



N° d'ordre : 2013-16



Année 2013

THÈSE

Dynamique des interfaces multicontact

Présentée devant

l'École Centrale de Lyon

pour obtenir

le GRADE DE DOCTEUR

École doctorale

Mécanique, Énergétique, Génie Civil, Acoustique

Spécialité

MÉCANIQUE

par

Viet Hung DANG

Thèse soutenue le 03 juillet 2013 devant la Commission d'examen

Jury

Charles PÉZERAT

Andres SOOM

Laurent BAILLET

Michel RAOUS

Joël PERRET-LIAUDET

Alain LE BOT

Professeur des universités - UM, Le Mans

Professeur des universités - UB, Etat-Unis

Professeur des universités - UJF, Grenoble

Directeur de Recherche - CNRS

Maître de Conférences - ECL, Lyon

Directeur de Recherche - CNRS

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Directeur de thèse

LTDS - UMR CNRS 5513 - Ecole Centrale de Lyon
36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully (FRANCE)

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'Ecole Centrale de Lyon, UMR CNRS 5513. Je remercie fortement Denis MAZUYER, Directeur du LTDS, pour son accueil et son accessibilité.

Je tiens à remercier Charles PÉZERAT, Professeur des universités, Le Mans, d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je suis particulièrement reconnaissant à Andres SOOM, Professeur des universités à l'Université de Buffalo, Etat-Unis et Laurent BAILLET, Professeur des universités à l'Université Joseph Fourier pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie chaleureusement Julien SCHEIBERT pour tes idées scientifiques concises et précieux.

Je tiens à exprimer ma gratitude sincère à Joel PERRET-LIAUDET pour de nombreuses conversations qui m'apporte des connaissances intéressantes sur plusieurs aspects : scientifique, langue, gastronomie, voyage.

Je remercie du plus profond de mon coeur, Alain LE BOT pour ton encadrement et ta correction persistance. J'admire ta passion pour la science. De plus, tu me donne des éléments nécessaires et les soutiens convenables pour résoudre des difficultés dans la vie d'un étudiant étranger. Merci pour tout Alain.

Merci à Fabien DALZIN et Thibault LAFONT de m'avoir aidé à corriger mon mémoire. Merci également à Chaïma ZOUABI et Anton RUSANOV pour leur gentillesse.

Je remercie Jérôme DIDIER pour la fabrication et la mise en place des expérimentations, Matthieu GUIBERT pour la réalisation du programme de pilotage des tribomètres, Serge ZARA pour la partie électronique, Mickael SYLVESTRE pour la partie l'informatique.

Il m'est également de remercier les différentes personnes que j'ai pu côtoyer durant ces années passées au LTDS : Jimmy DONDAINE, Gaëtan BOUVARD, Gaylord GUILLONNEAU, Juliette CAYER BARRIOZ, Emmanuel RIGAUD, Alexandre CARBONELLI, Florian BREMOND, Olga SMERDOVA, Sophie PAVAN (merci à tous les autres aussi).

Et pour terminer, merci à ma famille et mes amis Vietnamiennes qui sont à côté de moi dans tous ma vie.

Table des matières

Introduction	11
1 État de l'art	15
1.1 Bruit de frottement	15
1.2 Phénoménologie du bruit de rugosité	16
1.2.1 Mécanisme du bruit de rugosité	16
1.2.2 Propriétés du bruit de rugosité	17
1.2.3 Application industrielle du bruit de rugosité	18
1.3 Description des surfaces rugueuses	21
1.3.1 Mesure de l'état de surface	21
1.3.2 Caractères statistiques	21
1.3.3 Génération des surfaces numériques	25
1.4 Mécanique de contact	26
1.4.1 Condition de non pénétration	26
1.4.2 Relation force-déplacement	27
1.5 Modélisation de contact	31
1.5.1 Modèle analytique de contact rugueux	31
1.5.2 Méthode des éléments frontières	33
1.5.3 Méthode des éléments finis	35
1.5.4 Méthode de fonction de Green	36
1.6 Synthèse	37
2 Étude expérimentale du bruit de rugosité	38
2.1 Observation de deux régimes	38

2.2	Vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact	40
2.2.1	Principe	41
2.2.2	Dispositifs	42
2.2.3	Protocole	47
2.2.4	Résultats	49
2.3	Dissipation de vibration	50
2.3.1	Confrontation de la théorie de dissipation avec les expériences . .	52
2.4	Niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement	54
2.4.1	Objectif et principe	54
2.4.2	Dispositif et protocole	55
2.4.3	Résultats	56
2.5	Conclusion	56
3	Simulation numérique directe	58
3.1	Modèle du contact glissant entre deux surfaces rugueuses	58
3.1.1	Formulation mathématique	59
3.1.2	Décomposition modale	60
3.1.3	Technique de réduction de l'ordre	62
3.2	Schémas d'intégration temporelle	63
3.2.1	Discrétisation temporelle	63
3.2.2	Problème de valeur initiale	63
3.2.3	Notation	64
3.2.4	Propriétés	65
3.2.5	Schéma d'intégration temporelle	68
3.2.6	Tableau des schémas d'intégration temporelle	83
3.2.7	Discrétisation spatiale	83
3.2.8	Continuité des surfaces discrétisées	84
3.2.9	Interpolation linéaire	85
3.2.10	Interpolation d'Hermite	85
3.3	Algorithme pour le calcul des forces de contact	86
3.3.1	Détection du contact	86

3.3.2	Algorithme de pénalité	87
3.3.3	Algorithme des multiplicateurs de Lagrange	88
3.3.4	Le système masse-ressort	90
3.4	Conclusion	93
4	Outils numériques	95
4.1	Structure du programme Ra2D	95
4.1.1	Organigramme	95
4.1.2	Conventions	96
4.1.3	Profil	97
4.1.4	Fichier de données	98
4.1.5	Solveur Ra2D	99
4.1.6	Fichier de résultats	100
4.1.7	Traitement des résultats	103
4.2	Optimisation du programme Ra2D	103
4.2.1	Outil de profilage Perfsuite	104
4.2.2	Optimisation par compilateur	105
4.2.3	Lapack	106
4.2.4	Optimisation de l'algorithme	106
4.2.5	Matrice creuse	107
4.3	Méso centre	108
4.3.1	Matériel d'un ordinateur normal	108
4.3.2	Machines parallèles	109
4.3.3	Programmation parallèle	111
4.3.4	Centre de calcul haute performance à Lyon	112
5	Résultats de simulation	114
5.1	Validation du programme Ra2D	114
5.1.1	Poutre soumise à une masse mobile	114
5.1.2	Comparaison avec un logiciel éléments finis	118
5.2	Configuration des simulations numériques	122

5.2.1	Choix des paramètres	123
5.2.2	Surface numérique	124
5.3	Résultats numériques	127
5.3.1	Le niveau vibratoire	127
5.3.2	Étude statistique des chocs	134
5.3.3	Synthèse des résultats numériques	146
6	Simulation 3D	148
6.1	Formulation mathématique	148
6.2	Décomposition modale	151
6.3	Problème modal	151
6.3.1	Schéma d'intégration temporelle	152
6.3.2	Méthode de pénalité	152
6.4	Résultats et discussion	155
6.4.1	Surface numérique	155
6.4.2	Paramètres des simulations	156
6.4.3	Force de contact des chocs	159
6.4.4	Durée des chocs	161
6.4.5	Énergie transférée par choc	161
6.4.6	Vitesse vibratoire	164
6.4.7	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse	167
6.4.8	Puissance transférée	168
6.4.9	Commentaire	169
	Conclusion et Perspective	171



Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'École Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	professeur	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SCORLETTI Gérard	professeur	AMPERE	ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	professeur	AMPERE	ECL

Nbre Ampère 12

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

Nbre DER EEA 2

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre DER STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

Nbre ICTT 1

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	professeur	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 20

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT genevièvre	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	professeur	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	professeur	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LOUBET Jean-Luc	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MARTIN Jean-Michel	professeur	LTDS	ECL
MATHIA Thomas	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
MAZUYER Denis	professeur	LTDS	ECL
PERRET-LIAUDET Joël	maître de conférences	LTDS	ECL
SALVIA Michelle	maître de conférences	LTDS	ECL
SIDOROFF François	professeur	LTDS	ECL
SINOUE Jean-Jacques	maître de conférences	LTDS	ECL
STREMSDOERFER Guy	professeur	LTDS	ECL
THOUVEREZ Fabrice	professeur	LTDS	ECL
TREHEUX Daniel	professeur	LTDS	ECL
VANNES André-Bernard	professeur émérite	LTDS	ECL
VINCENS Eric	maître de conférences	LTDS	ECL

Nbre LTDS 26

Total HdR ECL

91

Introduction

Contexte

Une surface n'est jamais parfaitement lisse. Cette réalité est probablement connue depuis très longtemps, peut-être plusieurs milliers d'années. Mais l'observation directe des surfaces est relativement récente grâce à des dispositifs modernes mécanique, optique et numérique qui permettent de visualiser des surfaces à des échelles millimétriques à nanométriques. On constate que la surface est comme des montagnes avec des pics et des vallées ayant des faibles pentes, généralement de dix à vingt pourcents. (figure 1).

