantillon ayant couvert une surface constante  $S(\tau') = S$  depuis qu'elle a été émise. Alors,

seulement les boucles générées à un instant  $t - t'$ , avec  $0 < t' < \tau'$ , contribueront à la déformation au moment  $t$ . Nous pouvons écrire (2.25) sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_p(t) = b \int_0^{\tau'} n(t-s) \dot{S}(s) ds. \quad (2.28)$$

En fait, le nombre de boucles à l'instant  $t$  est une fonction du temps via la contrainte appliquée. Alors, le taux de la déformation est donné par la relation générale suivante :

$$\dot{\varepsilon}(t) = b \int_0^{\tau'} n(\sigma(t-s)) \dot{S}(s) ds + \frac{\dot{\sigma}(t)}{M}. \quad (2.29)$$

Dans un test de traction avec un taux de déformation constante  $\dot{\varepsilon} = c$ , et une solution stationnaire de (2.29)  $\sigma = \text{constante} = \sigma_0$ , nous avons :

$$\dot{\varepsilon}(t) = bn(\sigma_0)S(\tau'). \quad (2.30)$$

$n(\sigma_0)$  et  $\sigma_0$  peuvent être considérées comme des constantes uniquement pendant des périodes plus courtes que la durée du test de traction. Pour simplifier le problème, Grilhé a posé que (cf. [30]) :

$$\dot{S}(t) = S\delta_\tau, \quad (2.31)$$

avec  $S = S(\tau')$  est une constante,  $\delta_\tau$  est la distribution de Dirac, et  $\tau$  est le temps moyen de retard, qui est donné par :

$$\tau = \frac{1}{S} \langle \dot{S}, t \rangle. \quad (2.32)$$

L'approximation (2.31) revient à remplacer  $S(t)$  par une fonction en escaliers. Le délai donné par la relation (2.32) peut être interprété par le déphasage entre le moment de la nucléation de la boucle et l'instant auquel la déformation moyenne est enregistrée. Sous l'hypothèse (2.31), on peut écrire (2.29) sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}(t) = b \langle \delta_\tau, Sn(\sigma(t-\cdot)) \rangle + \frac{\dot{\sigma}(t)}{M}. \quad (2.33)$$



Pour étudier la stabilité du système des courbes contrainte–déformation, on linéarise les fonctions  $n(\sigma)$  au voisinage de  $\sigma_0$  (Développement de Taylor à l'ordre un) :

$$n(\sigma(t)) = n(\sigma_0) + \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t) - \sigma_0). \quad (2.34)$$

Alors, (2.33) devient :

$$M\dot{\varepsilon}(t) = MbSn(\sigma_0) + a\sigma(t - \tau) + \dot{\sigma}(t) - a\sigma_0, \quad (2.35)$$

avec

$$a = MbS \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0) > 0, \quad (2.36)$$

est un paramètre physique.

Finalement, en utilisant (2.30), on trouve l'équation à retard de Mecking–Lücke–Grilhé (EMLG) qui décrit l'évolution temporelle de la contrainte :

$$\dot{\sigma}(t) = -a\sigma(t - \tau) + a\sigma_0. \quad (2.37)$$

### 2.4.1 Résolution de l'équation d'évolution

Une équation différentielle ordinaire, linéaire à coefficients constants avec un temps de retard constant, peut être résolu par la technique de transformée de Laplace [7]. Dans cette section, nous montrons l'existence de la solution du problème (2.37). Nous donnons également une approche asymptotique de cette solution, basée sur le concept de la fonction  $W$  de Lambert. La stabilité de la fonction de contrainte au voisinage d'une contrainte constante  $\sigma_0$  est présentée en utilisant une solution explicite de (2.37) sous la forme d'une série en terme des branches de la fonction  $W$  de Lambert.

L'équation (2.37) est une équation différentielle différence linéaire à simple retard  $\tau$ . La solution de cette équation est déterminée uniquement lorsque la donnée initiale  $\phi$  est bien définie sur un intervalle initial ( $\phi$  n'est pas nécessaire d'être différentiable). Pour définir une fonction  $\sigma$  dans (2.37) avec  $t \geq 0$ , on considère une donnée initiale

$\phi$  continue sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$  (on peut prendre  $\phi \equiv 1$  sur  $[-\tau, 0]$ ). On considère alors le problème (2.37) avec la donnée initiale  $\phi$  :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -a\sigma(t - \tau) + a\sigma_0 & \text{si } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t) & \text{si } t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.38)$$

Les résultats suivants montrent l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.38).

**Théorème 2.4.1** *Le problème (2.38) admet une solution unique  $\sigma$  définie sur  $[-\tau, \infty)$ , dépendante de la donnée initiale  $\phi$ .*

**Preuve.** En utilisant la formule de Duhamel et supposant que  $\sigma(t) = \phi(t)$  pour  $-\tau \leq t \leq 0$ , on a :

$$\sigma(t) = \phi(t) + \int_0^t [a\sigma_0 - a\sigma(s - \tau)] ds \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.39)$$

La fonction qui est donnée dans (2.39) est une fonction continûment différentiable pour  $t \geq 0$  et  $\sigma$  définie dans (2.39) est une solution de (2.38). (en  $t = 0$ ,  $\dot{\sigma}(t)$  représente la dérivée à droite).  $\square$

Pour étudier la stabilité asymptotique de (2.38), nous utilisons le théorème 2.2.12. Nous calculons la fonction caractéristique  $h(\lambda)$  associée à  $\dot{\sigma} = -a\sigma(t - \tau)$  puis nous cherchons les racines de  $h(\lambda)$ . Cela nous conduit à présenter d'abord la fonction  $W$  de Lambert.

### Fonction $W$ de Lambert

Plusieurs problèmes physiques utilisent la fonction  $W$  de Lambert [4, 83]. Corless et al. [20, 21] présentent certaines propriétés et applications en mathématiques pures

et appliquées de la fonction  $W$  de Lambert. La fonction  $W$  de Lambert est définie comme étant l'inverse de la fonction  $\omega \mapsto \omega e^\omega$ . Cette fonction  $W(z)$  vérifie que :

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (2.40)$$

$W$  est une fonction multivoque de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $z$  est réel et  $z < -1/e$ , alors  $W(z)$  est une fonction multivoque complexe. Si  $z$  est réel et  $-1/e \leq z < 0$ , alors il existe deux valeurs réelles possibles de  $W(z)$  : la branche qui vérifie  $-1 \leq W(z)$  est désignée par  $W_0(z)$  et est appelée la branche principale de la fonction  $W$  de Lambert, l'autre branche qui vérifie  $W(z) \leq -1$  est notée par  $W_{-1}(z)$ . Si  $z$  est un réel et  $z \geq 0$ , alors il existe une seule valeur réelle de  $W(z)$  qui appartient également à la branche principale  $W_0(z)$ . Nous pouvons écrire (voir [4, 83]) la branche principale  $W_0(z)$  sous la forme :

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n. \quad (2.41)$$

Les autres branches de la fonction  $W$  de Lambert, pour  $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$  sont données par :

$$W_k(z) = \ln(z) + 2\pi ik - \ln[\ln(z) + 2\pi ik] + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=p}^{\infty} C_{pm} \frac{(\ln[\ln(z) + 2\pi ik])^m}{(\ln(z) + 2\pi ik)^{p+m}}, \quad (2.42)$$

où le coefficient  $C_{pm} = (-1)^p S(p+m, p+1)/m!$  et  $S$  désigne le nombre positif de Stirling de la première espèce [41], calculable via la fonction génératrice :

$$x(x-1)\dots(x-n+1) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} S(n, m) x^m \text{ et } S(n, m) = 0 \text{ pour } m > n.$$

### Solution analytique approchée

Nous donnons une approche analytique à la solution de (2.38) en utilisant la fonction  $W$  de Lambert. Pour cela, nous considérons l'équation homogène associée à (2.37) :

$$\dot{\sigma}(t) = -a\sigma(t - \tau). \quad (2.43)$$

L'équation (2.43) est obtenue à partir de (2.37) par la recherche d'une solution non triviale de la forme  $ce^{\lambda t}$  où  $c$  est une constante. L'équation (2.43) a une solution non triviale  $ce^{\lambda t}$  si et seulement si :

$$F(\lambda) \equiv \lambda + ae^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) est équivalente à :

$$\lambda e^{\lambda\tau} = -a. \quad (2.45)$$

En multipliant les deux termes de (2.45) par  $\tau$ , nous obtenons :

$$\lambda\tau e^{\lambda\tau} = -a\tau. \quad (2.46)$$

En utilisant la fonction  $W$  de Lambert définie dans (2.40), nous pouvons écrire (2.46) sous la forme :

$$W(-a\tau)e^{W(-a\tau)} = -a\tau, \quad (2.47)$$

où  $W(-a\tau) = \lambda\tau$ . La valeur de  $\lambda$  est donnée par :

$$\lambda = \frac{W(-a\tau)}{\tau}. \quad (2.48)$$

**Remarque 2.4.2** Soit  $h(t)$  une fonction continue, on peut écrire [4, 83], (voir aussi [7, P.98]) :

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k \zeta_k(t); \quad t \in [0, R], \quad (2.49)$$

où  $L_k$  est le  $k$ -ième coefficient de Lambert et  $\zeta_k(t) = e^{(W_k(-a\tau)/\tau)t}$ . Le nombre réel  $R$  peut aller à l'infini. Pour trouver les valeurs des coefficients  $L_k$ , nous supposons que les modes les plus dominants sont les premiers  $N$  modes, où  $N$  est un grand nombre, on peut écrire  $h(t)$  sous la forme

$$h(t) \approx \sum_{k=-N}^N L_k \zeta_k(t); \quad t \in [0, R]. \quad (2.50)$$

En divisant l'intervalle  $[0, R]$  en  $2N$  subdivisions, (2.50) devient :

$$\Theta = \Lambda(R, N) L, \quad (2.51)$$

avec

$$\Lambda(R, N) = \begin{pmatrix} \zeta_{-N}(R) & \zeta_{-N+1}(R) & \cdots & \zeta_N(R) \\ \zeta_{-N}(R - (R/2N)) & \zeta_{-N+1}(R - (R/2N)) & \cdots & \zeta_N(R - (R/2N)) \\ \zeta_{-N}(R - (2R/2N)) & \zeta_{-N+1}(R - (2R/2N)) & \cdots & \zeta_N(R - (2R/2N)) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_{-N}(0) & \zeta_{-N+1}(0) & \cdots & \zeta_N(0) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{-N} \\ L_{-N+1} \\ \vdots \\ L_N \end{pmatrix}; \quad \Theta = \begin{pmatrix} h(R) \\ h(R - (R/2N)) \\ \vdots \\ h(0) \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Le vecteur  $L$  représente une approximation du coefficient  $L_k$  pour les grandes valeurs de  $N$ . Nous supposons que la matrice  $\Lambda(R, N)$  est inversible, alors nous pouvons écrire le système (2.51) sous la forme :

$$L = \Lambda^{-1}(R, N)\Theta \quad (2.53)$$

Par conséquent, le coefficient  $L_k$  peut être donné par :

$$L_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Lambda^{-1}(R, N)\Theta)_k. \quad (2.54)$$

Pour  $t \in [0, R]$ , nous avons :

$$h(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N L_k \zeta_k(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N (\Lambda^{-1}(R, N)\Theta)_k \zeta_k(t). \quad (2.55)$$

La solution analytique approchée de (2.43) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\sigma_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{(W_k(-a\tau)/\tau)t}, \quad (2.56)$$

avec

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Lambda^{-1}(\tau, N)\phi)_k, \quad (2.57)$$

où  $\Lambda^{-1}(\tau, N)$  est définie comme une matrice avec les fonctions  $\zeta_k(t) = e^{(W_k(-a\tau)/\tau)t}$  comme éléments [4], et  $(\cdot)_k$  représente l'élément correspondant au  $k$ -ième vecteur (voir 2.4.2). Nous pouvons choisir la fonction  $\phi$  telle que  $\phi = 1$ , alors, si on note par  $\mathbf{1}_{2N+1}$  la  $(2N + 1)$ - vecteur avec les coefficients 1, nous pouvons écrire :

$$C_k = \lim_{N \rightarrow \infty} (\Lambda^{-1}(\tau, N)\mathbf{1}_{2N+1})_k. \quad (2.58)$$

**Remarque 2.4.3** *On peut écrire la solution de l'équation (2.43) avec la donnée initiale  $\phi$  sous la forme [6] :*

$$y(t) = \phi \sum_{n=0}^{[t/\tau]+1} \frac{(-a)^n (t - (n-1)\tau)^n}{n!}, \quad (2.59)$$

où  $[z]$  est la partie entière de  $z$ .

Par conséquent la solution de (2.38) avec la donnée initiale  $\phi \equiv 1$  prend la forme suivante :

$$\sigma(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ C_k + \int_0^t \lim_{N \rightarrow \infty; R \rightarrow \infty} (\Lambda^{-1}(R_s, N)\mathfrak{R})_k ds \right] e^{(W_k(-a\tau)/\tau)t}, \quad (2.60)$$

où  $C_k$  est définie par (2.58) et  $\mathfrak{R}$  est la  $(2N + 1)$ - vecteur avec les coefficients  $a\sigma_0$ ; c'est-à-dire

$$\mathfrak{R} = a\sigma_0 \mathbf{1}_{2N+1}.$$

## 2.4.2 Analyse de la stabilité du MLMLG

De nombreuses techniques ont été utilisées pour étudier la stabilité de la solution des équations différentielles à retard. Dans cette section, nous utilisons la méthode

de Lyapunov [35] qui généralise la deuxième méthode de Lyapunov pour les équations différentielles ordinaires. La région exacte de la stabilité asymptotique de la solution du système (2.38) est obtenue par les racines d'une équation caractéristique quand elles sont dans le demi-plan complexe à gauche. Nous précisons que la stabilité asymptotique de la solution de (2.38) au voisinage de  $\sigma_0$  revient à étudier la stabilité asymptotique de la solution de l'équation homogène (2.43) au voisinage de l'origine ; car toute solution de (2.38) peut être écrite sous la forme  $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ , où  $\sigma_1$  est la solution de l'équation homogène (2.43) ayant la donnée initiale  $\phi$  sur  $[-\tau, 0]$ , et  $\sigma_2$  est une solution particulière de (2.37) ayant la valeur initiale zéro sur  $[-\tau, 0]$ . Nous remarquons donc que si la solution zéro de l'équation homogène (2.43) est asymptotiquement stable, alors toutes les solutions de (2.38) sont asymptotiquement stables au voisinage d'une contrainte constante  $\sigma_0$ .

Nous donnons des conditions suffisantes pour la stabilité et l'instabilité de la solution de (2.38). Il est bien connu que la solution  $\sigma$  de (2.38) est asymptotiquement stable pour chaque fonction  $\phi$  continue sur  $[-\tau, 0]$  si l'équation (2.44) n'a pas de zéro dans  $\mathbb{C}^+$ . Nous montrons la stabilité asymptotique en utilisant le lemme suivant (voir [35, p. 416]).

**Lemme 2.4.4** *Toutes les racines de l'équation  $(z + \alpha)e^z + \beta = 0$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels, ont des parties réelles négatives si et seulement si :*

$$\alpha > -1; \quad \alpha + \beta > 0, \quad \beta < \zeta \sin \zeta - \alpha \cos \zeta, \quad (2.61)$$

où  $\zeta$  est la racine de  $\zeta = -\alpha \tan \zeta$ ;  $0 < \zeta < \pi$  si  $\alpha \neq 0$  et  $\zeta = \pi/2$  si  $\alpha = 0$ .

Maintenant, nous présentons le résultat de la stabilité asymptotique de la solution du système (2.38).

**Théorème 2.4.5** *Pour chaque fonction  $\phi$  continue sur  $[-\tau, 0]$ , la solution de (2.38) est asymptotiquement stable si et seulement si  $0 < a\tau < \pi/2$  et la solution est instable si et seulement si  $a\tau \geq \pi/2$ .*

**Preuve.** On peut écrire l'équation (2.44) sous la forme :

$$\lambda\tau e^{\lambda\tau} + a\tau = 0. \quad (2.62)$$

La solution de (2.38) est asymptotiquement stable si et seulement si les racines de (2.62) ne sont pas dans  $\mathbb{C}^+$ . En utilisant le lemme 2.4.4 pour (2.62) avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = a\tau$ , les racines de (2.62) ont des parties réelles négatives si et seulement si  $\zeta = \pi/2$  et  $0 < a\tau < \pi/2$ .  $\square$

## 2.5 Validation numérique

Nous utilisons la solution approchée de la forme (2.60) du problème (2.38) pour valider numériquement la stabilité asymptotique de la solution. Les résultats numériques suivants ne donnent pas la solution exacte de (2.38), mais ils montrent la stabilité asymptotique et l'instabilité de la solution de (2.38) selon le paramètre physique  $a\tau$ . Nous n'utilisons que les premiers termes ( $N = 0$ ,  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 5$  et  $N = 15$ ) dans l'expression (2.60) pour montrer la stabilité asymptotique. Les différents calculs sont faits en utilisant MATLAB 2011a avec la fonction *linsolve* qui utilise la méthode *LU* pour des problèmes comme le nôtre (voir aussi [19]). Ces résultats numériques valident le résultat théorique obtenu dans le théorème 2.4.5.



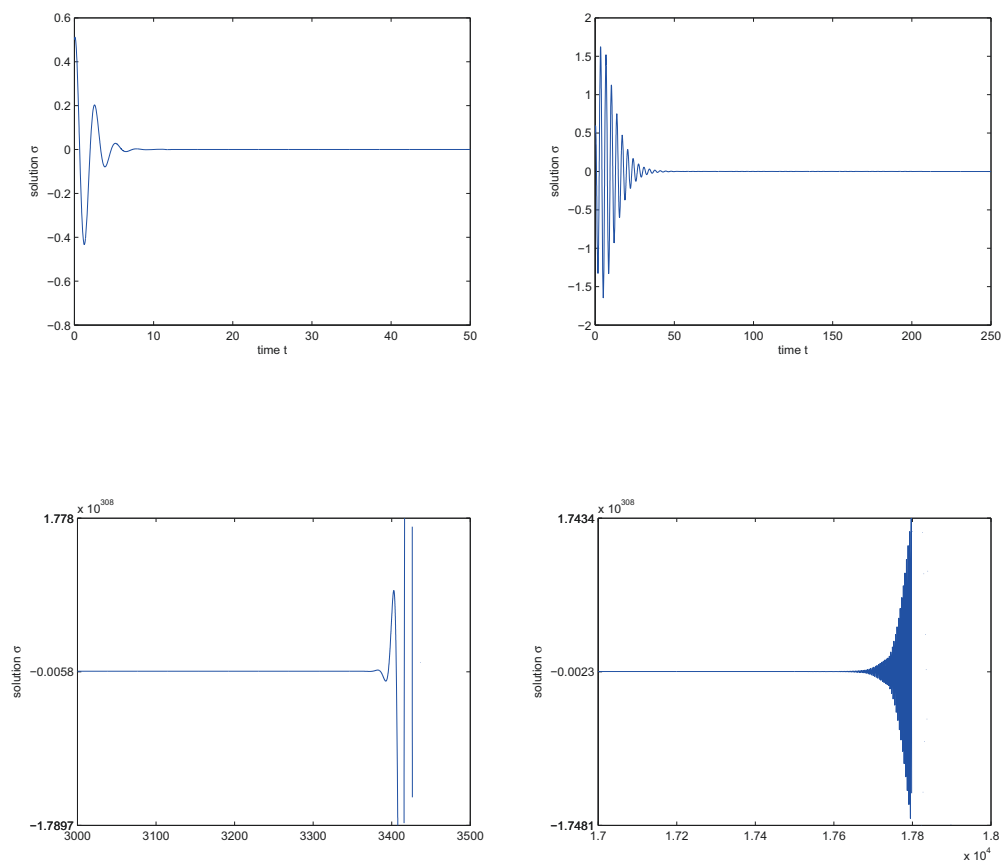


FIGURE 2.5

Les solutions  $\sigma(t)/\sigma_0$  de (2.38). En haut on prend  $\tau = 0.5, 0.8$  et  $a = \pi/2$ . En bas on prend  $\tau = 7, 1$  et  $a = \pi/2, 1.66$ . Les solutions sont représentées pour  $N = 0$ .

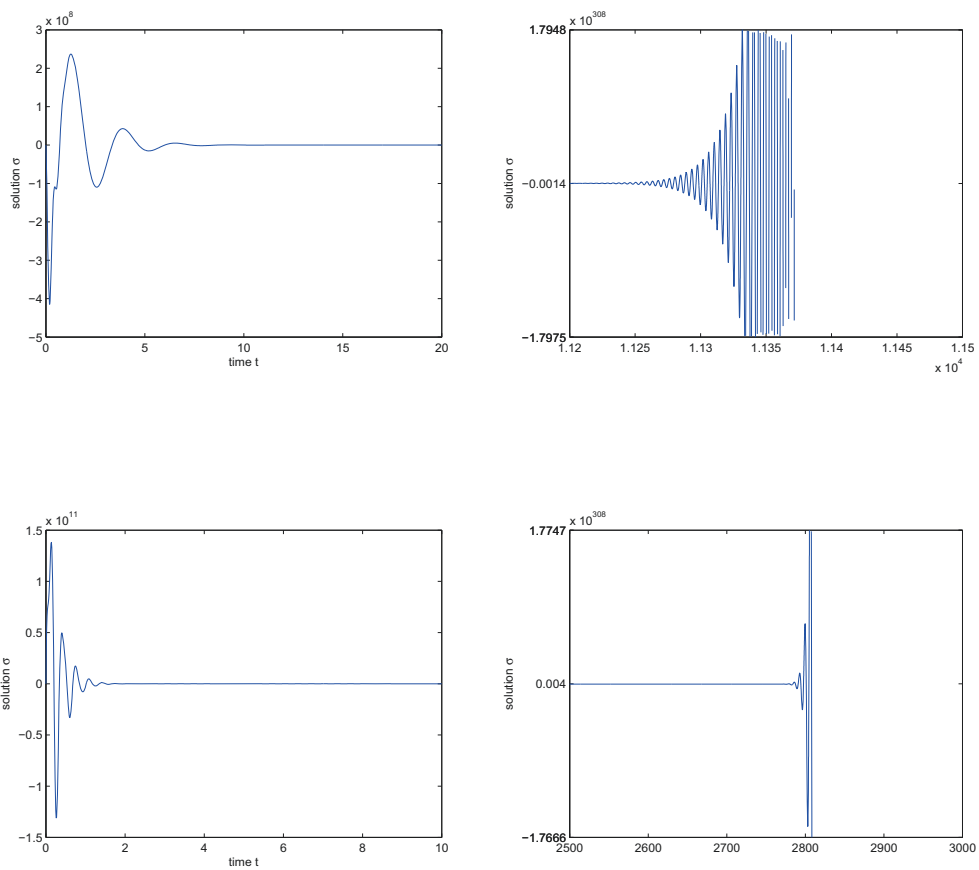


FIGURE 2.6

Les solutions  $\sigma(t)/\sigma_0$  de (2.38). En haut on prend  $\tau = 0.5, 1.1$ ,  $a = \pi/2$  et  $N = 1$ . En bas on prend  $\tau = 0.4, 2$ ,  $a = \pi, \pi/2$  et  $N = 2$ .

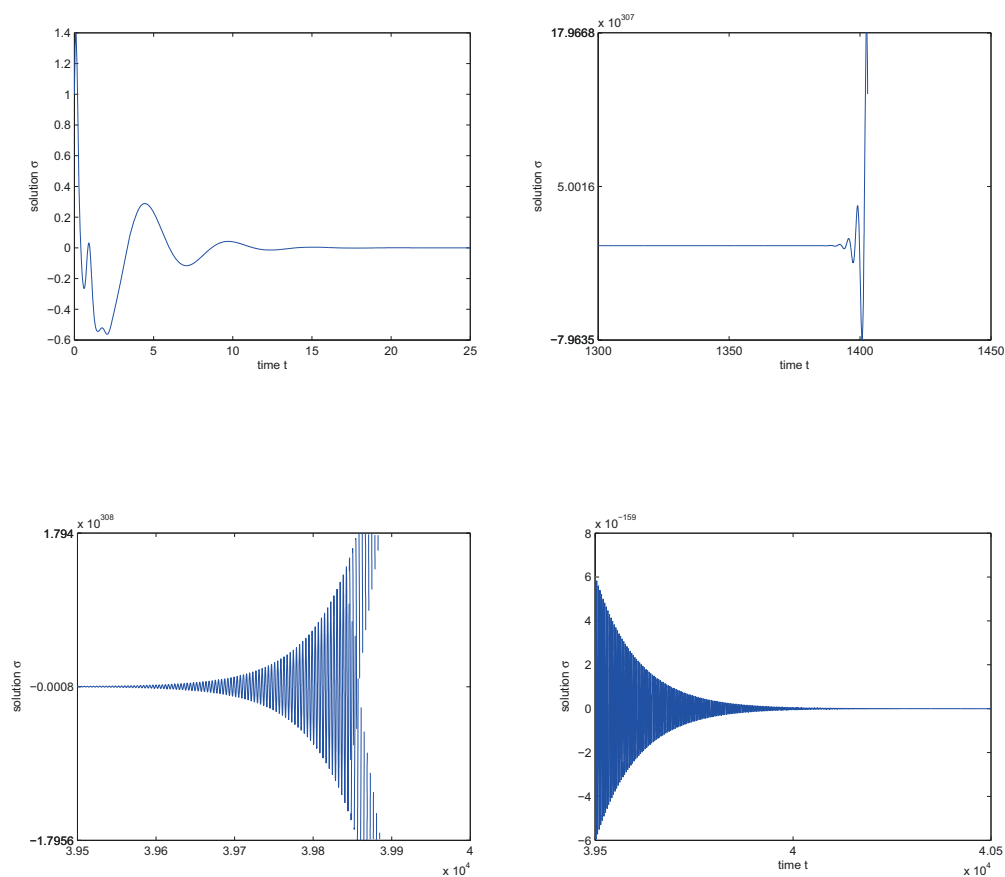


FIGURE 2.7

Les solutions  $\sigma(t)/\sigma_0$  de (2.38). En haut on prend  $\tau = 1$  et  $a = \pi/4, \pi$ . En bas on prend  $a = 1.61, 1.55$  et  $\tau = 1$ . Les solutions sont représentées pour  $N = 5$ .

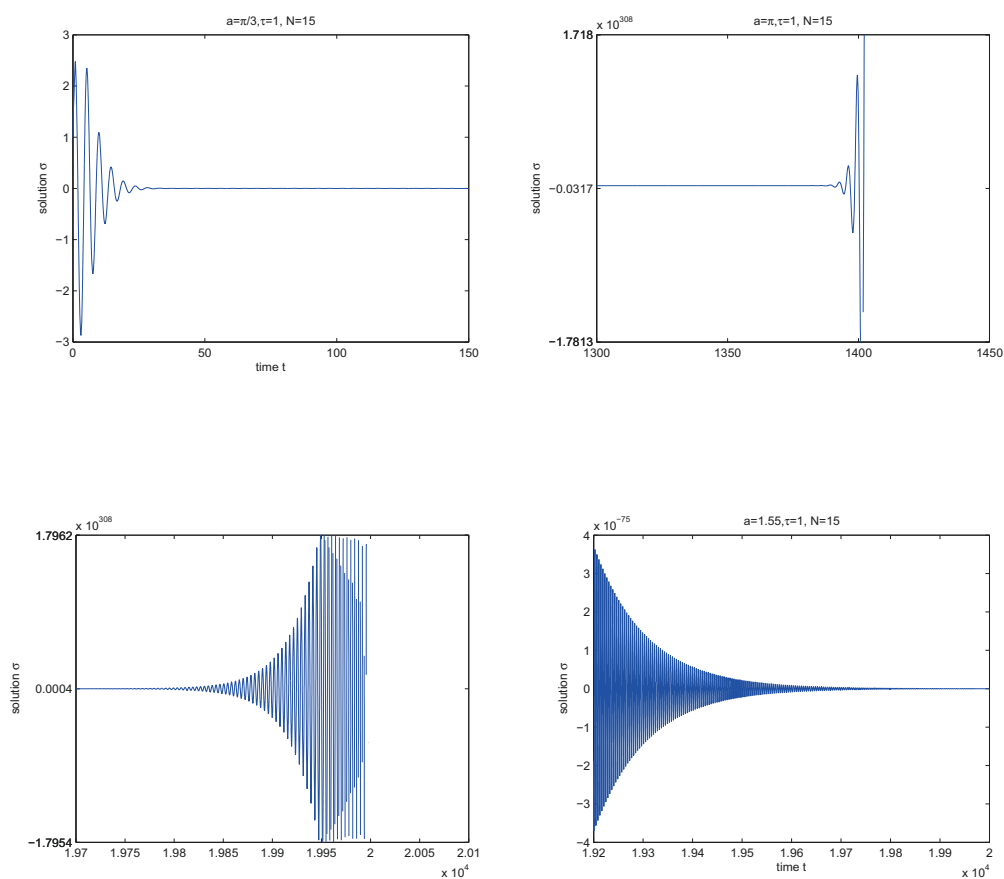


FIGURE 2.8

Les solutions  $\sigma(t)/\sigma_0$  de (2.38). En haut on prend  $\tau = 1$ , et  $a = \pi/3, \pi$ . En bas on prend  $\tau = 1$ ,  $a = 1.65, 1.55$ . Les solutions sont représentées pour  $N = 15$ .

