

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Automatique - Productique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Sarah MECHHOUD

Thèse dirigée par **Emmanuel WITRANT** et **Luc DUGARD**,
codirigée par **Didier MOREAU**

préparée au sein du laboratoire **Gipsa-lab** et de l'ÉCOLE
DOCTORALE EEATS

Estimation de la diffusion thermique et du terme source du modèle de transport de la chaleur dans les plasmas de tokamaks.

Thèse soutenue publiquement le 17 décembre 2013 devant le jury composé
de :

M. Marius TUCSNAK

Professeur à l'Université de Lorraine, Directeur de l'Institut Elie Cartan.
Président.

M. Guillaume MERCÈRE

MCF HDR au LIAS, ENSIP, Université de Poitiers. Rapporteur.

Mme. Isabelle QUEINNEC

DR CNRS LAAS Toulouse. Rapporteur.

M. Luc DUGARD

Directeur de recherche CNRS Gipsa-lab, Grenoble. Directeur de thèse.

M. Emmanuel WITRANT

Maître de Conférences Université Joseph Fourier, GIPSA-lab, Grenoble.
Co-directeur de thèse.

M. Didier MOREAU

Ingénieur de Recherche HDR au CEA Cadarache. Encadrant de thèse.



Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents Zohra et Mohamed,
Ma sœur et mes frères,
Ma tante *Messika* et toute ma famille,

À tous les Nôtres.

Remerciements

Après trois années de thèse, l'heure est venue de rendre justice à tous ceux ayant participé à cette aventure.

Je commence par louer Le "**Maître Suprême de l'Univers**" Qui a enseigné à l'homme ce qu'il ignorait, Qui m'a toujours guidée et Qui m'a donnée la foi, le courage et la volonté pour mener à bien ce modeste travail. Sans "**Vous Seigneur**" je ne suis rien.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèses M. Emmanuel WITRANT, M. Luc DUGARD et M. Didier MOREAU pour m'avoir accompagnée tout au long de mes travaux et de m'avoir laissée libre sur le choix des différentes solutions que j'ai prises.

Je tiens à remercier les membres du Jury, qui ont accepté d'examiner mon travail : M. Marius TUCSNAK pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance, M. Guillaume MERCÈRE et Mme. Isabelle QUEINNEC pour avoir accepté d'examiner ce travail en profondeur ainsi que pour tous leurs commentaires constructifs.

Je remercie le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MESR) de France pour m'avoir accordé une bourse qui m'a permis d'effectuer mes études de doctorat.

Je remercie tout le personnel qui rend la vie des thésards plus agréable. Mes remerciements les plus sincères à Patricia, Marie-Thérèse et à Marielle. Merci à l'ensemble du service informatique du Gipsa-lab en particulier à Anne.

Je remercie l'ensemble des permanents du Gipsa-lab, particulièrement M. Ahmed HABLY pour ses encouragements et ses conseils.

Je tiens à remercier mes collègues et amis du laboratoire, en particulier : Adithya (Aadi, thank's a lot dude for all your help and encouragement!), Mustafa, Tahar, Bruno, Sohaib, Humberto, Sonia, Oumayma, Simona, Pham, Lizeth et Joumana. Grand merci à Raouia et Ahmed, bien que nous nous soyons rencontrés il y a juste deux mois, par votre joie de vivre la dernière étape de la thèse m'a été appréciable. Merci d'avoir fait du jour de ma soutenance un moment agréablement inoubliable.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement tous mes professeurs et enseignants de l'École primaire en Algérie au Master à l'INP de Grenoble en passant par l'École Nationale

Polytechnique d'Alger. Merci à mon tuteur de stage et à l'équipe R&D de *Calor*. Merci en particulier à mes formateurs et enseignants de l'ENPEI, votre formation sur tous les plans m'est d'une grande utilité aussi bien sur le niveau professionnel que personnel.

Je laisse pour la fin les plus importants, **ma famille**. Aucun mot ne pourra exprimer ma profonde gratitude et reconnaissance envers vous. Merci à ma sœur Samiha, mes frères Houssam, Fares, Yasser et Samer et à Ma chère tante Massika et son mari mon oncle Abdou, pour leur soutien constant, leur amour et leurs encouragements. Merci *Sam* de m'avoir toujours encouragée et supporté ma *dure tête*, désolée mais c'est plus fort que moi! Merci *Samouri* pour ta sagesse et ta profonde vision, sans toi j'aurais abandonné cette thèse, merci aussi d'avoir fait le déplacement pour moi. *Houssamsam, Farous et Yassouri*, sachez que je me sens bénie d'être votre sœur, vous être adorables!

Te dire Merci Infiniment "*Ma Maman*" serait négligeable devant tes encouragements, tes sacrifices, ton soutien infailible et ton amour infini. Tu es la lumière qui éclaire mes jours et réchauffe mon cœur "*Mammaya*", tu as toujours cru en moi et tu m'as toujours poussée pour donner le meilleur de moi-même. Tu es mon Exemple "*Mama*". Mille MERCI, "*Mama*" de m'avoir toujours encouragée, d'avoir toujours été là pour moi et d'avoir toujours trouvé les mots pour me rendre espoir.

Que puis-je te dire "*Papa*"! te remercier jusqu'à mon dernier souffle ne serait rien devant tes sacrifices, "*Baraka ALLAH fik ABI*", tes paroles sont mon remède. Par ta sagesse, ta patience et tes conseils je suis devenue docteur "*ABI*". Merci de m'avoir appris comment s'accrocher à ses rêves malgré toutes les souffrances, Merci pour ta confiance et ton éducation, Merci à l'infini.

Enfin merci à toute personne qui m'a aidée de près ou de loin tout au long de mon parcours, Merci à l'Algérie, Merci à notre peuple!

MERCI !

Table des matières

Table des notations et acronymes	xiii
1 Introduction	1
2 Modélisation du transport de la température des électrons des plasmas chauds sous la formulation de Galerkin	7
2.1 Équation du transport de la chaleur dans les plasmas de tokamak	9
2.2 Hypothèses de la formulation du modèle de transport de la chaleur	11
2.3 Formulation variationnelle	12
2.3.1 Application de la formulation variationnelle au modèle de transport	12
2.3.2 Mise en forme standard	13
2.4 Existence et unicité de la solution	14
2.5 Formulation de Galerkin	16
2.5.1 Principes de la formulation de Galerkin	17
2.5.2 Estimation de l'erreur d'approximation de la formulation de Galerkin	18
2.6 Méthode de Galerkin Modale Continue (MGMC)	19
2.6.1 La méthode de Faedo-Galerkin	20
2.6.2 La méthode de décomposition orthogonale propre (POD-Galerkin)	23
2.7 B-Splines-Galerkin FEM (BSG-FEM)	25
2.7.1 Introduction aux fonctions B-splines cubiques standard	26
2.7.2 Approximation de Galerkin par les B-splines cubiques	28
2.7.3 Estimation de l'erreur d'approximation	29
2.8 Conclusion	31
3 Estimation simultanée en dimension finie du coefficient de diffusion et du terme source	35

3.1	Formulation du problème inverse en dimension finie	37
3.1.1	Convergence du problème d'estimation en dimension finie	38
3.1.2	Construction du système d'estimation approximé	42
3.2	Identifiabilité du problème d'estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en dimension finie	45
3.2.1	Identifiabilité <i>a priori</i>	46
3.2.2	Identifiabilité <i>a posteriori</i>	48
3.3	Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant la méthode des moindres carrés récurrents à entrées inconnues (MCR-EI)	52
3.3.1	Estimation simultanée de θ et $\beta(t)$	54
3.3.2	Méthode d'estimation simultanée de $\theta(t)$ et $\beta(t)$: MCR-EI adaptative	58
3.4	Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues (FKE-EI)	63
3.4.1	Filtre de Kalman à Entrées Inconnues (FK-EI)	64
3.4.2	Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI)	74
3.4.3	Influence du choix des matrices W , V et $P(0 0)$	81
3.5	Applications et comparaisons	81
3.5.1	Conditions de simulation	83
3.5.2	Calcul des erreurs d'estimation	83
3.5.3	Exemples de simulation	83
3.5.4	Résultats expérimentaux	89
3.6	Conclusion	94
4	Estimation simultanée en dimension infinie du coefficient de diffusion et du terme source	97
4.1	Formulation du problème d'estimation en dimension infinie	99
4.2	Étude du problème d'identifiabilité simultanée de $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ en dimension infinie	101
4.3	Estimation en ligne de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant un observateur adaptatif	104

4.3.1	Cas des paramètres distribués $\chi_e(z)$ et $S(z)$	105
4.3.2	Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ connaissant les bornes de la variation temporelle	110
4.3.3	Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ and $S(z, t)$ sans contraintes sur la variation temporelle	114
4.4	Identification adaptative robuste	118
4.4.1	Projection des paramètres	118
4.4.2	σ -modification	119
4.5	Auto-réglage des gains d'adaptation	120
4.6	Résultats de simulation	123
4.6.1	Exemple de simulation	123
4.6.2	Résultats expérimentaux	124
4.7	Conclusion	127
5	Conclusions et perspectives	129
5.1	Comparaison entre le FKE-EI de dimension finie et l'estimateur adaptatif de dimension infinie	129
5.2	Contributions	130
5.3	Perspectives	131
	Bibliographie	135

Table des figures

1.1	Principe du tokamak	3
1.2	Principes de l'estimation en dimension finie des systèmes distribués	5
2.1	Les 20 premières fonctions de base w_i de la MGMC	21
2.2	Reconstruction de T_{exp} en utilisant la MGMC	22
2.3	Reconstruction de T_{exp} en utilisant la POD	25
2.4	Les 20 premières fonctions de base empiriques de T_{exp} en utilisant la POD	25
2.5	Reconstruction de T_{exp} en utilisant la BSG-FEM	31
2.6	Comparaison des erreurs d'approximation par la méthode de Faedo-Galerkin (a), la POD (b) et les B-splines FEM (c)	32
3.1	Étapes d'estimation et de reconstruction des paramètres distribués en dimension finie	44
3.2	Exemple 1 : profils de $T(z, t)$, $S(z, t)$ et $\chi_e(z, t)$	85
3.3	Performances de la MCR-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans l'exemple 1.	86
3.4	Résultats de simulation en utilisant le FKE-EI adaptatif pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 1	87
3.5	Exemple 2 : profils de $T(z, t)$, $S(z, t)$ et $\chi_e(z, t)$	89
3.6	Performances de la MCR-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 2.	90
3.7	Résultats de simulation en utilisant le FKE-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 2	91
3.8	Profil de T_{exp}	92
3.9	Performances de la MCR-EI pour l'estimation des profils expérimentaux de S et χ_e	93
3.10	Profils expérimentaux de χ_e et S identifiés en utilisant la MCR-EI adaptative	94
3.11	Performances du FKE-EI pour l'estimation des profils expérimentaux de S et χ_e	95

3.12	Comparaison entre la puissance absorbée estimée $P_{e_{estim}}$ et la puissance totale fournie P_e	96
4.1	Profils de T , χ_e et S pour l'exemple de simulation	124
4.2	Performances de l'estimateur en ligne de dimension infinie appliqué à l'exemple de simulation	125
4.3	Profil de T_{exp} du shot $TS - 32632$	126
4.4	Erreur relative d'estimation du profil de T_{exp}	126
4.5	Profil expérimentaux identifiés de χ_e et S pour le shot $TS - 32632$	126
5.1	Profils de T , χ_e et S dans le cas de $r + d > n + 1$	130
5.2	Performances de l'estimateur en ligne de dimension infinie dans le cas de $r + d > n + 1$	131

Liste des tableaux

2.1	La fonction B-spline cubique standard B_0^3 et sa première dérivée $B_0^{3'}(z)$. . .	28
3.1	Algorithme de MCR-EI pour l'estimation récursive de θ et β	57
3.2	Tableau récapitulatif des choix du facteur d'oubli dans l'estimation des systèmes temps-variant.	58
3.3	Algorithme de la MCR-EI adaptative	63
3.4	Algorithme du FK-EI pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues	69
3.5	Algorithme du FKE-EI pour l'estimation simultanée de l'état, des paramètres et des entrées inconnus	79
3.6	Algorithme du FKE-EI <i>dual</i>	82
5.1	Algorithme du FK-EI pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues en dimension infinie	133

Notations et Acronymes

Acronymes :

EDP	Équation Différentielle Partielle.
EDO	Équation Différentielle Ordinaire.
MGMC	Méthode de Galerkin Modale Continue.
POD	Projection Orthogonale Décomposition.
FEM	" <i>Finite Element Method</i> ".
BSG-FEM	" <i>B-splines Galerkin Finite Element Method</i> ".
MCR	Méthode des Moindres Carrés Récursifs.
MCR-EI	Méthode des Moindres Carrés Récursifs à Entrées Inconnues.
FK-EI	Filtre de Kalman à Entrées Inconnues.
FKE-EI	Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues.

Notations :

∇	Gradient, dérivée par rapport à la variable spatiale $\frac{\partial}{\partial x}$. $w'(x) := \frac{dw}{dx}(x) := \nabla w(x)$.
div	Opérateur divergence.
$C_0^\infty(\Omega) := D(\Omega)$	Ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact. $C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty : f _{\partial\Omega} = 0 \text{ et } f _\Omega \neq 0\}$.
(\cdot, \cdot)	Produit interne usuel défini sur un espace de Hilbert, donné par : $(f, g) = \int_\Omega f g \partial\Omega$.
$\ \cdot\ _0$	Norme usuelle sur $L^2(\Omega) : \ f\ _0 = \left(\int_\Omega f^2 \partial\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$.
$H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$	Espace de Sobolev défini par : $\{f \in L^2(\Omega) : f _1 = 0, \nabla f(\text{au sens des distributions}) \in L^2(\Omega)\}$.
$\ \cdot\ _1$	Norme définie sur $H_{0,\{1\}}^1(\Omega) : \ f\ _1^2 = \ f\ _0^2 + \ \nabla f\ _0^2$.
$ \cdot _1$	Norme définie sur $H_0^1(\Omega)$ par : $ \cdot _1 = \ \nabla \cdot\ _0$. Dans $H_0^1(\Omega)$, la norme $ \cdot _1$ est équivalente à la norme $\ \cdot\ _1$: $\forall u \in H_0^1(\Omega) : u _1 \leq \ u\ _1 \leq \sqrt{1+C(\Omega)} u _1$.
$L^2(0, T_t; H_{0,\{1\}}^1)$	Espace de Sobolev évoluant dans le temps : $f(t, x) \in L^2(0, T_t; H_{0,\{1\}}^1(\Omega)) \iff f(t, \cdot) \in L^2(0, T_t)$ et $f(\cdot, x) \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$.

Rappels :

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz :**

$$\forall f, g \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} f g \, d\Omega \leq \|f\|_0 \|g\|_0.$$

- **Inégalité de Poincaré :** Si Ω est borné dans au moins une direction, alors :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_0 \leq C(\Omega) |u|_1.$$

tel que : $C(\Omega)$ est la constante de Poincaré qui dépend du domaine.

Introduction

Depuis la révolution industrielle, les besoins de la population mondiale en terme d'énergie ne cessent d'augmenter alors que les ressources en énergie fossile commencent à s'épuiser et leur impact environnemental devient de plus en plus préoccupant. De nos jours, la recherche de nouvelles sources d'énergie alternatives moins polluantes, fiables, disponibles et de coût global économique est indispensable. Dans ce cadre, la fusion thermonucléaire contrôlée apparait comme une option viable à grande échelle pour la production de l'énergie électrique. La fusion thermonucléaire est la réaction qui consiste à rapprocher deux noyaux d'atomes légers pour en former un plus lourd tout en libérant de l'énergie sous forme cinétique (un proton ou un neutron accéléré suivant le type de réaction). La réaction la plus attrayante en termes de *section efficace* et de bilan d'énergie (différence entre l'énergie fournie pour former le plasma et fusionner les noyaux et celle perdue) est celle de la fusion du *Deutérium* et du *Tritium* (isotopes de l'hydrogène) [3].

Contrairement au solaire, à l'éolien et à la fission nucléaire, les ressources de fusion thermonucléaire (le *Deutérium* et le *Tritium*) sont abondantes dans la nature. Le Deutérium provient des océans alors que le Tritium résulte de la réaction même de fusion. À partir de *100 milligrammes* de Deutérium et de *150 milligrammes* de Tritium, il est possible de développer la même énergie produite par environ *7 barils de pétrole* [3]. Si l'on ajoute à cela, les conséquences environnementales négatives et les contraintes de sécurité de la fission, la fusion thermonucléaire se distingue brillamment des solutions candidates aux énergies alternatives.

Ces soixante dernières années ont vu naître plusieurs types de machines à fusion (machines à miroirs, stellarators, tokamaks ...) et à la suite d'un enchaînement de succès et d'échec, le tokamak s'impose comme le dispositif le plus prometteur pour répondre aux besoins de la fusion thermonucléaire.

Le tokamak est une machine à confinement magnétique dont le concept a été inventé dans l'Union Soviétique à la fin des années cinquante. L'acronyme *tokamak* vient du mot russe : *TOroidalnaya KAmera ee MAgnitaya Katushka* qui signifie "chambre toroïdale à bobines magnétiques". Le tokamak le plus large au monde est le JET (Joint European Torus) à Culham, Angleterre. Le DIII-D à San Diego, USA fait partie d'une douzaine de tokamaks dans le monde de taille moyenne. D'autres tokamaks des plus exploités en Europe sont le FTU en Italie et le TCV en Suisse [3].

En France, le seul tokamak en activité depuis 1988 est le Tore Supra à Cadarache. Il appartient à la classe des grands tokamaks à bobines supraconductrices permettant de

généraliser un champ magnétique important sur une longue durée. Il détient le record de durée de fonctionnement pour un tokamak. Son rayon majeur est de l'ordre de $R = 2.4\text{ m}$ alors que le rayon mineur est $a = 0.8\text{ m}$. Son champ magnétique toroïdal est $B_T \leq 4.2\text{ T}$ et le courant plasma est $I_p \leq 2\text{ MA}$. Dans ce travail de thèse, les données expérimentales utilisées sont issues de ce tokamak (principalement la décharge $TS - 32632$).

Un projet de tokamak très prometteur, international (regroupant sept nations) faisant l'objet de recherches intensives afin de prouver la faisabilité scientifique et économique de la fusion est l'ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor).

Le principe du tokamak est le suivant : lorsque la température du chauffage du combustible (le gaz formé par le mélange de Deutérium et du Tritium) avoisine les 10^4 °C , la liaison de Coulomb entre les noyaux et les électrons se brise pour donner naissance à un gaz ionisé appelé *plasma*, le quatrième état de la matière. Pour arriver à vaincre les forces de répulsion entre les noyaux et les fusionner, le plasma doit être chauffé à une température qui atteint les 10^8 °C (environ 6 fois la température au centre du soleil).

Un tokamak en général se compose, comme illustré fig. 1.1, de :

- Une chambre à vide contenant le plasma.
- À la base de la chambre à vide, on trouve le "*blanket*" composé généralement de Litium. Son rôle est d'alimenter le plasma en Tritium (produit par la réaction du Litium avec les neutrons libérés de la réaction de fusion) et d'absorber l'énergie des neutrons.
- Des bobines toroïdales générant un champ magnétique poloidal.
- Des bobines poloidales générant un champ magnétique toroïdal.
- Des bobines centrales interagissant avec le plasma comme le primaire d'un transformateur alors que le plasma, par ses électrons, est le secondaire. Cette interaction génère le courant plasma.

La combinaison des champs magnétiques toroïdal et poloidal crée dans le tokamak un champ magnétique hélicoïdal permettant de confiner le plasma pour favoriser la réaction de fusion. En pratique, deux difficultés majeures s'opposent au concept même de tokamak :

- Le fonctionnement continu est compromis par la nécessité de générer un courant plasma permanent pour que le réacteur soit rentable.
- Le transport de l'énergie (la température) et des particules est plus important que ne laissent supposer les lois théoriques de la physique nucléaire.

Pour le premier point, des recherches intensives sont menées sur la maximisation d'un courant auto-généré par le plasma appelé le courant de *bootstrap*, ce qui a fait naître le concept de tokamak "avancé".

Le deuxième problème a animé et continue d'animer de nombreuses études théoriques et expérimentales. Cependant, la réponse reste une énigme. Aucune étude n'est encore capable de trancher sur la réponse. Pour chaque type de tokamak et pour chaque mode de fonctionnement, des lois empiriques ou un mélange de lois empiriques et théoriques ont été développées [122], [37], [87], [107] (et les références incluses). Le manque de lois bien établies motive le présent travail de thèse. Nous nous intéressons principalement au transport de la température et plus particulièrement au transport de la température des électrons du

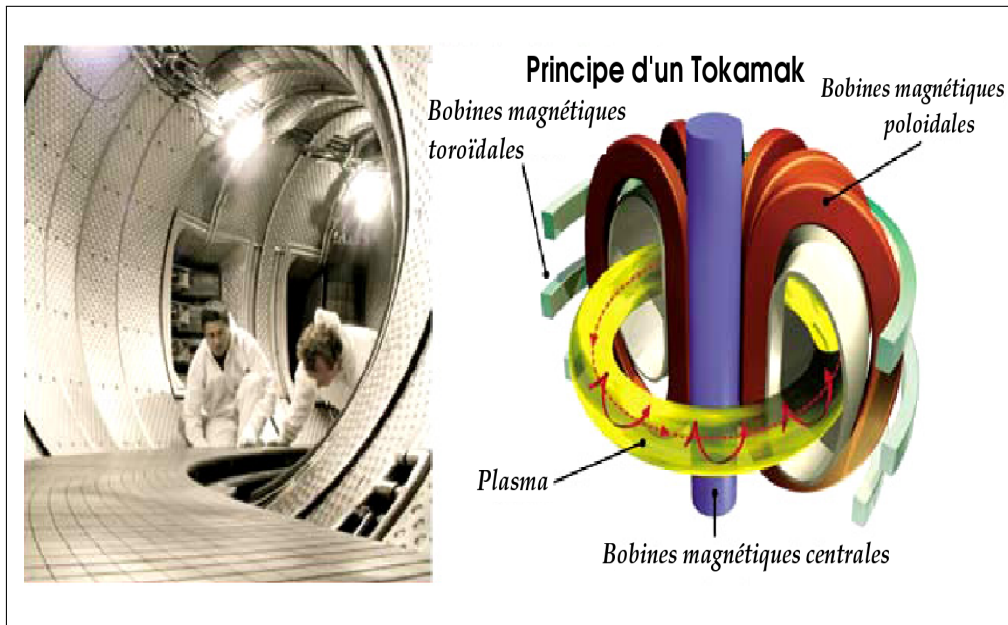


FIGURE 1.1 – Principe du tokamak

plasma. Les électrons étant les particules de masse la plus faible (par rapport aux ions), ils sont responsables du transport de l'énergie du plasma.

En exploitant les techniques d'identification paramétrique, nous espérons développer une méthodologie générale permettant la caractérisation et l'identification de certains des paramètres inconnus du modèle de transport de l'énergie, à savoir le coefficient de diffusion ($\chi_e(z, t)$) et le terme source ($S(z, t)$ l'énergie absorbée par les particules). Ce défi étant complexe, des simplifications sont plus qu'indispensables. Ainsi, nous nous limitons au cadre où le couplage entre la densité des particules du plasma et leur énergie est négligeable. Cette hypothèse nous permettra de retrouver la formulation standard de l'équation de transport de la température mais avec un coefficient de diffusion distribué et un terme source inconnu. Des travaux antérieurs au notre (voir [110] et les références incluses) ont essayé de répondre à la question en estimant le flux de la température mais en considérant que le terme source est parfaitement connu.

Le présent travail se veut plus général et entre dans le cadre de l'estimation simultanée des paramètres (coefficient de diffusion) et des entrées (terme source) inconnus, distribués, gouvernant des équations différentielles partielles (EDPs) paraboliques.

L'estimation/identification dans le cadre des systèmes distribués se divise en deux grandes approches : soit en dimension finie en discrétisant l'EDP de transport dans l'espace ce qui la transforme en un système d'équations différentielles ordinaires (ODEs) soit en dimension infinie où le caractère distribué du système est préservé. Dans ce travail de thèse, nous envisageons de traiter le problème pour les deux approches.

L'organisation de ce manuscrit est la suivante :

Le Chapitre 2 est dédié à la modélisation du transport de la température dans les tokamaks et au choix d'une méthode de réduction du modèle obtenu en dimension finie. Ce modèle est formulé à partir de l'équation de la conservation de l'énergie, avec l'aide des hypothèses générales considérées dans la physique des plasmas chauds. Il s'agit d'une EDP linéaire parabolique non-homogène et à paramètres distribués. Le problème du manque de lois bien définies pour la description du coefficient de diffusion et du terme source ainsi que le besoin de leur estimation seront aussi détaillés dans ce chapitre. Aucune hypothèse sur la formulation de ces paramètres ne sera adoptée, ce qui constitue une des originalités du travail.

Une fois le modèle de transport énoncé, il est nécessaire de démontrer qu'il respecte les conditions de Hadamard (existence, unicité et continuité de la solution [53]) des systèmes bien posés afin de pouvoir approximer sa solution. Pour ce faire, trois classes classiques de réductions d'EDPs sous la formulation de Galerkin seront présentées. Selon la complexité de la mise en œuvre numérique et la précision de la solution approximée, parmi les trois méthodes présentées, nous choisissons celle la plus adaptée à notre modèle. Elle sera adoptée tout au long de notre travail, aussi bien pour la formulation du problème d'estimation/identification en dimension finie (Chapitre 3) que pour la mise en œuvre de l'estimateur de dimension infinie (Chapitre 4).

Le Chapitre 3 est consacré au problème d'estimation du coefficient de diffusion et du terme source en dimension finie dont le principe est illustré fig. 1.2. Après l'étude de la convergence du problème formulé en dimension finie au problème initial (distribué), l'EDP de transport et ses paramètres spatio-temporels sont convertis en un système d'état temps-variant à paramètres et à entrées inconnus. Avant d'entamer l'estimation/identification de ces inconnus, l'identifiabilité du système est examinée.

Nous présentons deux méthodes d'identification dédiées aux systèmes à entrées inconnues pouvant aisément être étendues au cas où les paramètres sont aussi inconnus pour apporter des réponses à notre problème. Comme pour chaque technique, des limitations et des inconvénients existent. Dans ce Chapitre, ces restrictions seront aussi discutées au fur et à mesure que nous avançons dans notre étude.

Afin de dépasser ces contraintes dues à la discrétisation en dimension finie, dans le Chapitre 4, le problème est abordé dans son cadre initial i.e. en dimension infinie. En premier, les conditions sous lesquelles le problème inverse est bien posé sont explicitées. Ensuite, l'identifiabilité en dimension infinie des paramètres inconnus pour notre type d'EDP est analysée.

Le problème d'estimation en dimension infinie étant complexe, trois cas de figure seront présentés. Dans le premier, nous supposons que les paramètres sont distribués uniquement dans l'espace. Le cas des paramètres spatio-temporels avec des contraintes sur leurs variations

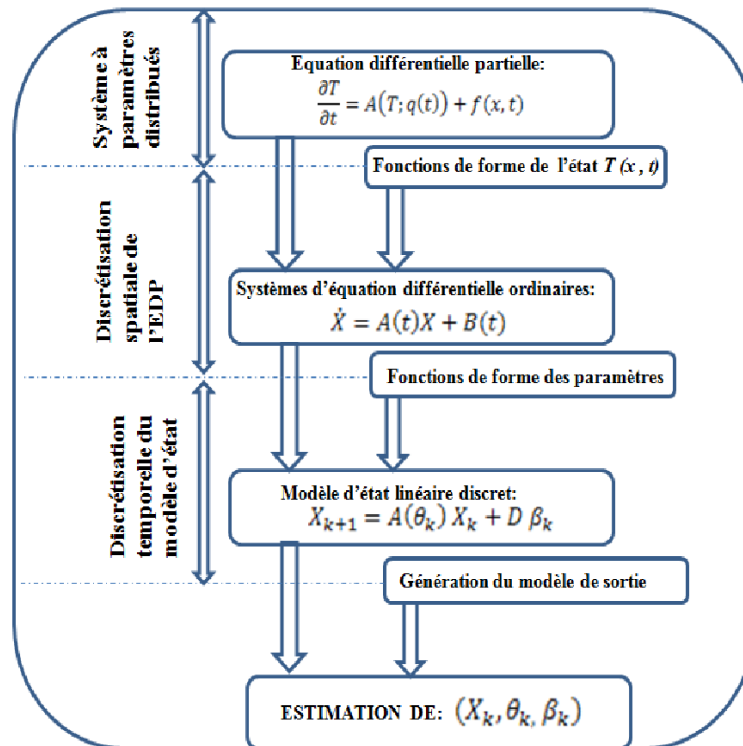


FIGURE 1.2 – Principes de l'estimation en dimension finie des systèmes distribués

dans le temps sera exploré par la suite. Finalement, nous examinons le cas des paramètres distribués temps-variant (sans bornes sur leurs variations). L'estimateur développé dans le premier cas, servira comme base pour ceux qui suivent.

Chaque chapitre sera accompagné par un récapitulatif bibliographique de chaque approche et méthode exploitée et par des résultats de simulations sur des données simulées et réelles.

Les conclusions finales et quelques perspectives d'extension de ce travail sont présentées à la fin de ce mémoire.

En conclusion, mentionnons qu'une partie des résultats présentés dans ce manuscrit a déjà été publiée dans des conférences nationales et internationales d'Automatique :

- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Estimation de la diffusion thermique dans les plasmas de tokamak. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Grenoble, France, Juillet 2012.
- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Joint diffusivity and source estimation in tokamak plasma heat transport. American Control Conference, Washington DC, USA, Juin 2013.
- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Combined distributed parameters and source estimation in tokamak plasma heat transport. European Control Conference,

Zürich, Suisse, Juillet 2013.

- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Adaptive distributed parameter and input estimation in plasma tokamak heat transport. 1st Workshop on systems governed by Partial Differential Equations, IFAC, Paris, France, Septembre 2013.
- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Adaptive space-time distributed parameter and input estimation in heat transport with unknown bounds. IEEE International Conference on Systems and Control, Algiers, Algeria, Octobre 2013.

Par ailleurs, deux articles ont été soumis dans des revues internationale de spécialité :

- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Auto-tuning of adaptive distributed parameter estimation in linear parabolic PDEs, soumis à Automatica.
- S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Estimation of the plasma heat transport source term and diffusion coefficient using a kalman filtering early lumping method, soumis à IEEE Transaction on Control Systems Technology.

Modélisation du transport de la température des électrons des plasmas chauds sous la formulation de Galerkin

Sommaire

2.1	Équation du transport de la chaleur dans les plasmas de tokamak . . .	9
2.2	Hypothèses de la formulation du modèle de transport de la chaleur .	11
2.3	Formulation variationnelle	12
2.3.1	Application de la formulation variationnelle au modèle de transport . . .	12
2.3.2	Mise en forme standard	13
2.4	Existence et unicité de la solution	14
2.5	Formulation de Galerkin	16
2.5.1	Principes de la formulation de Galerkin	17
2.5.2	Estimation de l'erreur d'approximation de la formulation de Galerkin . .	18
2.6	Méthode de Galerkin Modale Continue (MGMC)	19
2.6.1	La méthode de Faedo-Galerkin	20
2.6.2	La méthode de décomposition orthogonale propre (POD-Galerkin)	23
2.7	B-Splines-Galerkin FEM (BSG-FEM)	25
2.7.1	Introduction aux fonctions B-splines cubiques standard	26
2.7.2	Approximation de Galerkin par les B-splines cubiques	28
2.7.3	Estimation de l'erreur d'approximation	29
2.8	Conclusion	31

L'équation de la température des électrons du plasma décrit aussi bien le comportement dynamique que les propriétés de la distribution spatiale du phénomène du transport de la chaleur dans le tokamak. Elle est déduite du principe de la conservation de l'énergie. C'est une EDP parabolique, linéaire, non-homogène où le coefficient de diffusion est spatio-temporel (distribué dans le temps et l'espace) et le coefficient de réaction est constant.

En raison du nombre réduit d'actionneurs et de capteurs, et dû aux capacités de calcul limitées, ce système de dimension infinie à paramètres distribués nécessite d'être converti en un système approximé de dimension finie - un ensemble d'équations différentielles ordinaires

(ODEs) à paramètres constants par morceaux- afin de pouvoir simuler et analyser ses caractéristiques.

Pour des conditions aux limites et des paramètres définis, cette EDP n'a pas de solution analytique connue. Néanmoins, il existe plusieurs méthodes de résolution numérique d'équations différentielles partielles permettant son approximation. Ces méthodes dépendent aussi bien de la classe de l'EDP que de ses caractéristiques. Généralement, elles peuvent être regroupées en trois grandes catégories [74] : la méthode des valeurs propres, la méthode des lignes et la méthode des résidus pondérés.

En règle générale, si l'opérateur de l'EDP est un générateur d'un semi-groupe C_0 , indépendant du temps et auto-adjoint, en utilisant le principe de la séparation des variables, la méthode des valeurs propres donne une bonne approximation, de même que pour la méthode des fonctions de Green [20]. Dans le cas contraire où l'opérateur est temps variant, la méthode des lignes (principalement son cas particulier : *la méthode des différences finies*) est largement utilisée. L'EDP est discrétisée dans le temps et dans l'espace et les dérivées sont calculées en utilisant le développement de Taylor (schéma forward, backward ou central). L'inconvénient majeur de cette méthode est le système d'ordre élevé auquel elle aboutit. Aussi, pour une EDP à paramètres spatio-temporels, à cause de ce schéma de discrétisation, on perd le caractère distribué de ces paramètres.

La méthode des résidus pondérés est l'une des méthodes les plus utilisées et les plus efficaces pour l'approximation en dimension finie des systèmes à paramètres distribués [74]. En se basant sur le principe des séries de Fourier [117], [42], toute fonction spatio-temporelle peut être approximée par une somme infinie de fonctions de base spatiales pondérées par leur coefficients temporels. Ainsi, par une troncature sur la dimension de ces bases, l'EDP est transformée en un système de dimension finie. Suivant le choix de ces fonctions de bases, plusieurs formulations existent (voir [74]).

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la formulation de Galerkin dont le principe est la projection orthogonale du résidu de l'approximation sur l'espace des solutions [42].

Dans ce chapitre, nous commençons par énoncer le modèle de transport de la chaleur dans les plasmas chauds et les hypothèses permettant de l'obtenir. Les bases de cette modélisation se trouvent dans les principes du transport perturbé (pour plus de détails, voir [107] et les références incluses). Ensuite, nous présentons la formulation variationnelle dite aussi la formulation "*faible*" [108], [100], ses principes et son application à notre EDP. En utilisant cette formulation, nous allons traiter par la suite, les conditions d'existence et d'unicité de la solution du problème direct (conditions sous lesquelles notre modèle est bien posé). Deux classes de méthodes d'approximation sous la formulation de Galerkin seront abordées : la Méthode de Galerkin Modale (Spectrale) Continue (MGMC) [22] et la méthode des éléments

finis (FEM). Pour la MGMC, nous avons choisi d'appliquer deux techniques : la méthode de *Faedo-Galerkin* et la méthode de *la décomposition orthogonale propre*. Dans la FEM, la méthode des *B-splines FEM-Galerkin* (BSG-FEM) est appliquée.

Ces méthodes servent à semi-discrétiser l'EDP et à reconstruire le profil expérimental de la température. Ainsi, cette reconstruction se base aussi bien sur les mesures que sur le modèle mathématique (l'EDP) décrivant le phénomène physique étudié. Ceci se fait par l'interpolation des mesures spatio-temporelles discrètes tout en respectant la physique du problème. Le résultat de cette reconstruction peut être exploité par exemple dans le placement optimal des capteurs. Dans notre travail, la reconstruction du système est utilisée dans l'identification en dimension finie des paramètres inconnus (Chapitre 3) et dans la mise en œuvre d'un estimateur de dimension infinie (chapitre 4).

Le fondement mathématique théorique de ces méthodes entre dans le cadre de l'Analyse Fonctionnelle [18], [131]. Quelques notions seront rappelées brièvement dans ce manuscrit et pour plus de détails voir par exemple [108], [18] et les références qui y figurent.

Des exemples de simulation servant à illustrer chaque méthode sont présentés. Les résultats sont obtenus en utilisant le logiciel MATLAB[©].

2.1 Équation du transport de la chaleur dans les plasmas de tokamak

Le transport d'une quantité y est gouverné par son équation de continuité [107] :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\text{div}\Gamma_y + S_y,$$

où div est l'opérateur *divergence*, Γ_y est le flux de y et S_y est le terme source i.e., la somme algébrique des termes modélisant l'énergie (la puissance) fournie et ses pertes. En général, il est donné par :

$$\Gamma_y = -D_y \text{div}y + V_y y, \quad (2.1)$$

où D_y et V_y sont respectivement les coefficients de diffusion et de convection. En terme général, dans les plasmas de tokamak, les flux sont reliés aux gradients qui leur correspondent par une matrice de transport. Les éléments diagonaux modélisent les coefficients de diffusion alors que les autres éléments déterminent le couplage entre les différentes variables. Ces éléments peuvent être regroupés dans V_y .

Lorsque le plasma atteint son régime établi, la séparation de D_y et V_y devient impossible et le flux s'écrit en fonction de la variable **diffusivité** χ_y par :

$$\Gamma_y = \chi_y \text{div}y$$

En régime établi, des surfaces iso-bariques ou iso-magnétiques se forment et sur ces surfaces, les grandeurs macroscopiques (température, densité de courant, densité de particules, champs magnétiques/ électriques, ...) sont stables. Par conséquent, leurs profils évoluent uniquement dans le sens radial (le transport est symétrique par rapport à la variable angulaire et se réduit à sa variable radiale).

De part leur très faible masse, les électrons sont les particules responsables du transport de la chaleur (majoritairement), dans les plasmas chauds. Les équations du transport de la température T et de la densité des électrons n sont couplées et données par [107] :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \Gamma + S_n, & \Gamma = -D \text{div} n + V n, \\ \frac{3}{2} \frac{\partial(nT)}{\partial t} = -\text{div} \left(q + \frac{5}{2} \Gamma T \right) + P_e, & q = -n \chi_e \text{div} T + n V T. \end{cases} \quad (2.2)$$

avec q le flux de chaleur, P la puissance absorbée par les particules et χ_e le coefficient de diffusivité. Bien que dans la physique des plasmas, la définition du coefficient de diffusion soit différente de celle du coefficient de diffusivité, par abus de langage et par analogie avec la formulation standard (en physique) du transport de la chaleur, le χ_e est appelé dans certains travaux *coefficient de diffusion* [122], [37]. Cet abus est reproduit dans ce manuscrit.

En physique des plasmas chauds, il existe plusieurs modèles pour exprimer le coefficient de diffusion. Certains se basent sur la théorie du transport des fluides (*Bohm*, *gyro-Bohm*, *IFS-PPPL*, *Weiland*, ...), d'autres sont empiriques (exemples : *RLW*, *BRLW*, ...), alors que la grande majorité sont des programmes informatiques.

En 1977, il a été reporté que le χ_e déduit de la propagation de la chaleur expérimentale est plus rapide que celui tiré des lois classiques du transport [21]. En 1987, une dépendance non-linéaire du coefficient de diffusion au gradient de la température a été relevée [123].

Pour les modèles théoriques, deux classes se distinguent : la famille de modèles **Bohm** et celle des modèles **gyro-Bohm** [122], [39], [38]. Chaque famille de modèle est fonction de plusieurs paramètres plasma, allant dans certains cas jusqu'au nombre de 17 [122].

Dans certains cas, le χ_e s'exprime par une combinaison des deux modèles Bohm et gyro-Bohm [37] ou par une forme dérivée appelée *super-Bohm* [87]. Souvent, suivant le type du réacteur, la nature du chauffage, l'amplitude de la température, le cisaillement magnétique, l'amplitude du champs magnétique toroïdale, le facteur de sécurité... etc des combinaisons (entre des modèles théoriques et empiriques) et des extensions de modèles de χ_e sont formulées (pour plus de détails, voir par exemple dans [87], [55], [37], [92], [106], [107]).

Pour le terme source, si l'énergie fournie peut être connue, les pertes d'énergie dues, entre autre, aux collisions entre les particules, aux radiations, à la conduction, au Brehmsstrahlung (rayonnement de freinage) ne sont pas bien déterminées pour tous les tokamaks et leurs différents régimes de fonctionnement. Dans la majorité des travaux sur le transport de chaleur, on considère le type de chauffage où on peut supposer ces pertes négligeables. Ainsi, d'après les résultats expérimentaux, dans les tokamaks disposant d'un chauffage par antenne ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating), les chances pour que l'onde soit complètement absorbée par les électrons sont importantes ($\simeq 100\%$) [106], [136]. Si le mode de chauffage est différent, le terme source reste une ambiguïté (difficilement quantifiable) [101].

2.2 Hypothèses de la formulation du modèle de transport de la chaleur

De la discussion précédente et du modèle non-linéaire fortement couplé donné dans (2.2), il s'avère que des hypothèses permettant la formulation d'une expression simplifiée mais expérimentalement significative sont nécessaires. En physique des plasmas, on admet en général que [24], [136] :

- 1- La densité des électrons est constante durant le chauffage du plasma.
- 2- Les variations spatio-temporelles de la densité des électrons sont négligeables devant celles de la température.
- 3- Les pertes d'énergie dues aux chocs élastiques sont modélisées par un coefficient d'amortissement (un temps de confinement) τ constant [70].
- 4- Le coefficient de diffusion χ_e est considéré spatio-temporel bien qu'en physique des plasmas chauds, l'analyse du transport se fait généralement en régime stationnaire et par conséquent, χ_e est distribué uniquement dans l'espace [37], [92], [107], [110].
- 5- Aucune connaissance *a priori* sur la formulation de χ_e et S ne sera prise en compte. Seules les considérations qualitatives sur ces paramètres seront valorisées en simulation (χ_e est de forme croissante du centre vers le bord et S est généralement de forme gaussienne [92]).

De l'hypothèse (1), les termes hors diagonaux dans la matrice de flux sont nuls et en considérant de plus les conditions (3) et (4), l'équation de conservation d'énergie donnée dans (2.2) s'écrit :

$$\frac{3}{2} \frac{\partial(nT)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn\bar{\chi}_e(r, t) \frac{\partial T}{\partial r}) - \frac{3}{2\tau} nT(r, t) + P_e(r, t), \quad (2.3)$$

où t est le temps, r est la variable radiale le long du rayon mineur a du tore, $\bar{\chi}_e$ est le coefficient de diffusion des électrons, $\tau (< \infty)$ est un temps de confinement modélisant les pertes d'énergie, dans Tore Supra il est donné par le modèle de Hoang [55].

En prenant en compte l'hypothèse (1) dans (2.3) et en utilisant la variable normalisée $z = r/a$, l'équation de transport de la température des électrons du plasma s'exprime par :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} T(z, t) + S(z, t), & \forall (z, t) \in \Omega \times]0, t_f] \\ \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = 0, \quad T(1, t) = 0, & \forall t \in [0, t_f] \\ T(z, 0) = 0, & \forall z \in \Omega, \end{cases} \quad (2.4)$$

où : $\text{div} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}(z \cdot)$ est l'opérateur divergence en coordonnées cylindriques (en considérant la symétrie par rapport à la variable angulaire), $\Omega =]0, 1[$ est le domaine spatial normalisé, t_f est le temps final (de l'expérience ou de la simulation) et :

$$\begin{cases} S(z, t) = \frac{2}{3n} P_e(z, t) \\ \chi_e(z, t) = \frac{2}{3a^2} \bar{\chi}_e(r, t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans tout ce qui va suivre, nous appelons χ_e le coefficient de diffusion et S le terme source. Notons qu'en physique des plasmas chauds, cette équation modélise les variations de la température autour de l'équilibre. C'est la raison pour laquelle, la condition initiale (3ème équation dans (2.4)) et la condition au bord $z = 1$ sont nulles ($T(z, 0) = T(1, t) = 0$). À $z = 0$, afin de garantir la symétrie axiale, le gradient de la température est nul.

En conclusion, l'équation de transport de la chaleur adoptée dans ce manuscrit est une équation différentielle partielle (EDP) parabolique, linéaire et non-homogène.

L'objectif final de ce travail est l'identification en simultané de χ_e et S . Nous devons d'abord démontrer que ce modèle est bien posé (dans le sens de Hadamard).

2.3 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle des problèmes différentiels est un classique largement développé et exploité dans la littérature [25], [102] pour discuter de l'existence et l'unicité de solutions et de leurs approximations numériques. Elle permet la généralisation du concept classique de solution en décrivant une formulation faible de l'EDP tout en lui imposant moins de contraintes de régularité. Ainsi, cette formulation est conforme au phénomène physique qu'elle modélise. La solution obtenue est par conséquent dite *une solution faible*.

Ce concept de solution faible trouve ses racines dans les bases de la physique mathématique. Dans ce qui suit, à travers l'application de cette formulation sur notre EDP, les principes de ce concept seront expliqués.

2.3.1 Application de la formulation variationnelle au modèle de transport

Soit $v(z)$ une fonction de test dans $D(\Omega)$: espace des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ à support compact [108]. Multiplions l'équation différentielle partielle définie dans (2.4) par v et intégrons sur le domaine Ω :

$$\int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} v(z) dz = \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) v(z) dz - \frac{1}{\tau} \int_0^1 T(z, t) v(z) dz + \int_0^1 S(z, t) v(z) dz. \quad (2.6)$$

Pour le premier terme du deuxième membre de (2.6), la formule de divergence de Gauss est donnée par :

$$\int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} v(z) \right) dz = \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} v(z) \Big|_0^1. \quad (2.7)$$

Sachant que :

$$\operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} v(z) \right) = v(z) \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (2.8)$$

En appliquant les formules (2.7) et (2.8) dans (2.6), nous obtenons l'expression suivante pour l'intégration par partie du terme *divergence* :

$$\int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) v(z) dz = \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} v(z) \Big|_0^1 - \int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \nabla v dz. \quad (2.9)$$

Ainsi, la formulation variationnelle du système (2.4) est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} v(z) dz &= \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} v(z) \right) \Big|_0^1 - \left[\int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dv}{dz} dz \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau} \int_0^1 T(z, t) v(z) dz \right] + \int_0^1 S(z, t) v(z) dz. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dans le deuxième membre, le premier terme s'annule pour tout v dans $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ où $H_{0,\{1\}}^1$ est l'espace de Sobolev [18], [2] vérifiant les conditions aux limites définies dans (2.4).

Ainsi (2.10) devient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial t} v(z) dz &= - \left[\int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dv}{dz} dz + \frac{1}{\tau} \int_0^1 T(z, t) v(z) dz \right] \\ &\quad + \int_0^1 S(z, t) v(z) dz. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.3.2 Mise en forme standard

Afin de mettre le problème (2.11) sous la formulation variationnelle standard, commençons par introduire les espaces de définitions des différentes variables mises à contribution.

Soit :

- L'espace des fonctions de carré intégrable $L^2(\Omega)$, son produit interne usuel (\cdot, \cdot) et sa norme usuelle $\|\cdot\|_2$.
- $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ un espace de Sobolev muni de son produit interne et de sa norme usuels (\cdot, \cdot) et $\|\cdot\|_1$ respectivement.
- $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ (voir [108], [18] pour plus de détails).
- et X_e un espace de Hilbert défini par : $\forall z \in \Omega, t \in [0, t_f]$

$$X_e = \left\{ f(z, t) \in L^2(0, t_f; L^2(\Omega)), \exists c_1, c_2 : c_2 > f(z, t) > c_1 > 0 \right\}, \quad (2.12)$$

où les espaces $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ sont trois espace séparable de Hilbert formant un "triolet de Gelfand " (ou triade hilbertienne).

Comme l'équation (2.4) évolue dans le temps , nous adoptons le point de vue suivant : on suppose que pour tout $t \in [0, t_f]$, si la fonction $u(z, t)$ appartient à l'espace de Hilbert $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$, alors, la fonction $u(\cdot, t)$ est une fonction de la variable réelle t ayant des valeurs dans $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$:

$$u : [0, t_f] \longrightarrow H_{0,\{1\}}^1(\Omega). \quad (2.13)$$

Une fois cette convention adoptée, nous écrivons $T(t)$ et $\dot{T}(t)$ au lieu de $T(z, t)$ et $\frac{\partial T}{\partial t}(z, t)$ et par conséquent $\chi_e(z, t) := \chi_e(t)$, $S(z, t) := S(t)$.

Soit b une forme bilinéaire sur $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ donnée par :

$$\begin{aligned} b : H_{0,\{1\}}^1(\Omega) \times H_{0,\{1\}}^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (T, v) &\longmapsto \int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dv}{dz} dz + \frac{1}{\tau} \int_0^1 T(z, t) v(z) dz, \end{aligned} \quad (2.14)$$

et L la forme linéaire définie sur $L^2(0, t_f; H^{-1}(\Omega))$ telle que :

$$\forall v \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega), L(v; t) = \int_0^1 S(z, t) v(z) dz. \quad (2.15)$$

L'équation (2.11) peut se mettre alors sous la forme variationnelle standard suivante :

$$\begin{cases} (\dot{T}(t), v) + b(T(t), v) = L(v; t); \quad \forall v \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega) \\ T(0) = T(z, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Le système (2.16) ainsi obtenu est équivalent à l'EDP (2.4), avec comme avantage la réduction de l'ordre de dérivation et donc de régularité sur le paramètre χ_e et sur l'état T . Toutefois, on doit démontrer que le système est bien posé.

2.4 Existence et unicité de la solution

Prouver que le modèle (2.4) est bien posé revient à démontrer que les conditions de Hadamard [53] suivantes sont vérifiées :

- a) Il existe au moins une solution ;
- b) Il existe au plus une solution ;
- c) La dépendance de la solution par rapport aux données est continue

La première condition assure la cohérence du modèle mathématique, alors que l'unicité et la stabilité augmentent les chances de trouver des approximations numériques de bonne précision. En effet, la stabilité est essentielle dans la physique mathématique car les modèles et les données sont des approximations de la réalité. Ainsi, si le modèle est stable, "une petite erreur" qui tend vers zéro sur l'approximation de la donnée induit forcément sur l'approximation de la solution "une petite erreur" qui tend aussi vers zéro. Toutefois, cette dernière condition n'est que nécessaire et non pas suffisante.

Théorème 2.4.1. : *Pour tout χ_e appartenant à X_e , τ dans \mathbb{R}_+^* et S dans $L^2(0, t_f; L^2(\Omega))$, le système (2.16) admet une solution "faible" unique dans l'espace $L^2(0, t_f; H_{0,\{1\}}^1(\Omega))$ et cette solution est stable par rapport aux entrées (χ_e, τ, S) .*

Démonstration. Afin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.16), on fait appel au théorème de Lax-Milgram étendu aux équations évoluant dans le temps [108]. D'après ce théorème, étant donné que $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, que la forme b est bilinéaire symétrique et que L est une forme linéaire, démontrer que le système (2.16) est bien posé dans le sens de Hadamard revient à prouver que b est continue coercive [2], [108] et que L est continue.

Continuité de b :

On doit démontrer que : $\exists M > 0 : |b(T, v)| \leq M \|T\|_1 \|v\|_1$

On a :

$$\begin{aligned} |b(T(t), v)| &\leq \left| \int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dv}{dz} dz \right| + \frac{1}{\tau} \left| \int_0^1 T(z, t) v(z) dz \right| \\ &\leq \|\chi_e(z, t)\|_\infty \|\nabla T\|_0 \|v(z)\|_0 + \frac{1}{\tau} \|T\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \left(\|\chi_e(z, t)\|_\infty + \frac{1}{\tau} \right) \|v(z)\|_1 \|T\|_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Le passage à la deuxième inégalité vient de l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. alors que la troisième inégalité est due à la définition de la norme $\|\cdot\|_1$:

$$\forall f \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega) : \|f\|_1 = \|f\|_0 + \|\nabla f\|_0.$$

Ainsi d'après (2.17) si : $\chi_e(z, t) \in X_e$ et $\frac{1}{\tau} \in \mathbb{R}_+^*$ alors :

$$|b(T(t), v)| \leq \left(c_2 + \frac{1}{\tau} \right) \|v(z)\|_1 \|T\|_1$$

et par conséquent $b(T, v)$ est continue.

2.4.0.1 Coercivité de b :

Il s'agit de prouver que : $\exists \alpha > 0 : b(v, v) \geq \alpha \|v\|_1^2, \forall v \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$.