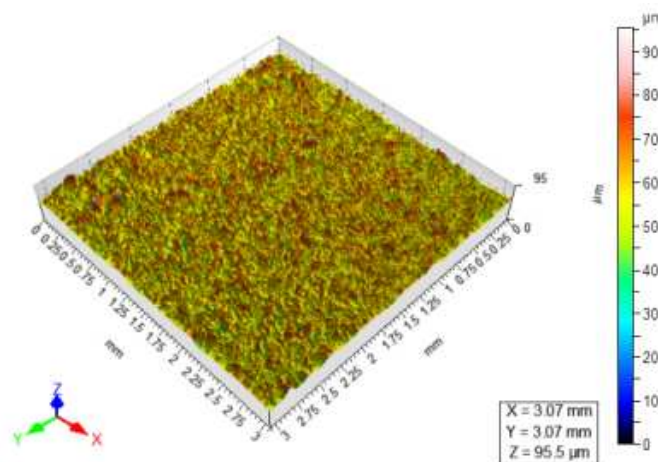


FIGURE 1 – Présentation graphique de la surface rugueuse.

Lorsque deux surfaces rugueuses sont mises en contact, leurs pics plus élevés touchent les surfaces antagonistes. Deux conséquences suivantes apparaissent comme résultats. Tout d'abord, le contact est rare. La surface de contact réelle est généralement une très petite partie de la zone de contact apparent. Deuxièmement, le contact est multiple. Il est composé de nombreux spots répartis de façon aléatoire sur la surface.

L'objet principal de cette étude est le "bruit de rugosité" émis lors du glissement de deux telles surfaces rugueuses dans la condition de faible contact. Des exemples de ce type de bruit se trouvent fréquemment dans la vie quotidienne comme se frotter les mains, polir une surface à l'aide de papiers abrasifs, limer les petites bavures après usinage.

À titre d'exemple d'application industrielle, citons la technique d'émission acoustique pour mesurer la rugosité ou la douceur des surfaces et la réduction du bruit de transport lié à l'état de surface des composants comme pneu/chaussée ou roue/rail. Plus les surfaces sont rugueuses, plus le bruit est important.

La motivation de cette étude est de développer une approche globale constituant la théorie, l'expérience et l'outil numérique pour accroître la connaissance et la compréhension de ces bruits de rugosité qui relèvent d'un problème de dynamique des interfaces multicontact.

Problématique

L'étude du bruit de rugosité fait intervenir trois domaines principaux : la tribologie, la dynamique et l'acoustique. De plus, c'est un problème à deux échelles spatiales et deux échelles temporelles (figure 2). Le contact à l'échelle microscopique crée des vibrations dans le corps solide à l'échelle macroscopique. D'autre part, le contact est transitoire avec une durée de l'ordre de 10^{-4} s alors que le glissement des solides se maintient durant quelques secondes.

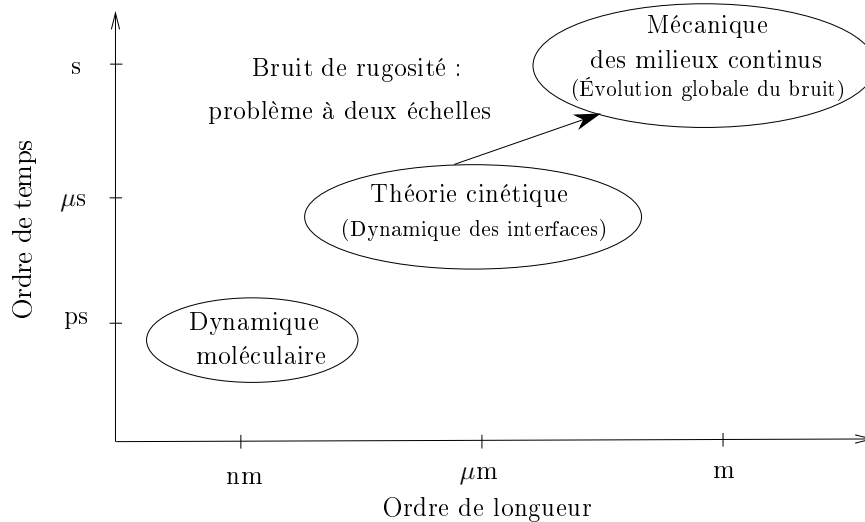


FIGURE 2 – Présentation graphique de la hiérarchie mécanique [30].

Aujourd'hui, la simulation numérique est un outil puissant de la recherche scientifique grâce au développement rapide de l'ordinateur et du calcul haute performance. En 2011, [13] Ben Abdelounis a pour la première fois publié un modèle 2D de l'étude du bruit de rugosité en utilisant la méthode des éléments finis. Il a fallu 7 jours de temps CPU pour finir une simulation. Donc, une simulation 3D avec les mêmes données géométriques n'est pas encore réalisable même avec l'ordinateur le plus puissant actuel.

Objectifs

À partir des motivations et des difficultés mentionnées ci-dessus, les objectifs de cette thèse sont les suivants :

- Le premier objectif est de réaliser des expériences pour déterminer les lois d'évolution du bruit de rugosité en fonction de l'aire de contact à l'aide d'un tribomètre conçu au laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes. Afin d'expliquer les phénomènes observés, une théorie de dissipation des vibrations dans les contacts rugueux est proposée.

- Le deuxième objectif est de développer un outil numérique 2D approprié pour l'étude de contact dynamique des profils rugueux. Cet outil doit être rapide, efficace et validé. Il servira à prédire l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité de surface. De plus, il sera capable de capturer les chocs transitoires et de fournir les propriétés statistiques de ces chocs.

- Le troisième objectif est d'effectuer des simulations 3D du contact dynamique entre deux surfaces rugueuses à l'aide des méso-centres de calcul à Lyon.

Organisation du mémoire

Ce mémoire de thèse se compose de six chapitres,

Un premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique. L'objet principal de cette étude qui est le bruit de rugosité est présenté. Enfin, on terminera sur la mécanique du contact et la modélisation du contact entre deux surfaces.

Le deuxième chapitre est consacré aux expériences qui sont réalisées pour étudier la relation entre le bruit de rugosité et l'aire de contact. À travers ces expériences, on découvre l'existence de deux régimes. Dans le premier régime, le bruit croît proportionnellement avec l'aire de contact tandis que dans le deuxième régime le bruit est constant. Par la suite, on prouve que ces deux régimes sont liés à deux processus de dissipation : l'amortissement interne des matériaux et l'amortissement du contact. Ce chapitre se termine par la présentation d'une expérience sur l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement qui fournit des résultats de référence pour les simulations numériques.

Le troisième chapitre est dédié à l'analyse numérique et les algorithmes utilisés pour traiter le problème du contact dynamique entre deux profils rugueux (2D). L'approche numérique se compose de trois étapes. D'abord les profils rugueux sont générés numériquement, ensuite on utilise les schémas d'intégration temporelle pour résoudre l'équation du mouvement des solides, le contact est géré par deux algorithmes répandus : l'algorithme des multiplicateurs de Lagrange et l'algorithme de pénalités.

L'approche numérique est implémentée dans l'outil numérique nommé Ra2D qui est l'objet principal du chapitre quatre. Dans un premier temps, les structures des fichiers de données et de résultats sont précisées. Ensuite, des techniques d'optimisation sont appliquées pour réduire le temps CPU du programme Ra2D. Dans la dernière partie du

chapitre, on présente le centre du calcul haute performance à Lyon avec lequel tous les résultats sont obtenus.

Dans le cinquième chapitre, on présente les cas test pour valider le programme Ra2D. Ensuite, des études paramétriques sont réalisées pour choisir les paramètres optimaux pour les simulations. Par la suite, les simulations avec des profils de même dimension que ceux utilisés dans l'expérience sont réalisées. Les résultats obtenus sont la vitesse vibratoire du profil, le niveau vibratoire, les statistiques de chocs entre deux surfaces avec des différentes vitesses de glissement et rugosités de surface.

Le sixième chapitre est dédié à la réalisation des simulations 3D. L'approche décrite pour les profils 2D est étendue pour les surfaces 3D, un nouveau outil numérique est développé et s'appelle Ra3D. Enfin, les résultats obtenus par la simulation 2D, 3D et l'expérience sont comparés.

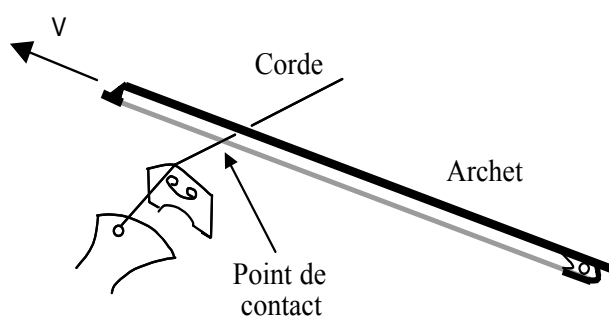
Nous terminerons par une conclusion qui synthétisera les résultats obtenus et présentera des perspectives de recherche.

Chapitre 1

État de l'art

1.1 Bruit de frottement

Le bruit de frottement est le bruit rayonné dans l'environnement lors du mouvement relatif de deux surfaces en contact. Ce bruit se manifeste partout dans la vie quotidienne tels que le son harmonique du violon, le bruit naturel des cigales, le bruit désagréable du freinage automobile, le grincement d'une porte, le frottement des mains,... Ces bruits ont des propriétés très différentes et des mécanismes dynamiques complexes qui dépendent de la manière dont le contact s'établit. On peut classer les bruits de frottement en fonction de l'intensité de la pression de contact [6]. Lorsque la pression est importante, cela correspond à un bruit d'instabilité mécanique. La réponse dynamique de deux systèmes sont couplés, l'instabilité se développe. Au contraire, si la pression est faible, on a le bruit de rugosité. À titre d'exemple de bruit d'instabilité mécanique, ceux des instruments musicaux comme le violon. Ils génèrent le son à l'aide du glissement de l'archet sur la corde. L'artiste doit contrôler la vitesse, la pression de contact de l'archet, le point de contact sur la corde pour émettre le son harmonique souhaité. Le son du violon résulte du transfert de vibration de la corde au corps de l'instrument qui joue le rôle de résonateur pour amplifier le son, particulièrement aux fréquences spécifiques.