### 2.5.1 Discussions physiques

Les résultats du paragraphe précédent montrent que si  $0 < a\tau < \pi/2$  avec  $a = MbS(\partial n/\partial\sigma)(\sigma_0)$ , alors la courbe "contraintes-déformations" est horizontale suivant  $\sigma = \sigma_0$ . D'autre part, si  $a\tau$  devient supérieur à  $\pi/2$ , alors des instabilités périodiques apparaissent. Plusieurs paramètres physiques, i.e.,  $M$ ,  $bS$ ,  $(\partial n/\partial\sigma)(\sigma_0)$  et  $\tau$  jouent un rôle dans la stabilité de la courbe "contraintes-déformations". En effet,

1. **La valeur de la rigidité de la machine  $M$ .** Cela a été vérifié au cours de la déformation des alliages Cu-Al par Coujou et Vergnol [81] : avec une machine à rigidité d'ur, les courbes "contraintes-déformations" sont observées et deviennent lisses avec une machine à rigidité faible.
2.  **$Sb$  est l'amplitude d'une étape élémentaire de la déformation.** Dans le cas du m'clage, les étapes élémentaires sont micromacles [81, 80, 82],  $Sb$  est grand et  $a\tau$  est supérieur à  $\pi/2$ . Cela explique les instabilités observées dans [81, 80, 82].
3. **Le paramètre  $(\partial n/\partial\sigma)(\sigma_0)$ .** Dans le cas de l'effet PLC, les dislocations sont épinglées par les impuretés et sont déverrouillées lorsque la contrainte devient grande. Dans ce cas, l'instabilité peut être attribuée à des grandes valeurs de  $(\partial n/\partial\sigma)(\sigma_0)$  [29, 28].

## 2.6 MLMLG à double retard

Dans ce paragraphe (voir [37]), nous considérons le cas général où plusieurs déformations mécanismes se produisent simultanément. Nous supposons que les deux mécanismes de déformation sont actifs et que  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  sont les retards correspondants. Alors, nous supposons que :

$$\dot{S}(t) = S_1\delta_{\tau_1} + S_2\delta_{\tau_2}, \quad (2.63)$$

avec  $S = S_1 + S_2$ . On peut réécrire l'équation (2.22) comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) = b \sum_{i=0}^2 \langle \delta_{\tau_i}, S_i n(\sigma(t - \cdot)) \rangle + \frac{\dot{\sigma}(t)}{M}. \quad (2.64)$$

Par conséquent :

$$M\dot{\varepsilon}(t) = Mb \sum_{i=0}^2 \langle \delta_{\tau_i}, S_i n(\sigma(t - \cdot)) \rangle + \dot{\sigma}(t). \quad (2.65)$$

Pour étudier la stabilité du système des courbes "contraintes-déformations", on linéarise les fonctions  $n(\sigma - \tau_i)$ ,  $i = 1, 2$ , au voisinage de  $\sigma_0$  (Développement de Taylor à l'ordre un) :

$$n(\sigma(t - \tau_i)) = n(\sigma_0) + \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_i) - \sigma_0). \quad (2.66)$$

En remplaçant dans (2.65), on obtient :

$$\begin{aligned} M\dot{\varepsilon}(t) &= Mbn(\sigma_0)(S_1 + S_2) + MbS_1 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_1)) \\ &\quad + MbS_2 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_2)) + \dot{\sigma}(t) - Mb \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)\sigma_0(S_1 + S_2). \end{aligned}$$

En utilisant la condition initiale :

$$M\dot{\varepsilon}(t) = Mbn(\sigma_0)S = Mbn(\sigma_0)(S_1 + S_2),$$

on obtient le nouveau modèle décrivant l'équation d'évolution temporelle de la contrainte pour les instabilités de la déformation plastique :

$$\dot{\sigma}(t) = -\alpha\sigma(t - \tau_1) - \beta\sigma(t - \tau_2) + \gamma, \quad (2.67)$$

avec,

$$\alpha = MbS_1 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0), \quad \beta = MbS_2 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0), \quad \gamma = (\alpha + \beta)\sigma_0.$$

### 2.6.1 Existence et unicité

L'équation (2.67) est une équation différentielle différence à double retard  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . La solution de (2.67) est déterminée uniquement lorsque la donnée initiale  $\phi$  est bien définie sur un intervalle initial ( $\phi$  n'est pas nécessaire d'être dérivable). Pour définir une fonction  $\sigma$  dans (2.67) pour  $t \geq 0$ , nous imposons une donnée initiale sur l'intervalle  $[-\tau, 0]$ , avec  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ . En effet, soit  $\phi$  une fonction donnée continue sur  $[-\tau, 0]$ , on considère alors le problème (2.67) avec la donnée initiale  $\phi$  :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -\alpha \sigma(t - \tau_1) - \beta \sigma(t - \tau_2) + \gamma & \text{si } t > 0 \\ \sigma(t) = \phi(t) & \text{si } t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.68)$$

Le résultat suivant démontre l'existence et l'unicité du problème (2.68).

**Théorème 2.6.1** *Le problème (2.68) admet une unique solution  $\sigma$  définie sur  $[-\tau, \infty)$  via la donnée initiale  $\phi$ .*

**Preuve.** Nous avons  $\gamma = (\alpha + \beta)\sigma_0$ . On considère  $\psi = \sigma - \sigma_0$ ,  $\phi_0(t) = \phi(t) - \sigma_0$ , alors le système (2.68) est équivalent au système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -\alpha \psi(t - \tau_1) - \beta \psi(t - \tau_2) & \text{si } t > 0 \\ \psi(t) = \phi(t) - \sigma_0 & \text{si } t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.69)$$

Posons  $v(t) = -\alpha \psi(t - \tau_1) - \beta \psi(t - \tau_2)$ , alors :

$$\dot{\psi}(t) = v(t), \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.70)$$

Soit  $\tau^* = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ . Si  $t \in [0, \tau^*]$ , alors, pour  $i = 1, 2$  on a  $t_i = t - \tau_i \in [-\tau, 0]$  et  $\psi(t_i) = \phi_0(t_i)$  est continue par les hypothèses. Donc,  $v$  est continue sur  $[0, \tau^*]$ . En intégrant la relation (2.70), nous trouvons qu'il existe une fonction unique  $\psi(t)$  vérifie (2.69). Comme cette fonction est continue sur  $[0, \tau^*]$ , alors,  $v$  est continue sur  $[\tau^*, 2\tau^*]$ . D'après (2.70) il existe une fonction unique, continue vérifie (2.69) sur  $[\tau^*, 2\tau^*]$ . De la même manière nous complétons la démonstration.  $\square$

## 2.6.2 Stabilité asymptotique

Dans ce paragraphe, nous étudions la région de stabilité pour l'équation différentielle à double retard (2.68) par l'analyse de l'équation caractéristique correspondante :

$$\dot{\sigma}(t) = -\alpha \sigma(t - \tau_1) - \beta \sigma(t - \tau_2). \quad (2.71)$$

L'équation (2.71) a une solution non triviale  $c e^{\lambda t}$  si et seulement si :

$$\lambda + \alpha e^{-\lambda \tau_1} + \beta e^{-\lambda \tau_2} = 0. \quad (2.72)$$

La région exacte de stabilité asymptotique de la solution du système (2.68) est obtenue par les racines d'une équation caractéristique quand elles sont dans le demi-plan à gauche, d'après le théorème 2.2.12 nous trouvons que la solution  $\sigma$  de (2.68) est asymptotiquement stable pour toute fonction continue  $\phi$  sur  $[-\tau, 0]$  si l'équation (2.72) n'a pas de zéro dans  $\mathbb{C}^+$ .

Par la suite, nous étudions la stabilité locale de la solution de (2.67) en utilisant [6, 7, 34, 47, 62, 71]. La stabilité asymptotique locale est établie dans le cas intéressant  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$ , et  $\alpha \neq \beta$ .

**Remarque 2.6.2** *Pour normaliser l'équation (2.72), nous considérons le changement de variables :*

$$z = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \zeta = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \omega_1 = \alpha \tau_1, \quad \omega_2 = \alpha \tau_2.$$

*Ainsi, l'équation (2.72) devient l'équation caractéristique normalisée :*

$$z = -e^{-z \omega_1} - \zeta e^{-z \omega_2}. \quad (2.73)$$

Maintenant, nous présentons le résultat de la stabilité asymptotique de la solution du système (2.68) dans différents cas :



**Proposition 2.6.3** *Supposons que  $\beta < \alpha$  et  $\tau_1 \leq \frac{1}{\alpha + \beta}$ . Alors, pour tout retard  $\tau_2 > 0$ , et pour toute fonction  $\phi$  continue sur  $[-\tau, 0]$ , la solution de (2.68) est asymptotiquement stable au voisinage de  $\sigma_0$ .*

**Preuve.** Si  $\beta < \alpha$  alors  $\zeta \in [0, 1]$  et  $\omega_1 \leq \frac{1}{1 + \zeta}$ . On applique [47, Lemme 2.4] (voir [71], [35]). Nous déduisons que toutes les racines de (2.73) ont des parties réelles négatives.  $\square$

La proposition 2.6.3 donne une valeur maximale de  $\tau_1$  pour avoir la stabilité asymptotique de la solution. Par le théorème de Rouché [24] et le lemme 2.2 dans [47], on peut prouver la proposition suivante qui donne une valeur maximale de  $\tau_1$  pour l'instabilité :

**Proposition 2.6.4** *Si  $\tau_1 \neq \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{2j\pi}{\alpha}$ , ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) et  $\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha}$ , pour  $\tau_2 > 0$ , il existe une constante  $\delta > 0$ , telle que lorsque  $\frac{\beta}{\alpha} < \delta$ , la solution de l'équation (2.68) est instable.*

**Remarque 2.6.5** *Soit  $\tau_1$  fixé, tel que  $\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha}$ , alors pour les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , il existe une valeur critique  $\tau_{0,c}$  telle que si  $\tau_2$  est inférieure à  $\tau_{0,c}$ , alors la solution de l'équation (2.68) est stable (Test 2).*

*En outre, si le retard  $\tau_1$  est dans la région  $[\frac{1}{\alpha + \beta}; \frac{\pi}{2\alpha}]$ , la stabilité de la solution de l'équation (2.68) ne dépend pas seulement d'une valeur critique de  $\tau_2$ .*

Une application de [47, théorème 3.6] donne un résultat de la région stable de l'équation (2.68) dans un autre cas :

**Proposition 2.6.6** *Supposons que  $\beta > \alpha$  et  $\frac{\pi}{2\tau_1} < \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}$ . Alors, il existe  $\tau_{2,c} > 0$ , tel que pour tout retard  $\tau_2 \in [0, \tau_{2,c}]$ , et pour toute fonction  $\phi$  continue sur  $[-\tau, 0]$ , la solution de (2.68) est asymptotiquement stable au voisinage de  $\sigma_0$ .*

**Remarque 2.6.7** Le temps critique  $\tau_{2,c} > 0$  dans la proposition 2.6.4 est donné par :

$$\tau_{2,c} = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left( -\frac{\alpha \cos \omega_0 \alpha \tau_1}{\beta} \right), \quad (2.74)$$

où  $\omega_0$  est la solution unique de l'équation suivante :

$$\frac{\omega^2 + 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}{2 \omega} = \sin \omega \alpha \tau_1.$$

**Remarque 2.6.8** L'activation de  $n$  systèmes de déformation simultanément ( $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 3$ ), conduit à introduire  $n$  retards  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\dot{S} = \sum_{i=1}^{i=n} S_i \delta_{\tau_i} \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=1}^{i=n} S_i. \quad (2.75)$$

Nous obtenons ainsi un modèle plus général que (2.67) :

$$\dot{\sigma}(t) = - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \sigma(t - \tau_i) + \Theta, \quad (2.76)$$

où

$$\alpha_i = M b S_i \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0); \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \Theta = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \sigma_0.$$

En fait, le théorème 1.1.1 dans [31] nous donne l'existence et l'unicité de la solution de (2.76). L'équation caractéristique associée à l'équation homogène associée à (2.76) est :

$$\lambda + \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\lambda \tau_i} = 0. \quad (2.77)$$

**Proposition 2.6.9** Supposons que  $\alpha_j > 0$ ,  $\tau_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

1. Si  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j < 1$ , alors toutes les racines de (2.77) ont des parties réelles négatives.

2. Supposons que toutes les racines de (2.77) ont des parties réelles négatives, et soit  $\lambda = \alpha + i\beta$  une racine de (2.77) avec  $0 < \tau_j\beta < \pi/2$ ,  $j = 1, \dots, n$ , alors :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j < \pi/2.$$

**Preuve.**

1. On écrit l'équation (2.77) sous la forme suivante :

$$\lambda + \sum_{j=1}^n \alpha_j + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j \frac{e^{-\lambda\tau_j-1}}{\lambda\tau_j} = 0. \quad (2.78)$$

On pose :

$$H_1(\lambda) = \lambda + \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad H_2(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j \frac{e^{-\lambda\tau_j-1}}{\lambda\tau_j}.$$

On a  $H_1$  n'a pas de zéros dans  $\mathbb{C}^+$ . D'autre part nous avons :

$$|H_1(\lambda)| > |\lambda| \quad \text{sur } \mathbb{C}^0.$$

Par ailleurs, d'après l'hypothèse, nous avons :

$$|H_2(\lambda)| < |\lambda| \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j < |\lambda| \quad \text{sur } \mathbb{C}^0.$$

Alors,

$$|H_2(\lambda)| < |H_1(\lambda)|.$$

D'après le théorème de Rouché [1], la fonction  $H(\lambda) = H_1(\lambda) + H_2(\lambda)$  n'a pas de zéro dans  $\mathbb{C}^+$ .

2. Comme :

$$-a = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-a\tau_j} \cos b\tau_j, \quad b = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{-a\tau_j} \sin b\tau_j,$$

alors :

$$1 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j e^{-a\tau_j} \frac{\sin b\tau_j}{b\tau_j} > \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j.$$

Par conséquent, nous avons :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \tau_j < \frac{\pi}{2}.$$

□

### 2.6.3 Validation numérique

Les résultats numériques de cette section sont obtenus en utilisant MATLAB. En particulier, nous utilisons DDE23 (voir l'appendice A.1) sur la base de Runge–Kutta [73]. Ces résultats numériques ne donnent pas la solution exacte de (2.68), mais ils montrent la stabilité asymptotique et l'instabilité de la solution de (2.68) selon les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Pour tous les exemples suivants, nous considérons la fonction  $\phi(t) = t + 1$  sur  $[-10; 0]$ .

#### Test numérique 1

Nous choisissons les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  telles que  $\alpha > \beta$ . Pour des valeurs différentes de  $\tau_2$ , la solution de (2.69) est asymptotiquement stable si  $\tau_1$  est plus petit que  $\frac{1}{\alpha + \beta}$  (figure 2.9). D'autre part, si  $\tau_1$  est dans un petit voisinage de  $\frac{1}{\alpha + \beta}$ , avec  $\tau_1 > \frac{1}{\alpha + \beta}$ , la solution est stable pour les petites valeurs de  $\tau_2$ ; l'instabilité apparaît pour des valeurs assez grandes de  $\tau_2$  (figure 2.10).

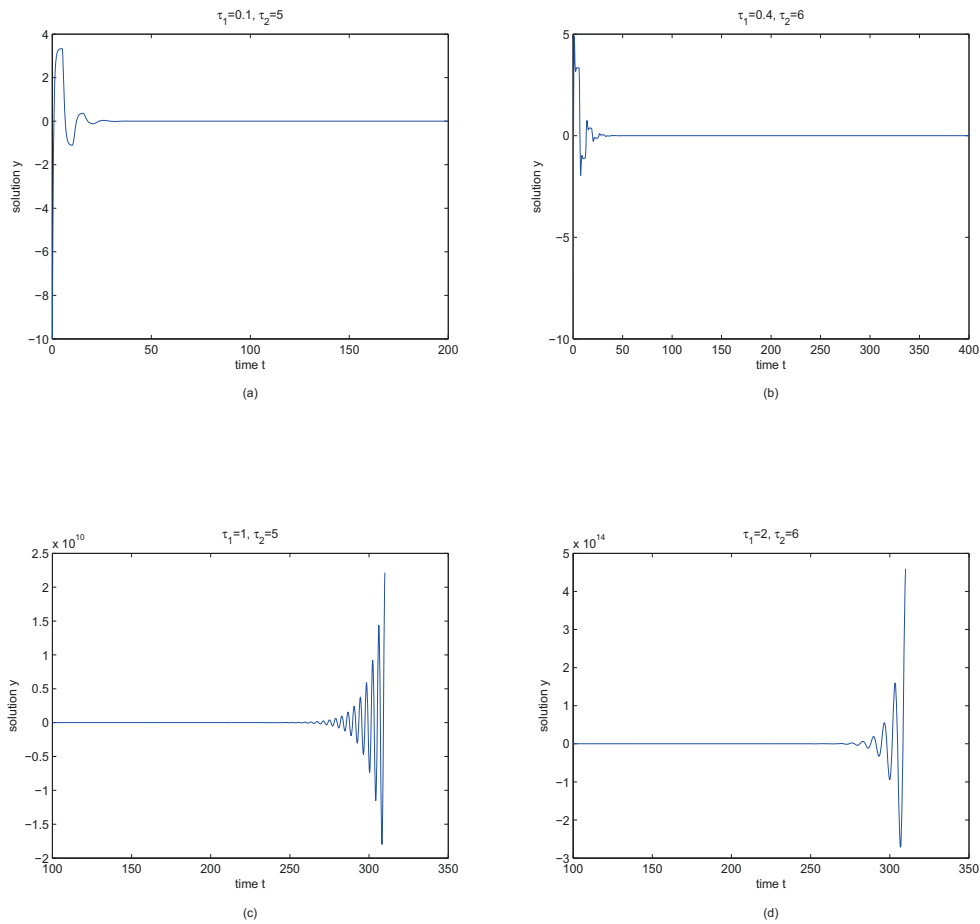


FIGURE 2.9 – On prend  $(\alpha; \beta) = (\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ . Pour (a) et (b), la stabilité d’une solution  $\psi(t)$  de l’équation (2.69) pour  $\tau_1 = 0.1; 0.4$  et  $\tau_2 = 5; 6$ . Pour (c) et (d), l’instabilité d’une solution  $\psi(t)$  de l’équation (2.69) pour  $\tau_1 = 1; 2$  et  $\tau_2 = 5; 6$ . L’instabilité apparaît dans une période courte pour des valeurs assez grandes de  $\tau_2$ .

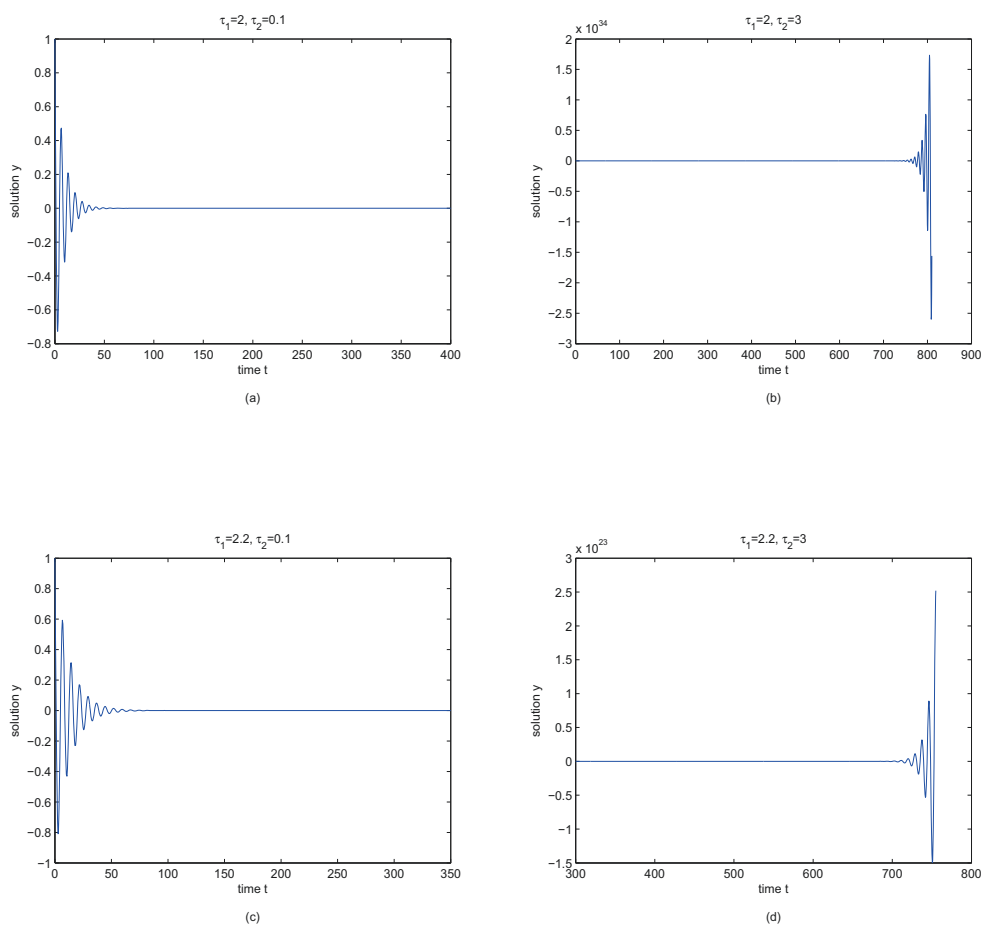


FIGURE 2.10 –  $(\alpha, \beta) = (0.7; 0.3)$ . À gauche, la stabilité d'une solution  $\psi(t)$  de l'équation (2.69) pour  $\tau_1 = 2; 2.2$  ( $\tau_1 > 1$ ) et  $\tau_2 = 0.1$ . À droite, l'instabilité d'une solution  $\psi(t)$  de l'équation (2.69) pour  $\tau_1 = 2; 2.2$  et  $\tau_2 = 3$ .

## Test numérique 2

Le paramètre  $\delta$  dans la proposition 2.6.4, dépend de  $\tau_1$  et de  $\tau_2$ . Si nous fixons  $\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha}$ , on peut contrôler  $\delta$  par  $\tau_2$ . Avec un choix de  $\tau_1$  tel que  $\tau_1 = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2\alpha}$ , la stabilité de la solution dépend de la valeur critique de  $\tau_2$ , dans les deux cas :  $\alpha < \beta$  ou  $\alpha > \beta$  (figure 2.11). Mais si  $\tau_1 = \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2\alpha}$ , nous ne pouvons pas conclure de la région stable de l'équation (figure 2.12).

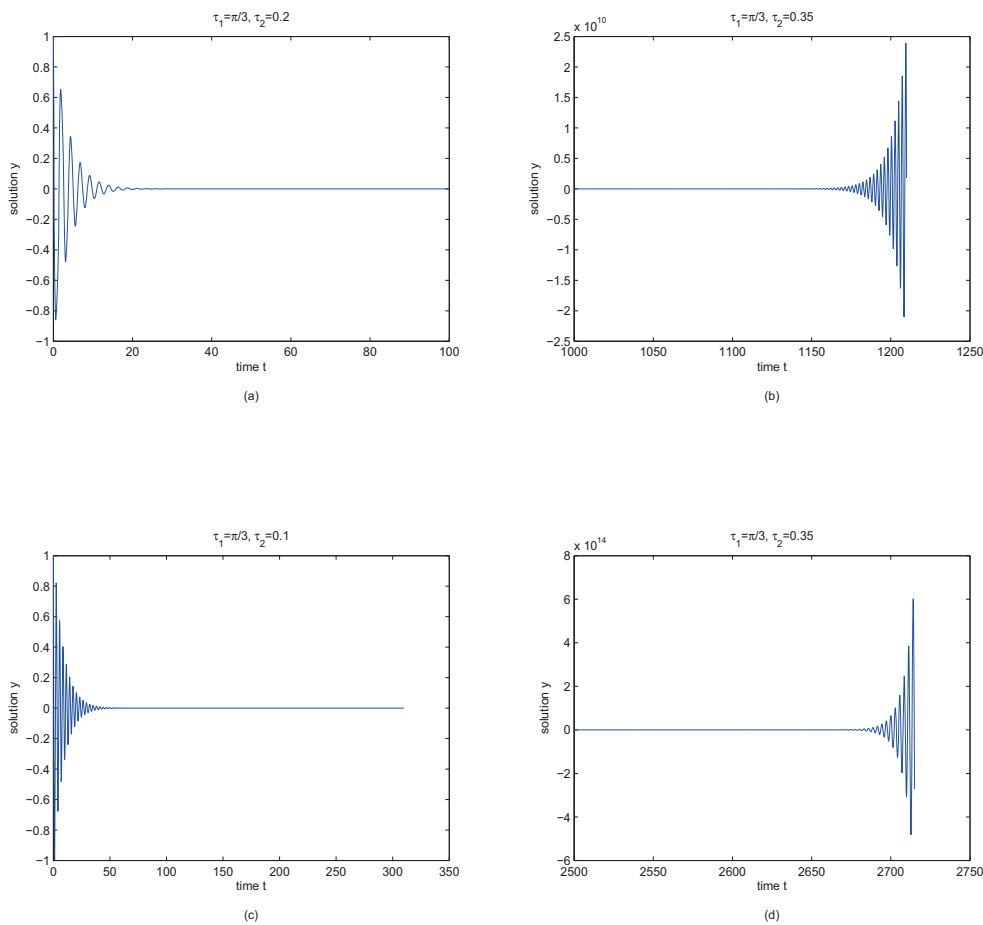


FIGURE 2.11 – En haut : pour  $(\alpha; \beta) = (2; 3)$ , la solution  $\psi(t)$  de (2.69) est stable pour  $\tau_2 < 0.31$ , la solution est instable si  $\tau_2 > 0.32$ . En bas : pour  $(\alpha; \beta) = (2; 1.5)$ , la solution est instable si  $\tau_2 > 0.22$ , et est stable pour  $\tau_2 < 0.21$ .

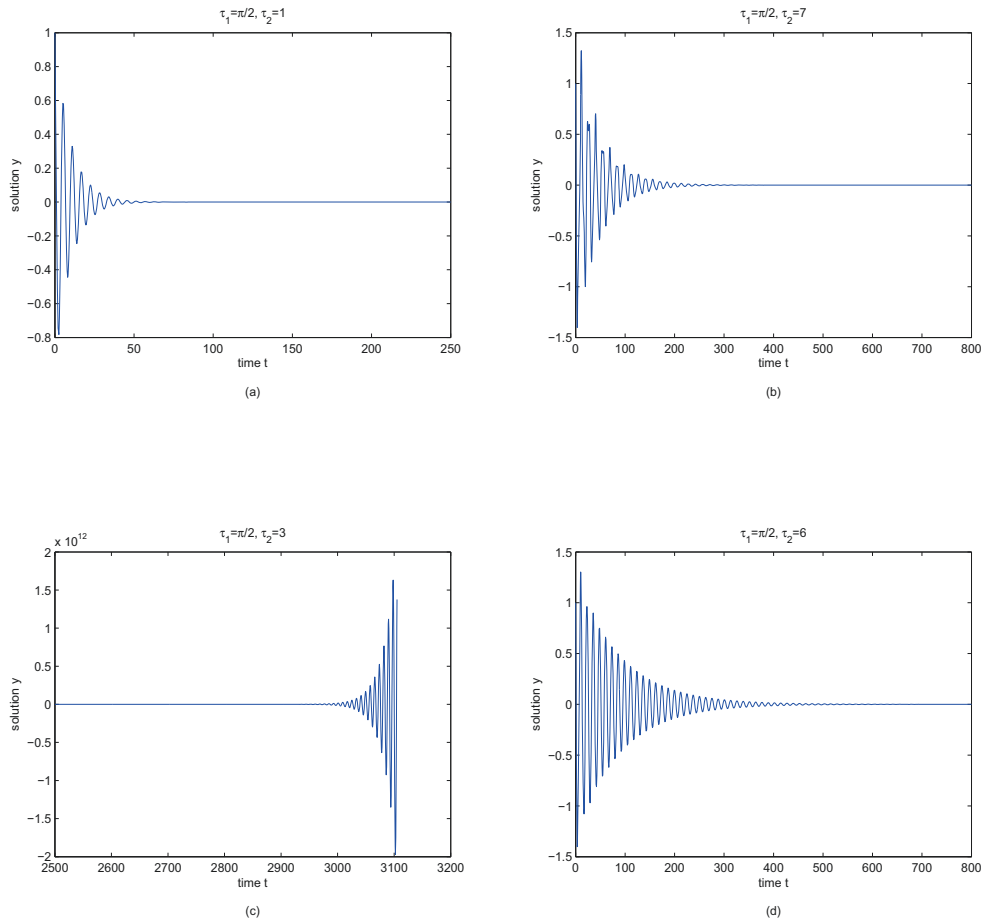


FIGURE 2.12 – Pour  $(\alpha; \beta) = (0.6; 0.4)$  : stabilité de la solution de l'équation (2.69) pour  $\tau_2 = 1$ ,  $\tau_2 = 7$  et  $\tau_2 = 6$ . Instabilité de la solution pour  $\tau_2 = 3$ .

### Test numérique 3

Nous validons le résultat de la Proposition 2.6.6. Nous avons d'abord calculé la valeur critique de  $\tau_{2,c}$ , qui est donnée par la formule (2.74), dans laquelle l'échange de stabilité peut se produire (figure 2.13).