On sait que : $\forall v \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega), \forall \chi_e \in X_e$:

$$\begin{aligned} b(v, v) &\geq c_1 \int_0^1 \nabla v^2 dz + \frac{1}{\tau} \int_0^1 v^2 dz \\ &\geq c_1 \int_0^1 \nabla v^2 dz \quad (\text{Pour } \tau \in \mathbb{R}_+^*) \end{aligned}$$

En utilisant :

1- l'inégalité de Poincaré rappelée ci-dessous :

Pour tout domaine Ω borné dans au moins une direction et $\forall u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\|u\|_0 \leq C(\Omega) |u|_1,$$

où : $C(\Omega)$ est la constante de Poincaré et $| \cdot |_1$ est la semi-norme définie sur $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$,

2- et le principe d'équivalence entre la norme $\|\cdot\|_1$ et la semi-norme $| \cdot |_1$:

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : |u|_1 \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{(1 + C(\Omega))} |u|_1$$

il vient que :

$$b(v, v) \geq \frac{c_1}{\sqrt{(1 + C(\Omega))}} \|v\|_1$$

Par conséquent : b est $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ -coercive.

Continuité de L :

On doit démontrer que : $\exists M > 0 : |L(v; t)| \leq M \|v\|_1$. On a :

$$\begin{aligned} |L(v; t)| &= \left| \int_0^1 S(z, t) v(z) dz \right| \leq \|S(z, t)\|_2 \|v\|_0 \\ &\leq \|S(z, t)\|_2 \|v\|_1 \end{aligned}$$

Donc si $S(z, t) \in L^2(0, t_f, L^2(\Omega))$ alors L est continue. □

Conclusion :

Si $\chi_e(z, t) \in X_e$, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ et $S(z, t) \in L^2(0, t_f, L^2(\Omega))$ alors la solution du problème (2.16) existe et elle est unique dans $L^2(0, t_f; H_{0, \{1\}}^1(\Omega))$. Le théorème de Lax-Milgram assure également la stabilité de cette solution par rapport aux données (χ_e, τ, S) .

Toutefois, la solution de (2.16) n'est pas la solution classique du système (2.4) ; pour y revenir, la solution doit appartenir à $C^1(0, t_f; C^2(\bar{\Omega}))$. Ceci implique que :

$$\begin{cases} \chi_e \in C^0(0, t_f; C^0(\Omega)) \cap X_e, \\ S \in C^0(0, t_f; C^1(\Omega)) \cap L^2(0, t_f; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (2.18)$$

Une fois que les conditions (2.18) pour lesquelles le système (2.4) est bien posé sont trouvées et vu qu'on ne connaît pas sa solution analytique, on peut proposer des stratégies d'approximation de cette solution. Plusieurs méthodes existent ; sous la formulation de Galerkin dont nous présentons d'abord les principes, nous allons proposer deux méthodes.

2.5 Formulation de Galerkin

La formulation de Galerkin fait partie des méthodes des résidus pondérés et elle est à la base des méthodes des éléments finis et des méthodes spectrales. Contrairement à la méthode des différences finies qui découle directement de la formulation différentielle appelée aussi *la formulation forte*, la méthode de Galerkin se base sur la *formulation faible* [108], [40], [18]. Ceci donne plus de flexibilité concernant la régularité de la solution approximée et sa précision. Dans cette méthode, on ne procède qu'à la discrétisation spatiale de l'EDP, ce qui conduit à un système d'équations différentielles ordinaires continues dans le temps. Dans ce qui suit, on présente l'idée de base de cette formulation à travers l'équation de la température des électrons dans le plasma (2.4) et sa formulation variationnelle (2.16).

2.5.1 Principes de la formulation de Galerkin

Basée sur le principe des séries de Fourier [117], la fonction spatio-temporelle $T(z, t)$ peut être engendrée par un ensemble de fonctions de base spatiales $\{w_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ et s'écrit :

$$T(z, t) = \sum_{i=0}^{i=\infty} x_i(t) w_i(z), \quad (2.19)$$

où les $\{x_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ forment les coefficients de pondération temporels et $\{w_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ engendre l'espace $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$.

La formulation de Galerkin consiste à approximer le système (2.16) par le problème suivant :

$$\text{trouver } T_h \in V_h : \begin{cases} (\dot{T}_h(t), v_h) + b(T_h(t), v_h) = L(v_h; t); \quad \forall v_h \in V_h \\ T_h(0) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

où V_h est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ et T_h est donnée par :

$$T_h(z, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) w_i(z), \quad (2.21)$$

avec $\{w_i(z)\}_{i=0}^N$ formant cette fois-ci la base de l'espace d'approximation V_h de dimension N finie ($N < \infty$).

L'avantage majeur de la formulation de Galerkin est la liberté du choix des fonctions de base $\{w_i(z)\}_{i=0}^N$ à l'inverse de certaines formulations comme la méthode de collocation. Aussi, elle exige que les fonctions de test v et leurs approximées v_h appartiennent à l'espace approximé V_h . Par conséquent, le résidu $R(z, t)$ dû à la troncature est orthogonal aux fonctions de base $w_i(z)$, $i = 0, \dots, N$ [42].

$$\begin{cases} R(z, t) = \text{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T_n}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} T_n - \dot{T}_n, & T_n = \sum_{i=N+1}^{\infty} x_i(t) w_i(z), \\ (R, w_i) = 0, & i = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (2.22)$$

Ainsi, v_h s'écrit :

$$v_h(z) = \sum_{i=0}^{i=N} \kappa_i w_i(z). \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.21) et (2.23) dans (2.20), on obtient l'expression suivante.

Pour $i = 0, \dots, N$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i=N} \left(\int_0^1 w_i(z) w_j(z) dz \right) \dot{x}_i(t) &= - \sum_{i=0}^{i=N} \left(\int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{dw_i}{dz} \frac{dw_j}{dz} dz \right) x_i(t) \\ &\quad - \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{i=N} \left(\int_0^1 w_i(z) w_j(z) dz \right) x_i(t) + \int_0^1 S(z, t) w_j(z) dz \end{aligned} \quad (2.24)$$

Introduisons le vecteur d'état $X(t) = [x_0(t), x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$ ($X \in \mathbb{R}^{N+1}$), la matrice de raideur $M \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$, la matrice de dynamique $A(t) \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ et le vecteur d'entrée $B(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ donnés par :

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^1 w_0^2(z) dz & \dots & \int_0^1 w_0(z) w_N(z) dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 w_0(z) w_n(z) dz & \dots & \int_0^1 w_N^2(z) dz \end{pmatrix},$$

$$A(t) = - \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^1 \chi_e(z, t) w_0^2(z) dz & \dots & \int_0^1 \chi_e(z, t) w_0'(z) w_N'(z) dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \chi_e(z, t) w_0'(z) w_N'(z) dz & \dots & \int_0^1 \chi_e(z, t) w_N^2(z) dz \end{pmatrix}}_{A_1(t)} - \frac{1}{\tau} * M$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \int_0^1 S(z, t) w_0(z) dz \\ \vdots \\ \int_0^1 S(z, t) w_N(z) dz \end{pmatrix},$$

où le symbole $(\cdot)'$ désigne l'opérateur dérivée par rapport à la variable spatiale z . L'équation (2.24) peut se mettre alors sous la forme d'un système d'état linéaire et continu :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = M^{-1} \left(A_1(t) - \frac{1}{\tau} M \right) X(t) + M^{-1} B(t), \\ X(0) = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Étant donné que la forme bilinéaire b est coercive, la matrice de dynamique $A(t)$ est symétrique, définie et positive. La structure des matrices $A(t)$, M et du vecteur B et la précision de T_h , dépendent du choix des fonctions de base $\{w_i(z)\}_{i=0}^N$ et donc de l'espace d'approximation V_h .

Sous la formulation de Galerkin, plusieurs méthodes existent pour le choix des fonctions w_i ; deux d'entre-elles qui font partie des techniques les plus largement utilisées seront présentées dans les sous-sections suivantes, il s'agit de la méthode spectrale et la méthode des éléments finis. Dans ce qui suit, l'erreur d'approximation sous la formulation de Galerkin sera développée.

2.5.2 Estimation de l'erreur d'approximation de la formulation de Galerkin

Dans le lemme ci-dessous, un résultat concernant l'estimation de la norme de l'erreur d'approximation $\|T - T_h\|$ est présenté.

Lemme 1. [42] Si T est la solution du problème (2.16) et T_h est la solution de (2.20), alors :

$$\|T - T_h\|_{H^1_{0,\{1\}}(\Omega)} \leq c_3 \min_{w_h \in V_h} \|T - w_h\|_{H^1_{0,\{1\}}(\Omega)},$$

$$\text{avec : } c_3 = \frac{c_2 + \frac{1}{\tau} C^2}{c_1}, \quad C \text{ la constante de Poincaré, } c_1 = \inf_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0, t_f]}} \chi_e(x, t) \text{ et } c_2 = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ t \in [0, t_f]}} \chi_e(x, t).$$

(C , c_1 et c_2 sont les constantes définies dans la section 2.4).

Ceci montre que la distance entre T et T_h est "contrôlée" par la distance entre T et l'espace d'approximation V_h , et dépend des coefficients χ_e et τ (plus particulièrement de leurs bornes supérieures et inférieures). La preuve de ce lemme découle du lemme de Céa [2].

On démontre aussi dans [40], [108], [2] que la solution approximée T_h est bornée dans $L^\infty(0, T; H^1_{0,\{1\}}(\Omega))$ et ainsi dans $L^2(0, T; H^1_{0,\{1\}}(\Omega))$, alors que \dot{T}_h est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

En utilisant le principe de compacité [108], on peut démontrer que la solution approximée T_h converge faiblement vers la solution faible T dans $L^2(0, T; H^1_{0,\{1\}}(\Omega))$ et \dot{T}_h tend vers \dot{T} dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Dans ce travail, on se limite à ces résultats, le fondement théorique de la méthode de Galerkin est largement détaillé dans les livres traitant de l'approximation des EDPs, (voir [121], [42], [40], [102],...). Toutefois, on note que, suivant la régularité des données χ_e et S , on peut démontrer la convergence de la solution approximée vers la solution réelle dans $H^1(0, T; H^1_{0,\{1\}}(\Omega))$ pour toute méthode de Galerkin.

Dès que la convergence sous la formulation de Galerkin de l'erreur d'approximation vers zéro est établie, des techniques d'approximation peuvent être proposées.

2.6 Méthode de Galerkin Modale Continue (MGMC)

Dans cette méthode, les fonctions de base $\{w_i\}_{i=0}^N$ sont des fonctions de formes globales et orthogonales sur tout le domaine Ω vérifiant les conditions aux limites données dans (2.4). Ainsi on ne procède pas à la discrétisation spatiale de l'EDP mais on fixe la dimension N de l'espace V_h . Ceci revient à décomposer la solution en modes propres classés dans le sens décroissant et à choisir les N premiers modes les plus importants et les plus représentatifs des propriétés de la solution. Par conséquent, cette décomposition modale aboutit à un modèle réduit de dimension finie.

Les EDPs paraboliques présentent une caractéristique majeure qui est la différence importante entre les modes rapides (transitoires) et ceux statiques (lents), ce qui rend la méthode spectrale bien appropriée à la discrétisation de ce type d'EDPs. Une large collection de travaux appliquant cette méthode est citée dans [74].

Afin d'obtenir un modèle réduit et précis, les fonctions de base globales doivent être bien choisies suivant le domaine et les conditions aux limites. Les plus généralement utilisées sont les fonctions propres de l'opérateur spatial, les séries de Fourier et les polynômes orthogonaux. Si l'opérateur de l'EDP est auto-adjoint il est possible de calculer ses fonctions propres sinon il est presque impossible de le faire. Les deux dernières techniques nécessitent aussi leurs adaptation aux conditions aux limites de l'EDP, ce qui la transforme en un système algèbro-différentiel plus difficile à identifier qu'un système d'EDOs [74].

Deux techniques seront traitées dans cette section. En premier, on présente la méthode de *Faedo-Galerkin* qui consiste à choisir comme fonctions de base, la base orthonormale de l'espace $V_h \in H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$.

Comme les paramètres χ_e et S sont inconnus cette méthode est utilisée pour résoudre simultanément le problème d'approximation de l'EDP (2.4) et le problème d'interpolation ou de reconstruction des profils expérimentaux. En général, ces profils ne vérifient pas les conditions aux limites et par conséquent, une telle base de projection n'est pas adaptée à ce problème. C'est pourquoi on passe à une seconde approche qui consiste à utiliser *la méthode de la décomposition orthogonale propre (POD-Galerkin)* où les fonctions de base sont calculées en minimisant la distance entre les mesures (le profil expérimental) et le sous-espace engendré par ces fonctions de base.

2.6.1 La méthode de Faedo-Galerkin

Cette méthode peut être résumée ainsi (voir [108], [40]) :

- 1) On choisit une base $\{w_i\}_{i=0}^\infty$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$ et orthogonale dans $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$ respectant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} (w_i(z), w_j(z)) = \delta_{ij}, \\ w'_i(0) = w_i(1) = 0, \quad \text{pour } i = 0 \dots, N, \end{cases}$$

où δ_{ij} est la fonction de *Kronecker* (vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon).

- 2) Par troncature, on fixe N la dimension de la base $\{w_i\}_{i=0}^N$. L'espace d'approximation de dimension finie V_N est donné par :

$$\begin{cases} V_N = \text{span}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} \\ V_N \subset V_{N+1} \text{ et } \overline{V_N} = H_{0,\{1\}}^1(\Omega). \end{cases}$$

Théorème 2.6.1. [108] *Si Ω est un domaine Lipschitz et borné, il existe dans $L^2(\Omega)$ une base orthonormale $\{w_i(z)\}_{i=0}^\infty$ issue des fonctions propres de l'opérateur de Laplace muni des mêmes conditions aux limites que l'EDP (2.4).*

Ce théorème propose une technique pour choisir la base de projection. Considérant l'EDP (2.4) munie de ses conditions aux limites mixtes, la base de projection est définie par :

$$w_i(z) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2i+1)z\right), \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.26)$$

Ainsi, dans le système (2.25) la matrice M devient la matrice unitaire I_{N+1} , et le système

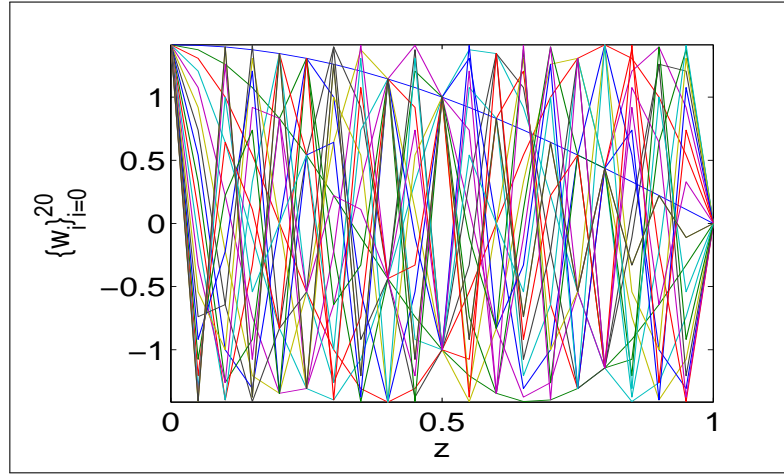


FIGURE 2.1 – Les 20 premières fonctions de base w_i de la MGMC

d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = -A(t)X(t) + B(t), \\ X(0) = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

où la matrice de dynamique $A(t) := A_1(t) + \frac{1}{\tau} I_{N+1}$, et le vecteur d'état $X(t)$ représente les $N + 1$ premiers modes de la température T .

Les fonctions $\{w_i\}_{i=0}^N$ forment une base orthonormale de $H_{0,\{1\}}^1$ et peuvent être considérées comme des *fonctions de Fourier modifiées* [62]. Pour les EDPs périodiques, l'approximation par des séries de Fourier assure une convergence exponentielle de l'erreur d'approximation et une décroissance exponentielle des coefficients de la solution approximée en fonction de la dimension de la base [22]. Ceci permet d'approximer la solution avec une bonne précision même en utilisant un modèle d'ordre réduit.

Pour les EDPs apériodiques, comme ce qui est notre cas, les séries de Fourier ne vérifient pas les conditions aux limites et on aboutit, après projection, à un système algébro-différentiel ; c'est pourquoi on utilise des séries de Fourier modifiées mais la projection de la solution sur ces séries conduit à une erreur d'approximation d'ordre $\mathcal{O}(N^{-2})$. Si de plus, l'opérateur de l'EDP (2.4) est spatio-temporel, l'erreur d'approximation est d'ordre $\mathcal{O}(N^{-1})$.

Indépendamment du choix des fonctions de base, une estimation de l'erreur d'approximation en utilisant la MGMC est donnée par [108], [102] :

$$\|T(t) - T_h(t)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \approx \mathcal{O}(N^{1-s}),$$

en supposant que

$$T(0) \in H^{s-1}(\Omega), \quad T \in L^2(0,T;H^s(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{s-1}(\Omega)).$$

Exemple de simulation

Étant donné que χ_e et S sont inconnus, dans cette partie, on propose d'étudier l'erreur de projection par la méthode de Faedo-Galerkin en reconstruisant le profil expérimental donné dans la fig. 2.2 (a). L'erreur relative globale est définie par :

$$\Delta_N = \left[\frac{\sum_{j=0}^{Nt} \sum_{i=0}^N |T_{exp}(z_i, t_j) - T_{MGMC}(z_i, t_j)|^2}{\sum_{j=0}^{Nt} \sum_{i=0}^N |T_{exp}(z_i, t_j)|^2} \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

où T_{exp} est le profil expérimental et T_{MGMC} est le profil reconstruit en utilisant la MGMC, donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} T_{MGMC}(z, t) = \sum_{i=0}^N x_i(t) w_i(z), \\ x_i(t) = \int_0^1 T_{exp}(z, t) w_i(z), \quad \text{pour } i = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (2.29)$$

Dans la fig. 2.2 (b), l'évolution de l'erreur Δ_N en fonction de la dimension de la base de projection N est présentée. On voit que l'erreur d'interpolation décroît rapidement en fonction

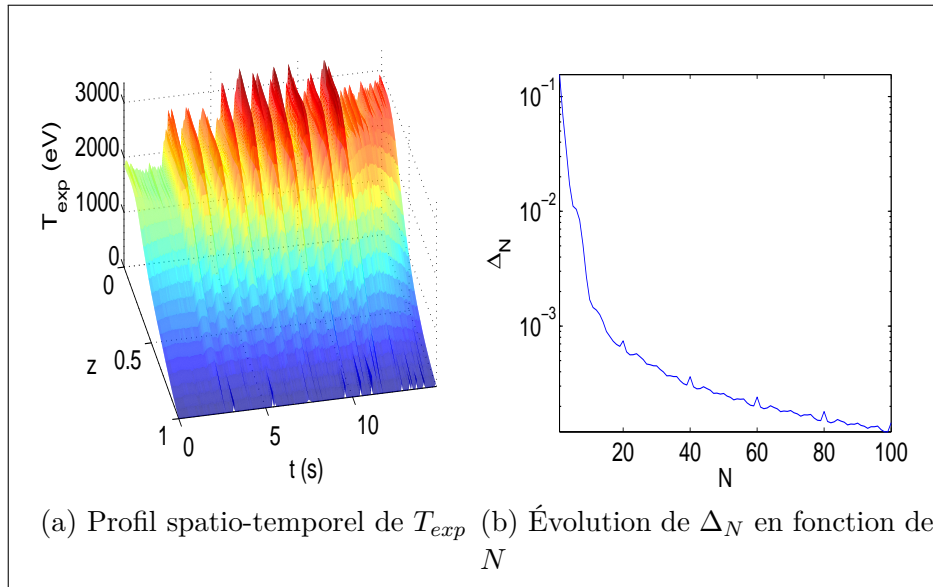


FIGURE 2.2 – Reconstruction de T_{exp} en utilisant la MGMC

de N et atteint le seuil de 10^{-4} autour de $N = 100$; à partir de cette valeur, augmenter encore N ne réduit pas sensiblement Δ mais augmente le temps de calcul. Ce comportement est propre aux séries de Fourier appliquées aux systèmes apériodiques [50], [102].

2.6.2 La méthode de décomposition orthogonale propre (POD-Galerkin)

Connue aussi sous le nom de la méthode de *Karhunen-Loève* [66] ou encore l'*analyse des composantes principales*, la POD est une méthode statistique permettant l'extraction des fonctions propres empiriques représentant le caractère dominant des mesures (données expérimentales) [119], [15]. Elle est aujourd'hui présente dans des domaines aussi variés que les Statistiques, le Traitement du signal, la Compression des données, le Génie chimique et l'Océanographie. Les physiciens lui attribuent le nom de la méthode des Coordonnées Collectives.

Supposons que T_h solution de (2.20) appartient à l'espace de Sobolev $H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$. On souhaite définir une base de cet espace adaptée au profil de T_h , ce qui revient à dire qu'on cherche à maximiser la moyenne de la projection de T_h sur les fonctions de cette base w_i . Ainsi, ces fonctions de base $\{w_i\}_{i=0}^N$ sont orthogonales [98] et minimisent l'erreur quadratique moyenne de projection suivante :

$$\langle (T(z, \cdot) - T_h(z, \cdot))^2 \rangle = 0, \quad \forall t \in [0, t_f]. \quad (2.30)$$

La solution du problème d'optimisation (2.30) se traduit par la résolution du problème de vecteurs et de valeurs propres suivant :

$$\int_0^1 R(z, \zeta) w_i(\zeta) d\zeta = \lambda_i w_i(z),$$

où λ_i est la valeur propre correspondant au vecteur propre w_i et $R(z, \zeta)$ est le tenseur d'auto-corrélation spatiale, auto-adjoint et défini semi-positif. Pour plus de détails, voir par exemple [57] et [15].

Une technique pratique pour obtenir la base POD est la méthode des clichés ou des échantillons ("*strokes*" ou "*snapshots*" méthode) introduite par Lawrence Sirovich en 1987 [119] pour réduire les calculs liés à la POD standard. En effet, dans cette méthode, au lieu de résoudre le système sur une grille spatiale, on le résout sur l'ensemble des échantillons utilisés pour construire le tenseur d'auto-corrélation temporelle. Dans la pratique, ce tenseur est calculé comme une moyenne finie de k_f échantillons.

La projection de l'EDP (2.4) en utilisant la formulation de Galerkin sur cette base permet de transformer l'EDP en un système d'EDO d'ordre réduit.

Dans la technique de Sirovich, on calcule la forme discrète du tenseur d'auto-corrélation temporel \mathbf{C} dont les éléments sont notés C_{mn} , en utilisant l'expression suivante :

$$C_{mn} := \frac{1}{k_f} \int_0^1 T(z, t_m) T(z, t_n) dz, \quad \text{pour } m, n = 1, \dots, k_f, \quad (2.31)$$

où k_f est la dimension temporelle des mesures (le nombre d'échantillons).

Les vecteurs et les valeurs propres de \mathbf{C} sont la solution de l'équation suivante :

$$\mathbf{C} \mathbf{v}^i = \lambda_i \mathbf{v}^i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (2.32)$$

avec $\mathbf{v}^i = [v_1^i, \dots, v_{k_f}^i]$ et i désignant le i -ème mode.

Les modes de la POD sont donnés par :

$$w_i(z) = \frac{1}{\lambda_i k_f} \sum_{j=1}^{k_f} v_j^i T(z, t_j). \quad (2.33)$$

Cette méthode des *Snapshots* a été largement utilisée dans les écoulements in-homogènes (pour plus de références voir [98]). Les fonctions de base de la POD vérifient les conditions aux limites du signal (profil mesuré de la température par exemple). Aussi, si ces fonctions propres présentent une caractéristique donnée, on en déduit que le signal lui-même possède cette propriété et inversement [98].

S'agissant du nombre d'échantillons k_f , on le choisit généralement $k_f \gg N$ où N est le nombre de modes propres [119]. Pour fixer ce nombre de modes soit on considère les N premières fonctions propres non nulles (c'est la dimension du plus petit sous-espace linéaire contenant la mesure) ou bien, suivant la proposition de Sirovich, on ne retient que les modes dont la somme des énergies représente 90% de l'énergie totale du signal et que chacun des modes négligés ne représente pas plus que 1% du mode principal [119], [98]. La dimension linéaire est souvent supérieure à la dimension de Sirovich.

Les fonctions de base $\{w_i\}_{i=0}^N$ sont orthonormales dans $L^2(\Omega)$ et par conséquent les coefficients temporels $\{x_i(t)\}_{i=0}^N$ définis dans (2.21) sont calculés par la projection orthogonale du profil de $T(z, t)$ sur l'espace engendré par les $\{w_i\}_{i=0}^N$:

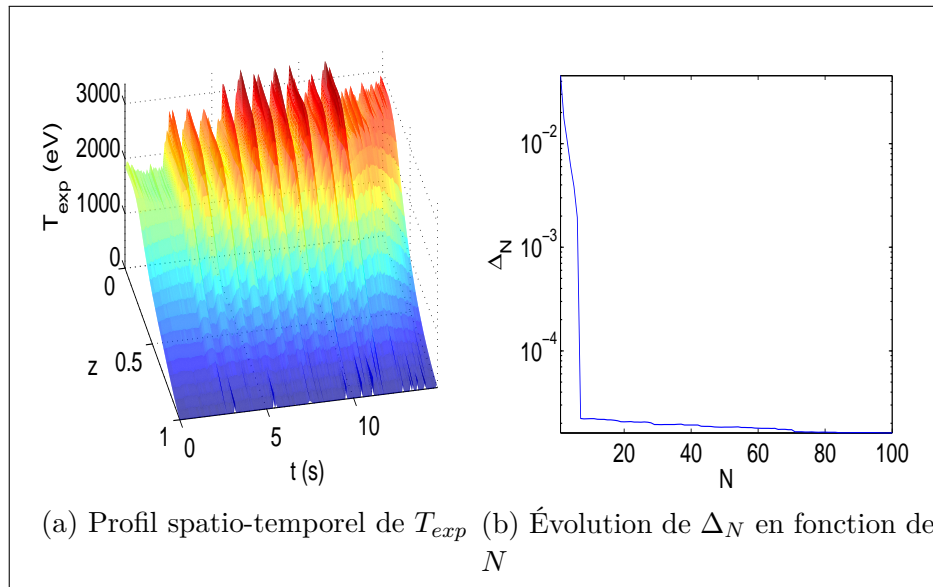
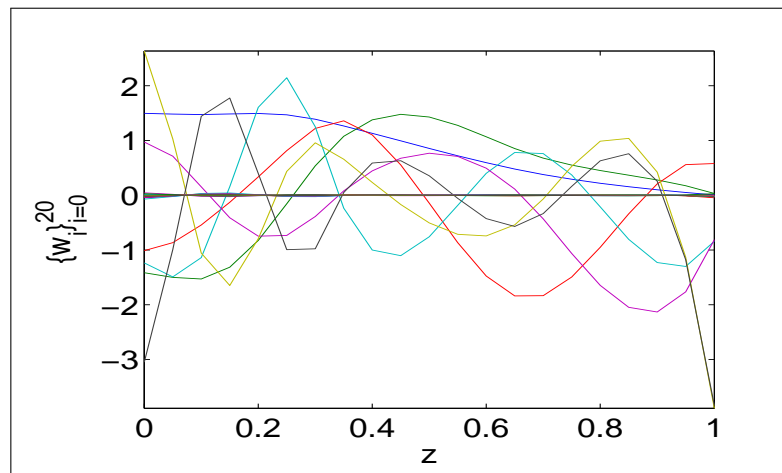
$$x_i(t) = \int_0^1 T(z, t) w_i(z) dz. \quad (2.34)$$

Pour une EDP à paramètres connus, les fonctions w_i définies dans (2.34) peuvent être utilisées dans la formulation de Galerkin pour former un système d'état dont la forme est similaire à celle donnée dans (2.27). Ainsi, on peut même comparer les coefficients temporels $\{x_i(t)\}_{i=0}^N$ issus de (2.33) et ceux obtenus à partir de la résolution du système d'EDOs (2.27), ce qui peut renseigner sur la précision de la méthode et sur la précision des paramètres utilisés.

Exemple de simulation

Dans la figure 2.3, on trace la variation de Δ_N défini dans (2.28), mais en utilisant cette fois-ci la POD pour calculer le profil reconstruit. D'après les fig. 2.2 et fig. 2.3, en utilisant les bases empiriques générées par la POD, pour N fixé, la norme de l'erreur relative de reconstruction est diminuée d'un facteur de 10 par rapport à celle obtenue en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Les fonctions de base empiriques de ce profil T_{exp} sont données dans la fig. 2.4.

FIGURE 2.3 – Reconstruction de T_{exp} en utilisant la PODFIGURE 2.4 – Les 20 premières fonctions de base empiriques de T_{exp} en utilisant la POD

2.7 B-Splines-Galerkin FEM (BSG-FEM)

La méthode des éléments finis (FEM) est une méthode de construction de l'espace d'approximation V_h basée sur l'interpolation polynomiale par morceaux. Ainsi, les fonctions de base sont locales. En premier, on choisit un maillage du domaine $\Omega =]0, 1[$, en lui définissant une subdivision :

$$0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N = 1.$$

Les z_i sont appelés des *nœuds*. Si ces nœuds sont équidistants : $z_{i+1} - z_i = h$ pour $i = 0, \dots, N$, le maillage est dit uniforme. Sur ce maillage, on définit l'espace d'approximation V_h engendré

par les fonctions de base locales $\{w_i\}_{i=0}^N$:

$$V_h = \{v_h \in C^k(0,1) : v_h \text{ est de classe } k \text{ sur chaque morceau } [z_j, z_{j+1}] \text{ et } v_h'(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Les polynômes continus par morceau (exemple : les polynômes de Lagrange, les polynômes de Hermite,...) [17], les ondelettes [81] et les splines [113], [100], [56] sont en général les techniques les plus utilisées pour générer les fonctions de base locales.

La méthode des FEM est connue par sa capacité de traiter les systèmes (EDPs) à géométrie complexe grâce à l'application de fonctions de base locales, mais ce caractère local aboutit généralement à des systèmes d'ODEs de grande dimension. Si pour un problème de contrôle, la grande dimension du système peut être un inconvénient dans l'analyse de la stabilité et la synthèse du contrôleur, dans l'identification/estimation des systèmes distribués la dimension peut jouer en notre faveur. Plus la dimension de la variable d'état du système est grande, plus l'approximation des paramètres de ce système est de meilleure précision. Dans le chapitre suivant, ce point de vue sera détaillé.

Il est à noter que si on choisit les fonctions de Dirac comme fonctions de base, la méthode des lignes (MOL) et la méthode des différences finies (FDM) peuvent être considérées comme des cas particuliers de l'approche de la méthode des FEM. Cependant, des différences majeures entre FDM et FEM existent, citons entre autres que :

- Dans la méthode des FDM, c'est l'EDP qu'on approxime alors que dans la méthode des FEM on approxime la solution de l'EDP.
- La méthode des FEM peut facilement manipuler les systèmes à géométrie complexe contrairement à la méthode des FDM.
- Il est vrai que pour une EDP à domaine régulier, la méthode des FDM est plus facile à développer et implémenter que la méthode des FEM
- Les FEM fournissent des solutions approximées de meilleure précision que les FDM qui se basent sur l'approximation de la solution uniquement aux nœuds du domaine et non pas entre les nœuds.

2.7.1 Introduction aux fonctions B-splines cubiques standard

Pour l'étude de l'EDP de transport de la température des électrons dans le tokamak, on a choisi d'exploiter comme fonctions de base les B-splines cubiques. Le mot "spline" désigne une tige flexible qui sert à tracer des courbes lisses passant par les points données. En 1946, Schoenberg a établi les fondements de la théorie des fonctions splines [112]. Des années plus tard, De Boor a présenté les fonctions B-splines très utiles pour faire de l'interpolation. Grâce à leur support compact et à leur régularité, les fonctions B-splines jouent un rôle important en approximation et interpolation des fonctions.

Une spline polynomiale de degré m peut être définie comme une fonction B de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- B est de classe $m - 1$ ($B \in C^{m-1}$),
- pour tout $i = 0, \dots, N$, il existe un polynôme B_i de degré inférieur ou égal à m qui coïncide avec B sur $[z_i, z_{i+1}]$,

et dans l'espace des fonctions splines existent les fonctions B-splines. Ces splines conservent les propriétés des splines de Bézier [71] (non-négativité, maximum unique, symétrie dans certains cas, partition de l'unité, définition récursive, régularité) et ajoutent une propriété supplémentaire majeure qui est le support local, ce qui lui donne plus de flexibilité par rapport à une spline ordinaire [71]. Le support local implique que chaque fonction est différente de 0 sur une portion de la subdivision de Ω et non sur le domaine en entier. Ces fonctions B -splines forment aussi une base pour l'espace vectoriel des fonctions polynomiales par morceau d'une classe donnée [56].

On note ces fonctions par : $(N_j^m)_{j \in \mathbb{Z}}$. La définition la plus utile pour une implémentation de ces fonctions est la formule de récurrence de Cox et Boor [31]. En premier, on fixe une subdivision $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ du domaine Ω . La $i^{\text{ème}}$ fonction de base B-splines de degré m en dimension 1D est donnée par :

$$N_i^m(z) = \lambda_{i,m}(z) N_i^{m-1} + (1 - \lambda_{i+1,m}) N_{i+1}^{m-1}(z), \quad (2.35)$$

où :

$$\lambda_{i,m}(z) = \frac{z - z_i}{z_{i+m} - z_i} \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ et pour tout } i \geq 1$$

La B-spline initiale de degré 0 est définie par :

$$N_i^0(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour } z \in [z_i, z_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

- la B-spline N_i^m est de degré m ,
- le support de N_i^m est l'intervalle $[z_i, z_{i+m+1}]$
- la B-spline N_i^m est positive sur l'intérieur de son support, nulle au bord,
- la base de B-splines de degré m est normalisée au sens de :

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} N_i^m(z) = 1, \quad \text{pour } z \in \Omega. \quad (2.36)$$

- Toute spline $f \in C^{m-1}(\Omega)$ se décompose sur la base de B-splines .i.e. il existe une suite de réels $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ linéairement indépendants tel que :

$$f(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i N_i^m(z), \quad (2.37)$$

- Si la base de B-splines de degré m est de dimension p , le nombre de nœuds dans la subdivision du domaine Ω est égal à $m + p + 1$.

La compacité des supports des fonctions B-splines conduit à des matrices en bandes très pratiques pour le calcul des systèmes d'équations résultant des problèmes d'interpolation et d'approximation.

Suivant la régularité imposée sur la solution, on fixe le degré des fonctions B-splines. En pratique, les B-splines cubiques sont largement utilisées vu qu'un nombre important des

phénomènes physiques font intervenir au plus le laplacien comme opérateur de dérivée, ainsi $m = 3$.

Pour une subdivision uniforme du domaine Ω , les B-splines sont dites *uniformes* et elles s'obtiennent par translation :

$$N_i^m(z) = N_0^m(z - z_i) \text{ pour tout } z \in \Omega \text{ et pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (2.38)$$

Lorsqu'on attribue aux nœuds des valeurs entières : $z_i = i$ pour $i \in \mathbb{Z}$, on parle de B-splines cardinales notées $(B_i^m)_{i \in \mathbb{Z}}$. La relation entre une B-spline uniforme de pas h et une B-spline cardinal est définie par :

$$N_i^m(z) = B_0^m\left(\frac{z - z_i}{h}\right), \text{ pour tout } z \in \Omega \text{ et pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

La fonction B-spline cubique standard à support $[0, 4]$

L'ordre de régularité maximal qu'on puisse imposer à la solution de notre EDP (2.4) est égale à 2; ainsi on utilise exclusivement les fonctions B-splines cubiques uniformes. Ces fonctions peuvent être définies à partir de la fonction B-spline cubique cardinal qu'on note $B_0^3(z)$ de support $[0, 4]$. Dans le tableau ci-dessous, on présente $B_0^3(z)$ et sa première dérivée $B_0^{3'}(z)$.

Si on définit sur le domaine Ω une subdivision de dimension $n + 1$, l'ensemble des fonctions

	$B_0^3(z)$	$B_0^{3'}(z)$
$0 \leq z < 1$	$z^3/6$	$z^2/2$
$1 \leq z < 2$	$(-3z^3 + 12z^2 - 12z + 4)/6$	$(-3z^2 + 8z - 4)/2$
$2 \leq z < 3$	$(3z^3 - 24z^2 + 60z - 44)/6$	$(3z^2 - 16z + 20)/2$
$3 \leq z < 4$	$(4 - z)^3/6$	$-(4 - z)^2/2$
$z < 0, z \geq 4$	0	0

TABLE 2.1 – La fonction B-spline cubique standard B_0^3 et sa première dérivée $B_0^{3'}(z)$

B-splines cubiques standard forme une base de dimension $n + 3$ donnée par :

$$\mathfrak{B} = \{B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_n, B_{n+1}\}. \quad (2.40)$$

Cette base engendre l'espace $\Pi_3(\Omega)$ des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ qui se réduisent à un polynôme d'ordre trois sur chaque intervalle $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$ [100] où pour $i = -1, \dots, n + 1$, chaque B_i est de support $[z_{i-2}, z_{i+2}[$ et se définit à partir de la B-spline cubique cardinal B_0^3 par :

$$B_i(z) = B_0^3\left(\frac{z - z_i - 2}{h}\right), \quad i = -1, \dots, n + 1.$$

2.7.2 Approximation de Galerkin par les B-splines cubiques

Soit $\Omega =]a, b[$ subdivisé en n nœuds réguliers de pas $h = (b - a)/n$, ($n > 0$). Les nœuds sont définis par : $z_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ avec $z_0 := a$ et $z_n := b$.

En utilisant la méthode des FEM avec les B-splines cubiques comme fonctions de base, la solution approximation de la forme variationnelle (2.20) est de classe \mathcal{H}^2 . Dans la formulation de Galerkin, les fonctions de base doivent satisfaire les conditions aux limites ; par conséquent, l'espace d'approximation V_h doit être un sous-espace de $H_{0,\{1\}}^2(\Omega)$. Il est défini par :

$$V_h = \left\{ v_h \in H_{0,\{1\}}^2(\Omega) : v_h|_{[z_i, z_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3(\Omega) \text{ et } v_h'(0) = v_h(1) = 0 \right\}, \quad (2.41)$$

où \mathbb{P}_3 est l'espace de polynômes de degré égal à 3 engendré par \mathfrak{B} la base des fonctions B-splines cubiques standard et uniformes définie dans (2.40) [100], [124]. Pour que cette base vérifie les conditions aux limites, certaines de ses fonctions doivent être modifiées, en particulier on définit la base $\{\omega_i(z)\}_{i=0}^n$:

$$\omega_i(z) = \begin{cases} B_0(z) & \text{pour } i = 0 \\ B_{-1}(z) + B_1(z) & \text{pour } i = 1 \\ B_i(z), & \text{pour } i = 2, \dots, n-2 \\ B_{n-1}(z) - B_{n+1}(z) & \text{pour } i = n-1 \\ B_n(z) - 4B_{n+1}(z) & \text{pour } i = n, \end{cases} \quad (2.42)$$

et cette base engendre l'espace V_h .

La solution variationnelle (2.21) s'écrit :

$$T_h(z, t) = \sum_{k=0}^n x_k(t) \omega_k(z) \quad (2.43)$$

Ainsi l'EDP est transformée en un système d'EDOs donné dans (2.25) où les matrices M et A définies dans (2.25) ont une structure creuse car :

$$\int_0^1 \omega_i(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad j \leq i-4, \text{ ou } j \geq 0.$$

2.7.3 Estimation de l'erreur d'approximation

Dans cette partie, on présente quelques résultats concernant l'estimation de l'erreur d'approximation en utilisant la méthode des B-splines G-FEM.

Soit l'opérateur d'interpolation \mathcal{I}_h :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_h : H_{0,\{1\}}^2(\Omega) &\longrightarrow V_h \\ v &\longmapsto \mathcal{I}_h v \end{aligned} \quad (2.44)$$

où l'espace V_h est défini dans (2.41). La fonction $\mathcal{I}_h v$ est l'unique spline cubique satisfaisant les conditions d'interpolation suivantes :

- i) $\mathcal{I}_h v(z_i) = v(z_i)$, pour $i = 0, \dots, N-1$.
- ii) $(\mathcal{I}_h v)'(z_N) = v'(z_N)$.

Les conditions de régularité (i.e. $\mathcal{I}_h v \in C^2(\Omega)$) sont préalablement vérifiées par le choix de l'ordre de la spline. La fonction d'approximation $\mathcal{I}_h v$ s'écrit :

$$\mathcal{I}_h v(z) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \omega_i(z), \quad \forall z \in \bar{\Omega}.$$

Les poids relatifs d'interpolation α_i , ($i = 0, \dots, N$) sont calculés à partir de la résolution du système linéaire ci-dessous issu des conditions d'interpolation i) et ii) :

$$\begin{pmatrix} B_0(z_0) & \cdots & \cdots & B_N(z_0) \\ B_0(z_1) & \cdots & \cdots & B_N(z_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_0(z_{N-1}) & \cdots & \cdots & B_N(z_{N-1}) \\ B'_0(z_N) & \cdots & \cdots & B'_N(z_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z_0) \\ u(z_1) \\ \vdots \\ u(z_{N-1}) \\ u'(z_N) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Les fonctions B-splines cubiques sont compactes et par conséquent, la matrice du système linéaire (2.45) est une matrice de dominance tridiagonale sauf la dernière ligne, de rang plein et inversible.

Proposition. [114] Soit $u \in H^2$ alors :

$$\begin{aligned} \|u'' - (\mathcal{I}_h u)''\|_0 &\leq \|u''\|_0 \\ \|u' - (\mathcal{I}_h u)'\|_0 &\leq \frac{2h}{\pi} \|u''\|_0 \\ \|u - (\mathcal{I}_h u)\|_0 &\leq \frac{2h^2}{\pi^2} \|u''\|_0 \end{aligned}$$

D'après [102], [40], une estimation de l'erreur d'approximation de l'EDP (2.4) peut être donnée par la proposition suivante :

Proposition. Pour tout $t \in [0, t_f]$, $S \in L^2(0, t_f; L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^1_{0,\{1\}}$, $\chi_e \in L^2(0, t_f; C^1(\Omega))$ la solution u de (2.16) et son approximation u_h définie dans (2.43) vérifient :

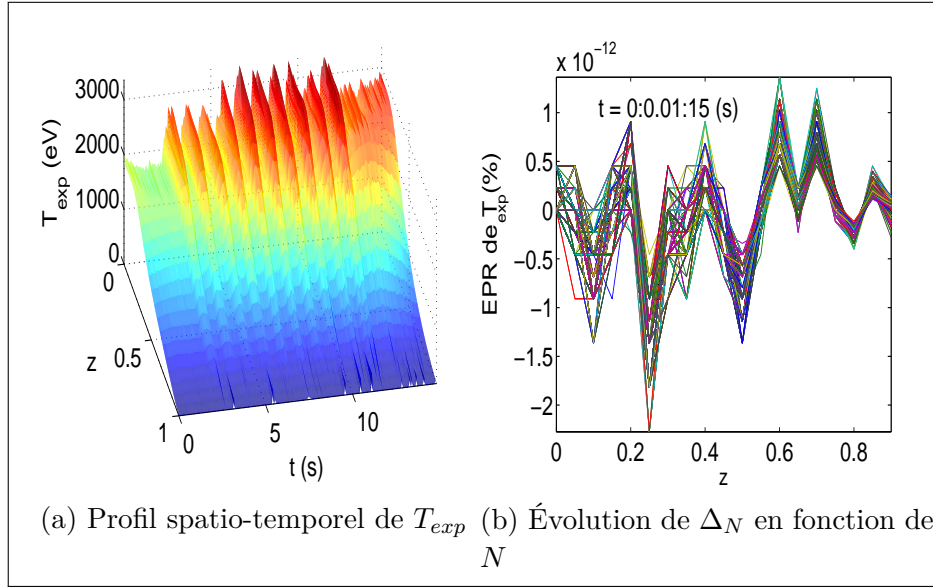
$$\begin{aligned} &\|u(t) - u_h(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau) - u_h(\tau)\|_1^2 d\tau \leq \\ &\|u(0) - u_h(0)\|_0^2 + C_{\alpha,\gamma} h^2 \left(\|u_h(0)\|_1^2 + \|u(0)\|_1^2 + \int_0^1 \|S(\tau)(0)\|_0^2 d\tau \right) \end{aligned}$$

où $C_{\alpha,\gamma} > 0$ est une constante indépendante du pas de discrétisation h , $\alpha := c_1$ et $\gamma := (c_2 + 1/\tau)$ sont respectivement la constante de coercivité et de continuité de la forme bilinéaire b (2.14) associées au problème.

Exemple de simulation

Dans fig. 2.6 on présente l'évolution de l'erreur d'interpolation relative (en %) en fonction du temps. On voit bien que pour ce problème de reconstruction d'un profil bien défini de T_{exp} , la méthode des B-splines FEM fournit une très bonne approximation avec une erreur de l'ordre de 10^{-12} . L'intervalle spatial Ω est subdivisé en utilisant un pas de discrétisation $h = 0.05$, ainsi $N = 21$. Le calcul de Δ_N donné dans (2.28) est de l'ordre de 10^{-16} .

Dans la fig. 2.6, on compare les trois méthodes que nous avons utilisées : la méthode de Faedo-Galerkin, la POD et la B-splines-Galerkin FEM, pour une base de dimension $N = 21$

FIGURE 2.5 – Reconstruction de T_{exp} en utilisant la BSG-FEM

(c'est le degré maximal qu'on peut fixer en utilisant les fonctions B-splines). On constate que la méthode des B-splines cubiques fournit une meilleure solution au problème d'interpolation et d'approximation de la solution de l'EDP (2.4). Ces erreurs relatives sont calculées en utilisant la formule standard :

$$EPR = \frac{T_{exp}(z, t) - T_{rec}(z, t)}{T_{exp}(z, t)}, \quad z \in [0, 0.8]$$

où T_{rec} est le profil reconstruit de T_{exp} en utilisant l'une des trois méthodes présentées.

2.8 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation et à la réduction de l'équation de la température des électrons dans les plasmas de tokamaks. Ce phénomène est décrit par une EDP parabolique linéaire non-homogène avec des conditions aux limites mixtes.

En premier, les conditions pour que le modèle soit bien posé et donc vérifie les propriétés de Hadamard ont été établies. Ces conditions définissent les espaces des paramètres χ_e , τ et du terme source S pour lesquels le problème direct admet une solution unique d'une classe donnée (solution faible ou forte).

Dans ce travail, nous nous intéressons à la solution faible du problème car elle impose moins de contraintes sur la régularité de cette solution et celles des paramètres χ_e , τ et S , ce qui est conforme à la nature physique du problème. Pour retrouver cette solution faible, nous avons utilisé la formulation variationnelle qui est l'outil le plus standard en analyse fonctionnelle.

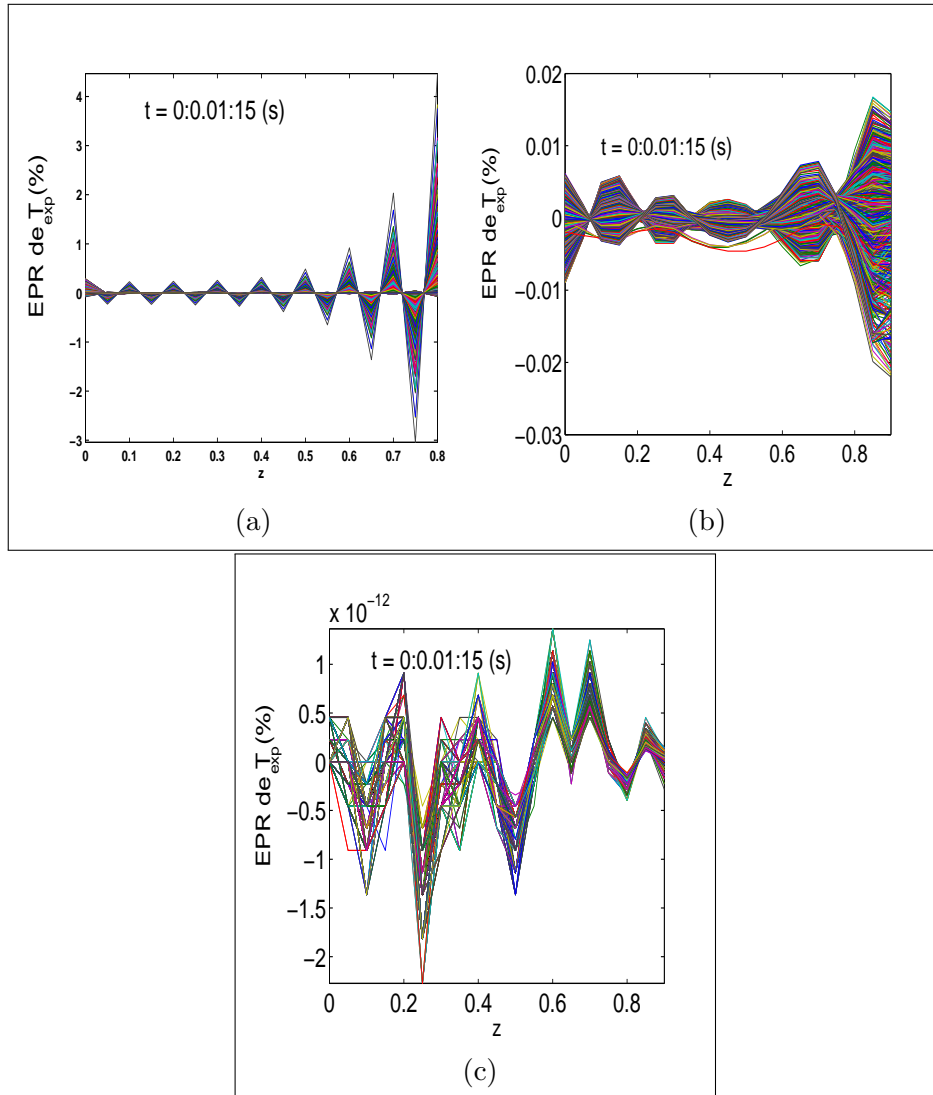


FIGURE 2.6 – Comparaison des erreurs d’approximation par la méthode de Faedo-Galerkin (a), la POD (b) et les B-splines FEM (c)

En se basant sur la formulation variationnelle du problème la méthode de Galerkin a été choisie pour développer des méthodes numériques d’approximation. Il s’agit des méthodes de Faedo-Galerkin, de la POD et de la BSG-FEM. Chaque technique a ses avantages et ses inconvénients. Pour la méthode de Faedo-Galerkin, en choisissant des fonctions de bases globales on réduit la dimension du système d’EDOs obtenu mais le choix de ces fonctions n’est pas facile car on manipule un opérateur spatio-temporel à coefficients inconnus.

Si la POD et la BSG-FEM fournissent de bonnes approximations, elles aboutissent aussi à des systèmes de dimensions importantes. Toutefois, comme l’objectif final de la discrétisation de l’EDP est l’identification des paramètres inconnus, la grande dimension du système obtenu n’est pas un problème majeur.

La comparaison en simulation entre ces trois méthodes montre que la BSG-FEM est la plus appropriée à notre problème.

Dans les chapitres qui suivent, l'estimation simultanée du coefficient de diffusion χ_e et du terme source S sera abordée aussi bien en dimension finie qu'en dimension infinie.