(a) Schéma de système l'archet-corde du violon [81]



(b) Frein à disque automobile

FIGURE 1.1 – Exemples d'un bruit d'instabilité mécanique

Un autre exemple du bruit d'instabilité mécanique est le bruit de freinage qui est une des sources principales de bruits produites par les transports. Un frein à disque est composé d'un étrier et d'un disque inséré entre le moyeu et la roue. L'étrier supporte les

plaquettes qui, sous l'action de cylindres hydrauliques, pincement le disque et freinent sa rotation (figure 1.1). Le frottement produit la force tangentielle lors du contact entre la plaquette et le disque, puis la vibration dans le plan du disque et l'oscillation normale dans la plaquette. Ces vibrations sont transmises à d'autres composants du véhicule. Le système de freinage transforme la plupart de l'énergie cinétique des véhicules en énergie thermique. Cependant une partie de l'énergie cinétique est transformée en énergie vibratoire et dissipée ensuite sous forme d'énergie acoustique. Il existe plusieurs types de bruits de freinage dépendant des caractéristiques ou de leurs mécanismes de génération du bruit. Par exemple, le bruit de trépidations a des niveaux acoustiques faibles en comparaison avec d'autres types de bruits. Les bruits de ronflement ont de fortes amplitudes et un spectre de fréquence de 100 à 500 Hz. Les crissements ont des fréquences supérieures à 1000 Hz.

1.2 Phénoménologie du bruit de rugosité

Le bruit de rugosité est généré lorsque la pression de contact est faible. Les réponses du système ont donc un faible couplage dynamique. Autrement dit, les ondes et les oscillations se développent indépendamment dans deux corps solides. Le mot "rugosité" vient de la caractérisation de la surface. En réalité, il n'existe pas de surfaces parfaitement lisses. Grâce à une observation au microscope, il est visible qu'une surface est effectivement constituée d'une succession d'aspérités et de vallées.

1.2.1 Mécanisme du bruit de rugosité

Le mécanisme du bruit de rugosité s'effectue en trois étapes :

- Multi-contact des interfaces : le glissement entre deux surfaces rugueuses engendre des multicontacts à l'interface entre les aspérités des surfaces.
- Vibration des solides : les aspérités en contact sont élastiquement déformées. Les déformations des points de contact se propagent dans le corps solide. Elles sont ensuite réfléchies par les bords, et induisent des vibrations.
- Rayonnement acoustique : la vibration provoque l'oscillation dans l'air à travers les surfaces des solides. Le bruit apparaît quand cette oscillation est propagée vers l'oreille.



FIGURE 1.2 – Mécanisme du bruit de rugosité

L'analyse et la création de modèles pour ce problème sont un vrai défi multidisciplinaire comprenant la tribologie, l'acoustique, la mécanique de contact et la dynamique

non-linéaire. De plus, c'est un problème à multi-échelles : de micro-échelle pour les aspérités des surfaces, à macro-échelle pour le corps solide.

1.2.2 Propriétés du bruit de rugosité

Dans la littérature, plusieurs expériences ont été développées pour caractériser le bruit de rugosité. En 1982, Yokoi et Nakai ont observé sur le contact pion-disque sans lubrification une corrélation entre le niveau de pression acoustique et la rugosité de surface [92] :

$$\Delta Lp(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{Ra}{Ra_{ref}} \right)^m \quad (1.1)$$

où Lp est la pression acoustique, Ra un paramètre statique de rugosité. L'exposant m dans cette formule varie de 1,6 à 2,4. Cette formule est confirmée par d'autres auteurs, par exemple, les travaux d'Othman et Elkholy sur le contact aiguille-plan avec une pente m comprise entre 0.5 et 1.3 [67].

La relation entre le bruit et la vitesse de glissement est aussi relevée dans les publications de Yokoi et Nakai [91]. Elle peut être prédite par la formule suivante,

$$\Delta Lp(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{V}{V_{ref}} \right)^n \quad (1.2)$$

La valeur de n est comprise entre 0.6 et 1.1. Récemment, Houcine et al ont confirmé ces deux formules pour le contact plan-plan et montré en outre qu'elles sont peut-être combinées dans une formule générale [13](Figs. 1.3 et 1.4) :

$$\Delta Lp(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{Ra}{Ra_{ref}} \right)^m \left(\frac{V}{V_{ref}} \right)^n \quad (1.3)$$

avec $0.8 \leq m \leq 1.16$ et $0.7 \leq n \leq 0.96$.

D'ailleurs, les effets de la rugosité sur le contenu fréquentiel du bruit sont aussi investigués. Boyko a détecté que plus la surface est rugueuse, plus les pics dans le spectre acoustique s'approchent des valeurs de fréquences propres de flexion des solides [18].

En 2011, Le Bot et al ont une première fois annoncé la dépendance du bruit de rugosité avec l'aire de contact [55]. En réalité, deux régimes peuvent apparaître dans le même système. Si l'aire de contact S est petite, la pression acoustique est proportionnelle à S , et lorsque S devient importante, le régime constant domine. Le bruit rayonné est évalué par une loi de puissance $Lp \propto S^{\lambda/10}$ où λ représente la pente (en dB/décade). Dans l'expérience de Le Bot, la valeur minimale de λ observée est 1.7 et sa valeur maximale est 6.7.

La formule générale pour le bruit de rugosité est la suivante :

$$Lp \propto Ra^m V^n S^{\lambda/10} \quad (1.4)$$

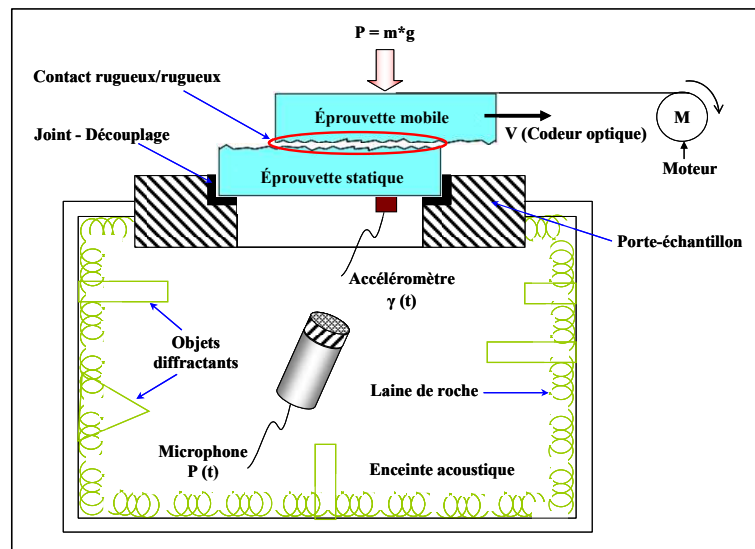


FIGURE 1.3 – Tribomètre acoustique

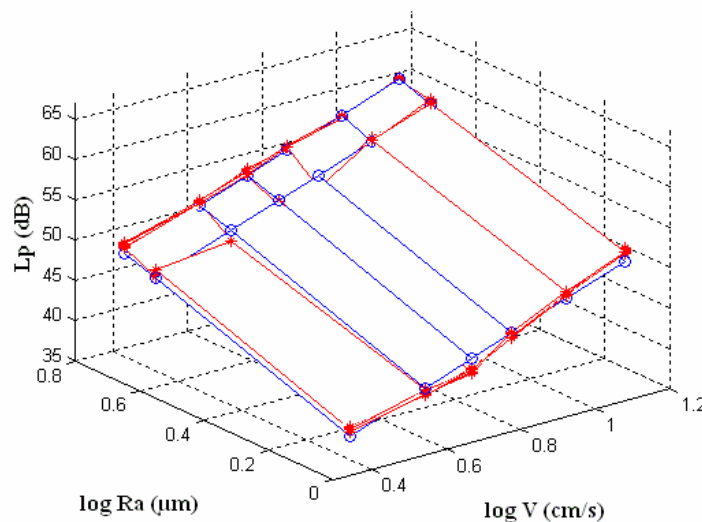


FIGURE 1.4 – Évolution du niveau de la pression acoustique en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité de la surface [13]

1.2.3 Application industrielle du bruit de rugosité

Exemple du bruit ferroviaire

Le bruit de roulement est la source principale du bruit issu des transports ferroviaires pour les vitesses comprises entre 50 et 300 km/h [85]. Il est relié à l'état de la surface des structures en contact comme la roue, le rail et les traverses. L'interaction entre les rugosités microscopiques des surfaces excite la vibration dans les structures. Des

ondes vibratoires y sont engendrées et rayonnent à leur tour dans l'environnement. La puissance acoustique rayonnée est la somme des contributions de chaque composant. La vibration de la roue entraîne un rayonnement acoustique entre 2 000 et 4 000 Hz. La contribution de la vibration du rail se situe autour de 1 000 Hz et les traverses vibrent principalement dans les basses fréquences (environ 400 Hz). Un exemple du spectre du niveau de la pression acoustique générée par le passage d'un TGV-Duplex à trois vitesses (200 km/h, 250 km/h et 300 km/h) est présenté sur la figure 1.5.