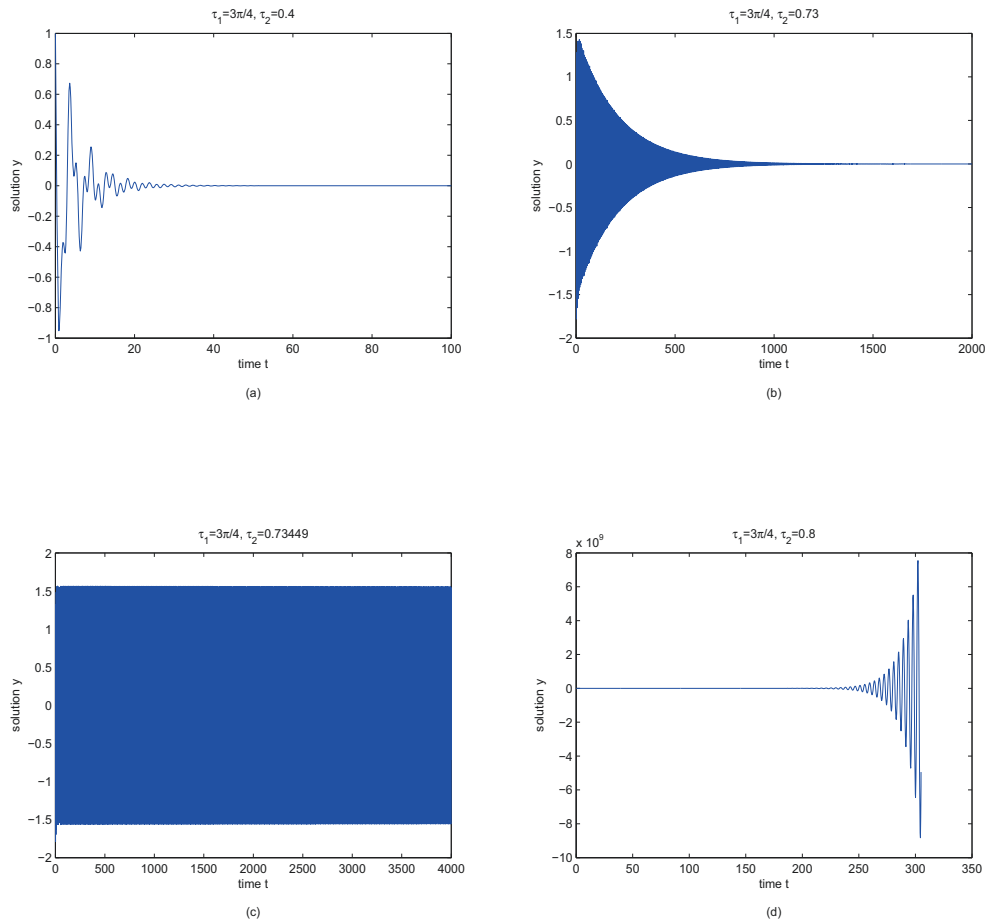


FIGURE 2.13 – Pour  $(\alpha; \beta) = (1; 2)$ , et  $\tau_1 = \frac{3\pi}{4}$  : Stabilité de la solution  $\psi(t)$  de (2.69) si  $\tau_2 < 0.7344$ . Pour  $\tau_2 = 0.7344$ , le phénomène de la bifurcation de Hopf. Pour  $\tau_2 > 0.7344$ , alors la solution  $\psi(t)$  est instable.

## 2.6.4 Discussion et conclusion

Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les résultats des régions de la stabilité/instabilité/bifurcation de Hopf du matériel stressé dans divers cas.

Plusieurs facteurs physiques :  $M$ ,  $b S_1$ ,  $b S_2$ ,  $b (S_1 + S_2)$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\Lambda_1 = \alpha + \beta = M b \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(S_1 + S_2)$ , et  $\Lambda_2 = M b \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)\sqrt{S_2^2 - S_1^2}$ , jouent un rôle dans la stabilité du matériau (voir le tableau).

**Tableau de stabilité/instabilité/bifurcation de Hopf du matériau**

$S_1 > S_2$ ; $\Lambda_1 \tau_1 < 1$ et $\tau_2 > 0$	Stabilité	Fig. 2.9 (a) et (b)
$S_1 > S_2$ ; $\Lambda_1 \tau_1 \geq 1$ ; $\tau_2$ petit	Stabilité	Fig. 2.10 (a) et (c)
$S_1 > S_2$ ; $\Lambda_1 \tau_1 \gg 1$ ; $\tau_2 > 0$	Instabilité	Fig. 2.9 (c) et (d)
$S_1 > S_2$ ; $2\alpha \tau_1 > \pi$ ; $\tau_2 > \tau_{0,c}$	Instabilité	Fig. 2.11 (d)
$S_1 > S_2$ ; $2\alpha \tau_1 > \pi$ ; $\tau_2 < \tau_{0,c}$	Stabilité	Fig. 2.11 (c)
$S_1 < S_2$ ; $\pi < 2\Lambda_2 \tau_1 < 3\pi$ ; $\tau_2 < \tau_{2,c}$	Stabilité	Fig. 2.13 (a) et (b)
$S_1 < S_2$ ; $\pi < 2\Lambda_2 \tau_1 < 3\pi$ ; $\tau_2 > \tau_{2,c}$	Instabilité	Fig. 2.13 (d)
$S_1 < S_2$ ; $\pi < 2\Lambda_2 \tau_1 < 3\pi$ ; $\tau_2 = \tau_{2,c}$	bifurcation de Hopf	Fig. 2.13 (c)
$S_1 < S_2$ ; $2\alpha \tau_1 > \pi$ ; $\tau_2 > \tau_0$	Instabilité	Fig. 2.11 (b)
$S_1 < S_2$ ; $2\alpha \tau_1 > \pi$ ; $\tau_2 < \tau_0$	Stabilité	Fig. 2.11 (a)

Le rôle de la valeur de la rigidité  $M$  de la machine est établie par Coujou et Vergnol [22] (Déformation des alliages Cu–Al : les courbes "contraintes-déformations" dentelées sont observées et ces courbes deviennent lisses avec une machine à rigidité faible). Ces résultats sont validés dans le cas des instabilités de mâclage pour des valeurs grandes de  $b S_1$  (ou  $b S_2$ ), (voir, [82, 80, 81]). Dans le cas de l'effet PLC (les instabilités peuvent être attribuées pour des valeurs grandes de  $\Lambda_1$  or  $\Lambda_2$ ), (voir, [29, 28]).



# Chapitre 3

## Modèle non linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé (MNLMLG)

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle non linéaire de Mecking–Lücke–Grilhé, décrivant l'évolution temporelle de simple et de multi-instabilités de la déformation plastique du monocristal sous contrainte. Ce modèle étend le problème linéaire considéré dans le chapitre 2. En utilisant l'analyse non linéaire, nous présentons quelques résultats d'existence et de stabilité de la solution en fonction des caractéristiques du matériau et des temps de retard. Dans ce chapitre, nous présentons aussi des exemples numériques pour valider les résultats théoriques.

### 3.1 MNLMLG à simple retard

Dans ce paragraphe, nous allons déduire le problème non linéaire de MLG à simple retard en utilisant le développement de Taylor, à l'ordre deux. L'équation (2.33) est équivalente à :

$$M\dot{\varepsilon}(t) = MbSn(\sigma(t - \tau)) + \dot{\sigma}(t). \quad (3.1)$$

Le développement de Taylor de  $n(\cdot)$  à l'ordre deux au voisinage de  $\sigma = \sigma_0$  donne :

$$\begin{aligned} n(\sigma(t - \tau)) &= n(\sigma_0) + \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau) - \sigma_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau) - \sigma_0)^2. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} Mbn(\sigma_0)S &= MbSn(\sigma_0) + MbS \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau) - \sigma_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} MbS \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau) - \sigma_0)^2 + \dot{\sigma}(t). \end{aligned}$$

Nous déduisons alors (MNLMLG) à simple reterd :

$$\dot{\sigma}(t) + \beta\sigma^2(t - \tau) + \theta\sigma(t - \tau) + \xi = 0, \quad (3.2)$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha - 2\beta\sigma_0, \quad \xi = \beta\sigma_0^2 - \alpha\sigma_0, \\ \alpha &= MbS \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma_0) > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} MbS \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma_0) < 0, \end{aligned}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres physiques.

### 3.1.1 Existence et unicité

Nous démontrons dans ce paragraphe l'existence et l'unicité de la solution de (3.2) sur un intervalle comme  $[-\tau, \delta]$ ,  $\delta > 0$ , et le théorème 3.1.3 montre que cette solution est prolongeable continûment sur  $[-\tau, \infty[$ .

Soit  $\phi \in \mathcal{C}_\tau := \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R})$ , et  $\phi(t) = \sigma(t)$  pour tout  $t \in [-\tau, 0]$ . Posons  $\mathcal{C}_{\tau, \infty} = \mathcal{C}([-\tau, \infty[; \mathbb{R})$ , pour  $c > 0$  une constante, on définit la région

$$\mathcal{N}_c = \{(u, v) \in \mathcal{C}_{\tau, \infty} \times \mathcal{C}_{\tau, \infty}; |u(t)| + |v(t)| \leq c, \quad \forall t \geq -\tau\}.$$

On considère l'équation (3.2) avec la donnée initiale  $\phi$  :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = f(\sigma(t), \sigma(t - \tau)), & \text{si } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t), & \text{si } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $f(\sigma(t), \sigma(t - \tau)) = -\beta\sigma^2(t - \tau) - \theta\sigma(t - \tau) - \xi$ .

**Remarque 3.1.1** *Supposons que  $(u_1, v_1) \in \mathcal{N}_c$ ,  $(u_2, v_2) \in \mathcal{N}_c$ . Alors :*

$$\begin{aligned} |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| &\leq |\beta||v_1^2 - v_2^2| + |\theta||v_1 - v_2| \\ &= (-\beta|v_1 + v_2| + \theta)|v_1 - v_2| \quad (\beta < 0, \theta > 0) \\ &\leq (-2c_1\beta + \theta)|v_1 - v_2| \\ &= k|v_1 - v_2| \quad \text{avec } k = -2c_1\beta + \theta, \\ &\leq k(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathcal{N}_c$ .

Nous adaptons la démonstration donnée dans [7, Théorème 11.3], pour démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.1.2** *Supposons que  $c_2 = \max_{\mathcal{N}_c} |f(u, v)|$ ,  $m_\phi = \max_{-\tau \leq t \leq 0} |\phi(t)|$  et  $2m_\phi < c$ . Alors, le problème (3.3) admet une unique solution pour  $-\tau \leq t \leq \delta$ , où  $\delta$  est une constante qui vérifie :*

$$0 < \delta < \frac{c - 2m_\phi}{2c_2}. \quad (3.4)$$

**Preuve.**

1. **Existence** : Soit  $\{\sigma_n(t)\}_{n \geq 0}$  une suite définie par :

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0, \\ \phi(0), & t > 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

et pour  $n \geq 0$  :

$$\sigma_{n+1}(t) = \begin{cases} \phi(0) + \int_0^t f(\sigma_n(s), \sigma_n(s - \tau)) ds, & t > 0, \\ \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Montrons que  $(\sigma_n(\cdot), \sigma_n(\cdot - \tau))$  reste dans  $\mathcal{N}_c$  avec  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Utilisons le procédé de récurrence. Nous avons :

$$|\sigma_0(t)| + |\sigma_0(t - \tau)| \leq 2m_\phi, \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

alors,  $(\sigma_0(\cdot), \sigma_0(\cdot - \tau)) \in \mathcal{N}_c$ . Supposons que  $(\sigma_n(\cdot), \sigma_n(\cdot - \tau)) \in \mathcal{N}_c$ , alors, d'après (3.6) nous avons :

$$\begin{aligned} |\sigma_{n+1}(t)| &\leq |\phi(0)| + \int_0^t |f(\sigma_n(s), \sigma_n(s - \tau))| ds \\ &\leq m_\phi + c_2 t \leq m_\phi + c_2 \delta, \quad \text{pour } 0 < t \leq \delta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Comme cette inégalité est valide pour  $-\tau \leq t \leq 0$ , alors, d'après la condition (3.4), nous trouvons :

$$|\sigma_{n+1}(t)| + |\sigma_{n+1}(t - \tau)| < c, \quad 0 < t \leq \delta.$$

Donc  $(\sigma_{n+1}(\cdot), \sigma_{n+1}(\cdot - \tau)) \in \mathcal{N}_c$ . Le procédé de récurrence est terminé.

Montrons maintenant que la suite  $\{\sigma_n(t)\}_{n \geq 0}$  converge pour  $-\tau \leq t \leq \delta$ .

Comme  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathcal{N}_c$ , alors, pour  $n \geq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} |\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)| &\leq k \int_0^t |\sigma_n(s) - \sigma_{n-1}(s)| ds \\ &\quad + k \int_0^t |\sigma_n(s - \tau) - \sigma_{n-1}(s - \tau)| ds, \quad 0 < t \leq \delta. \end{aligned}$$

Nous avons  $\sigma_n(t) - \sigma_{n-1}(t) = 0$  pour  $-\tau \leq t \leq 0$ . Donc

$$|\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)| \leq 2k \int_0^t |\sigma_n(s) - \sigma_{n-1}(s)| ds, \quad -\tau \leq t \leq \delta, \quad n \geq 1. \quad (3.8)$$

Pour  $0 < t \leq \delta$ , nous avons :

$$|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)| \leq \int_0^t |f(\sigma_0(s), \sigma_0(s - \tau))| ds \leq c_2 t.$$

Alors,

$$|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)| \leq c_2 t \quad \text{pour } -\tau \leq t \leq \delta.$$

En utilisant (3.8), on trouve :

$$|\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)| \leq \frac{c_2(2k)^n t^{n+1}}{(n+1)!}; \quad -\tau \leq t \leq \delta, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.9)$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)) \leq \frac{c_2}{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2kt)^{n+1}}{(n+1)!} := S.$$

La série  $S$  converge uniformément pour  $-\tau \leq t \leq \delta$ , alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)),$$

converge uniformément aussi sur le même intervalle, et comme

$$\sum_{n=0}^{m-1} (\sigma_{n+1}(t) - \sigma_n(t)) = \sigma_m(t) - \sigma_0(t),$$

alors, la suite  $\{\sigma_m(t)\}_{m \geq 0}$  converge uniformément vers  $\sigma(t)$  pour  $-\tau \leq t \leq \delta$ ;

$$\sigma(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m(t), \quad -\tau \leq t \leq \delta.$$

Quand  $n \rightarrow \infty$  dans (3.6), nous obtenons :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \phi(0) + \int_0^t f(\sigma(s), \sigma(s-\tau)) ds, & 0 < t \leq \delta, \\ \phi(t), & -\tau \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

2. **Unicité** : Supposons que  $x(t), y(t)$ ,  $-\tau \leq t \leq \delta$ , sont deux solutions du problème (3.10). On pose  $u(t) = x(t) - y(t)$ . Nous avons  $u(t) = 0$  pour  $-\tau \leq t \leq 0$ , car  $x(t) = y(t) = \phi(t)$  sur cet intervalle. Comme  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $\mathcal{N}_c$ , alors :

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq k \int_0^t (|x(s) - y(s)| + |x(s-\tau) - y(s-\tau)|) ds \\ &= k \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + k \int_0^{t-\tau} |x(s) - y(s)| ds \\ &= k \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + k \int_0^{t-\tau} |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq 2k \int_0^t |u(s)| ds. \end{aligned}$$



D'après le lemme de Gronwall on trouve que  $u(t) = 0$ , d'où  $x(t) = y(t)$  pour  $0 < t \leq \delta$ .

□

### 3.1.2 Stabilité

Le plus important pour les physiciens est l'étude de la stabilité de la solution du problème (3.3) en fonction des paramètres physiques  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui permet le contrôle de la rugosité du matériau. Dans ce paragraphe, nous allons étudier la stabilité de la solution de (3.3). Supposons que  $\psi(t) = \sigma(t) - \sigma_0$ . Alors (3.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) + \alpha\psi(t - \tau) = -\beta\psi^2(t - \tau), & \text{si } t > 0, \\ \psi(t) = \phi(t) - \sigma_0 := \varphi(t), & \text{si } t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution de (3.11), on a besoin de travailler dans la région  $\mathcal{N}_c$ .

**Théorème 3.1.3** *La solution de (3.11) est continûment prolongeable sur  $[-\tau, \infty[$ . De plus elle est asymptotiquement stable si :*

$$0 < \tau\alpha < \frac{\pi}{2}. \quad (3.12)$$

**Preuve.** Dans le théorème 3.1.2 on a démontré que le problème (3.11) a une unique solution sur certain intervalle  $[0, \delta]$ ,  $\delta > 0$ . D'après le Théorème 2.4.5 on trouve que la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -\alpha\psi(t - \tau), & \text{pour } t > 0, \\ \psi(t) = \varphi(t), & \text{pour } t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.13)$$

est asymptotiquement stable si et seulement si la condition (3.12) est vérifiée. Donc, sous la condition (3.12), nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi^0(t)| = 0, \quad (3.14)$$

où,  $\psi^0(t)$  est la solution de (3.13). C'est à dire que : sous la condition (3.12), la partie réelle de chaque racine de l'équation caractéristique (cf. [36]) :

$$h(\lambda) = \lambda + \alpha e^{-\tau\lambda} = 0, \quad (3.15)$$

n'appartient pas à  $\mathbb{C}^+$ . Donc si  $s$  est une racine de (3.15), alors il existe  $\lambda_1 > 0$  tel que  $Re(s) < -\lambda_1$ .

D'après le théorème 2.2.13, la solution  $\psi^0$  de (3.13) vérifie :

$$\psi^0(t) = X(t)\varphi(0) - \alpha \int_{-\tau}^0 X(t-r-\tau)\varphi(r)dr, \quad (3.16)$$

où  $X(\cdot)$  est la solution fondamentale de (3.13).

En utilisant le théorème 2.2.12, nous trouvons :

$$|X(t)| \leq c_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.17)$$

Par conséquent :

$$|\psi^0(t)| \leq c_2 m_\varphi e^{-\lambda_1 t} + \alpha c_2 m_\varphi e^{-\lambda_1 t} \lambda_1^{-1} (e^{\lambda_1 \tau} - 1), \quad m_\varphi = \max_{-\tau \leq t \leq 0} |\varphi(t)|.$$

On prend  $c_0 = c_2 + \alpha c_2 (e^{\lambda_1 \tau} - 1) \lambda_1^{-1}$ , alors :

$$|\psi^0(t)| \leq c_0 m_\varphi e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0, \quad (3.18)$$

où  $c_0$  est indépendante de  $\varphi(t)$ . Si on choisit  $c_0 \geq 1$  (pour  $c_2$  assez grand), alors, cette inégalité est valide pour  $t \geq -\tau$ .

On va montrer que la solution  $\psi(t)$  de (3.11) peut être prolongeable sur  $[-\tau, \infty[$ .

Montrons la validité de l'inégalité suivante :

$$|\psi(t)| < 2c_0 m_\varphi e^{-\lambda_2 t}, \quad -\tau \leq t, \quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1. \quad (3.19)$$

En fait, si l'inégalité (3.19) est valide pour  $-\tau \leq t \leq t_*$  avec  $t_* > 0$ . Alors, pour  $0 \leq t \leq t_*$ , on a :

$$|\psi(t)| + |\psi(t-\tau)| < 4c_0 m_\varphi < \frac{c}{2},$$

avec  $m_\varphi < c/8c_0$ . Donc  $(\psi(\cdot), \psi(\cdot - \tau))$  reste dans  $\mathcal{N}_c$  et

$$\max_{-\tau \leq t \leq t_*} |\psi(t)| < \frac{c}{2}.$$

D'après le théorème d'existence de Cauchy–Peano (voir [7, p. 347]), la solution  $\psi(t)$  est prolongeable au delà de  $t_*$ .

Supposons que la solution  $\psi(t)$  de (3.11) n'est pas prolongeable au delà de  $\delta$ , alors, l'inégalité (3.19) n'est pas toujours vraie. Soit  $t_0$  la première valeur ( $t_0 > 0$ ) pour laquelle  $\psi(t_0)$  ne vérifie pas l'inégalité (3.19). Par la continuité de  $\psi$ , nous obtenons :

$$|\psi(t_0)| = 2c_0m_\varphi e^{-\lambda_2 t_0}. \quad (3.20)$$

De plus :

$$\lim_{|\psi(\cdot - \tau)| \rightarrow 0} \frac{|f(\psi(\cdot), \psi(\cdot - \tau))|}{|\psi(\cdot - \tau)|} = -\beta \lim_{|\psi(\cdot - \tau)| \rightarrow 0} |\psi(\cdot - \tau)| = 0.$$

Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$|f(\psi(s), \psi(s - \tau))| \leq \varepsilon |\psi(s - \tau)| < 2\varepsilon c_0 m_\varphi e^{\lambda_2 \tau} e^{-\lambda_2 s}, \quad 0 < s \leq t_0,$$

car  $s - \tau < t_0$ . La formule de Duhamel nous donne :

$$\psi(t) = \psi^0(t) + \int_0^t X(t-s) f(\psi(s), \psi(s - \tau)) ds, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.21)$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &< c_0 m_\varphi e^{-\lambda_2 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} \int_0^t e^{\lambda_2 s} \cdot 2\varepsilon c_0 m_\varphi e^{\lambda_2 \tau} e^{-\lambda_2 s} ds \\ &< c_0 m_\varphi e^{-\lambda_2 t} + 2c_2 \varepsilon c_0 m_\varphi e^{\lambda_2 \tau} t_0 e^{-\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

On peut choisir  $\varepsilon$  telle que  $2c_2 \varepsilon e^{\lambda_2 \tau} t_0 < 1$ , alors :

$$|\psi(t)| < 2c_0 m_\varphi e^{-\lambda_2 t}, \quad 0 < t \leq t_0,$$

ce qui contredit (3.20). D'où, pour tout  $t \geq 0$ , on peut écrire :

$$|\psi(t)| \leq 2c_0 m_\varphi e^{-\lambda_2 t}.$$

Alors,  $\psi(t)$  est continûment prolongeable sur  $[-\tau, \infty[$ , et de plus :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)| = 0.$$

□

### 3.1.3 Tests numériques

Les résultats numériques suivants ne donnent pas la solution exacte de (3.11), mais ils montrent la stabilité et l'instabilité asymptotique de la solution de (3.11) selon les paramètres  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $m_\varphi$ . Différents calculs sont faits en utilisant MATLAB. C'est aussi avec le solveur DDE23 (voir l'appendice A.1) sur la base de Runge–Kutta [73].

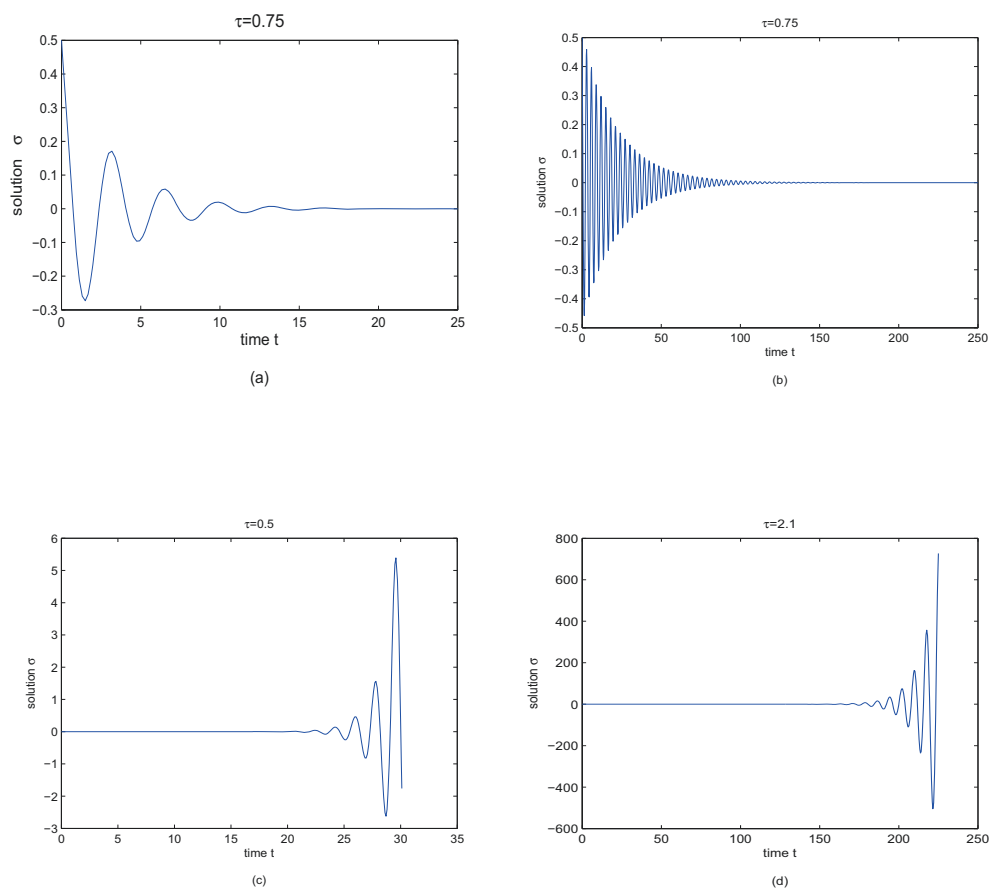


FIGURE 3.1

Pour les figures (a), et (b) on prend :  $m_\varphi = 0.5$ ,  $\beta = -0.25$ ,  $\alpha = 1.5, 2$ , la solution est stable. Pour (c) et (d), on prend :  $m_\varphi = 5e - 009$ ,  $\beta = -0.25, 0.0001$   $\alpha = 5, 1$ , la solution n'est pas stable.

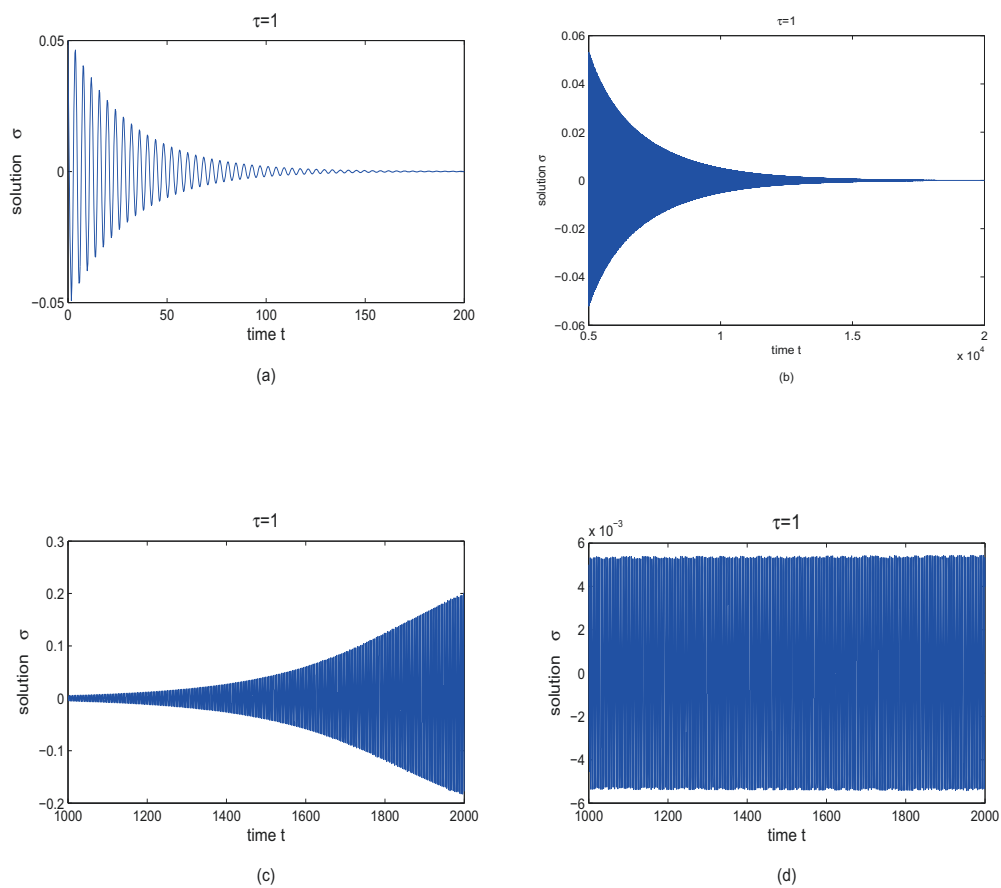


FIGURE 3.2

Pour les figures (a), et (b) on prend :  $m_\varphi = 0.05, 0.005$ ,  $\beta = -0.25, -0.5$ ,  $\alpha = 1.5, 1.57$ , la solution est stable. Pour (c) et (d), on prend :  $m_\varphi = 0.005$ ,  $\beta = -0.5$ ,  $\alpha = 1.58, 1.571$ , la solution n'est pas stable.

### 3.2 MNMLG à double retard

Dans la plupart des expériences de déformation, plusieurs systèmes de glissement sont actifs et dépendent de leurs orientations par rapport à l'axe de traction. Lorsque le système de déformation est actif, le cristal subit une rotation et des mécanismes de déformation secondaire deviennent actifs. Ces mécanismes de glissement correspondent à des délais différents. Notre objectif dans cette section est la modélisation des instabilités de la déformation plastique quand plusieurs retards sont introduits, (chacun correspondant à un système de déformation).

On considère l'équation (2.65), et on prend le développement de Taylor à l'ordre deux de  $n(\cdot)$  au voisinage de  $\sigma_0$ , pour  $i = 1, 2$ , on trouve :

$$\begin{aligned} n(\sigma(t - \tau_i)) &= n(\sigma_0) + \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_i) - \sigma_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_i) - \sigma_0)^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En remplaçant dans (2.65) :

$$\begin{aligned} Mbn(\sigma_0)(S_1 + S_2) &= MbS_1 n(\sigma_0) + MbS_1 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_1) - \sigma_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} MbS_1 \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_1) - \sigma_0)^2 \\ &\quad + MbS_2 n(\sigma_0) + MbS_2 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_2) - \sigma_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} MbS_2 \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma = \sigma_0)(\sigma(t - \tau_2) - \sigma_0)^2 + \dot{\sigma}(t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

D'où :

$$\dot{\sigma}(t) = -\frac{1}{2} Mb \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma_0) \sum_{i=1}^2 S_i (\sigma(t - \tau_i) - \sigma_0)^2 - Mb \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma_0) \sum_{i=1}^2 S_i (\sigma(t - \tau_i) - \sigma_0). \quad (3.24)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2} MbS_1 \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma_0) < 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} MbS_2 \frac{\partial^2 n}{\partial \sigma^2}(\sigma_0) < 0, \\ \alpha_1 &= MbS_1 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma_0) > 0, \quad \alpha_2 = MbS_2 \frac{\partial n}{\partial \sigma}(\sigma_0) > 0, \end{aligned}$$

$$\theta_1 = \alpha_1 - 2\beta_1\sigma_0, \quad \theta_2 = \alpha_2 - 2\beta_2\sigma_0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \gamma = \alpha\sigma_0 - \beta\sigma_0^2,$$

avec,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$  sont des paramètres physiques. On peut écrire (2.65) sous la forme :

$$\dot{\sigma}(t) = -\beta_1\sigma^2(t - \tau_1) - \beta_2\sigma^2(t - \tau_2) - \theta_1\sigma(t - \tau_1) - \theta_2\sigma(t - \tau_2) + \gamma. \quad (3.25)$$

Soit  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ ,  $\phi \in \mathcal{C}_\tau := \mathcal{C}([- \tau, 0], \mathbb{R})$  tel que  $\sigma(t) = \phi(t)$  pour  $t \in [- \tau, 0]$ .

Nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = f(\sigma(t - \tau_1), \sigma(t - \tau_2)), & \text{pour } t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t), & \text{pour } t \in [- \tau, 0], \end{cases} \quad (3.26)$$

avec :

$$f(v, w) = -\beta_1v^2 - \beta_2w^2 - \theta_1v - \theta_2w + \gamma.$$

### 3.2.1 Existence et unicité

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats d'existence et d'unicité de la solution du problème (3.26) sur l'intervalle  $[- \tau, \infty[$ . Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 3.2.1** *Supposons que  $\phi \in \mathcal{C}_\tau$ ,  $f : \mathcal{C}_\tau \times \mathcal{C}_\tau \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue, alors, l'existence d'une solution de (3.26) est équivalent à l'existence d'une solution de l'équation intégrale suivante :*

$$\begin{cases} \sigma(t) = \phi(t), & t \in [- \tau, 0], \\ \sigma(t) = \phi(0) + \int_0^t f(\sigma(s - \tau_1), \sigma(s - \tau_2)) ds, & t > 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

**Théorème 3.2.2** *Le problème (3.26) admet une unique solution sur  $[- \tau, + \infty[$ .*



**Preuve.** Soit  $K > 0$  un nombre fixe. Il suffit de montrer que le problème (3.26) admet une solution unique sur  $[-\tau, K]$ . Supposons que  $\eta = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ , et soit  $N = \left[\frac{K}{\eta}\right]$  la partie entière de  $\frac{K}{\eta}$ . Pour tout  $\ell = 0, 1, \dots, N$  et  $t \in [\ell\eta, (\ell + 1)\eta]$ , on a

$$t - \tau_i \leq \ell\eta, \quad i = 1, 2.$$

Posons

$$\sigma_0(t) = \phi(t), \quad \text{pour } -\tau \leq t \leq 0. \quad (3.28)$$

Alors, pour  $\ell = 0$ , on a :

$$\dot{\sigma}(t) = f(\sigma_0(t - \tau_1), \sigma_0(t - \tau_2)), \quad 0 \leq t \leq \eta, \quad (3.29)$$

avec  $\sigma(0) = \sigma_0(0)$ . La solution unique de ce problème initiale est donnée sous la forme :

$$\sigma_1(t) = \sigma_0(0) + \int_0^t f(\sigma_0(s - \tau_1), \sigma_0(s - \tau_2)) ds. \quad (3.30)$$

D'où, la fonction :

$$\tilde{\sigma}_1(t) = \begin{cases} \sigma_1(t), & \text{si } 0 < t \leq \eta, \\ \sigma_0(t), & \text{si } -\tau \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (3.31)$$

est la solution du problème (3.26) sur l'intervalle  $[-\tau, \eta]$ . On peut procéder de la même manière sur l'intervalle  $[\eta, 2\eta]$  (pour  $\ell = 1$ ) et ainsi de suite. Comme le nombre  $K$  est arbitraire, alors le problème (3.26) a une unique solution sur  $[-\tau, \infty[$ .  $\square$

On considère l'équation linéaire homogène associée à (3.26) :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = -\theta_1\sigma(t - \tau_1) - \theta_2\sigma(t - \tau_2), & t > 0, \\ \sigma(t) = \phi(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.32)$$

### 3.2.2 Stabilité

Dans ce paragraphe nous allons étudier la stabilité de la solution du problème (3.26) en fonction des paramètres physiques  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $m_\phi$ . Nous commençons par déterminer la solution fondamentale de l'équation linéaire homogène associée à (3.26) : La stabilité asymptotique de la solution du problème linéaire (3.32), équivaut à dire : pour chaque racine  $s$  de  $h(\lambda) = 0$  (cf. [37] et [47]), il existe  $\lambda_0 > 0$  telle que  $Re(s) < -\lambda_0$ . D'après le théorème 2.2.12, il existe une constante  $c_4$  telle que

$$|X(t)| \leq c_4 e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.33)$$

Le corollaire 2.2.14 nous permet de trouver une constante  $c_5$  telle que :

$$|\sigma^0(t)| \leq c_5 m_\phi e^{-\lambda_0 t}, \quad t \geq 0, \quad (3.34)$$

avec  $\sigma^0(t)$  est la solution de (3.32).

Par le changement de variables  $\psi = \sigma - \sigma_0$ , on a :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -\alpha_1 \psi(t - \tau_1) - \alpha_2 \psi(t - \tau_2) + f(\psi(t - \tau_1), \psi(t - \tau_2)), & t > 0, \\ \psi(t) = \phi(t) - \sigma_0 := \varphi(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3.35)$$

avec  $f(\psi(t - \tau_1), \psi(t - \tau_2)) = -\beta_1 \psi^2(t - \tau_1) - \beta_2 \psi^2(t - \tau_2)$ . Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.2.3** *La solution de (3.26) est asymptotiquement stable si la solution  $\psi^0(t)$  de l'équation linéaire (3.32) l'est aussi.*

**Preuve.** La solution  $\psi^0$  de (3.32) est asymptotiquement stable si et seulement si l'équation caractéristique (2.7), avec  $\alpha_1 = a$ ,  $\alpha_2 = b$ , n'a pas de zéros dans  $\mathbb{C}^+$ . Soit  $s$  une racine de (2.7), alors, il existe une constante  $\lambda_1 > 0$ , telle que  $Re(s) < -\lambda_1$ .

D'après le théorème 2.2.13, la solution  $\psi^0$  est donnée sous la forme :

$$\psi^0(t) = X(t)\varphi(0) - \alpha_1 \int_{-\tau_1}^0 X(t-r-\tau_1)\varphi(r)dr - \alpha_2 \int_{-\tau_2}^0 X(t-r-\tau_2)\varphi(r)dr, \quad (3.36)$$

avec  $X(\cdot)$  est la solution fondamentale. D'après le théorème 2.2.12, il existe une constante  $c_2$  telle que :

$$|X(t)| \leq c_2 e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.37)$$

Donc, pour  $m_\varphi = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$ , on a :

$$\begin{aligned} |\psi^0(t)| &\leq c_2 m_\varphi e^{-\lambda_1 t} + c_2 \alpha_1 m_\varphi e^{-\lambda_1(t-\tau_1)} \int_{-\tau_1}^0 e^{\lambda_1 r} dr + c_2 \alpha_2 m_\varphi e^{-\lambda_1(t-\tau_2)} \int_{-\tau_2}^0 e^{\lambda_1 r} dr \\ &\leq c_2 m_\varphi e^{-\lambda_1 t} + c_2 m_\varphi e^{-\lambda_1 t} \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^2 \theta_i e^{\lambda_1 \tau_i} (1 - e^{-\lambda_1 \tau_i}). \end{aligned}$$

Posons  $c_3 = c_2 + c_2 \alpha_1 \lambda_1^{-1} (e^{\lambda_1 \tau_1} - 1) + c_2 \alpha_2 \lambda_1^{-1} (e^{\lambda_1 \tau_2} - 1)$ , nous avons donc :

$$|\psi^0(t)| \leq c_3 m_\varphi e^{-\lambda_1 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.38)$$

La constante  $c_3$  ne dépend pas de  $\varphi$ . Si  $c_3 \geq 1$ , alors, cette inégalité est valide pour  $t \geq -\tau$ .

Montrons que :

$$|\psi(t)| \leq 2c_3 m_\varphi e^{-\lambda_2 t}, \quad t \geq -\tau, \quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1. \quad (3.39)$$

Soit  $t_0$  la première valeur pour laquelle (3.39) n'est plus valide. Par la continuité de  $\psi$ , nous avons :

$$|\psi(t_0)| = 2c_3 m_\varphi e^{-\lambda_2 t_0}. \quad (3.40)$$

La formule de Duhamel nous donne :

$$\psi(t) = \psi^0(t) + \int_0^t X(t-s) f(\psi(s), \psi(s-\tau_1), \psi(s-\tau_2)) ds, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.41)$$

Comme

$$\frac{|f(\psi(\cdot), \psi(\cdot - \tau_1), \psi(\cdot - \tau_2))|}{|\psi(\cdot - \tau_1)| + |\psi(\cdot - \tau_2)|} \leq \max\{-\beta_1, -\beta_2\} \frac{(|\psi(\cdot - \tau_1)| + |\psi(\cdot - \tau_2)|)^2}{|\psi(\cdot - \tau_1)| + |\psi(\cdot - \tau_2)|} \rightarrow 0,$$

lorsque  $|\psi(\cdot - \tau_1)| + |\psi(\cdot - \tau_2)| \rightarrow 0$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(\psi(s), \psi(s-\tau_1), \psi(s-\tau_2))| &\leq \varepsilon (|\psi(s-\tau_1)| + |\psi(s-\tau_2)|) \\ &\leq 2\varepsilon c_3 m_\varphi (e^{-\lambda_2 \tau_1} + e^{-\lambda_2 \tau_2}) e^{-\lambda_2 s}, \quad 0 < s \leq t_0. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &\leq c_3 m_\varphi e^{-\lambda_2 t} + 2c_2 c_3 \varepsilon m_\varphi e^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_2 \tau_1} + e^{-\lambda_2 \tau_2}) \int_0^t ds \\ &\leq c_3 m_\varphi e^{-\lambda_2 t} + 2c_2 c_3 \varepsilon m_\varphi e^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_2 \tau_1} + e^{-\lambda_2 \tau_2}) t_0, \quad 0 < t \leq t_0. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on peut prendre :

$$2c_2 \varepsilon (e^{-\lambda_2 \tau_1} + e^{-\lambda_2 \tau_2}) t_0 < 1,$$

alors,

$$|\psi(t)| < 2c_3 m_\varphi e^{-\lambda_2 t}, \quad 0 < t \leq t_0,$$

ce qui contredit (3.40). Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\psi(t)| = 0.$$

□

### 3.2.3 Tests numériques

Nous présentons quelques résultats numériques en utilisant MATLAB (toujours avec DDE23) pour montrer la stabilité asymptotique et l'instabilité de la solution de (3.35) selon les paramètres physiques  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

**Tableau de stabilité/instabilité/bifurcation de Hopf.**

$\alpha_1 > \alpha_2, \tau_1 \leq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \tau_2 > 0,$	Stabilité	Fig. 3.3
$\frac{\pi}{2\tau_1} < (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}, \alpha_2 > \alpha_1,$ $\tau_2 \in [0, \tau_{2,c}],$	Stabilité	Fig. 3.4 : (a), (b), (c) Fig. 3.5 : (b)
$\frac{\pi}{2\tau_1} < (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}, \alpha_2 > \alpha_1,$	Instabilité	Fig. 3.4 : (d) Fig. 3.5 : (c)
$\frac{\pi}{2\tau_1} < (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}, \alpha_2 > \alpha_1,$	Bifurcation de Hopf	Fig. 3.5 : (a) et (d)
$\tau_1 \in [\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\pi}{2\alpha_1}],$	Stabilité	Fig. 3.6 : (a) et (c) Fig. 3.7 : (a)
$\tau_1 \in [\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\pi}{2\alpha_1}],$	Instabilité	Fig. 3.6 : (b) et (d) Fig. 3.7 : (b) et (d)
$\tau_1 \in [\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\pi}{2\alpha_1}],$	Bifurcation de Hopf	Fig. 3.7 : (c)
$\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha_1}, \tau_2 \in [0, \tau_{0,c}],$	Stabilité	Fig. 3.8 : (a) et (b)
$\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha_1},$	Instabilité	Fig. 3.8 : (d)
$\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha_1},$	Bifurcation de Hopf	Fig. 3.8 : (c)

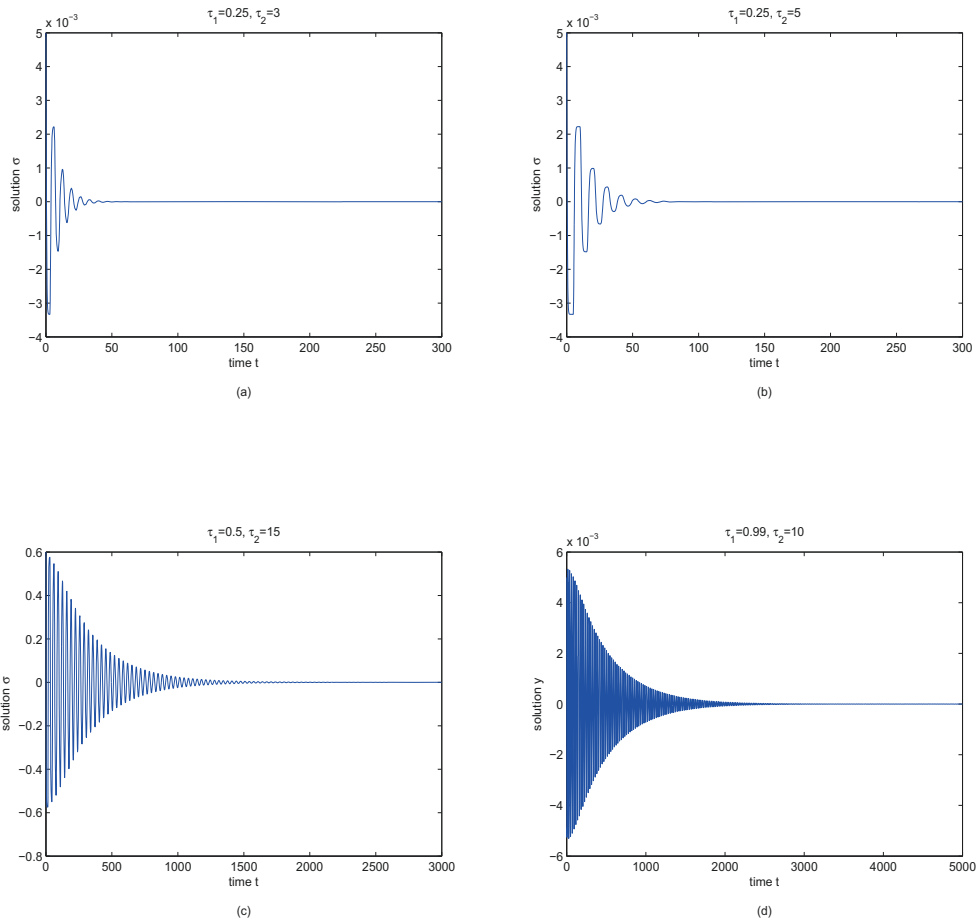


FIGURE 3.3

Pour les figures (a) et (b) on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1.5, 1)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.01, -0.001)$  et  $m_\varphi = 0.005$ . Pour (c) et (d), on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.5, 0.49)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.01, -0.01)$  et  $m_\varphi = 0.6, 0.005$ .

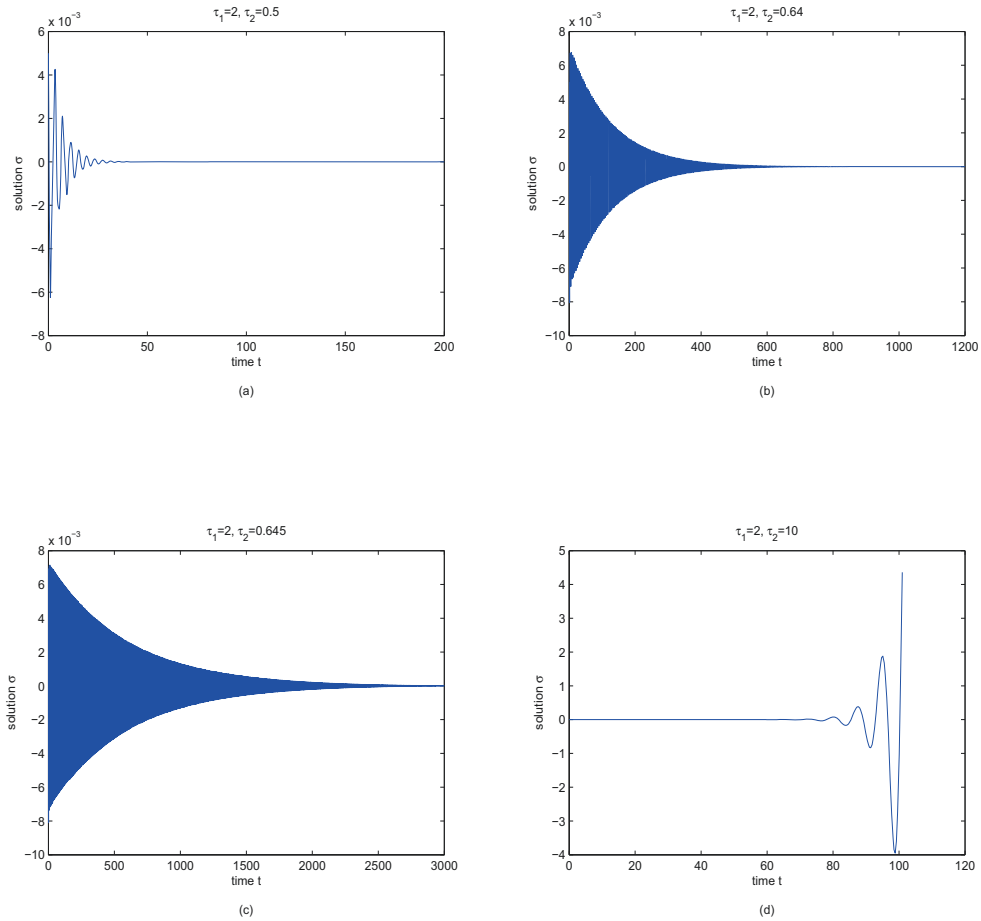


FIGURE 3.4

Pour les figures (a), (b) et (c) on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.2, -0.45)$  et  $m_\varphi = 0.005$ . Pour (d), on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.033, -0.045)$  et  $m_\varphi = 5e - 009$ .

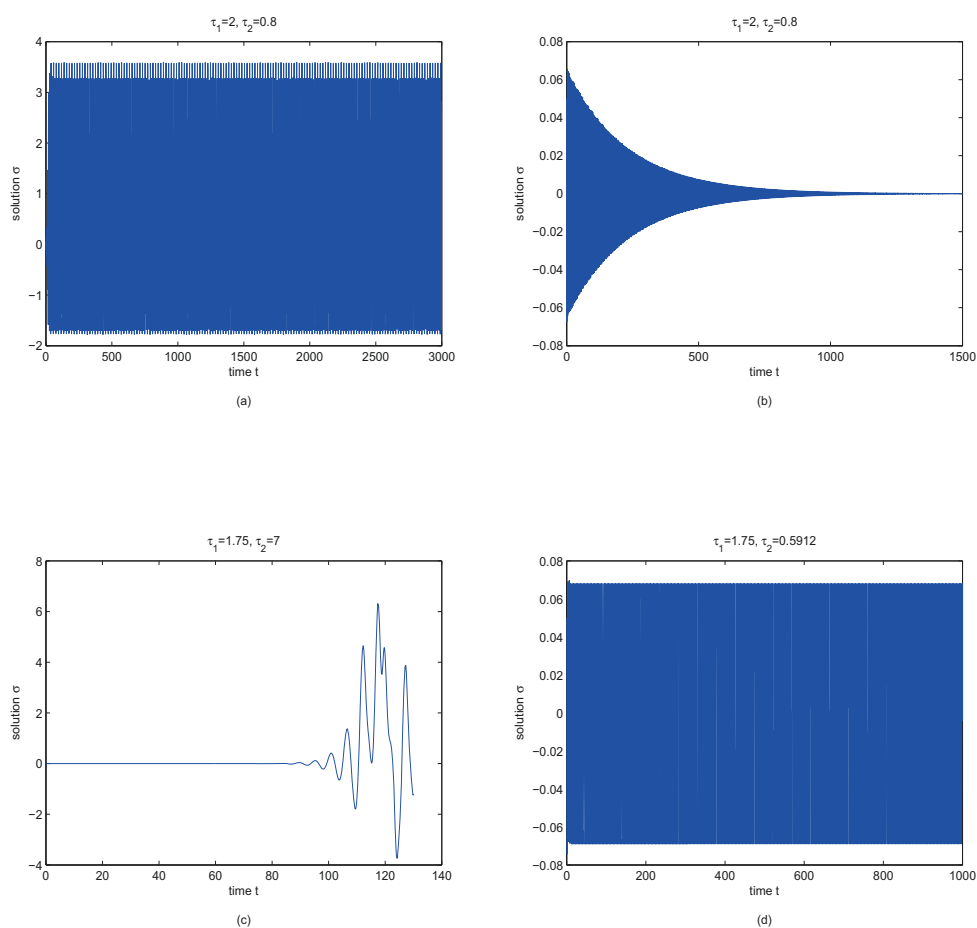


FIGURE 3.5

Pour (a), on prend  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.3, -0.5)$  et  $m_\varphi = 0.05$ . Pour (b), (c) et (d), on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.25, -0.35)$  et  $m_\varphi = 0.05, 1e - 009, 0.05$ .



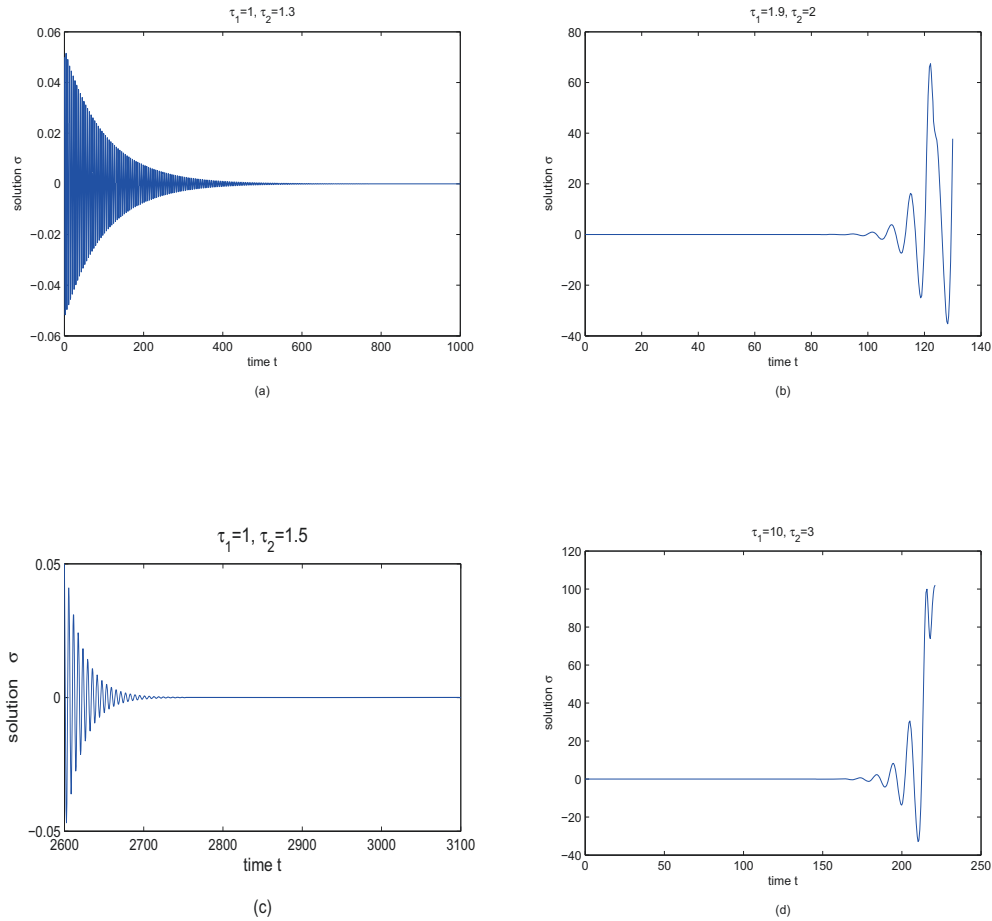


FIGURE 3.6

Pour les figures (a), et (b) on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.8, 0.6)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.01, -0.01)$  et  $m_\varphi = 0.05, 5e - 009$ . Pour (c) et (d) on prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.1, 0.9)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.01, -0.01)$  et  $m_\varphi = 0.05, 5e - 009$ .

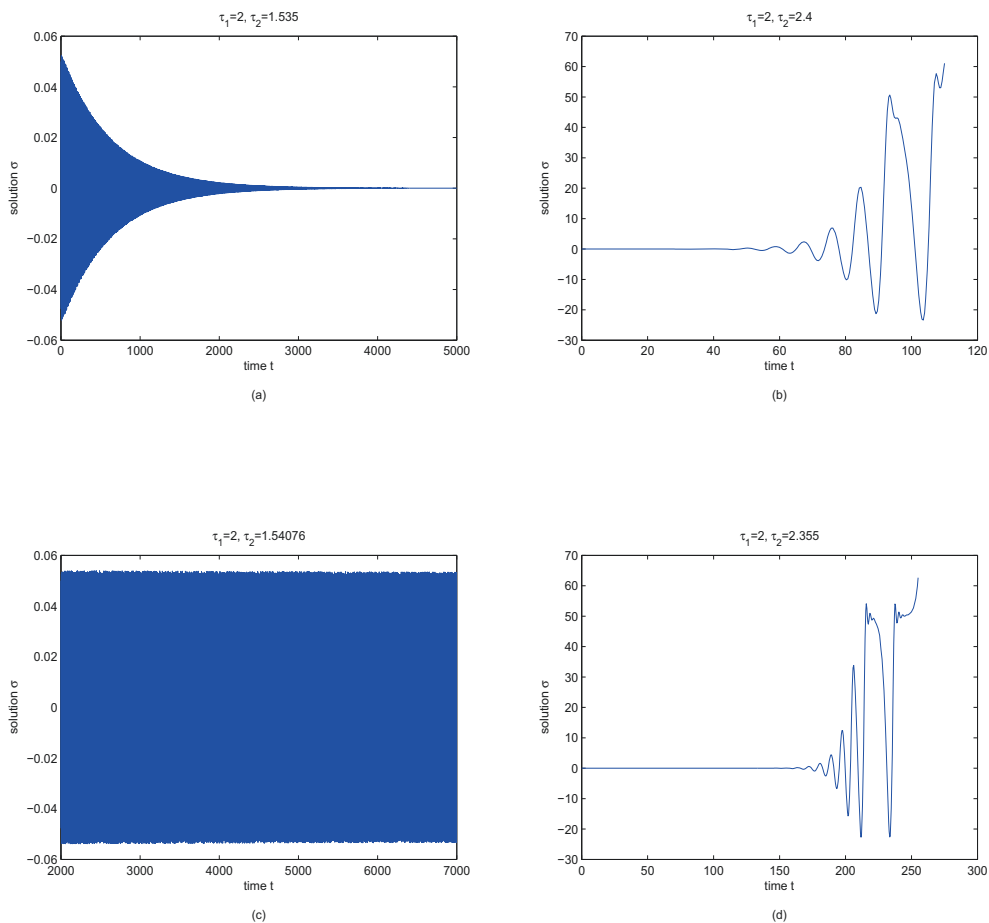


FIGURE 3.7

On prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.1, 0.9)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.01, -0.01)$  et  $m_\varphi = 0.001, 5e - 004, 0.05, 5e - 009$ .

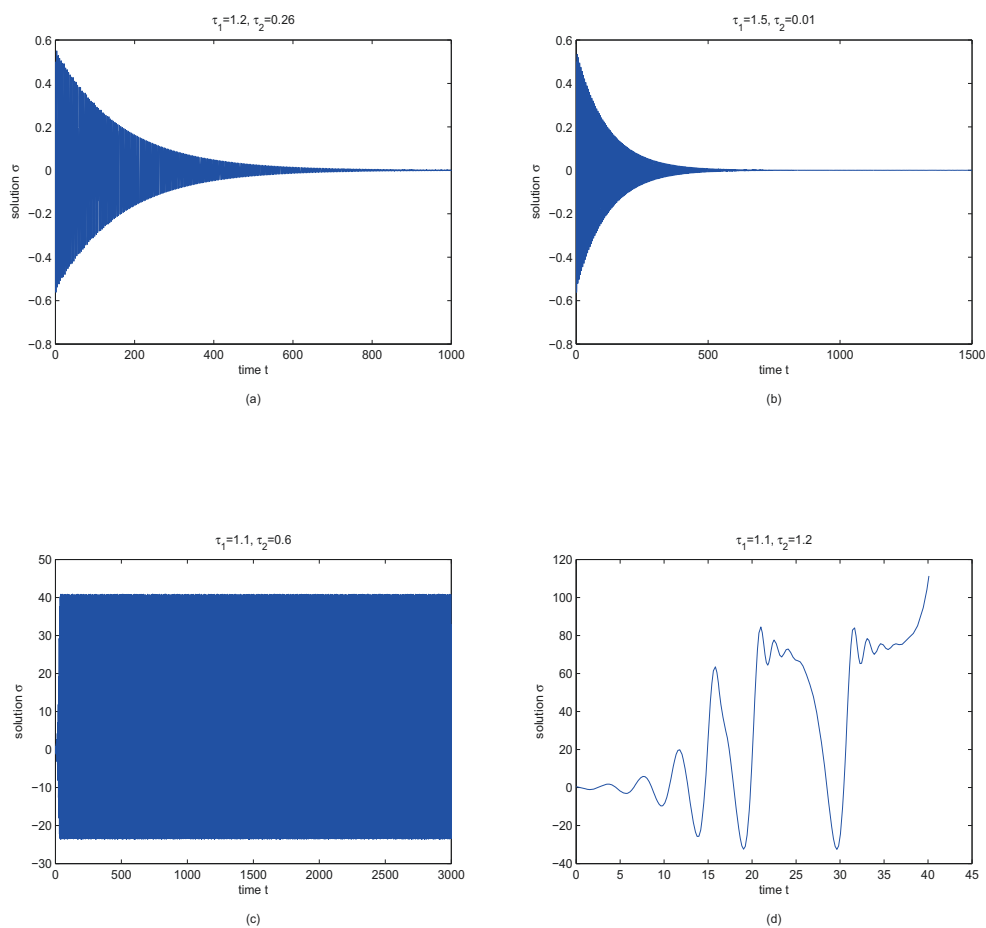


FIGURE 3.8

On prend :  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1.5, 0.7)$ ,  $(\beta_1, \beta_2) = (-0.02, -0.01)$  et  $m_\varphi = 0.5$ .