Estimation simultanée en dimension finie du coefficient de diffusion et du terme source

Sommaire

3.1	Formulation du problème inverse en dimension finie	37
3.1.1	Convergence du problème d'estimation en dimension finie	38
3.1.2	Construction du système d'estimation approximé	42
3.2	Identifiabilité du problème d'estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en dimension finie	45
3.2.1	Identifiabilité <i>a priori</i>	46
3.2.2	Identifiabilité <i>a posteriori</i>	48
3.3	Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs à entrées inconnues (MCR-EI)	52
3.3.1	Estimation simultanée de θ et $\beta(t)$	54
3.3.2	Méthode d'estimation simultanée de $\theta(t)$ et $\beta(t)$: MCR-EI adaptative	58
3.4	Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues (FKE-EI)	63
3.4.1	Filtre de Kalman à Entrées Inconnues (FK-EI)	64
3.4.2	Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI)	74
3.4.3	Influence du choix des matrices W , V et $P(0 0)$	81
3.5	Applications et comparaisons	81
3.5.1	Conditions de simulation	83
3.5.2	Calcul des erreurs d'estimation	83
3.5.3	Exemples de simulation	83
3.5.4	Résultats expérimentaux	89
3.6	Conclusion	94

Ce chapitre traite de l'estimation en dimension finie du coefficient de diffusion χ_e et du terme source S . Dans le chapitre précédent, des méthodes de discrétisation des EDPs ont été proposées. Ces méthodes s'adressent au problème direct et permettent, à partir des données (χ_e , τ , S , les conditions aux limites et la condition initiale), de transformer l'EDP en un système d'ODEs. Dans ce chapitre c'est le chemin inverse que nous devons parcourir. Cependant, ces méthodes de discrétisation continueront de jouer un rôle important dans la

résolution du problème inverse.

Etant donné les mesures de la température distribuées dans l'espace, l'objectif est d'identifier les paramètres inconnus. Plusieurs stratégies existent pour aborder ce problème. Ces stratégies peuvent être classifiées suivant la complexité du modèle et les techniques qu'elles font intervenir (voir [111] pour plus de détails). La méthode la plus *simple* est la méthode de "*krigeage*" connue aussi sous le nom de *régression du processus gaussien* [90], [103] et consiste à assimiler le phénomène physique à un processus gaussien. En conditionnant les mesures dans la phase d'apprentissage, une signature statistique en terme de variogramme (moyenne et variance) est calculée permettant ainsi de développer une fonction de prédiction au phénomène étudié. Le caractère local de cette méthode permet difficilement de prendre en compte la distribution spatiale et la dynamique du système. Aussi, comme le modèle de prédiction est un modèle non paramétrique, il est difficile de lui incorporer toute connaissance *a priori*. Ceci conduit généralement à des modèles simples mais peu précis. Une approche mieux adaptée où des informations *a priori* sur le système peuvent être prises en compte, est la méthode de l'*Entropie Bayésienne Maximale (BME)* [23], [36]. La première étape de cette méthode fait intervenir la représentation générale du système (lois physiques, fonction de densité de probabilité, ...) afin de dériver la fonction de distribution *a priori*. Dans une deuxième étape, des informations plus spécifiques sont considérées dans le processus dans le but d'améliorer la fonction de distribution. Toutefois, pour un système distribué, spatio-temporel, une *transformation spatiale* pour chaque point de discrétisation est nécessaire. Ainsi, pour chaque point du domaine de la solution, l'EDP est transformée en une EDO.

Une troisième approche, plus généralement utilisée, plus précise mais plus compliquée pour l'interpolation et l'estimation des systèmes distribués est basée sur les *équations différentielles partielles stochastiques (EDPS)*. Dans cette approche le caractère distribué des paramètres et de l'état est pris en considération, soit en utilisant des méthodes directes basées sur des techniques d'optimisation (chapitre suivant), soit en transformant l'EDPS en un système d'équations différentielles ou algébriques. La conversion de l'EDP en un système de dimension finie implique une hypothèse de bornitude sur ses variations spatio-temporelles pour que la description probabilistique puisse être valable. Dans le cas contraire, des techniques plus avancées comme les calculs d'Itô peuvent être utilisées. Un état de l'art sur les différentes techniques utilisées en dimension finie est présenté dans [74] (chapitre 2, section 2.3). Ces techniques interviennent dans divers domaines de la Science et sont dédiées principalement au problème d'estimation des paramètres distribués à entrées connues.

Concernant l'estimation des paramètres de transport dans les plasmas de tokamaks, peu de travaux sont consacrés à ce problème. Dans [128], l'estimation des paramètres du coefficient de diffusion a été considérée. Le transport est décrit par un système de deux EDPs paraboliques non-linéaires et couplées modélisant la température T et la densité du courant du plasma j . En utilisant une loi générale décrivant le coefficient de diffusion en fonction de ces deux grandeurs (T et j), le problème est d'identifier les paramètres de cette loi. La

minimisation de l'erreur en sortie en utilisant la méthode des moindres carrés a été proposée. La question majeure était d'étudier l'identifiabilité du problème et non pas sa résolution numérique. Dans [130], le coefficient de diffusion a été estimé en dimension finie à entrées connues, en utilisant la méthode des différences finies explicites pour discrétiser l'EDP de transport. Un filtre de Kalman étendu a été appliqué sur le système discret afin d'estimer le coefficient de diffusion supposé spatialement variable constant par morceaux. Dans [110], c'est le problème d'estimation des coefficients de convection et de diffusion à entrées connues qui a été abordé. En adoptant l'approche matricielle algébrique, la reconstruction des profils devient indépendante de toute connaissance *a priori* toutefois, elle reste sensible aux bruits de mesures et à l'inversion de l'opérateur matriciel.

Dans ce chapitre, la reconstruction de l'état (la température) et des paramètres (χ_e et S) est traitée en dimension finie (deuxième technique de la troisième approche). La conversion du problème d'optimisation de la dimension infinie vers la dimension finie est d'abord introduite en se basant sur les travaux de Banks ([12], [11], [7], [8], [9], [6]). Une fois le problème formulé en dimension finie, c'est à la question d'identifiabilité simultanée des paramètres et de l'entrée qu'il faut répondre, afin d'exploiter les méthodes d'estimation/identification des paramètres et des entrées inconnus. Deux techniques déjà développées dans [95] seront considérées dans ce chapitre. Pour attester des performances des techniques employées, des résultats de simulations sur des données simulées et expérimentales viendront clôturer ce chapitre.

3.1 Formulation du problème inverse en dimension finie

L'estimation des paramètres appartient à la classe des *problèmes inverses*. À partir de la mesure y et du modèle $y = f(\theta)$, l'objectif est d'inverser cette loi pour accéder indirectement à la variable d'intérêt θ ($\theta = f^{-1}(y)$).

Dans cette section, nous commençons par présenter le problème d'estimation du coefficient de diffusion $\chi_e(z, t)$ et du terme source (l'entrée) $S(z, t)$ dans sa formulation générale en dimension infinie. L'objectif de ce chapitre étant d'appliquer des techniques d'estimation/identification de dimension finie, l'approximation du problème en dimension infinie et sa convergence seront traitées par la suite. Cette section s'inspire des travaux de Banks et principalement de [9] relatif aux problèmes inverses à paramètres distribués et temps-variants. Ceci exclut la théorie des C_0 -semigroupes et fait intervenir d'autres outils de l'analyse fonctionnelle (les détails sont dans [8]). Dans cette section nous allons adapter les résultats de ces travaux à notre type d'EDP.

3.1.1 Convergence du problème d'estimation en dimension finie

Nous rappelons d'abord la formulation variationnelle du problème direct (l'EDP de transport) établie dans le chapitre précédent :

$$\begin{cases} (\dot{T}(t), v) + b(T, v; \chi_e) = L(v; S); \quad \forall v \in H_{0, \{1\}}^1(\Omega) \\ T(0) = T(z, 0) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La forme bilinéaire b et la forme linéaire L sont données par :

$$\begin{cases} b(T, v; \chi_e) = \int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dv}{dz} dz + \frac{1}{\tau} \int_0^1 T(z, t) v(z) dz, \\ L(v; S) = \int_0^1 S(z, t) v(z) dz, \end{cases} \quad (3.2)$$

où la dépendance temporelle des formes b et L est due à la variation temporelle de χ_e et S (respectivement).

Nous avons démontré dans le chapitre précédent, que si $\chi_e \in X_e$, $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ et $S \in L^2(0, t_f, \Omega)$ alors la forme bilinéaire b est continue et coercive, et la forme linéaire L est continue. Ceci permet de garantir l'existence d'une solution au problème inverse [8].

Nous supposons que des observations distribuées notées par $T_{exp}(z, t_i)$, $i = 0, \dots, t_f$ sont disponibles. En réalité, il s'agit de mesures échantillonnées aussi bien dans le temps que dans l'espace, assimilables par interpolation à une distribution continue (les périodes d'échantillonnage sont suffisamment faibles par rapport à la dynamique de la température T). Comme dans toute expérimentation, ces mesures sont contaminées par un bruit de statistiques inconnues mais qu'on suppose blanc et gaussien. Le fait de considérer des mesures spatialement continues (ou discrètes) ne modifie pas la nature du problème d'estimation. Dans la phase implémentation ou programmation numérique de la méthode d'identification adoptée, la discrétisation spatio-temporelle devient inévitable et il suffit d'un bon choix de la période d'échantillonnage pour reconstruire le profil continu.

Ainsi, notre problème d'identification peut se formuler comme un problème d'optimisation ou plus précisément de minimisation du critère de moindres carrés de l'erreur de sortie entre la solution T de l'équation différentielle partielle (ou sa formulation variationnelle (3.1)) qui dépend des paramètres inconnus (χ_e et S) et les mesures T_{exp} . Ce critère s'écrit :

$$\begin{cases} \min_{q \in \tilde{Q}} J(q) = \sum_{i=0}^{N_t} \int_0^1 (T_{exp}(t_i, z) - T(t_i, z; q))^2 dz, \\ T(t_i; q) \text{ solution de (3.1).} \end{cases} \quad (3.3)$$

où $q(z, t) = [\chi_e(z, t), S(z, t)]$ est le vecteur des paramètres inconnus appartenant à l'ensemble des paramètres admissibles $\tilde{Q} \subset Q = X_e \times L^2(0, t_f; \Omega)$. Dans le choix de l'ensemble des paramètres admissibles, des contraintes de bornitude (valeurs supérieures et/ou inférieures des paramètres et/ou de leurs dérivées) et de classes ($L^2(\Omega)$ ou $C^1(\Omega)$) peuvent être prises en considération.

Ce problème d'optimisation sous contraintes fait intervenir un espace d'état $L^2(0, t_f; H_{0,\{1\}}^1(\Omega))$ et un espace des paramètres \tilde{Q} de dimension infinie. Afin de développer des méthodes réduites, l'approximation de Galerkin dans le contexte de la formulation variationnelle sera utilisée.

Soit H^N , $N = 1, 2, \dots$ et Q^{n_p} $n_p = 1, 2, \dots$ deux suites d'espaces de dimension finie, sous-espaces de l'espace d'état $H_{0,\{1\}}^1$ et de l'espace des paramètres \tilde{Q} (respectivement). Soit P^N l'opérateur projection de $H_{0,\{1\}}^1$ dans H^N , l'approximation du critère de l'erreur en sortie défini dans (3.3) s'écrit :

$$\min_{q^{n_p} \in Q^{n_p}} J^N(q^{n_p}) = \sum_{i=0}^{N_t} \int_0^1 (T_{exp}(t_i) - T^N(t_i; q^{n_p}))^2 dz, \quad (3.4)$$

où $T^N(t, q^{n_p}) \in H^N$ est la solution du problème approximé en dimension finie de (3.1) donné par :

$$\begin{cases} (T^N, v) + b(T^N, v; \chi_e^r) = L(v; S^d); \quad \forall v \in H^N(\Omega), \\ T^N(0) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

où $q^{n_p} = [\chi_e^r, S^d]$ est l'approximé en dimension finie du vecteur des paramètres inconnus q ($n_p = r + d$).

Pour alléger l'écriture, notons $H_{0,\{1\}}^1$ par H , sa norme par $|\cdot|_H$ et par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit interne.

Il est important de démontrer quelles caractéristiques doivent vérifier l'espace H et par conséquent H^N ($H^N \subset H$) et les formes b et L afin d'assurer la convergence de la solution $T^N(t, q^{n_p})$ du problème approximé (3.5) vers $T(t; q)$ solution du problème variationnel initial (3.1).

Proposition. *Supposons que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercive et la forme linéaire L continue. Supposons que :*

$$\forall \psi \in H : |\psi - P^N \psi|_H \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Supposons que les formes b et L vérifient :

$$\forall T, v \in H : |b(T, v; \chi_e) - b(T, v; \chi_e^*)| \leq \gamma_1 |\chi_e - \chi_e^*|_Q |T|_H |v|_H, \quad (3.7)$$

$$\forall v \in H : |L(v; S) - L(v; S^*)| \leq \gamma_2 |S - S^*|_Q |v|_H. \quad (3.8)$$

Soit q^{n_p} arbitraire dans Q tel que : $\lim_{n_p \rightarrow \infty} q^{n_p} = q$, ($q \in Q$).

Alors :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ n_p \rightarrow \infty}} T^N(t; q^{n_p}) \rightarrow T(t; q)$$

Démonstration.

On a $\forall T \in H$, $T^N \in H^N$ alors :

$$|T^N(t; q^{n_p}) - T(t; q)|_H \leq |T^N(t; q^{n_p}) - P^N T(t; q)|_H + |P^N T(t; q) - T(t; q)|_H$$

or d'après (3.6) : $|P^N T(t; q) - T(t; q)|_H \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ et donc si :

$$|T^N(t; q^{n_p}) - P^N T(t; q)|_H \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (3.9)$$

alors :

$$|T^N(t; q^{n_p}) - T(t; q)|_H \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Nous allons nous intéresser à la démonstration de (3.9).

Notons :

$$\begin{aligned} T^N &:= T^N(t; q^{n_p}), \quad T := T(t; q), \\ \Delta^N &:= T^N - P^N T, \quad \dot{\Delta}^N := \dot{T}^N - \frac{d}{dt} P^N T = \dot{T}^N - P^N \dot{T}. \end{aligned}$$

À partir des équations (3.1) et (3.5), nous avons :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Delta}^N, \psi \rangle &= \langle \dot{T}^N - \dot{T} + \dot{T} - P^N \dot{T}, \psi \rangle \\ &= \langle \dot{T} - P^N \dot{T}, \psi \rangle + L(\psi; S^d) \\ &\quad - b(T^N, \psi; \chi_e^r) - L(\psi; S) + b(T, \psi; \chi_e) \end{aligned} \quad (3.10)$$

D'un autre côté :

$$b(T^N, \psi; \chi_e^r) = b(\Delta^N, \psi; \chi_e^r) - b(T - P^N T, \psi; \chi_e^r) + b(T, \psi; \chi_e^r), \quad (3.11)$$

et donc (3.10) devient :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\Delta}^N, \psi \rangle + b(\Delta^N, \psi; \chi_e^r) &= \langle \dot{T} - P^N \dot{T}, \psi \rangle + L(\psi; S^d) - L(\psi; S) \\ &\quad + b(T, \psi; \chi_e) - b(T, \psi; \chi_e^r) \\ &\quad + b(T - P^N T, \psi; \chi_e^r) \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'égalité (3.12) est vérifiée pour tout ψ dans H (ou H^N) et donc elle l'est pour le cas particulier $\psi = \Delta^N$, on sait aussi que $\langle \dot{\Delta}^N, \Delta^N \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^N|_H^2$.

Ainsi (3.12) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^N|_H^2 + b(\Delta^N, \Delta^N; \chi_e^r) &= \langle \dot{T} - P^N \dot{T}, \Delta^N \rangle \\ &\quad + L(\Delta^N; S^d - S) + b(T, \Delta^N; \chi_e - \chi_e^r) \\ &\quad + b(T - P^N T, \Delta^N; \chi_e^r). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Comme b est coercive, alors :

$$b(\Delta^N, \Delta^N; \chi_e^r) \geq c_2 |\Delta^N|_H^2$$

et d'après (3.7) et (3.8) et en utilisant l'inégalité suivante (de l'inégalité de Young) :

$$|b(T, \Delta^N; \chi_e - \chi_e^r)| \leq \frac{\gamma^2}{4\epsilon} |\chi_e - \chi_e^r|_Q |T|_H + \epsilon |\Delta^N|_H,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^N|_H^2 + c_2 |\Delta^N|_H^2 &\leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^N|_H^2 + b(\Delta^N, \Delta^N; \chi_e^r) \\
 &\leq \frac{\gamma^2}{4\epsilon} |\chi_e - \chi_e^r|_Q |T|_H + \epsilon |\Delta^N|_H \\
 &\quad + \langle \dot{T} - P^N \dot{T}, \Delta^N \rangle + c_1 |T - P^N T|_H |\Delta^N|_H
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Notons que les constantes c_1 et c_2 définissant les bornes inférieure et supérieure de χ_e (suivant la norme $|\cdot|_Q$) sont uniformes (indépendantes de t).

Lorsque : $N \rightarrow \infty$: $T - P^N T \rightarrow 0$ et pour $n_p \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$ et $d \rightarrow \infty$) : $S^d \rightarrow S$ et $\chi_e^r \rightarrow \chi_e$; ainsi pour $n_p, N \rightarrow \infty$, le deuxième membre de l'inégalité (3.14) tend vers 0 et :

$$0 \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^N|_H^2 + (c_2 - \epsilon) |\Delta^N|_H^2 \leq 0 \quad \text{pour } N, n_p \rightarrow \infty \tag{3.15}$$

Par conséquent : $\Delta^N \rightarrow 0$ dans $L^2(0, t_f; H)$ pour $N, n_p \rightarrow \infty$, et $T^N(t; q^{n_p}) \rightarrow T(t; q)$ dans $L^2(0, t_f; H)$. \square

Après avoir prouvé la convergence du problème approximé (3.5) vers (3.1), il reste à démontrer sous quelles conditions la solution du problème approximé (3.4)-(3.5) converge vers la solution du problème initial de dimension infinie (3.3)-(3.1). La proposition ci-dessous élucide ce point.

Proposition. Soient Q, Q^{n_p} deux espaces compacts munis d'une norme notée $|\cdot|_Q$. Soit i^{n_p} une fonction de Q dans Q^{n_p} telle que :

$$\begin{aligned}
 i^{n_p} : Q &\longrightarrow Q^{n_p} \\
 q &\longmapsto i^{n_p}(q),
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

et supposons que $i^{n_p}(q) \rightarrow q$ quand $n_p \rightarrow \infty$ uniformément dans Q .

Si $\{q^r\}_{r \in \mathbb{N}^*}$ est une suite solution de (3.4)-(3.5), $q^r \rightarrow \bar{q}$ ($r \rightarrow \infty$) et que $T^N(t; q^r) \rightarrow T(t; q)$ alors : \bar{q} est solution de (3.3)-(3.1).

Démonstration. Soit $\{q^r\}_{r \in \mathbb{N}^*}$ une suite solution du problème d'optimisation (3.4)-(3.5). Soit $\{\hat{q}^k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans Q et $i^{n_p}(\hat{q}^k) = q$.

Comme Q et Q^{n_p} sont deux espaces compacts, on peut toujours extraire de $\{q^r\}$ et de $\{\hat{q}^k\}$ deux sous-suites telles que : $\lim_{r \rightarrow \infty} q^r = \bar{q}$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{q}^k = q$.

Étant donné que $\{q^r\}$ est la solution optimale de (3.4)-(3.5), on peut écrire :

$$J^N(q^r) \leq J^N(i^{n_p}(\hat{q}^k))$$

Quand : $N \rightarrow \infty$ et $r \rightarrow \infty$: $T^N(t; q^r) \rightarrow T(t; q)$ (d'après la proposition suivante) et donc :

$$\begin{aligned}
 J^N(q^r) &\rightarrow J(\bar{q}) \\
 J^N(i^{n_p}(\hat{q}^k)) &\rightarrow J(q),
 \end{aligned}$$

par conséquent :

$$J(\bar{q}) \leq J(q)$$

et donc \bar{q} est solution de (3.3)-(3.1). \square

La clé de la démonstration ci-dessus est la compacité de l'espace des paramètres Q (et donc du sous-espace Q^{n_p}). Cette condition joue un rôle important aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique (algorithmique) [9]. L'hypothèse de compacité des espaces permet aussi d'assurer la stabilité de la solution en impliquant la continuité de la relation entre l'espace des données et cette solution. Dans [7], les auteurs ont démontré le rôle "numérique" (algorithmique) de la compacité pour un problème d'EDO et dont les résultats peuvent être directement interpolés vers un problème d'EDP. Dans [10], grâce à la compacité des espaces des paramètres, la convergence a été prouvée en utilisant des splines cubiques et linéaires pour l'approximation de l'état ou des paramètres.

Pratiquement, la compacité peut être interprétée par l'imposition de contraintes sur les variations des paramètres. En général, on a besoin de bornes supérieures et inférieures sur les valeurs des paramètres (conditions admissibles en considérant la physique des paramètres) et aussi d'une borne supérieure sur leurs dérivées.

Dans certains travaux comme [69], [135], la compacité est prise en compte en considérant la méthode de *régularisation de Tikhonov*. Toutefois dans [7], pour le cas étudié, il a été démontré que la méthode d'optimisation sous contraintes est plus performante que la méthode de *régularisation de Tikhonov* en imposant que N (la dimension de l'espace d'état) soit largement supérieur à n_p (la dimension de l'espace des paramètres).

3.1.2 Construction du système d'estimation approximé

Dans le chapitre précédent, trois méthodes de discrétisation d'une EDP parabolique linéaire sous la formulation de Galerkin ont été proposées. Les simulations ont montré que la méthode des B-splines cubiques est la plus efficace en terme de reconstruction du profil expérimental. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous allons nous baser sur cette technique pour approximer aussi bien l'état T que les paramètres χ_e et S . Toutefois, il est nécessaire de préciser qu'en théorie, toute méthode d'approximation faisant intervenir des espaces (de paramètres et d'état) respectant les conditions établies dans la sous-section 3.1.1 est valable.

La projection des paramètres sur leur espace d'approximation Q^{n_p} donne les expressions suivantes :

$$\chi_e^r(z, t) = \sum_{k=1}^r \lambda_k(t) \pi_k(z) = \theta^T(t) P(z), \quad (3.17)$$

avec :

$$\begin{cases} \theta^T(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_r(t)] & , \quad \theta \in \mathbb{R}^r \\ P(z) = [\pi_1(z), \pi_2(z), \dots, \pi_r(z)]^T \end{cases}$$

et de même pour le terme source S :

$$S^d(z, t) = \sum_{k=1}^d \zeta_k(t) \pi_k(z) = \mathcal{B}(z) \beta(t). \quad (3.18)$$

où :

$$\begin{cases} \beta(t) = [\zeta_1(t), \zeta_2(t), \dots, \zeta_d(t)]^T, & \beta \in \mathbb{R}^d \\ \mathcal{B}(z) = [\pi_1(z), \pi_2(z), \dots, \pi_d(z)] \end{cases}$$

Les fonctions $\pi_i(z)$ désignent les fonctions B-splines cubiques standard définies dans le chapitre précédent (noté $B_i(z)$). Rappelons que pour une partition $\{z_i\}_{i=0}^n$ de Ω de pas $\Delta z = 1/n$, $\pi_i(z)$ est le polynôme de degré 3 de support compact $]z_{i-2}, z_{i+2}[$, qui vaut 4 avec une pente nulle à $z = z_i$, 3 avec une pente de $3/\Delta z$ à $z = z_{i-1}$ et 3 avec une pente de $-3/\Delta z$ à $z = z_{i+1}$. Ces fonctions π_i fournissent des approximations précises et suffisamment lisses de classe $C^2(\Omega)$. Notons que d'après la preuve précédente de convergence du problème de dimension fini au problème initial (de dimension infinie), les dimensions r et d de χ_e^r et S^d (respectivement) peuvent être différentes.

Concernant l'approximation des paramètres, plusieurs méthodes de projection existent en utilisant entre autres les séries de Fourier ou les polynômes orthogonaux. Le choix de la méthode repose sur les caractéristiques numériques (facilité de calcul, la mémoire nécessaire pour le stockage des variables et le conditionnement des matrices qui résultent de l'approximation) du système discrétisé global.

En combinant les formules d'approximation de χ_e^r et de S^d avec le système issu de la semi-discrétisation de l'EDP donné par la formule (2.4) du chapitre précédent, on obtient le système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \left(M^{-1} A_1(\theta^T(t)) - \frac{1}{\tau} I_{n+1} \right) X(t) + M^{-1} \mathcal{D}\beta(t) \\ X(0) = 0, \\ y(t) = X(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

rappelons que : $X(t) = [x_0(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$ ($X \in \mathbb{R}^{n+1}$), est le vecteur d'état, $M \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ est la matrice de *rigidité*, non-singulière (par définition), symétrique et à dominance diagonale (voir le chapitre précédent) :

$$M = \begin{pmatrix} \int_0^1 \omega_0^2(z) dz & \dots & \int_0^1 \omega_0(z) \omega_n(z) dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \omega_0(z) \omega_n(z) dz & \dots & \int_0^1 \omega_n^2(z) dz \end{pmatrix}$$

avec :

$$\int_0^1 \omega_i(z) \omega_j(z) dz = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad j \leq i - 4, \text{ ou } j \geq 0.$$

En prenant en compte (3.17), la matrice de dynamiques (connue aussi sous le nom de

matrice d'amortissement) $A_1(t) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ a la nouvelle forme suivante :

$$A_1(\theta^T(t)) = -\theta^T(t) \otimes \begin{pmatrix} \int_0^1 P(z)\omega_0'^2(z)dz \cdots \int_0^1 P(z)\omega_0'(z)\omega_n'(z)dz \\ \vdots \vdots \\ \int_0^1 P(z)\omega_0'(z)\omega_n'(z)dz \cdots \int_0^1 P(z)\omega_n'^2(z)dz \end{pmatrix}$$

La nouvelle matrice $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times d}$ issue de l'approximation du terme source s'écrit :

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \int_0^1 \omega_1(z) \pi_1(z) dz & \cdots & \int_0^1 \omega_1(z) \pi_d(z) dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \omega_n(z) \pi_1(z) dz & \cdots & \int_0^1 \omega_n(z) \pi_d(z) dz \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Le problème d'estimation en dimension finie peut maintenant être formulé : étant donné le modèle reliant la sortie y aux paramètres θ et β , et le profil expérimental discrétisé T_{exp} , l'objectif est d'estimer simultanément θ et β et par conséquent, χ_e^r et l'entrée S^d . Le processus d'estimation en dimension finie peut être illustré par le schéma fig. 3.1. Avant de proposer ou

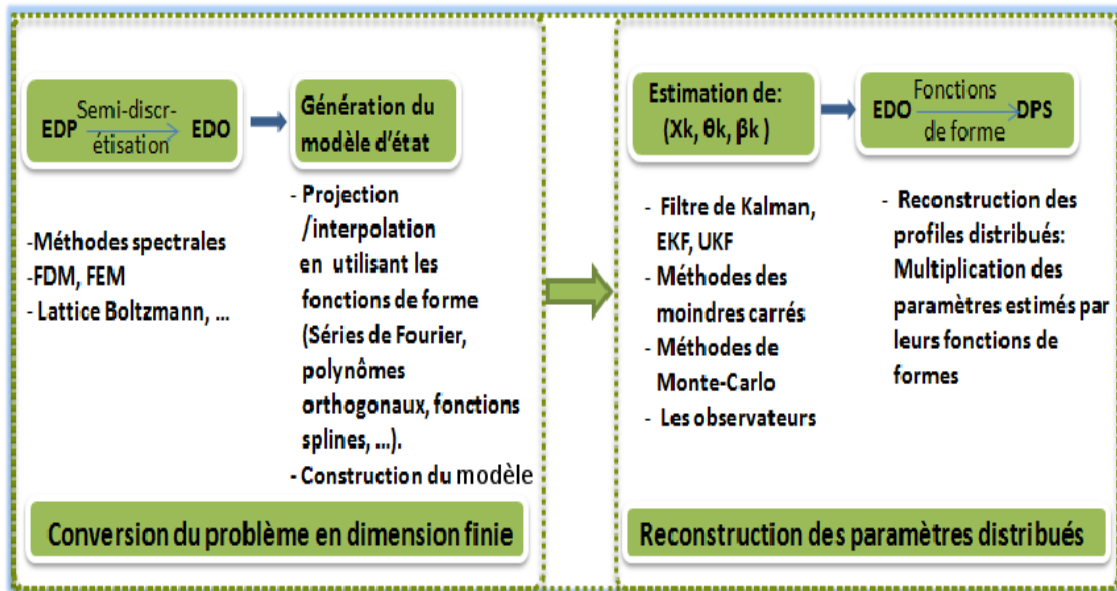


FIGURE 3.1 – Étapes d'estimation et de reconstruction des paramètres distribués en dimension finie

d'exploiter une méthode d'estimation/identification il est important d'étudier l'identifiabilité du problème posé. Ceci fait l'objet de la section suivante.

3.2 Identifiabilité du problème d'estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en dimension finie

L'identifiabilité connue aussi sous le nom de l'estimabilité, est l'étude de la faisabilité de l'estimation des paramètres du modèle. Dans la littérature, les définitions et les notations liées à la notion d'identifiabilité sont surabondantes, ce qui pose parfois problème pour choisir une méthode efficace parmi l'ensemble des techniques existantes.

Suivant que l'analyse est effectuée avant ou après l'expérience, on parle d'identifiabilité *a priori* ou *a posteriori* [126]. Dans l'identifiabilité *a priori* on s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème inverse dans le cadre idéal (sans bruits de mesures et sans erreurs de modélisation). Dans certaines références, on associe à cette définition le nom d'identifiabilité *structurelle*. Lorsqu'on prend en compte la nature des signaux entrées-sorties (sans bruits) on passe à l'identifiabilité *a posteriori*. Lorsqu'on considère le caractère bruité des mesures, on parle de l'identifiabilité *pratique*. Un quatrième type fréquemment rencontré dans la littérature est l'identifiabilité *orienté convergence en probabilité* [78]. Un état de l'art exhaustif sur la notion d'identifiabilité peut être trouvé dans la thèse de Dobre [35] (et les références y figurant) où les différentes classes sont traitées et où un tableau récapitulatif rassemble les différentes terminologies de l'identifiabilité. Une introduction à ce domaine (l'identifiabilité) avec des définitions concises peut être trouvée entre autres, dans [63], [134] et [104].

En général, suivant l'outil d'analyse employé, on trouve des techniques qui se basent sur des méthodes différentielles algébriques, numériques (en considérant la décomposition en série de Taylor) ou même en exploitant la notion de *l'observabilité* (extension du système d'état vers l'ensemble des paramètres inconnus en les supposant à dynamique nulle (négligeable) et en regardant l'observabilité du système global).

Notons que la relation entre l'identifiabilité et l'observabilité est très étroite. Dans le processus d'identification, en plus de l'estimation des paramètres, l'état du système est estimé simultanément, ce qui signifie que le problème d'observation est inclus dans l'identification. Aussi, de nombreuses techniques d'identification se basent sur les observateurs. On peut supposer que l'identifiabilité est une généralisation de l'observabilité [16].

Étant donné que notre objectif final est l'estimation des grandeurs inconnues, et vu l'abondance des notions d'identifiabilité, nous allons nous restreindre dans notre travail à l'étude de l'identifiabilité *a priori* (structurelle) et *a posteriori* du paramètre θ et de l'entrée inconnue β . Nous supposons que l'étude de ces deux notions permet de former une idée sur la faisabilité de notre problème d'estimation.

3.2.1 Identifiabilité *a priori*

Nous allons étudier la structure du modèle pour déterminer si le problème d'estimation admet une solution unique (identifiabilité globale) ou un ensemble fini de solutions (identifiabilité locale) ou bien un nombre de solutions infini (non-identifiabilité). Cette notion d'identifiabilité permet ainsi de vérifier les deux premières conditions de Hadamard [53] pour que notre problème inverse soit bien-posé (l'injectivité de la relation $q = f^{-1}(y)$). Notons $q(t) = [\theta(t), \beta(t)]$ le vecteur des paramètres inconnus appartenant à l'espace approximé \tilde{Q}^{n_p} des paramètres admissibles ($n_p = r + d$).

Définition 3.2.1 Le paramètre $q(t)$ est structurellement globalement identifiable en q^* si :

$$\begin{aligned} \exists X_0 \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall t \in [0, t_f], \forall q \in \tilde{Q}^{n_p} : \\ y(t; q(t)) = y(t; q^*(t)) \Rightarrow q(t) = q^*(t). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Si \tilde{Q}^{n_p} est remplacé dans (3.21) par $V(q)$ où $V(q)$ est un voisinage de q^* , $q(t)$ est localement identifiable, où X_0 est la condition initiale.

L'étude de l'identifiabilité recouvre tout l'espace des paramètres admissibles \tilde{Q}^{n_p} ce qui prouve que c'est une propriété générique, structurelle. Plusieurs méthodes d'identifiabilité *a priori* existent ; une description détaillée peut se trouver dans [126], [91] et [35].

Dans le cas des systèmes à structure linéaire, les techniques les plus généralement utilisées sont les paramètres de Markov, la matrice de transfert ou la réalisation minimale de la forme d'état. Comme dans notre problème, on s'intéresse aussi à l'estimation de l'entrée, ces méthodes ne sont pas facilement généralisables. L'approche par algèbre différentielle offre plus de flexibilité [79]. Avec cette approche, plusieurs combinaisons sont possibles. Dans ce travail, nous avons fait le choix de *la méthode par algèbre différentiel pour l'identifiabilité des systèmes* ("*DAISY : Differential Algebra for Identifiability of SYstems method* ") [14] qui s'étend aisément à l'identifiabilité des paramètres et des entrées inconnues.

En réalité, DAISY¹ est un logiciel intégrant un algorithme d'algèbre différentielle permettant l'étude de *l'identifiabilité entrée-sortie* (ou l'identifiabilité *a priori* globale) des systèmes dynamiques (linéaires et non linéaires) décrits par des équations polynômiales ou rationnelles. Ses racines se trouvent dans les principes de base de l'algèbre différentielle (voir [45]). Pour résumer, cette technique a pour objectif de trouver la relation entre l'entrée et la sortie en éliminant l'état. Ainsi, *la relation entrée-sortie* caractérisant la structure du modèle est définie et elle est fonction des paramètres du modèle. Tant que cette relation est vérifiée uniquement par les paramètres du modèle, ces derniers sont *globalement identifiables*. Une explication plus détaillée est donnée dans [14] et [5].

1. DAISY est disponible à l'adresse : <http://www.dei.unipd.it/pia/>

Cette méthode a été aussi utilisée dans [86] pour développer un algorithme permettant la sélection de l'ensemble des paramètres globalement identifiables issus d'une structure *a priori* non-identifiable.

L'application de la méthode de DAISY au modèle (3.19) est donnée par :

- En premier, la relation entre l'entrée et la sortie indépendamment de l'état est établie (l'entrée du système est notée β dans (3.19)) :

$$\Psi(y, \dot{y}, \beta, \theta, \tau) = \dot{y} + (M^{-1}PWy)\theta + \frac{1}{\tau}y + M^{-1}D\beta = 0. \quad (3.22)$$

En effet, d'après l'expression de la matrice $A(\theta(t))$ donnée dans la section 3.1.2, il est évident que A est linéaire par rapport à θ . Ainsi, le deuxième membre de l'équation différentielle du système (3.19) peut être réarrangé comme suit :

$$\left(M^{-1}A(\theta^T(t)) - \frac{1}{\tau}I_{n+1} \right) X(t) = (M^{-1}PWX(t))\theta(t) - \frac{1}{\tau}X(t), \quad (3.23)$$

où la matrice PWX est donnée par :

$$PWX(t) = - \begin{pmatrix} \int_0^1 \sum_{i=0}^n x_i(t)w'_i(z)w'_0(z)\pi_1(z)dz & \cdots & \int_0^1 \sum_{i=0}^n x_i(t)w'_i(z)w'_0(z)\pi_r(z)dz \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \sum_{i=0}^n x_i(t)w'_i(z)w'_n(z)\pi_1(z)dz & \cdots & \int_0^1 \sum_{i=0}^n x_i(t)w'_i(z)w'_n(z)\pi_r(z)dz \end{pmatrix}$$

avec $\dim(PWX) = (n+1) \times r$.

- Ensuite, la condition d'injectivité de la relation entre l'ensemble des paramètres inconnus q et la sortie y (3.22) est donnée par :

$$\Psi(y, \dot{y}, \beta, \theta, \tau) = \Psi(y, \dot{y}, \beta^*, \theta^*, \tau^*) \Rightarrow (\beta = \beta^*, \theta = \theta^*, \tau = \tau^*). \quad (3.24)$$

où β^*, θ^* et τ^* forment une solution arbitraire à (3.22).

L'équation (3.24) s'exprime aussi par :

$$\underbrace{[M^{-1}PWy \quad -y \quad M^{-1}D]}_{\varphi} \begin{bmatrix} \theta - \theta^* \\ \tau - \tau^* \\ \beta - \beta^* \end{bmatrix} = 0$$

Notons que dans cette partie, dans une optique de généralisation du problème d'estimation, le vecteur des paramètres inconnus est étendu au paramètre τ . La dimension de la matrice φ est égale à $(n+1) \times (r+1+d)$. Si φ est de rang égal à $r+d+1$, et donc $r+1+d \leq n+1$, ses colonnes sont linéairement indépendantes. Par conséquent, $\theta = \theta^*$, $\tau = \tau^*$, and $\beta = \beta^*$. Ainsi les paramètres (θ et τ) et l'entrée β sont structurellement globalement identifiables. Comme pour tout problème algébrique, l'étude de rang n'est pas suffisante (seulement nécessaire). Pour des raisons de calcul numérique, la matrice φ doit aussi être bien conditionnée. En effet, l'étude du conditionnement de la matrice φ permet aussi de choisir les fonctions de formes (de projection) des paramètres. C'est ainsi que les fonctions b-splines cubiques ont été choisies. Dans la partie qui suit, nous allons voir le rôle que joue le conditionnement des matrices dans l'identifiabilité.

3.2.2 Identifiabilité *a posteriori*

La troisième condition de Hadamard qui est la stabilité de la solution du problème inverse peut maintenant être traitée. Dans l'analyse de l'identifiabilité *a posteriori*, le modèle est supposé parfait, fidèle au système (sans erreurs de modélisation) mais l'entrée, la condition initiale et les instants d'échantillonnage sont imposés. C'est le cas des expériences à données archivées [126]. Les signaux d'entrées et de mesures sont supposés non bruités.

Définition 3.2.2 Le paramètre $q(t)$ est *a posteriori globalement identifiable* en q^* si :

$$\begin{aligned} \text{pour } X_0 \text{ donné } \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall t_k, k \in \{1, \dots, N\}, \forall q \in \tilde{Q}^{n_p} : \\ y(t_k; q(t_k)) = y(t_k; q^*(t_k)) \Rightarrow q(t_k) = q^*(t_k). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si \tilde{Q}^{n_p} est remplacé dans (3.25) par $V(q)$ où $V(q)$ est un voisinage de q^* , q est *localement identifiable*.

L'identifiabilité *a posteriori* est liée à l'analyse de sensibilité du modèle. Elle est généralement interprétée localement en utilisant le développement en série de Taylor. Afin de simplifier la présentation de son principe, nous allons utiliser un modèle possédant une seule sortie.

Soit $q \in Q^{n_p}$ le vecteur des paramètres au voisinage de $q_0 \in Q^{n_p}$ vecteur nominal, où $Q^{n_p} \subset \mathbb{R}^{n_p}$, $y(t_k; q) \in \mathbb{R}$ la sortie du modèle. Le développement en série de Taylor de $y(t_k; q_0 + dq)$ est donné par :

$$y(t_k; q_0 + dq) = y(t_k; q_0) + \sum_{i=1}^{n_p} \left. \frac{\partial y(t_k; q)}{\partial q_i} \right|_{q_0} dq_i + \mathcal{O}(dq^2), \quad (3.26)$$

où $dq = q - q_0$. La différentielle de y notée : $dy(t_k; q_0)$ est égale, à une approximation près, à :

$$dy(t_k; q_0) = y(t_k; q_0 + dq) - y(t_k; q_0) \approx \sum_{i=1}^{n_p} \left. \frac{\partial y(t_k; q)}{\partial q_i} \right|_{q_0} dq_i, \quad (3.27)$$

qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$dy(t_k; q_0) = \left[\left. \frac{\partial y(t_k; q)}{\partial q_1} \right|_{q_0}, \dots, \left. \frac{\partial y(t_k; q)}{\partial q_{n_p}} \right|_{q_0} \right] \begin{bmatrix} dq_1 \\ \vdots \\ dq_{n_p} \end{bmatrix}.$$

Ainsi si une variation locale des paramètres dq induit une variation locale de la sortie dy , le problème inverse est continu. Ceci se traduit par :

$$\forall t_k, k \in \{1, \dots, N\} : dy(t_k; q_0) = 0 \implies dq = 0. \quad (3.28)$$

La condition définie dans (3.28) est équivalente (à une approximation de premier ordre) à la condition d'identifiabilité *a posteriori* donnée dans (3.25). Ceci démontre la relation qui existe entre l'identifiabilité *a posteriori* et la troisième condition de Hadamard (la continuité de la solution du problème inverse).

La dérivée de y par rapport à q $\left(\frac{\partial y(t_k; q)}{\partial q_i} \Big|_{q_0} \right)$ est appelée *fonction de sensibilité* de la sortie par rapport au paramètre q_i dans le voisinage de $V(q_0)$ à l'instant t_k . La matrice de sensibilité de la sortie par rapport à l'ensemble des paramètres $S_y(q_0) \in \mathbb{R}^{N \times n_p}$ est donnée par :

$$S_y(q_0) = \begin{pmatrix} s_{y,q_1}(t_1; q_0) & \cdots & s_{y,q_{n_p}}(t_1; q_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{y,q_1}(t_N; q_0) & \cdots & s_{y,q_{n_p}}(t_N; q_0) \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture, les colonnes de $S_y(q_0)$ sont notées s_{y,q_i} , $i = 1, \dots, n_p$. La condition (3.28) est vérifiée si et seulement si les colonnes de la matrice $S_y(q_0)$ sont linéairement indépendantes :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p}) \in \mathbb{R}^{n_p} : \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i s_{y,q_i} = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n_p} = 0. \quad (3.29)$$

et $S_y(q_0)$ sera de rang égal à n_p .

En conclusion, si au moins une colonne, de la matrice $S_y(q_0)$ est nulle ou colinéaire à une autre colonne alors le modèle n'est pas *a posteriori* localement identifiable.

Remarque : *Les instants d'échantillonnage $\{t_0, \dots, t_N\}$ doivent être bien choisis afin d'éviter une chute du rang de la matrice de sensibilité.*

Pour un modèle à n_y sorties, la matrice de sensibilité globale formée par les fonctions de sensibilité de chaque sortie par rapport à chaque paramètre q_i pour les instants de mesures $k \in \{1, \dots, N\}$ est de dimension $(N \cdot n_y) \times n_p$ et donnée par :

$$S_y(q_0) = \left(S_{y_1}(q_0)^T, \dots, S_{y_{n_y}}(q_0)^T \right)^T.$$

De même, la structure est *a posteriori localement identifiable en q_0* si et seulement si le rang de la matrice $S_y(q_0) = n_p$.

Plusieurs approches de calcul de la matrice $S_y(q_0)$ existent (analytique ou numérique). Il existe aussi des outils logiciels de différentiation associés à ces méthodes. Dans ce qui suit, nous allons présenter deux techniques pour le calcul de cette matrice de sensibilité.

3.2.2.1 Approche analytique

La matrice $S_y(q_0)$ est calculée en dérivant analytiquement la structure du système. Supposons qu'on dispose d'un modèle d'état de la forme générale (3.30) :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, q, u); & X(0) = X_0; \\ y = h(X, q, u), \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $y \in \mathbb{R}^{n_y}$. En supposant les champs de vecteur f et h dérivable par rapport à leurs arguments, la différentiation de (3.30) par rapport au vecteur des paramètres inconnus q à q_0 donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{X}}{\partial q} = \frac{\partial f(X, q, u)}{\partial q} \Big|_{q_0} + \frac{\partial f(X, q, u)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial q} \Big|_{q_0}; & \frac{\partial X}{\partial q}(0) = S_{x_0} \\ \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial h(X, q, u)}{\partial q} \Big|_{q_0} + \frac{\partial h(X, q, u)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial q} \Big|_{q_0}, \end{cases} \quad (3.31)$$

qu'on peut encore mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{S}_{x,q} = \mathcal{F}(X, q_0) S_{x,q} + \mathcal{G}(X, q_0); & S_{x,q}(0) = S_{x_0}, \\ S_{y,q} = \mathcal{H}(X, q_0) S_{x,q} + \mathcal{D}(X, q_0). \end{cases} \quad (3.32)$$

Le système d'équation (3.32) peut être interprété comme un système d'état où la variable $S_{x,q}$ désigne l'état et $S_{y,q}$ la sortie. Les matrices $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{(n_x \cdot n_p) \times (n_x \cdot n_p)}$, $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n_x \cdot n_p}$, $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{(n_y \cdot n_p) \times (n_x \cdot n_p)}$ et $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n_y \cdot n_p}$ peuvent s'obtenir par calcul formel en utilisant Maple[©] ou la toolbox *Symbolic Math* de MATLAB[©].

Il est à noter que ces fonctions de sensibilité (de l'état $S_{x,q}$ et de la sortie $S_{y,q}$) dépendent de la condition initiale S_{x_0} et du solveur utilisé pour résoudre le système d'EDO (3.32). Pour notre modèle (3.19) l'application de l'approche analytique aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{X}}{\partial q^T} = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial \theta^T} \Big|_{\theta_0} \right)^T, \left(\frac{\partial X}{\partial \beta^T} \Big|_{\beta_0} \right)^T \right]^T \\ = \begin{bmatrix} M^{-1}(A(\theta_0(t)) + \frac{1}{\tau} I_{n+1}) & 0_{n+1 \times n+1} \\ 0_{n+1 \times n+1} & M^{-1}(A(\theta_0(t)) + \frac{1}{\tau} I_{n+1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} P W X \\ M^{-1} \mathcal{D} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial y}{\partial q^T} = \frac{\partial X}{\partial q^T} \end{cases} \quad (3.33)$$

3.2.2.2 Approche numérique

Il existe différentes méthodes de différentiation numérique (voir [19]), les plus courantes d'entre elles se basent sur la méthode des différences finies autour des valeurs nominales des paramètres. Ainsi $\frac{\partial y}{\partial q}$ est approximée par :

$$\frac{\partial y}{\partial q} \Big|_{q_0} \approx \frac{y(q) - y(q_0)}{\Delta q},$$

où la différence $\Delta q = q - q_0$. De nombreux logiciels intègrent des routines pour le calcul numérique de la différentiation.

En conclusion, l'identifiabilité *a posteriori* revient à étudier le rang de la matrice de sensibilité. Chaque paramètre de la structure en question est identifiable si la fonction de sensibilité liée à ce paramètre n'est pas colinéaire à aucune autre colonne de la matrice S_y . Comme l'identifiabilité *a priori*, cette analyse est *qualitative*. Toutefois, il est possible de la quantifier. La dépendance linéaire est directement liée au conditionnement de la matrice. Plus la matrice de sensibilité liée au paramètre est de faible conditionnement, plus il est difficile de l'identifier. Rappelons que le conditionnement κ d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est donné par :

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^\dagger\|$$

où $\|A^\dagger\|$ est l'inverse généralisé de A et $\|\cdot\|$ est une norme matricielle. Pour la norme 2, $\kappa(A)$ devient :

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} \geq 1$$

où $\sigma(A)$ est la valeur singulière de A . D'après cette formule, plus le conditionnement est petit (proche de 1), plus la matrice est loin d'être singulière. Par conséquent, une matrice de sensibilité de conditionnement élevé sera plus identifiable qu'une autre avec un conditionnement plus faible.

L'étude du conditionnement des matrices de sensibilité permet ainsi de classifier et de sélectionner les paramètres identifiables. Ce concept de degré de dépendance linéaire est largement utilisé dans les bioprocédés où le nombre de paramètres est parfois très important et par conséquent difficile à identifier simultanément. Dans [35] plusieurs techniques de classification sont présentées.

Dans ce travail, nous ne disposons pas de valeurs nominales pour les paramètres χ_e et S et par conséquent l'identifiabilité *a posteriori* ne peut être étudiée. Néanmoins, une fois les paramètres estimés on peut toujours étudier leur identifiabilité *a posteriori*.

La matrice de sensibilité et son conditionnement jouent un rôle important dans *l'identifiabilité pratique*. Nous ne développons pas ce point ; notons toutefois que la matrice d'information de Fisher (F) exprimant le contenu informatif des données expérimentales [79], est donnée par :

$$F = \frac{1}{\sigma^2} S_{y,q}^T S_{y,q}$$

où σ^2 est la variance des bruits de mesure. Ces notions peuvent être utilisées dans la validation du processus d'estimation.

Dans cette section, le concept d'identifiabilité a été analysé et deux méthodes ont été présentées. La première *l'identifiabilité a priori* consiste à étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème d'estimation des paramètres (*problème inverse*) d'une structure de modèle dans le cadre idéal (sans erreurs de modélisation et sans bruits de mesure). L'approche algébrique différentielle a été utilisée à travers la méthode DAISY pour démontrer l'identifiabilité *a priori* de notre structure (3.19).

Par la suite, l'identifiabilité *a posteriori* a été discutée. Grâce à l'étude du rang et du conditionnement de la matrice de sensibilité, l'étude n'est plus uniquement *qualitative* mais aussi *quantitative*. Ceci n'est vrai que pour une étude locale.

Ces deux concepts de l'identifiabilité permettent de prouver que le modèle est bien posé dans le sens de Hadamard. À ce stade, nous pouvons à présent passer à la recherche de méthodes d'estimation propres à notre cas d'étude.

3.3 Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant la méthode des moindres carrés récurrents à entrées inconnues (MCR-EI)

L'estimation par la méthode des moindres carrés remonte aux travaux de Karl Friedrich Gauss en 1809. Depuis les années 60, cette méthode a connu un regain d'intérêt avec l'apparition des méthodes récursives ([26], [4], [76],...). Une bibliographie générale et récapitulative se trouve dans [80]. L'objectif des méthodes en ligne (récursives) est le suivi des variations (lentes en moyenne) de la dynamique du système étudié, ce qui permet de prendre des décisions en temps réel tout en économisant les ressources mémoire et le temps de calcul. Ces algorithmes ont été utilisés dans des applications plus ou moins complexes (thermique, génie des procédés, aéronautique, robotique,...) et dans des champs aussi variés que la commande, le filtrage et la surveillance des systèmes.

La littérature est riche en termes d'algorithmes d'identification récursive ; ceci est dû à l'existence de plusieurs approches permettant de traiter ce sujet. Dans le livre de Ljung et Söderström *Theory and practice of recursive identification* [80], ces différentes formulations ont été résumées en quatre grands thèmes. Notons que toutes ces approches, rentrent dans le cadre général de l'optimisation et par conséquent elles sont optimales (fournissent des solutions exactes) pour des problèmes où la fonction objectif est quadratique par rapport à ses arguments. Dans le cas contraire (systèmes non-linéaires), ces méthodes proposent des approximations "en ligne" de la solution du problème. Nous présentons ci-dessous une introduction brève à chaque thème en s'inspirant de [80]. Pour plus de détails et de références, il est recommandé de consulter ce livre.

- **Par modification des méthodes d'identification hors-ligne :**

Dans les méthodes d'identification hors-ligne, les données sont d'abord collectées, stockées et traitées par la suite. Elles ont l'avantage d'être indépendantes de la paramétrisation choisie pour la description du système mais souffrent de leur caractère hors-ligne, les empêchant de traiter les systèmes temps-variant et limitant leurs champs d'application, vu leur dépendance aux capacités de calcul et de stockage. La méthode récursive modifie l'algorithme d'identification hors-ligne en imposant au vecteur d'observation une taille fixée et en l'adaptant en ligne (à fur et à mesure que de nouvelles données arrivent). Ainsi seules les variables *clés* (les mesures et les fonctions de pondération) à l'instant présent t et la valeur précédente de l'estimation à $t - 1$ sont sauvegardées pour le calcul de la nouvelle valeur estimée à l'instant t .

- **Par approximation stochastique :**

L'approximation stochastique a été développée dans le cadre de l'estimation séquentielle des paramètres. Pour reprendre les notations de Ljung et al. [80], soit $e(t)$ la variable regroupant les mesures à l'instant t , x le vecteur des paramètres et $Q(e(t), x)$ une fonction reliant x à $e(t)$. L'objectif est de trouver x^* solution du problème :

$$EQ(e(t), x) = f(x) = 0 \tag{3.34}$$

où E l'opérateur espérance mathématique agissant sur la fonction Q par rapport au vecteur des mesures $e(t)$. Plusieurs solutions récursives au problème (3.34) existent : la méthode de *Robbin* et *Moor*, la méthode du gradient stochastique, la méthode de Newton stochastique,...