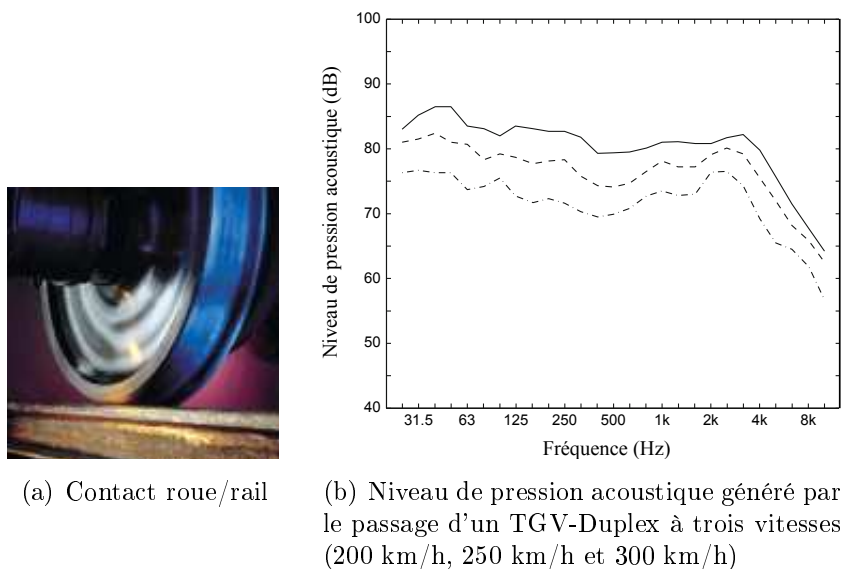


FIGURE 1.5 – Bruit de roulement [85]

La rugosité est le principal paramètre responsable du bruit de roulement. Plus les surfaces sont lisses et plus le bruit est faible. Le bruit ferroviaire est faible avec des rails et roues neufs. Par contre, il augmente considérablement en cas de dégradation des surfaces. D'autre part, le bruit de roulement s'accroît avec la vitesse du train. Un doublement de la vitesse correspond à une hausse du niveau de bruit global de 8 à 10 dB.

Exemple du bruit pneumatique

Les sources principales du bruit automobile sont celui du moteur, de l'échappement, des transmissions mécaniques et du contact pneu-chaussée. Ce dernier constitue la source principale des nuisances sonores pour les vitesses supérieures à 50 km/h [79]. Le bruit de contact pneumatique est causé par deux grands mécanismes :

- Le "phénomène d'air pumping" dans lequel l'air est comprimé entre les zones de contact pneu-chaussée. À la sortie du contact, l'air est détendu brusquement, entraînant la propagation des ondes acoustiques. Ce bruit produit est en général de moyennes et hautes fréquences.

- La "vibration des pneumatiques" occasionnée par l'interaction entre les patins de gomme avec les rugosités de la route, contribue significativement à la génération du bruit de contact pneumatique/chaussée. La vibration engendrée est de basse fréquence, dans

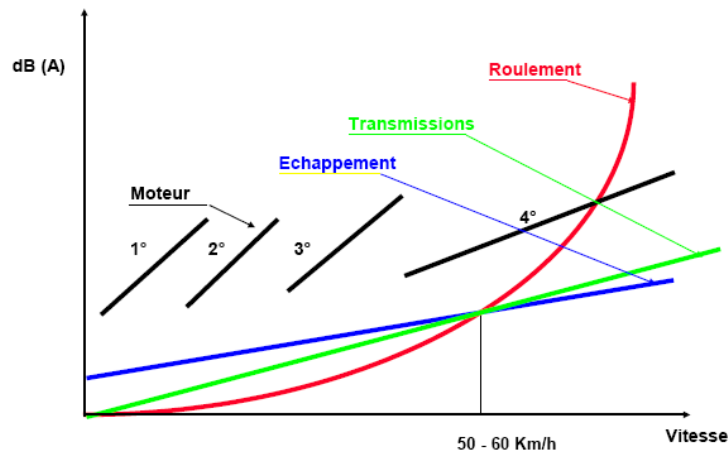


FIGURE 1.6 – Les sources importantes du bruit automobile. Figure extraite de [20]

la bande 500-800 Hz pour le bord du pneumatique et au-dessus de 800 Hz pour la zone de contact. Les pneus lisses sont les plus silencieux, mais il est interdit de les utiliser sur les routes. Un pneu lisse ne sert que de référence, car les autres performances comme l'adhérence humide ou l'aquaplaning sont faibles. Le bruit est d'autant plus important que la route est irrégulière. Toutefois, seules les aspérités suffisamment profondes et larges (largeur supérieure à 1,5 à 2 cm) causent des vibrations, tandis que celles inférieures à 1 cm n'en provoquent pratiquement pas. D'autre part, la vitesse de déplacement détient une influence importante sur le bruit de contact pneumatique (figure 1.7). Rimondi [77] a évalué l'évolution du niveau du bruit en fonction de la vitesse par la formule suivante :

$$L = a + c \log_{10} V \quad (1.5)$$

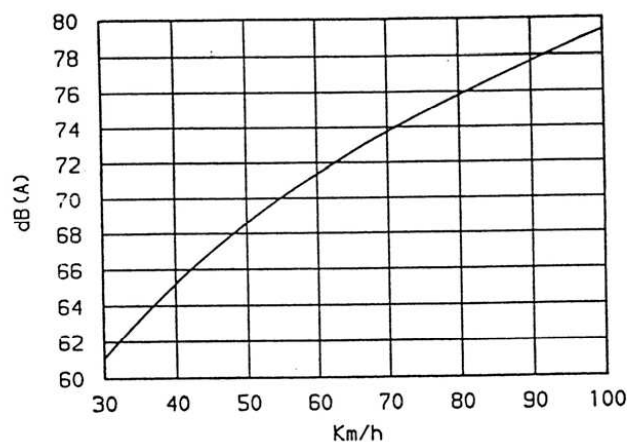


Figure 1.6 : Influence de la vitesse

FIGURE 1.7 – Influence de la vitesse sur le bruit de contact pneumatique [79]

Bio-Tribomètre

Dans l'industrie, il est essentiel de déterminer les caractéristiques de la surface, comme la douceur de la peau, la rugosité des papiers, etc... La plupart des méthodes classiques reposent sur la mesure du coefficient de frottement pour évaluer ces paramètres. Récemment, de nouveaux dispositifs ont été développés pour caractériser la surface en utilisant les propriétés du bruit de rugosité sous la dénomination technique d'émission acoustique (AE). Un tribomètre-sonde a été mis au point par Zahouani et al. Cette machine est équipée d'un doigt artificiel et d'un microphone [93]. Lorsque l'on fait glisser le doigt artificiel sur une surface, le microphone enregistre le niveau de la pression acoustique et évalue la douceur relative de la surface. Cette méthode permet de déterminer les différentes zones de la peau et aussi l'effet du vieillissement.

1.3 Description des surfaces rugueuses

La caractérisation des surfaces rugueuses est la première étape dans l'étude du bruit de rugosité. Le profil de surface est en général aléatoire. L'altitude à un point quelconque sur la surface noté $h(x)$ est considérée comme une variable aléatoire, donc la surface rugueuse peut être considérée comme un processus aléatoire.

1.3.1 Mesure de l'état de surface

Le premier profilomètre pour analyser la surface est créé par Abbott et Firestone en 1933. La mesure consiste à déplacer sur la surface un palpeur muni d'un stylet maintenu au contact par un effort normal constant. Cette technique s'est beaucoup améliorée et est très utilisée aujourd'hui.

La tête du stylet est constitué d'une pointe en diamant, avec un rayon de courbure variant entre $2 \mu m$ et $10 \mu m$. Un capteur inductif fournit une tension électrique proportionnelle au déplacement vertical de la pointe. Les variations dans les tensions générées, lors du déplacement de la pointe suivant la direction X, sont repérées par le capteur puis converties en différents paramètres de rugosité par l'électronique de l'instrument. Il est possible d'obtenir un profil (2D) ou une surface (3D). L'acquisition d'une mesure 3D se fait par la réalisation d'une succession de profils 2D.

On appelle profil total le profil mesuré qui est décomposé ensuite en profil de rugosité et en profil d'ondulation. La longueur d'onde du filtre est généralement de 0.8 mm

1.3.2 Caractères statistiques

Caractères des hauteurs

Dans un profil 1D d'une surface rugueuse, $h(x)$ désigne l'altitude au point x du profil. On choisit le repère pour que la moyenne des altitudes $\langle h(x) \rangle$ soit nulle. La moyenne

arithmétique de la valeur absolue des altitudes Ra est donnée par la formule suivante :

$$Ra = \frac{1}{L} \int_0^L |h(x)| dx \quad (1.6)$$

Pourtant, deux surfaces totalement différentes peuvent avoir le même Ra (figure 1.8).