\*\*\*\*\*

### 3.3 Conclusion et perspective

Dans notre travail nous avons étudié le MNMLG à simple et à double retard pour améliorer les résultats de [30, 36, 37] restreints au modèle linéaire. En fait, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution dans le cas non linéaire, et nous avons étudié la stabilité de la solution en fonction des paramètres physiques, ce qui permet aux physiciens d'étudier l'instabilité d'un cristal sous contrainte en fonction de ces paramètres. De plus, notre étude a été soutenue par des exemples numériques en utilisant MATLAB. D'autre part, il reste des cas dans lesquels le comportement de la solution n'est pas identifié (cas de la *bifurcation de Hopf*). Notre modélisation non linéaire est basée sur le développement de Taylor d'ordre deux. En utilisant des paramètres physiques, nous avons traité le cas de la *bifurcation de Hopf* numériquement (voir les figures 3.11, 3.13). Dans ce paragraphe nous présentons une comparaison numérique de la stabilité. D'une part, entre les cas linéaires et non linéaires à simple retard, et d'autre part, entre les cas linéaires et non linéaires à double retard :

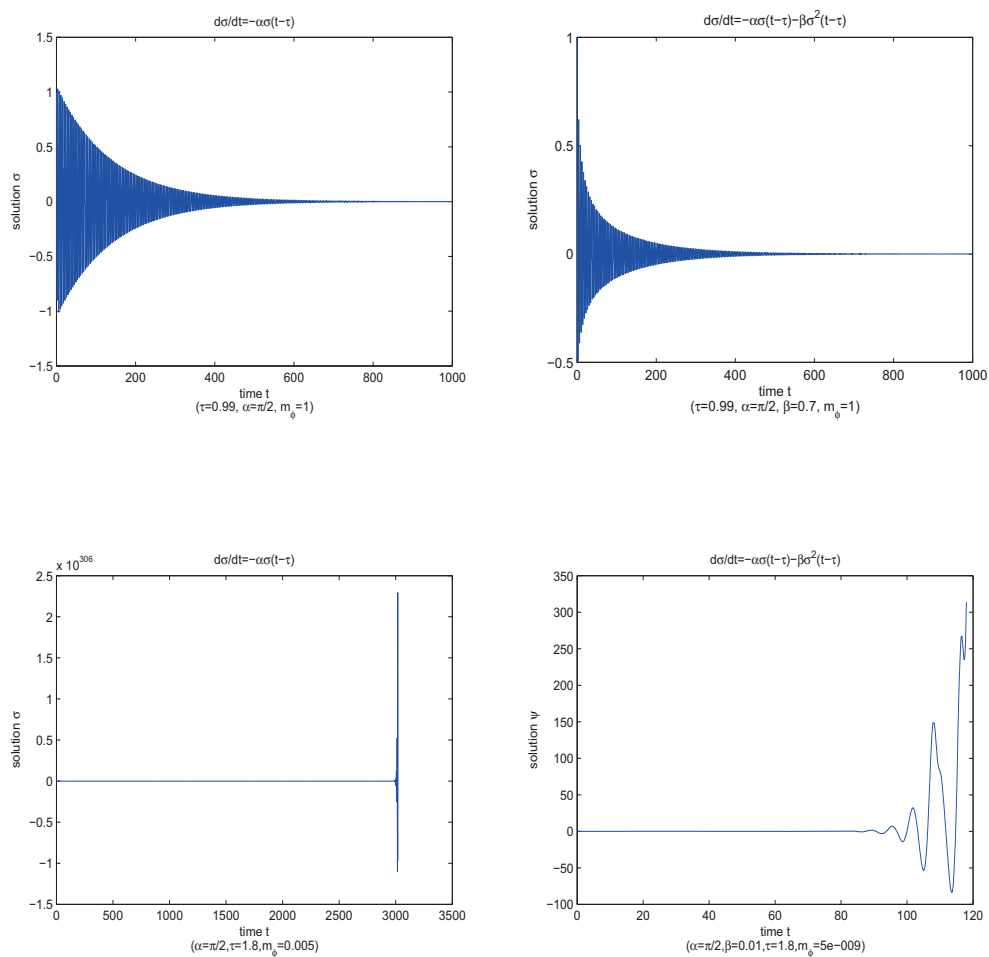


FIGURE 3.9 – Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec simple retard.

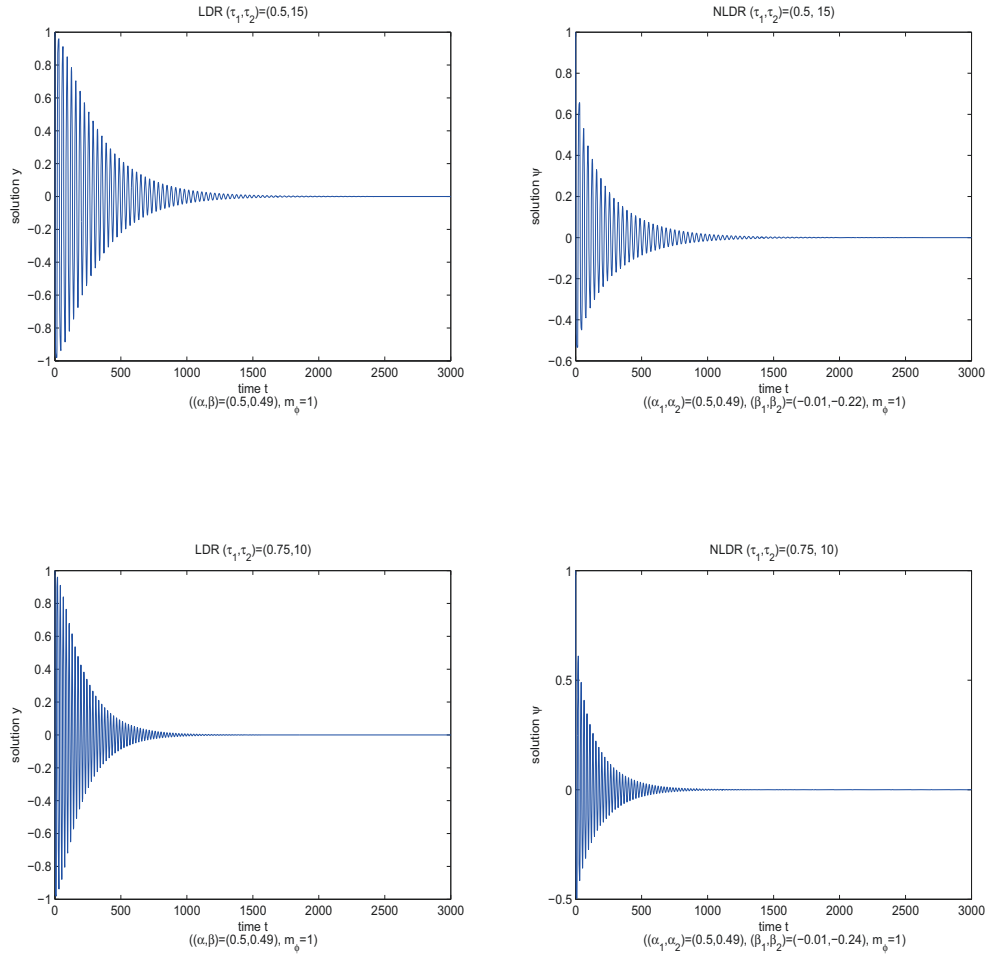


FIGURE 3.10

Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec double retard où :

$$\alpha > \beta, \tau_1 \leq \frac{1}{\alpha + \beta}, \quad \alpha_1 > \alpha_2, \tau_1 \leq \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \tau_2 > 0.$$

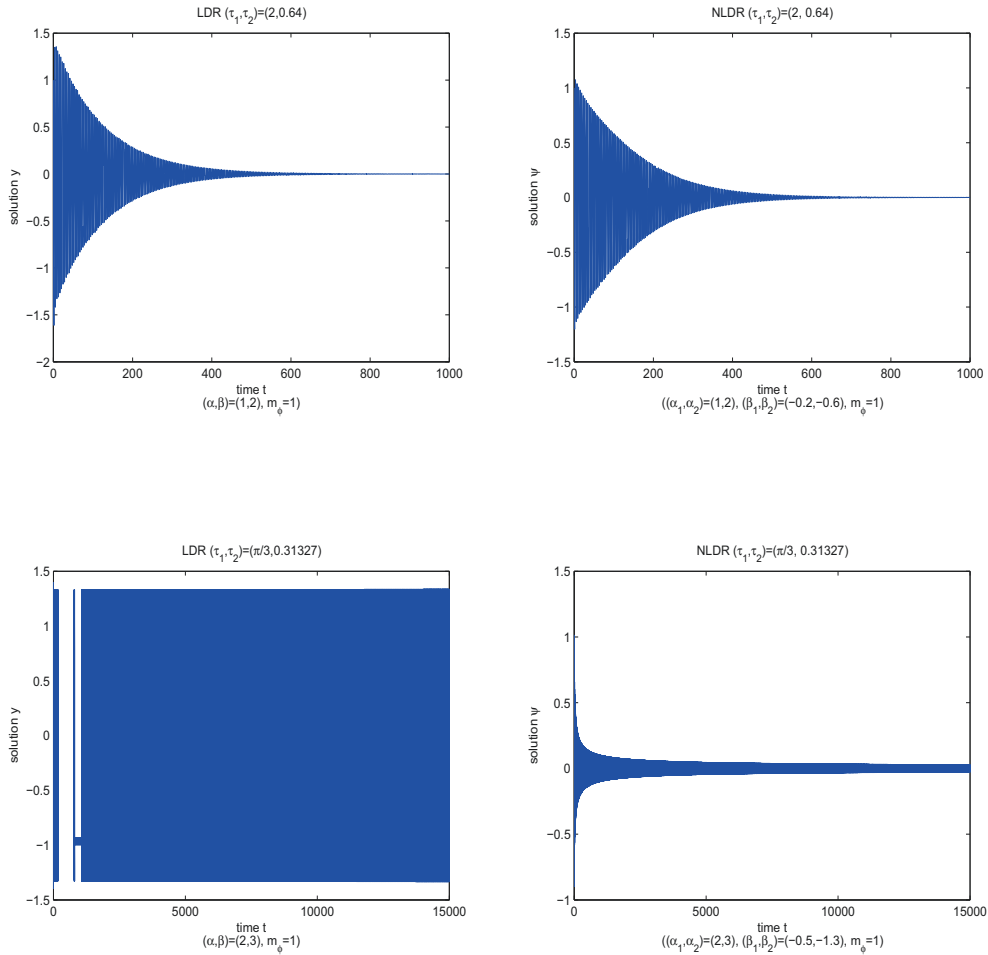


FIGURE 3.11

Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec double retard où :

$$\frac{\pi}{2\tau_1} < (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \alpha_2.$$

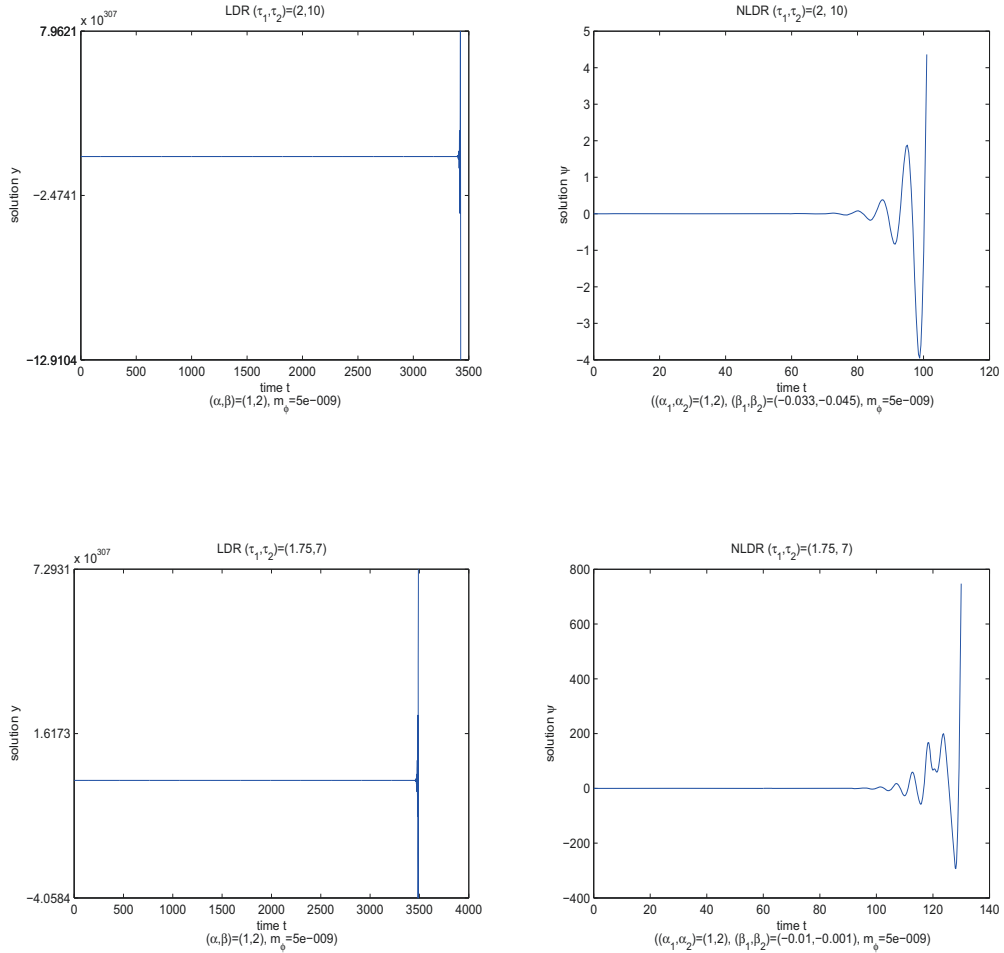


FIGURE 3.12

Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec double retard où :

$$\frac{\pi}{2\tau_1} < (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)^{1/2} < \frac{3\pi}{2\tau_1}, \quad \alpha_2 > \alpha_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \alpha_2.$$



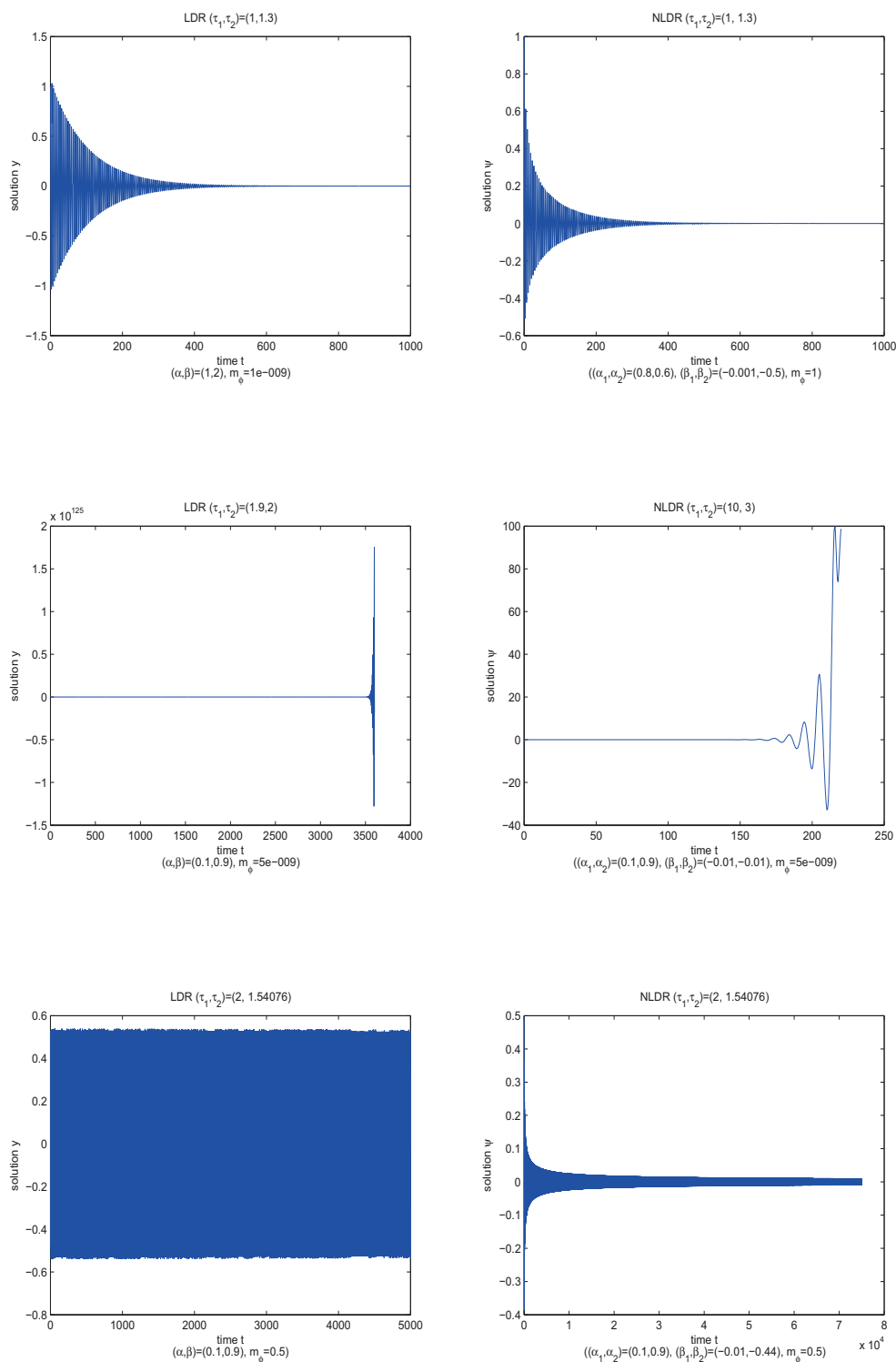


FIGURE 3.13

Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec double retard où :

$$\tau_1 > \frac{\pi}{2\alpha_1}, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \alpha_2.$$

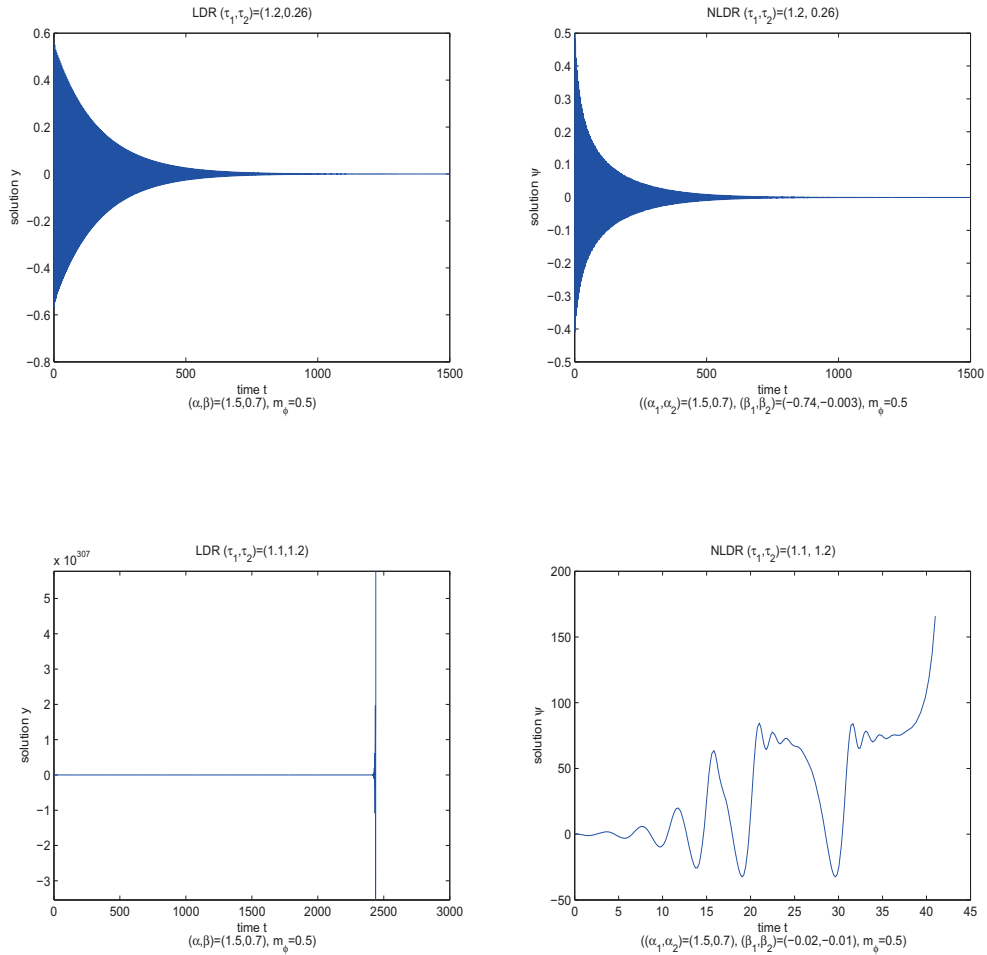


FIGURE 3.14

Une comparaison entre le cas linéaire et le cas non linéaire avec double retard où :

$$\tau_1 \in \left[ \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\pi}{2\alpha_1} \right], \quad \alpha = \alpha_1, \beta = \alpha_2.$$



# Chapitre 4

## Instabilité de Rayleigh–Plateau

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les instabilités de surface d'un pore cylindrique en absence de contrainte. Ces instabilités sont dites de Rayleigh–Plateau. Nous obtenons une EDP parabolique non linéaire d'ordre 4. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de ce problème en utilisant la méthode de Faedo–Galerkin. Le résultat principal est l'existence globale de la solution et la convergence vers la valeur moyenne de la donnée initiale en temps long.

L'instabilité de Rayleigh–Plateau (brièvement appelée l'instabilité de Rayleigh), illustre pourquoi et comment un flux descendant se sépare en paquets plus petit avec le même volume, mais avec moins de surface. Elle est liée à l'instabilité de Rayleigh–Taylor<sup>1</sup> (voir [74]).

Un jet de liquide, qui est de rayon constant initialement, descend verticalement en raison de la gravité. La longueur de liquide augmente et atteint une valeur critique.

---

1. L'instabilité de Rayleigh–Taylor est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, qui résulte de la poussée du fluide le plus lourd sur le fluide le plus léger (l'accélération dans le cas d'un système dynamique ou la gravité pour un système initialement statique est dirigée vers la phase légère).

En cette valeur critique, le jet perd sa forme cylindrique, et se décompose en un flux de gouttelettes. Ce phénomène se produit principalement en raison de la tension de surface.

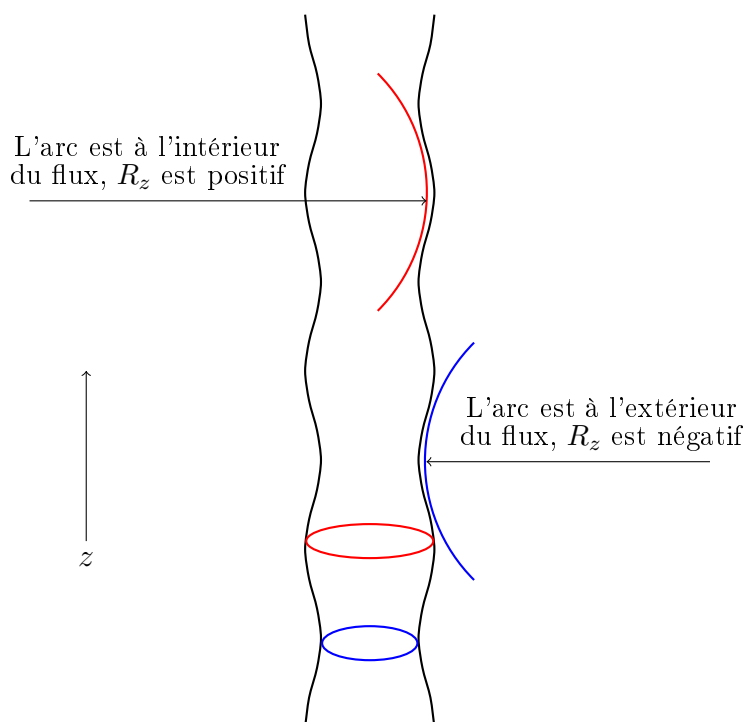


FIGURE 4.1

Colonne de liquide descendante avec des perturbations périodiques et rayons de courbure dans la direction axiale. L'équation pour le rayon du flux est :  $R(z)=R_0+A_k \cos(kz)$ , où  $R_0$  est le rayon du flux imperturbé,  $A_k$  est l'amplitude de la perturbation,  $z$  est la distance le long de l'axe du flux, et  $k$  est le nombre d'ondes.

Cette instabilité a été remarquée expérimentalement pour la première fois par Joseph Plateau en 1873. Plateau a montré que l'instabilité survient lorsque la longueur de colonne liquide est supérieure à environ 3.13 à 3.18 fois son diamètre [59]. Plus tard, Lord Rayleigh a corroboré et appuyé les travaux de Plateau, en donnant une

explication analytique de cette observation physique.

Ce comportement de liquide provient de l'existence de petites perturbations dans tout système physique. En général, cette déformation de la colonne, appelée *perturbation varice*, est représentée comme une série de déplacements sinusoïdaux et périodiques, comme dans la figure 4.1<sup>1</sup> (voir [33]). Pour certaines longueurs d'ondes, ces perturbations vont s'agrandir dans le temps. Il est noté que, si l'amplitude du déplacement augmente, alors la colonne de liquide ne va plus avoir un rayon de courbure constant. Pour des temps courts ou pour des petites longueurs d'ondes, le jet est un cylindre avec  $K_1 = 1/R_0$  et  $K_2 = 0$ . Nous voyons dans la figure 4.1 que le cylindre perturbé a des zones à courbure positive, et d'autres régions à courbure négative. D'après la loi de Laplace, les sections pincées ont une pression plus élevée ( $1/R$  est plus grand) et les sections bombées ont une basse pression, et c'est ainsi que la production d'un flux de fluide est dûe au gradient de la pression. Ce flux interne provoque la croissance de l'amplitude de déplacement qui initie éventuellement la formation de gouttelettes. Les gouttelettes se forment lorsque la rupture des régions pincées et les zones bombées se transforment en gouttelettes sphériques. Comme avec tous les problèmes de tension de surface dominée (les forces de la compression et viscosité sont négligeables), la géométrie du système spécifique dépend de la minimisation de l'énergie. Le liquide tend à être dans un état d'énergie minimale. Comme les particules de surface, avec seulement la moitié des molécules voisines comme celles de la majorité, ont le plus d'énergie, le fluide cherche à minimiser sa surface. Si le liquide se transforme en gouttelettes, alors l'énergie en état est plus faible en raison de minimiser la surface totale (Voir la figure 4.2 (voir [57]) et la figure 4.3 [32], pour les images de représentation de cette instabilité).

Les effets de viscosité et de la gravité sont négligés par l'hypothèse des forces visqueuses insignifiantes. Le traitement de Rayleigh du problème, presque identique

---

1. tikzpicture sous L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.



FIGURE 4.2

L'instabilité de Rayleigh-Plateau.

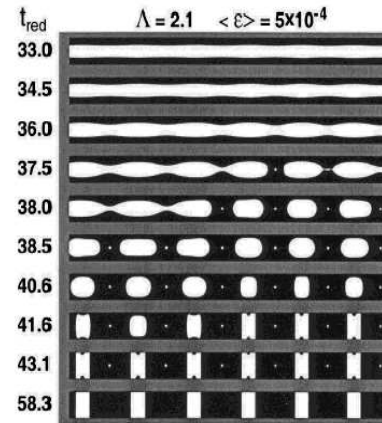


FIGURE 4.3

Simulation numérique de l'instabilité dans la colonne de liquide horizontale.

à l'analyse présentée ci-dessous, inclus ces hypothèses. En ce qui concerne le mouvement du jet et l'accélération par gravité, Rayleigh conclut "Seulement dans les cas considérés, la cause de l'instabilité est statique, et les phénomènes sont indépendants du mouvement général de translation du jet" [66]. L'analyse quantitative considère seulement les liquides pour lesquels cela est applicable.

L'intérêt initial de Lord Rayleigh pour ce problème semble être totalement académique. Il a dit : "il peut même être dit, la plupart des phénomènes encore inexpliqués de l'acoustique sont liés à l'instabilité des jets de fluide" [66]. Les résultats expérimentaux relativement simples donnent lieu à une représentation mathématique qui explique robustement les phénomènes sous-jacents. Ainsi, le problème donne une cohérence entre la théorie et l'expérimentation.

Le problème est également analogue à d'autres problèmes d'écoulement en mécanique des fluides. Par exemple, l'analyse appropriée pour les films minces qui forment un revêtement d'une tige ou fibre cylindrique. Ces films fluides sont intrin-

séquelement instables et la croissance des perturbations reflète que celle de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Dans cette formulation, les effets visqueux et l'hydrophilie du matériau mouillé deviennent importants, mais le comportement général, où une colonne cylindrique de liquide se transmet à une série de gouttelettes, est identique.

## 4.2 Rappels

Nous présentons dans cette section le cadre fonctionnel et quelques définitions utiles pour la suite de notre étude.

- Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $p$  un nombre réel vérifie que  $1 \leq p \leq \infty$  et  $m$  un entier positif. L'espace de Sobolev  $W^{m,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}, \quad (4.1)$$

où  $\alpha$  est un multi-indice,  $D^\alpha u$  est la dérivée partielle de  $u$  au sens des distributions.