- **Par régressions pseudo-linéaires et en utilisant des techniques basées sur un modèle de référence :**

Il s'agit de deux approches différentes mais aboutissant au même résultat [80]. L'approche par régression pseudo-linéaire est une extension directe de la méthode des moindres carrés en intégrant dans le vecteur de régression des variables non observables (afin de garder la structure de la méthode des moindres carrés). Ainsi, cet algorithme a pour objectif d'estimer les paramètres inconnus en parallèle avec la reconstruction du vecteur de régression en se basant sur la méthode des moindres carrés récurrents.

Dans les techniques basées sur un modèle de référence (dans le même esprit de la commande adaptative), l'objectif est de trouver à chaque instant le vecteur des grandeurs inconnues minimisant l'erreur quadratique entre la sortie du système (la mesure) et la sortie du modèle. L'algorithme final est semblable à celui de la méthode des moindres carrés récurrents. La différence réside dans le vecteur de régression, il est formé uniquement des sorties de prédictions (de modèle) aux instants précédents, la sortie mesurée n'y figure pas. Par conséquent, cet algorithme est moins sensible aux bruits de mesures. La construction particulière du vecteur de régression permet de considérer cette technique comme un cas particulier de la méthode de régression pseudo-linéaires.

- **Par filtrage non-linéaire (approche bayésienne) :**

Dans l'approche bayésienne, le paramètre est considéré comme une variable aléatoire avec une loi de distribution *a priori*. Cette approche est fortement liée à l'estimation linéaire ou non-linéaire de l'état (filtrage). L'idée est que la corrélation entre les mesures (y^t, u^t) à l'instant t et la grandeur inconnue $(\theta(t))$ permet de la caractériser en cherchant à identifier sa fonction de densité de probabilité *a posteriori* :

$$p(\theta(t)|y(t), u(t)).$$

Pour décrire $p(\theta(t)|y(t), u(t))$ différents opérateurs stochastiques (ou statistiques) peuvent être candidats. Généralement, on opte pour l'espérance mathématique conditionnelle $\hat{\theta}(t) = E(\theta(t)|y(t), u(t))$. D'autres méthodes s'intéressent à la valeur maximisant la fonction de densité de probabilité *a posteriori* (MAP : *Maximum A Posteriori estimate*) ou de minimiser la fonction objectif $E(|\theta - \hat{\theta}(t)|^2)$.

Dans le cas des distributions symétriques (exemple : distribution gaussienne), ces trois techniques sont équivalentes.

Toutes ces approches étaient développées pour traiter de l'estimation paramétrique dans des modèles linéaires à entrées connues. Dans [95] une nouvelle méthode de moindres carrés récursifs appelée MCR-EI (Moindre Carrés Récursifs à Entrées Inconnues) a été proposée pour l'estimation simultanée des paramètres et des entrées inconnues. Il est à noter qu'avant l'application de la méthode MCR-EI à notre problématique, nous avons testé la méthode MCR classique mais sans issue, l'algorithme ne pouvait converger même en utilisant un facteur d'oubli (constant ou variable, Cf. tableau 3.2). Ce résultat n'est pas reporté dans ce manuscrit car il est prévisible en lui-même. La MCR standard n'a pas été développée pour l'estimation des entrées et donc des paramètres à dynamique pouvant être rapide.

Dans ce qui suit, nous présentons en deux étapes comment on applique cette méthode à notre système (pour plus de détails, se référer à [95]). En premier, nous supposons négligeable la dynamique des paramètres et nous traitons le problème d'estimation simultanée d'un vecteur de paramètres constants θ en présence d'entrées inconnues $\beta(t)$ (temps-variant). Une fois la méthode d'estimation établie, nous passons à l'estimation du vecteur des paramètres temps-variant $\theta(t)$ et de l'entrée $\beta(t)$.

3.3.1 Estimation simultanée de θ et $\beta(t)$

Le système donné par l'équation (3.19) peut se mettre sous la forme suivante en utilisant la formule donnée dans (3.23) :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (M^{-1}PWX(t)) \theta(t) - \frac{1}{\tau}X(t) + \mathcal{D}\beta(t), \\ y(t) = X(t), \end{cases} \quad (3.35)$$

Pour être conforme au cadre général de la méthode des moindres carrés standard, la sortie (la mesure) est exprimée en fonction des paramètres inconnus, ce qui revient à ré-écrire le système (3.35) ainsi :

$$Y(t) = \varphi(t) \theta(t) + \mathcal{D}\beta(t) + \epsilon(t), \quad (3.36)$$

où $\epsilon(t)$ est le bruit d'état supposé blanc gaussien ; le nouveau vecteur de sortie $Y(t)$ et la matrice d'observation φ de dimension $((n+1) \times r)$ sont donnés par :

$$Y(t) = \dot{X} + \frac{1}{\tau}X(t), \quad (3.37)$$

$$\varphi(t) = M^{-1}PWX(t). \quad (3.38)$$

À chaque instant de mesure $t = i\Delta t$, $i = 1, \dots, k$ où Δt est la période d'échantillonnage, l'équation (3.35) peut se mettre sous la forme discrète suivante :

$$Y(i) = \varphi(i) \theta(i) + \mathcal{D}\beta(i) + \epsilon(i). \quad (3.39)$$

Soit $\theta(i)_e = \begin{bmatrix} \theta(i) \\ \beta(i) \end{bmatrix}$ le vecteur étendu des paramètres et des entrées inconnus de dimension $(r+d)$ et $\varphi_e(i) = \begin{bmatrix} \varphi(i) & \mathcal{D} \end{bmatrix}$ la matrice des observations étendue, de dimension $(n+1 \times r+d)$, l'équation (3.39) devient alors :

$$Y(i) = \varphi_e(i) \theta_e(i) + \epsilon(i). \quad (3.40)$$

$\hat{\theta}_e$ est l'estimé du vecteur des paramètres/entrées inconnus θ_e minimisant le critère des moindres carrés suivant :

$$J = \sum_{i=1}^k \Delta(i)^T \Delta(i), \quad (3.41)$$

où $\Delta(i) = Y(i) - \varphi_e(i) \theta_e(i)$. En combinant l'ensemble des équations obtenues pour $i = 1, 2, \dots, k$ et en supposant que θ est à dynamique nulle i.e. $\theta(i+1) = \theta(i)$, le vecteur de sortie $\bar{Y}(k)$ regroupant toutes les sorties de $i = 1, \dots, k$ définies dans (3.40) est donné par :

$$\bar{Y}(k) = \Phi_e(k) \Theta_e(k) + E(k), \quad (3.42)$$

où :

$$\bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y(1) \\ Y(2) \\ \vdots \\ Y(k) \end{bmatrix}, \quad \Theta_e(k) = \begin{bmatrix} \theta(k) \\ \beta(1) \\ \vdots \\ \beta(k) \end{bmatrix}, \quad E(k) = \begin{bmatrix} \epsilon(1) \\ \vdots \\ \epsilon(k) \end{bmatrix},$$

et :

$$\Phi_e(k) = \begin{bmatrix} \varphi(1) & \mathcal{D} & 0_{n+1 \times d} & 0_{n+1 \times d} & \cdots & 0_{n+1 \times d} \\ \varphi(2) & 0_{n+1 \times d} & \mathcal{D} & 0_{n+1 \times d} & \cdots & 0_{n+1 \times d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(k) & 0_{n+1 \times d} & 0_{n+1 \times d} & 0_{n+1 \times d} & \cdots & \mathcal{D} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le critère donné par (3.41) peut être mis sous la forme compacte suivante :

$$J(k) = \bar{\Delta}_k^T \bar{\Delta}_k, \quad (3.43)$$

avec : $\bar{\Delta}_k = \bar{Y}(k) - \Phi_e(k) \Theta_e(k)$.

Soit $\hat{\theta}(k)$ l'estimé de $\theta(k)$ et $\hat{\beta}(i|k)$ l'estimé de $\beta(i)$ à l'instant $t = k \Delta t$ avec $i \leq k$. L'estimé du vecteur des paramètres/entrées inconnus $\Theta_e(k)$ à l'instant $t = k \Delta t$ sera donc défini par :

$$\hat{\Theta}_e(k) = [\theta(k) \quad \beta(1|k) \quad \beta(2|k) \quad \beta(3|k) \quad \cdots \quad \beta(k|k)].$$

$\hat{\Theta}_e(k)$ est solution de la minimisation du critère des moindres carrés donné dans (3.43). La solution analytique (hors-ligne) est calculée en utilisant l'inverse généralisé de Moore-Penrose, et s'écrit :

$$\hat{\Theta}_e(k) = \left[\Phi_e(k)^T \Phi_e(k) \right]^{-1} \Phi_e^T(k) \bar{Y}(k). \quad (3.44)$$

Soit $P_e(k) = [\Phi_e(k)^T \Phi_e^T(k)]^{-1}$, (3.44) devient :

$$\hat{\Theta}_e(k) = P_e(k) \Phi_e(k) \bar{Y}(k). \quad (3.45)$$

D'après (3.45), en remplaçant $t = k \Delta t$ par $t = k + 1 \Delta t$, l'estimé de $\Theta(k + 1)$ est donné par :

$$\hat{\Theta}_e(k + 1) = P_e(k + 1) \Phi_e(k + 1) \bar{Y}(k + 1). \quad (3.46)$$

La forme récursive de (3.44) est l'algorithme qui fournit la relation entre $\Theta(k + 1)$ et $\Theta(k)$. Pour ce faire, dans [95] on adopte la partition suivante de $\bar{Y}(k + 1)$ et de $\Phi_e(k + 1)$:

$$\bar{Y}(k + 1) = \begin{bmatrix} \bar{Y}(k) \\ Y(k + 1) \end{bmatrix}, \quad \Phi_e(k + 1) = \begin{bmatrix} \Phi_e(k) & 0_{k(n+1) \times d} \\ \bar{\varphi}(k + 1) & \mathcal{D} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

où :

$$\bar{\varphi}(k) = [\varphi(k) \quad 0_{n+1 \times kd}]$$

En utilisant le lemme d'inversion de matrice et la formule d'inversion ci-dessous

$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}$ avec A matrice inversible,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2\bar{Q}^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\bar{Q}^{-1} \\ -\bar{Q}^{-1}A_3A_1^{-1} & \bar{Q}^{-1} \end{bmatrix},$$

où A_1 est une matrice carrée inversible et $\bar{Q} = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$

et en remplaçant (3.45) et (3.47) dans (3.46), la solution récursive de $\hat{\Theta}_e(k + 1)$ est exprimée par l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_e(k + 1) &= [\hat{\hat{\Theta}}(k + 1) + \bar{\varphi}^T(k + 1)\mathcal{D} \hat{\beta}(k + 1)], \\ \hat{\beta}(k + 1) &= S(k + 1) \mathcal{D}^T (Y(k + 1) - \bar{\varphi}(k + 1) \hat{\hat{\Theta}}(k + 1)), \\ \hat{\hat{\Theta}}(k + 1) &= \hat{\Theta}(k) + K_e(k + 1) (Y(k + 1) - \bar{\varphi}(k + 1) \hat{\Theta}(k + 1)), \\ K_e(k + 1) &= P_e(k) \bar{\varphi}^T(k + 1) (I_{n+1} + \bar{\varphi}(k + 1) P_e(k) \bar{\varphi}^T(k + 1)), \\ S(k + 1) &= [\mathcal{D}^T (I_{n+1} - \bar{\varphi}(k + 1) \bar{P}(k + 1) \bar{\varphi}^T(k + 1)) \mathcal{D}]^{-1}, \\ \bar{P}(k + 1) &= (I_{n+1} - K_e(k + 1) \bar{\varphi}(k + 1)) P_e(k), \\ P_e(k + 1) &= \begin{bmatrix} (I_{r+kd} + \bar{P}(k + 1) \bar{\varphi}^T(k + 1) \mathcal{D} S(k + 1) \mathcal{D}^T \bar{\varphi}(k + 1)) \bar{P}(k + 1) & \bar{P}(k + 1) \bar{\varphi}^T(k + 1) \mathcal{D} S(k + 1) \\ S(k + 1) \mathcal{D}^T \bar{\varphi}(k + 1) \bar{P}(k + 1) & S(k + 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

La dimension de $\Theta_e(k + 1)$ est égale à $r + k.d$ et ainsi elle augmente au fur et à mesure que le nombre d'échantillons augmente. Par conséquent, l'effort de calcul devient important et

couteux. Aussi, à fin de parler d'une solution entièrement récursive, on a besoin de trouver la relation qui lie d'une part $\hat{\theta}(k+1)$ à $\hat{\theta}(k)$ et d'autre part $\hat{\beta}(k+1)$ et $\hat{\beta}(k)$. C'est pourquoi dans [95], les partitions suivantes sont adoptées :

$$\hat{\Theta}_e(k) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(k) \\ \hat{\beta}^*(k) \end{bmatrix}, \quad P_e(k) = \begin{bmatrix} P_\theta(k) & P_{\theta,\beta}(k) \\ P_{\beta,\theta}(k) & P_\beta(k) \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\hat{\beta}^*(k) = [\hat{\beta}(1|k), \dots, \hat{\beta}(k|k)].$$

En substituant (3.49) dans (3.48), on obtient la solution récursive dans le sens de l'estimation des moindres carrés pour $\hat{\theta}(k+1)$ et $\hat{\beta}(k+1)$ donnés par l'algorithme présentée dans le tableau 3.1 (pour le détail du calcul voir [95]). $K_\theta(k)$ est la matrice de gain d'état liée à

<p>Initialisation : $\hat{\theta}(1), P_\theta(1) = \alpha I_r$ ($\alpha \gg 1$)</p>
<p>Pour $k = 1 : N$</p> $K_\theta(k+1) = P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \left[I_{n+1} + \varphi(k+1) P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \right]^{-1}$ $S(k+1) = \left[\mathcal{D}^T (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1)) \mathcal{D} \right]^{-1}$ $\hat{\beta}(k+1) = S(k+1) \mathcal{D}^T (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1))$ $(Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k))$ $\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K_\theta(k+1) \left[Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k) - \mathcal{D} \hat{\beta}(k+1) \right]$ $P_\theta(k+1) = (I_r + K_\theta(k+1) \mathcal{D} S(k+1) \mathcal{D}^T \varphi(k+1))$ $(I_r - K_\theta(k+1) \varphi(k+1)) P_\theta(k)$

TABLE 3.1 – Algorithme de MCR-EI pour l'estimation récursive de θ et β

l'estimation de $\theta(k)$, $S(k+1)$ est le gain d'entrée et P_θ est la matrice du gain d'adaptation, définie positive. Il est facile de retrouver l'algorithme des moindres carrés récurrents standard à entrées connues en prenant $\beta = 0$ dans l'algorithme du MCR-EI (tableau 3.1).

Notons aussi que les gains K_θ et S sont inversement proportionnels. Plus K_θ est grand, plus l'erreur d'estimation est petite et par conséquent l'état estimé converge vers sa vraie valeur et le gain d'entrée S est faible. À l'inverse, si le gain d'état K_θ est faible, S devient grand afin de mettre à jour l'estimation de l'entrée est ainsi pouvoir réduire l'erreur d'estimation.

Dans cet algorithme proposé, le vecteur des paramètres θ est à dynamique nulle. Dans la sous-section suivante, le problème d'estimation du vecteur des paramètres temps-variants $\theta(t)$ en parallèle avec l'estimation du vecteur des entrées inconnues $\beta(t)$ sera abordé.

3.3.2 Méthode d'estimation simultanée de $\theta(t)$ et $\beta(t)$: MCR-EI adaptative

Afin de prendre en compte la variation temporelle de $\theta(t)$ (sa dynamique) dans l'algorithme des MCR, la méthode la plus répandue est celle de l'introduction d'un facteur d'oubli λ constant [80]. Cette méthode a été largement étudiée et appliquée. Toutefois, il reste que le choix de ce facteur se fait généralement d'une manière heuristique et qu'il n'a pas de signification physique en lui-même, ce qui complique son analyse. Ce facteur appartient à l'intervalle $[0, 1]$ et dans ce cas, la matrice du gain d'adaptation P_θ est remplacée par $\lambda^{-1} P_\theta$. Dans [73] et [72], une nouvelle technique reposant sur deux facteurs d'oubli λ_1, λ_2 a été présentée. Dans ce cas, aussi bien la matrice du gain d'adaptation P_θ que la matrice de gain K_θ sont pondérées et deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\theta(k+1) = P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} I_{n+1} + \varphi(k+1) P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \right]^{-1} \\ P_\theta(k+1) = \frac{1}{\lambda_1} (I_r + K_\theta(k+1) \mathcal{D} S(k+1) \mathcal{D}^T \varphi(k+1)) \\ \qquad \qquad \qquad (I_r - K_\theta(k+1) \varphi(k+1)) P_\theta(k). \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Dans [72], on trouve aussi une description précise des principaux algorithmes MCR pondérés. Le tableau ci-dessous est tiré de [85]. Il présente un récapitulatif des possibilités de choix de λ_1 et λ_2 . L'inconvénient majeur du choix d'un gain constant est sa sensibilité au bruit

Nom	Facteur d'oubli	Utilisation
Gain décroissant	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$	Système stationnaire
Facteur d'oubli fixe	$\lambda_1 \in]0, 1[, \lambda_2 = 1$	Système lentement variable
Facteur d'oubli variable	$\lambda_1(k) = \alpha_0 \lambda(k-1) + (1 - \alpha_0),$ $\lambda_2 = 1$	Traitement des conditions initiales
Trace constante	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $tr(P_\theta(k)) = tr(P_\theta(k-1))$	Système non-stationnaire. Gain borné
Gain constant	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \in \emptyset$	Convergence lente. Robustesse vis-à-vis des variations

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des choix du facteur d'oubli dans l'estimation des systèmes temps-variant.

de mesure [80]. Si λ_1 est choisi de faible valeur (proche du zéro) l'algorithme est capable de poursuivre les variations paramétriques mais il est très sensible au bruit de mesure. En

contre partie, si λ_1 est proche de 1, l'algorithme des MCR est robuste vis-à-vis les bruits de mesure mais l'aptitude à la poursuite des variations est compromise.

La méthode du facteur d'oubli variable a été proposée comme alternative pour surmonter cette difficulté. Toutefois, elle dépend du choix de ce paramètre et peut détecter uniquement l'instant de variation des paramètres et non le paramètre (ou les paramètres) qui varie. Par conséquent à la variation d'un seul paramètre, tous les autres paramètres exhibent un comportement oscillatoire [132].

Dans [75], une approche se basant sur la variation de la trace de la matrice du gain d'adaptation P_θ a été recommandée. Il s'agit d'ajuster les éléments de la diagonale de la matrice P_θ en se basant sur un critère empirique. Pour le cas étudié dans [75], cette technique a de bonnes performances mais ne peut être généralisée à cause de son caractère empirique.

Dans [94], une nouvelle idée pour le choix d'un facteur d'oubli variable se basant sur la reconstruction du signal de bruit de mesure dans l'équation d'erreur a été développée. Cette méthode est robuste par rapport à la nature du bruit de mesure mais l'ajustement de la loi de variation du facteur d'oubli nécessite lui-même le choix de cinq autres paramètres.

Les méthodes proposées dans le tableau 3.2 ainsi que la technique de [94] ont été testées sur notre problématique. Le résultat était soit des performances insuffisantes (temps de convergence très lent) soit une erreur de variation importante (ce qui était prévisible).

Dans [132], une méthode adaptative pour la variation du facteur d'oubli a été suggérée. Afin de suivre la variation de chaque paramètre $\theta_j(k + 1)$, l'erreur d'estimation $[\hat{\theta}_j(k + 1) - \theta_j(k + 1)]$ est remplacée par une version pondérée i.e. $\lambda_j(k + 1) [\hat{\theta}_j(k) - \theta_j(k)]$ où λ_j est calculé de telle sorte que dans la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $[\hat{\theta}_j(k) - \theta_j(k)]$, apparaît uniquement la contribution du bruit et non celle due à la variation des paramètres.

En se basant sur la relation linéaire entre la matrice du gain d'adaptation P_θ et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a posteriori* $\mathbb{E}[(\theta(k + 1) - \hat{\theta}(k)) (\theta(k + 1) - \hat{\theta}(k))^T]$ donnée par [132] :

$$P_\theta(k) = \sigma^{-2}(k) \mathbb{E}[(\theta(k + 1) - \hat{\theta}(k)) (\theta(k + 1) - \hat{\theta}(k))^T]$$

où σ^2 est la variance du bruit ϵ supposé blanc gaussien et \mathbb{E} est l'opérateur espérance mathématique, $P_\theta(k)$ est remplacée dans l'algorithme de MCR-EI par $\Lambda(k + 1) P_\theta(k) \Lambda(k + 1)$. Les

expressions de K_θ et $P_\theta(k)$ deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\theta(k+1) = \Lambda(k+1) P_\theta(k) \Lambda(k+1) \varphi^T(k+1) \\ \left[I_{n+1} + \varphi(k+1) \Lambda(k+1) P_\theta(k) \Lambda(k+1) \varphi^T(k+1) \right]^{-1} \\ P_\theta(k+1) = (I_r + K_\theta(k+1) \mathcal{D} S(k+1) \mathcal{D}^T \varphi(k+1)) \\ (I_r - K_\theta(k+1) \varphi(k+1)) \Lambda(k+1) P_\theta(k) \Lambda(k+1). \end{array} \right. \quad (3.51)$$

où $\Lambda(k)$ est une matrice diagonale à éléments $\lambda_1(k), \dots, \lambda_r(k)$, appelée la matrice du facteur d'adaptation [132].

3.3.2.1 Calcul de la matrice facteur d'oubli $\Lambda(k)$

Soit $\bar{\gamma}(k+1)$ l'erreur d'estimation *a posteriori* et $\gamma(k+1)$ l'erreur d'estimation *a priori* définies par :

$$\bar{\gamma}(k+1) = Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k+1) - \mathcal{D} \hat{\beta}(k+1), \quad (3.52)$$

$$\gamma(k+1) = Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k) - \mathcal{D} \hat{\beta}(k+1), \quad (3.53)$$

En remplaçant $\hat{\theta}(k+1)$ par son expression donnée dans l'algorithme du tableau 3.1, (3.52) devient :

$$\bar{\gamma}(k+1) = (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1)) \gamma(k+1). \quad (3.54)$$

Ainsi à partir de (3.54), la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a posteriori* (l'espérance mathématique de l'expression $\bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1)$) sera donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1)) &= (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1)) V(k+1) \\ &\quad (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1))^T \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $V(k+1)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a priori* :

$$V(k+1) = \mathbb{E}(\gamma(k+1) \gamma(k+1)^T).$$

Quand :

$$\hat{\theta}(k+1) \longrightarrow \theta(k+1)$$

et

$$\hat{\beta}(k+1) \longrightarrow \beta(k+1),$$

alors

$$Y(k+1) = \epsilon(k+1)$$

et l'équation (3.55) devient :

$$\mathbb{E}(\bar{\gamma}(k+1)\bar{\gamma}^T(k+1)) = \mathbb{E}(\epsilon(k+1)\epsilon^T(k+1)) = \sigma^2(k+1). \quad (3.56)$$

En considérant le lemme d'inversion des matrices et en remplaçant (3.56) et l'expression de K_θ donnée dans (3.51) dans (3.56), on obtient :

$$\begin{aligned} V(k+1) - \left[I_{n+1} + \varphi(k+1)(\Lambda(k+1)P_\theta(k)\Lambda^T(k+1))\varphi^T(k+1) \right] \sigma^2(k+1) \\ \left[I_{n+1} + \varphi(k+1)(\Lambda(k+1)P_\theta(k)\Lambda^T(k+1))\varphi^T(k+1) \right]^T = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dans l'équation (3.57), $P_\theta(k)$ et $\sigma^2(k+1)$ sont calculées alors que φ est supposée mesurable. L'estimation de la matrice $V(k+1)$ et de la variance du bruit $\sigma^2(k+1)$ seront abordées ultérieurement. Cette équation est connue sous le nom de la condition adaptative de poursuite ([132]).

La matrice $V(k+1)$ de dimension $(n+1) \times (n+1)$ est symétrique, définie positive par définition et donc elle comprend $(n^2 + 3n + 2)/2$ éléments. Par conséquent, nous avons $(n^2 + 3n + 2)/2$ équations à r inconnues $\lambda_j(k+1)$, $j = 1, \dots, r$. Si le nombre d'équation est égal au nombre d'inconnues, les éléments de $\Lambda(k+1)$ sont uniques. Si $r > (n^2 + 3n + 2)/2$ l'équation (3.57) admet une infinité de solutions. Par contre, si $r < (n^2 + 3n + 2)/2$ (ce qui est notre cas), la solution $\Lambda(k+1)$ peut être obtenue en utilisant la méthode des moindres carrés. Cependant, l'équation (3.57) est non-linéaire, ce qui complique le calcul de sa solution $\Lambda(k+1)$.

3.3.2.2 Cas particulier

Si on considère une matrice $\Lambda(k+1)$ diagonale dont les éléments diagonaux sont identiques i.e. $\Lambda(k+1) = \lambda I_r$, la solution de (3.57) est donnée par [132] :

$$\lambda(k+1) = \frac{-T_a + \sqrt{T_a^2 - T_b T_c}}{T_b}, \quad (3.58)$$

avec :

$$\begin{cases} T_a = \text{tr}(H(k+1)), \\ T_b = \text{tr}(H^2(k+1)), \\ T_c = (n+1 - \text{tr}(V(k+1)))/\sigma^2(k+1). \end{cases} \quad (3.59)$$

tel que $\lambda(k+1) \geq 1$ et $H(k+1) = \varphi(k+1)P_\theta(k+1)\varphi(k+1)$. Cette solution appartient à l'ensemble des méthodes à facteur d'oubli variable. Elle représente un cas particulier de la méthode proposée par [132].

3.3.2.3 Estimation de $V(k+1)$ et de $\sigma^2(k+1)$

$V(k+1)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a priori* et $\sigma^2(k+1)$ est la matrice de covariance du bruit de mesure. Comme on ne dispose que de mesures échantillonnées, la moyenne temporelle est utilisée pour approximer l'espérance mathématique :

$$\sigma^2(k+1) \simeq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{\gamma}(i) \bar{\gamma}^T(i). \quad (3.60)$$

En réalité, le bruit ϵ comprend aussi bien le bruit de mesure que les erreurs de modélisation ou le bruit numérique issu de la dérivée de la mesure i.e. \dot{X} et par conséquent, la valeur de $\mathbb{E}(\bar{\gamma}(i) \bar{\gamma}^T(i))$ peut être plus importante que σ^2 . Ceci peut être corrigé en multipliant σ^2 dans (3.60) par un coefficient $\mu \geq 1$ [95]. La moyenne temporelle de la matrice $V(k+1)$ est donnée par :

$$V(k+1) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k+1} \gamma(i) \gamma^T(i). \quad (3.61)$$

Afin de prendre en compte les variations temporelles de $\theta(k)$, un facteur de pondération ρ [49] mettant en valeur l'importance de la nouvelle mesure est introduit dans le calcul de $V(k+1)$ [132] :

$$V(k+1) = \frac{\gamma(k+1)\gamma^T(k+1) + \sum_{i=1}^k \rho_i(k+1)\gamma(i)\gamma^T(i)}{1 + \sum_{i=1}^k \rho_i(k+1)}, \quad (3.62)$$

où $\rho_i(k+1)$ est donné par :

$$\rho_i(k+1) = \nu^{k+1-i} \prod_{j=i}^k \lambda^{-1}(j), \quad (3.63)$$

où $\lambda(j)$ est le facteur d'oubli variable défini dans (3.58) et $\nu \in]0, 1]$. À partir des équations (3.62) et (3.63), une méthode récursive pour le calcul de $V(k+1)$ a été proposée dans [132], telle que :

$$\begin{cases} V(k+1) = G_1(k+1)/G_2(k+1), \\ G_1(k+1) = \gamma(k+1)\gamma^T(k+1) + \frac{\nu G_1(k)}{\lambda(k)}, & G_1(1) = \gamma(1)\gamma^T(1) \\ G_2(k+1) = 1 + \frac{\nu G_2(k)}{\lambda(k)}, & G_2(1) = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

Nous appelons la MCR-EI adaptative la combinaison de la méthode des moindres carrés récursifs à entrées inconnues et l'algorithme ci-dessus d'adaptation du facteur d'oubli ([132]). Elle est décrite dans le tableau 3.3. Il est bien connu que la méthode MCR est en général souhaitée pour la résolution des problèmes inverses linéaires. Pour les systèmes d'état linéaires, une alternative directe de la MCR est le filtre de Kalman.

<p>Initialisation : $\hat{\theta}(1), \hat{\beta}(1), P_\theta(1) = \alpha I_r$ ($\alpha \gg 1$), $G_2(1) = 1, \lambda(1),$ $\mu, G_1(1) = \gamma(1)\gamma^T(1),$</p>
<p>Pour $k = 1 : N$</p> $K_\theta(k+1) = \lambda(k) P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \left[I_{n+1} + \lambda(k) \varphi(k+1) P_\theta(k) \varphi^T(k+1) \right]^{-1}$ $S(k+1) = \left[\mathcal{D}^T (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1)) \mathcal{D} \right]^{-1}$ $\hat{\beta}(k+1) = S(k+1) \mathcal{D}^T (I_{n+1} - \varphi(k+1) K_\theta(k+1)) (Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k))$ $\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + K_\theta(k+1) \left[Y(k+1) - \varphi(k+1) \hat{\theta}(k) - \mathcal{D} \hat{\beta}(k+1) \right]$ $P_\theta(k+1) = \lambda(k) (I_r + K_\theta(k+1) \mathcal{D} S(k+1) \mathcal{D}^T \varphi(k+1))$ $(I_r - K_\theta(k+1) \varphi(k+1)) P_\theta(k),$ $G_1(k+1) = \bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1) + \frac{\mu G_1(k)}{\lambda(k)}, \quad G_2(k+1) = 1 + \frac{\mu G_2(k)}{\lambda(k)},$ $V(k+1) = G_1(k+1) / G_2(k+1),$ $H(k+1) = \phi(k+1) P_\theta(k+1) \phi^T(k+1),$ $T_a = \text{tr}(H(k+1)), \quad T_b = \text{tr}(H^2(k+1)), \quad T_c = \frac{n+1 - \text{tr}(V(k+1))}{\sigma^2(k+1)}$ $\lambda(k+1) = \frac{-T_a + \sqrt{T_a^2 - T_b T_c}}{T_b}.$

TABLE 3.3 – Algorithme de la MCR-EI adaptative

3.4 Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues (FKE-EI)

Dans la littérature, le problème d'estimation de l'état et de l'entrée a reçu une importante attention depuis les années 70 avec les travaux de [48] où l'entrée inconnue était considérée comme un état étendu avec une distribution gaussienne. Cette hypothèse n'est pas toujours valable. Dans plusieurs systèmes, l'entrée est déterministe ou plus généralement non-gaussienne. Dans [67], un filtre non-biaisé à variance minimale a été proposé pour

l'estimation de l'état indépendamment de l'entrée inconnue. Ce travail [67], constitue le premier papier dans le cadre des estimateurs à entrées inconnues et a ouvert la voie à plusieurs travaux s'inscrivant dans le même cadre, citons entre autres [28], [30], [46], [43]. Dans ces estimateurs proposés, le problème a été traité dans le cadre des estimateurs non-biaisés à variance minimale.

D'autres techniques développées pour des observateurs se basant sur la manipulation algébrique des matrices du système d'état ont été proposées dans [41], [29]. D'autres utilisant les modes glissants [44] ou les LMI [52] ont été aussi considérées.

La majorité de ces méthodes, quand elles n'ignorent pas l'estimation des entrées inconnues, traitent uniquement le problème de l'estimation des états et des entrées et ne peuvent être aisément étendues au problème d'estimation des paramètres. L'optimalité de ces techniques est garantie (dans le cas des estimateurs) dans le sens non-biaisé à variance minimale.

Dans [96], un filtre estimant les états et les entrées inconnues sans transfert direct entre l'entrée et la sortie se basant sur le principe du Filtre de Kalman (FK) a été développé. Ce filtre est optimal aussi bien dans le sens non-biaisé à variance minimale que dans le sens des moindres carrés en minimisant une fonction objectif pondérée, de moindres carrés, par rapport à un état étendu incluant l'état et toutes les entrées à chaque instant d'échantillonnage. Ensuite, la solution récursive du problème a été calculée après un complexe calcul matriciel.

Dans cette section, nous commençons d'abord par présenter ce filtre appelé Filtre de Kalman à Entrées Inconnues (FK-EI), ses propriétés et ses possibles formulations alternatives. Ensuite, vu que l'objectif est d'estimer en plus de l'état et des entrées le vecteur des paramètres θ , le Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI) est proposé en deuxième partie.

3.4.1 Filtre de Kalman à Entrées Inconnues (FK-EI)

Dans [95], une nouvelle variante du filtre de Kalman a été introduite pour la première fois comme solution au problème de l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues d'un système d'état linéaire. Ce filtre est optimal aussi bien dans le sens des moindres carrés que dans le sens de l'estimation non biaisée à variance minimale. Dans ce qui suit, nous allons rappeler la formulation de ce filtre donnée dans [96]. Pour ce faire, soit (3.65) la forme générale

d'un système d'état linéaire stochastique :

$$\begin{cases} X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)u(k) + w(k), \\ X(0) = 0, \\ y(k) = C(k)X(k) + v(k), \end{cases} \quad (3.65)$$

où $X \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée avec $n_u < n_y$, $A(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ et $C \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ sont respectivement les matrices d'état, d'entrée et de sortie supposées connues et $w(k)$ et $v(k)$ sont le bruit d'état et le bruit de mesure supposés décorrélés, blancs et gaussiens avec des matrices de covariance $W(k)$ et $V(k)$ connues :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(w) = \mathbb{E}(v) = 0, \quad i, j = 1, \dots \\ \mathbb{E}(w(i)w^T(j)) = W(i)\delta_{ij}, \\ \mathbb{E}(v(i)v^T(j)) = V(i)\delta_{ij}, \\ \mathbb{E}(v(i)w^T(j)) = 0. \end{cases} \quad (3.66)$$

On suppose aussi que la paire $(A(k), C(k))$ est détectable et que la matrice $A(k)$ est non-singulière.

Dans (3.65), l'entrée n'est pas directement injectée dans la sortie mais à travers la dynamique de l'état et donc, à $t = k dt$, on peut estimer $X(k)$ et $u(k-1)$. Soit $\hat{X}(k|k)$ et $\hat{u}(k-1|k)$ les estimés de $X(k)$ et $u(k-1)$ à l'instant $t = k dt$ et à partir des observations $(y(1), y(2), \dots, y(k))$.

En adoptant la technique développée dans [64], $\hat{X}(k|k)$ et $\hat{u}(k-1|k)$ peuvent être déterminés en minimisant la fonction objectif suivante :

$$J(k) = \bar{\Delta}^T(k) R(k) \bar{\Delta}(k), \quad (3.67)$$

où la matrice de pondération $R(k)$ est composée de l'inverse des matrices de covariance des bruits de modèle et de mesure $W(k)$ et $V(k)$. $\bar{\Delta}^T(k) = [\Delta(1), \Delta(2), \dots, \Delta(k)]$ est le vecteur de l'erreur en sortie, tel que :

$$\Delta_i(k) = y(i) - C(i)X(i), \quad i = 1, \dots, k \quad (3.68)$$

À chaque instant k , l'objectif est d'estimer $X(k)$ et le vecteur $\bar{u}(k-1) = [u(1), \dots, u(k-1)]$, or (3.68) est exprimé en fonction de $X(i)$. D'après l'équation de dynamique de l'état dans (3.65), la relation de transition entre $X(i)$ et $X(i+1)$ est donnée par :

$$X(i) = A^{-1}(i) (X(i+1) - B(i)u(i) - w(i)), \quad i = 1, 2, \dots, k-1. \quad (3.69)$$

En itérant sur i dans (3.69), la relation entre $X(i)$ et les grandeurs à estimer $X(k)$ et $\bar{u}(k-1)$ s'écrit :

$$X(i) = \Phi_{k,i}^{-1} X(k) - \left\{ \sum_{j=i}^{k-1} \Phi_{j+1,i}^{-1} [B(j)u(j) + w(j)] \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, \quad (3.70)$$

où :

$$\begin{cases} \Phi_{i,j}^{-1} = A_j^{-1} A_{j+1}^{-1} \cdots, A_{i-1}^{-1}, & i \geq j \\ \Phi_{i,i}^{-1} = I_{n_x}. \end{cases} \quad (3.71)$$

En remplaçant (3.70) dans (3.67), on obtient la relation entre $y(i)$ et $(X(k), \bar{u}(k-1))$ donnée par :

$$y(i) = y(i|k) + \tilde{v}(i|k), \quad (3.72)$$

avec :

$$\begin{cases} y(i|k) = C(i) \Phi_{k,i}^{-1} X(k) - C(i) \left\{ \sum_{j=i}^{k-1} \Phi_{j+1,i}^{-1} B(j)u(j) \right\}, & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \tilde{v}(i|k) = v(i) - C(i) \sum_{j=i}^{k-1} \Phi_{j+1,i}^{-1} w(j), & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \tilde{v}(k|k) = v(k), \quad y(k|k) = C(k) X(k), \quad \mathbb{E}(\tilde{v}(i)) = 0. \end{cases} \quad (3.73)$$

Ainsi $\bar{\Delta}(k)$ dans (3.67) devient :

$$\bar{\Delta}(k) = \bar{Y}(k) - A_e(k) X_e(k), \quad (3.74)$$

où $X_e(k)$ est le nouveau vecteur d'état étendu et $\bar{Y}(k)$ et $A_e(k)$ sont connus et définis par :

$$X_e(k) = \begin{bmatrix} X(k), \\ u(1), \\ u(2), \\ \vdots, \\ u(k-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad A_e(k) = \begin{bmatrix} \tilde{L}(k) & N(k) \\ \tilde{C}(k) & 0_{n_y \times n_u} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

dont les matrices $\tilde{L}(k)$, $N(k)$, $\tilde{C}(k)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(k) &= [C(k) \quad 0_{n_y \times n_u(k-2)}], \\ N(k) &= [-(C(1) \Phi_{k,1}^{-1} B(k-1)^T) \quad \cdots \quad -(C(k-1) \Phi_{k,k-1}^{-1} B(k-1)^T)]^T \\ \tilde{L}(k) &= \begin{bmatrix} L_{1,1}(k) & L_{1,2}(k) & L_{1,3}(k) & L_{1,4}(k) & \cdots & L_{1,k-1}(k) \\ L_{2,1}(k) & 0_{n_y \times n_u} & L_{2,3}(k) & L_{2,4}(k) & \cdots & L_{2,k-1}(k) \\ L_{3,1}(k) & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} & L_{3,4}(k) & \cdots & L_{3,k-1}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ L_{k-2,1}(k) & 0_{n_y \times n_u} & 0_{n_y \times n_u} & \cdots & 0_{n_y \times n_u} & L_{4,k-1}(k) \end{bmatrix} \\ L_{i,1}(k) &= C(i) \Phi_{k,i}^{-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \\ L_{i,j}(k) &= -C(i) \Phi_{j,i}^{-1} B(j-1) \quad i = 1, 2, \dots, k-2, \quad j = i+1, \dots, k-1. \end{aligned} \tag{3.76}$$

La matrice R de (3.67) devient la matrice de covariance de

$$\mathcal{V}(k) = [\tilde{v}^T(1|k), \dots, \tilde{v}^T(k|k)]^T,$$

et s'écrit :

$$R^{-1}(k) = \begin{bmatrix} \bar{W}_{1,1}(k) & \bar{W}_{1,2}(k) & \cdots & \bar{W}_{1,k-1}(k) & 0_{n_y \times n_y} \\ \bar{W}_{2,1}(k) & \bar{W}_{2,2}(k) & \cdots & \bar{W}_{2,k-1}(k) & 0_{n_y \times n_y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{W}_{k-1,1}(k) & \bar{W}_{k-1,2}(k) & \cdots & \bar{W}_{k-1,k-1}(k) & 0_{n_y \times n_y} \\ 0_{n_y \times n_y} & 0_{n_y \times n_y} & \cdots & 0_{n_y \times n_y} & V(k) \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

$$\bar{W}_{i,i}(k) = \sum_{l=i}^{k-1} [C(i) \Phi_{l+1,i}^{-1} W(l) \Phi_{l+1,i}^{-T} C^T(i)] + R(i),$$

$$\bar{W}_{i,j}(k) = \sum_{l=j}^{k-1} [C(i) \Phi_{l+1,i}^{-1} W(l) \Phi_{l+1,j}^{-T} C^T(j)],$$

$$\bar{W}_{i,j}(k) = \bar{W}_{j,i}^T(k), \quad (i, j = 1, 2, \dots, k-1 \text{ et } i \leq j).$$

Étant donné que la fonction objectif (3.67) est quadratique en $X_e(k)$, son estimé $\hat{X}_e(k|k) = [X(k|k), u(1|k-1), u(2|k) \cdots, u(k-1|k)]$ peut être obtenu en minimisant le critère (3.67) i.e :

$$\left. \frac{\partial J}{\partial X_e} \right|_{X_e = \hat{X}_e} = 0 \implies \hat{X}_e(k|k) = P_e(k) [A_e^T(k) R(k) \bar{Y}(k)], \tag{3.78}$$

$$P_e(k) = [A_e^T(k) R(k) A_e(k)]^{-1},$$

Une condition nécessaire pour l'inversibilité de la matrice $P_e(k)$ est que sa matrice A_e soit de rang égal à $(n_x + (k - 1)n_u)$, ce qui revient à imposer les conditions de rang suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rang} \left[C(1) \Phi_{k,1}^{-1} \cdots C(1) \Phi_{k,k-1}^{-1} \right]^T = n_x, \\ \text{rang} \left[-C(1) \Phi_{2,1}^{-1} B(2) \cdots -C(k-2) \Phi_{k-1,k-2}^{-1} B(k-1) \right]^T = (k-2)n_u \\ \text{rang} \left[(-C(1) \Phi_{k,1}^{-1} B(k-1))^T \cdots (-C(k-1) \Phi_{k,k-1}^{-1} B(k-1))^T \right] = n_u. \end{array} \right.$$

Avant de formuler la relation récursive pour le calcul de $X(k)$ et $u(k-1)$, il est d'abord nécessaire de trouver celle qui lie $X_e(k)$ à $X_e(k-1)$. Pour ce faire, il faut exprimer $\bar{Y}(k)$ en fonction de $\bar{Y}(k-1)$, $A_e(k)$ en fonction de $A_e(k-1)$, $P_e(k)$ en fonction de $P_e(k-1)$ et $R(k)$ en fonction de $R(k-1)$. Le résultat peut être consulté dans [95] et [96]. En suivant la méthodologie utilisée pour le développement de l'algorithme de la MCR-EI (§ 3.3), l'algorithme du filtre de Kalman à entrées inconnues (FK-EI) est donné dans le tableau 3.4

avec :

- $\hat{X}(k|k-1) := \mathbb{E}(X(k)|y(1), \dots, y(k-1))$ est la prédiction de $X(k)$ connaissant les mesures jusqu'à l'instant $t = (k-1) dt$, connu aussi sous le nom de l'estimation *a priori* de $X(k)$.
- $\hat{X}(k|k) := \mathbb{E}(X(k)|y(1), \dots, y(k))$ est l'estimation *a posteriori* de $X(k)$.
- $\hat{u}(k-1|k) := \mathbb{E}(u(k-1)|y(1), \dots, y(k))$ est l'estimation *a posteriori* de $u(k-1)$.
- $P(k|k-1) := \mathbb{E}((X(k) - \hat{X}(k|k-1))(X(k) - \hat{X}(k|k-1))^T)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a priori* de l'état.
- $P(k|k) := \mathbb{E}((X(k) - \hat{X}(k|k))(X(k) - \hat{X}(k|k))^T)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a posteriori* de l'état.
- $U(k)$ est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a posteriori* de l'entrée.

L'algorithme du filtre de Kalman standard peut être retrouvé en remplaçant $B(k) = 0$ et $\hat{u} = 0$ dans l'algorithme du FK-EI.

Dans le critère des moindres carrés (3.67), la matrice de pondération $R(k)$ représente l'inverse de la matrice de covariance du vecteur d'observation généralisé $\bar{Y}(k)$. Étant donné que cette matrice est définie positive, d'après le théorème de Gauss-Markov, l'unique estimé dans le sens des moindres carrés $X_e(k)$ est non-biaisé et à variance minimale (voir [116] pour la preuve).

Ainsi, en supposant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}(0|0) = \mathbb{E}(X(0)), \quad \hat{u}(-1|0) = \mathbb{E}(u(-1)), \\ P(0|0) = \mathbb{E}[(X(0) - \hat{X}(0|0))(X(0) - \hat{X}(0|0))^T], \end{array} \right. \quad (3.79)$$

les estimés $\hat{X}(k|k)$ et $\hat{u}(k-1|k)$ sont uniques aussi bien dans le sens des moindres carrés que dans le sens de l'estimation non-biaisée à variance minimale. L'hypothèse (3.79) est standard dans la formulation et la démonstration de l'optimalité du filtre de Kalman [118] en plus de l'hypothèse concernant la nature des bruits w et v et la connaissance parfaite de leur matrice

Algorithme du FK-EI
<p>Initialisation : $\hat{X}(0 0) = \mathbb{E}(X(0)), \hat{u}(-1 0) = \mathbb{E}(u(-1)), V = \mathbb{E}[v v^T].$</p> <p style="text-align: center;">$P(0 0) = \mathbb{E}[(X(0) - \hat{X}(0 0) (X(0) - \hat{X}(0 0))^T], W(k) = \mathbb{E}[w(k) w(k)^T],$</p> <p>Pour $k = 1, \dots, N$:</p> <p>Étape de prédiction :</p> <p style="text-align: center;">$\bar{X}(k k-1) = A(k-1) \hat{X}(k-1 k-1),$</p> <p style="text-align: center;">$\hat{X}(k k-1) = A(k-1) \hat{X}(k-1 k-1) + B(k-1) \hat{u}(k-1 k).$</p> <p style="text-align: center;">$P(k k-1) = A(k-1) P(k-1 k-1) A(k-1)^T + W(k),$</p> <p>Étape de correction :</p> <p style="text-align: center;">$K(k) = P(k k-1) C^T(k) [C(k) P(k k-1) C^T(k) + V(k)]^{-1},$</p> <p style="text-align: center;">$U(k) = [B(k-1)^T C^T(k) V^{-1} (I_{n_y} - C(k) K(k)) C(k) B(k-1)]^{-1},$</p> <p style="text-align: center;">$\hat{u}(k-1 k) = U(k) B(k-1)^T C(k)^T V^{-1} (I_{n_y} - C(k) K(k))$</p> <p style="text-align: center;">$[y(k) - C(k) \bar{X}(k k-1)],$</p> <p style="text-align: center;">$\hat{X}(k k) = \hat{X}(k k-1) + K(k) [y(k) - C(k) \hat{X}(k k-1)],$</p> <p style="text-align: center;">$P(k k) = (I_{n_x} - K(k) C(k))$</p> <p style="text-align: center;">$[P(k k-1) + B(k-1) U(k) B(k-1) (I_{n_x} - K(k) C(k))^T],$</p>

TABLE 3.4 – Algorithme du FK-EI pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues

de covariance.

Contrairement à l'approche développée dans [47], dans le développement de l'algorithme du FK-EI, les gains K et U sont indépendants. Ainsi, l'optimalité des estimés $\hat{X}(k|k)$ et $\hat{u}(k-1|k)$ (dans le sens des moindres carrés) est globale.

De retour à notre modèle (3.19), en supposant que le coefficient de diffusion χ_e est connu, l'application du FK-EI à notre problème d'estimation de l'état et des entrées inconnues est

directe, il suffit de considérer dans l'algorithme du FK-EI donné dans le tableau 3.4, la mise en forme suivante avec les dimensions appropriées :

$$\begin{cases} A(k) \longrightarrow dt M^{-1} A(\theta^T(k)) + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) I_{n+1}, \\ B(k) \longrightarrow dt M^{-1} \mathcal{D}, \\ C(k) \longrightarrow I_{n+1}. \end{cases} \quad (3.80)$$

3.4.1.1 Propriétés du filtre de Kalman à entrées inconnues

Le filtre de Kalman à entrées inconnues est l'extension directe et optimale du filtre de Kalman standard, et hérite ainsi de toutes ses propriétés (et limitations) à savoir [118] :

- Si $\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont gaussiens et vérifient les hypothèses données dans (3.66) alors le FK-EI est la solution optimale au problème d'estimation des entrées inconnues et des états.
- Si $\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont non-gaussiens mais satisfont (3.66) alors le FK-EI est la solution linéaire optimale à notre problème d'estimation. Il se peut qu'un filtre non-linéaire offrant de meilleurs résultats existe mais le FK-EI reste l'optimal parmi l'ensemble des filtres *linéaires* même si $\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont non-gaussiens (dans la formulation du filtre l'hypothèse des signaux gaussiens n'a pas été exploitée).
- Si $\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont corrélés i.e. $\mathbb{E}(w(k)v(j)) = Cor(k)\delta_{k-j+1}$ alors dans l'algorithme du FK-EI (tableau 3.4), le gain d'état $K(k)$ et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(k|k)$ deviennent :

$$\begin{cases} K(k) = (P(k|k-1)C^T(k) + Cor(k)) \\ \quad [C(k)P(k|k-1)C^T(k) + V(k) + C(k)Cor(k) + C^T(k)Cor^T(k)]^{-1}, \\ P(k|k) = -K(k)Cor^T(k) + (I_{n_x} - K(k)C(k)) \\ \quad [P(k|k-1) + B(k-1)U(k)B(k-1)(I_{n_x} - K(k)C(k))^T]. \end{cases} \quad (3.81)$$

- Un outil pour vérifier les performances (en terme de convergence) du filtre est le terme d'innovation $e(k) = Y(k) - C(k)X(k|k)$. Ce signal constitue en lui-même un signal blanc à moyenne nulle dont la matrice de covariance est donnée par $(C(k)P(k|k-1)C^T(k) + V(k))$ [118]. À chaque itération, sa moyenne et sa covariance peuvent être approximées par des méthodes statistiques. Si une différence existe entre les valeurs ainsi calculées et celles prédites par la théorie, des méthodes statistiques peuvent être utilisées afin de corriger les statistiques calculées de e en ajustant les matrices V et W (généralement, l'incertitude majeure est sur les valeurs de ces deux matrices).

3.4.1.2 Possibilités d'extension du filtre de Kalman à entrées inconnues

Comme le FK-EI constitue une extension directe du FK, il est logique qu'il adopte les mêmes formulations alternatives développées pour le FK. Ci-dessous nous citons quelques-unes d'entre elles. Pour plus de détails nous conseillons le livre de Simon [118] :

- **Filtre de Kalman séquentiel** pour la simplification de l'implantation du FK sur des systèmes ne disposant pas d'opérateur d'inversion. Cette alternative est envisageable uniquement si la matrice de covariance du bruit de mesure est diagonale ou constante.
- **Filtre de Kalman par racine carré** (*Square root Kalman Filtering*), développé par James Potter lors de la mission spatiale Apollo de la NASA. Cette méthode d'implémentation permet d'augmenter la précision numérique du FK, principalement sur des systèmes à capacités de calcul réduites. Son inconvénient est la complexité des calculs engendrés (voir [118]).
- **Filtre de Kalman avec des contraintes d'égalité et/ou d'inégalité** permet de prendre en compte les contraintes physiques qui peuvent exister sur l'état et qui sont négligées dans la formulation initiale du FK. Les contraintes physiques définissent l'espace compact auquel appartient l'état et par conséquent, comme dans le cas de toute méthode d'optimisation, leur prise en compte dans le FK peut améliorer significativement la précision de l'estimation [7], [118]. Plusieurs techniques existent pour l'incorporation de ces contraintes. Dans le cas des systèmes linéaires, cela inclut [118] :
 - Projection de l'estimé.
 - Projection du gain d'état.
 - Réduction du modèle d'état.
 - Mesures parfaites.
 - Troncature de la fonction de densité de probabilité (fdp).