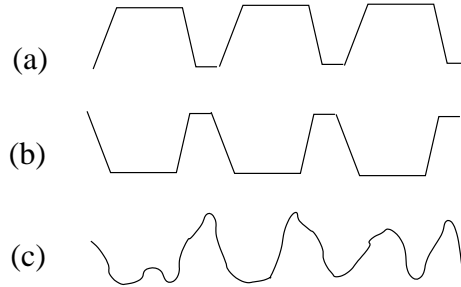


FIGURE 1.8 – Différentes surfaces ayant la même valeur Ra

La valeur moyenne quadratique Rq est définie par la formule suivante :

$$Rq = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L h(x)^2 dx} \quad (1.7)$$

La fonction de distribution cumulée $P(h_0)$ est définie par la probabilité des points dont les hauteurs sont inférieures à h_0 :

$$P(h_0) = Prob(h \leq h_0) \quad (1.8)$$

Donc $P(-\infty) = 0$ et $P(\infty) = 1$. En dérivant $P(h)$, la fonction de densité de probabilité des altitudes $p(h)$ est obtenue :

$$p(h) = \frac{dP(h)}{dh} \quad (1.9)$$

La probabilité des altitudes comprises dans $h_1 \leq h \leq h_2$ est calculée à partir de la formule suivante :

$$P(h_1 \leq h \leq h_2) = \int_{h_1}^{h_2} p(h) dh \quad (1.10)$$

En pratique, de nombreuses surfaces montrent une distribution gaussienne (figure 1.9) des altitudes dont la formule est donnée par :

$$p(h) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(h-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.11)$$

où σ et m sont respectivement l'écart-type et la moyenne des altitudes. Alors, la probabilité des altitudes sont comme suit :

$$\begin{aligned} P(-\sigma \leq h \leq \sigma) &= 0.682 \\ P(-2 * \sigma \leq h \leq 2 * \sigma) &= 0.954 \\ P(-3 * \sigma \leq h \leq 3 * \sigma) &= 0.999 \\ P(-\infty < h < \infty) &= 1 \end{aligned}$$

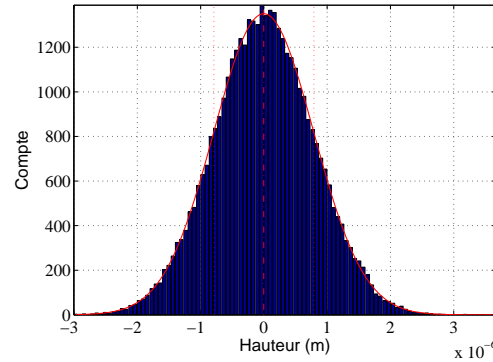


FIGURE 1.9 – Représentation graphique d’une loi Gaussienne de moyenne $m=0$

Pour mesurer la symétrie du profil par rapport à la ligne moyenne, on utilise le coefficient de dissymétrie (skewness) Rsk . Il est défini comme le quotient de la moyenne des cubes des valeurs des altitudes $h(x)$ par le cube du paramètre Rq .

$$Rsk = \frac{1}{LRq^3} \int_0^L h^3(x) dx \quad (1.12)$$

Si Rsk est négatif, la distribution est asymétrique à gauche et il y a plus de creux que de pics. Si Rsk est positif, la distribution est asymétrique à droite et il y a plus de pics que de creux. Si Rsk est nul, le profil est symétrique. Pour une distribution gaussienne, ce paramètre vaut 0 (figure 1.10).

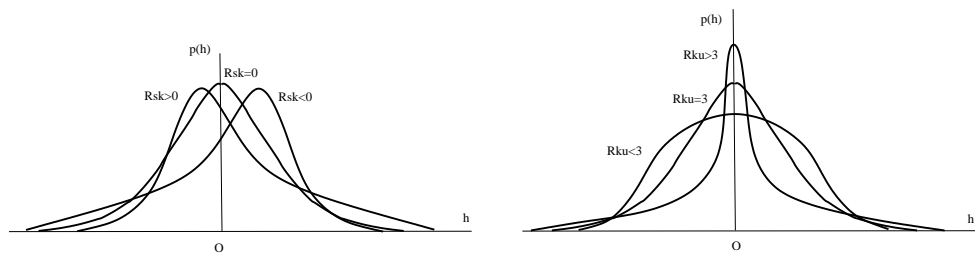


FIGURE 1.10 – Coefficient Rsk pour la mesure de la symétrie du profil et coefficient Rku pour la mesure de l’aplatissement de la distribution du profil

Le kurtosis ou coefficient d’aplatissement Rku , correspond à une mesure de l’aplatissement de la distribution. Il est défini par,

$$Rku = \frac{1}{LRq^4} \int_0^L h^4(x) dx \quad (1.13)$$

Pour une distribution gaussienne, ce coefficient vaut 3. Un coefficient inférieur à 3 correspond à une distribution aplatie. Un coefficient supérieur à 3 correspond à une distribution pointue qui présente un nombre relativement important de vallées profondes ou de pics élevés (figure 1.10).

Caractère spatial

Dans la figure 1.11 on présente deux surfaces sinusoïdales de même amplitude mais de périodes différentes, ces deux surfaces possèdent la même valeur Rq et la même fonction densité de probabilité $p(h)$. En 1984, McGillem and Cooper [60] ont introduit les fonctions spatiales pour compléter la description des surfaces. Ce sont les fonctions d'auto-covariance et d'auto-corrélation. La fonction d'auto-covariance est définie par la formule [16] :

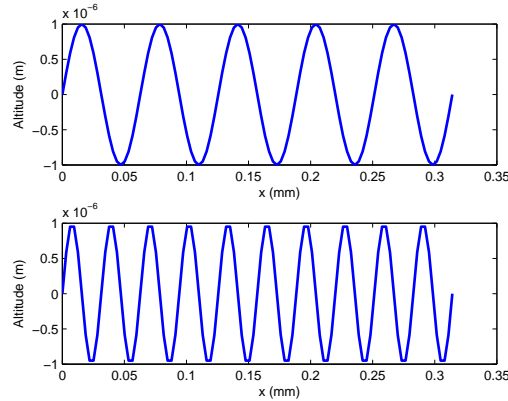


FIGURE 1.11 – Surface sinusoïdale

$$R(\chi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L h(x)h(x + \chi)dx \quad (1.14)$$

Elle a pour but de mesurer le degré de corrélation entre deux points du profil distants de χ . On a $R(\infty) = 0$, c'est-à-dire que deux points à la distance infinie n'ont pas de corrélation. $R(0) = Rq$ et $R(-\chi) = R(\chi)$.

Une fois que la fonction d'auto-covariance est normalisée, on obtient la fonction d'auto-corrélation (ACF) $C(\chi)$.

$$C(\chi) = \frac{R(\chi) - m^2}{\sigma^2} \quad (1.15)$$

Et $0 \leq C(\chi) \leq 1$.

Dans la figure 1.12, on présente les ACF de deux surfaces rugueuses. On observe que plus la surface est rugueuse, plus son ACF tend vers 0 rapidement. Cette propriété est caractérisée par la longueur de corrélation l_c qui est définie comme la distance nécessaire pour que l'ACF se réduise à la valeur $1/e$ (37%).

Les deux types d'ACF rencontrés le plus souvent sont gaussien et exponentiel. La formule de la fonction d'auto-corrélation exponentielle est :

$$C(\chi) = \exp(-|\chi|/l_c) \quad (1.16)$$

La fonction d'auto-corrélation Gaussienne est donnée par :

$$C(\chi) = \exp(-\chi^2/l_c^2) \quad (1.17)$$

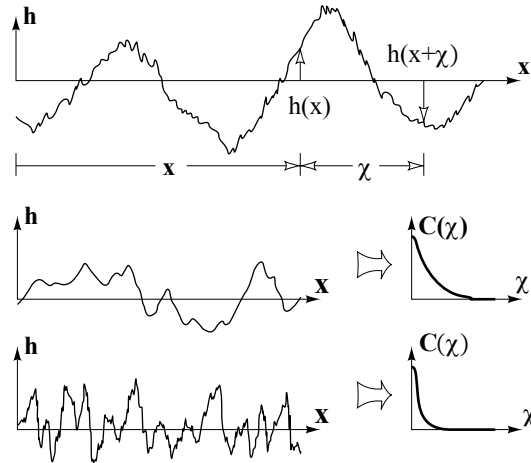


FIGURE 1.12 – Fonction d’auto corrélation pour décrire la caractéristique spatiale de la surface [16]

Le spectre des hauteurs de la surface (la densité spectrale de puissance de la surface) est la transformée de Fourier spatiale de la fonction d’autocorrélation.

$$S_h(k) = TF [C_h(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} C_h(x) e^{-kx} dx \quad (1.18)$$

Le profil de la surface est défini si la distribution et le spectre des hauteurs (fonction d’autocorrélation) sont connus.

1.3.3 Génération des surfaces numériques

La génération des surfaces numériques ayant des propriétés voulues joue un rôle important dans la modélisation du contact des surfaces. Il existe plusieurs modèles statistiques permettant accomplir cette mission.

Pour générer une surface avec une fonction spectrale de densité donnée, Watson et Spedding (1982) ont utilisé la méthode d’autorégressif et moyenne mobile, Newland (1984) a proposé la méthode de série temporelle et la transformation rapide de Fourier. Hu et Tonder ont présenté un modèle utilisant la méthode de filtre à réponse impulsionnelle finie.

Parmi ces méthodes, celle de FFT (ou la méthode spectral) se montre la plus rapide et la plus utilisée pour la génération des surfaces gaussiennes (Wu (2000)). Les formulations de cette méthode et les algorithmes pour une surface 2D gaussienne avec un spectre gaussien sont précisés dans le livre de Tsang et Kong. Un modèle d’une surface 3D gaussienne est présenté dans l’article de Reizer [76].

D’ailleurs, le modèle numérique d’une surface 3D non-gaussienne est aussi développé. Pour ce fait, Gu et Huang ont utilisé la méthode d’autorégressif et moyenne mobile avec le système de distribution fréquentielle de Johnson qui est pourtant gourmand en temps de calcul. Sherrington et Howarth ont introduit l’utilisation de la sparse matrice pour affranchir la limitation de la stockage. Bakolas (2003) a combiné la méthode du gradient conjugué et FFT pour acquérir l’accord entre les caractéristiques spectrales de la surface générée avec les valeurs voulues.

La génération des surfaces rugueuses sont aussi effectuées en utilisant la description fractale. Tsang et Kong ont précisé les étapes pour générer un profil fractal 2D en utilisant la fonction Weierstrass-Mandelbrot. Mingqing a proposé une technique de Monte Carlo se basant sur une loi non-linéaire de distribution du diamètre des aspérités et de la propriété auto-affine de la surface rugueuse.