- L'espace  $H_{per}^m(]0, 1[)$  est défini par :

$$H_{per}^m(]0, 1[) = \{f \in H^m(]0, 1[), f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) \text{ pour } i = 0, 1, \dots, m-1\}, \quad (4.2)$$

où  $H^m(]0, 1[) = W^{m,2}(]0, 1[)$ .  $H_{per}^m(]0, 1[)$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$((u, v))_m = ((u, v)) = \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)dx. \quad (4.3)$$

On munit l'espace  $H_{per}^m(]0, 1[)$  de la norme :  $|u|_{H_{per}^m(]0, 1[)} = ((u, u))^{1/2}$ . Si on note  $|\cdot|_{L^p(]0, 1[)}$  la norme usuelle de l'espace  $L^p(]0, 1[)$ , on peut remarquer que  $L^p(]0, 1[) = H_{per}^0(]0, 1[)$ .



- Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert, tels que  $X \subset Y$ , avec injection continue et dense. En utilisant la théorie d'interpolation (voir [77]), nous considérons la famille d'espaces de Hilbert notés  $[X, Y]_\theta$ ,  $\theta \in [0, 1]$  telle que  $[X, Y]_0 = X$ ,  $[X, Y]_1 = Y$ , et  $X \subset [X, Y]_\theta \subset Y$ , avec injections continues et denses. La norme sur  $[X, Y]_\theta$  vérifie :

$$\|u\|_{[X, Y]_\theta} \leq c(\theta) \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta, \quad \forall u \in X, \forall \theta \in [0, 1]. \quad (4.4)$$

Par l'interpolation entre  $H_{per}^m(]0, 1[)$  et  $H_{per}^{m+1}(]0, 1[)$ , et pour  $\alpha \in ]0, 1[$ , on définit :

$$H_{per}^{m+\alpha}(]0, 1[) = [H_{per}^{m+1}(]0, 1[), H_{per}^m(]0, 1[)]_{1-\alpha}.$$

- Pour  $s \geq 0$ , on définit l'espace  $H_{per}^s(]0, 1[)$  par :

$$H_{per}^s(]0, 1[) = [H_{per}^m(]0, 1[), H_{per}^0(]0, 1[)]_\theta, \quad (1-\theta)m = s, \theta \in ]0, 1[, \quad (4.5)$$

où  $m$  est un entier positif.

- Si  $X$  est un espace de Banach,  $1 \leq p < \infty$  et  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , alors,  $L^p(a, b; X)$  est l'espace des fonctions  $L^p$  de  $]a, b[$  à valeurs dans  $X$ , qui est un espace de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{L^p(a, b; X)} = \left( \int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour  $p = \infty$ ,  $L^\infty(a, b; X)$  est l'espace des fonctions mesurables de  $]a, b[$  dans  $X$ , qui sont essentiellement bornées. Cet espace est de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(a, b; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [a, b]} \|u(t)\|_X.$$

De même, pour  $-\infty < a < b < +\infty$ , l'espace  $\mathcal{C}([a, b]; X)$  est l'ensemble des fonctions continues  $f : [a, b] \rightarrow X$ , c'est un espace de Banach avec la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}([a, b]; X)} = \max_{t \in [a, b]} \|f(t)\|_X.$$

Nous présentons maintenant quelques résultats d'inégalité d'interpolation (voir [2, 77, 78]) et de compacité et un résultat concernant l'équivalence des normes dans  $H_{per}^m(]0, 1[)$ .

**Lemme 4.2.1** *Supposons que  $m \geq 1$ , alors les trois normes suivantes sur  $H_{per}^m(]0, 1[)$  sont équivalentes :*

$$|u|_{H_{per}^m(]0, 1[)}, \quad |u|_{L^2(]0, 1[)} + |u^{(m)}|_{L^2(]0, 1[)} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 u(x) dx \right| + |u^{(m)}|_{L^2(]0, 1[)}.$$

**Remarque 4.2.2** *Soit  $u \in H_{per}^m(]0, 1[)$ , avec  $m \geq 2$ , alors :*

$$\int_0^1 u^{(n)} dx = 0, \quad 1 \leq n \leq m - 1.$$

D'où  $u^{(n)} \in \dot{H}_{per}^{m-n}(]0, 1[)$  pour tout  $1 \leq n \leq m - 1$ . Alors, l'inégalité de Poincaré est valide pour tout  $1 \leq n \leq m - 1$ . Autrement dit; il existe une constante  $c > 0$ , telle que :

$$|u^{(n)}|_{L^2(]0, 1[)} \leq c |u^{(n+k)}|_{L^2(]0, 1[)}, \quad \forall u \in H_{per}^m(]0, 1[), \quad 1 \leq n \leq m - 1, \quad 0 \leq k \leq m - n.$$

**Lemme 4.2.3** *Soient  $s_1, s_2$  et  $s$  trois réels positifs, tels que  $s_1 \leq s \leq s_2$  ( $s = \alpha s_2 + (1 - \alpha)s_1$  avec  $\alpha \in [0, 1]$ ), alors il existe une constante  $c(\alpha, s_1, s_2) > 0$ , telle que :*

$$\|u\|_{H_{per}^s(]0, 1[)} \leq c(\alpha, s_1, s_2) \|u\|_{H_{per}^{s_1}(]0, 1[)}^{1-\alpha} \|u\|_{H_{per}^{s_2}(]0, 1[)}^{\alpha}, \quad (4.6)$$

où  $u \in H_{per}^{s_2}(]0, 1[)$ .

**Théorème 4.2.4** [3, 65]

*Soit  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $p \in [1, +\infty[$ ,  $m^* \geq 1$  et  $u \in W^{m^*, p}(\Omega)$ . Alors, il existe deux constantes  $c > 0$  et  $\mu^* = \frac{1}{m^*}(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})$ , telles que :*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\mu^*} \|u\|_{W^{m^*, p}(\Omega)}^{\mu^*}, \quad (4.7)$$

avec  $r \in [p, +\infty]$  si  $m^*p > 1$ ,  $r \in [p, +\infty[$  si  $m^*p = 1$ , et  $r \in [p, \frac{p}{1-m^*p}]$  si  $m^*p < 1$ .

**Théorème 4.2.5** [49]

Supposons que  $s$  est un réel positif. Alors quel que soit  $\varepsilon < s$ , l'injection

$$H_{per}^s([0, 1]) \hookrightarrow H_{per}^{s-\varepsilon}([0, 1])$$

est compacte.

**Théorème 4.2.6** (Théorème de compacité (voir [48, 77]))

Soient  $X, X_0, X_1$  trois espaces de Banach,  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 < q < \infty$ . Pour  $T$  fini on définit l'espace  $E$  par :

$$E = \left\{ v; v \in L^p(0, T; X_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^q(0, T; X_1) \right\},$$

muni de la norme :

$$\|v\|_E = \|v\|_{L^p(0, T; X_0)} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^q(0, T; X_1)}.$$

$(E, \|\cdot\|_E)$  est un espace de Banach.

Supposons que :

1.  $X_0 \subset X \subset X_1$  avec injections continues et denses.
  2. L'injection  $X_0 \subset X$  est compacte.
- (4.8)

Alors :

- (a)  $E \subset \mathcal{C}([0, T]; X_1)$  avec injection compacte.
- (b) Si  $p$  est fini,  $E \subset L^p(0, T; X)$  avec injection compacte.
- (c) Si  $p = \infty$ ,  $E \subset \mathcal{C}([0, T]; X)$  avec injection compacte.

**Théorème 4.2.7** (voir [48, 77, 78])

Soit  $V, H, V'$  trois espaces de Hilbert.  $H$  est identifié à son dual  $H'$ . Supposons que  $V \subset H \cong H' \subset V'$ , avec injections continues, et chaque espace est dense dans

le suivant,  $V'$  est le dual de  $V$ . Si  $u \in L^2(0, T; V)$  et sa dérivée  $u'$ , au sens des distributions, appartient à  $L^2(0, T; V')$ , alors  $u \in \mathcal{C}([0, T]; H)$  ( $u = p.p$  une telle fonction continue). De plus

$$\frac{d}{dt} \|u\|_H^2 = 2 \langle u', u \rangle_{V', V}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[).$$

### 4.3 Dérivation de l'équation d'évolution

Nous nous intéressons à un pore cylindrique (voir figure 4.4), soumis à des contraintes uniaxiales. Les contraintes induisent des instabilités morphologiques à la surface du canal [18]. Nous observons ces phénomènes d'instabilité en sciences des matériaux [63] puisque la fabrication des matériaux introduit des distributions de pores qui influent sur leurs propriétés mécaniques et physiques. Nous supposons que le chargement (contraintes) est aussi à symétrie axiale ; le problème à trois dimensions  $(r, z, \theta)$  (coordonnées cylindriques) se ramène à un problème bidimensionnel  $(r, z)$ .

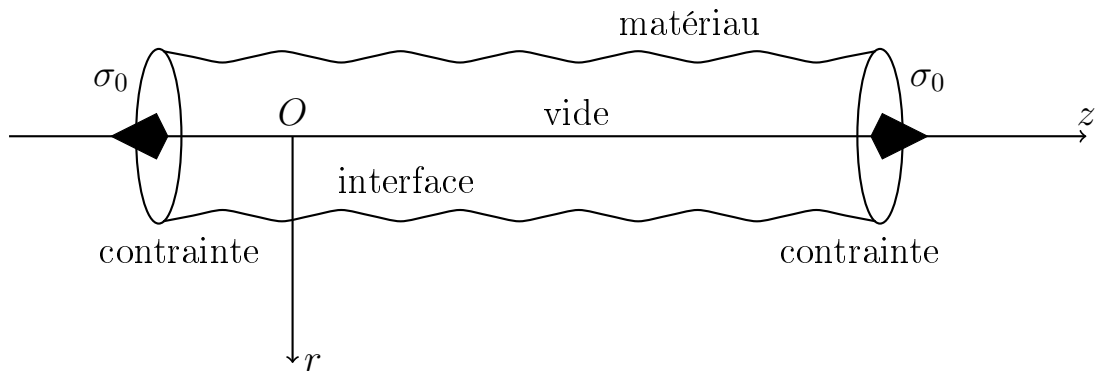


FIGURE 4.4 – Interface vide/matière d'un pore à symétrie cylindrique, soumis à une contrainte extérieure axiale  $\sigma_0$ .

Dans la figure 4.4 on considère un pore cylindrique de longueur  $\ell$  et de rayon  $r_0$  dans une matrice de module de cisaillement  $\mu$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , soumis

à des forces qui admettent le même axe de révolution. L'équation d'évolution de la surface [18] s'écrit :

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = D(1 + r_z^2)^{\frac{1}{2}} \nabla_s^2 (\mathcal{E} + \gamma \mathcal{K}) \quad \text{sur } \Omega_{r(\tau)}, \quad (4.9)$$

où :

- $r = r(\theta, z, t)$  est le rayon du cylindre, fonction du temps, de l'angle  $\theta$  et de la coordonnée axiale  $z$ ;  $r_z = \frac{\partial r}{\partial z}$ .
- $\Omega_{r(\tau)}$  est la partie occupée par le pore dont la frontière latérale est donnée par :

$$\Gamma_r = \{(r, z); r = r(z, \tau)\},$$

et les surfaces latérales sont sous la forme :

$$\Gamma_0 = \{(r, z); z = 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_1 = \{(r, z); z = \ell\}.$$

- $\nabla_s^2$  désigne le Laplacien surfacique [8, 55] défini par :

$$\nabla_s^2 = \frac{1}{q} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{r^2 + r_\theta^2}{q} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{r_z r_\theta}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1 + r_z^2}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{r_z r_\theta}{q} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right], \quad (4.10)$$

avec :

$$q = \sqrt{r^2(1 + r_z^2) + r_\theta^2}; \quad r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta}.$$

- $\mathcal{K}$  désigne la courbure  $\mathcal{K} = \kappa_1 + \kappa_2$  avec :

$$\kappa_1 := \frac{1}{r \sqrt{1 + r_z^2}}; \quad \kappa_2 := \frac{-r_{zz}}{(1 + r_z^2)^{3/2}}. \quad (4.11)$$

- $D$  est le coefficient de diffusion des atomes en surface qui dépend de la température.
- $\gamma$  est l'énergie libre de la surface.
- $\mathcal{E}$  est l'énergie élastique de la structure définie en tout point de  $\Omega_{r(\tau)}$ .

Une première approche consiste à une étude théorique en l'absence de contraintes [60, 67]. Les auteurs de [60, 67] ont donné des résultats expérimentaux. Ils ont examiné

le cas des instabilités des fluides se produisant aux surfaces des objets cylindriques de l'eau. Ils ont démontré que ces instabilités produisent des fluctuations avec des longueurs d'ondes supérieures à la circonférence du cylindre. Des résultats similaires ont été obtenus dans le cas des solides par Nichols et Mullins [53, 55]. dans le cas de tiges cylindriques. Les mêmes auteurs ont généralisé leurs résultats pour des pores cylindriques. Ils se sont particulièrement intéressés à l'évolution morphologique de la surface libre des objets cylindriques.

Un calcul de la variation d'énergie [17] a également démontré que le développement de l'instabilité est une énergie favorable. Dans [60, 67, 53, 55], la présence de contraintes à l'intérieur du matériau n'a pas été pris en compte. Le traitement d'évolution des pores par diffusion de surface, lorsque la matrice est sous contrainte, a été fait pour la première fois par Colin, Grilhé et Junqua [18] dans le cas d'une contrainte uniaxiale constante  $\sigma_0$ . Mais ils ont aussi étendu le formalisme de matériaux sous-jacents un champ bidimensionnelle sous contrainte, par exemple, les filaments et les fibres composites et ils ont déterminé leurs investigations à des structures à symétrie cylindrique [45]. Dans [18, 16], la matrice est soumise à une contrainte constante et uniaxiale  $\sigma_0$  et des fluctuations sinusoïdales sont introduites sur la surface latérale du pore parallèlement à l'axe ( $Oz$ ); les auteurs effectuent un calcul de variation d'énergie puis une étude cinétique afin de caractériser l'évolution de la surface. La surface latérale du pore est instable pour des longueurs d'onde supérieures à une longueur d'onde critique  $\lambda_c$  qui s'écrit comme fonction de la contrainte initiale  $\sigma_0$ . Pour des faibles valeurs de  $\sigma_0$ , l'influence sur la longueur d'onde critique est réduite et l'instabilité est gouvernée par l'énergie de surface, et pour de grandes valeurs de  $\sigma_0$ ,  $\lambda_c$  devient très petite par rapport au rayon du pore et la croissance de l'instabilité est bien plus rapide.

Des arguments de perturbation longitudinale de petite amplitude du cylindre et des calculs numériques sont utilisés dans [14, 15, 5] pour étudier l'équation non linéaire

régissant le changement morphologique de la surface du cylindre. Une analyse de stabilité de la surface du cylindre en utilisant la théorie de la stabilité linéaire dans le cas d'une contrainte uniaxiale est étudiée dans [44, 45].

Pour étudier l'évolution de la surface du cylindre, nous utilisons un système de coordonnées cylindriques  $(r, z, \theta)$  avec  $(Oz)$  comme axe de révolution. L'axisymétrie nous permet d'écrire le rayon  $r$  seulement comme fonction de  $z$  et de  $\tau$  :  $r = r(z, \tau)$  et  $r_\theta = 0$ . Nous supposons que  $\kappa_1$  est négligeable devant  $\kappa_2$  comme dans [10], l'équation (4.9) devient :

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{r}{\sqrt{1+r_z^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \gamma \frac{-r_{zz}}{(1+r_z^2)^{3/2}} + \mathcal{E} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Nous supposons de plus que :

$$r(z, \tau) \geq r_0 \text{ pour tout } z \text{ et } \tau \text{ où } r_0 > 0 \text{ est donnée.} \quad (4.13)$$

La difficulté est alors de déterminer  $\mathcal{E}$  dans l'équation (4.12). Pour cela nous allons effectuer des développements asymptotiques permettant de calculer les déplacements et les contraintes. Nous supposons alors que :

$$\alpha := r/\ell \ll 1. \quad (4.14)$$

Pour simplifier, nous introduisons les changements de variables suivants  $R = r$  ;  $Z = \alpha z$  et  $t = D\gamma\alpha^4\tau$ . Nous cherchons alors les déplacements  $u_r$  et  $u_z$ . Pour cela, nous posons  $u_r(r, z) = U_1(R, Z)$  et  $u_z(r, z) = \alpha U_3(R, Z)$ . Le déplacement tangentiel  $u_\theta$  est nul par axisymétrie. Il s'agit donc d'étudier le comportement de  $h(t, Z) = r(\tau, z)$ .

Des calculs comme dans [10, 75] (voir l'appendice B.1) nous donnent :

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\mu} \left( h_{ZZ} \ln(h) + \frac{1}{2} h^{-2} h_Z^2 \right), \quad (4.15)$$

avec  $\sigma_0$  est la contrainte initiale. Alors l'équation (4.12) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ h \frac{\partial}{\partial Z} \left( (1 - \theta \ln(h)) h_{ZZ} - \frac{\theta}{2} h^{-2} h_Z^2 \right) \right], \quad (4.16)$$

où  $\theta = \frac{\sigma_0^2}{\gamma\mu}$  est un paramètre physique, qui dépend de la contrainte appliquée au matériau  $\sigma_0$ , du module de cisaillement  $\mu$  et de l'énergie libre de la surface  $\gamma$ . A cette équation, il convient de rajouter les hypothèses (4.13) et (4.14) :

$$r_0 \leq h \quad \text{et} \quad h/\ell \ll 1. \quad (4.17)$$

**Remarque 4.3.1** *La condition  $h/\ell \ll 1$  de l'hypothèse (4.17) est assurée dès que  $\ell \gg \varphi + \frac{1}{\theta}$ . Nous formulons alors l'hypothèse (4.17) sous la forme :*

$$\varphi \geq \ln(r_0) - \frac{1}{\theta} \quad \text{et} \quad \ell \gg \varphi + \frac{1}{\theta}. \quad (4.18)$$

Dans ce travail, nous considérons les instabilités de la surface du cylindre en absence de contrainte ( $\sigma_0 = 0$ ), (instabilités de Rayleigh–Plateau) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right). \quad (4.19)$$

Nous nous intéressons au problème périodique :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \text{ sur } ]0, T[ \times ]0, 1[, \\ h(t, \cdot) \text{ est une fonction périodique sur } ]0, 1[, \\ h(0, \cdot) = h_0 > 0 \text{ est une fonction périodique donnée sur } ]0, 1[. \end{cases} \quad (4.20)$$

Des arguments de perturbation longitudinale de petite amplitude du cylindre et des calculs numériques sont utilisés dans [5, 14, 15] pour étudier l'équation non linéaire régissant le changement morphologique de la surface du cylindre. Une analyse de stabilité de la surface du cylindre en utilisant la théorie de la stabilité linéaire dans le cas d'une contrainte uniaxiale est étudiée dans [44, 45].

Dans [53, 55], les auteurs étudient la stabilité morphologique de la surface d'un pore sous l'action de la tension artificielle (à contrainte nulle), ils montrent la transformation des pores cylindriques en sphères et que la distance entre les sphères dépend de



la diffusion de surface et de la diffusion de volume ; ils montrent aussi que la surface devient instable si la longueur d'onde est plus grande que la circonférence du cylindre. En particulier, ils analysent l'évolution extérieure due aux perturbations de petites amplitudes.

**Remarque 4.3.2** *L'équation (4.19) peut s'écrire (voir l'appendice B.2) sous la forme générale des équations d'évolution des films minces [43] :*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v^n \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \alpha v^{n-1} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v^{n-2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right), \quad (4.21)$$

avec :  $n = 0$ ,  $\alpha = -3/2$ ,  $\beta = 3/4$  et  $v = h^2$ .

**Notations :** On pose  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\Omega_T = ]0, T[ \times ]0, 1[$ . Nous considérons l'espace fonctionnel  $\mathcal{X}$  défini par :

$$\mathcal{X} = L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_{per}^1(\Omega)).$$

On munit  $\mathcal{X}$  de la norme :

$$\| u \|_{\mathcal{X}} = \left[ \int_0^T \int_0^1 |u^{(3)}(t, x)|^2 dx dt + \sup_{t \in ]0, T[} \left( \int_0^1 |u'(t, x)|^2 dx + \int_0^1 |u(t, x)|^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Définition 4.3.3** *Une solution  $h \in L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega))$  de (4.20) est dite faible admissible si*

1.  $\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \in L^1(\Omega_T)$ .
2.  $h_t \in L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))')$ .
3. Pour tout  $\varphi \in H_{per}^3(\Omega)$ , nous avons, dans  $\mathcal{D}'(]0, T[)$ , l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 h(t, x) \varphi(x) dx = - \int_0^1 h_{xx} \varphi_{xx} dx - \int_0^1 \frac{h_x}{h} h_{xxx} \varphi dx. \quad (4.22)$$

4.  $h(0) = h_0 > 0$  (donnée dans  $H_{per}^1(\Omega)$ ).

**Lemme 4.3.4** *Supposons que  $h \in \mathcal{X}$ ,  $h_0 \in \mathcal{C}[0, 1]$ , et  $h_0 \geq \varepsilon > 0$ . Alors, pour toute solution  $h$  locale faible admissible de (4.22), il existe un temps  $T_*(\varepsilon) > 0$ , tel que  $h(t, x) \geq \varepsilon/2$ ,  $\forall t \in [0, T_*]$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .*

**Preuve.**

Puisque  $h_t \in L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))')$  et  $h \in L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega))$ , alors, d'après le théorème 4.2.6, on déduit que  $h \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(\Omega))$  pour  $s$  fixé dans  $] \frac{1}{2}, 3[$ . Comme  $H^s(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}[0, 1]$  alors  $h \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}[0, 1])$ . En particulier :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in [0, 1]} |h(t, x) - h_0(x)| = 0.$$

Nous déduisons qu'il existe  $T_*(\varepsilon) > 0$ , tel que pour tout  $t \in [0, T_*(\varepsilon)]$ , nous avons :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |h(t, x) - h_0(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent

$$h_0(x) - h(t, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [0, T_*(\varepsilon)], \forall x \in [0, 1].$$

D'où :

$$h(t, x) \geq h_0(x) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t \in [0, T_*(\varepsilon)], \forall x \in [0, 1].$$

□

**Remarque 4.3.5** *Le lemme 4.3.4 sera utile pour justifier le changement de variable  $h = e^u$  que nous utilisons pour trouver un problème équivalent à (4.22) (au moins localement).*

Dans notre travail, nous utilisons le modèle développé dans [75, 8], le rayon du cylindre vérifie une équation aux dérivées partielles parabolique. Sous des hypothèses asymptotiques formelles, et avec des changements d'échelles appropriés, nous simplifions l'EDP satisfaite par le rayon du cylindre [11]. Nous présentons des résultats

d'existence et d'unicité de la solution du problème d'évolution de la surface du cylindre.

Dans l'équation (4.19), il convient de rajouter les hypothèses (voir [11]) :

$$R_0 \leq h \quad \text{et} \quad h/\ell \ll 1. \quad (4.23)$$

$R_0$  et  $\ell$  sont respectivement le rayon et la longueur du cylindre à l'état initial. Nous effectuons le changement de variable  $h(t, x) = e^{u(t, x)}$ . L'équation (4.19) devient sous la forme simplifiée (voir l'appendice B.3) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u^{(4)} - (5u'u^{(3)} + 9u'^2u'' + 3u''^2 + 2u'^4). \quad (4.24)$$

où :  $u^{(k)}(t, x) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(t, x)$ . Nous considérons ensuite le problème aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u^{(4)} - F(u', u'', u^{(3)}) \text{ sur } \Omega_T, \\ u(t, \cdot) \text{ est une fonction périodique sur } \Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0 \text{ est une fonction périodique donnée sur } \Omega, \end{cases} \quad (4.25)$$

avec :

$$F(u', u'', u^{(3)}) = 5u'u^{(3)} + 9u'^2u'' + 3u''^2 + 2u'^4.$$

Dans la suite, nous allons étudier le problème (4.25).

## 4.4 Existence

Dans cette section, nous démontrons l'existence locale de la solution de (4.25). Pour cela, nous utilisons la méthode de Faedo–Galerkin [48, 77].

**Définition 4.4.1** *Une fonction  $u$  définie sur  $[0, 1] \times [0, T]$  est une solution faible de*

(4.25) si :

$$(\mathcal{P}_0) \left\{ \begin{array}{l} 1. \quad u \in L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega)). \\ 2. \quad \text{Pour tout } \varphi \in H_{per}^3(\Omega), \text{ l'égalité suivante est vérifiée :} \\ \quad \frac{d}{dt} \int_0^1 u(t, x) \varphi(x) dx + \int_0^1 u''(t, x) \varphi''(x) dx + \int_0^1 F(u', u'', u^{(3)}) \varphi(x) dx = 0. \\ 3. \quad u(0, \cdot) = u_0 \in H_{per}^1(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))'). \end{array} \right.$$

**Théorème 4.4.2** *Il existe une constante  $\Lambda_0 > 0$ , telle que si  $|u'_0|_{L^2(\Omega)} < \Lambda_0$ , alors le problème  $(\mathcal{P}_0)$  admet une solution globale unique  $u$  dans  $\mathcal{X}$  vérifiant :*

$$|u_x(t)|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 e^{-\nu t}, \quad t > 0, \quad (4.26)$$

avec  $C_0 > 0$ ,  $\nu > 0$  sont des constantes ne dépendantes que de  $u_0$ .

L'existence globale pour des petites données a été prouvée par Rakotoson [64] dans le cadre des équations de Mullins, où l'opérateur d'ordre quatre considéré est l'opérateur réel donné dans la relation (4.12). Ici, nous avons simplifié l'opérateur principal, ce qui implique l'existence de l'opérateur d'ordre quatre non dégénéré.

### Démonstration du théorème 4.4.2

#### Première étape

On procède par la méthode de de Faedo–Galerkin [48, 77] : Considérons  $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}^*\}$  une base de  $H_{per}^1(\Omega)$  vérifiant :

1.  $\varphi_j \in C_{per}^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \geq 1} H_{per}^m(\Omega)$ .
2.  $\forall \varphi \in H_{per}^1(\Omega); \quad (\varphi'_j, \varphi')_{L^2(\Omega)} = \mu_j (\varphi_j, \varphi)_{L^2(\Omega)}$ ; où la suite  $\mu_j$  converge vers  $+\infty$  quand  $j$  tend vers  $+\infty$  et vérifie  $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \dots \leq \mu_j \dots$ .
3.  $(\varphi_j, \varphi_k)_{L^2(\Omega)} = \delta_{jk}$ ; où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker.

Nous considérons alors,  $H_m$  l'espace de dimension finie engendré par  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ .  $P_m$  désigne la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur  $H_m$ . D'après le théorème de

Cauchy–Peano, il existe un moment  $T^* > 0$  et une fonction  $u_m \in \mathcal{C}^1([0, T^*]; H_m)$ , telles que pour tout  $\psi \in H_m$ , nous avons :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u_m(t, x) \psi(x) dx + \int_0^1 u_m''(t, x) \psi''(x) dx + \int_0^1 F(u_m', u_m'', u_m^{(3)})(t, x) \psi(x) dx = 0, \quad (4.27)$$

où

$$F(u_m', u_m'', u_m^{(3)})(t, x) = 5u_m'(t, x)u_m^{(3)}(t, x) + 9u_m'^2(t, x)u_m''(t, x) + 3u_m''^2(t, x) + 2u_m'^4(t, x),$$

avec la donnée initiale  $u_m(0) = P_m(u_0)$ .

**Deuxième étape.** Estimations uniformes en  $m$ , en espace, et en temps :

Nous avons besoin des lemmes suivants :

**Lemme 4.4.3** *Il existe des constantes strictement positives  $\Lambda_0$ ,  $c_0$ , et  $\mu$ , telles que, si  $\sup_{m \geq 1} |u'_{0m}(t)|_{L^2(\Omega)} < \Lambda_0$ , alors :*

$$|u'_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0. \quad (4.28)$$

**Preuve.**

Posons  $\psi = -u_m''$  dans l'équation (4.27). Une intégration par parties nous donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |u'_m(t, x)|^2 dx + \int_0^1 |u_m^{(3)}(t, x)|^2 dx = \underbrace{\int_0^1 F(u'_m, u_m'', u_m^{(3)}) u_m'' dx}_I. \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} I &= 5 \int_0^1 u'_m(t, x) u_m^{(3)}(t, x) u_m''(t, x) dx + 9 \int_0^1 u_m'^2(t, x) u_m''^2(t, x) dx \\ &\quad + 3 \int_0^1 u_m''^3(t, x) dx + 2 \int_0^1 u_m'^4(t, x) u_m''(t, x) dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{cases} \int_0^1 u'_m(t, x) u_m''(t, x) u_m^{(3)}(t, x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 u_m''^3(t, x) dx, \\ \int_0^1 u_m'^2(t, x) u_m''^2(t, x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 u_m'^3(t, x) u_m^{(3)}(t, x) dx. \end{cases} \quad (4.31)$$

La dernière integrale dans (4.30) est nulle. Alors :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 u_m''^3(t, x) dx - 3 \int_0^1 u_m'^3(t, x) u_m^{(3)}(t, x) dx := I_1 + I_2. \quad (4.32)$$

D'après les inégalités d'interpolation (4.7), en prenant  $r = 3$ ,  $p = 2$ , et  $m^* = 1$ , on a :

$$|u_m''(t)|_{L^3(\Omega)} \leq c_1 |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{6}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{6}}.$$

Dans l'inégalité (4.6) si on prend  $s = 1$ ,  $s_1 = 0$  et  $s_2 = 2$ , on trouve que :

$$|u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Alors :

$$|u_m''(t)|_{L^3(\Omega)}^3 \leq c_3 |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{4}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{4}}.$$

D'après l'inégalité de Young :

$$|u_m''(t)|_{L^3(\Omega)}^3 \leq \frac{c_3^8}{8} (|u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{4}})^8 + \frac{7}{8} (|u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{7}{4}})^{\frac{8}{7}}.$$

D'où :

$$|I_1| \leq c_4 |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^{10} + \frac{7}{8} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (4.33)$$

D'autre part, par l'inégalité de Young, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$|I_2| \leq c_\varepsilon \int_0^1 |u_m'|^6(t, x) dx + \varepsilon \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(t, x) dx.$$

Par les inégalités d'interpolation (4.7), en prenant  $r = 3$  et  $p = m^* = 2$ , nous avons :

$$|I_2| \leq c_\varepsilon |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^5 |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(t, x) dx.$$

De nouveau par l'inégalité de Young, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :

$$|I_2| \leq c_5 |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^{10} + 2\varepsilon \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(t, x) dx. \quad (4.34)$$

Les deux inégalités (4.33) et (4.34) donnent :

$$|I| \leq c_6 |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{10} + (2\varepsilon + \frac{7}{8}) \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(t, x) dx.$$

Par conséquent, pour  $4\varepsilon < \frac{1}{8}$ , on a :

$$\frac{d}{dt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{8} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{10}. \quad (4.35)$$

D'après l'inégalité de Poincaré (voir la remarque 4.2.2), il existe une constante  $k > 0$ , telle que  $k |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{8} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2$ . Alors la relation (4.35) nous donne :

$$\frac{d}{dt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + k |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{10}. \quad (4.36)$$

Multiplions par  $e^{kt}$  :

$$\frac{d}{dt} [e^{kt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2] \leq c e^{-4kt} [e^{kt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2]^5.$$

Posons  $Z(t) = e^{kt} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2$  et intégrons entre 0 et  $t$  :

$$-Z^{-4}(t) + Z^{-4}(0) \leq -\frac{c}{k} (e^{-4kt} - 1) \leq \frac{c}{k}, \quad t > 0.$$

Si  $\sup_{m \geq 1} |u'_{0m}|_{L^2(\Omega)}^8 < \frac{k}{c} := \Lambda_0^8$ , alors il existe  $c_0 > 0$  et  $\mu = \frac{k}{2}$  telles que :

$$|u'_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0. \quad (4.37)$$

□

**Remarque 4.4.4** L'estimation (4.37) implique que  $T^* = T$ , c'est-à-dire que  $u_m$  est une solution globale (car  $c_0$  et  $\mu$  ne dépendent ni de  $T^*$  ni de  $m$ ).