Dans ce travail, nous privilégions la méthode de la projection de l'estimé, i.e. à chaque itération le résultat du FK sans contraintes $\hat{X}(k|k)$ est projeté sur la surface de contraintes : $DX = d$ (ou $DX \leq d$ dans le cas de contraintes d'inégalité) et le problème peut ainsi être formulé par :

$$\begin{cases} \tilde{X}(k) = \underset{\tilde{X}}{\operatorname{argmin}} (\tilde{X}(k) - \hat{X}(k|k))^T Q (\tilde{X}(k) - \hat{X}(k|k)) \\ \text{tel que : } D\tilde{X} = d \text{ (} D\tilde{X} \leq d \text{),} \end{cases} \quad (3.82)$$

où Q est une matrice de pondération. Il a été démontré dans [118] que :

- 1- Le nouvel estimé $\tilde{X}(k)$ est non-biaisé : $\mathbb{E}(\tilde{X}) = \mathbb{E}(X)$.
- 2- Choisir $Q = P(k|k - 1)$ génère un filtre à variance minimale :

$$\mathbb{E}((X(k) - \hat{X}(k)) (X(k) - \tilde{X}(k))^T) \leq \mathbb{E}((X(k) - \hat{X}(k|k)) (X(k) - \hat{X}(k|k))^T)$$
- 3- Si $Q = I_{n_x}$ alors : $\|X(k) - \tilde{X}(k)\|_2 \leq \|X(k) - \hat{X}(k|k)\|_2$.

Le problème posé dans (3.82) appartient à la classe des problèmes de programmation quadratique. Plusieurs algorithmes existent pour la résolution de ces problèmes, la plupart d'entre eux se base sur la méthode de *Procédé de réglage actif* (Active set methods).

Sous MATLAB, la fonction QP de la toolbox "Optimisation", ou la fonction $fmincon$ permet de résoudre ce problème.

- **Filtre de Kalman Robuste** permet de prendre en compte les incertitudes qui peuvent exister aussi bien sur le modèle (les matrices de transition, d'entrée et d'observation) que sur les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure. Plusieurs travaux existent dans ce domaine connu aussi sous le nom de filtrage adaptatif ou filtrage robuste, citons par exemple [84], [88], [129] et une classification des différentes publications concernant le FK robuste se trouve dans [105].

Étant donné que l'objectif de ce travail est de proposer des pistes et des techniques permettant la résolution du problème d'estimation des paramètres spatio-temporels, le FK robuste n'est pas traité dans ce manuscrit. Nous le considérons comme une bonne perspective pour des travaux futurs.

3.4.1.3 Cas du bruit d'état coloré

Dans le cas de bruit d'état coloré (auto-corrélé i.e. $\mathbb{E}(w(k) w^T(k-1)) \neq 0$), le système d'état (3.65) devient :

$$\begin{cases} X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)u(k) + w(k), \\ w(k+1) = \psi(k)w(k) + \xi(k), \\ y(k) = C(k)X(k) + v(k), \end{cases} \quad (3.83)$$

où la deuxième équation représente le modèle du bruit d'état supposé généré par un système dynamique et $\{\xi(k)\}$ est un bruit blanc de moyenne nulle, non-corrélé avec $w(k)$. Dans ce cas, la matrice de covariance de $w(k+1)$ et $w(k)$ s'écrit :

$$\mathbb{E}(w(k+1)w^T(k)) = \psi(k)W(k). \quad (3.84)$$

avec $W(k)$ la matrice de covariance de $w(k)$ donnée dans (3.66). En augmentant l'état i.e. $X'(k) = [X(k) \ w(k)]^T$, le système (3.83) devient :

$$\begin{cases} X'(k+1) = \begin{bmatrix} A(k) & I_{n_x} \\ 0_{n_x} & \psi(k) \end{bmatrix} X'(k) + \begin{bmatrix} B(k) \\ 0_{n_x \times n_u} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0_{n_x} \\ \xi(k) \end{bmatrix}, \\ \quad \quad \quad = A'(k)X'(k) + w'(k), \\ y(k) = [C(k) \ 0_{n_y \times n_x}] X'(k) + v(k) = C'(k)X'(k) + v(k), \end{cases} \quad (3.85)$$

et le FK-EI donné dans le tableau 3.4 peut ainsi être appliqué à ce système augmenté afin d'estimer le nouvel état $X'(k)$ et le vecteur d'entrée $u(k)$ en considérant la nouvelle matrice de covariance de bruit d'état $w'(k)$:

$$W'(k) = \mathbb{E}(w'(k)w'^T(k)) = \begin{bmatrix} 0_{n_x} & 0_{n_x} \\ 0_{n_x} & \mathbb{E}(\xi(k)\xi^T(k)) \end{bmatrix},$$

en effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} A(k) \longrightarrow A'(k), \\ B(k) \longrightarrow B'(k), \\ C(k) \longrightarrow C'(k), \\ W(k) \longrightarrow W'(k). \end{cases} \quad (3.86)$$

Cette méthode conduit à l'augmentation de la taille du système, et par conséquent celle des calculs mais elle constitue une façon directe de traiter de ce problème [118].

3.4.1.4 Cas du bruit de mesure coloré

Dans le cas de bruit de mesure coloré, si on envisage la même procédure précédente établie pour l'augmentation du système d'état, en considérant un modèle de bruit de mesure donné par :

$$v(k) = \psi(k-1)v(k-1) + \xi(k-1) \quad (3.87)$$

avec ξ un signal blanc à moyenne nulle, le système d'état augmenté est le suivant :

$$\begin{cases} X'(k+1) = \begin{bmatrix} A(k) & 0_{n_x \times n_y} \\ 0_{n_y \times n_x} & \psi(k) \end{bmatrix} X'(k) + \begin{bmatrix} +B(k) \\ 0_{n_y \times n_u} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} w(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix}, \\ = A'(k) X'(k) + w'(k), \\ y(k) = [C(k) \quad I_{n_y}] X'(k). \end{cases} \quad (3.88)$$

avec $X'(k+1) = \begin{bmatrix} X(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix}$.

Dans le système d'état (3.88), le bruit de mesure est nul et par conséquent sa matrice de covariance est aussi nulle. Bien que Kalman dans le développement initial de son filtre [65] considérait un bruit de mesure nul, il a été reporté dans [82], qu'en pratique, cette singularité peut engendrer des problèmes numériques [118]. L'alternative présentée dans [118] sera adoptée.

En effet, soit $y'(k)$ le nouveau signal de sortie défini par :

$$y'(k) = y(k+1) - \psi(k)y(k), \quad (3.89)$$

en remplaçant l'expression de $y(k)$ dans (3.89), on obtient :

$$\begin{aligned} y'(k) &= C(k)(A(k)X(k) + B(k)u(k) + w(k)) + v(k+1) - \psi(k)(C(k)X(k) + v(k)) \\ &= (C(k)A(k) - \psi(k)C(k))X(k) + C(k)B(k)u(k) + (C(k)w(k) + \xi(k)) \\ &= C'(k)X(k) + D'(k)u(k) + v'(k). \end{aligned} \quad (3.90)$$

avec :

$$\begin{cases} C'(k) = (C(k)A(k) - \psi(k)C(k)), & D'(k) = C(k)B(k), \\ v'(k) = (C(k)w(k) + \xi(k)), & \mathbb{E}(\xi(k)\xi^T(j)) = R_\xi(k)\delta_{k,j}, \\ \mathbb{E}(v'(k)v'^T) = C(k)W(k)C^T(k) + R_\xi(k). \end{cases} \quad (3.91)$$

Le système d'état devient :

$$\begin{cases} X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)u(k) + w(k), \\ y'(k) = C'(k)X(k) + D'(k)u(k) + v'(k). \end{cases} \quad (3.92)$$

Ainsi, il est clair que le problème posé est différent de celui initial (3.65) pour lequel le FK-EI a été développé. Le transfert direct entre la sortie est l'entrée change radicalement le problème. En effet, il n'est plus possible d'utiliser directement le FK-EI mais d'autres filtres comme celui présenté dans [47] sont à exploiter.

3.4.2 Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI)

Le filtre de Kalman à entrées inconnues est dédié à l'estimation simultanée de l'état et des entrées. Afin d'estimer de plus les paramètres, un filtre non-linéaire est nécessaire. Comme suggéré dans [68], la théorie de l'estimation de l'état peut être exploitée afin d'estimer les paramètres inconnus du système. En effet, supposons un système d'état discret de la forme générale :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), p(k), u(k)) + w(k), & x(0) = x_0, \\ y(k) = h(x(k), p(k)) + v(k), \end{cases} \quad (3.93)$$

où $p(k)$ est le vecteur des paramètres inconnus. Comme la dynamique de p est inconnue, la méthode la plus courante est d'augmenter l'état x en admettant que les paramètres sont à dynamique nulle : $p(k+1) = p(k) + w_p(k)$:

$$x_e(k) = [x^T(k) \quad p^T(k)]^T$$

avec $w_p(k)$ le bruit de paramètres artificiel permettant au filtre de mettre à jour les estimés de $p(k)$. Ainsi, (3.118) devient :

$$\begin{cases} x_e(k+1) = \begin{bmatrix} f(x(k), p(k), u(k)) + w(k) \\ p(k) + w_p(k) \end{bmatrix} = F(x_e(k), u(k), w(k), w_p(k)), \\ x_e(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ p_0 \end{bmatrix} = x_{e,0}, \\ y(k) = h(x_e(k)) + v(k), \end{cases} \quad (3.94)$$

3.4. Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues (FKE-EI) 75

Notons que la fonction $F(x_e(k), u(k), w(k), w_p(k))$ est non-linéaire en fonction de l'état étendu x_e et par conséquent on doit utiliser un filtre non-linéaire pour l'estimer. La littérature est riche en terme de méthodes d'estimation non-linéaire. Certaines d'entre elles deviennent de plus en plus largement utilisées comme le filtre de Kalman linéarisé, le filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman sans parfum (Unscented Kalman filter) et le filtre particulière.

Dans ce manuscrit nous nous intéressons au filtre de Kalman étendu (FKE). Ce filtre fut proposé par Stanley Schmidt afin de pouvoir appliquer le filtre de Kalman aux problèmes de navigation spatiale [118]. L'idée est de linéariser le système d'état autour de l'estimé du filtre de Kalman dans l'étape de prédiction puis d'exploiter les équations du système non-linéaire dans le calcul de la nouvelle valeur de l'estimé du filtre de Kalman dans l'étape de correction (pour plus de détails voir [64], [49], [51], [118]). Dans le cas de l'estimation simultanée des paramètres de l'état et des entrées inconnues, le FK-EI est étendu pour accomplir cette tâche.

Pour ce faire, commençons par écrire la forme étendue discrète de notre système d'état (3.19) :

$$\begin{cases} X_e(k+1) = f_e(X_e(k)) + B_e(k) \beta(k) + w_e(k), \\ Y(k) = C_e(k) X_e(k) + v(k) \end{cases} \quad (3.95)$$

où $X_e(k) = \begin{bmatrix} X(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$ est l'état étendu, $B_e(k) = \begin{bmatrix} dt M^{-1} \mathcal{D} \\ 0_{r \times (n+1)} \end{bmatrix}$ est le vecteur d'entrée étendu, $w_e(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ w_\theta(x) \end{bmatrix}$ est le vecteur de bruit d'état étendu supposé blanc gaussien décorrélé. Sa matrice de covariance est définie par :

$$W_e(k) = \mathbb{E}[w_e(k) w_e(k)^T] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(w(k) w^T(k)) & 0_{(n+1) \times r} \\ 0_{r \times (n+1)} & \mathbb{E}(w_\theta(k) w_\theta^T(k)) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

La matrice d'observation est définie par $C_e(k) = [I_{n+1} \quad 0_{n+1 \times r}]$. La nouvelle matrice de transition $f_e(X_e(k))$ est donnée par

$$f_e(X_e(k)) = \begin{bmatrix} (dt(M^{-1}A(\theta^T(k))) + (1 - \frac{dt}{\tau})I_{n+1})X(k) \\ \theta(k) \end{bmatrix}$$

Le nouveau système d'état ainsi formulé est toujours linéaire en fonction des entrées inconnues β .

Soit :

$$A_e(k) = \frac{\partial f_e(X_e(k), \beta(k))}{\partial X_e(k)} \Big|_{X_e(k)=X_e(k|k)} = \begin{bmatrix} (dt(M^{-1}A(\hat{\theta}^T(k|k))) + (1 - \frac{dt}{\tau})I_{n+1}) & dt M^{-1} PW \hat{X}(k|k) \\ 0_{r \times (n+1)} & I_r \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

où $PW \hat{X}(k|k)$ est la matrice PWX définie dans (3.23) et évaluée à $X(k) = \hat{X}(k|k)$, et donnée donc par :

$$PW \hat{X}(t) = - \begin{pmatrix} \int_0^1 \sum_{i=0}^n \hat{x}_i(t) w'_i(z) w'_0(z) \pi_1(z) dz & \cdots & \int_0^1 \sum_{i=0}^n \hat{x}_i(t) w'_i(z) w'_0(z) \pi_r(z) dz \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \int_0^1 \sum_{i=0}^n \hat{x}_i(t) w'_i(x) w'_n(x) \pi_1(x) dx & \cdots & \int_0^1 \sum_{i=0}^n \hat{x}_i(t) w'_i(z) w'_n(z) \pi_r(z) dz \end{pmatrix}$$

$A_e(k)$ est la matrice jacobienne de $f_e(X_e(k))$ au point $\hat{X}_e(k|k)$ (la linéarisation de f_e autour de l'estimé $\hat{X}_e(k|k)$). Ainsi, l'algorithme du Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI) est donné dans le tableau 3.5.

3.4.2.1 Cas des paramètres temps-variant : Algorithme du FKE-EI adaptatif

Dans la formulation du FKE, les paramètres sont supposés à dynamique nulle et par conséquent, si l'ajout d'un bruit fictif w_e permet d'améliorer l'estimation des paramètres constants ou faiblement temps-variant, il est difficile de l'ajuster quand les paramètres varient rapidement dans le temps. Plusieurs stratégies se basant principalement sur l'ajout d'un facteur d'oubli ajustable comme dans le cas de la MCR ont été proposées. Dans ce travail, nous continuons d'adopter la technique de [132] détaillée dans la section 3.3.2.

Ainsi, dans l'algorithme du FKE-EI du tableau 3.5, c'est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a priori* qui doit subir des modifications pour prendre en compte la variation paramétrique et qui devient :

$$P(k|k-1) = \lambda(k) (A_e(k-1) P(k-1|k-1) A_e(k-1)^T) + W_e(k), \quad (3.98)$$

avec $\lambda(k)$ le facteur d'oubli variable. Toutefois, certaines modifications spécifiques à la formulation du problème dans le cadre du Filtre de Kalman Étendu établi dans (3.95) doivent être faites. En effet, les erreurs d'estimation *a posteriori* $\bar{\gamma}(k+1)$ et *a priori* $\gamma(k+1)$ sont différentes par définition de celles établies dans la section 3.3.2. Par conséquent, si l'idée de base du développement du facteur d'oubli λ reste inchangée, ce facteur d'oubli a une nouvelle expression.

Les nouvelles formules de $\bar{\gamma}(k+1)$ et de $\gamma(k+1)$ sont données par :

$$\bar{\gamma}(k+1) = Y(k+1) - C_e(k+1) X_e(k+1|k+1), \quad (3.99)$$

3.4. Estimation de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues (FKE-EI) **77**

$$\gamma(k+1) = Y(k+1) - C_e(k+1) X_e(k+1|k), \quad (3.100)$$

En remplaçant $\hat{X}_e(k+1|k+1)$ par son expression donnée dans l'algorithme du tableau 3.5, (3.99) devient :

$$\bar{\gamma}(k+1) = (I_{r+n+1} - C_e(k+1) K(k+1)) \gamma(k+1). \quad (3.101)$$

et la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a posteriori* (l'espérance mathématique de l'expression $\bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1)$) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1)) &= (I_{r+n+1} - C_e(k+1) K(k+1)) Z(k+1) \\ &\quad (I_{r+n+1} - C_e(k+1) K(k+1))^T, \end{aligned} \quad (3.102)$$

avec $Z(k+1)$ la matrice de covariance de l'erreur d'estimation *a priori* définie comme :

$$Z(k+1) = \mathbb{E}(\gamma(k+1) \gamma(k+1)^T).$$

D'autre part, d'après la définition de l'erreur d'estimation *a posteriori* donnée dans (3.99), on a :

$$\mathbb{E}(\bar{\gamma}(k+1) \bar{\gamma}^T(k+1)) = V(k+1), \quad (3.103)$$

où $V(k+1)$ est la matrice de covariance du bruit de mesure à l'instant $t = (k+1) dt$.

En utilisant l'expression du gain $K(k+1)$ donné dans l'algorithme du FKE-EI au tableau 3.5 et le lemme d'inversion des matrices, l'équation de (3.102) devient :

$$\begin{aligned} Z(k+1) &= (C_e(k+1) P(k+1|k) C_e^T(k+1) + V(k+1)) V^{-1}(k+1) \\ &\quad (C_e(k+1) P(k+1|k) C_e^T(k+1) + V(k+1))^T, \end{aligned} \quad (3.104)$$

En remplaçant $P(k+1|k)$ par son expression donnée dans (3.98), l'équation définie dans (3.104) s'écrira :

$$Z(k+1) = (\lambda(k+1) T_1 + T_2) V^{-1}(k+1) (\lambda(k+1) T_1 + T_2)^T, \quad (3.105)$$

où :

$$\begin{cases} T_1 = C_e(k+1) A_e(k) P(k|k) A_e^T(k), \\ T_2 = C_e(k+1) W_e(k+1) C_e^T(k+1) + V(k+1). \end{cases} \quad (3.106)$$

En calculant les traces de (3.106), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} tr(Z(k+1)) &= \lambda^2(k+1) \{tr(T_1 V^{-1}(k+1) T_1^T)\} \\ &\quad + \lambda(k+1) \{tr(T_1 V^{-1}(k+1) T_2^T + T_2 V^{-1}(k+1) T_1^T)\} \\ &\quad + tr(T_2 V^{-1}(k+1) T_2^T) \end{aligned} \quad (3.107)$$

où tr est l'opérateur trace.

Ainsi, l'expression de $\lambda(k+1)$ est donnée par :

$$\lambda(k+1) = \frac{-T_b + \sqrt{T_b^2 - 4T_a T_c}}{2T_a}, \quad \lambda(k+1) \geq 1, \quad (3.108)$$

où :

$$\begin{cases} T_a = tr(T_1 V^{-1}(k+1) T_1^T), \\ T_b = tr(T_1 V^{-1}(k+1) T_2^T + T_2 V^{-1}(k+1) T_1^T), \\ T_c = tr(T_2 V^{-1}(k+1) T_2^T) - tr(Z(k+1)), \end{cases} \quad (3.109)$$

Le vecteur de facteur d'oubli λ définit la matrice du gain d'adaptation $\Lambda(k+1) := \lambda(k+1) I_{n+1+r}$ où les premiers $n+1$ éléments concernent le vecteur d'état et les r restants permettent l'adaptation du vecteur des paramètres $\theta(k+1)$; c'est pourquoi nous fixons les $n+1$ premiers éléments à 1 et les r restants sont obtenus par l'équation (3.108).

Le calcul de la matrice de covariance $Z(k+1)$ de l'erreur d'estimation *a priori* est approximée en utilisant les équations (3.61), (3.62), (3.63) et (4.44). La combinaison du filtre de Kalman avec cet algorithme de calcul du facteur d'oubli est appelé FK adaptatif.

3.4.2.2 FKE *mixte* Vs. FKE *dual*

Deux variantes (les plus répandues) du filtre de Kalman étendu peuvent être considérées : le FKE *mixte* et le FKE *dual* [127]. Dans la première classe, l'estimation de l'état et des paramètres se fait simultanément [68], [26]. C'est la technique adoptée dans l'algorithme du tableau 3.5.

Dans la deuxième approche, à chaque itération, l'estimation des paramètres est utilisée dans l'estimation de l'état et l'estimé de l'état permet de mettre à jour l'estimé des paramètres ; ainsi, deux filtres de Kalman étendus tournent en parallèle. Ceci revient à supposer qu'en plus du modèle d'état, la dynamique des paramètres peut être écrite comme :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + m(k), \\ Y(k) = C_e(k) X_e(k) + n(k), \end{cases} \quad (3.110)$$

où l'équation d'observation est approximée en utilisant celle du système d'état en considérant un bruit blanc gaussien n modélisant cette erreur d'approximation. Les signaux m et n vérifient les mêmes caractéristiques statistiques que w et v données dans (3.66). En se basant sur l'algorithme du FKE *dual* développé dans [127], le FKE-EI *dual* est donné dans le tableau 3.6.

Algorithme du FKE-EI
<p>Initialisation : $\hat{X}_e(0 0) = [\mathbb{E}(X(0)), \mathbb{E}(\theta(0))]^T$, $\hat{u}(-1 0) = \mathbb{E}(u(-1))$,</p> $P(0 0) = \mathbb{E}[(X_e(0) - \hat{X}_e(0 0) (X_e(0) - \hat{X}_e(0 0))^T],$ $V = \mathbb{E}[v v^T], \quad W_e(k) = \mathbb{E}[w_e(k) w_e(k)^T].$ <p>Pour $k = 1, \dots, N$:</p> <p>Étape de prédiction :</p> $\bar{X}_e(k k-1) = f(\hat{X}_e(k-1 k-1)),$ $\hat{X}_e(k k-1) = f(\hat{X}_e(k-1 k-1)) + B_e(k-1) \hat{u}(k-1 k).$ $P(k k-1) = A_e(k-1) P(k-1 k-1) A_e(k-1)^T + W_e(k),$ <p>Étape de correction :</p> $K(k) = P(k k-1) C_e^T(k) [C_e(k) P(k k-1) C_e^T(k) + V(k)]^{-1},$ $U(k) = [B_e(k-1)^T C_e^T(k) V^{-1} (I_{n_y} - C_e(k) K(k)) C_e(k) B_e(k-1)]^{-1},$ $\hat{u}(k-1 k) = U(k) B_e(k-1)^T C_e(k)^T V^{-1} (I_{n_y} - C_e(k) K(k))$ $[Y(k) - C_e(k) \bar{X}_e(k k-1)],$ $\hat{X}_e(k k) = \hat{X}_e(k k-1) + K(k) [Y(k) - C_e(k) \hat{X}_e(k k-1)],$ $P(k k) = (I_{n_x} - K(k) C_e(k))$ $[P(k k-1) + B_e(k-1) U(k) B_e(k-1) (I_{n_x} - K(k) C_e(k))^T],$

TABLE 3.5 – Algorithme du FKE-EI pour l'estimation simultanée de l'état, des paramètres et des entrées inconnus

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x(k) = \left. \frac{\partial f(x(k), \hat{\theta}(k|k-1))}{\partial x} \right|_{\hat{x}(k|k)}, \\ W_x(k) = \mathbb{E}(w(k) w^T(k)), \quad W_\theta(k) = \mathbb{E}(m(k) m^T(k)), \\ R(k) = \mathbb{E}(v(k) v^T(k)), \quad N(k) = \mathbb{E}(n(k) n^T(k)), \\ C_\theta(k) = \frac{\partial (Y(k) - C(k) \hat{X}(k|k-1))}{\partial \theta} = -C(k) \frac{\partial \hat{X}(k|k-1)}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad (3.111)$$

D'après l'algorithme du FKE-EI donné dans le tableau 3.5, en regroupant les deux matrices de covariance P_x et P_θ et les deux bruits de sortie R et N , on obtient l'expression suivante :

$$P_{x,\theta}(k|k-1) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}((X(k) - \hat{X}(k|k-1))) & 0_{(n+1) \times r} \\ 0_{r \times (n+1)} & \mathbb{E}((\theta(k) - \hat{\theta}(k|k-1))) \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

$$V_{x,\theta}(k) = \begin{bmatrix} R(k) & 0_{(n+1) \times r} \\ 0_{r \times (n+1)} & N(k) \end{bmatrix},$$

et par conséquent la différence principale entre les deux variantes du FKE réside dans les matrices de covariance de l'erreur d'estimation $P_{x,\theta}$ et du bruit de sortie $V_{x,\theta}(k)$. Dans la forme duale, le couplage entre \hat{X} et $\hat{\theta}$ est pris en compte non pas dans l'expression de $P_{x,\theta}$ et $V_{x,\theta}(k)$ mais à travers la matrice $C_\theta(k)$. Cette matrice apparaît comme conséquence de la dépendance de $\hat{X}(k|k-1)$ et $\hat{X}(k|k)$ de $\hat{\theta}(k|k-1)$; elle est calculée par la formule récursive suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{X}(k|k-1)}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial f(\hat{X}(k-1|k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1))}{\partial \hat{X}} \frac{\partial \hat{X}(k-1|k-1)}{\partial \hat{\theta}} \\ \quad + \frac{\partial f(\hat{X}(k-1|k-1), \hat{\theta}(k-1|k-1))}{\partial \hat{\theta}}, \\ \frac{\partial \hat{X}(k-1|k-1)}{\partial \hat{\theta}} = (I - K_x(k-1)) \frac{\partial \hat{X}(k-1|k-2)}{\partial \hat{\theta}} \\ \quad + \frac{\partial K_x(k-1)}{\partial \hat{\theta}} (Y(k) - C_x(k) \hat{X}(k-1|k-2)) \end{array} \right. \quad (3.113)$$

Le calcul de $\frac{\partial K_x(k-1)}{\partial \hat{\theta}}$ a été reporté dans [77] et [127]. Ce calcul est complexe et généralement négligé. Un compromis entre la complexité de ce calcul et les performances apportées existe. Cependant, il a été démontré expérimentalement dans [127], que dans le cas des systèmes fortement non-linéaires ou bruités ce terme est critique.

3.4.2.3 Étude de la convergence du FKE

Le développement du FKE-EI est basé sur le FKE standard; ainsi l'étude de sa convergence est identique à celle du FKE. Dans [77], il a été démontré que la convergence du filtre de Kalman étendu dépend, comme dans le cas du FK standard, de la connaissance des matrices de covariance du bruit d'état W et du bruit de mesure V et qu'une source probable de divergence dans la formulation *mixte* du FKE est le découplage entre le gain K et le vecteur des paramètres θ . Aussi deux algorithmes modifiés du FKE permettant de prendre en compte ce couplage ont été proposés en ajoutant le terme $\frac{\partial K}{\partial \theta} (y(k) - C(k) x(k))$ à l'algorithme. Dans la formulation duale du FKE, la taille des calculs et de la capacité mémoire augmente avec le nombre de paramètres et d'états. Dans ce travail, nous avons adopté le FKE-EI mixte

en raison de la réduction de la taille de calculs qu'il offre en comparant avec la formulation duale. Aucune divergence que ce soit en simulation ou sur les données expérimentales, n'a été constatée.

3.4.3 Influence du choix des matrices W , V et $P(0|0)$

Pour un modèle donné (matrices A , B , C), l'évolution temporelle des gains du filtre de Kalman à entrées inconnues K et S dépend de :

- $P(0|0)$: La confiance que l'on a dans l'initialisation de l'état.
- $W(0)$: La confiance que l'on a dans le modèle.
- $V(0)$: La confiance que l'on a dans la mesure.

Le gain d'état K donné dans le tableau 3.4 peut être approximé par :

$$K(k) = (C(k) + V(k) C(k)^{-T} P(k|k-1))^\dagger,$$

où \dagger est l'opérateur inverse généralisé. Ainsi, en régime transitoire, l'erreur d'estimation initiale est autant plus vite recalée que $P(0|0)$ est grand par rapport à V (le gain K devient important) mais l'estimé sera pollué par le bruit de mesure à qui on accorde plus de confiance. En régime stationnaire, $P(k|k)$ est dominée par W et le gain K sera très faible et l'estimation très lisse d'autant que W est faible par rapport à V . Par contre, si le modèle (à qui on fait confiance puisqu'on choisit W faible) est soumis à des perturbations ou que les dynamiques négligées sont plus importantes (qu'on l'a considéré en choisissant W faible), la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation en régime stationnaire peut en être affectée.

3.5 Applications et comparaisons

Cette section a pour objectif de mettre en évidence les performances et les limitations des deux méthodes étudiées (MCR-EI cf. § 3.3 et le FKE-EI cf. § 3.4). L'approche envisagée repose sur :

- Une étude sur des données simulées modélisant qualitativement le comportement observé de la dynamique de la chaleur dans les plasmas chauds.
- Une analyse d'un shot expérimental issu du tokamak Tore-Supra.

Ces simulations vont ainsi permettre de :

- montrer les capacités de poursuite de ces deux algorithmes.
- comparer les deux algorithmes d'identification proposés dans ce chapitre (MCR-EI et le FKE-EI).

L'influence de l'initialisation des différentes variables dont on a besoin (facteur d'oubli, matrice de covariance de l'erreur d'estimation, les matrices de covariance de bruit de mesure et de système V et W) a été largement étudiée dans la littérature [80], [118], [51] et ne sera pas l'objet de cette section.

Algorithme du FKE-EI <i>dual</i>	
Modèle d'état :	Modèle des paramètres :
$X(k+1) = f(X(k), \theta(k)) + B u(k)$	$\theta(k+1) = \theta(k) + m(k)$
$Y(k) = C(k) X(k) + v(k)$	$y(k) = C x(k) + n(k)$
Initialisation : $\hat{X}(0 0) = \mathbb{E}(X(0))$, $\hat{\theta}(0 0) = \mathbb{E}(\theta(0))$, $\hat{u}(-1 0) = \mathbb{E}(u(-1))$,	
$P_x(0 0) = \mathbb{E}[(X(0) - \hat{X}(0 0))(X(0) - \hat{X}(0 0))^T]$,	
$P_\theta(0 0) = \mathbb{E}[(\theta(0) - \hat{\theta}(0 0))(\theta(0) - \hat{\theta}(0 0))^T]$,	
Pour $k = 1, \dots, N$:	
Étape de prédiction :	
Pour les paramètres	
$\hat{\theta}(k k-1) = \hat{\theta}(k-1 k-1)$, $P_\theta(k k-1) = P_\theta(k-1 k-1) + W_\theta(k)$	
Pour l'état	
$\bar{X}(k k-1) = f(\hat{X}(k-1 k-1), \hat{\theta}(k-1 k-1))$,	
$\hat{X}(k k-1) = f(\hat{X}(k-1 k-1), \hat{\theta}(k-1 k-1)) + B(k-1) \hat{u}(k-1 k)$.	
$P_x(k k-1) = A_x(k-1) P_x(k-1 k-1) A_x(k-1)^T + W_x(k)$,	
Étape de correction :	
Pour l'état	
$K_x(k) = P_x(k k-1) C^T(k) [C(k) P_x(k k-1) C^T(k) + V(k)]^{-1}$,	
$U(k) = [B(k-1)^T C^T(k) V^{-1} (I_{n_y} - C(k) K_x(k)) C(k) B(k-1)]^{-1}$,	
$\hat{u}(k-1 k) = U(k) B(k-1)^T C(k)^T V^{-1} (I_{n_y} - C(k) K_x(k)) [Y(k) - C(k) \bar{X}(k k-1)]$,	
$\hat{X}(k k) = \hat{X}(k k-1) + K_x(k) [Y(k) - C(k) \hat{X}(k k-1)]$,	
$P_x(k k) = (I_{n_x} - K(k) C(k)) [P_x(k k-1) + B(k-1) U(k) B(k-1) (I_{n_x} - K_x(k) C(k))^T]$,	
Pour les paramètres	
$K_\theta(k) = P_\theta(k k-1) C_\theta^T(k) [C_\theta(k) P_\theta(k k-1) C_\theta^T(k) + N(k)]^{-1}$,	
$\hat{\theta}(k k) = \hat{\theta}(k k-1) + K_\theta(k) [Y(k) - C(k) \hat{X}(k k-1)]$,	

TABLE 3.6 – Algorithme du FKE-EI *dual*

3.5.1 Conditions de simulation

- 1- Afin que les données de simulation soient dans les mêmes conditions que les données expérimentales, dans le modèle (3.19), on fixe $n = 20$ et par conséquent $r = d = 10$. La période d'échantillonnage spatiale est $dz = 0.05$, la période temporelle est égale à $dt = 0.01$.
- 2- Dans ces simulations les signaux d'entrées-sorties sont considérés non bruités.
- 3- La méthode de BS-Galerkin FEM (cf. chapitre 1) est utilisée pour la semi-discrétisation (discrétisation spatiale) de l'EDP et la génération des données simulées.
- 4- La sortie expérimentale est engendrée en utilisant comme base de projection (du profil expérimental) les fonctions B-splines modifiées.
- 5- Le coefficient de diffusion et le terme source sont projetés sur l'espace engendré par les fonctions B-splines standard.
- 6- Les intégrales dans l'espace sont calculées en utilisant la méthode d'approximation de *Gauss-Kronrod* implantée dans MATLAB[©] par la fonction *quadgk*.
- 7- En simulation, le système d'état (3.19) est résolu en utilisant la fonction MATLAB[©] *ode15s*.

3.5.2 Calcul des erreurs d'estimation

Dans ce chapitre, nous avons choisi de traiter le problème d'identification de χ_e et S simultanément et en dimension finie. Par conséquent, le système étudié est donné par (3.19) où les paramètres à identifier/estimer sont : \hat{X} , $\hat{\theta}$ et $\hat{\beta}$ et les erreurs d'estimation de T , χ_e et S sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T(z, t) = T(z, t) - \hat{T}(z, t) = T(z, t) - \sum_{i=0}^n X_i(t) \omega_i(x), \\ \Delta \chi_e(z, t) = \chi_e(z, t) - \hat{\chi}_{eM}(z, t) = \chi_e(z, t) - \theta^T(t) P(z), \\ \Delta S(z, t) = S(z, t) - \hat{S}_d(z, t) = S(z, t) - \mathcal{B}(z) \beta(t), \end{array} \right. \quad (3.114)$$

où X , θ et β définissent le système d'état (3.19) (cf. §3.1.2).

3.5.3 Exemples de simulation

Les données simulées sont motivées par les connaissances physiques qualitatives dont on dispose sur la forme du coefficient de diffusion χ_e et sur le terme source S [136]. Ainsi, pour la variation spatiale de χ_e , une fonction polynomiale croissante strictement positive est choisie alors que S est de forme gaussienne. Dans nos simulations, les profils sélectionnés pour χ_e et

S sont décrits par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \chi_e(z, t) = (1 + 9z - 36z^2 + 32z^3) \mathbf{g}(t), \\ S(z, t) = \frac{10^6}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{f}(t), \quad \mu = 0.3, \quad \sigma = 0.4 \\ z \in [0, 1], \quad t \in [0, 25], \quad dz = 0.05, \quad dt = 0.01. \end{cases} \quad (3.115)$$

où z est la variable spatiale, t est le temps, $\mathbf{g}(t)$ et $\mathbf{f}(t)$ modélisent les variations temporelles de χ_e et S respectivement.

Afin de mettre en lumière les capacités de poursuite de nos deux algorithmes (MCR-EI adaptative et le FKE-EI adaptatif en utilisant la méthode de [132]), nous considérons χ_e temps-variant même si en physique des plasmas il est généralement question uniquement de sa variation spatiale ([107], [37], [87]).

Ainsi, nous envisageons d'étudier deux cas de figure :

- La variation temporelle de χ_e est imperceptible sur le profil de la température.
- La variation temporelle de χ_e est de forme sinusoïdale.

Dans les deux cas, le terme source S a dans le temps, la forme d'un signal périodique rectangulaire de rapport cyclique α égal à 0.4 exprimé par :

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \leq \alpha t_{periode}, \\ 1 & \text{si } t \in [\alpha t_{periode}, t_{periode}] \\ \mathbf{f}(t + t_{periode}) = \mathbf{f}(t). \end{cases} \quad (3.116)$$

où $t_{periode}$ est la période du signal $\mathbf{f}(t)$. La formule de $\mathbf{g}(t)$ sera précisée à chaque exemple.

Dans les deux exemples, les algorithmes sont initialisés au même valeurs :

- **Pour la MCR-EI adaptative :** $\mu = 0.9$, $P(0) = 10^6 I_r$, $G2(1) = 1$, $\hat{\theta}(0)$ et $\hat{\beta}(0)$ sont arbitraires.
- **Pour le FKE-EI adaptatif :** $\mu = 0.9$, $\hat{P}(0|0) = 10^4 I_{r+n+1}$, $W = 10^{-2} I_{n+r+1}$, $V = 10^{-4} I_{n+1}$, $G2(1) = 1$, $\hat{\theta}(0)$ et $\hat{\beta}(0)$ sont arbitraires.

Toutefois, il est à noter que le facteur d'oubli est à variation libre (on n'impose pas la condition $\lambda \geq 1$) et que plusieurs tests ont été nécessaires pour calibrer μ , W et V .

3.5.3.1 Exemple 1 : $\chi_e(z, t)$ faiblement temps-variant

Soit le système décrit par les profils donnés dans fig. 3.2 générés en utilisant les équations (3.115) et (3.116) avec :

$$\mathbf{g}(t) = 0.1 + \frac{1}{1 + e^{-20*(t-5)}}, \quad t \in [0, 25]. \quad (3.117)$$

La fonction $g(t)$ est ainsi une sigmoïde modélisant un saut lisse de 10% de la variation temporelle de χ_e à $t = 5s$. Dans la fig. 3.2, la variation temporelle de T est due principalement au terme source S alors que la variation de χ_e n'est pas visible sur ce profil. Ceci constitue un bon cas d'étude pour nos algorithmes, permettant de tester leur capacité à identifier une telle très faible variation. Les résultats de simulation en utilisant la MCR-EI adaptative et

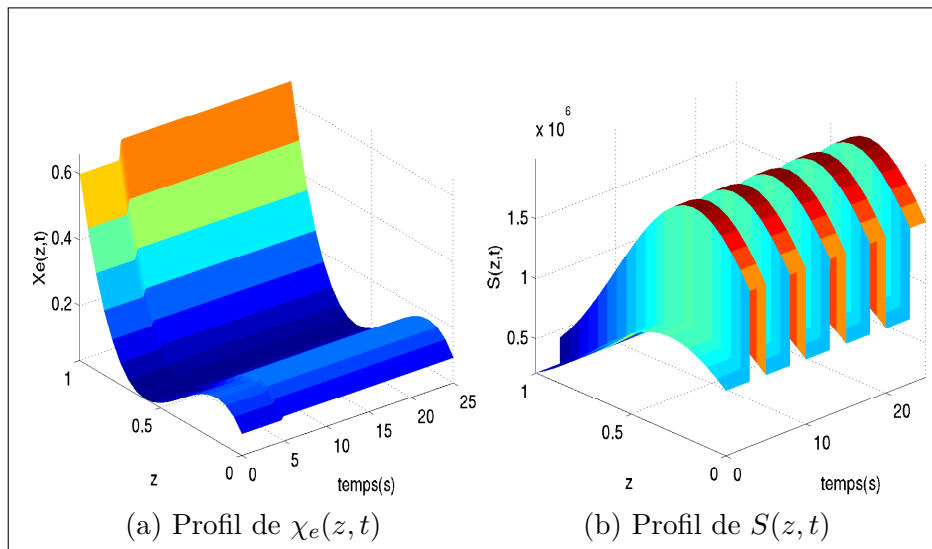
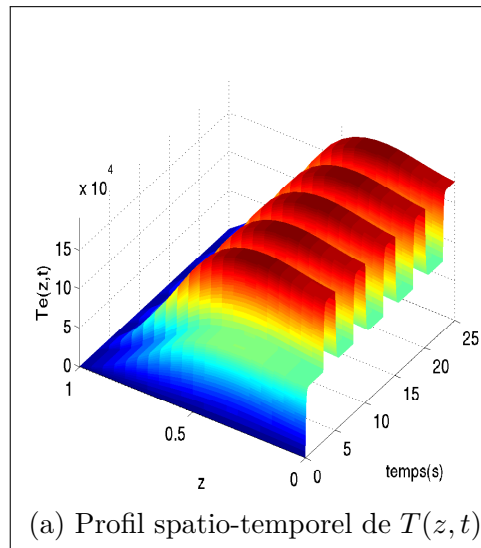


FIGURE 3.2 – Exemple 1 : profils de $T(z,t)$, $S(z,t)$ et $\chi_e(z,t)$

le FKE-EI adaptatif sont donnés respectivement dans les fig. 3.3 et fig. 3.4.

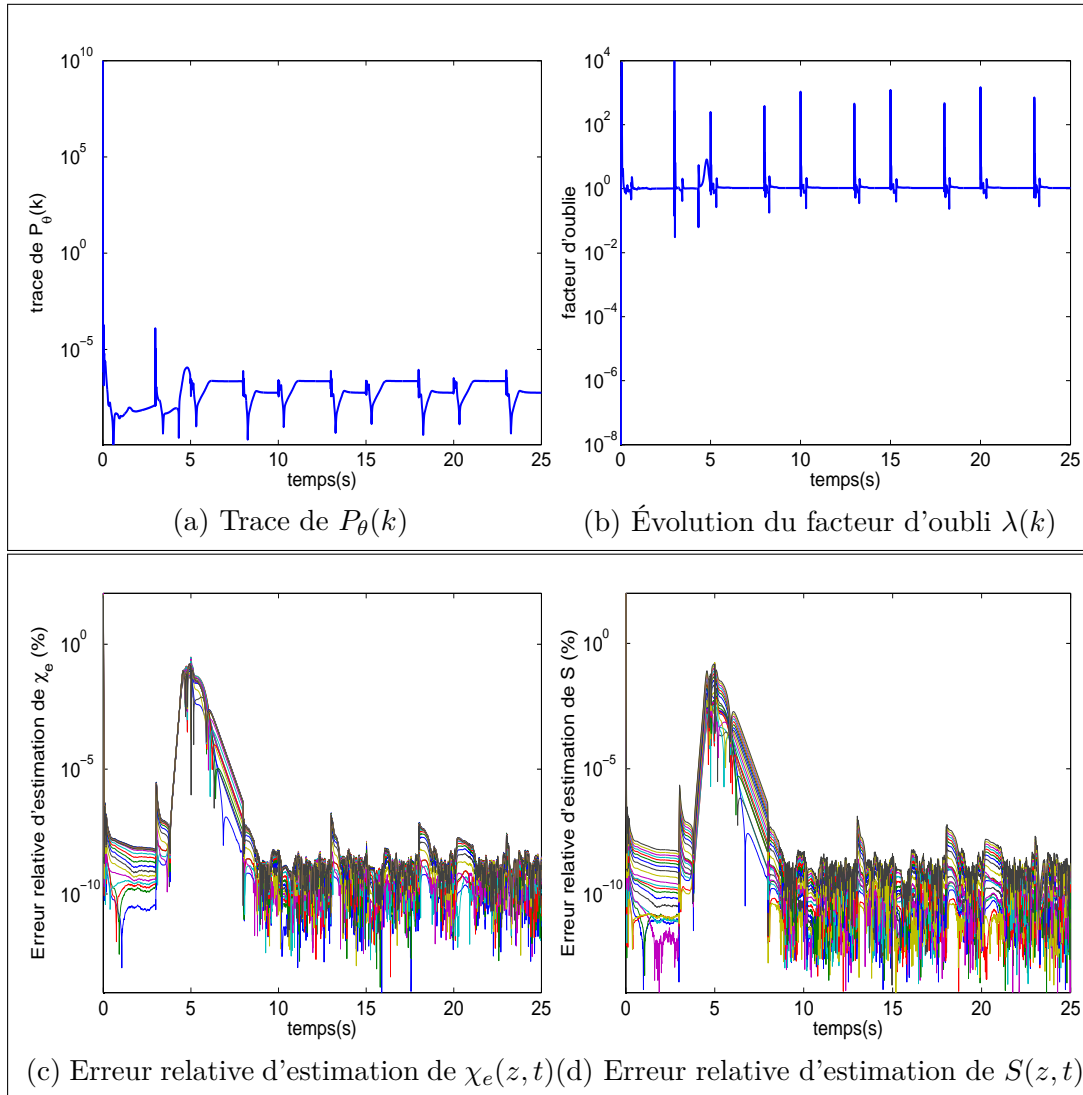


FIGURE 3.3 – Performances de la MCR-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans l'exemple 1.

3.5.3.2 Discussion

Les enseignements que nous pouvons tirer de ces figures (fig. 3.3 et fig. 3.4) sont les suivants :

- Bien que l'**Exemple 1** présente le cas d'un système distribué où la variation temporelle du coefficient de diffusion est inapparente sur la variation de la variable d'état, nos deux algorithmes arrivent à bien relever ce défi en fournissant des estimés fiables (toutes les erreurs d'estimation sont inférieures à 1%).
- À l'inverse de la MCR-EI adaptative, en utilisant le FKE-EI adaptatif, l'identification simultanée de χ_e et S est sensible à la variation de l'entrée (S), i.e. à chaque saut, l'erreur d'identification devient importante mais aussitôt recalé ($\leq 1\%$) en un temps

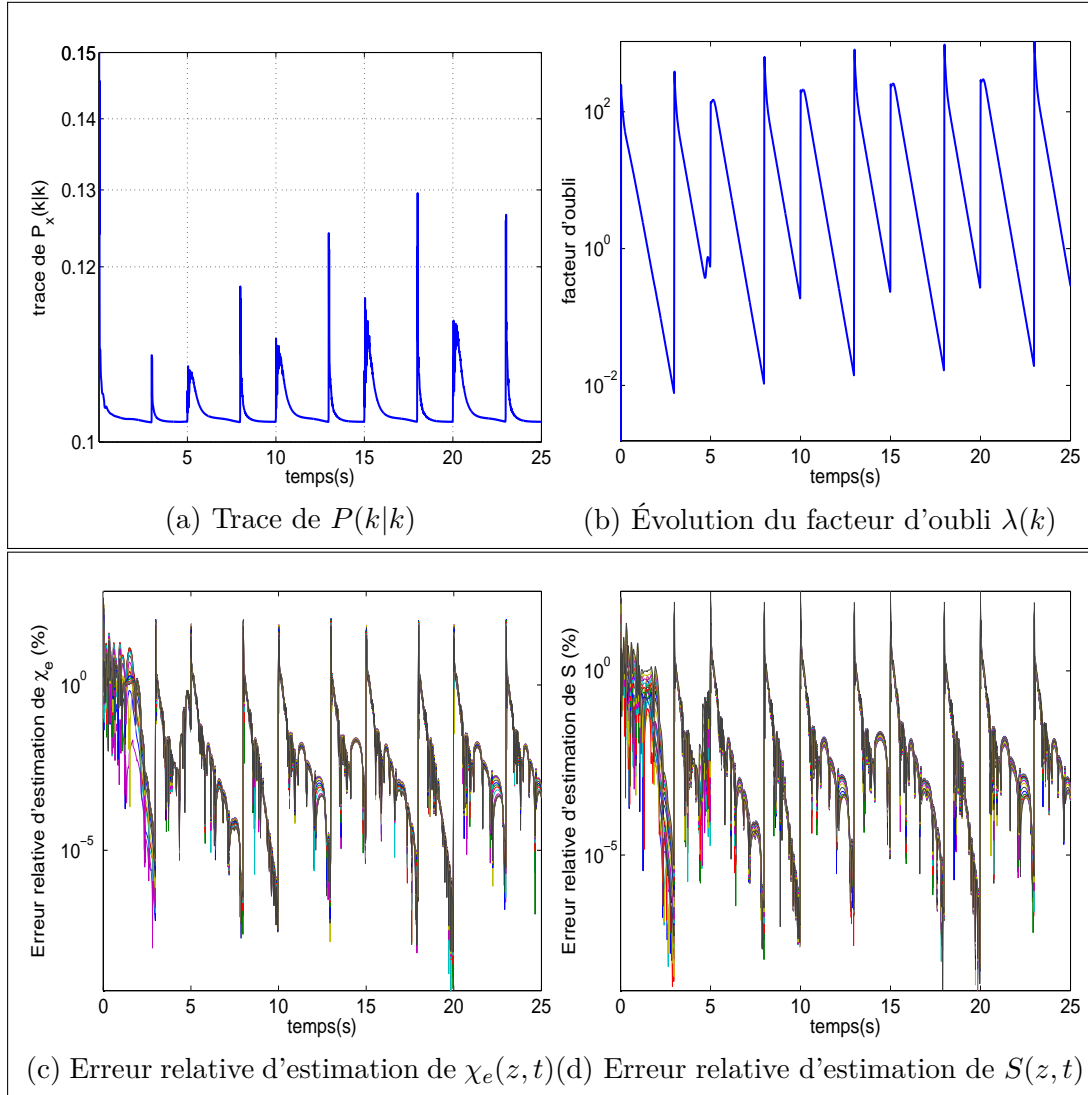


FIGURE 3.4 – Résultats de simulation en utilisant le FKE-EI adaptatif pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 1

très court grâce à l'adaptation du facteur d'oubli (en utilisant la méthode de [132]). Ce comportement se voit aussi sur le profil de la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(k|k)$ qui reste inférieure à 0.13 ; ainsi nous pouvons affirmer que la qualité de $\hat{X}(t)$ est bonne puisque la probabilité est de 95% pour que l'état soit entre $\hat{X}(t) \pm 2\sqrt{\text{trace}(P(k|k))} = \hat{X}(t) \pm (6 \times 10^{-3})\%$.

- La qualité de l'estimation, en utilisant comme technique la MCR-EI adaptative, est meilleure que celle obtenue avec le FKE-EI adaptatif. Ceci est dû principalement à la nature de l'approche par rapport au problème posé. Alors que nous considérons dans les deux cas le même système, dans la MCR-EI adaptative en dérivant l'état (la mesure), le problème d'identification devient, linéaire tandis que dans l'algorithme du FKE-EI adaptatif traite, l'identification d'un système bilinéaire (dans le modèle (3.19)

le paramètre θ multiplie l'état X).

- Puisque dans la MCR-EI adaptative le problème ainsi posé est linéaire (par rapport à θ et β) la variation du facteur d'oubli est plus importante que dans le cas du FKE-EI adaptatif. Aussi, dans le FK-EI adaptatif, la matrice V détermine l'influence du bruit de mesure et le calcul du facteur d'oubli est bâti sur sa connaissance. Alors que dans la MCR-EI adaptative, le bruit de mesure est estimé en utilisant la relation (3.52) et par conséquent, plus l'erreur $\bar{\gamma}$ est grande, plus grand sera le facteur d'oubli.

3.5.3.3 Exemple 2 : $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ temps-variants

L'intérêt de cet exemple est de montrer que même dans le cas d'un χ_e à variation temporelle importante (influence visible sur la sortie), nos deux algorithmes gardent leurs performances sans avoir à réajuster les variables d'initialisation.

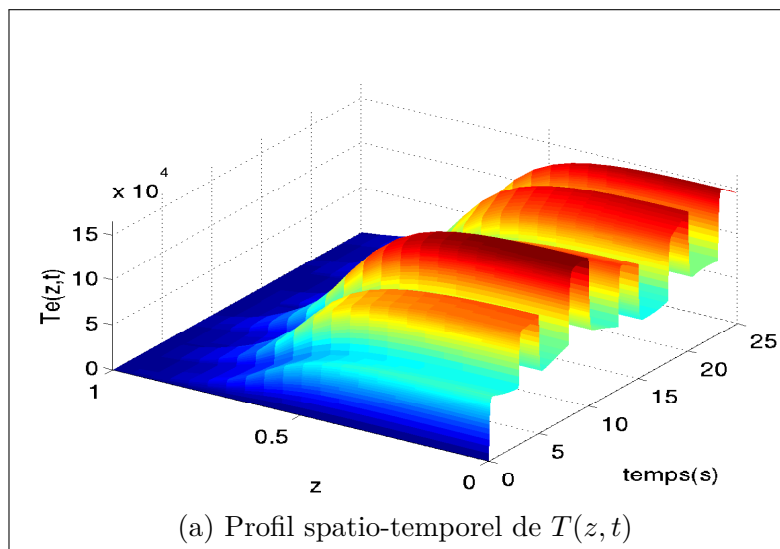
Dans cet exemple la fonction $\mathbf{g}(t)$ est donnée par :

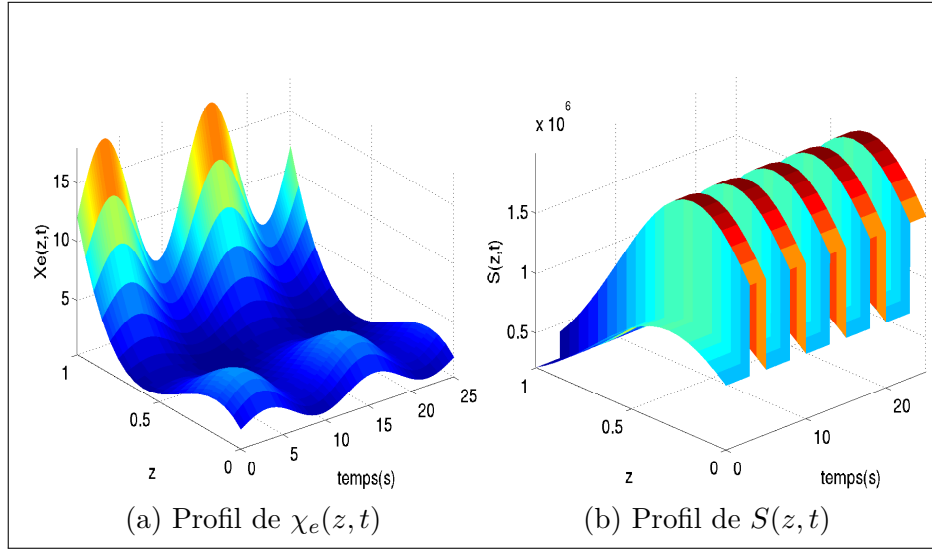
$$\mathbf{g}(t) = \sin(2\pi t(2/t_f)) + 2, \quad (3.118)$$

et les profils de T , χ_e et S sont fournis dans la fig. 3.5.