1.4 Mécanique de contact

1.4.1 Condition de non pénétration

Soit deux solides Ω_1 et Ω_2 en contact frottant, on considère le point P appartenant à Ω_1 , Q est sa projection sur la surface Γ_2 (Fig 1.13). g et p désignent respectivement le jeu entre P avec Γ_2 et la pression de contact exercée au point P.

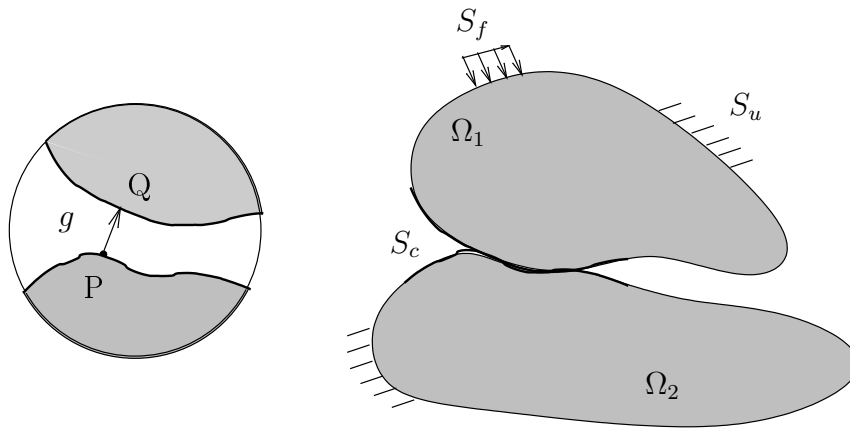


FIGURE 1.13 – Problème de contact des deux solides [64]

On divise la frontière de chaque solide en trois composantes comme sur la figure 1.13 :

- S_1 : où les déplacements sont imposés (condition de Dirichlet).
- S_2 : où les efforts sont imposés (condition de Neumann).
- S_c : la surface potentielle de contact (condition de Signorini).

Les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau sont introduites par la suite :

- Condition géométrique : impénétrabilité de la matière (Signorini-Hertz).

$$g \geq 0 \iff \begin{cases} g > 0 & \text{Pas de contact} \\ g = 0 & \text{Contact} \end{cases} \quad (1.19)$$

- Condition mécanique : La pression de contact est compressive pour empêcher l'impénétrabilité (Signorini-Hertz),

$$p \leq 0 \iff \begin{cases} p = 0 & \text{Pas de contact} \\ p < 0 & \text{Contact} \end{cases} \quad (1.20)$$

- Condition de complémentarité : (Moreau)

$$p \cdot g = 0 \quad (1.21)$$

En pratique, ces conditions s'écrivent ensemble comme suit :

$$g \geq 0; \quad p \leq 0; \quad p \cdot g = 0. \quad (1.22)$$

Elles sont représentées graphiquement sur la figure 1.14. Ces conditions introduisent un

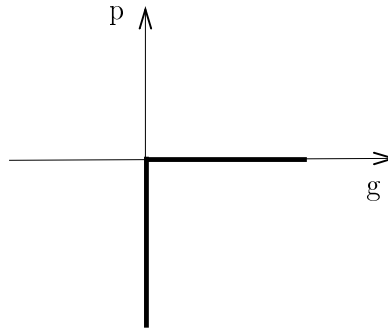


FIGURE 1.14 – La condition de non-pénétration

problème non-univoque, semi-défini positif et non-différentiable en $f=g=0$. Cette particularité provoque une difficulté au niveau de la résolution numérique. Ces conditions ont une forme identique aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker de la théorie d'optimisation mathématique.

1.4.2 Relation force-déplacement

Formule intégrale

Considérons un demi-espace constitué d'un matériau élastique linéaire isotrope, soumis à une pression normale p appliquée à sa surface 1.15. La solution classique de ce problème est proposée par Boussinesq [46] :

$$u(x) = \frac{1 - \nu^2}{2\pi E} \int p(x') \ln \left(\frac{x - x'}{x_{ref} - x'} \right)^2 . dx' \quad (1.23)$$

où E est le module d'Young, ν le coefficient de Poisson. x_r la distance à partir du point de référence où le déplacement est considéré comme nul x_{ref} .

La formule pour le problème 3D est donnée par Timoshenko et Goodier (1970) [46] :

$$u(x, y) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{\Omega} \frac{p(x', y') . dx' . dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (1.24)$$

Les formules intégrales nous apportent une relation explicite entre la force et la déformation. Pourtant, les termes d'inertie ne sont pas pris en compte, ces formules sont donc appliquées en général pour des contacts statiques.

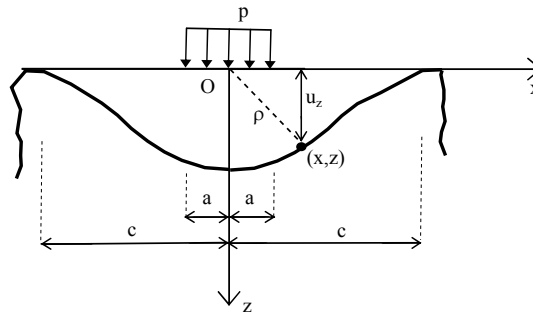


FIGURE 1.15 – Calcul du déplacement d'un demi-espace élastique soumis à une pression uniforme [46]

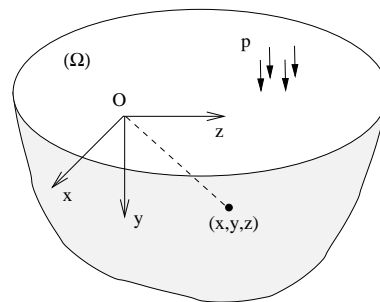


FIGURE 1.16 – Calcul du déplacement d'un demi-espace élastique soumis à une pression uniforme - 3D formulation [46]

Formule de Hertz

En 1882, Hertz a résolu le problème de contact normal entre deux surfaces sphériques. Nous allons présenter sa méthode et ses résultats à l'aide d'un exemple de contact entre deux sphères.

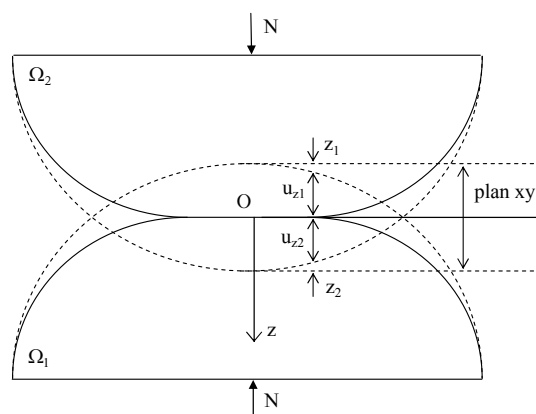


FIGURE 1.17 – Contact de Hertz [70]

Sur la figure 1.17 : R_1 , R_2 sont les rayons des sphères. r est la distance à l'origine du repère d'un point dans la zone de contact. N est la charge extérieure appliquée sur les solides. δ est la distance d'approche des deux solides. Les déplacements doivent satisfaire

la condition de non-pénétration :

$$u_{z1} + u_{z2} = \delta - \frac{r^2}{2R} \quad \text{dans la zone de contact,} \quad (1.25)$$

$$u_{z1} + u_{z2} < \delta - \frac{r^2}{2R} \quad \text{hors de la zone de contact.} \quad (1.26)$$

On introduit le rayon effectif R : $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

Hertz a supposé que la distribution de la pression avait une forme parabolique :

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad \text{avec} \quad r \leq a \quad (1.27)$$

où a est le rayon de la zone de contact. Quand $r = 0$, la pression de contact est maximale en revanche, au bord $r = a$, la pression est nulle. En utilisant la formules intégrale (1.23), le déplacement obtenu est :

$$u_z = \frac{1 - \nu^2}{E} \cdot \frac{\pi \cdot p_0}{a} (2a^2 - r^2) \quad (1.28)$$

Le module d'Young effectif E^* est défini par :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (1.29)$$

En introduisant u_z dans la condition de non-pénétration, on obtient :

$$\frac{\pi \cdot p_0}{4a \cdot E^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{r^2}{2R} \quad (1.30)$$

La charge extérieure appliquée sur le solide est calculée à partir de la pression de contact :

$$N = \int_0^a 2\pi \cdot p(r) \cdot r \cdot dr = \frac{2}{3} p_0 \cdot \pi \cdot a^2 \quad (1.31)$$

Donc, le rayon de la zone contact, la distance d'approche et la pression maximale sont :

$$a = \left(\frac{3N \cdot R}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (1.32)$$

$$\delta = \left(\frac{9N^2}{16R \cdot E^{*2}} \right)^{1/3} \quad (1.33)$$

$$p_0 = \left(\frac{6N \cdot E^{*2}}{\pi^3 \cdot R^2} \right)^{1/3} \quad (1.34)$$

Les formules d'Hertz sont utilisées principalement pour les contacts sphériques et statiques.