**Lemme 4.4.5** Il existe une constant  $c(u_0) > 0$  indépendante de  $T$ , telle que :

$$\int_0^T \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(\tau, x) dx d\tau \leq c(u_0). \quad (4.38)$$

**Preuve.**

On intègre l'inégalité (4.35) entre 0 et  $T$  :

$$\int_0^1 |u'_m|^2(T, x) dx + \frac{1}{8} \int_0^T \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(\tau, x) dx d\tau \leq c \int_0^T |u'_m(\tau)|_{L^2(\Omega)}^{10} d\tau + \int_0^1 |(P_m u_0)'|^2 dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^T \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(\tau, x) dx d\tau &\leq c \int_0^T e^{-10\mu\tau} d\tau + |u_0|_{H^1_{per}(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{c}{10\mu} (1 - e^{-10\mu T}) + |u_0|_{H^1_{per}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^T \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(\tau, x) dx d\tau \leq c(u_0), \quad (\text{indépendante de } T). \quad (4.39)$$

□

**Lemme 4.4.6** *Il existe une constante  $C(u_0)$ , indépendante de  $T$ , telle que :*

$$\left| \int_0^1 u_m(t, x) dx \right| \leq C(u_0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.40)$$

**Preuve.**

Dans (4.27), on prend  $\psi = 1$  :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u_m(t, x) dx + \int_0^1 F(u'_m(t, x), u''_m(t, x), u_m^{(3)}(t, x)) dx = 0. \quad (4.41)$$

Une intégration par parties de (4.41) donne :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u_m(t, x) dx = 2 \int_0^1 u_m''^2(t, x) dx - 2 \int_0^1 u_m'^4(t, x) dx. \quad (4.42)$$

Intégrons (4.42) entre 0 et  $t$  :

$$\int_0^1 u_m(t, x) dx = 2 \int_0^t \int_0^1 u_m''^2(\tau, x) d\tau dx - 2 \int_0^t \int_0^1 u_m'^4(\tau, x) d\tau dx + \int_0^1 u_{0m}(x) dx.$$

D'où :

$$\left| \int_0^1 u_m(t, x) dx \right| \leq 2 \int_0^T \int_0^1 |u_m''|^2(\tau, x) d\tau dx + 2 \int_0^T \int_0^1 |u_m'|^4(\tau, x) d\tau dx + \left| \int_0^1 u_{0m}(x) dx \right|.$$



Nous avons :

$$\int_0^T \int_0^1 |u_m''|^2(\tau, x) d\tau dx \leq \int_0^T \int_0^1 |u_m^{(3)}|^2(\tau, x) d\tau dx \leq c_1(u_0). \quad (4.43)$$

D'autre part, d'après les inégalités d'interpolation (4.7), avec  $r = 4$ ,  $m^* = 1$  et  $p = 2$ , on a :

$$|u_m'(t)|_{L^4(\Omega)}^4 \leq c_1 |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^3 |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité de Young donne :

$$|u_m'(t)|_{L^4(\Omega)}^4 \leq \alpha |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)}^6 + c_\alpha |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \alpha > 0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^T |u_m'(\tau)|_{L^4(\Omega)}^4 d\tau &\leq \alpha \int_0^T |u_m'(\tau)|_{L^2(\Omega)}^6 d\tau + c_\alpha \int_0^T |u_m''(\tau)|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\leq c(1 - e^{-6\mu T}) + c_2(u_0) \leq c_3(u_0). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Comme :

$$\left| \int_0^1 (P_m u_0) dx \right| \leq \int_0^1 |P_m u_0|^2 dx \leq |u_0|_{L^2(\Omega)} < \infty, \quad (4.45)$$

alors :

$$\left| \int_0^1 u_m(t, x) dx \right| \leq C(u_0), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.46)$$

□

**Remarque 4.4.7** Nous savons (voir par exemple [12]), que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , nous avons :

$$|v|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \left| \int_0^1 v dx \right| + |v'|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Alors, d'après les lemmes 4.4.3 et 4.4.6, nous trouvons qu'il existe une constante  $c_1(u_0) > 0$ , indépendante de  $T$ , telle que :

$$|u_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_1(u_0). \quad (4.47)$$

**Proposition 4.4.8** (*Estimations uniformes en  $m$* )

Nous avons les assertions suivantes :

1. Pour tout  $\alpha \geq 1$ , il existe une constante  $c_\alpha(u_0) > 0$ , telle que :

$$\sup_{m \geq 1} |u_m|_{L^\infty(0,T;L^\alpha(\Omega))} \leq c_\alpha(u_0) < +\infty.$$

2. Pour tout  $r \geq 2$  et  $k \in [1, \infty[$  qui vérifient la condition

$$\frac{k}{4} - \frac{k}{2r} \leq 2, \quad (4.48)$$

il existe une constante  $c_{k,r}(u_0) > 0$ , telle que :

$$\sup_{m \geq 1} |u'_m|_{L^k(0,T;L^r(\Omega))} \leq c_{k,r}(u_0) < +\infty.$$

3. Pour tout  $\bar{r} \geq 2$  et  $\bar{k} \in [1, \infty[$  qui vérifient la condition

$$\frac{3\bar{k}}{4} - \frac{\bar{k}}{2\bar{r}} \leq 2, \quad (4.49)$$

il existe une constante  $c_{\bar{k},\bar{r}}(u_0) > 0$ , telle que :

$$\sup_{m \geq 1} |u''_m|_{L^{\bar{k}}(0,T;L^{\bar{r}}(\Omega))} \leq c_{\bar{k},\bar{r}}(u_0) < +\infty.$$

**Preuve.**

1. Pour  $1 \leq \alpha \leq 2$ , d'après (4.47), on trouve le résultat immédiatement. Supposons que  $\alpha > 2$ . D'après les inégalités d'interpolation (4.7) en prenant  $m^* = 1$  et  $p = 2$ , nous trouvons :

$$|u_m(t)|_{L^\alpha(\Omega)} \leq c |u_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha}}.$$

D'après l'inégalité de Young,  $\forall \gamma > 0$ , on a :

$$|u_m(t)|_{L^\alpha(\Omega)} \leq \gamma |u_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{1 + \frac{2}{\alpha}} + c_\gamma |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{1 - \frac{2}{\alpha}}.$$

Les estimations (4.28) et (4.47) nous permettent d'obtenir le résultat souhaité.

2. Dans les inégalités d'interpolation (4.7) on prend  $m^* = 1$  et  $p = 2$  :

$$|u'_m(t)|_{L^r(\Omega)} \leq c_1 |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{r}} |u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}}.$$

D'après les inégalités d'interpolation (4.6), avec  $s = 1$ ,  $s_1 = 0$  et  $s_2 = 2$ , on a :

$$|u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{r}} \leq c_2 |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}}.$$

D'où :

$$|u'_m(t)|_{L^r(\Omega)} \leq c_3 |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2r}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2r}}.$$

D'après (4.28) et pour tout  $k \in [1, \infty[$ , nous avons :

$$\int_0^T |u'_m(t)|_{L^r(\Omega)}^k dt \leq c_3 c_0^{\frac{3k}{4} + \frac{k}{2r}} e^{-\mu(\frac{3k}{4} + \frac{k}{2r})T} \int_0^T |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{k}{4} - \frac{k}{2r}} dt. \quad (4.50)$$

Comme  $u_m$  est dans un borné de  $L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega))$ , alors, sous la condition (4.48) et pour tout  $m \geq 1$ , on a :

$$\int_0^T |u'_m(t)|_{L^r(\Omega)}^k dt \leq c_{k,r}(u_0). \quad (4.51)$$

D'où,  $\sup_{m \geq 1} |u'_m|_{L^k(0,T;L^r(\Omega))} \leq c_{k,r}(u_0) < +\infty$ .

3. Les inégalités d'interpolation (4.7), avec  $m^* = 1$  et  $p = 2$ , donnent :

$$|u''_m(t)|_{L^{\bar{r}}(\Omega)} \leq c_1 |u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{r}}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{r}}}.$$

D'où, d'après les inégalités d'interpolation (4.6), on a :

$$|u''_m(t)|_{L^{\bar{r}}(\Omega)} \leq c_2 |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4} + \frac{1}{2\bar{r}}} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2\bar{r}}}.$$

D'après (4.28) et pour tout  $\bar{k} \in [1, \infty[$ , on trouve :

$$\int_0^T |u''_m(t)|_{L^{\bar{r}}(\Omega)}^{\bar{k}} dt \leq c_2 c_0^{\frac{\bar{k}}{4} + \frac{\bar{k}}{2\bar{r}}} e^{-\mu(\frac{\bar{k}}{4} + \frac{\bar{k}}{2\bar{r}})T} \int_0^T |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3\bar{k}}{4} - \frac{\bar{k}}{2\bar{r}}} dt. \quad (4.52)$$

Alors, sous la condition (4.49) et pour tout  $m \geq 1$ , nous avons :

$$\int_0^T |u''_m(t)|_{L^{\bar{r}}(\Omega)}^{\bar{k}} dt \leq c_{\bar{k},\bar{r}}(u_0). \quad (4.53)$$

D'où,  $\sup_{m \geq 1} |u''_m|_{L^{\bar{k}}(0,T;L^{\bar{r}}(\Omega))} \leq c_{\bar{k},\bar{r}}(u_0) < +\infty$ . □

**Troisième étape.** Estimation de la dérivée en temps :

D'après les estimations obtenues, nous trouvons que  $u_m$  reste dans un ensemble borné de  $L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_{per}^1(\Omega))$ . Pour tout  $\psi \in H_{per}^3(\Omega)$ , on prend la fonction  $P_m\psi$  comme une fonction test :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x)(P_m\psi(x))dx &= - \int_0^1 u_m''(t, x)(P_m\psi(x))'' dx - 2 \int_0^1 u_m^4(t, x)(P_m\psi(x))dx \\ &+ 3 \int_0^1 u_m^3(t, x)(P_m\psi(x))' dx - 3 \int_0^1 u_m'^2(t, x)(P_m\psi(x))dx \\ &- 5 \int_0^1 u_m'(t, x)u_m^{(3)}(t, x)(P_m\psi(x))dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x)(P_m\psi(x))dx \right| &\leq |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} |(P_m\psi)''|_{L^2(\Omega)} + 2|u_m'(t)|_{L^8(\Omega)}^4 |P_m\psi|_{L^2(\Omega)} \\ &+ 3|u_m'(t)|_{L^6(\Omega)}^3 |(P_m\psi)'|_{L^2(\Omega)} + 2|P_m\psi|_\infty |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ 5|P_m\psi|_\infty |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x)(P_m\psi(x))dx = \int_0^1 P_m \left( \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x) \right) \psi(x) dx = \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x) \psi(x) dx,$$

et comme  $|P_m\psi|_\infty \leq c_1 |(P_m\psi)'|_{L^2(\Omega)}$  et  $|(P_m\psi)^{(k)}|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 |\psi|_{H_{per}^3(\Omega)}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , alors :

$$\left| \int_0^1 \frac{\partial u_m}{\partial t}(t, x) \psi(x) dx \right| \leq c_3 Y(u_m'(t), u_m''(t), u_m^{(3)}(t)) |\psi|_{H_{per}^3(\Omega)}, \quad (4.54)$$

avec

$$\begin{aligned} Y(u_m'(t), u_m''(t), u_m^{(3)}(t)) &= |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)} + |u_m'(t)|_{L^8(\Omega)}^4 + |u_m'(t)|_{L^6(\Omega)}^3 \\ &+ |u_m''(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_m'(t)|_{L^2(\Omega)} |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_0^T \left| \frac{\partial u_m}{\partial t}(t) \right|_{H_{per}^3(\Omega)}^2 dt \leq c_3 \int_0^T Y^2(u_m'(t), u_m''(t), u_m^{(3)}(t)) dt. \quad (4.55)$$

D'après (4.28) nous avons  $\sup_{t \geq 0} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq c_0$ . Alors :

$$Y^2(u'_m(t), u''_m(t), u_m^{(3)}(t)) \leq c_4 (|u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |u'_m(t)|_{L^8(\Omega)}^8 + |u'_m(t)|_{L^6(\Omega)}^6 + |u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^4 + |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Nous avons :

$$\int_0^T |u''_m(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq c \int_0^T |u_m^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq c(u_0), \quad (\text{par (4.38)}).$$

D'autre part, pour  $k = r = 8$  ou  $k = r = 6$ , la condition (4.48) est valide. Alors  $|u'_m|_{L^n(\Omega)}^n$  reste dans un borné de  $L^1(]0, T[)$ , avec  $n = 6, 8$ . De même, la condition (4.49) reste valide pour  $\bar{k} = 4$  et  $\bar{r} = 2$ , qui affirme que  $|u''_m|_{L^2(\Omega)}^4$  reste dans un borné aussi de  $L^1(]0, T[)$ . Alors,  $Y^2(u'_m, u''_m, u^{(3)})$  reste dans un borné de  $L^1(]0, T[)$ . D'où  $\frac{\partial u_m}{\partial t}$  reste dans un borné de  $L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))')$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Puisque  $u_m$  appartient à un borné de  $L^\infty(0, T; H_{per}^1(\Omega))$ ;  $\frac{\partial u_m}{\partial t}$  reste dans un borné de  $L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))')$  lorsque  $m \rightarrow +\infty$ , et en utilisant l'identification

$$H_{per}^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \cong (L^2(\Omega))' \subset (H_{per}^3(\Omega))'$$

nous déduisons, d'après le théorème d'Aubin–Lions [théorème 4.2.6], que  $u_m$  converge dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ . Alors, d'après les estimation précédentes, il existe une sous-suite de  $u_m$  que l'on renomme  $u_m$  et une fonction  $u$ , telles que :

- (a)  $\frac{\partial u_m}{\partial t} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial t}$  dans  $L^2(0, T; (H_{per}^3(\Omega))')$ –faible.
- (b)  $u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u$  dans  $L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega))$ –faible.
- (c)  $u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u$  dans  $L^\infty(0, T; H_{per}^1(\Omega))$ –faible étoile.
- (d)  $u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u$  fortement dans  $\mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ .
- (e)  $u$  est une solution faible du problème (4.25).

**Remarque 4.4.9** Nous avons  $u_m(0) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u(0)$  dans  $H_{per}^1(\Omega)$ . Comme  $u_m(0) = P_m u_0 \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u_0$ , alors,  $u(0) = u_0$  au sens de  $H_{per}^1(\Omega)$ .

**Remarque 4.4.10** *Sous des conditions analogues au théorème principal 4.4.2, si  $u_0$  est dans  $H_{per}^s(\Omega)$ ,  $s < 3$  fixé, On peut prendre l'espace  $H_{per}^s(\Omega)$  comme un espace pivot :*

$$H_{per}^3(\Omega) \subset H_{per}^s(\Omega) \cong (H_{per}^s(\Omega))' \subset (H_{per}^3(\Omega))',$$

*avec injections continues et denses, alors, d'après le théorème 4.2.7, on a  $u_m \rightarrow u$  dans  $\mathcal{C}([0, T]; H_{per}^s(\Omega))$ .*

**Corollaire 4.4.11** *du théorème 4.4.2*

*Il existe deux constantes  $c > 0$ ,  $\mu > 0$ , telles que, pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a :*

$$|u(x, t) - \bar{u}(t)|_\infty \leq c e^{-\mu t}, \quad t > 0,$$

$$\text{où } \bar{u}(t) = \int_0^1 u(t, x) dx.$$

**Preuve.** Pour tout  $x \in [0, 1]$ , d'après les inégalités d'interpolation et l'estimation (4.28), on a :

$$|u(x, t) - \bar{u}(t)|_\infty \leq c |u(x, t) - \bar{u}(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} |u_x(t)|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq c e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

□

## 4.5 Unicité

Nous montrons dans cette section l'unicité de la solution du système (4.25) dans l'espace  $\mathcal{X}$ .

**Théorème 4.5.1** *Le problème (4.25), admet au plus une solution  $u \in \mathcal{X}$ , avec la donnée initiale  $u(0) = u_0 \in H_{per}^1(\Omega)$ .*

**Preuve.** Soit  $u_1, u_2 \in \mathcal{X}$  deux solutions de (4.25) et on pose  $\delta u = u_1 - u_2$ . Comme  $u_1$  et  $u_2$  vérifient l'équation (4.24), alors, en prenant la différence entre les deux équations, en multipliant l'équation qui en résulte par  $(\delta u)''$  et en intégrant entre 0 et 1, nous trouvons :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx + \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx = P_1 + P_2 + P_3 + P_4, \quad (4.56)$$

avec

$$\begin{cases} P_1 = 5 \int_0^1 (u_1'(t, x)u_1^{(3)}(t, x) - u_2'(t, x)u_2^{(3)}(t, x))(\delta u)''(t, x)dx, \\ P_2 = 9 \int_0^1 (u_1'^2(t, x)u_1''(t, x) - u_2'^2(t, x)u_2''(t, x))(\delta u)''(t, x)dx, \\ P_3 = 3 \int_0^1 (u_1''^2(t, x) - u_2''^2(t, x))(\delta u)''(t, x)dx, \\ P_4 = 2 \int_0^1 (u_1'^4(t, x) - u_2'^4(t, x))(\delta u)''(t, x)dx. \end{cases} \quad (4.57)$$

$P_1$  peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} P_1 &= 5 \int_0^1 (\delta u)'(t, x)u_1^{(3)}(t, x)(\delta u)''(t, x)dx + 5 \int_0^1 u_2'(t, x)(\delta u)^{(3)}(t, x)(\delta u)''(t, x)dx \\ &= P_{11} + P_{12}. \end{aligned}$$

Pour estimer  $P_{11}$ , d'après les inégalités d'interpolation (4.7) et l'estimation (4.28),

Comme :  $\int_0^1 (\delta u)''(t, x)dx = 0$ , alors

$$|(\delta u)''(t, x)| \leq \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|dx \leq |(\delta u)^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}.$$

Alors, en utilisant les inégalités de Cauchy–Schwarz et de Young, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on

a :

$$\begin{aligned} |P_{11}| &\leq 5|(\delta u)^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)} \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)||u_1^{(3)}(t, x)|dx \\ &\leq c_1|(\delta u)^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)} \left( \int_0^1 |u_1^{(3)}(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_\varepsilon \left( \int_0^1 |u_1^{(3)}(t, x)|^2 dx \right) \left( \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx \right) + \frac{\varepsilon}{8} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx \\ &= c_2|u_1^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{8} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx. \end{aligned}$$

De même, via encore les inégalités d'interpolation, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
|P_{12}| &\leq c_3 |u'_2(t)|_\infty \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)| |(\delta u)''(t, x)| dx \\
&\leq c_\varepsilon c_5^2 |u'_2(t)|_\infty^2 |(\delta u)''(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{24} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx \\
&\leq c_4 |u'_2(t)|_\infty^2 |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)} |(\delta u)^{(3)}(t, x)|_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{24} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx \\
&\leq c_5 |u'_2(t)|_\infty^4 |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{8} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Alors,

$$|P_1| \leq f_1(t) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.58)$$

avec,  $f_1(t) = c_5 (|u_1^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + |u'_2(t)|_\infty^4)$ . Montrons que  $f_1 \in L^1(]0, T[)$ . D'après la proposition 4.4.8, avec  $k = 4$  et  $r = \infty$ , on déduit que  $|u'_2|_\infty^4 \in L^1(]0, T[)$ , et comme  $u_1 \in L^2(0, T; H_{per}^3(\Omega))$ , on trouve que  $f_1 \in L^1(]0, T[)$ .

Une intégration par parties nous permet d'écrire  $P_2$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
P_2 &= -3 \int_0^1 (u_1^3(t, x) - u_2^3(t, x)) (\delta u)^{(3)}(t, x) dx \\
&= \int_0^1 (u'_1(t, x) - u'_2(t, x)) (u_1^2(t, x) + u_1(t, x)u'_2(t, x) + u_2^2(t, x)) (\delta u)^{(3)}(t, x) dx.
\end{aligned}$$

Un utilisant l'inégalité de Young pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{aligned}
|P_2| &\leq c_6 (|u'_1(t)|_\infty^2 + |u'_1(t)|_\infty |u'_2(t)|_\infty + |u'_2(t)|_\infty^2) \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)| |(\delta u)^{(3)}(t, x)| dx \\
&\leq c_7 (|u'_1(t)|_\infty^2 + |u'_2(t)|_\infty^2) \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)| |(\delta u)^{(3)}(t, x)| dx \\
&\leq c_\varepsilon (|u'_1(t)|_\infty^2 + |u'_2(t)|_\infty^2)^2 \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx \\
&\leq c_8 (|u'_1(t)|_\infty^4 + |u'_2(t)|_\infty^4) \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$|P_2| \leq f_2(t) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.59)$$



avec  $f_2(t) = c_8(|u'_1(t)|_\infty^4 + |u'_2(t)|_\infty^4)$ . D'après la proposition 4.4.8, avec  $k = 4$  et  $r = \infty$ , on déduit que  $f_2 \in L^1(]0, T[)$ .

Nous écrivons  $P_3$  sous la forme :

$$\begin{aligned} P_3 &= 3 \int_0^1 (u''_1(t, x) + u''_2(t, x))(u''_1(t, x) - u''_2(t, x))(\delta u)''(t, x) dx \\ &= 3 \int_0^1 (u''_1(t, x) + u''_2(t, x))(\delta u)''^2(t, x) dx. \end{aligned}$$

Par les inégalités d'interpolation (4.6), on a :

$$\begin{aligned} |P_3| &\leq c_9(|u''_1(t)|_\infty + |u''_2(t)|_\infty) \int_0^1 |(\delta u)''(t, x)|^2 dx \\ &\leq c_{10}(|u''_1(t)|_\infty + |u''_2(t)|_\infty) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)} |(\delta u)^{(3)}(t)|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Alors, par l'inégalité de Young, on trouve :

$$|P_3| \leq f_3(t) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.60)$$

avec

$$f_3(t) = c_{11}(|u''_1(t)|_\infty + |u''_2(t)|_\infty)^2 \leq c_{12}(|u''_1(t)|_\infty^2 + |u''_2(t)|_\infty^2).$$

D'après la proposition 4.4.8, avec  $\bar{k} = 2$  et  $\bar{r} = \infty$ , on déduit que  $f_3 \in L^1(]0, T[)$ .

Finalement, on peut écrire  $P_4$  sous la forme :

$$P_4 = 2 \int_0^1 (\delta u)''(t, x)(\delta u)'(t, x)(u'_1(t, x) + u'_2(t, x))(u_1''(t, x) + u_2''(t, x)) dx,$$

d'où

$$|P_4| \leq c_{13}(|u'_1(t)|_\infty + |u'_2(t)|_\infty)(|u'_1(t)|_\infty^2 + |u'_2(t)|_\infty^2) \int_0^1 (\delta u)''(t, x)(\delta u)'(t, x) dx.$$

Alors,

$$|P_4| \leq f_4(t) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \int_0^1 |(\delta u)^{(3)}(t, x)|^2 dx, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (4.61)$$

avec

$$f_4(t) = c_{14}(|u'_1(t)|_\infty + |u'_2(t)|_\infty)^2(|u'_1(t)|_\infty^2 + |u'_2(t)|_\infty^2)^2.$$

D'où :

$$f_4(t) \leq c_{15}(|u'_1(t)|_\infty^6 + |u'_2(t)|_\infty^6).$$

La proposition 4.4.8 , avec  $k = 6$  et  $r = \infty$ , affirme que  $f_4 \in L^1(]0, T[)$ . Par conséquent  $f := \sum_{i=1}^4 f_i \in L^1(]0, T[)$ . Pour  $\varepsilon < 1$ , les estimations (4.58), (4.59), (4.60), et (4.61) nous permettent d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |(\delta u)'(t, x)|^2 dx \leq c f(t) |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (4.62)$$

Posons  $G(t) = |(\delta u)'(t)|_{L^2(\Omega)}^2$ . Nous avons :

$$(G(t))'_t \leq c f(t) G(t). \quad (4.63)$$

L'inégalité de Gronwall donne :

$$G(t) \leq G(0) \exp \left( c \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = 0.$$

D'où  $u_1 = u_2$ , et la solution de (4.25) est unique dans  $\mathcal{X}$ . □

## 4.6 Tests numériques

Dans cette section, nous présentons des tests numériques pour valider les résultats théoriques. Les différents tests sont faits par Fortran. Les figures sont réalisées via Gnuplot.

### 4.6.1 Discrétisation en espace

Considérons l'équation (4.20), en supposant que  $h(x, t)$  est  $2\pi$ -périodique. L'équation (4.20) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathcal{L}(h) = \mathcal{N}(h), \quad (4.64)$$

avec  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{N}$  sont les opérateurs linéaire et non linéaire du système (4.20) :

$$\mathcal{L} \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad (4.65)$$

et

$$\mathcal{N}(h) = -h^{-1}h'h^{(3)}. \quad (4.66)$$

La périodicité des conditions au bord et de la donnée initiale nous donne :

$$\begin{aligned} h(0, t) &= h(2\pi, t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ h(x, 0) &= h_0(x), & x \in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

La solution de (4.20) est approchée comme une série tronquée en term des fonctions de base de Fourier :  $\{(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \Phi_k(x) \equiv e^{ikx}\}$  :

$$h_N(x, t) = P_N(h(x, t)) = \sum_{k \in \mathbb{I}_N} \hat{h}_k(t) \Phi_k(x),$$

où  $\mathbb{I}_N = [1 - \frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$ ; les  $\hat{h}_k$  sont les coefficients spectraux. Nous avons besoin de l'orthogonalité des résidus pour toutes les fonctions de  $S_N$  qui composent l'espace vectoriel engendré par  $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ . Dans l'espace de Fourier, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \hat{h}_k}{\partial t} = \mathcal{L}_k \hat{h}_k + \mathcal{N}_k, \quad (4.67)$$

où  $\mathcal{N}_k$  est le  $k$ -ième coefficient de Fourier du term non linéaire de (4.64).

## 4.6.2 Discrétisation en temps

Pour approcher la solution de (4.20), nous avons adopté une méthode pseudo-spectrale, associée à un schéma exponentiel en temps [23, 79].

Soit  $\delta t = t_{n+1} - t_n$  le pas de temps (constante) alors on obtient le schéma exponentielle en temps :

$$\hat{h}_k^{n+1} = \hat{h}_k^n \exp(\mathcal{L}_k \delta t) + \mathcal{N}_k \frac{\exp(\mathcal{L}_k \delta t) - 1}{\mathcal{L}_k}. \quad (4.68)$$

Ce schéma est basé sur une version discrète de la méthode de variation des constantes. Le terme non linéaire  $\mathcal{N}_k$  est calculé à chaque pas de temps dans l'espace direct puis dans l'espace de Fourier par la méthode de transformée de Fourier rapide discrète.

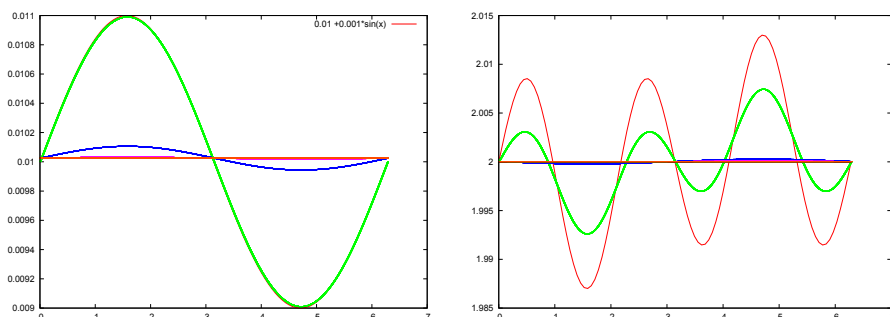


FIGURE 4.5 – Sur la gauche, la solution  $h(x, t)$  du système (4.20) avec la donnée initiale  $h_0(x) = 0.01 + 0.001 \sin(x)$  et pour  $\delta t = 10^{-2}$  et  $N = 8192$ . Sur la droite, la solution de (4.20) pour  $h_0(x) = 2 + 0.01 \sin(3x) - 0.003 \sin(x)$ . la solution initiale est représentée par une ligne pointillée. On voit la convergence de la solution vers la valeur moyenne de la donnée initiale.