En plus de la discussion de l'exemple précédent, les résultats affichés dans les fig. 3.6 et fig. 3.7 montrent qu'il est plus facile d'estimer un χ_e à variation faible (même imperceptible sur la sortie). Si l'algorithme du FKE-EI adaptatif conserve qualitativement des performances identiques à celles présentées dans l'Exemple 1, les erreurs d'estimation sont plus importantes dans ce cas, tout en restant admissibles ($\leq 1\%$ entre deux sauts d'entrée).

Concernant l'algorithme de la MCR-EI adaptative, contrairement à l'exemple précédent, l'influence de la variation de l'entrée sur les estimés est bien visible dans ce cas.



FIGURE 3.5 – Exemple 2 : profils de $T(z, t)$, $S(z, t)$ et $\chi_e(z, t)$

3.5.4 Résultats expérimentaux

Le shot $TS-32632$ est utilisé comme profil expérimental, où T_{exp} est donnée dans la fig. 3.8. La période d'échantillonnage spatiale est $dz = 0.05$, la période temporelle est $dt = 0.01$. Ainsi : $n = 20$ et $r = d = 10$.

Dans le chapitre précédent (cf. §2.7.3), nous avons vu que la méthode de B-spline Galerkin FEM fournit une très bonne approximation de T_{exp} (l'erreur absolue d'approximation est de l'ordre de 10^{-12}). De même en simulation, les fonctions B-splines standard sont utilisées comme bases de projection de χ_e et S . Les profils estimés de $\chi_{e_{estim}}$ et S_{estim} sont calculés par les formules (3.17) et (3.18).

Notons que notre modèle de transport de chaleur est valable pour $z \in \bar{\Omega} =]0, 0.7]$. Les phénomènes du bord ne sont pas pris en compte dans cette modélisation. Par conséquent, dans les simulations qui suivent, les profils expérimentaux sont validés et sont significatifs uniquement sur la zone d'intérêt $\bar{\Omega}$.

3.5.4.1 Résultat de simulation en utilisant la MCR-EI adaptative

L'algorithme appliqué est celui présenté dans le tableau 3.3 avec :

$$\begin{cases} Y_{exp}(t) = \dot{X}_{exp}(t) + \frac{1}{\tau} X_{exp}(t), \\ \varepsilon(t) = Y(t) - \varphi(t) \hat{\theta}(t) + \mathcal{D} \hat{\beta}(t), \end{cases} \quad (3.119)$$

où X_{exp} est la variable d'état issue de la projection de T_{exp} sur la base des B-splines choisie, τ est calculé par la formule donnée dans [55] et ε est l'erreur d'identification *a posteriori*. Les matrices φ et \mathcal{D} sont définies respectivement dans (3.20) et (3.38).

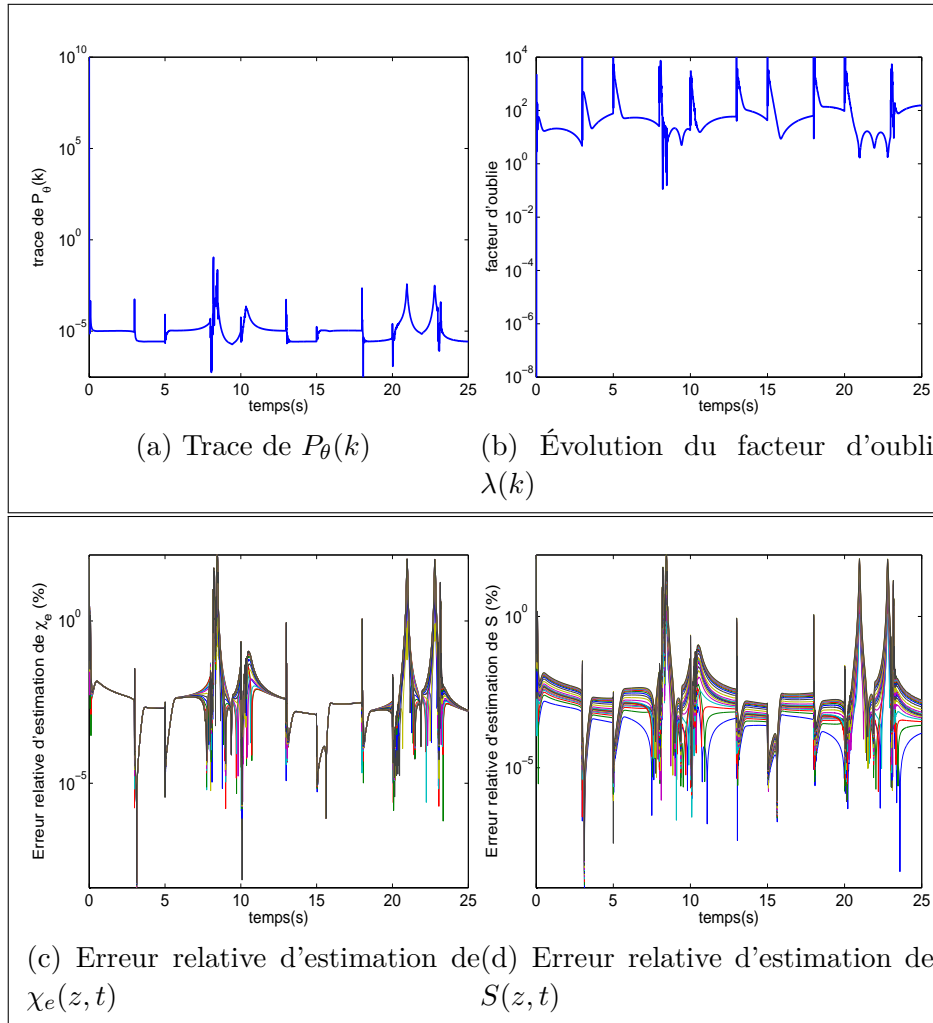


FIGURE 3.6 – Performances de la MCR-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 2.

Le résultat de l'estimation de χ_e et S est présenté dans la fig. 3.10. Nous pouvons faire les remarques suivantes :

- Bien que l'erreur relative d'identification ε soit faible (inférieure à 5% en moyenne, voir fig. 3.9), le profil obtenu pour l'estimé de χ_e est aberrant, il est de valeur négative par moment. Cette contre-performance était prévisible car le vecteur de sortie donné dans (3.119) est issu de la dérivée de la projection du signal expérimental mesuré et de ce fait, tout bruit de mesure est amplifié. En pratique, il est recommandé d'éviter de dériver un signal mesuré sauf si le bruit de capteur est bien caractérisé (connaître sa nature et ses statistiques) ce qui est loin d'être notre cas.
- Le caractère général que nous pouvons tirer de ces simulations est que le paramètre de diffusion n'est pas temps-variant (il peut être faiblement temps variant mais pas à variations rapides). Ceci vient principalement de la forme du facteur d'oubli qui varie autour de la valeur 10 sauf lorsque la puissance d'entrée subit des variations importantes. Ce

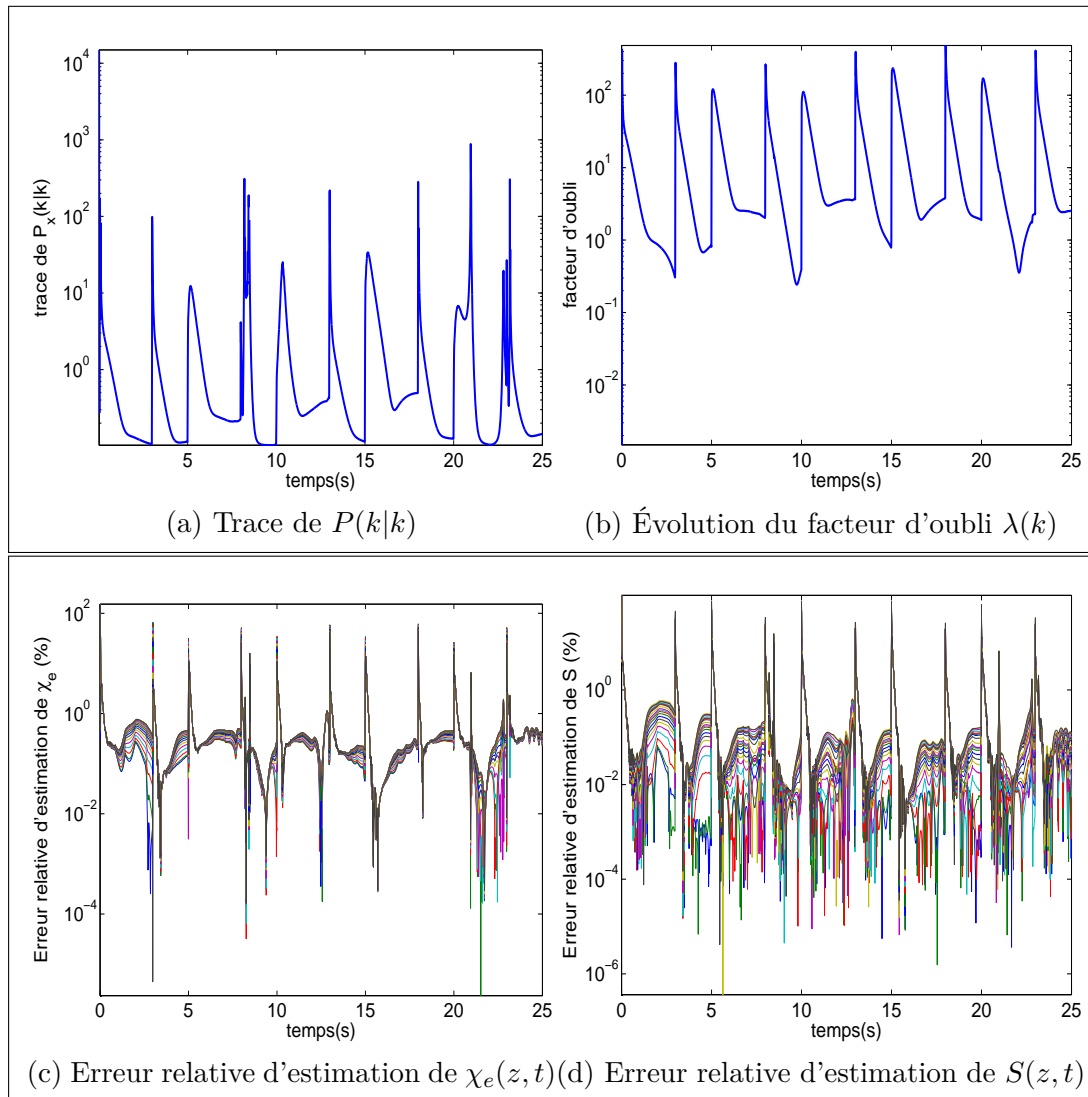


FIGURE 3.7 – Résultats de simulation en utilisant le FKE-EI adaptative pour la reconstruction de S et χ_e dans Exemple 2

caractère est conforme aux connaissances physiques *a priori* sur le profil du coefficient de diffusion ([37], [87]).

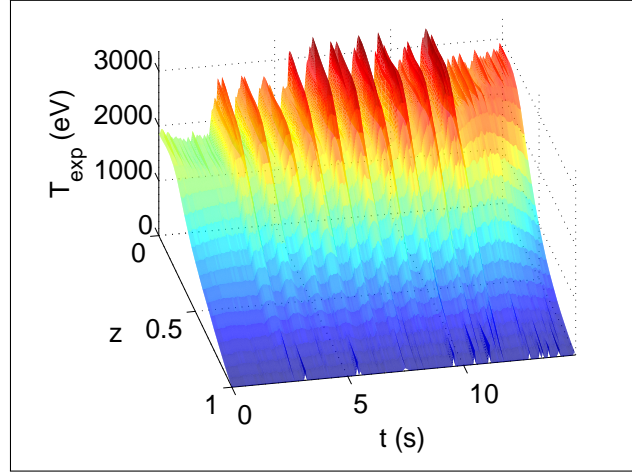


FIGURE 3.8 – Profil de T_{exp}

3.5.4.2 Résultats de simulation en utilisant le FKE-EI

Sur le shot $TS - 32632$, nous appliquons l'algorithme du FKE-EI donné dans la tableau 3.5. Les résultats affichés dans la fig. 3.11 montrent que :

- L'algorithme est très performant, l'erreur d'estimation de l'état T est inférieure à 1% alors que la trace de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(k|k)$ est de l'ordre de 2. Ainsi, la probabilité est de 99% pour que T est entre $\simeq \hat{T}_{exp} \pm 10^{-2}\%$. Ce résultat est attendu vu que le vecteur d'observation est la variable d'état elle-même i.e. $y(t) = X(t)$ et que l'erreur d'approximation de T_{exp} est donc de l'ordre du bruit de calcul (autour de 10^{-12}).
- Le coefficient de diffusion estimé $\chi_{e_{estim}}$ est de forme conforme à ce qu'on prévoit en physique des plasmas chauds ([37], [136]).
- Les variations temporelles du terme source estimé S_{estim} sont conformes à celles de la température, alors que sa variation spatiale est de forme gaussienne ce qui correspond au profil spatial de T_{exp} .
- Les paramètres identifiés χ_e et S vérifient la condition de positivité dans l'intervalle de validité du modèle $z \in [0, 0.7]$.

À partir du terme source estimé, nous pouvons calculer la puissance absorbée par la formule suivante :

$$Pe^*(r, t) = \frac{3}{2} n_e(r, t) S(r, t),$$

où n_e est la densité des électrons. Ainsi la variation de la puissance de le temps est donnée par :

$$P_e(t) = \iiint_{volume} Pe^*(r, t) dvolume, \quad (3.120)$$

or le volume du Tore est donné par :

$$volume = 2\pi^2 Rr^2,$$

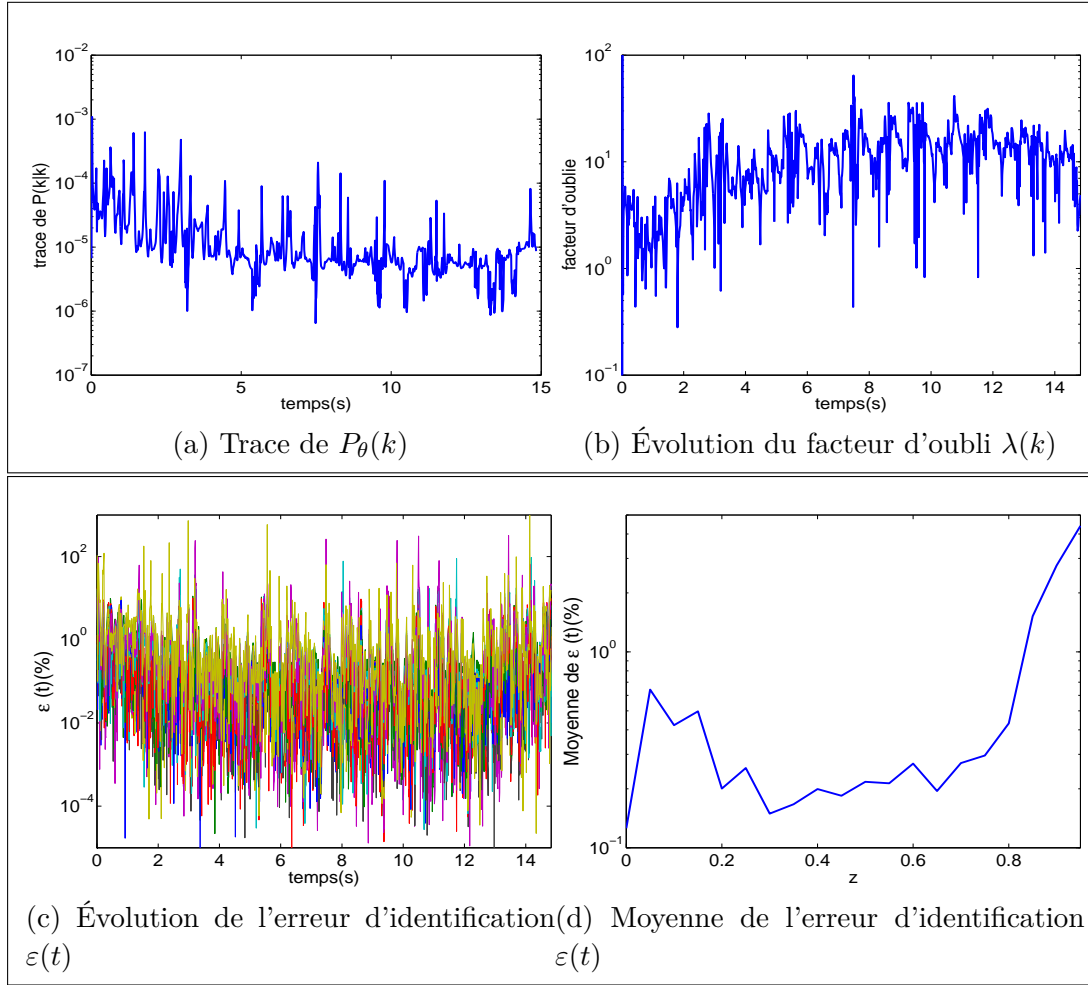


FIGURE 3.9 – Performances de la MCR-EI pour l'estimation des profils expérimentaux de S et χ_e

où R est le rayon majeur du Tore et $r = az$ avec a le rayon mineur du Tore. En considérant la symétrie par rapport à la variable angulaire, l'expression (3.120) devient :

$$P_e(t) = 6\pi^2 a^2 e \int_0^1 n_e(z, t) S(z, t) dz, \quad (3.121)$$

où $e = 1.6 \times 10^{-19} J$ est la charge de l'électron permettant la conversion de l'eV au J ($1eV = |e| J$).

Dans la fig. 3.12, nous comparons la puissance absorbée $P_{e_{estim}}$ estimée calculée par la formule (3.121) à la puissance totale $P_{e_{entree}}$. Ceci nous permet de voir que les variations de la puissance absorbée correspondent bien à celles de la puissance d'entrée et nous donne une idée sur l'amplitude de la puissance perdue.

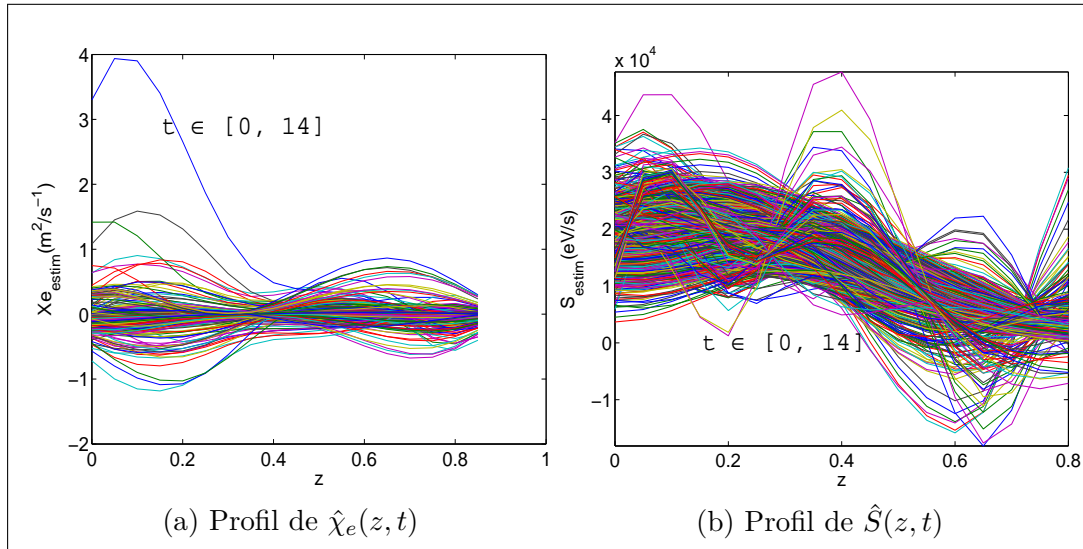


FIGURE 3.10 – Profils expérimentaux de χ_e et S identifiés en utilisant la MCR-EI adaptative

3.6 Conclusion

Ce chapitre traite l'estimation simultanée en dimension finie du coefficient de diffusion et du terme source. Le système étant de dimension infinie, l'étude de la convergence du problème réduit au problème initial est nécessaire. Elle repose sur le choix des espaces des paramètres qui doivent être compacts. Cette propriété est déterminante aussi bien sur le plan théorique que sur le plan pratique.

La combinaison de la semi-discrétisation de l'EDP et de la projection du coefficient de diffusion et du terme source sur des bases appropriées, conduit à la formulation d'un système d'état temps-variant à entrées inconnues.

Si la méthode des moindres carrés récursifs à entrées-inconnues permet d'estimer le vecteur des paramètres et l'entrée simultanément, dériver la mesure pour former le vecteur global $y(t)$ amplifie le bruit et des contre-performances apparaissent en pratique. L'avantage principal de cette méthode est d'introduire le problème d'estimation des entrées inconnues sans avoir à faire d'hypothèse *a priori* conditionnant l'entrée. En se basant sur cette méthode, le filtre de Kalman étendu à entrées inconnues développé dans [95] a été présenté. Nous avons discuté les différents aspects pratiques de cette technique qui, par rapport à beaucoup d'autres, a l'avantage de traiter naturellement le problème en garantissant l'optimalité aussi bien dans le sens des moindres carrés que dans le sens MVU (*Minimum Variance Unbiased estimator*).

Les résultats de l'estimation sur des données simulées et sur des données réelles montrent

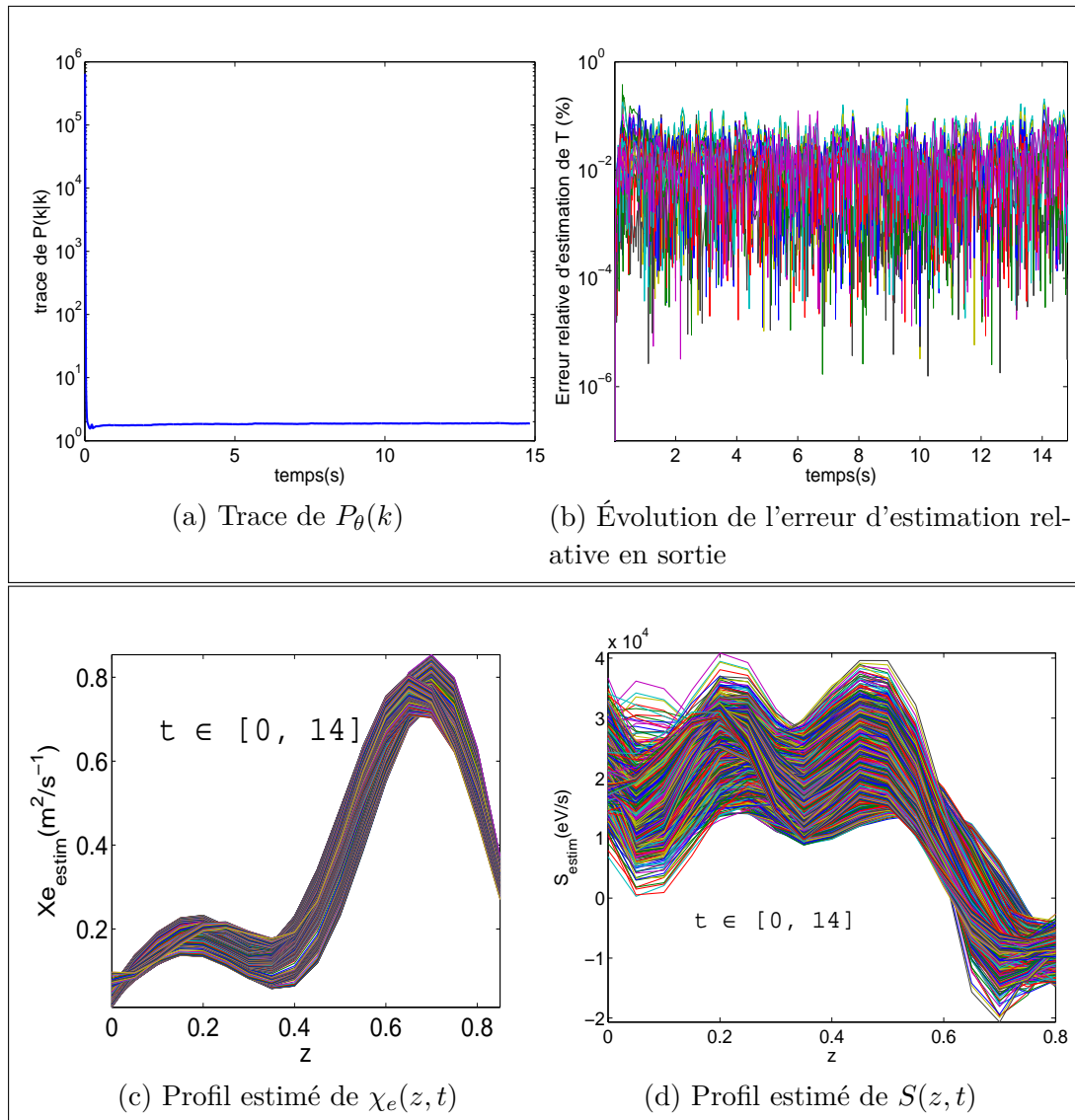


FIGURE 3.11 – Performances du FKE-EI pour l'estimation des profils expérimentaux de S et χ_e

bien les capacités de poursuite et d'identification des algorithmes proposés, ainsi que la conformité des estimés avec les connaissances physiques.

Cependant, la limitation majeure de l'estimation en dimension finie est la restriction de la dimension des bases de projection des paramètres par la taille du réseau de capteurs utilisés. Une méthode plus générale permettant de se libérer de cette contrainte est souhaitable. C'est pourquoi dans le chapitre suivant nous proposons de traiter ce problème d'estimation dans son cadre initial à savoir en dimension infinie.

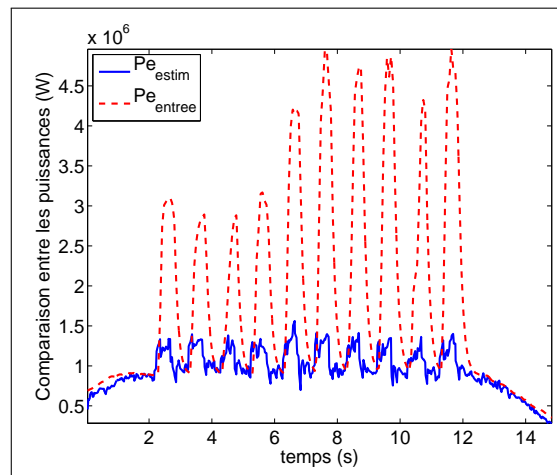


FIGURE 3.12 – Comparaison entre la puissance absorbée estimée P_{e_estim} et la puissance totale fournie P_e

Estimation simultanée en dimension infinie du coefficient de diffusion et du terme source

Sommaire

4.1	Formulation du problème d'estimation en dimension infinie	99
4.2	Étude du problème d'identifiabilité simultanée de $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ en dimension infinie	101
4.3	Estimation en ligne de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant un observateur adaptatif	104
4.3.1	Cas des paramètres distribués $\chi_e(z)$ et $S(z)$	105
4.3.2	Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ connaissant les bornes de la variation temporelle	110
4.3.3	Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ and $S(z, t)$ sans contraintes sur la variation temporelle	114
4.4	Identification adaptative robuste	118
4.4.1	Projection des paramètres	118
4.4.2	σ -modification	119
4.5	Auto-réglage des gains d'adaptation	120
4.6	Résultats de simulation	123
4.6.1	Exemple de simulation	123
4.6.2	Résultats expérimentaux	124
4.7	Conclusion	127

Dans le chapitre précédent, le problème d'estimation a été traité en dimension finie. Moyennant des techniques d'interpolation/extrapolation, nous étions capables de ramener le problème d'estimation de paramètres distribués à un problème d'estimation paramétrique standard où uniquement la variation temporelle est conservée. Bien que la méthode fournisse de bons résultats et se base sur une théorie éprouvée, elle présente un inconvénient majeur. L'étude de l'identifiabilité a montré que nous sommes limités sur le choix des dimensions des bases de projection et par conséquent, les paramètres à variation spatiale rapide sont difficiles à approximer en utilisant des bases de projections locales. Afin de remédier à cet inconvénient, le problème d'estimation est traité dans ce chapitre dans son cadre initial, à

savoir en dimension infinie.

Dans la littérature, cette approche est connue sous le nom de *late lumping approach* puisqu'en premier lieu un estimateur de dimension infinie est développé, puis, en vue de sa mise en œuvre, une étape de discrétisation est nécessaire. Cette technique offre plus de flexibilité en termes de dimension de base de projection et de méthode de discrétisation puisque l'estimateur ainsi conçu est indépendant de ces deux contraintes (base de projection et technique de discrétisation).

La technique la plus classique développée sous cet angle est la méthode hors-ligne. Il s'agit de la minimisation, sous un critère donné, de l'erreur d'équation ou de l'erreur de sortie. Bien que le premier cas (minimisation de l'erreur d'équation) apparaisse comme une solution directe au problème, on sous-entend que le modèle est fidèle au système physique étudié et ainsi l'effet des erreurs de modélisation sera amplifié dans le processus d'estimation/ identification. C'est pourquoi dans la littérature, cette méthode n'a pas été fréquemment utilisée contrairement à la méthode de minimisation de l'erreur de sortie. Citons entre autres les travaux de [8], [135], [1] (et les références qui y sont citées). Les critères généralement appliqués dans ces méthodes hors-lignes sont le critère des moindres carrés et le critère de maximum de vraisemblance. Dans notre cas, ces techniques aboutissent à des problèmes d'optimisation non-linéaire et par conséquent ils sont non-convexes par rapport aux paramètres à identifier, ce qui induit un problème de multiplicité des solutions. Un observateur en-ligne adaptatif de dimension infinie conservant les propriétés de l'EDP et traitant le problème inverse dans le cadre linéaire, apparaît comme une solution alternative à notre problème.

L'estimation adaptative (en-ligne) pour les systèmes de dimension infinie a été en premier traité dans les travaux de thèse de Demetriou [32] et Scondo [115], où aussi bien le fondement théorique -en exploitant les outils de l'analyse fonctionnelle et les espaces de Sobolev- que les aspects pratiques -méthodes de mise en œuvre- ont été abordés pour une large classe de systèmes (systèmes à paramètres constants ou distribués pour des EDPs paraboliques et hyperboliques, linéaires et non-linéaires). Les conditions de convergence de cet estimateur adaptatif sont établies en utilisant la théorie de Lyapunov et en élargissant la notion d'*excitation persistante* aux systèmes de dimension infinie.

Dans [93], une nouvelle méthode d'estimation des systèmes distribués paraboliques linéaires a été présentée où les conditions aux limites et l'intégration par partie sont mises en œuvre afin de réduire le degré de la dérivée utilisée dans l'estimateur par rapport à celui de l'EDP. Par exemple pour une EDP parabolique du second ordre, l'estimateur sera du premier ordre. Ceci a pour effet d'atténuer l'effet des bruits de mesures spatiales. Aussi, dans ce travail la condition d'identifiabilité des paramètres distribués a été exprimée explicitement en exploitant la notion de signal d'entrée à excitation persistante.

Notons que dans les travaux cités ci-dessus ([115], [32], [33], [93]), seule l'estimation de paramètres distribués dans l'espace et à entrées connues a été considérée. Dans notre travail, nous allons étendre le problème à l'estimation simultanée des paramètres et des entrées inconnues distribués aussi bien dans le temps que dans l'espace. Pour ce faire, nous considérons tout d'abord le cas des paramètres/entrées spatialement variables. L'estimateur formulé constitue la base sur laquelle des extensions et/ou modifications seront apportées pour traiter par la suite le problème des paramètres/entrées variants dans le temps et l'espace avec et sans contraintes sur la variation temporelle.

Ce chapitre sera organisé ainsi. Nous commençons par formuler le problème d'estimation en dimension infinie, ensuite nous établissons les conditions d'identifiabilité des paramètres et des entrées. Dans la troisième section, l'estimateur adaptatif de dimension infinie sera présenté d'abord pour l'estimation des paramètres/entrées distribués dans l'espace puis pour des paramètres/entrées variant dans l'espace et dans le temps en admettant la variation temporelle bornée. Finalement, un estimateur adaptatif conçu pour des paramètres/entrées variant dans le temps et dans l'espace (sans contraintes) sera présenté. Dans la dernière section, une méthode pour l'auto-réglage des paramètres d'adaptation de l'estimateur sera formulée.

4.1 Formulation du problème d'estimation en dimension infinie

L'aspect théorique mathématique permettant la formulation du problème d'estimation/identification en-ligne en dimension infinie a été analysé et présenté principalement dans les travaux de Demetriou et Scondo (exemple : [115], [32], [13], [34]).

Dans ce manuscrit, notre objectif n'est pas de reprendre ces concepts mais de montrer comment les résultats de ces travaux peuvent s'appliquer à notre EDP et par conséquent de trouver les conditions sous lesquelles le modèle et le problème d'identification sont bien-posés.

Pour commencer, soit $V := H_{0,\{1\}}^1(\Omega)$, $H := L^2(\Omega)$, $V^* := H^{-1}(\Omega)$ trois espaces de Hilbert formant notre triplet de *Gelfand* (pour la définition du triplet de *Gelfand*, voir le chapitre 5 de [6]) :

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*,$$

où sur H sont définis sa norme usuelle $\|\cdot\|_2$ et son produit interne (\cdot, \cdot) et V est muni de la norme $\|\cdot\|_1$ (voir 3).

Rappelons notre EDP modélisant le transport de chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} T(z, t) + S(z, t), \quad \forall z \in \Omega =]0, 1[, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = T(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ T(z, 0) = 0, \quad \forall z \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où div est l'opérateur *divergence* s'écrivant $\operatorname{div}(\cdot) := \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}(z \cdot)$, en coordonnées cylindriques avec une symétrie angulaire.

Précisons que nous sommes intéressés par la solution *faible* ou variationnelle de (4.1) ce qui se traduit par supposer que $T \in L^2(0, T; V)$ et $\dot{T} \in L^2(0, T; V^*)$. Le système (4.1) peut se mettre sous la forme des problèmes variationnels abstraits donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} - A(q; z, t)T(z, t) = S(z, t), \quad \forall z \in \Omega =]0, 1[, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = T(1, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \\ T(z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

où $q \in Q$ désigne le vecteur de paramètres supposé inconnu, $q = \left[\chi_e \quad \frac{1}{\tau} \right]$ et $A(q; \cdot, \cdot) : V \rightarrow V^*$ est un opérateur linéaire s'écrivant :

$$A(q; z, t) = \operatorname{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau}, \quad (4.3)$$

dont la dépendance spatiale et temporelle est due à la variation spatio-temporelle du vecteur des paramètres $q := q(z, t)$. À l'opérateur A est associée la forme linéaire $a(\cdot; \cdot, \cdot) : Q \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$a(q; \phi, \psi) = \int_0^1 \chi_e(z, t) \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{1}{\tau} \int_0^1 \phi(z, t) \psi(z, t) dz \quad (4.4)$$

La relation entre $A(q)$ et $a(q; \cdot, \cdot)$ s'écrit :

$$(A(q; z, t)\phi, \psi) = -a(q; \phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in V \quad (4.5)$$

La forme linéaire $a(q; \cdot, \cdot)$ vérifie les propriétés suivantes :

- (1)- **Symétrie** : $a(q; \phi, \psi) = a(q; \psi, \phi)$, $\forall \phi, \psi \in V$.
- (2)- **Q-Linéarité** : $a(q; \cdot, \cdot)$ est linéaire par rapport au vecteur des paramètres q :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall q_1, q_2 \in Q : \quad a(\alpha q_1 + q_2; \phi, \psi) = \alpha a(q_1; \phi, \psi) + a(q_2; \phi, \psi), \quad \forall \phi, \psi \in V. \quad (4.6)$$

(3)- **V-Continuité** : Pour tout χ_e appartenant à l'espace Q_{χ_e} défini par

$$Q_{\chi_e} = \{f \in L^2(0, t_f; L^2(\Omega)), \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^* : c_2 \geq f(z, t) \geq c_1\} \quad (4.7)$$

et pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ nous avons l'inégalité suivante (voir Chapitre 3) :

$$\forall q \in Q := (Q_{\chi_e} \times \mathbb{R}_+^*) : |a(q; \phi, \psi)| \leq \left(c_2 + \frac{1}{\tau}\right) \|\phi\|_1 \|\psi\|_1 \quad (4.8)$$

(4)- **V-Coercivité** Pour tout $\phi \in V$, pour tout $\chi_e \in Q_{\chi_e}$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+^*$ et en utilisant l'inégalité de Poincaré [108], nous pouvons écrire (voir Chapitre 3) :

$$\forall q \in Q := (Q_{\chi_e} \times \mathbb{R}_+^*) : a(q; \phi, \phi) \geq \frac{c_1}{\sqrt{(1 + C(\Omega))}} \|\phi\|_1 \quad (4.9)$$

D'après la définition de l'espace Q_{χ_e} , il est clair que l'espace des paramètres Q muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach compact. Si la forme linéaire $a(\cdot; \cdot, \cdot)$ vérifie les conditions citées ci-dessus et pour $S \in Q_S := L^2(0, t_f; V^*)$, d'après le théorème de Lax-Milgram [108], [40], l'EDP (4.1) admet une solution variationnelle unique $T \in L^2(0, t_f; V)$.

Dans ce travail, nous supposons que l'état T est disponible à la mesure et à l'aide d'un estimateur adaptatif, l'objectif est d'identifier le coefficient de diffusion et le terme source.

4.2 Étude du problème d'identifiabilité simultanée de $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ en dimension infinie

L'identifiabilité du système (4.1) est cruciale pour assurer la convergence de l'estimation/identification de χ_e et S . Elle revient à trouver les conditions sous lesquelles la relation entre l'état T et les paramètres (χ_e et S) est bijective ce qui garantit l'unicité de la solution d'estimation des paramètres identifiés à partir des mesures disponibles.

En dimension finie, le problème d'identifiabilité a été largement étudié (voir [104] et les références qui y figurent) en considérant ses aspects structurels et pratiques. Dans [97], un tour d'horizon bibliographique du problème d'identifiabilité en dimension infinie de certaines classes d'EDPs a été présenté. Deux approches ont été abordées principalement pour l'étude de l'identifiabilité à partir de mesures non pas distribuées mais aux bords, ce qui sort du cadre de notre travail. Nous n'envisageons d'étudier que le problème d'identification et d'identifiabilité sous l'hypothèse de mesures distribuées.

En identification adaptative, d'après [33] l'identifiabilité est équivalente au principe de système à *excitation persistante (EP)* et l'extension de ce principe aux systèmes de dimension infinie a été abordée en premier par [13] et [33]. Dans [93], des conditions d'identifiabilité plus explicites pouvant être construites par un choix approprié de l'entrée du système ont

été développées dans le cadre d'une EDP parabolique linéaire à paramètres distribués dans l'espace et à entrées connues. Notre étude d'identifiabilité s'inspire de ces travaux ([13], [93]) en les généralisant au problème d'entrée inconnue.

Définition 4.2.1 L'ensemble des paramètres $\{\chi_e(z, t), S(z, t)\}$ de l'EDP (4.1) est *structurellement* identifiable par rapport à ses conditions aux limites si est seulement si :

$$\forall x \in]0, 1[, \forall t \geq 0, \forall \bar{\chi}_e \neq \chi_e, \forall \bar{S} \neq S : \tag{4.10}$$

$$\operatorname{div} \left(\Delta \chi_e \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Delta S = 0 \Rightarrow \Delta \chi_e = \Delta S = 0,$$

où $\Delta \chi_e(z, t) = \chi_e(z, t) - \bar{\chi}_e(z, t)$ et $\Delta S(z, t) = S(z, t) - \bar{S}(z, t)$.

Dans [13], le concept de système à excitation persistante (EP) ou entrées riches a été étendu aux systèmes de dimension infinie. Il est défini par :

Définition 4.2.2 [13] : Soit $T \in L^2(0, t_f; V)$ solution de (4.1). S'il existe $t_0, \delta_0, \epsilon_0 \geq 0$ tels que pour tout $q \in Q$ avec $|q|_Q = 1$ et pour tout $t > 0$ suffisamment large, il existe $\tilde{t} \in [t, t + t_0]$ tel que :

$$\left\| \int_{\tilde{t}}^{\tilde{t} + \delta_0} A(q; z, s) T(z, s) ds \right\|_* \geq \epsilon_0, \tag{4.11}$$

alors le système (4.1) est dit à excitation persistante. $\|\cdot\|_*$ est la norme définie sur V^* .

Cette définition repose sur la dynamique du système étudié i.e. l'opérateur $A(q; z, t)$ qui lui-même définit le régime transitoire de T . En d'autres termes, si l'entrée du système lui permet d'avoir une dynamique non nulle sur un intervalle de temps de taille réduite mais non nul, alors le système est dit à excitation persistante et il est possible d'identifier sa dynamique. La vitesse de convergence de l'estimateur adaptatif repose aussi sur les coefficients définissant son opérateur de dynamique $A(\hat{q}; z, t)$. Ces coefficients détermineront les constantes t_0, δ_0 et ϵ_0 (voir [13]).

Bien que l'influence de l'amplitude de l'entrée ne soit pas explicite dans la définition 4.2.2, elle affecte l'amplitude de la solution de (4.1) et par conséquent joue un rôle sur la vitesse de convergence de l'observateur.

Dans [13], les auteurs expliquent comment le rapport entre le coefficient de coercivité (et par conséquent la dynamique de $A(\hat{q}; z, t)$) et l'amplitude de l'entrée influe sur la vitesse de convergence. Un compromis est nécessaire pour garantir des performances de convergence satisfaisantes.

Toutefois, une méthode plus pratique pour définir un système à entrée riche (à excitation persistante) est celle donnée dans [93] et citée ci-dessous :

Définition 4.2.3 [93] : Le concept de système à excitation persistante repose sur la question de trouver les conditions sous lesquelles les coefficients de la projection de la solution de (4.1) (ou de sa mesure) sur une base de l'espace V sont linéairement indépendants.

Ces deux définitions (4.2.2, 4.2.3) sont complémentaires : si la définition 4.2.3 fournit des moyens pratiques pour tester l'identifiabilité du système, la définition 4.2.2 nous apprend comment le choix de la dynamique de l'estimateur et de l'entrée peut influencer la vitesse de convergence de l'estimation.

Les conditions suffisantes pour l'identification simultanée du coefficient de diffusion et du terme source nous permettent d'énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème 4.2.1. *Si les conditions aux limites (et l'entrée) de l'EDP (4.1) génèrent un système à excitation persistante alors le coefficient de diffusion χ_e et le terme source S sont identifiables.*

La définition 4.2.2 permet de traiter l'identifiabilité des paramètres à entrée connue et ne peut être facilement généralisée pour analyser l'identifiabilité simultanée du coefficient de diffusion et du terme source ; c'est pourquoi nous allons exploiter la définition 4.2.3 pour démontrer le théorème 4.2.1.

Dans [83], une preuve du théorème ci-dessus a été présentée en utilisant une base de projection bien définie (les séries de Fourier). Dans ce manuscrit, nous allons tenter d'élargir cette preuve à toute base de projection de notre espace de solution, ce qui nous permettra de trouver les critères du choix de ces bases.

Démonstration. D'après [93], si le système (4.1) est à excitation persistante alors T solution de (4.1) peut être exprimée par :

$$T(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n(t) w_n(z), \quad (4.12)$$

où $\{w_n(x)\}_{n \geq 0}$ est une base de l'espace $L^2(0, t_f; V)$ et $l_n(t)$, $n \geq 0$ sont ses coefficients de pondération et sont par conséquent linéairement indépendants.

De même l'entrée $S(z, t)$ peut être exprimée par :

$$S(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(t) v_n(z) \quad (4.13)$$

où les $\{\omega_n(t)\}_{n \geq 0}$ sont linéairement indépendants et $\{v_n(z)\}_{n \geq 0}$ forment une base de $L^2(\Omega)$. Ainsi, ΔS peut s'écrire :

$$\Delta S(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \omega_n(t) v_n(z) \quad (4.14)$$

En remplaçant les expressions de T et de ΔS données dans (4.12), (4.14) dans (4.10) nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ [\text{div}(\Delta \chi_e) l_n(t)] w_n'(z) + [\Delta \chi_e l_n(t)] \Delta w_n(z) + [\Delta \omega_n(t)] v_n(z) \right\} = 0. \quad (4.15)$$

où $w'_n(z)$ est le gradient de w_n et Δw_n est son Laplacien donné par $\Delta w_n(z) = \text{div}(w'_n(x))$. Comme les coefficients $l_n(t)$ sont linéairement indépendants, si les ensembles $\{w'_n(z)\}_{n \geq 0}$, $\{\Delta w_n(z)\}_{n \geq 0}$, $\{v_n(z)\}_{n \geq 0}$ sont disjoints (indépendants), alors (4.15) implique que :

$$\Delta \chi_e = 0 \text{ et } (\Delta \omega_n = 0 \Leftrightarrow \Delta S = 0), \forall t \in [0, t_f], z \in \Omega.$$

□

De cette démonstration, on conclut qu'une condition suffisante pour l'identifiabilité simultanée de χ_e et S est de choisir des bases de projections satisfaisant la propriété précédente (bases disjointes).

Remarques :

- *Bien que les conditions de bijection de la relation entre l'ensemble des paramètres inconnus $\{\chi_e, S\}$ et la solution de (4.1) soient directement déduites de l'application du théorème de Lax-Milgram, l'objectif de cette section est de les exprimer d'un point de vue pratique (prendre en compte les conditions que les bases de projection doivent vérifier).*
- *En dimension finie, la propriété d'EP est assurée si le signal d'entrée est choisi riche en fréquences. Un signal constant ne peut générer un système à excitation persistante. En revanche, en dimension infinie, le concept d'EP est plus complexe. Il doit être étudié non seulement par rapport à la variable temporelle mais aussi par rapport à la variable spatiale et aux conditions aux limites. En dimension infinie, même un signal constant peut générer des EP (voir l'exemple de [59] section V et le travail de [58]) à condition que les coefficients de la décomposition en série de Fourier de la solution du modèle soient non nuls et linéairement indépendants.*

4.3 Estimation en ligne de $\chi_e(z, t)$ et de $S(z, t)$ en utilisant un observateur adaptatif

Dans cette section, le problème d'estimation du coefficient de diffusion χ_e et de l'entrée $S(z, t)$ sera traité graduellement. Nous commençons par considérer le cas des paramètres uniquement distribués dans l'espace, suivi du cas des paramètres espace et temps-variant avec une variation temporelle bornée. Le cas des paramètres spatio-temporels sans contrainte de variation sera abordé en dernier.

Comme illustré dans [61], l'idée principale de l'identification/estimation en-ligne (adaptive) est la comparaison entre la sortie du système $y(z, t)$ et celle d'un modèle paramétrique $\hat{y}(z, t; \hat{\theta})$ dont la structure est identique à celle adoptée pour la modélisation du système. Le vecteur de paramètres $\hat{\theta}$ est ajusté continûment tel que $\hat{y}(z, t; \hat{\theta})$ converge vers $y(z, t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Sous la condition d'EP (excitation persistante), la convergence de $\hat{y}(z, t; \hat{\theta})$ vers $y(z, t)$, implique celle de $\hat{\theta}$ vers θ .

L'estimation en-ligne fait intervenir ainsi trois étapes. En premier, un choix judicieux de la paramétrisation du modèle doit être fait. En effet, certaines structures sont plus faciles à identifier que d'autres. Dans la seconde étape, les lois de génération ou d'ajustement de θ doivent être développées. Ces lois sont appelées des *lois d'adaptation* et ont en général la forme d'équations différentielles dont l'état est le vecteur des paramètres θ . Elles sont synthétisées en se basant sur des critères de stabilité (minimisation d'une fonction de Lyapunov) ou en minimisant l'erreur d'observation entre $y(z, t)$ et $\hat{y}(z, t; \hat{\theta})$ par rapport à θ et à chaque instant t . La dernière étape consiste à choisir pour le système une entrée à EP qui permettra de garantir que $\hat{\theta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \theta^*$.

4.3.1 Cas des paramètres distribués $\chi_e(z)$ et $S(z)$

L'observateur adaptatif se compose d'un observateur d'état et d'une loi d'adaptation pour l'identification des paramètres. L'observateur d'état est basé sur le modèle du système. Il copie la forme de l'EDP et lui ajoute un terme d'innovation afin de corriger les erreurs dues à la modélisation, alors que la loi d'adaptation est similaire à l'algorithme du gradient. Cet observateur est la base des observateurs qui seront développés par la suite.

Nous considérons dans cette section des paramètres à variation spatiale uniquement. En supposant que nous disposons de mesures distribuées (un système de capteurs couvrant tout le domaine spatial), l'estimateur est décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \hat{\chi}_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} \hat{T}(z, t) + \hat{S}(z, t) - \vartheta_0 (\hat{T}(z, t) - T(z, t)); \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(0, t) = \hat{T}(1, t) = 0; \quad \hat{T}(z, 0) = \hat{T}_0(z) \geq 0; \end{cases} \quad (4.16)$$

muni de la loi d'adaptation donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\chi}_e}{\partial t} = \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{T}(z, t) - T(z, t) \right) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}; \quad \hat{\chi}_e(z, 0) = \hat{\chi}_{e0}(z); \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\vartheta_2 (\hat{T}(z, t) - T(z, t)); \quad \hat{S}(z, 0) = \hat{S}_0(z); \\ \forall z \in]0, 1[; t \geq 0, \end{cases} \quad (4.17)$$

où $\vartheta_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2$ sont les gains d'adaptation, $\hat{\chi}_{e0}(z) > 0$ est une fonction lisse i.e. $C^1(\Omega)$ et $\hat{S}_0(z)$ est une fonction continue i.e. $C^0(\Omega)$.

Théorème 4.3.1. *Si le système (4.1) est identifiable, alors l'observateur d'état donné dans (4.16) et la loi d'adaptation paramétrique de (4.17) garantissent la convergence L^2 des erreurs d'observation de l'état et des paramètres :*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \left\{ [\Delta T(z, t)]^2 + [\Delta \chi_e(z, t)]^2 + [\Delta S(z, t)]^2 \right\} dz = 0. \quad (4.18)$$

Démonstration. La preuve donnée ci-dessous se base sur celle fournie dans [93] mais étendue au problème d'entrée inconnue.

Commençons par introduire la variable $\delta T(z, t)$ définie par

$$\delta T(z, t) = T(z, t) - T^*(z)$$

où $T^*(z)$ est la solution stationnaire du système (4.1) et définissons les erreurs d'observation de l'état $\Delta T(z, t)$ et des paramètres $\Delta \chi_e(z, t)$ et $\Delta S(z, t)$:

$$\begin{cases} \Delta T(z, t) = \hat{T}(z, t) - T(z, t), \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial z}(0, t) = \Delta T(1, t) = 0; \end{cases} \quad (4.19)$$

et :

$$\begin{cases} \Delta \chi_e(z, t) = \hat{\chi}_e(z, t) - \chi_e(z), \\ \Delta S(z, t) = \hat{S}(z, t) - S(z); \end{cases} \quad (4.20)$$

Ainsi les premières dérivées de $\delta T(z, t)$, $\Delta T(z, t)$, $\Delta \chi_e(z, t)$ et $\Delta S(z, t)$ sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} \delta T(z, t), & \frac{\partial \delta T}{\partial z}(0, t) = \delta T(1, t) = 0, \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) + \operatorname{div} \left(\Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \Delta T(z, t) + \Delta S, \\ \frac{\partial \Delta \chi_e}{\partial t} = \vartheta_1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Delta S}{\partial t} = -\vartheta_2 \Delta T(z, t). \end{cases} \quad (4.21)$$

Comme $\hat{\chi}_{e_0}(z) > 0$, que $\hat{\chi}_{e_0}(z) \in C^1(\Omega)$ et $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ sont bornés et que $\hat{S}(z) \in C^0(\Omega)$ est une fonction bornée continue, d'après le théorème de Lax-Milgram étendu aux EDPs évoluant dans le temps [108], le système d'équations (4.1), (4.16) et (4.17) admet une solution locale unique et le problème est par conséquent bien posé.