Formule variationnelle

Le principe d'Hamilton pour des matériaux élastiques s'écrit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} K - (V + U) dt = 0 \quad (1.35)$$

où K est l'énergie cinétique,

$$K = \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \delta u \cdot d\Omega, \quad (1.36)$$

V est l'énergie potentielle,

$$\delta V = - \int_V f \cdot \delta u \cdot dV - \int_{S_2} t \cdot \delta u \cdot dS, \quad (1.37)$$

et U est l'énergie de déformation élastique,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}}. \quad (1.38)$$

La somme de $\Pi = U + V$ est l'énergie potentielle totale. L'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles pour le problème de contact dynamique u_i doit satisfaire à la fois la principe d'Hamilton et la condition de non-pénétration :

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1,2} \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi) \cdot dt \quad \text{avec } i=1, 2 \\ g_n \geq 0, \quad p_n \leq 0, \quad g_n \cdot p_n = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Ensuite, des techniques spécifiques de la théorie d'optimisation sont utilisées pour résoudre le problème 1.39. Deux méthodes les plus répandues : la méthode de pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange [71] sont présentées ici. Le principe général est d'intégrer une nouvelle fonctionnelle de l'énergie liée à des contraintes à l'énergie potentielle totale.

$$\Pi^* = \Pi + \Pi^{cont} \quad (1.40)$$

Si la condition de non-pénétration est strictement respectée, la nouvelle fonctionnelle de l'énergie est nulle : $\Pi^{cont} = 0$.

Le problème revient donc à trouver les déplacements cinématiquement admissibles pour que :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} K - (\Pi + \Pi^{cont}) dt = 0 \\ g_n \geq 0, \quad p_n \leq 0, \quad g_n \cdot p_n = 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Méthode de pénalité Cette méthode autorise une pénétration entre deux surfaces. La fonctionnelle de l'énergie Π^{cont} de la méthode de pénalité est donnée par :

$$\Pi^{cont} = \frac{1}{2} \kappa \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma_c} g^2 \cdot [H(-g)] dt \cdot dx \quad (1.42)$$

où κ est le coefficient de pénalité, $H(x)$ est la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

La force de contact est calculée par une relation explicite avec la pénétration [62],

$$f(x, t) = \kappa \cdot g(x, t) \cdot H[-g(x, t)] \quad (1.44)$$

Cette méthode est facile à mettre en oeuvre, car la force de contact est calculée explicitement avec le déplacement. Cependant le résultat obtenu est dépendant du choix du coefficient de pénalité. Une valeur faible du coefficient de pénalité conduit à des pénétrations importantes qui ne sont pas acceptables, alors qu'une valeur trop grande provoque des oscillations et des instabilités numériques.

Méthode des multiplicateurs de Lagrange Cette méthode respecte parfaitement la condition de pénétration, elle consiste à introduire les notions de surface maître, surface esclave et des variables supplémentaires appelées multiplicateurs de Lagrange. La surface esclave contient des noeuds de pénétration, alors que la surface maîtresse comporte des segments pénétrés par le noeud de contact. Les multiplicateurs de Lagrange sont les forces de contact aux noeuds de pénétration. La fonctionnelle de l'énergie potentielle liée au contact devient donc :

$$\Pi^{cont} = \lambda^T \cdot g \quad (1.45)$$

où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, g le vecteur de jeu entre deux surfaces.

L'utilisation du principe de Hamilton mène à l'équation variationnelle suivante [71] :

$$\delta(K - \Pi) - \lambda^T \delta g = 0 \quad (1.46)$$

$$\lambda \leq 0; \quad g \geq 0; \quad \lambda \cdot g = 0 \quad (1.47)$$

L'introduction des multiplicateurs de Lagrange et de la notion de surface maître/esclave rendent cette méthode difficile à mettre en oeuvre et demandent plusieurs ressources de calculs (la mémoire, le temps CPU).

1.5 Modélisation de contact

1.5.1 Modèle analytique de contact rugueux

Le premier modèle pour traiter le contact rugueux est proposé par Greenwood et Williamson en 1966 [38]. Il se repose sur trois hypothèses principales. D'abord, la forme

des aspérités des surfaces est supposée sphérique et elles ont le même rayon de courbure, la distributions des hauteurs est gaussienne. Ensuite, le contact entre les deux surfaces est transformé en un contact entre un plan rigide et une surface effective construite à l'appui des propriétés des surfaces d'origine. Troisièmement, les formules de contact d'Hertz sont appliquées pour calculer la force de contact et la déformation des aspérités.

On considère le contact entre deux surfaces rugueuses ayant respectivement le module d'Young E_1 , E_2 et le rayon de courbure des aspérités R_1 , R_2 . Le module d'Young, le rayon de courbure de la surface effective sont :

$$E^* = \left[\frac{(1 - \nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \right]^{-1} \quad (1.48)$$

$$R = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]^{-1} \quad (1.49)$$

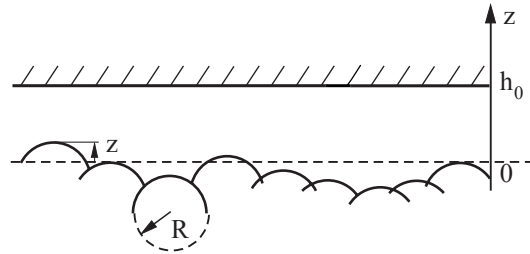


FIGURE 1.18 – Modèle GreenWood-Williamson pour contact rugueux [73]

Dans la figure 1.18, h_0 est l'écart initial entre la ligne moyenne de la surface effective et le plan, z est la hauteur de l'aspérité. $p(z)$ désigne la fonction densité de probabilité de la hauteur z , et N est le nombre total d'aspérités. Donc le nombre d'aspérités ayant une hauteur supérieure à une valeur de l'écart initial h_0 , est calculé par la formule :

$$n = N \int_{h_0}^{\infty} p(z) dz \quad (1.50)$$

On considère une aspérité z_i en contact avec le plan rigide, la pénétration est :

$$\delta = z_i - h_0. \quad (1.51)$$

En utilisant les formules de contact de Hertz, la force et l'aire de contact d'une seule aspérité sont données par [73] :

$$\Delta F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} \Delta A = \pi \delta R \quad (1.52)$$

La force de contact totale est obtenue par la somme des forces appliquées sur toutes les aspérités :

$$F = \int_{h_0}^{\infty} \frac{4}{3} E^* R^{1/2} \delta^{3/2} N \cdot p(z) dz \quad (1.53)$$

et de même pour l'aire de contact totale :

$$A = \int_{h_0}^{\infty} \pi \delta . R . N . p(z) dz \quad (1.54)$$

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que l'on impose un rayon unique à toutes les aspérités, alors que ce n'est pas le cas des surfaces réelles. Selon Achard(1957), les aspérités des surfaces rugueuses doivent être décrites comme des "protubérances sur protubérances". C'est-à-dire que chaque aspérité est constituée elle-même aspérités plus petites.

Le modèle de GreenWood-Williamson a été ensuite amélioré par Whitehouse et Archard (1970) [44] en considérant que le rayon de courbure des aspérités est aléatoire. Nayak (1971) [68] s'intéresse à analyser des surfaces rugueuses gaussiennes par la théorie des processus aléatoires : la distribution de hauteur des sommets, la densité des sommets, le gradient moyen de la surface sont reliées à une fonction de densité spectrale de puissance. En 1975, la théorie des procès aléatoires est aussi utilisée dans le modèle BGT de Bush et al. [89] dans lequel la courbure des aspérités est décrite par un paraboloïde. Kotwal et Bhusan ont développé un modèle statistique pour les surfaces non-gaussiennes présentant le skewnesse et le kurtosis.

Récemment, les modèles analytiques se basant sur la théorie de fractal ont intéressés plusieurs auteurs. La théorie fractale pour le contact plastique des surfaces rugueuses est proposée par Bhusan et Majumdar (1991). Ciavarella et al. [27] ont résolu analytiquement le problème de contact élastique pour les profils fractals définis par la série déterministe de Weierstrass. Dans le modèle de Persson (2001) [43], on n'utilise plus le concept des aspérités, la surface est maintenant décrite via la fonction spectrale de puissance et les variables principales caractérisant le contact sont le paramètre d'amplification, la probabilité de distribution de pression et la distribution de la séparation interface.

1.5.2 Méthode des éléments frontières

La méthode des éléments frontières consiste à diviser la surface en un ensemble de points discrets comme le montre la figure 1.19. Lorsque le pas spatial est suffisamment petit, la pression sur chaque élément est supposée constante. Selon la formule (1.24), le déplacement au point (i, j) est la somme des contributions des pressions exécutées sur la surface. La forme discrète de cette formule est donnée par A.E.H.Love [73] :

$$u_{ij} = \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=1}^N K_{ij'i'j'} . p_{i'j'} \quad (1.55)$$

où $N \times N$ est le nombre des noeuds, $K_{ij'i'j'}$ est le coefficient d'influence. Physiquement, il joue le rôle du déplacement au point (i, j) lorsque l'on applique une force unité au point (i', j') .

$$K_{ij'i'j'} = \frac{\Delta}{\pi E^*} \left[a \ln \left(\frac{c + \sqrt{a^2 + c^2}}{d + \sqrt{a^2 + b^2}} \right) + b \ln \left(\frac{d + \sqrt{b^2 + d^2}}{c + \sqrt{b^2 + c^2}} \right) \right. \\ \left. + c \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 + c^2}}{b + \sqrt{b^2 + c^2}} \right) + d \ln \left(\frac{b + \sqrt{b^2 + d^2}}{a + \sqrt{a^2 + d^2}} \right) \right] \quad (1.56)$$