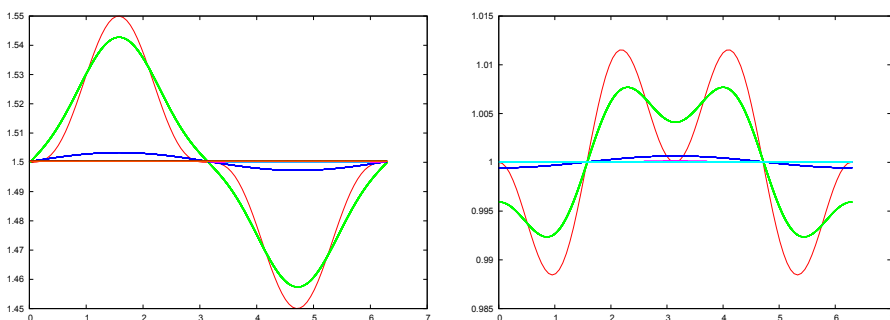


FIGURE 4.6 – Sur la gauche, la solution  $h(x, t)$  du système (4.20) avec la donnée initiale  $h_0(x) = 1.5 + 0.05 \sin^3(x)$  et pour  $\delta t = 10^{-3}$  et  $N = 8192$ . Sur la droite, la solution de (4.20) pour  $h_0(x) = 1 + 0.03 \cos^3(x) - 0.03 \cos(x)$ . La solution initiale est représenté par la ligne pointillée. De nouveau on obtient la convergence de la solution vers la valeur moyenne de la donnée initiale.

# Perspectives

## 1. Instabilités de la déformation plastique

Concernant la déformation plastique pour des matériaux cristallins contraints, nous avons traité le problème de Mecking–Lücke–Grilhé dans les cas non linéaires avec simple et double retard. Nous avons montré l’existence et l’unicité de la solution. Nous avons prouvé théoriquement la stabilité asymptotique de la solution en fonction des différents paramètres physiques du matériau et le temps de retard. Nous avons validé aussi numériquement ce résultat de stabilité via une approche analytique de la solution. D’autres interprétations physiques peuvent conduire à une modélisation sous forme d’équation à multiple retard. Je développerai dans l’avenir les cas linéaire et non linéaire avec  $n$  retard ( $n \geq 3$ ).

## 2. Équations des films minces

Dans le chapitre 4, nous avons présenté une analyse mathématique des rugosités qui apparaissent à la surface en absence de contraintes dans le cas d’un pore cylindrique. Nous avons donné des résultats d’existence globale de la solution et de la convergence vers la valeur moyenne de la donnée initiale en temps long. Une perspective dans l’avenir consiste à essayer de faire des études théoriques sur les équations d’évolution modélisant les instabilités de surface et des simulations numériques en 2D et 3D. D’autres études peuvent être menées pour d’autres géométries (sphérique par exemple).



# Annexe A

## A.1 DDE23

Sous MATLAB, **dde23** résout les équations différentielles à retard. Elle se produit via la forme suivante :

$$\begin{aligned} sol &= dde23(ddefun, lags, history, tspan), \\ sol &= dde23(ddefun, lags, history, tspan, options), \end{aligned}$$

avec :

- *ddefun* : La fonction qui évalue le côté droit de l'équation :

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k)). \quad (\text{A.1})$$

La fonction doit avoir la forme suivante :  $dydt = ddefun(t, y, Z)$ , où  $t$  correspond à l'instant courant et  $y$  est un vecteur colonne qui se rapproche de  $y(t)$ , et  $Z(:, i)$  se rapproche de  $y(t - \tau_i)$  pour le retard  $\tau_i = lags(i)$ . La sortie est un vecteur colonne correspondant à  $f(t, y(t), y(t - \tau_1), \dots, y(t - \tau_k))$ .

- *lags* : Vecteurs retards :  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ .
- *history* : La donnée initiale pour  $t \leq t_0$ .
- *tspan* =  $[t_0, t_f]$  : Intervalle d'intégration de  $t_0 = tspan(1)$  à  $t_f = tspan(end)$  avec  $t_0 < t_f$ .



- *options* : Argument de l'intégration en option.

La structure de "*sol*" dans **dde23** a des champs suivant :

*sol.x*      Le réseau sélectionné par *dde23*.

*sol.y*      Approximation de  $y(x)$  aux points du réseau en *sol.x*.

*sol.solver*      Le nom de solveur "*dde23*".

Les options utilisées dans **dde23** les plus courantes sont la tolérance relative scalaire "RelTol" ( $1e - 3$  par défaut), et le vecteur de tolérance absolue "AbsTol" (tous les composants sont  $1e - 6$ ).

Il est à noter (voir [73]) que le solveur **dde23** suit les discontinuités et s'intègre avec la méthode de Runge-Kutta(2,3) et interpolant de *ode23*. Il utilise l'itération en prenant des pas plus grands que les retards.

# Annexe B

## B.1

Les équations d'élasticité linéaire vérifiées par le déplacement  $u$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(u) = 0 & \text{dans } \Omega_{r(\tau)}, \\ \sigma_F(u).n = \sigma_0.n & \text{sur } \Gamma_r, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où  $n = (1; 0; -r_z)$  est un vecteur normal à la surface libre,  $\sigma(u)$  est le tenseur des contraintes linéarisé et  $\sigma_0$  est le tenseur constant modélisant la contrainte initiale.

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  les deux coefficients de Lamé, des calculs algébriques conduisent, en utilisant la loi de Hooke au système :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_r \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) = 0, \\ (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{r_z}{r^2} u_r \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \mu r_z \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0, \\ -\lambda r_z \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right) + \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} - 2r_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + r_z \sigma_0 = 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Les composantes mises à l'échelle  $U_i$  sont alors développées de la manière suivante en puissance de  $\alpha^2$  où les  $U_i^j$  sont indépendants de  $\alpha$ , on pourrait garder les puissances impaires de  $\alpha$  mais en observant que leurs coefficients sont nuls, nous avons :

$$U_i = U_i(R; Z; t) = U_i^0 + \alpha^2 U_i^1 + \dots \quad \text{avec } i = 1, 3. \quad (\text{B.3})$$

En utilisant (B.2) et puisque  $r_z = \alpha h_Z$ , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_1}{\partial R} - \frac{1}{R^2} U_1 \right) + \alpha^2 \left( (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial R \partial Z} + \mu \frac{\partial^2 U_1}{\partial Z^2} \right) = 0, \\ \alpha \left( (\lambda + \mu) \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial R \partial Z} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_1}{\partial Z} \right) - \lambda \frac{h_Z}{R^2} U_1 + \mu \left( \frac{\partial^2 U_3}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_3}{\partial R} \right) \right) + \alpha^3 \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U_3}{\partial Z^2} \right) = 0, \\ \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial R} + \lambda \frac{U_1}{R} \right) + \alpha^2 \left( \lambda \frac{\partial U_3}{\partial Z} - \mu h_Z \left( \frac{\partial U_1}{\partial Z} + \frac{\partial U_3}{\partial R} \right) \right) = 0, \\ \alpha \left( -\lambda h_Z \left( \frac{\partial U_1}{\partial R} + \frac{1}{R} U_1 \right) + \mu \left( R \frac{\partial U_3}{\partial R} + \frac{\partial U_1}{\partial Z} \right) + h_Z \sigma_0 \right) + \alpha^3 \left( -(\lambda + 2\mu) h_Z \frac{\partial U_3}{\partial Z} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

D'après (B.3) et (B.4) et suivant l'ordre de  $\alpha^2$ , on obtient des systèmes qui nous permettent de calculer

$$U_1^0; U_1^1; U_3^0; U_3^1.$$

Des calculs similaires au travailler dans les références [75, 10] nous permettent d'écrire :

$$U_1^0 = 0, \quad U_3^0 = \frac{-\sigma_0}{\mu} h_Z \ln(R) \quad \text{avec } R > 0. \quad (\text{B.5})$$

Les deux termes  $U_1^1$  et  $U_3^1$  apparaissent comme puissance de  $\alpha^4$  dans l'expression de l'énergie élastique, donc leur détermination est inutile.

L'énergie élastique de la structure peut s'écrire en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} (\sigma(u) - \sigma_0) (\varepsilon(u) - \varepsilon_0) = \delta \mathcal{E} + \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \\ &= \frac{1}{2} \lambda [\text{Tr}(\varepsilon(u))]^2 + \mu \text{Tr}(\varepsilon(u)^2) - \sigma_0 \varepsilon(u) + \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

avec  $Tr$  est la trace d'une matrice. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right) \left( \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}u_r^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 \\ & + \frac{\lambda}{r}u_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \sigma_0 \frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right) \left( \left(\frac{\partial U_1}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}U_1^2 + \alpha^4 \left(\frac{\partial U_3}{\partial Z}\right)^2 \right) + \frac{\mu}{2} \left( \alpha \frac{\partial U_1}{\partial Z} + \alpha \frac{\partial U_3}{\partial R} \right)^2 \\ & + \lambda \left( \frac{\partial U_1}{\partial R} \frac{U_1}{R} + \alpha^2 \frac{\partial U_1}{\partial R} \frac{\partial U_3}{\partial Z} + \alpha^2 \frac{U_1}{R} \frac{\partial U_3}{\partial Z} \right) - \alpha^2 \sigma_0 \frac{\partial U_3}{\partial Z}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

En utilisant (B.5),  $\mathcal{E}$  peut s'écrire comme une somme à coefficients  $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \dots$ , autrement dit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \alpha^2 \left( \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial U_3^0}{\partial R}\right)^2 - \sigma_0 \frac{\partial U_3^0}{\partial Z} \right) + \alpha^4 \left( \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial U_1^1}{\partial R}\right)^2 + \frac{1}{R^2}(U_1^1)^2 + \left(\frac{\partial U_3^0}{\partial Z}\right)^2 + \right. \\ & \left. \mu \frac{\partial U_3^0}{\partial R} \frac{\partial U_3^1}{\partial R} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial U_1^1}{\partial Z} \frac{\partial U_3^0}{\partial R} + \lambda \frac{\partial U_1^1}{\partial R} \frac{U_1^1}{R} + \dots \right) + \alpha^6 \left( \dots \right). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

En prenant que le terme d'ordre  $\alpha^2$ , nous avons :

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \left( \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial U_3^0}{\partial R}\right)^2 - \sigma_0 \frac{\partial U_3^0}{\partial Z} \right).$$

Comme

$$\frac{\partial U_3^0}{\partial R} = \frac{-\sigma_0 h_Z}{\mu R}, \quad \frac{\partial U_3^0}{\partial Z} = \frac{-\sigma_0}{\mu} h_{ZZ} \ln(R),$$

alors,

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\mu} \left( h_{ZZ} \ln(R) + \frac{1}{2} R^{-2} h_Z^2 \right).$$

Sur la surface libre  $R = h(t, Z)$ , nous avons alors :

$$\mathcal{E} = \alpha^2 \frac{\sigma_0^2}{\mu} \left( h_{ZZ} \ln(h) + \frac{1}{2} h^{-2} h_Z^2 \right). \quad (\text{B.10})$$

## B.2

On prend l'équation (4.21) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( v^n \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \alpha v^{n-1} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v^{n-2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right), \quad (\text{B.11})$$

avec :  $n = 0$ ,  $\alpha = -3/2$ ,  $\beta = 3/4$  et  $v = h^2$ .

Alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2h \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 2h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 6 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2h \frac{\partial h}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 6 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{3}{2} \frac{1}{h^2} (2h \frac{\partial h}{\partial x}) (2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 2h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}) + \frac{3}{4} \frac{1}{h^4} (8h^3 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( 6 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{6}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - 6 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 6 \frac{1}{h} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right). \quad (\text{B.12})$$

**Réciproquement :**

D'après le lemme 4.3.4, nous avons  $h > 0$  si  $h_0 > 0$ . Alors,  $v = h^2$  implique que  $h = \sqrt{v}$  et on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -\frac{1}{4v\sqrt{v}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \frac{1}{8} \frac{3\sqrt{v}}{v^3} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{4v\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \end{cases}$$

Remplaçons dans (B.12) :

$$\frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{v}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sqrt{v} \left( \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{v^2 \sqrt{v}} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{4v\sqrt{v}} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right].$$

D'où :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{3}{2} \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^3 \right). \quad (\text{B.13})$$

### B.3

La première équation de 4.20 peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}. \quad (\text{B.14})$$

Nous avons vu dans le lemme 4.3.4 que  $h > 0$  si  $h_0 > 0$ . Alors on peut justifier le changement de variable  $h = e^u$  et on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x} = e^u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + e^u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + 3e^u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + 6e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3e^u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 4e^u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + e^u \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \end{array} \right.$$

Alors, l'équation (B.14) équivaut à :

$$\begin{aligned} e^u \frac{\partial u}{\partial t} = & -e^u \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 6e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4e^u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3e^u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 \\ & - \frac{\partial u}{\partial x} \left( e^u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + 3e^u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 9 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4. \quad (\text{B.15})$$

**Réciproquement :**

D'après le lemme 4.3.4, on a  $h > 0$ , alors on peut poser  $u = \ln h$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{6}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 + \frac{12}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{3}{h^2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{1}{h} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4}. \end{array} \right. \quad (\text{B.16})$$

Remplaçons dans (B.15) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{6}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 - \frac{12}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{3}{h^2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{4}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{h} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \\ &\quad - 9 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left( -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) - 5 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left( \frac{2}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 \right) - 2 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 \\ &\quad + 5 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left( \frac{2}{h^3} \left( \frac{3}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \right) - 3 \left( -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \\ &= \frac{6}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 - \frac{12}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{3}{h^2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{4}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{1}{h} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \\ &\quad + \frac{9}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 - \frac{9}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{10}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 + \frac{15}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{5}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \\ &\quad - \frac{3}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 - \frac{3}{h^4} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{6}{h^3} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{2}{h^4} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^4 \\ &= -\frac{1}{h} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = -\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right).$$

# Bibliographie

- [1] M.J. Ablowitz and A.S. Fokas. *Complex variables : introduction and applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2003.
- [2] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [3] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [4] F. M. Asl and A. G. Ulsoy. Analysis of a system of lineardelay differential equations. *journal of Dynamic systems, Measurement and control*, 125(2) :215–223, 2003.
- [5] S. Asvadurov, B.D. Coleman, R.S. Falk, and M. Moakher. Similarity solutions in the theory of curvature driven diffusion along planar curves. I. Symmetric curves expanding in time. *Phys. D*, 121(3-4) :263–274, 1998.
- [6] C. T. H. Baker, C. A. H. Paul, and D. R. Willé. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *Adv. Comput. Math.*, 3(3) :171–196, 1995.
- [7] Richard Bellman and Kenneth L. Cooke. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York, 1963.



- 
- [8] A.J. Bernoff, A.L. Bertozzi, and T.P. Witelski. Axisymmetric surface diffusion : dynamics and stability of self-similar pinchoff. *J. Statist. Phys.*, 93(3-4) :725–776, 1998.
- [9] W. Bollmann. Interference effects in the electron microscopy of thin crystal foils. *Physical Review*, 103(5) :1588–1589, 1956.
- [10] M. Boutat, Y. D’Angelo, S. Hilout, and V. Lods. Existence and finite–time blow–up for the solution to a thin–film surface evolution problem. *Asymptotic Analysis*, 38(2) :93 – 128, 2004.
- [11] M. Boutat, Y. D’Angelo, S. Hilout, and V. Lods. An interface evolution problem for axisymmetric stressed pore channels. *Asymptot. Anal.*, 44(1-2) :131–150, 2005.
- [12] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer ; 1st Edition., 2010.
- [13] Christophe Dang Ngoc Chan. Introduction à la science des matériaux : Défauts dans les cristaux. [http://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction\\_à\\_la\\_science\\_des\\_matériaux/Défauts\\_dans\\_les\\_cristaux](http://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_à_la_science_des_matériaux/Défauts_dans_les_cristaux), Mis en ligne le 4 mai 2009.
- [14] B.D. Coleman, R.S. Falk, and M. Moakher. Stability of cylindrical bodies in the theory of surface diffusion. *Phys. D*, 89(1-2) :123–135, 1995.
- [15] B.D. Coleman, R.S. Falk, and M. Moakher. Space-time finite element methods for surface diffusion with applications to the theory of the stability of cylinders. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17(6) :1434–1448, 1996.
- [16] J. Colin. *instabilités de surface de solides*. PhD thesis, Université de Poitiers-France, 1997.
- [17] J. Colin, J. Grilhé, and N. Junqua. Localized surface instability of non-homogeneously stressed solid. *Europhysics. Lett.*, 38(4) :2609–2621, 1997.

- 
- [18] J. Colin, J. Grilhé, and N. Junqua. Morphological instabilities of a stressed pore channel. *Acta Materialia*, 45(9) :3835 – 3841, 1997.
- [19] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, and D. J. Jeffrey. Lambert’s w function in maple. *Maple Technical Newsletter*, (9) :12–23, 1993.
- [20] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert  $W$  function. *Adv. Comput. Math.*, 5(4) :329–359, 1996.
- [21] R.M. Corless and D.J. Jeffrey. The right  $\omega$  function. In *Artificial intelligence, automated reasoning, and symbolic computation*, volume 2385 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 76–89. Springer, Berlin, 2002.
- [22] A. Coujou and A. J. Vergnol. private communication. Observation in situ de l’interception d’un champ homogène de dislocations parfaites mobiles par une micromacle : Compétition entre micromaclage et glissement, *Scripta Metallurgica*, 19(7), 1985, pp. 891–895.
- [23] Y. D’Angelo, G. Joulin, and G. Boury. On model evolution equations for the whole surface of three-dimensional expanding wrinkled premixed flames. *Combustion Theory and Modelling*, 4(3) :317–338, 2000.
- [24] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Pure and Applied Mathematics, Vol. X. Academic Press, New York, 1960.
- [25] Joël Douin. *Mécanique des milieux continus, Introduction à la plasticité des matériaux*. diderot éditeur, arts et sciences, Paris, New York, 1997.
- [26] Louchet F. and Bréchet Y. Dislocation patterning in uniaxial deformation. *Diffusion and defect data*, 3-4 :335–346, 1988.
- [27] J. Friedel. *Dislocation*, Pergamon Press, Oxford, (1964).
- [28] S. Graff, S. Forest, Prioul C. Strudel, J. L., P. Pilvin, and J. L. Béchade. Strain localization phenomena associated with static and dynamic strain ageing in

- notched specimens : experiments and finite element simulations. *Materials Sciences and Engineering A*, 2004, pp. 181–185.
- [29] S. Graff, S. Forest, Prioul C. Strudel, J. L., P. Pilvin, and J. L. Béchade. Finite element simulations of dynamic strain ageing effects at v-notches and crack tips. *Scripta Materialia*, 52, 2005, pp. 1181–1186.
- [30] J. Grilhé, N. Junqua, F. Tranchant, and J. Vergnol. “model for instabilities during plastic deformation at constant cross-head velocity”. *Jornal de physique*, vol. 45 :no. 5, pp.939–943, 1984.
- [31] I. Gyóri and G. Ladas. *Oscillation theory of delay differential equations*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991. With applications, Oxford Science Publications.
- [32] J.G. Hagedorn, N.S. Martys, and J.F. Douglas. Breakup of a fluid thread in a confined geometry : droplet-plug transition, perturbation sensitivity, and kinetic stabilization with confinement. *Phys. Rev. E*, 69(5) :056312, 2004.
- [33] Karl Hahn. Plateau–rayleigh instability. [http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh\\_instability](http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh_instability), Mis en ligne le 2 Septembre 2007.
- [34] Jack K. Hale and Wen Zhang Huang. Global geometry of the stable regions for two delay differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 178(2) :344–362, 1993.
- [35] Jack K. Hale and Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional-differential equations*, volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [36] S. Hilout, M. Boutat, and J. Grilhé. Plastic deformation instabilities : Lambert solutions of Mecking-Lücke equation with delay. *Math. Probl. Eng.*, pages Art. ID 45951, 13, 2007.

- 
- [37] S. Hilout, M. Boutat, I. Laadnani, and J. Grilhé. mathematical modelling plastic deformation instabilities with tow delays. *App. Math. Modelling*, pages 2484–2492, 34(9),2010.
- [38] P.B. Hirsch, R.W. Horne, and M.J. Whelan. Direct observations of the arrangement and motion of dislocations in aluminium. *Philosophical Magazine*, 1 :677–684, 1956.
- [39] J.P. Hirth and J. Lothe. *Theory of Dislocation*, McGraw-Hill, (1968).
- [40] J.R. Hirth and L. Lothe. *Theory of dislocations*. 1992.
- [41] D.J. Jeffrey, R.M. Corless, E.G. Hare, and D.E. Knuth. Sur l'inversion de  $y^\alpha e^y$  au moyen des nombres de Stirling associés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(12) :1449–1452, 1995.
- [42] B. Jouffrey. Historic de la notion de dislocation, Ecole d'été d'Yrivals,3-14 september, Diffusion les éditions de physique, Puplié sous la direction de : P. Groh, L.P. Kubin, J.L. Martin, 1979, pp. 1-16.
- [43] J. R. King. Two generalisations of the thin film equation. *Math. Comput. Modelling*, 34(7-8) :737–756, 2001.
- [44] D. J. Kirill, S. H. Davis, M. J. Miksis, and P. W. Voorhees. Morphological instability of a whisker. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 455(1990) :3825–3844, 1999.
- [45] D. J. Kirill, S. H. Davis, M. J. Miksis, and P. W. Voorhees. Morphological instability of pores and tubules. *Interfaces Free Bound.*, 4(4) :371–394, 2002.
- [46] W.K. KURZ, J.P. MERCIER, and ZAMBELLI G. *Introduction à la Science des Matériaux*. 1995.
- [47] Xiangao Li, Shigui Ruan, and Junjie Wei. Stability and bifurcation in delay-differential equations with two delays. *J. Math. Anal. Appl.*, 236(2) :254–280, 1999.

- 
- [48] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [49] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux Limites non Homogenes et Applications.*, volume I, II. Paris : Dunod 1 : XIX, 372 p. ; 2 : XV, 251 p., 1968.
- [50] F. Louchet and Y. Brechet. Localization of plastic deformation, solid state phenomena. , vol. 3 & 4, (1988), pp. 347–356.
- [51] H. Mecking and K. Lücke. *A new aspect of the theory of flow stress of metals*, volume 4. Scripta Metallurgica, no. 6, pp.427-432, 1970.
- [52] M. C. Miguel, A. Vespignani, S. Zapperi, J. Weiss, and J. R. Grasso. Complexity in dislocation dynamics. *model, Materials Sciences and Engineering A*, 2001, pp. 324–327.
- [53] W. W. Mullins. Theory of thermal grooving. *Journal of Applied Physics*, 28(3) :333–339, 1957.
- [54] F.R.N. Nabarro. *Theory of Crystal Dislocation*, Clarendon, (1967).
- [55] F. A. Nichols and W. W. Mullins. Morphological changes of a surface of revolution due to capillarity-induced surface diffusion. *Journal of Applied Physics*, 36(6) :1826–1835, 1965.
- [56] F. A. Nichols and W. W. Mullins. Surface-(interface-) and volume-diffusion contributions to morphological changes driven by capillarity. *American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers (AIME)*, 233(10) :1840–1847, 1965.
- [57] The Sage of Shadowdale. Introduction à la science des matériaux : Défauts dans les cristaux. <http://www.flickr.com/photos/sqlnerd/204436953/in/photostream>, Cette photo a été prise le 27 juillet 2006 avec un Nikon D50.
- [58] E. Orowan. Zür kristallplastizität I-III. *Z. Phys.*, 89 :605–634, 1934.

- 
- [59] J. Plateau. Experimental and theoretical statics of liquids subject to molecular forces only. *Journal of Fusion Energy*, 1873.
- [60] M.T. Plateau. On the recent theories of the constitution of jets of liquid issuing from circular orifices. *Phil. Mag*, S4, 12, 1856.
- [61] M. Polanyi. über eine art gitterstörung, die einem kristall plastisch machen könnte. *Z. Phys.*, 89 :660–, 1934.
- [62] L. S. Pontryagin. On the zeros of some elementary transcendental functions. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 1 :95–110, 1955.
- [63] J.D. Powers and A.M. Glaeser. High-temperature healing of cracklike flaws in titanium ion-implanted sapphire. *Journal of the American Ceramic Society*, 76(9) :2225–2234, 1993.
- [64] J. M. Rakotoson and R. Temam. An optimal compactness theorem and application to elliptic-parabolic systems. *Appl. Math. Lett.*, 14(3) :303–306, 2001.
- [65] J.E. Rakotoson and J.M. Rakotoson. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, volume 1 of *Studies in Mathematics and its Applications*. Paris : Presses universitaires de France, impr., 1999.
- [66] L. Rayleigh. On the capillary phenomena of jets. *Proceedings of the Royal Society of London*, 29(196-199) :71–97, 1879.
- [67] L. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 10(4), 1879.
- [68] W. T. READ. *Dislocations in crystals*. Mc Graw–Hill Book Cy, New York, Paris, 1953.
- [69] T. RICHTON. *Dynamique et complexité de la déformation plastique : étude par émission acoustique*. PhD thesis, INP de Grenoble, 2006.

- 
- [70] Nicolas Rouche, P. Habets, and M. Laloy. *Stability theory by Liapunov's direct method*. Springer-Verlag, New York, 1977. Applied Mathematical Sciences, Vol. 22.
- [71] Shigui Ruan and Junjie Wei. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 10(6) :863–874, 2003.
- [72] H. SAOUD. *Études des problèmes unilatéraux : Analyse de récession, Stabilité de Lyapunov et applications en électronique et en mécanique*. PhD thesis, Université de LIMOGES, 2009.
- [73] L. F. Shampine and S. Thompson. Solving DDEs in MATLAB. *Appl. Numer. Math.*, 37(4) :441–458, 2001.
- [74] D.H. Sharp. An overview of rayleigh–taylor instability. *Journal of Fusion Energy*, 12 :3–18, 1984.
- [75] B. J. Spencer, P. W. Voorhees, and S. H. Davis. Morphological instability in epitaxially strained dislocation-free solid films : nonlinear evolution. *Phys. Rev.*, 47 :9760–9777, 1993.
- [76] G.I. Taylor. The mechanism of plastic deformation of crystals. part i. *Theoretical, Proc. Roy. Soc. Lond. A 145*, pages 362–387, 1934.
- [77] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [78] Roger Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2.
- [79] O. Thual, U. Frisch, and M. Hénon. Application of pole decomposition to an equation governing the dynamics of wrinkled flame fronts. *Journal de physique Paris*, 46(9) :1485–1494, 1985.

- 
- [80] F. Tranchant, J. Vergnol, M.F. Denicot, and J. Grillé. Mechanical twinning mechanisms in Cu–Al crystal with very low stacking fault energy. *Scripta Metallurgica*, 21(3) :269–272, 1987.
- [81] F. Tranchant, J. Vergnol, and P. Franciosi. On the twinning initiation criterion in Cu–Al alpha single crystal–I. Experimental and numerical analysis of slip and dislocation patterns up to the onset of twinning, *Acta Metallurgica et Materialia*, 41(5), 1993, pp. 1531–1541.
- [82] F. Tranchant, J. Vergnol, and J. Grillé. Etude du maillage dans la deformation plastique de solutions solides Cu–Al monocristallines a moyenne energie de defect. *Scripta Metallurgica*, 17(2) :175–178, 1983.
- [83] S. R. Valluri, D. J. Jeffrey, and R. M. Corless. Some applications of the lembert  $w$  function to physics. *Canadian journal of physics*, 78(9) :823–831, 2000.
- [84] S. Y. Yang and W. Tong. Interaction between dislocations and alloying elements and its implication on crystal plasticity of aluminum alloys. *Materials Sciences and Engineering A*, 309/310, 2001, pp. 300–303.



Thèse de Ali ALRIYABI

\*\*\*\*\*  
**Titre :Analyse de Quelques Équations Différentielles à Retard et EDP  
Modélisant les Instabilités de Surfaces**  
\*\*\*\*\*

**Résumé** Cette thèse est divisée en deux parties principales : La première partie concerne la déformation plastique d'un matériau contraint. Nous commençons cette partie par une introduction physique sur la dislocation et son rôle dans l'étude de la déformation plastique. Nous exposons ensuite deux types de modélisation de la déformation plastique ce qui nous conduit à deux équations différentielles à retard de Mecking-Lüke-Grilhé. Nous présentons une analyse mathématique complète des deux modèles linéaire et non linéaire. Nous terminons cette partie par des tests numériques et une comparaison des deux modèles. La deuxième partie de la thèse traite l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Cette étude porte sur les instabilités de surface d'un pore cylindrique sans contraintes. Nous nous intéressons à une EDP parabolique non linéaire d'ordre quatre, obtenue à partir d'une équation d'évolution des films minces. Le résultat principal est l'existence globale de la solution et la convergence vers la valeur moyenne de la donnée initiale en temps long. L'étude théorique est aussi appuyée comme dans la première partie par une validation numérique.

**Mots clefs** : Équations à retards. Équations de Mecking-Lücke-Grilhé. Déformation plastique. Instabilité de Rayleigh-Plateau. Équation d'évolution des films minces.

\*\*\*\*\*  
**Title :Analysis of Some Delay Differential Equations And PDE Modelling  
The Surface Instabilities**  
\*\*\*\*\*

**Abstract** This thesis is divided into two main parts : The first part relates to the plastic deformation of a constrained material. We begin this part by physical introduction on the dislocation and its role in the study of plastic deformation. We also present two types modelling for the plastic deformation, which leads to two delayed differential equations of Mecking-Lücke-Grilhé. We present a complete mathematical analysis of linear and nonlinear models. We conclude this part by numerical tests and a comparison of the two models. The second part of the thesis treats the Rayleigh-Plateau instability. This study focuses on the surface instabilities of a cylindrical pore without constraints. We are interested in a nonlinear parabolic PDE of fourth order, obtained from an evolution equation model of thin films. The main result is the global existence of the solution and the convergence to the average value of the initial data in long time. Numerical validation of the theoretical results is also presented in this part.

**Keywords** : Delay equations. Mecking-Lücke-Grilhé equations. plastic deformation. Rayleigh-Plateau instability. Thin films equation.

\*\*\*\*\*