Introduisons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left([\delta T(z, t)]^2 + [\Delta T(z, t)]^2 + \frac{1}{\vartheta_1} [\Delta \chi_e(z, t)]^2 + \frac{1}{\vartheta_2} [\Delta S(z, t)]^2 \right) dz. \quad (4.22)$$

dont la dérivée $\dot{V}(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) = & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) \delta T(z, t) dz - \frac{1}{\tau} \int_0^1 \delta T^2(z, t) dz \\
 & + \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz + \int_0^1 \operatorname{div} \left(\Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz \\
 & - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \int_0^1 \Delta T^2(z, t) dz + \int_0^1 \Delta S(z, t) \Delta T(z, t) dz \\
 & + \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \dot{\chi}_e(z, t) \Delta \chi_e(z, t) dz + \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta \dot{S}(z, t) \Delta S(z, t) dz,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

où $\dot{f}(x, t)$ dénote par extension la dérivée temporelle de f : $\dot{f}(x, t) := \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$. D'après la formule de divergence de Gauss ci-dessous :

$$\int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \Delta T(z, t) \right) dz = \chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \Delta T(z, t) \Big|_0^1,$$

et d'après la relation :

$$\operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T(z, t)}{\partial z} \Delta T(z, t) \right) = \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) + \chi_e(z) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2,$$

les termes en divergence dans (4.23) deviennent :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) \delta T(z, t) dz = \chi_e(z) \frac{\partial \delta T}{\partial z} \delta T(z, t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 dz, \\
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz = \chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \Delta T \Big|_0^1 - \int_0^1 \chi_e \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz, \\
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz = \Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \Delta T \Big|_0^1 - \int_0^1 \Delta \chi_e \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz.
 \end{aligned} \right. \tag{4.24}$$

En utilisant les conditions aux limites de δT , ΔT et \hat{T} données respectivement dans (4.21), (4.19) et (4.16), le système (4.24) s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \delta T}{\partial z} \right) \delta T(z, t) dz = - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 dz, \\
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\chi_e(z) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz = - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz, \\
 & \int_0^1 \operatorname{div} \left(\Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) \Delta T(z, t) dz = - \int_0^1 \Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz
 \end{aligned} \right. \tag{4.25}$$

ainsi (4.23) devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &= - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 dz - \frac{1}{\tau} \int_0^1 [\delta T(z, t)]^2 dz - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz \\
 &\quad - \int_0^1 \Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} dz - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) [\Delta T(z, t)]^2 dz \\
 &\quad + \int_0^1 \Delta S(z, t) \Delta T(z, t) dz + \int_0^1 \Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz \\
 &\quad - \int_0^1 \Delta S(z, t) \Delta T(z, t) dz \\
 &= - \int_0^1 \chi_e(z) \left(\frac{\partial \delta T}{\partial z} \right)^2 dz - \frac{1}{\tau} \int_0^1 [\delta T(z, t)]^2 dz \\
 &\quad - \int_0^1 \chi_e(z, t) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) [\Delta T(z, t)]^2 dz.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

D'après les conditions sous lesquelles le système (4.1) est bien posé, $\chi_e(z) \in C^1(\Omega)$ est strictement positif. Par conséquent nous avons l'inégalité suivante pour \dot{V} :

$$\dot{V}(t) \leq - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) [\Delta T(z, t)]^2 dz = - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \|\Delta T(\cdot, t)\|_2^2 \leq 0, \tag{4.27}$$

Cette inégalité prouve la bornitude de la fonction de Lyapunov $V(t) \leq V(0) \leq \infty$, sa continuité uniforme et la bornitude L^2 de l'erreur d'observation ΔT .

Afin de démontrer la bornitude de toute solution ΔT de (4.19), nous appliquons le théorème 3.3.6 de [54] rappelé ci-dessous :

Théorème 4.3.2. [54] *Soit l'équation différentielle non-linéaire suivante :*

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u, t), \quad t \geq 0 \tag{4.28}$$

$$u(t_0) = u_0,$$

Si

- la résolvante de l'opérateur A est compacte,
- la fonction f est continue par rapport à t et lipschitzienne par rapport à u ,
- et si $u(t; t_0, u_0)$ solution de (4.28) est de norme bornée (dans un sens donné), l'ensemble des trajectoires $\{u(t; t_0, u_0)\}_{t \geq t_0}$ est compact et borné (dans l'ensemble des solutions U).

Étant donné que l'opérateur $\text{div}(\chi_e(z) \frac{\partial}{\partial z})$ est de résolvante compacte dans $L^2(\Omega)$ [93], que la solution de (4.19) est L^2 -bornée (d'après (4.27)) et que les fonctions T solution de

(4.1) et \hat{T} solution de (4.16) sont continues par rapport à t alors la fonction ΔT solution du système (4.19) est compacte et bornée sur $C^1(0, t, C^2(\Omega))$. De plus $\hat{T}(z, t) = \delta T(z, t) - \Delta T(z, t) + T^*(z)$ et par conséquent le système (4.21) est un système autonome auquel le théorème de LaSalle étendu aux équations différentielles partielles [54] peut s'appliquer. En effet, d'après le théorème 4.3.4 de [54], étant donné que ΔT est bornée, toutes les trajectoires du système (4.21) convergent vers le sous-espace invariant maximum de l'espace des solutions de (4.21) pour lequel : $\dot{V}(t) = 0$ ce qui implique que :

$$\operatorname{div} \left(\Delta \chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Delta S(z, t) = 0; \quad \forall z \in]0, 1[, t \geq 0, \quad (4.29)$$

et d'après l'hypothèse d'identifiabilité, ceci implique que :

$$\Delta \chi_e(z, t) = \Delta S(z, t) = 0; \quad \forall z \in]0, 1[, t \geq 0.$$

et nous concluons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 \{ (\Delta T)^2 + (\Delta S)^2 + (\Delta \chi_e)^2 \} dz = 0.$$

□

Notons que la convergence L^2 n'entraîne pas la convergence des erreurs d'observation vers zéro. Néanmoins, comme développé dans [93], il est possible de démontrer que les lois d'adaptation données dans (4.17) et l'observateur d'état (4.16) garantissent la convergence des erreurs d'observation.

Comme χ_e est continûment différentiable ($\chi_e(z) \in C^1(\Omega)$), $S(z) \in C^0(\Omega)$ est bornée et continue, ces paramètres peuvent être écrits en termes de séries de Fourier comme suit :

$$\begin{aligned} \chi_e(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \theta_n \exp(2j\pi z), \\ S(z) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \alpha_n \exp(2j\pi z), \end{aligned} \quad (4.30)$$

où $j = \sqrt{-1}$ et θ_n et α_n sont les coefficients de séries de Fourier. De même, $\hat{\chi}_e(z, t)$ et $\hat{S}(z, t)$ peuvent s'écrire sous la formes de séries de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_e(z, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{\theta}_n(t) \exp(2j\pi z), \\ \hat{S}(z, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{\alpha}_n(t) \exp(2j\pi z), \end{aligned} \quad (4.31)$$

et par conséquent $\Delta \chi_e$ et ΔS s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta \chi_e(z, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \Delta \theta_n(t) \exp(2j\pi z), \\ \Delta S(z, t) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \Delta \alpha_n(t) \exp(2j\pi z). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Comme il existe un isomorphisme entre l'espace l^2 des coefficients des séries de Fourier et l'espace $L^2(\Omega)$, les coefficients $\Delta \theta_n$ et $\Delta \beta_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sont formulés par les expressions

suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta\theta_n(t) &= \int_0^1 \Delta\chi_e(z, t) \exp(-2j\pi z) dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \\ \Delta\alpha_n(t) &= \int_0^1 \Delta S(z, t) \exp(-2j\pi z) dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots,\end{aligned}\tag{4.33}$$

et de même pour θ , $\hat{\theta}(t)$, α , $\hat{\alpha}(t)$. Or d'après le résultat de convergence de (4.18), nous savons que :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta\chi_e(z, t)\|_2^2 &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta S(z, t)\|_2^2 &= 0,\end{aligned}\tag{4.34}$$

ainsi nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}|\Delta\theta_n(t)| &= \left| \int_0^1 \Delta\chi_e(z, t) \exp(-2\pi j z) dz \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 [\Delta\chi_e(z, t)]^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \exp(-4\pi j z) dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 0, \quad \forall t \geq 0,\end{aligned}\tag{4.35}$$

et par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\theta_n(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n(t) = \theta_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots\tag{4.36}$$

et en suivant le même raisonnement, nous avons un résultat identique pour le calcul de $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\alpha_n(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\alpha_n(t) = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_n(t) = \alpha_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots\tag{4.37}$$

et ainsi nous avons démontré la convergence de $\Delta\chi_e$ et ΔS :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\chi_e(z, t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta S(z, t) = 0.\tag{4.38}$$

4.3.2 Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ et $S(z, t)$ connaissant les bornes de la variation temporelle

Nous analysons à ce stade le cas des paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$, $S(z, t)$ mais à variation temporelle bornée. Les résultats de cette sous-section peuvent être considérés comme une extension du travail effectué en [125] mené pour l'étude de la poursuite des variations temporelles dans le cas de systèmes différentiels linéaires.

En premier lieu, nous supposons que les paramètres χ_e et S s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \chi_e(z, t) = \chi_e(z, 0) + \xi(z, t), \\ S(z, t) = S(z, 0) + \gamma(z, t). \end{cases}\tag{4.39}$$

et qu'ils satisfont les inégalités suivantes :

$$\forall z \in]0, 1[, t \geq 0 : \begin{cases} \|\xi(z, t)\|_2^2 \leq \xi_0, \\ \|\gamma(z, t)\|_2^2 \leq \gamma_0, \end{cases} \quad (4.40)$$

où ξ_0 et γ_0 sont des bornes supérieures sur la variation temporelle dont la connaissance n'est pas nécessaire.

En plus des lois d'adaptation (4.17), de nouvelles lois d'adaptation pour les nouvelles variables ξ et γ , caractérisant la variation temporelle de χ_e et S sont nécessaires. Nous proposons les lois suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(\cdot, t) \right\|_2^2, \\ \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial t} = [\Delta T(z, t)]^2, \end{cases} \quad (4.41)$$

et l'observateur d'état devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \text{div} \left(\hat{\chi}_e \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\tau} \hat{T}(z, t) + \hat{S}(z, t) - \vartheta_0 \Delta T(z, t) \\ \quad - \hat{\gamma}(z, t) \Delta T(z, t) + \text{div} \left(\hat{\xi}(z, t) \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right\|_2^2 \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(0, t) = \hat{T}(1, t) = 0; \quad \hat{T}(z, 0) = \hat{T}_0, \\ \forall z \in \Omega, \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

où par rapport à (4.16), le terme $\left\{ -\hat{\gamma}(z, t) \Delta T(z, t) + \text{div} \left(\hat{\xi}(z, t) \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right\|_2^2 \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) \right\}$ est ajouté afin de prendre en compte la variation temporelle de χ_e et de S .

Lemme 2. Si $\chi_e(z, t)$ est continûment différentiable, l'observateur d'état (4.42) et les lois d'adaptation (4.17) et (4.41) assurent la convergence de l'erreur d'observation de l'état $\Delta T(z, t)$ et des erreurs d'adaptation des paramètres $\Delta \chi_e(z, t)$ et $\Delta S(z, t)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Delta T(z, t)\|_2 &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta T(z, t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta \chi_e(z, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta S(z, t) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Soient $\tilde{\gamma}$, \tilde{S} , $\tilde{\xi}$ et $\tilde{\chi}_e$ de nouvelles variables définies par :

$$\forall z \in]0, 1[, t \geq 0 : \begin{cases} \tilde{\gamma}(z, t) = \hat{\gamma}(z, t) - \gamma_0, \quad \tilde{S}(z, t) = \hat{S}(z, t) - S(z, 0), \\ \tilde{\xi}(z, t) = \hat{\xi}(z, t) - \xi_0, \quad \tilde{\chi}_e(z, t) = \hat{\chi}_e(z, t) - \chi_e(z, 0), \end{cases} \quad (4.43)$$

et définissons une nouvelle fonction de Lyapunov donnée par :

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ [\Delta T(z, t)]^2 + \frac{1}{\vartheta_1} [\tilde{\chi}_e(z, t)]^2 + \frac{1}{\vartheta_2} [\tilde{S}(z, t)]^2 + [\tilde{\gamma}(z, t)]^2 + [\tilde{\xi}(z, t)]^2 \right\} dz, \quad (4.44)$$

La dérivée temporelle de ΔT est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi_e \frac{\partial \Delta T}{\partial t}) + \operatorname{div}(\Delta \chi_e \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}) - \hat{\gamma} \Delta T \\ \quad + \operatorname{div}(\hat{\xi} \|\frac{\partial \hat{T}}{\partial z}\|_2^2 \frac{\partial \Delta T}{\partial z}) - (\frac{1}{\tau} + \vartheta_0) \Delta T + \Delta S, \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial z}(0, t) = \Delta T(1, t) = 0, \\ \Delta T(z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Or, d'après les définitions de $\tilde{\chi}_e$ et \tilde{S} dans (4.43) et les nouvelles formulations de χ_e et S dans (4.39), $\Delta \chi_e$ et ΔS peuvent s'écrire :

$$\Delta \chi_e(z, t) = \tilde{\chi}_e(z, t) - \xi(z, t), \Delta S(z, t) = \tilde{S}(z, t) - \gamma(z, t). \quad (4.46)$$

et ainsi en remplaçant (4.46) dans (4.45), l'expression de la dérivée de ΔT devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\chi_e \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right) + \operatorname{div} \left(\tilde{\chi}_e \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) - \operatorname{div} \left(\xi \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right) - \hat{\gamma} \Delta T \\ \quad + \operatorname{div} \left(\hat{\xi} \|\frac{\partial \hat{T}}{\partial z}\|_2^2 \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right) - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \Delta T + \tilde{S} - \gamma, \\ \frac{\partial \Delta T}{\partial z}(0, t) = \Delta T(1, t) = 0, \\ \Delta T(z, 0) = 0. \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Maintenant, en utilisant comme dans la sous-section précédente la formule de divergence de Gauss et les conditions aux limites de ΔT et \hat{T} , la dérivée de V s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \int_0^1 \chi_e \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^1 \tilde{\chi}_e \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz + \int_0^1 \xi \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz \\ & - \int_0^1 \hat{\xi} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 \|\frac{\partial \hat{T}}{\partial z}\|_2^2 dz - \int_0^1 \hat{\gamma} (\Delta T)^2 dz + \int_0^1 \tilde{S} \Delta T dz \\ & - \int_0^1 \gamma(z, t) \Delta T dz - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \Delta T^2 dz + \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \tilde{\chi}_e \dot{\tilde{\chi}}_e dz \\ & + \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \tilde{S} \dot{\tilde{S}} dz + \int_0^1 \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} dz + \int_0^1 \tilde{\xi} \dot{\tilde{\xi}} dz \end{aligned} \quad (4.48)$$

D'autre part, d'après (4.43), (4.17) et (4.41) nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \tilde{\chi}_e \dot{\tilde{\chi}}_e dz = \int_0^1 \tilde{\chi}_e \frac{\partial \Delta T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} dz, \\ \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \tilde{S} \dot{\tilde{S}} dz = - \int_0^1 \tilde{S} \Delta T dz, \\ \int_0^1 \tilde{\gamma} \dot{\tilde{\gamma}} dz = \int_0^1 \hat{\gamma} (\Delta T)^2 dz - \int_0^1 \gamma_0 \Delta T^2 dz, \\ \int_0^1 \tilde{\xi} \dot{\tilde{\xi}} dz = \int_0^1 \hat{\xi} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right\|_2^2 dz - \int_0^1 \xi_0 \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right\|_2^2 dz. \end{array} \right. \quad (4.49)$$

En considérant (4.49) dans (4.48), nous obtenons l'expression suivante pour \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \int_0^1 \chi_e \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz + \int_0^1 \xi \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} dz - \int_0^1 \gamma \Delta T dz \\ & - \int_0^1 \xi_0 \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right\|_2^2 dz - \int_0^1 \gamma_0 (\Delta T)^2 dz - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) (\Delta T)^2 dz. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sachant que le terme $\left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(\cdot, t) \right\|_2^2$ est indépendant de l'espace (fonction uniquement du temps), que $\chi_e(z, t) > 0$ et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux deuxième et troisième termes du second membre de (4.50), nous pouvons écrire l'inégalité suivante pour \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \|\Delta T(\cdot, t)\|_2^2 - (\gamma_0 - \|\gamma(\cdot, t)\|_2^2) \|\Delta T(\cdot, t)\|_2^2 \\ & - (\xi_0 - \|\xi(\cdot, t)\|_2^2) \left\| \frac{\partial \Delta T}{\partial z}(\cdot, t) \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(\cdot, t) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

En remplaçant l'hypothèse (4.40) dans (4.51), l'inégalité de \dot{V} devient :

$$\dot{V}(t) \leq - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \|\Delta T\|_2^2 \leq 0. \quad (4.52)$$

et par conséquent, V est bornée et ses variables ΔT , $\tilde{\chi}_e$ et \tilde{S} sont bornées L^2 . Comme nous considérons des paramètres spatio-temporels, il n'est plus possible d'exploiter le principe d'invariance (théorèmes (3.3.6) et (4.3.4) de [54]). Toutefois, d'après la bornitude de V et vu que χ_e est continûment différentiable borné et Ω est un espace compact alors $L^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\Delta T(z, \cdot) \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $\tilde{\chi}_e(z, \cdot) \in L^\infty(\Omega)$, $\tilde{S}(\cdot, t) \in L^\infty(\Omega)$ et par conséquent \dot{V} est bornée ce qui implique que \dot{V} est uniformément continue dans le temps (cf. lemme 4.2 de [120]). Ainsi, d'après le lemme de Barbalat [99], nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Delta T(\cdot, t)\|_2 = 0.$$

Notons aussi que les équations (4.45), ((4.17), (4.41)), (4.44) et (4.51) correspondent aux équations (1),(2),(3) et (6) de [60]. Theorem1], ce qui nous permet d'avoir le résultat suivant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta T(z, t) = 0,$$

et en supposant que le système est soumis à une excitation persistante (et donc identifiable) nous avons par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \chi_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta S = 0,$$

ce qui conclut cette démonstration. □

Précisons que seule la bornitude temporelle de χ_e et S était nécessaire et que les résultats ont été obtenus sans avoir à connaître la valeur numérique des bornes.

4.3.3 Cas de paramètres spatio-temporels $\chi_e(z, t)$ and $S(z, t)$ sans contraintes sur la variation temporelle

Nous passons maintenant au cas des paramètres spatio-temporels à variation temporelle libre (sans contraintes).

Considérons la même fonction de Lyapunov (4.22) sans le terme δT et en prenant en compte le fait que χ_e et S varient aussi dans le temps, sa dérivée dans (4.26) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & \int_0^1 \Delta T \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dz + \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \frac{\partial \hat{\chi}_e}{\partial t} dz + \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} dz \\ & - \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \frac{\partial \chi_e}{\partial t} dz - \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \frac{\partial S}{\partial t} dz. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Si nous envisageons de garder les lois d'adaptation (4.16) et (4.17), (4.53) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & - \int_0^1 \chi_e(z, t) \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) [\Delta T(z, t)]^2 dz \\ & - \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \frac{\partial \chi_e}{\partial t} dz - \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \frac{\partial S}{\partial t} dz \\ \leq & - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \int_0^1 [\Delta T(z, t)]^2 dz - \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \frac{\partial \chi_e}{\partial t} dz - \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \frac{\partial S}{\partial t} dz \end{aligned} \quad (4.54)$$

Sachant que Q_{χ_e} et Q_S sont des espaces de Banach compacts alors :

$$\begin{cases} \exists c_2, c_3 \in \mathbb{R}_*^+ : \|\Delta \chi_e(\cdot, t)\|_2 \leq c_2, \|\Delta S(\cdot, t)\|_2 \leq c_3, \\ \left(\|\dot{\chi}_e(\cdot, t)\|_2, \|\dot{S}(\cdot, t)\|_2 \right) \in (L_\infty(0, \infty))^2, \end{cases} \quad (4.55)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et en substituant (4.55) dans (4.54) :

$$\dot{V}(t) \leq - \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \|\Delta T(\cdot, t)\|_2^2 - \frac{c_2}{\vartheta_1} \|\dot{\chi}_e(\cdot, t)\|_2^2 - \frac{c_3}{\vartheta_2} \|\dot{S}\|_2^2. \quad (4.56)$$

En intégrant sur le temps les deux membres de l'inégalité (4.56) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0 \right) \|\Delta T(\cdot, t)\|_2^2 dt &\leq + \frac{c_2}{\vartheta_1} \int_0^\infty \|\dot{\chi}_e(\cdot, t)\|_2^2 dt + \frac{c_3}{\vartheta_2} \int_0^\infty \|\dot{S}(\cdot, t)\|_2^2 dt \\ &+ V(0) - V(\infty) \\ &< \infty \end{aligned} \quad (4.57)$$

et par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Delta T(\cdot, t)\|_2 = 0. \quad (4.58)$$

Le résultat obtenu dans (4.58) est dû principalement à l'hypothèse de bornitude L^∞ temporelle de $\dot{\chi}_e$ et \dot{S} . Dans le cas où uniquement la bornitude L^2 de χ_e , S , $\dot{\chi}_e$ et \dot{S} est garantie, la convergence L^2 de l'état (4.58) n'est plus assurée. Les lois d'adaptation de (4.17) doivent être ajustées afin de prendre en compte la variation temporelle des paramètres comme ce fut le cas dans la sous-section précédente mais avec plus de flexibilité (moins de contraintes) dans ce cas.

Pour ce faire, soient les lois d'adaptation suivantes :

$$\forall z \in]0, 1[; t \geq 0 : \begin{cases} \frac{\partial \hat{\chi}_e}{\partial t} = -\sigma_e \hat{\chi}_e(z, t) + \vartheta_1 \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + g_e(z, t) \right), \\ \hat{\chi}_e(z, 0) = \hat{\chi}_{e0}(z); \\ \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} = -\sigma_s \hat{S}(z, t) - \vartheta_2 (\Delta T + g_s(z, t)), \\ \hat{S}(z, 0) = \hat{S}_0(z), \end{cases} \quad (4.59)$$

où les fonctions g_e et g_s sont données par :

$$\begin{cases} g_e(z, t) = -\frac{\mu_e^2}{\mu_e \|\hat{\chi}_e(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_e} \hat{\chi}_e(z, t), \\ \mu_e \geq \|f_e(z, t)\|_2, \quad f_e(z, t) \triangleq -\lambda_e \left(\chi_e(z, t) + \frac{1}{\sigma_e} \dot{\chi}_e(z, t) \right), \\ g_s(z, t) = \frac{\mu_s^2}{\mu_s \|\hat{S}(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_s} \hat{S}(z, t), \\ \mu_s \geq \|f_s(z, t)\|_2, \quad f_s(z, t) \triangleq -\lambda_s \left(S(z, t) + \frac{1}{\sigma_s} \dot{S}(z, t) \right), \\ \lambda_e = \frac{\sigma_e}{\vartheta_1}, \lambda_s = \frac{\sigma_s}{\vartheta_2}, \epsilon_e > 0, \sigma_e > 0, \epsilon_s > 0, \sigma_s > 0. \end{cases} \quad (4.60)$$

La forme choisie pour la prise en compte de la variation temporelle des paramètres dans la loi d'adaptation (4.59) est déduite du travail présenté dans [133] où le problème considéré était la synthèse de loi de commande adaptative en se basant sur un modèle de référence (Model Reference Adaptive Control (MRAC)) pour une EDP parabolique linéaire à paramètres uniquement temps-variants. Ainsi le développement fait dans cette sous-section peut être interprété d'une part comme une extension des résultats de [133] aux EDPs paraboliques linéaires et à paramètres spatio-temporels et d'autre part comme une conversion du problème de commande adaptative en un problème d'estimation adaptative.

Les termes " $-\sigma_e \hat{\chi}_e(z, t)$ " et " $-\sigma_s \hat{S}(z, t)$ " sont les termes de la σ -modification, ajoutés afin d'améliorer la convergence des paramètres et de rendre la loi d'adaptation plus robuste par rapport aux erreurs de modélisation (dynamiques inconnues) [61].

Théorème 4.3.3. *Si le modèle est identifiable, alors l'observateur d'état (4.16) et les lois d'adaptation (4.59), (4.60) garantissent que ΔT , $\Delta \chi_e$ et ΔS sont uniformément bornés dans le sens L^2 et que la région de bornitude uniforme peut devenir de plus en plus réduite par un choix adéquat des paramètres d'adaptation $\{\sigma_e, \sigma_s, \epsilon_e, \epsilon_s, \vartheta_1, \vartheta_2\}$ (les $\sigma_e, \sigma_s, \epsilon_e, \epsilon_s$ suffisamment petits et les ϑ_1, ϑ_2 suffisamment grands).*

Démonstration. En remplaçant (4.59) dans (4.27) nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0\right) \int_0^1 (\Delta T)^2 dz - \int_0^1 \chi_e \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\right)^2 dz + \int_0^1 \Delta \chi_e g_e dz \\ & - \frac{\sigma_e}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \hat{\chi}_e dz - \frac{1}{\vartheta_1} \int_0^1 \Delta \chi_e \dot{\chi}_e dz - \int_0^1 \Delta S g_s dz - \frac{\sigma_s}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \hat{S} dz \\ & - \frac{1}{\vartheta_2} \int_0^1 \Delta S \dot{S} dz. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Notons :

$$W_0 = \left(\frac{1}{\tau} + \vartheta_0\right) \int_0^1 (\Delta T)^2 dz - \int_0^1 \chi_e \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\right)^2 dz, \quad W_0 \geq 0. \quad (4.62)$$

En remplaçant (4.60), (4.62) et l'égalité $\hat{\chi}_e = \Delta \chi_e + \chi_e$ dans (4.63) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -W_0 - \lambda_e \int_0^1 (\Delta \chi_e)^2 dz - \lambda_s \int_0^1 (\Delta S)^2 dz + \int_0^1 \Delta \chi_e f_e dz + \int_0^1 \Delta \chi_e g_e dz \\ & + \int_0^1 \Delta S f_s dz - \int_0^1 \Delta S g_s dz. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Analysons (4.63) avec (4.60) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz terme part terme en com-

mençant par ceux en χ_e :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \Delta \chi_e f_e dz + \int_0^1 \Delta \chi_e g_e dz &= \lambda_e \int_0^1 \chi_e \left(\chi_e + \frac{\dot{\chi}_e}{\sigma_e} \right) dz + \int_0^1 \hat{\chi}_e f_e dz \\
 &\quad - \frac{\mu_e^2}{\mu_e \|\hat{\chi}_e(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_e} \|\hat{\chi}_e(z, \cdot)\|_2 \\
 &\quad + \frac{\mu_e^2}{\mu_e \|\hat{\chi}_e(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_e} \|\hat{\chi}_e(z, \cdot)\|_2 \|\chi_e(z, \cdot)\|_2 \\
 &\leq \lambda_e \|\chi_e(z, \cdot)\|_2^2 + \frac{1}{\vartheta_1} \|\chi_e(z, \cdot)\|_2 \|\dot{\chi}_e(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_e + \mu_e \|\chi_e(z, \cdot)\|_2
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

ensuite ceux en S :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \Delta S f_s dz - \int_0^1 \Delta S g_s dz &= \lambda_s \int_0^1 S \left(S + \frac{\dot{S}}{\sigma_s} \right) dz + \int_0^1 \hat{S} f_s dz \\
 &\quad - \frac{\mu_s^2}{\mu_s \|\hat{S}(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_s} \|\hat{S}(z, \cdot)\|_2 \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{\mu_s^2}{\mu_s \|\hat{S}(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_s} \|\hat{S}(z, \cdot)\|_2 \|S(z, \cdot)\|_2 dz \\
 &\leq \lambda_s \|S(z, \cdot)\|_2^2 + \frac{1}{\vartheta_2} \|S(z, \cdot)\|_2 \|\dot{S}(z, \cdot)\|_2 + \epsilon_s + \mu_s \|S(z, \cdot)\|_2
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

En remplaçant (4.64) et (4.65) dans (4.63), l'inégalité bornant \dot{V} s'écrit :

$$\dot{V} \leq -W_0 - \lambda_e \int_0^1 (\Delta \chi_e)^2 dz - \lambda_s \int_0^1 (\Delta S)^2 dz + v(t), \tag{4.66}$$

où :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \lambda_e \|\chi_e(\cdot, t)\|_2^2 + \frac{1}{\vartheta_1} \|\chi_e(\cdot, t)\|_2 \|\dot{\chi}_e(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_e + \mu_e \|\chi_e(\cdot, t)\|_2^2 + \lambda_s \|S(\cdot, t)\|_2^2 \\
 &\quad + \frac{1}{\vartheta_2} \|S(\cdot, t)\|_2 \|\dot{S}(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_s + \mu_s \|S(\cdot, t)\|_2.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

Comme $\|\chi_e(\cdot, t)\|_2$, $\|\dot{\chi}_e(\cdot, t)\|_2$, $\|S(\cdot, t)\|_2$ et $\|\dot{S}(\cdot, t)\|_2$ sont bornés L^2 , $v(t)$ est bornée et par conséquent ΔT , $\Delta \chi_e$ and ΔS sont uniformément L^2 bornés et leur norme L^2 converge vers la région définie par $v(t)$. En fixant ϵ_e , ϵ_s , σ_e et σ_s suffisamment petits et ϑ_1 , ϑ_2 suffisamment larges, $v(t)$ est de plus en plus réduite autour de zéro. \square

De plus, si le modèle est à excitation persistante, on peut trouver une région de bornitude uniforme pour l'erreur d'estimation des paramètres et qui par un choix approprié des gains de réglage peut être de taille réduite [133].

4.4 Identification adaptative robuste

4.4.1 Projection des paramètres

Le coefficient de diffusion et le terme source sont des paramètres physiques et donc forcément bornés ainsi que leurs estimés. C'est pourquoi, les lois d'adaptations développées dans les trois cas précédents doivent être modifiées dans ce sens.

Dans cette section, en se basant sur les travaux de [61], [34], nous allons présenter comment des contraintes physiques définissant l'espace auquel appartiennent nos paramètres, peuvent être prises en compte dans la formulation des lois d'adaptation dans le cas des systèmes distribués. Pour ce faire, nous allons nous mettre dans un cadre général où on considère toujours une EDP parabolique linéaire et où :

- T désigne l'état et $\Gamma(z, t) \in Q$ le paramètre inconnu (représentant χ_e ou S).
- \tilde{Q} est l'espace des paramètres défini par

$$\tilde{Q} = \{\Gamma \in Q : \int_0^1 g(\Gamma)p(z, t)dz \leq 0, p \in Q\}$$

muni du produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que $\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^1 \phi(z, t) \psi(z, t) dz$ et de sa norme induite $\|\cdot\|_2$.

- $\mathcal{M}(\Gamma)$ est l'hyperplan tangent à $\partial\tilde{Q}$ contour de \tilde{Q} , défini par :

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{p \in Q : \langle \nabla g(\Gamma), p(z, t) \rangle = 0, p \in Q\} \quad (4.68)$$

- $b(p; \phi, \psi)$ désigne la forme linéaire associée à la loi d'adaptation de Γ . Par exemple dans le cas des paramètres distribués dans la section 4.3.1 de ce chapitre, la forme linéaire b associée à la loi d'adaptation de χ_e est définie par :

$$b(p; \hat{T}, \Delta T) = \langle \hat{\chi}_e, p \rangle = \vartheta_1 \int_0^1 \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \frac{\partial \Delta T}{\partial z} p(z, t) dz.$$

Le problème d'identification devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \Gamma \in \tilde{Q} \text{ tel que } V(t) \text{ soit une fonction de Lyapunov} \\ \text{et } \langle g(\Gamma), p \rangle \leq 0, p \in Q. \end{array} \right. \quad (4.69)$$

Une des techniques les plus répandues pour résoudre (4.69) est **la méthode du gradient** [2]. En utilisant cette méthode, la loi d'adaptation devient :

$$\langle \hat{\Gamma}, p \rangle = \begin{cases} b(p; \hat{T}, \Delta T) & \text{si } \hat{\Gamma} \in (\tilde{Q}^0 \cup \partial\tilde{Q}) \\ \mathbf{Pr}\{b(p; \hat{T}, \Delta T)\} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.70)$$

où \tilde{Q}^0 est l'intérieur de Q et $\mathbf{Pr}\{p\}$ est l'opérateur de projection de p sur l'hyperplan tangent \mathcal{M} . Son expression explicite peut être calculée en considérant que $b(p; \hat{T}, \Delta T)$ (solution de

(4.69) sans contraintes) peut s'écrire comme une somme linéaire de $\mathbf{Pr}\{b\}$ et du vecteur $\nabla g(\Gamma)$ normal à \mathcal{M} [61], [34] :

$$b(p; \hat{T}, \Delta T) = \alpha \langle \nabla g(\Gamma), p \rangle + \langle \mathbf{Pr}\{b\}, p \rangle, \quad p \in Q \quad (4.71)$$

Comme $\mathbf{Pr}\{b\}$ est dans \mathcal{M} on a $\langle \mathbf{Pr}\{b\}, \nabla g(\Gamma) \rangle = 0$ et pour $p = \nabla g(\Gamma)$ il vient que :

$$b(\nabla g(\Gamma); \hat{T}, \Delta T) = \alpha \|\nabla g(\Gamma)\|_2^2, \quad p \in Q \quad (4.72)$$

et par conséquent :

$$\alpha = \frac{b(\nabla g(\Gamma); \hat{T}, \Delta T)}{\|\nabla g(\Gamma)\|_2^2}, \quad p \in Q \quad (4.73)$$

En remplaçant (4.73) dans (4.72), la formule de $\mathbf{Pr}\{b\}$ est égale à :

$$\langle \mathbf{Pr}\{b\}, p \rangle = b(p; \hat{T}, \Delta T) - \langle \nabla g(\Gamma), p \rangle \frac{b(\nabla g(\Gamma); \hat{T}, \Delta T)}{\|\nabla g(\Gamma)\|_2^2}$$

et ainsi la loi d'adaptation (4.70) permet de garantir le respect des contraintes $g(\Gamma)$ avec $\hat{\Gamma}(0) \in \tilde{Q}^0$.

Notons que le terme de projection dans (4.70) n'affecte pas la stabilité du système i.e. la dérivée de $V(t)$ reste semi-définie négative (Pour la démonstration voir [34]).

En termes plus concrets, dans le cas de l'estimation du χ_e , si on considère que :

$$\chi_e \in Q_{\chi} = \{\chi_e \in C^0(0, t_f; C^1(\Omega)), \forall z \in \Omega, \forall t \in [0, t_f] : 0 < c_1 < \chi_e(z, t) < c_2\},$$

alors

$$g(\hat{\chi}_e) = [\hat{\chi}_e(x, t)]^2 - (c_1 + c_2) \hat{\chi}_e(x, t) \leq 0,$$

et ainsi

$$\mathbf{Pr}\{p\} = b(p; \hat{T}, \Delta T) - \langle 2\hat{\chi}_e - (c_1 + c_2), p \rangle \frac{b(2\hat{\chi}_e - (c_1 + c_2); \hat{T}, \Delta T)}{\|2\hat{\chi}_e - (c_1 + c_2)\|_2^2}.$$

4.4.2 σ -modification

Dans la sous-section 4.3.3 nous avons fait référence à ces termes en précisant qu'il servent à rendre l'estimation plus robuste par rapport aux dynamiques inconnues.

En effet, soit $\eta(z, t)$ la dynamique inconnue non-nulle de (4.1) et Γ le paramètre inconnu (χ_e ou S). Sa loi d'adaptation devient :

$$\langle \hat{\Gamma}, p \rangle = b(p; \hat{T}, \Delta T) - w(t) \langle \hat{\Gamma}, p \rangle, \quad (4.74)$$

où $w(t)$ est le terme de *fuite*, choisi constant ou variant (voir [61]).

L'introduction du terme $w(t)$ altère les propriétés de convergence de l'estimateur adaptatif : l'erreur d'estimation de l'état ne converge plus vers zéro mais vers une région autour

de zéro. Si $w(t)$ est choisi constant même en l'absence de η , le terme de σ -modification agit comme une perturbation et la convergence de l'état vers zéro n'est plus garantie. Dans le cas d'un $w(t)$ variable, lorsque η est nulle, la convergence de l'état est conservée (pour la démonstration voir [34]).

4.5 Auto-réglage des gains d'adaptation

Les performances de l'estimation/identification adaptative reposent sur le choix des gains d'adaptation (ϑ_0 , ϑ_1 et ϑ_2). Ces gains sont généralement fixés par essais-erreurs en se basant sur les connaissances dont on dispose sur le système en question.

Dans le cas d'un système différentiel dont la sortie est linéaire par rapport aux paramètres inconnus, en utilisant des lois d'adaptation du type gradient, comme cela est dans notre cas, si les gains sont de faibles valeurs, la vitesse de convergence de l'estimateur est lente mais robuste par rapport au bruit de mesure. Dans le cas contraire, la vitesse de convergence est accélérée mais des oscillations apparaissent dues à l'amplification du bruit. Dans le cas d'un système non-linéaire, on ne peut prédire ce comportement : même une variation faible des gains peut entraîner des variations importantes dans la réaction de l'estimateur [120].

Dans [89], une technique en ligne permettant d'ajuster ces gains dans le cas de la commande adaptative directe a été présentée. En minimisant l'énergie de la commande, les gains d'adaptation *optimaux* sont calculés. Dans cette section, en exploitant cette idée, l'erreur d'observation (estimation) de l'état est minimisée dans le temps afin de trouver nos paramètres optimaux (dans ce sens) $\vartheta_{0_{opt}}$, $\vartheta_{1_{opt}}$ et $\vartheta_{2_{opt}}$.

Pour ce faire, prenons le cas de la sous-section 4.3.1 où les paramètres varient uniquement dans l'espace et considérons l'observateur d'état (4.16) avec les lois d'adaptation (4.17). Soit $\theta^* = [\vartheta_{0_{opt}} \ \vartheta_{1_{opt}} \ \vartheta_{2_{opt}}]$ le vecteur des gains d'adaptation, le critère à minimiser est le suivant :

$$\theta^* = \operatorname{argmin}_{\theta} \left\{ J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \int_0^1 \Delta T^2(z, k) dz \right\}, \quad (4.75)$$

où $\Delta T(z, k) = \hat{T}(z, k) - T(z, k)$.

En discrétisant (4.16) dans le temps avec un pas noté dt et en utilisant le schéma explicite

d'Euler, $\hat{T}(z, k)$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{T}(z, k) = dt \operatorname{div} \left(\hat{\chi}_e(z, k-1) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(z, k-1) \right) - \left(\frac{dt}{\tau} - 1 \right) \hat{T}(z, k-1) \\ \quad + dt \hat{S}(z, k-1) - \vartheta_0 dt \Delta T(z, k-1), \quad z \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(0, k) = \hat{T}(1, k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad \hat{T}(z, 0) = 0, \quad z \in \Omega. \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Pour la discrétisation de (4.17) nous utilisons le schéma implicite d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\chi}_e(z, k) = \hat{\chi}_e(z, k-1) + \vartheta_1 dt \frac{\partial \Delta T}{\partial z}(z, k) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(z, k), \quad z \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, N, \\ \hat{S}(z, k) = \hat{S}(z, k-1) - \vartheta_2 dt \Delta T(z, k), \quad z \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (4.77)$$

En remplaçant (4.77) dans (4.76), l'expression de $\hat{T}(z, k)$ devient :

$$\begin{aligned} \hat{T}(z, k) &= dt \operatorname{div} \left(\hat{\chi}_e(z, k-2) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(z, k-1) \right) \\ &\quad + dt^2 \vartheta_1 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z}(z, k-1) \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)^2(z, k-1) \right) \\ &\quad - \left(\frac{dt}{\tau} - 1 \right) \hat{T}(z, k-1) + dt \hat{S}(z, k-2) - (dt \vartheta_2 + \vartheta_0) dt \Delta T(z, k-1), \end{aligned} \quad (4.78)$$

où il est évident que les deux gains ϑ_0 et ϑ_2 sont linéairement dépendants : par conséquent l'un d'entre eux doit être fixé. Nous choisissons de garder ϑ_0 constant. Ainsi le nouveau vecteur des paramètres optimaux est $\theta_{new}^* = [\vartheta_{1_{opt}} \quad \vartheta_{2_{opt}}]$.

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(z, k-1) = dt \operatorname{div} \left(\hat{\chi}_e(z, k-2) \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}(z, k-1) \right) - \left(\frac{dt}{\tau} - 1 \right) \hat{T}(z, k-1) \\ \quad + dt \hat{S}(z, k-2) - \vartheta_0 dt \Delta T(z, k-1), \\ \phi_2(z, k-1) = dt^2 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z}(z, k-1) \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \right)^2(z, k-1) \right), \\ \phi_3(z, k-1) = -dt^2 \Delta T(z, k-1), \end{array} \right. \quad (4.79)$$

et (4.78) s'écrira :

$$\hat{T}(z, k) = \phi_1(z, k-1) + \theta_{new}^T \psi(z, k), \quad (4.80)$$

où $\psi = [\phi_2 \ \phi_3]$.

En substituant (4.80) dans (4.75), le critère $J(\theta_{new})$ est donné par :

$$\theta_{new}^* = \underset{\theta_k}{\operatorname{argmin}} \left(J(\theta_{new}) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^N \int_0^1 \left((\phi(z, k) - \theta_{new}^T \psi(z, k))^2 dz \right) \right\} \right), \quad (4.81)$$

avec $\phi(z, k) = \phi_1(z, k-1) - T(z, k)$.

Le critère J est convexe par rapport au vecteur des paramètres inconnus θ_{new}^T et par conséquent une solution optimale existe et elle est unique. Une méthode en ligne pour la minimisation de ce critère est la méthode des Moindres Carrés Récursifs (MCR). En utilisant cette méthode, la solution est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k) \int_0^1 \left(\phi(z, k-1) - \hat{\theta}^T(k-1) \psi(z, k-1) \right) dz, \\ L(k) = \left[\int_0^1 \psi(z, k) P(z, k-1) \psi^T(z, k) dz \right]^{-1} \left[\int_0^1 P(z, k-1) \psi(z, k-1) dz \right], \\ P(z, k) = P(z, k-1) - \left[\int_0^1 \psi^T(z, k) P(z, k-1) \psi(z, k) dz \right]^{-1} \\ \quad \left[P^2(z, k-1) \psi^T(z, k) \psi(z, k-1) \right]. \end{array} \right. \quad (4.82)$$

Notons que lorsque $\Delta T(z, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, le vecteur ψ devient nul et le gain $L(k)$ est indéfini. Afin de remédier à ce problème, nous proposons la solution suivante :

$$\hat{\theta}(k) = \begin{cases} (4.82), & \text{si } \Delta T(z, t) > \epsilon_0 \\ \hat{\theta}_{min}, & \text{si } \Delta T(z, t) \leq \epsilon_0, \end{cases} \quad (4.83)$$

où ϵ_0 est un seuil prédéfini et $\hat{\theta}_{min}$ est à fixer.

Dans la méthode MCR, on ne peut assurer la convergence instantanée de $\hat{\theta}$ vers θ_{new}^* . Une solution alternative à la minimisation du critère (4.75) est d'envisager la minimisation de la somme sur la variable spatiale de l'écart entre la sortie et son estimée à chaque instant (pas de discrétisation). Alors, le nouveau critère s'écrit :

$$\theta_{new}^*(k) = \underset{\theta_k}{\operatorname{argmin}} \left\{ J_2(\theta_{new}(k)) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{Nz} \left((\phi(z_i, k) - \theta_{new}^T(k) \psi(z_i, k))^2 \right) \right\}, \quad (4.84)$$

où dans ce cas θ^T est considéré temps-variant et Nz est la taille du réseau de capteurs. L'avantage de cette technique est qu'elle fournit une solution optimale à chaque instant pourvu que la mesure soit distribuée (plus de deux nœuds) et elle est donnée par :

$$\hat{\theta}_{new}^*(k) = \begin{cases} \left[\sum_{i=0}^{Nz} \psi(z, k) \psi^T(z_i, k) \right]^{-1} \left[\sum_{i=0}^{Nz} \psi(z_i, k-1) \phi(z_i, k) \right], & \text{si } \Delta T > \epsilon_0 \\ \hat{\theta}_{min}, & \text{si } \Delta T(z, t) \leq \epsilon_0, \end{cases} \quad (4.85)$$

Les variables $\psi(z_i, k)$ et $\phi(z_i, k)$ sont issues de la discrétisation spatiale du système (4.79) en utilisant la méthode des lignes et ses variantes.

Notons que la stabilité des lois d'adaptation et de l'observateur d'état est maintenue si les gains d'adaptation sont strictement positif. L'auto-réglage de ces gains aide à améliorer les performances de l'estimateur tout en conservant sa stabilité.

4.6 Résultats de simulation

Afin de montrer l'efficacité de la méthode d'identification proposée dans ce chapitre, nous allons l'appliquer en premier sur un cas test (un exemple de simulation) et ensuite sur des données expérimentales, le shot *TS* – 32632 utilisé dans le chapitre précédent. Ceci nous permettra de comparer les résultats des deux approches.

Pour les données simulées, nous traitons le cas d'un système dont le coefficient de diffusion est distribué uniquement dans l'espace avec un terme source faiblement temps-variant. Notons que, l'intérêt de cette section est de montrer la faisabilité et les performances de l'identification adaptative en dimension infinie. La mise en œuvre des techniques introduites dans les sections précédentes (cf. §4.3.2, §4.3.3 et §4.4) n'est pas envisagée dans ce manuscrit.

Les conditions de simulation sont les suivantes :

- 1- L'observateur d'état et les lois d'adaptation établis respectivement dans (4.16) et (4.17) sont utilisés pour identifier T , χ_e et S .
- 2- La méthode de BS-Galerkin FEM (cf. chapitre 1) est appliquée pour la semi-discrétisation (discrétisation spatiale) des EDPs (4.1), (4.16) et (4.17).
- 3- Afin que les données de simulation soient dans les mêmes conditions que les données expérimentales, on fixe la dimension de la base de projection de l'état à $n = 20$. La période d'échantillonnage spatiale est $dz = 0.05$ et celle temporelle est égale à $dt = 0.01$.
- 4- Dans ces simulations, les signaux d'entrée-sortie sont considérés non bruités.
- 5- Les fonctions B-splines modifiées sont les fonctions de base de la formulation variationnelle de (4.1) et (4.16).
- 6- Pour la formulation faible du coefficient de diffusion et du terme source, les fonctions B-splines standard sont nos bases de projection.
- 6- Les intégrales dans l'espace sont calculées en utilisant la méthode d'approximation de *Gauss-Kronrod* implantée dans MATLAB[®] par la fonction *quadgk*.
- 7- Les logiciels de mise en œuvre choisis sont MATLAB[®] et SIMULINK[®].

4.6.1 Exemple de simulation

Nous proposons d'estimer les profils de T , χ_e et S présentés dans la fig. 4.1.

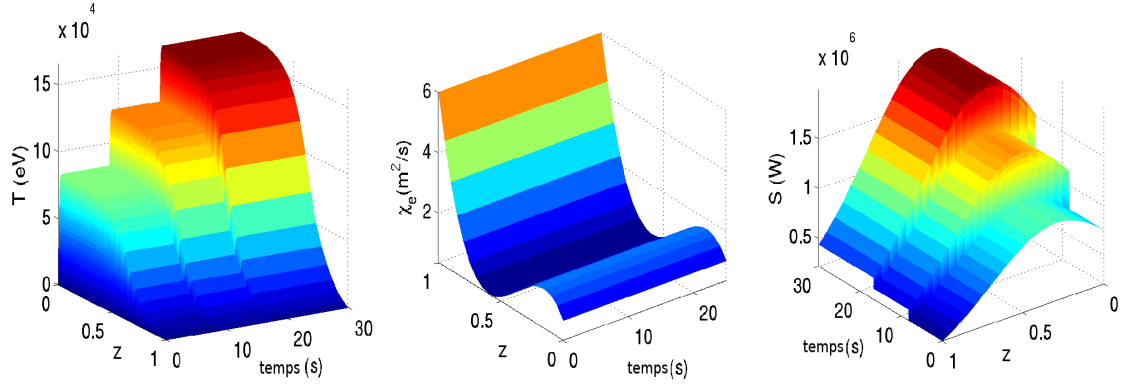


FIGURE 4.1 – Profils de T , χ_e et S pour l'exemple de simulation

Ces profils sont générés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \chi_e(z, t) = (0.1 + 5z + 2z^2 + 4z^3) \mathbf{1}(t) (m^2/s); \tau = 0.1(s) \\ S(z, t) = \frac{10^5}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(\frac{-(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{g}(t) (eV/s) \\ z \in [0, 1], \quad t \in [0, t_f], \quad t_f = 30, \quad dz = 0.05, \quad dt = 0.01, \end{cases} \quad (4.86)$$

où nous considérons un χ_e temps-invariant ($\mathbf{1}(t) = 1, \forall t \in [0, 30s]$), alors que la variation temporelle de S est décrite par une fonction échelon g à trois paliers, définie par :

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in [0, t_f/3[\\ 1.5 & \text{if } t \in [t_f/3, 2t_f/3[\\ 2 & \text{if } t \in [2t_f/3, t_f[\end{cases} \quad (4.87)$$

Après plusieurs essais, les gains d'adaptation (de tuning) sont ainsi choisis : $\vartheta_0 = 10^3$, $\vartheta_1 = 1850$ and $\vartheta_2 = 850$ et les erreurs d'estimation de T , χ_e et S sont présentées dans la fig. 4.2 où on constate que cet estimateur a de bonnes capacités à estimer des profils (d'entrée) temps-variant (faiblement) alors que dans sa conception il n'était pas destiné *a priori* à cette tâche. C'est ce qui explique le temps de convergence des erreurs d'estimation de χ_e et S . En ce qui concerne la température, comme le vecteur d'état est lui-même le vecteur de sortie, il est évident que l'erreur d'observation de T est très faible.

4.6.2 Résultats expérimentaux

Le shot $TS - 32632$, fig. 4.3 est de nouveau utilisé pour tester les capacités de l'estimateur en ligne donné par (4.16)-(4.17).

Comme pour les données simulées, la base de projection de la température a pour dimension $n = 20$ alors que pour χ_e et S , les bases sont d'ordre $r = d = 10$.

De la fig. 4.4, nous pouvons conclure que l'estimateur adaptatif (4.16)-(4.17) arrive à bien

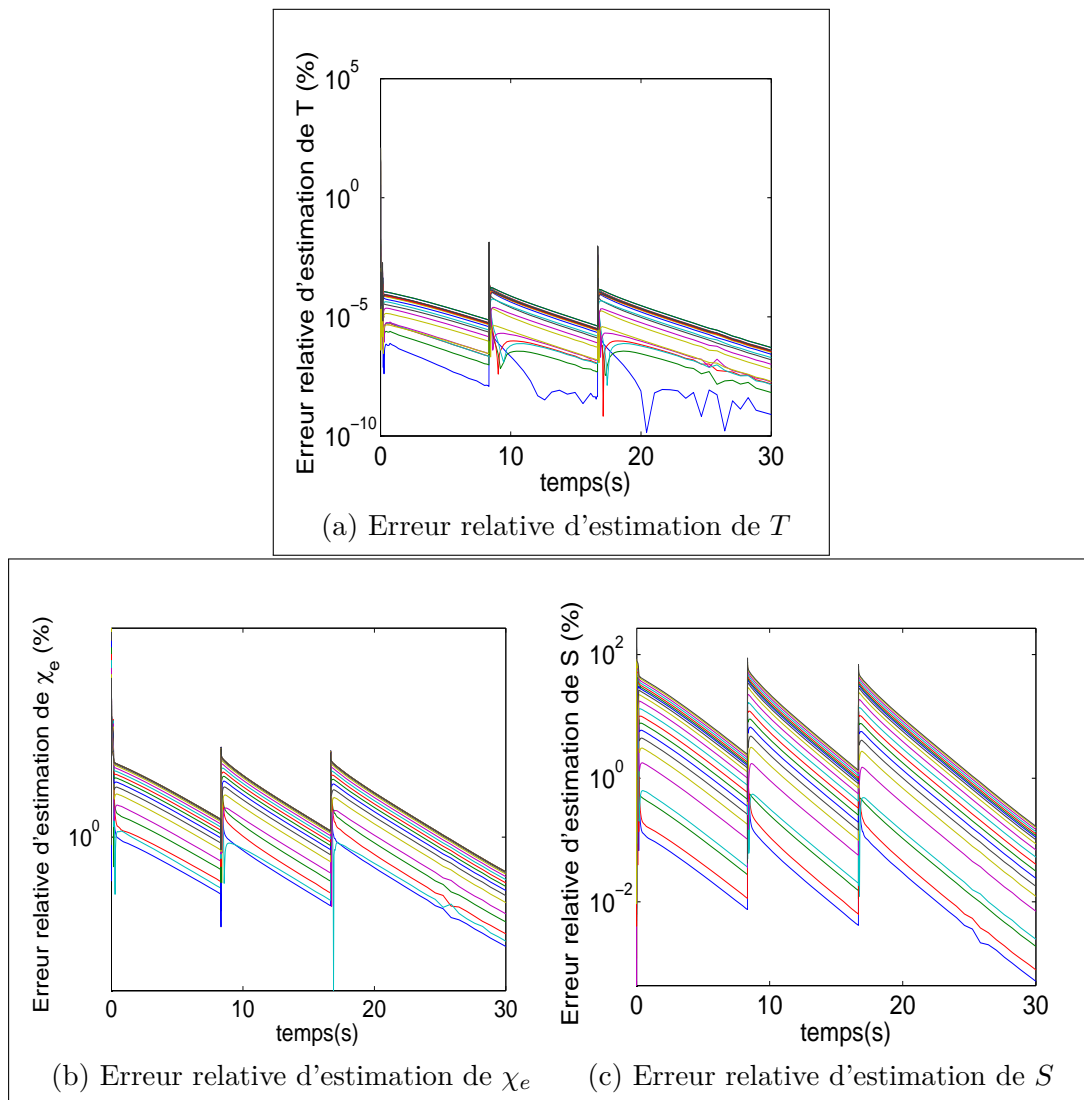


FIGURE 4.2 – Performances de l'estimateur en ligne de dimension infinie appliqué à l'exemple de simulation

estimer le profil de T_{exp} : en effet, l'erreur relative d'estimation est inférieure à 1%. Les profils estimés de χ_e and S donnés dans la fig. 4.5 sont cohérents avec leurs critères *a priori*, à savoir qu'ils sont positifs dans la zone de validité du modèle ($z \in [0, 1]$) et qu'ils sont de forme gaussienne pour S et de forme croissante au bord pour χ_e . Ces profils sont aussi similaires à ceux obtenus dans le chapitre précédent où le filtre de Kalman a été utilisé. Le fait d'appliquer deux méthodes complètement différentes et d'arriver au même résultat nous conforte dans le choix des approches adoptées pour l'analyse et l'étude de ce problème (identification simultanée de χ_e et S).

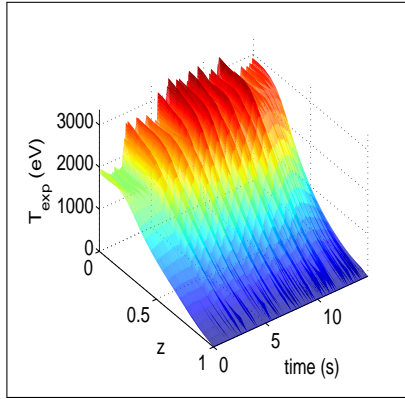


FIGURE 4.3 – Profil de T_{exp} du shot $TS - 32632$

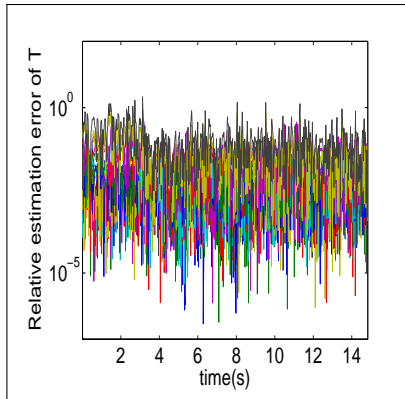
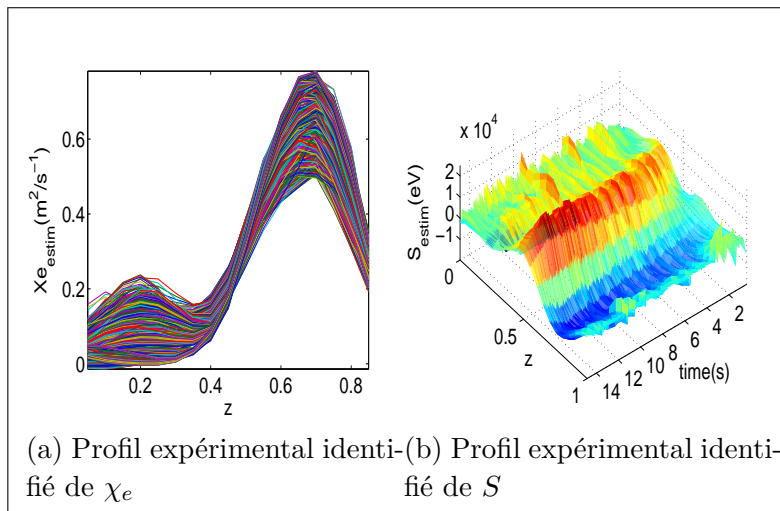


FIGURE 4.4 – Erreur relative d'estimation du profil de T_{exp}



(a) Profil expérimental identifié de χ_e (b) Profil expérimental identifié de S

FIGURE 4.5 – Profil expérimentaux identifiés de χ_e et S pour le shot $TS - 32632$

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons analysé une méthode d'estimation en dimension infinie. Il s'agit d'une méthode en ligne, adaptative, composée d'un observateur dédié à la reconstruction de l'état en se basant sur le modèle dont on dispose et d'une combinaison de lois d'adaptation permettant l'identification des paramètres inconnus (coefficient de diffusion et terme source) développées en assurant la stabilité du schéma global dans le sens de Lyapunov.

Pour atteindre ce but, nous avons commencé par présenter les conditions sous lesquelles notre problème est bien posé en définissant les espaces sur lesquels le travail sera développé. Ensuite, nous avons démontré qu'en pratique, en plus d'un problème bien posé, un choix judicieux des bases de projection est nécessaire afin de garantir l'identifiabilité structurelle du système.

Le problème d'estimation en dimension infinie étant complexe, trois cas de difficulté progressive ont été étudiés. Le premier constitue la base sur laquelle nous avons bâti notre analyse. Nous avons aussi présenté la façon dont ces lois d'adaptation peuvent être modifiées pour devenir plus robustes par rapport aux dynamiques inconnues et comment les critères physiques sur les paramètres peuvent être pris en compte.

Comme dans toute méthode adaptative, les gains d'adaptation jouent un rôle important sur la qualité de l'estimation (les performances de l'estimateur) et sont généralement fixés par un processus d'essais-erreurs pouvant être fastidieux. C'est pourquoi nous avons présenté en dernier une nouvelle méthode permettant l'auto-réglage de ces gains.

Les résultats de simulations sur des données simulées et réelles montrent bien la faisabilité et les capacités de cette méthode bien que nous ayons implanté uniquement le cas de l'estimateur adaptatif de base ((4.16)-(4.17)) ce qui valide notre démarche et nous encourage à envisager la mise en œuvre des autres techniques dans le futur afin d'améliorer les résultats obtenus.

Conclusions et perspectives

Ce dernier chapitre a pour objectifs de comparer les performances des deux méthodologies proposées dans ce mémoire, de résumer les contributions apportées dans cette thèse au problème d'estimation des systèmes distribués à entrées inconnues et de dessiner les lignes directrices permettant l'amélioration et l'extension de ce travail.

5.1 Comparaison entre le FKE-EI de dimension finie et l'estimateur adaptatif de dimension infinie

Bien que le FKE-EI et l'estimateur adaptatif traitent le même problème d'estimation, chaque technique présente des avantages et des inconvénients. Dans les points qui suivent, nous comparons ces deux méthodes en analysant leurs qualités et limitations pour notre cas d'étude :

- 1- Le FKE-EI est dédié à l'estimation des entrées inconnues contrairement à l'estimateur adaptatif. Dans le développement du FKE-EI, le problème d'estimation des entrées inconnues a été traité en minimisant l'erreur de sortie par rapport à l'état et aux entrées simultanément. Par conséquent, le filtre qui en résulte (le FK-EI) est optimal aussi bien dans le sens des moindres carrés que dans le sens des filtres non-biaisés à variance minimale. En étendant le problème d'estimation aux paramètres, le FKE-EI perd son optimalité mais conserve toutefois sa convergence asymptotique. Dans le cas de l'estimateur en dimension infinie, nous ne pouvons garantir que la convergence L_2 et de plus la convergence point par point dans le cas des entrées uniquement distribuées dans l'espace. Ainsi, le FKE-EI est capable d'estimer des entrées qui varient rapidement dans le temps, contrairement à l'estimateur en dimension infinie.
- 2- Dans le Chapitre 3, une technique permettant l'estimation de la variation temporelle des paramètres [132] a été présentée et intégrée au FKE-EI, lui donnant, en plus de l'estimation des entrées rapides, la possibilité d'identifier des paramètres temps-variants. Dans le cas de l'estimateur de dimension infinie, seule une zone de convergence autour du zéro dont la taille dépend des gains d'adaptation a été trouvée.
- 3- Comme l'estimateur adaptatif est développé en dimension infinie, il est indépendant de la technique utilisée pour sa mise en œuvre, contrairement au FKE-EI qui s'applique au problème réduit et par conséquent, dont les performances numériques dépendent de la méthode de discrétisation de l'EDP du transport et des bases de projections choisies.

- 4- Le passage du Chapitre 3 au Chapitre 4 a été motivé par la contrainte sur les dimensions des bases de projection, ce qui limite la précision de l'approximation (des entrées et des paramètres). Dans la Section 3.2, la condition d'identifiabilité des paramètres et de l'entrée est que le nombre d'inconnues (paramètres et entrées) soit inférieur ou égal au nombre d'équations (de sortie), condition évidente pour l'inversion de tout problème, alors qu'en dimension infinie, l'identifiabilité du problème est indépendante des dimensions des bases de projection. Dans la Figure 5.2, nous illustrons les performances de convergence de l'estimateur adaptatif pour la reconstruction des profils présentés dans la Figure 5.1. Dans ce cas, les dimensions des bases de projection de χ_e et S sont égales à $r = d = 11$ bien que la dimension de la base de projection de T soit de $n = 19$ ($r + d > n + 1$). Ce cas de figure ne peut être traité par le FKE-EI (perte de rang de la matrice φ et donc le conditionnement est infini) alors que l'estimateur adaptatif permet une erreur d'estimation inférieure à 1%.
- 5- En résumé, pour l'estimation des entrées, le filtre de Kalman à entrées inconnues offre une meilleure solution mais est contraint par sa dimension finie. L'estimateur adaptatif présente l'avantage de son indépendance par rapport à la technique de discrétisation choisie. Aussi, comme démontré dans le chapitre précédent, dans le cas des paramètres et entrées temps variants, l'estimateur converge vers une région de rayon ajustable et ainsi il s'intègre mieux dans une stratégie de commande adaptative de dimension infinie (voir section 5.3).

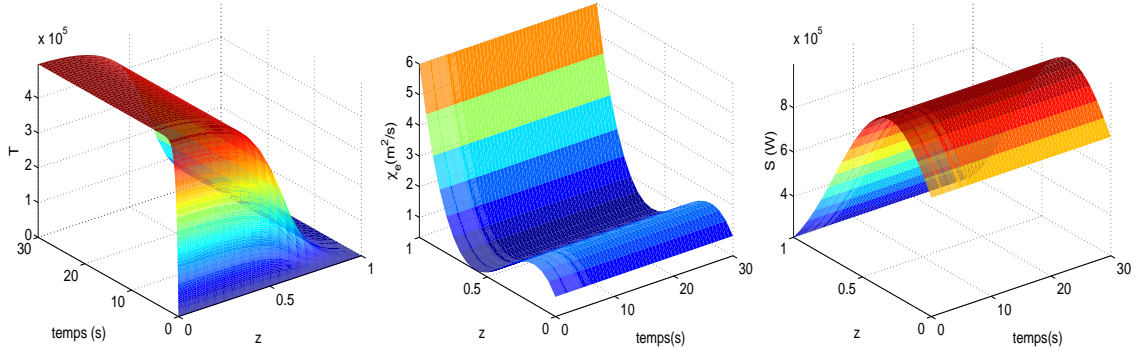


FIGURE 5.1 – Profils de T , χ_e et S dans le cas de $r + d > n + 1$

5.2 Contributions

Nos contributions majeures sont les suivantes :

- 1- Approximation de la solution de l'EDP de transport de l'énergie sous la formulation de Galerkin. Jusqu'ici les méthodes existantes déclarées dans la littérature sont des techniques analytiques difficiles à mettre en œuvre et nécessitent des paramètres constants dans le temps [136], [24].

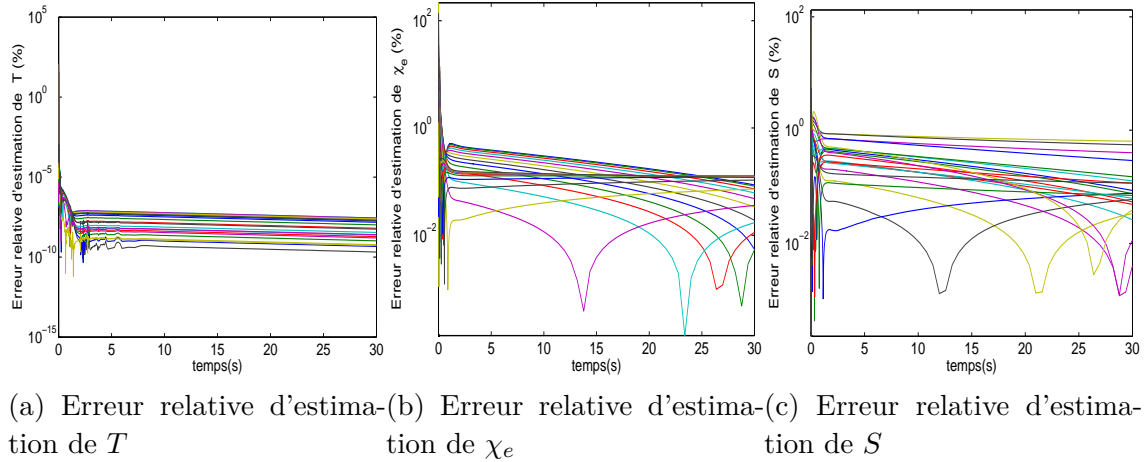


FIGURE 5.2 – Performances de l'estimateur en ligne de dimension infinie dans le cas de $r + d > n + 1$.

- 2- Développement d'une méthodologie pour traiter le problème d'estimation en dimension finie. Nous avons vu comment la discrétisation de l'EDP et le choix des bases de projection peuvent influencer sur l'identification des paramètres. Nous avons aussi démontré comment sous l'hypothèse d'espaces compacts (de paramètres et d'états) le problème d'estimation en dimension finie converge vers sa formulation initiale en dimension infinie.
- 3- Parmi la multitude des méthodes d'estimation/identification qui existent dans la littérature, nous avons réussi à identifier deux méthodes offrant des éléments de réponse à notre problème d'estimation. Ces deux méthodes ont le mérite de proposer des estimateurs stables, optimaux (dans un certain sens), qui traitent le problème d'estimation des entrées inconnues (sans hypothèses *a priori*) et non pas de l'estimation en présence d'entrées inconnues (cas des paramètres à entrées inconnues).
- 4- Suite aux limites de l'estimation liée à la dimension finie, nous avons proposé un estimateur (observateur) en ligne de dimension infinie en utilisant les notions de stabilité de Lyapounov. Nous avons aussi tenté de présenter comment les paramètres de réglage (tuning) peuvent être auto-adaptés afin d'améliorer les performances de convergence de notre estimateur.

5.3 Perspectives

Toutefois, comme nul travail n'est complet, il reste un certain nombre de problème à étudier et à résoudre. Nous proposons comme perspectives :

- 1- Trouver une relation analytique ou une estimation reliant l'erreur d'approximation par projection à l'erreur d'estimation.

- 2- Trouver une méthode permettant l'estimation, le réglage ou le choix des matrices de covariance du bruit d'état et du bruit de mesure lorsque ce dernier est de statistique inconnus ou difficile à caractériser. Dans ce manuscrit, nous les avons choisies constantes et nous les avons calibrées par essais-erreurs.
- 3- Dans tout notre travail, nous avons considéré en simulation des paramètres à variables séparables. Il serait intéressant de voir le comportement des méthodologies proposées dans le cadre des systèmes où la séparation des variables n'est pas possible. En théorie, ceci ne pose pas de problème, il reste à le vérifier en simulation.
- 4- Mettre en œuvre les estimateurs et l'auto-réglage des paramètres d'adaptation présentés dans le chapitre 4.
- 5- Généraliser le filtre de Kalman de dimension infinie étudié dans [109] au cas des systèmes distribués à entrées inconnues en se basant sur le filtre de dimension finie proposé dans le Chapitre 4. En effet, dans [109], les auteurs montrent que le passage du filtre de Kalman de la dimension finie à la dimension infinie est direct. Si on considère le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = \mathcal{F} f(z, t) + \mathcal{B} u(z, t) + \mathcal{L} w(z, t), \\ y(z, k) = \mathcal{H}(k) f(z, k) + r(k), \end{cases} \quad (5.1)$$

où f est l'état spatio-temporel du système, u est l'entrée, y est la sortie, \mathcal{F} , \mathcal{B} , \mathcal{L} et \mathcal{H} sont des opérateurs linéaires pouvant être de forme matricielle et temps-variants. Le bruit d'état $w(z, t)$ est un processus blanc gaussien à moyenne nulle ainsi que le bruit de mesure $r(k)$. En utilisant comme le schéma explicite, la solution *mild* du système (5.1) est donnée par :

$$\begin{cases} f(z, k+1) = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] f(z, k) + \delta t \mathcal{B}(k) u(z, k) + \delta t \mathcal{L}(k) w(z, k), \\ y(z, k) = \mathcal{H}(k) f(z, k) + r(k), \end{cases} \quad (5.2)$$

Le filtre de Kalman de dimension infinie appliqué au système (5.2) est formulé ainsi (voir [109], [27]) :

- **Étape de prédiction :**

$$\hat{f}_{k|k-1}(z) = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] \hat{f}_{k-1|k-1}(z) + \delta t \mathcal{B}(k) u(z, k), \quad (5.3)$$

$$P_{k|k-1}(z, z') = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] P_{k-1|k-1}(z, z') [I + \delta t \mathcal{F}(k)]^* + Q(z, z', k).$$

- **Étape de correction :**

$$K_k(z) = P_{k|k-1}(z, z') \mathcal{H}(k)^* (\mathcal{H}(k) P_{k|k-1}(z, z') \mathcal{H}^*(k) + R(k))^{-1},$$

$$\hat{f}_{k|k}(z) = \hat{f}_{k-1|k-1}(z) + K_k(z)(y(k) - \mathcal{H}(k) \hat{f}_{k|k-1}(z)), \quad (5.4)$$

$$P_{k|k}(z, z') = P_{k|k-1}(z, z') - K_k(z)(\mathcal{H}(k) P_{k|k-1}(z, z') \mathcal{H}^*(k) + R(k)) K_k^*(z),$$

où \hat{f} est l'estimé de f , Q est la fonction de covariance du bruit d'état ($\delta t \mathcal{L} w(z, k)$), R est matrice de covariance du bruit de mesure, $(\cdot)^{-1}$ est l'opérateur d'inversion et $(\cdot)^*$ est l'adjoint de l'opérateur (\cdot) .

En suivant la même procédure, nous pouvons estimer qu'à partir de l'algorithme du FK-EI présenté dans le Chapitre 3, le FK-EI de dimension infinie sera donné par le tableau 5.1. Cependant, il faut démontrer ce résultat en combinant les travaux de [95] et [109],

Étape de prédiction :

$$\bar{f}_{k|k-1}(z) = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] \hat{f}(k-1|k-1),$$

$$\hat{f}_{k|k-1}(z) = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] \hat{f}_{k-1|k-1}(z) + B(k-1) \hat{u}_{k-1|k}(z).$$

$$P_{k|k-1}(z) = [I + \delta t \mathcal{F}(k)] P_{k-1|k-1}(z) [I + \delta t \mathcal{F}(k)]^* + Q(z, z', k),$$

Étape de correction :

$$K_k(z) = P_{k|k-1}(z) H^*(k) [H(k) P_{k|k-1}(z) H^*(k) + R(k)]^{-1},$$

$$U_k(z) = [B(k-1)^* H^*(k) R(k)^{-1} (I - H(k) K_k(z)) H(k) B(k-1)]^{-1},$$

$$\hat{u}_{k-1|k}(z) = U(k) B(k-1)^* H^*(k) R^{-1}(k) (I - H(k) K_k(z)) [y(z, k) - H(k) \bar{f}_{k|k-1}(z)],$$

$$\hat{f}_{k|k}(z) = \hat{f}_{k|k-1} + K_k(z) [y(z, k) - H(k) \hat{f}_{k|k-1}(z)],$$

$$P_{k|k}(z) = (I - K_k(z) H(k)) [P_{k|k-1}(z) + B(k-1) U_k(z) B(k-1) (I - K_k(z) H(k))^*],$$

TABLE 5.1 – Algorithme du FK-EI pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues en dimension infinie

tout en accordant une attention particulière à la notion de fonction de covariance en dimension infinie, à l'initialisation du filtre, à l'intégration des conditions aux limites et à la possibilité de son extension à l'inclusion de l'estimation des paramètres.

- 6- Exploiter le développement présenté dans le chapitre précédent, section 4.3.3 dans une stratégie de commande adaptative. Effectivement, considérons l'EDP de transport suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \left(\chi_e(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + u(z, t) + \phi(z, t), & z \in \Omega, t \in [0, t_f], \\ \frac{\partial T}{\partial z}(0, t) = T(1, t) = 0, & t \in [0, t_f], \\ T(z, 0) = 0, & z \in \Omega, \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\chi_e(z, t) > 0$ et $\phi(z, t)$ sont inconnus mais supposés uniformément bornés et dont les dérivées sont aussi uniformément bornées. Les mesures et la commande $u(z, t)$ sont supposées connues et distribuées.

Soit le modèle de référence :

$$\begin{cases} \frac{\partial T_m}{\partial t} = \text{div} \left(\chi_{e_m}(z, t) \frac{\partial T_m}{\partial z} \right) + r(z, t), & z \in \Omega, t \in [0, t_f], \\ \frac{\partial T_m}{\partial z}(0, t) = T_m(1, t) = 0, & t \in [0, t_f], \\ T_m(z, 0) = 0, & z \in \Omega, \end{cases} \quad (5.6)$$

Le problème est de trouver le signal d'entrée $u(z, t)$ permettant de faire converger asymptotiquement T solution de (5.5) vers T_m solution de (5.6), tout en préservant la bornitude des signaux de la boucle fermée.

Si, en se basant entre autres sur le travail de [133], il est possible de démontrer :

- qu'en choisissant comme signal d'entrée :

$$u(z, t) = r(z, t) + \text{div} \left((\chi_{e_m} - \hat{\chi}_e(z, t)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g_\phi(z, t), \quad (5.7)$$

avec :

$$g_\phi(z, t) = \frac{\mu_s^2}{\mu_s \|e(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_s} e(z, t),$$

- et les lois d'adaptation :

$$\frac{\partial \hat{\chi}_e}{\partial t} = -\sigma_e \hat{\chi}_e(z, t) - \vartheta_1 \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial z} \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + \frac{\partial \Delta T^2}{\partial z} + g_e(z, t) \right), \quad \hat{\chi}_e(z, 0) = \hat{\chi}_{e_0}(z), \quad (5.8)$$

$$\dot{\mu}_s = -\sigma_s \mu_s + \gamma_s \|e(\cdot, t)\|,$$

où la fonction g_e est donnée par :

$$\begin{cases} g_e(z, t) = -\frac{\mu_e^2}{\mu_e \|\hat{\chi}_e(\cdot, t)\|_2 + \epsilon_e} \hat{\chi}_e(z, t), \\ \mu_e \geq \|f_e(z, t)\|_2, \quad f_e(z, t) \triangleq -\lambda_e \left(\chi_e(z, t) + \frac{1}{\sigma_e} \dot{\chi}_e(z, t) \right), \\ \lambda_e = \frac{\sigma_e}{\vartheta_1}, \epsilon_e > 0, \sigma_e > 0, \epsilon_s > 0, \sigma_s > 0, \gamma_e > 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

alors l'erreur de poursuite $e(z, t) = T(z, t) - T_m(z, t)$ converge vers une région $v(t)$ autour de zéro. Avec un choix adéquat des paramètres de réglage il est possible de réduire sa taille. Dans (5.5), par rapport à l'EDP de transport de la température, u représente l'énergie fournie aux particules alors que ϕ est l'énergie perdue qu'on ne peut qualifier (inconnue). Cet exemple peut facilement se généraliser au cas d'une équation de diffusion-réaction et d'advection.

Pour finir, tout au long de ce travail nous avons considéré le cas de mesures distribuées dans l'espace. Un problème plus concret et de difficulté plus relevée serait de traiter l'estimation à partir d'une série discrète de mesures ou de mesures aux limites. Ce champ de recherche est encore très ouvert.

Bibliographie

- [1] A. A. Oberai, N. H. Gokhale, and G. R. Feijóo. Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. *Inverse Problems*, 19 :297–313, 2003. [98](#)
- [2] G. ALLÉRE. *Numerical Analysis and Optimization : An introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press Inc., New York, 2007. [13](#), [14](#), [19](#), [118](#)
- [3] M. Ariola and A. Pironti. *Magnetic control of tokamak plasmas*. Springer-Verlag London Limited, 2008. [1](#)
- [4] K. J. Astrom. Lectures on the identification problem- the least squares method. Technical report, Division of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1968. [52](#)
- [5] S. Audoly, G. Bellu, L. D’Angiò, MP. Saccomani, and C. Cobelli. Global identifiability of nonlinear models of biological systems. *IEEE. Trans. Biomed. Eng.*, 48(1) :55–65, 2001. [46](#)
- [6] H. T. Banks. *A functional analysis framework for modelling, estimation and control in science and engineering*. Taylor & Francis Group, 2012. [37](#), [99](#)
- [7] H. T. Banks and D. W. Iles. On compactness of admissible parameter sets : convergence and stability in inverse problems. *Lecture notes in control and information sciences*, 97 :130–142, 1987. [37](#), [42](#), [71](#)
- [8] H. T. Banks and K. Kunisch. *Estimation techniques for distributed parameter systems*. 1989. [37](#), [38](#), [98](#)
- [9] H. T. Banks and M. Pedersen. Well-posedness of inverse problems for systems with time dependent parameters. *Arabian Journal for Science and Engineering. Section B : Engineering*, 34 :39–58., 2009. [37](#), [42](#)
- [10] H.T. Banks, P.L. Daniel, and E.S. Armstrong. A spline based parameter and state estimation technique for static models of elastic surfaces. Technical Report 25-83, ICASE Rep., NASA Langley Res. Ctr, Hampton VA, June 1983. [42](#)
- [11] H.T. Banks, P.M. Kareiva, and P.D. Lamm. Modelling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances. *Journal of Mathematical Biology*, 22 :259–277, 1986. [37](#)
- [12] H.T. Banks and P.D. Lamm. Estimation of variable coefficients in parabolic distributed systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 4 :386–389, 1985. [37](#)
- [13] J. Baumeister, W. Scondo, M. A. Demetriou, and I. G. Rosen. On-line parameter estimation for infinite-dimensional dynamical systems. *SIAM J. CONTROL OPTIM.*, 35(02) :678–713, 1997. [99](#), [101](#), [102](#)
- [14] G. Bellu, M. P. Saccomani, S. Audoly, and L. D’Angiò. Daisy : A new numerical software tool to test global identifiability of biological and physiological systems. *Comput. Meth. Programs Biomed.*, 88 :52–61, 2007. [46](#)

- [15] G. Berkooz, P. Holmes, and L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 25 :539–575, 1993. 23
- [16] N. Boizot and E. Busvelle. Adaptive-gain observers and applications. In G. Besançon, editor, *Nonlinear observers and applications*, volume 363 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 71–114. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. 45
- [17] S. C. Brenner and R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer Science+Business Media, LLC, 2008. 26
- [18] H. Brezis. *Functional Analysis , Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2011. 9, 13, 16
- [19] R. L. Burden and J. D. Faires. *Numerical analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2002. 50
- [20] A. G. Butkovsky. *Green's functions and transfer functions handbook*. 1982. 8
- [21] J. D. Callen and G. L. Jahns. Experimental measurement of electron heat diffusivity in a tokamak. *Physical Review Letters*, 38(9) :491–495, 1976. 10
- [22] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T.A. Zang. *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. 8, 21
- [23] G. Christakos. A bayesian/maximum-entropy view to the spatial estimation problem. *Mathematical Geology*, 22(7) :763–777, 1990. 36
- [24] A. Cléménçon, C. Guivarch, S.P. Eury, X.L. Zou, and G. Giruzzi. Analytical solution of the diffusion equation in a cylindrical medium with step-like diffusivity. *Physics of Plasmas*, 11(11) :4998–5009, 2004. 11, 130
- [25] D.G. Costa. *An Invitation to Variational Methods in Differential Equations*. Birkhäuser-Boston, 2007. 12
- [26] H. Cox. On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-9 :5–12, 1964. 52, 78
- [27] N. Cressie and C. K. Wikle. *Space-time Kalman filter*, volume 4 of *Encyclopedia of Environmetrics*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2002. 132
- [28] M. Darouach and M. Zasadzinski. Unbiased minimum-variance estimation for systems with unknown exogenous inputs. *Automatica*, 33(4) :717–719, 1997. 64
- [29] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 :606–609., 1994. 64
- [30] M. Darouach, M. Zasadzinski, and M. Boutayeb. Extension of minimum-variance estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 39 :867–876, 2003. 64
- [31] C. de Boor. “on calculating with b-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6 :50–62, 1972. 27
- [32] M. A. Demetriou. *Adaptive Parameter Estimation of Abstract Parabolic and Hyperbolic Distributed Parameter systems*. PhD thesis, Departments of Electrical Engineering-Systems and Mathematics University of Southern California, Los Angeles, CA, 1993. 98, 99
- [33] M. A. Demetriou and I. G. Rosen. Robust adaptive estimation for parabolic distributed parameter systems. pages 3448–3453, 1997. 99, 101

- [34] M. A. Demetriou and I. G. Rosen. On-line robust parameter identification for parabolic systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15 :615–631, 2001. [99](#), [118](#), [119](#), [120](#)
- [35] S. Dobre. *Analyse de sensibilité et d'identifiabilité globales. Application à l'estimation de paramètres photophysiques en thérapie photodynamique*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2010. [45](#), [46](#), [51](#)
- [36] Dimitri D'Or. *Spatial Prediction of Soil Properties*. PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2003. [36](#)
- [37] M. Erba, T. Aniel, V. Basiuk, A. Becoulet, and X. Litaudon. Validation of a new mixed bohm/gyro-bohm model for electron and heat transport against the iter, tore supra and start database discharges. *Nuclear Fusion*, 38(7) :1013–1028, 1998. [2](#), [10](#), [11](#), [84](#), [91](#), [92](#)
- [38] M. Erba, A. Cherubini, V. V. Parail, E. Springmann, and A. Taroni. Development of a non-local model for tokamak heat transport in L-mode, H-mode and transient regimes. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 39 :261–276, 1997. [10](#)
- [39] M. Erba, V. Parail, E. Springmann, and A. Taroni. Extension of a bohm model for l-mode electron heat transport to ion heat transport and to the ohmic regime. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 37 :1249–1261, 1995. [10](#)
- [40] L. C. Evans. *Partial differential equations : Graduate studies in Mathematics*, volume 19. American Mathematical Society, 2 edition, 2010. [16](#), [19](#), [20](#), [30](#), [101](#)
- [41] R. Wilde F. Yang. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33 :677–681, 1988. [64](#)
- [42] G. Fairweather. *Finite element Galerkin methods for differential equations*, volume 34. Lecture notes in pure and applied mathematics, CRC Press, 1978. [8](#), [17](#), [19](#)
- [43] H. Fang, Y. Shi, and J. Yi3. On stable simultaneous input and state estimation for discrete-time linear systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25 :671–686, 2011. [64](#)
- [44] T. Floquet, C. Edwards, and S. K. Spurgeon. On sliding mode observers for systems with unknown inputs. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 21(8-9) :638–656, 2007. [64](#)
- [45] M. Gergin. *Identification and Estimation for Models Described by Differential-Algebraic Equations*. PhD thesis, Division of Automatic Control, Department of Electrical Engineering, Linköpings universitet, SE-581 83 Linköping, Sweden, 2006. [46](#)
- [46] S. Gillijns and B. De Moor. Unbiased minimum-variance estimation for systems with unknown inputs. *Automatica*, 43 :934–937, 2007. [64](#)
- [47] S. Gillijns and B. De Moor. Unbiased minimum-variance input and state estimation in discrete-time systems. *Automatica*, 43 :111–116, 2007. [69](#), [74](#)
- [48] J. D. Glover. The linear estimation of completely unknown signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 766–767, 1969. [63](#)
- [49] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive Filtering Prediction and Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984. [62](#), [75](#)

- [50] D. Gottlieb and S. A. Orszag. Numerical analysis of spectral methods. Technical Report 5, Cambridge hydrodynamics, 1977. [22](#)
- [51] M. Grewal and A. Andrews. *Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, New York, 2001. [75](#), [81](#)
- [52] Q. P. Ha and H. Trinh. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica*, 40(10) :1779–1785, 2004. [64](#)
- [53] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13 :49–52, 1902. [4](#), [14](#), [46](#)
- [54] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981. [108](#), [109](#), [113](#)
- [55] G.T. Hoang, B. Saoutic, L. Guiziou, V. Basiuk, A. Bécoulet, R.V. Budny, F. Clairet, L. Colas, P. Devynck, C. Gil, E. Joffrin, X. Litaudon, J.-L. Ségui, I. Voitsekhoitch, and X.L. Zou. Magnetic shear effects on confinement and electron heat transport in Tore Supra discharges with electron heating. *Nuclear Fusion*, 38(1) :117–132, 1998. [10](#), [11](#), [89](#)
- [56] K. Höllig. *Finite Element Methods with B-Splines*. Siam, 2003. [26](#), [27](#)
- [57] P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*, publisher=Cambridge : Cambridge University Press year = 1996,. [23](#)
- [58] K. S. Hong and J. Bentesman. Application of averaging method for integro-differential equations to model reference adaptive control of parabolic systems. pages 5591–596, July 1-3, Grenoble 1992. [104](#)
- [59] K. S. Hong and J. Bentsman. Direct adaptive control of parabolic systems : Algorithm synthesis and convergence and stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(10) :2018–2033, 1994. [104](#)
- [60] K.S Hong. Asymptotic behaviour of a coupled dynamic system : Application to adaptive systems. *IFAC 13th Triennial World Congress*, 1996. [113](#)
- [61] P. A. Ioannou and J. Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall Inc. New Jersey, 1996. [104](#), [116](#), [118](#), [119](#)
- [62] A. Iserles and S.P. Nørsett. From high oscillation to rapid approximation i : Modified Fourier expansions. *IMA Journal of Numerical analysis*, 28 :862–887, 2006. [21](#)
- [63] J. Jacquez and P. Greif. Numerical parameter identifiability and estimability : integrating identifiability, and optimal sampling design. *Math. Biosci*, 77(1) :201–228, 1985. [45](#)
- [64] A. H. Jazwinski. *Stochastic process and filtering theory*. New York, 1970. [65](#), [75](#)
- [65] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME. Series D, Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45, 1960. [73](#)
- [66] K. Karhunen. Zur spektral theori stochasticher prozesse. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A1-Mathematica Phys*, 37, 1946. [23](#)
- [67] P. K. Kitanidis. Unbiased minimum-variance linear state estimation. *Automatica*, 23(6) :775–778, 1987. [63](#), [64](#)

- [68] R. Kopper and R. Orford. Linear regression applied to system identification for adaptive control systems. *AIAA Journal*, 1 :2300–2306, 1963. [74](#), [78](#)
- [69] C. Kravis and J. H. Seinfeld. Identification of parameters in distributed parameter systems by regularization. *SIAM J. Control and Optimization*, 23 :217–241, 1985. [42](#)
- [70] M. W. G. Kroesen, D. C. Schram, C. J Timmermans, and J. C. M De Haas. The energy balance of a plasma in partial local thermodynamic equilibrium. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 18(6) :985–991, 1990. [11](#)
- [71] M. J. Lai and L. L. Schumaker. *Splines functions and triangulations*. Cambridge University Press, New York, 2007. [27](#)
- [72] I. D. Landau. *Identification des systèmes*. Système automatisé, Information Commande Communication. Hermès, Paris, 1998. [58](#)
- [73] I. D. Landau, R. Lozano, and M. M’Saad. *Adaptive Control*. Springer Verlag, 1997. [58](#)
- [74] H. X. Li and C. Qi. Modeling of distributed parameter systems for application- a synthesised review from time-space separation. *Journal of Process Control*, 20 :891–901, 2010. [8](#), [19](#), [20](#), [36](#)
- [75] J. W. Lin, B. Raimondo, A. W. Smyth, and R. W. Longman. On-line identification of nonlinear hysteretic structural systems using a variable trace approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30 :1279–1303, 2001. [59](#)
- [76] L. Ljung. Consistency of the least-squares identification method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22 :539–551, 1976. [52](#)
- [77] L. Ljung. Asymptotic behaviour of extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Trans. on Auto. Control*, AC-24(1) :36–50, 1979. [80](#)
- [78] L. Ljung. On consistency and identifiability. *Mathematical Programming Study*, 5, 1979. [45](#)
- [79] L. Ljung and T. Glad. On global identifiability for arbitrary model parametrizations. *Automatica*, 30(2) :265–276, 1994. [46](#), [51](#)
- [80] L. Ljung and T. Söderström. *Theory and practice of recursive identification*. The MIT Press, Cambridge Massachusetts, London England, 1983. [52](#), [53](#), [58](#), [81](#)
- [81] N. Mahadevan and K. A. Hoo. Wavelet-based model reduction for distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*, (55) :4271–4290, 2000. [26](#)
- [82] P. S. Maybeck. *Stochastic models, Estimation and Control*. Academic Press Inc., 1979. [73](#)
- [83] S. Mechhoud, E. Witrant, L. Dugard, and D. Moreau. Adaptive distributed parameter and input estimation in plasma tokamak heat transport. 1st Workshop on systems governed by Partial Differential Equations, IFAC, Paris, France, 2013. [103](#)
- [84] R. Mehra. On the identification of variances and adaptive kalman filtering. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 15(2) :693–698, 1970. [72](#)
- [85] G. Mercère. *Contribution à l’identification récursive des systèmes par l’approche des sous-espaces*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004. [58](#)

- [86] N. Meshkat, M. Eisenberg, and J. J. Distefano III. An algorithm for finding globally identifiable parameter combinations of nonlinear ode models using Gröber bases. *Math. Biosci.*, pages 61–72, 2009. [47](#)
- [87] D. R. Mikkelsen, S.D Scott, and W. Dorland. Testing the ρ_* scaling of thermal transport models : Predicted and measured temperatures in the tokamak fusion test reactor dimensionless scaling experiments. *Physics of Plasmas*, 4(5) :1362–1370, 1997. [2](#), [10](#), [84](#), [91](#)
- [88] K. Myers and B. Tapley. Adaptive sequential estimation with unknown noise statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4) :520–523, 1976. [72](#)
- [89] H. N. Nounou and K. M. Passino. Stable auto-tuning of the adaptation gain for direct adaptive control. Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois, June 2000. [120](#)
- [90] A. O’Hagan. Curve fitting and optimal design for prediction (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 40(1) :1–42, 1978. [36](#)
- [91] F. Ollivier. Identifiabilité des systèmes. Technical report, Ecole Polytechnique, 1997. [46](#)
- [92] T. Onjun, G. Bateman, A. Kritz, , and D. Hannum. Comparison of low confinement mode transport simulations using the mixed bohm/gyro-bohm and the multi-mode-95 transport model. *Physics of Plasmas*, 8(3) :975–985, 2001. [10](#), [11](#)
- [93] Y. Orlov and J. Bentsman. Adaptive distributed parameter systems identification with enforceable identifiability conditions and reduced-order spatial differentiation. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 45(02) :203–216, 2000. [98](#), [99](#), [101](#), [102](#), [103](#), [106](#), [108](#), [109](#)
- [94] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochina. A robust variable forgetting factor recursive least-squares algorithm for system identification. *IEEE signal processing letters*, 15, 2008. [59](#)
- [95] S. Pan. *System identification and damage detection of structures with unknown excitations*. PhD thesis, Dept. Civil and Environmental Engineering, University of California, Irvine, USA, 2006. [37](#), [54](#), [56](#), [57](#), [62](#), [64](#), [68](#), [94](#), [133](#)
- [96] S. Pan, H. Su, H. Wang, J. Chu, and R. Lu. Input and state estimation for linear systems : A least squares estimation approach. In *Proceedings of the 7th Asian Control Conference*, pages 378–383, Hong Kong, China, August 27-29 2009. [64](#), [68](#)
- [97] A. Perasso. *Identifiabilité de paramètres pour des systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles. Application à la dynamique des populations*. PhD thesis, Département de Mathématiques d’Orsay, Université Paris-Sud 11, 2009. [101](#)
- [98] B. Podvin. Introduction à la décomposition orthogonale aux valeurs propres ou p.o.d. LIMSIS-CNRS UPR 3251, BP133 Université Paris-Sud 91403 ORSAY CEDEX, Novembre 2001. [23](#), [24](#)
- [99] V. M. Popov. *Hyperstability of control systems*. Bucuresti : Editura Academiei ; Berlin : Springer, 1973. [113](#)
- [100] P. M. Prenter. *Splines and variational methods*. Jhon Wiley & Sons, 1989. [8](#), [26](#), [28](#), [29](#)

- [101] V. D. Pustovitov. Nonlocal effects in energy in an equilibrium plasma during its fast heating/cooling in tokamaks and stellarators. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54(124036), 2012. [10](#)
- [102] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer Series in Computational Mathematics, 2008. [12](#), [19](#), [21](#), [22](#), [30](#)
- [103] C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. [36](#)
- [104] A. Raue, C. Kreutz, U. Klingmüller, and J. Timmer. Addressing parameter identifiability by model-based experimentation. *IET. Syst. Biol.*, 5(2) :120–130, 2010. [45](#), [101](#)
- [105] P. Ruckdeschel. Optimally robust kalman filtering. Technical report, Fraunhofer ITWM, 2010. [72](#)
- [106] F. Ryter, Y. Camenen, J. C. DeBoo, F. Imbeaux, P. Mantica, G. Regnoli, C. Sozzi, U. Stroth, ASDEX Upgrade, DIII-D, FTU, JET-EFDA contributors, Tore Supra TCV, and W7-AS Teams. Electron heat transport studies. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 48 :B453–B463, 2006. [10](#)
- [107] F. Ryter, R. Dux, P. Mantica, and T. Tala. Perturbative studies of transport phenomena in fusion devices. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 52(124043), 2010. [2](#), [8](#), [9](#), [10](#), [11](#), [84](#)
- [108] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*. Springer-Verlag, 2008. [8](#), [9](#), [12](#), [13](#), [14](#), [16](#), [19](#), [20](#), [21](#), [101](#), [106](#)
- [109] S. Sarkka and J. Hartikainen. Infinite-dimensional kalman filtering approach to spatio-temporal gaussian process regression. In *Proceedings of the 15th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, volume 22, pages 993–1001, 2012. [132](#), [133](#)
- [110] F. Sattin, D. F. Escande, Y. Camenen, A. T. Salmi, T. Tala, and JET EFDA Contributors. Estimate of convection–diffusion coefficients from modulated perturbative experiments as an inverse problem. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 54 :1–9, 2012. [3](#), [11](#), [37](#)
- [111] F. Sawo. *Nonlinear State and Parameter Estimation of Spatially Distributed Systems*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2009. [36](#)
- [112] I. J. Schoenberg. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. of Appl. Math.*, 4 :45–141, 1946. [26](#)
- [113] N. L. Schryer. A tutorial on galerkin’s method using b-splines for solving differential equations. Technical Report 52, Computing Science Technical Report, 1976. [26](#)
- [114] M. H. Schultz and R. S. Varga. *Splines Analysis*. Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey, 1973. [30](#)
- [115] W. Scondo. *Ein Modellgleichsverfahren zur adaptiven Parameteridentifikation in Evolutionsgleichungen*. PhD thesis, Johann Wolfgang Goethe-Universität zu Frankfurt am Main, Frankfurt am Main, Germany, 1987. [98](#), [99](#)
- [116] J. P. Shaffer. The gauss-markov theorem and random regressors. *The American Statistician*, 45(4), 1991. [68](#)

- [117] H. Shima and T. Nakayama. *Higher Mathematics for Physics and Engineering*. Springer-Verlag, 2010. 8, 17
- [118] D. Simon. *Optimal state estimation : Kalman, H_∞ and nonlinear approaches*. Jhon Wiley & Sons, 2006. 68, 70, 71, 73, 75, 81
- [119] L. Sirovich. Turbulence and the dynamics of coherent structures. part i : Coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3(45) :561–571, 1987. 23, 24
- [120] J.J. Slotine and W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice-Hall, Inc., 1991. 113, 120
- [121] G. Strang and G. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, New York, 1973. 19
- [122] A. Taroni, M. Erba, E. Springmann, and F. Tibone. Global and local energy confinement properties of simple transport coefficients of the bohm type. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 36 :1629–1646, 1994. 2, 10
- [123] B. J. D. Tubbing, N. J. Lopes Cardozo, and M. J. Van Der Weil. Tokamak heat transport- a study of heat pulse propagation in jet. *Nuclear Fusion*, 27(11) :1843–1855, 1987. 10
- [124] K. N. S. Kasi Viswanadham, P. Murali Krishna, and Rao S. Koneru. Numerical solutions of fourth order boundary value problems by galerkin method with quintic b-splines. *International Journal of Nonlinear Science*, 10(2) :222–230, 2010. 29
- [125] S. Wada, K. Mitsunaga, H. Suemitsu, and T. Matsu. Adaptive estimation of time-varying parameters and its application to time-derivative tracker. *SICE-ICASE International Joint Conference*, 2006. 110
- [126] E. Walter and L. Pronzato. *Identification de modèle paramétriques à partir de données expérimentales*. MASSON, 1994. 45, 46, 48
- [127] E. A. Wan and A. T. Nelson. *Kalman Filtering and Neural Networks*, chapter Dual Extended Kalman Filter Methods, pages 123–175. John Wiley & Sons, Inc., 2001. 78, 80
- [128] P. K. C. Wang. *Distributed Parameter Systems : Modelling and Identification*, volume 1 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter Identification problems in plasma physics, pages 424–445. Springer Berlin Heidelberg, 1978. 36
- [129] L. Xie, L. Lu, D. Zhang, and H. Zhang. Improved robust h_2 and h_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 40(5) :873–880, 2004. 72
- [130] C. Xu, Y. Ou, and E. Schuster. Transport parameter estimation of plasma transport dynamics using the extended kalman filter. *IEEE TRANSACTION ON PLASMA SCIENCE*, 38(3) :359–364, March 2010. 37
- [131] A. Yagi. *Abstract parabolic evolution equations and their applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. 9
- [132] J.N. Yang and S. Lin. Identification of parametric variations of structures based on least squares estimation and adaptive tracking technique. *Journal of engineering mechanics*, 2005. 59, 60, 61, 62, 76, 84, 87, 129
- [133] K. J. Yang, K. S. Hong, W. S. Yoo, and O. K. Lim. Robust adaptive control of a time-varying heat equation with unknown bounded disturbances. *JSME International Journal*, 44(3) :708–716, 2001. 116, 117, 134

-
- [134] K. Z. Yao, B. M. SHAW, K. B. Kou, K. B. McAuley, and D. W. Bacon. Modeling ethylene/butene copolymerization with multi-site catalysts : parameter estimability and experimental design. *Polym. React. Eng.*, 11(3) :563–588, 2003. [45](#)
- [135] W. Yu and J. H. Seinfeld. Identification of parabolic distributed parameter systems by regularization with differential operators. *Journal of mathematical analysis and applications*, 132 :365–387, 1988. [42](#), [98](#)
- [136] X. L. Zou, G. Giruzzi, J. F. Artaud, F. Bouquey, A. Clémenton, C. Darbos, R. J. Dumont, C. Guivarch, M. Lennholm, R. Magne, and J. L. Ségui. Electron heat transport and ECRH modulation experiments in Tore Supra tokamak. *Nuclear Fusion*, 43 :1411–1420, 2003. [10](#), [11](#), [83](#), [92](#), [130](#)

Résumé — Cette thèse porte sur l'estimation simultanée du coefficient de diffusion et du terme source régissant le modèle de transport de la température dans les plasmas chauds. Ce phénomène physique est décrit par une équation différentielle partielle (EDP) linéaire, parabolique du second-ordre et non-homogène, où le coefficient de diffusion est distribué et le coefficient de réaction est constant. Ce travail peut se présenter en deux parties. Dans la première, le problème d'estimation est traité en dimension finie ("Early lumping approach"). Dans la deuxième partie, le problème d'estimation est traité dans le cadre initial de la dimension infinie ("Late lumping approach"). Pour l'estimation en dimension finie, une fois le modèle établi, la formulation de Galerkin et la méthode d'approximation par projection sont choisies pour convertir l'EDP de transport en un système d'état linéaire, temps-variant et à entrées inconnues. Sur le modèle réduit, deux techniques dédiées à l'estimation des entrées inconnues sont choisies pour résoudre le problème. En dimension infinie, l'estimation en-ligne adaptative est adoptée pour apporter des éléments de réponse aux contraintes et limitations dues à la réduction du modèle. Des résultats de simulations sur des données réelles et simulées sont présentées dans ce mémoire.

Mots clés : Fusion thermonucléaire contrôlée, formulation de Galerkin, FEM, B-splines , Filtre de Kalman Étendu à Entrées Inconnues (FKE-EI), méthode des Moindres Carrés Récurrents à Entrées Inconnues (MCR-EI), estimation adaptative en dimension infinie, auto-réglage des paramètres d'adaptation.

Abstract — This work deals with the diffusion and source term estimation in a heat transport model for tokamaks plasma . This phenomenon is described by a second-order linear parabolic partial differential equation (PDE) with distributed diffusion parameter and input. Both "Early lumping" and "Late lumping" approaches are considered in this thesis. First, once the heat model is chosen, the Galerkin formulation and the parameter projection method are combined to convert the PDE to a set of ordinary differential equations (ODEs). Then, two estimation methods able to give optimal estimates of the inputs are applied on the reduced model to identify simultaneously the source term and the diffusion coefficient. In the infinite dimensional method, the adaptive estimation technique is chosen in order to reconstruct "freely" the unknown parameters without the constraints due to the model reduction method. Simulation results on both simulated and real data are provided to attest the performance of the proposed methodologies.

Keywords : Controlled thermonuclear fusion, Galerkin formulation, Finite Element Method(FEM), B-splines , Extended Kalman Filter with Unknown Inputs Without Direct Feedthrough (EKF-UI-WDF), Recursive Least Square Estimation with Unknown Inputs (RLSE-UI), late lumping adaptive estimation, adaptation gains' auto-tuning.