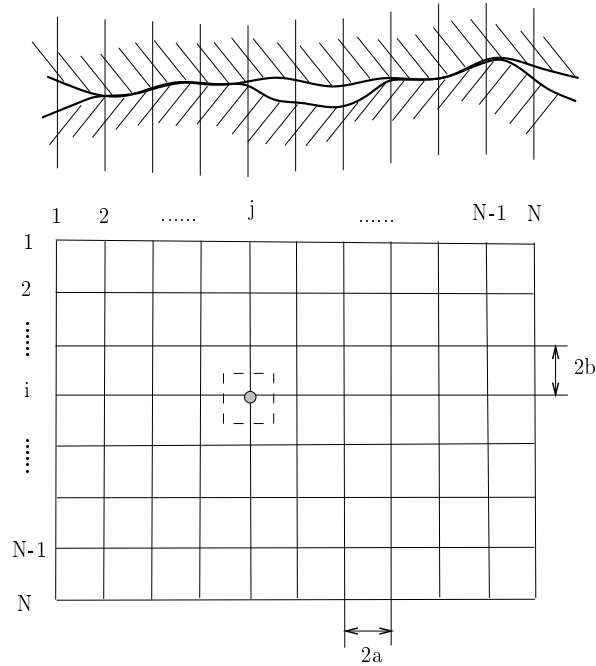


FIGURE 1.19 – Maillage de discrétisation d'une surface [86]

où

$$\begin{aligned} a &= i - i' + 0.5 & b &= i - i' - 0.5 \\ c &= j - j' + 0.5 & d &= j - j' - 0.5 \end{aligned}$$

L'équation (1.55) donne une relation explicite entre la force de contact et la déformation, pourtant le nombre des points en contact et leur localisation sont a priori méconnus, il faut par conséquent effectuer des algorithmes itératifs. À l'instant initial, on calcule la distance de séparation entre deux surfaces en fonction des données géométriques et suppose une zone de contact fictive. Par la suite la force de contact et la déformation des aspérités sont résolues grâce à la formule (1.55) et la distance de séparation et la zone de contact sont recalculées. Ces procédures sont répétées jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

La méthode des éléments frontières est largement utilisée et développée dans le calcul du contact des surfaces rugueuses [8] car la dimension du problème est réduite de un (3D à 2D, 2D à 1D), donc la taille des données et des variables à résoudre sont considérablement réduites. De plus, la résolution de la discrétisation de la surface est plus élevée, la précision des solutions à l'interface est alors augmentée.

Fichera (1964) [32], Duvaut et Lions (1972) [29] ont étudié les principes généraux concernant l'existence et l'unicité de la solution dans le problème de contact. R. S. Sayles (1996) [80] a utilisé les équations (1.55) pour l'étude de la distribution des pressions de contact ainsi que la relation entre la force appliquée et l'aire de contact pour le contact statique des surfaces rugueuses. Le système d'équation de contact peut être résolu directement en utilisant la technique de la matrice inverse ou par des méthodes variationnelles minimisant une fonction d'énergie appropriée. Pour les contacts sans frottement, Kalker [48] a présenté une méthode visant à minimiser l'énergie de déformation élastique des interfaces. Bjorklund et Andersson [17] ont proposé un modèle incluant le frottement.

Tian et Buhsan [86] s'intéressent aux modèles pour la déformation plastique.

Ju et Farris [47] ont introduit une méthode se basant sur la transformation rapide de Fourier (FFT) pour accélérer la résolution du système d'équation de contact. Stanley et Kato [83] a combiné la méthode FFT avec le principe variationnel pour la modélisation 3D du contact des surfaces rugueuses. Ren et Lee ont implémenté la méthode de grille mobile pour réduire la taille de stockage des matrices d'influence dans la résolution des méthodes de BEM.

1.5.3 Méthode des éléments finis

Parmi les méthodes numériques permettant de résoudre le problème de contact, celle des éléments finis est la plus répandue, car elle est capable de fournir des résultats exhaustifs. Cette méthode consiste à diviser le solide en un nombre fini d'éléments géométriques simples interconnectés aux noeuds (maillage). Les champs physiques du corps solide sont interpolés en fonction de leur valeur aux noeuds. L'équation du mouvement de la méthode des éléments finis s'écrit en général comme suit :

$$M.\ddot{u} + C.\dot{u} + K.u = F^{ext} \quad (1.57)$$

Où u est le vecteur des déplacements nodaux, M la matrice de masse, K la matrice de raideur, C la matrice d'amortissement et f le vecteur de force nodale extérieure. Dans le cas du contact, la condition de non-pénétration est :

$$T^T u - \delta \geq 0 \quad (1.58)$$

où T est la matrice de contrainte, δ le jeu entre les deux surfaces.

La plupart des codes éléments finis standards utilisent l'algorithme de pénalité ou des multiplicateurs de Lagrange pour traiter le problème de contact. Chaudhary et Bathe [24] ont utilisé la méthode des multiplicateurs de Lagrange et le schéma d'intégration temporelle implicite Newmark pour une modélisation 3D de contact statique. Carpenter et al. [21] ont combiné la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec le schéma explicite aux différences centrées pour analyser les dynamiques transitoires dans l'impact et le glissement avec frottement. Cette méthode est aussi utilisée par Meziane [61] pour la simulation du bruit de freinage.

La formulation pour la méthode de pénalité se trouve dans l'ouvrage célèbre de Kikuchi et Oden [49]. Chen et Hisada [26] ont modifié l'algorithme de pénalité en remplaçant la force concentrée de contact par l'intégration de la pression nodale de contact sur la surface. Dans le domaine robotique où se présente le problème d'intégration de haute fréquence, la méthode de pénalité reste la plus répandue (Moore et Wilhelm [63]).

Luenberger [59] a montré que la solution obtenue par l'algorithme des multiplicateurs est le même que celle de pénalité lorsque le coefficient de pénalité tend vers l'infini positif.

De plus, plusieurs algorithmes se basant sur des concepts de pénalité et multiplicateurs de Lagrange sont développés comme la formulation perturbée de Lagrange de Simo et al. (1985) [82], la méthode de Lagrange augmentée et l'algorithme Uszawa décrit dans Kikuchi et Oden [49], Alart et Curnier (1991) [7].

La théorie de fractal est aussi appliquée dans les modèles FEM, par exemple les travaux de Panagiotopoulos et al. (1992) [69] pour la mécanique de la rupture, Hu et al. (2000) pour les surfaces rugueuses.

Depuis deux dernières décades, la programmation quadratique (QP) est bien investiguée dans la simulation du problème de contact. Givoli et Doukhovni [36] ont développé une approche FEM-QP pour le problème de contact de grande déformation. Haug et al. [39] ont résolu le problème de contact sans frottement entre une roue et une fondation élastique par la programmation quadratique. Kontoleon et Baniotopoulos [51] appliquent cette méthode pour résoudre le contact entre un solide élastique/plastique et un obstacle rigide.

Malgré le fort développement de la FEM, il demande toujours une discrétisation entière du corps solide qui conduit à des systèmes matrices de larges dimensions à résoudre, et pour la mécanique de contact des surfaces, cette méthode reste inefficace et gourmande en temps de calcul dus aux calculs inutiles à l'intérieur du corps solide.

De plus, dans la simulation du contact entre surfaces rugueuses, il est nécessaire d'avoir un pas de discrétisation spatial plus petit que la taille des aspérités (de l'ordre du micromètre) et le pas du temps doit être inférieur à la durée instantanée du choc (de l'ordre de la microseconde)(figure 1.20). Donc, le temps CPU devient très coûteux. À titre d'exemple, pour une simulation 2D du contact frottant entre deux surfaces de dimensions $120 \times 8 \text{ mm}$, de rugosité $Ra = 26 \text{ }\mu\text{m}$ comme présentée à la figure (1.20), 7 jours de calcul sont nécessaires. Le pas du temps utilisé est $dt = 10 \times 10^{-8} \text{ s}$, le maillage est constitué de 7764 éléments et 4654 noeuds, la durée de simulation est 1 s. Le microprocesseur utilisé est un Intel Core Duo (TM) 2 CPU 2,4 GHz.

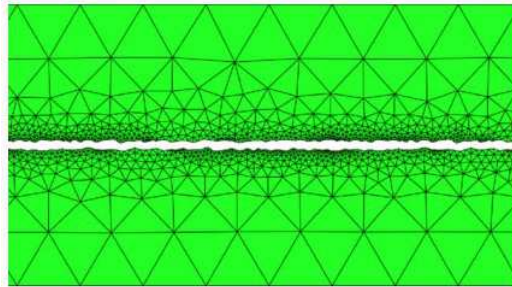


FIGURE 1.20 – Modèle de méthode des éléments finis de contact rugueux [14]

1.5.4 Méthode de fonction de Green

Dans cette approche, la réponse est calculée par un produit de convolution entre la fonction de Green et la force de contact. Une telle démarche a été utilisée par différents auteurs : McIntyre et al. [9] ont appliqué cette approche pour traiter le problème de contact (corde/archet contact) afin d'étudier les grandes amplitudes d'oscillations des instruments musicaux. Nordborg a appliqué la même approche pour le problème de contact roue/rail. Cette technique est aussi largement utilisée pour traiter les problèmes de contact entre pneumatique et chaussée. L'équation du mouvement d'un problème

dynamique général s'écrit sous la forme :

$$Ku + C\dot{u} + M\ddot{u} = F(t) \quad (1.59)$$

où K , C , M sont respectivement la matrice de raideur, la matrice d'amortissement et la matrice de masse.

La méthode de la fonction de Green consiste à trouver la fonction de Green temporelle $g(t)$ qui est en général la solution du problème suivant :

$$Ku + C\dot{u} + M\ddot{u} = \delta(t) \quad (1.60)$$

Puis le déplacement est obtenu par un produit de convolution de cette fonction et de la force appliquée $F(t)$. Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, la solution de l'équation (1.59) est :

$$u(t) = F(t) * g(t) = \int_0^t F(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (1.61)$$

1.6 Synthèse

L'étude du bruit de rugosité est un phénomène complexe qui fait intervenir plusieurs domaines : la tribologie, l'acoustique et la dynamique. Du point de vue expérimental, les résultats de la littérature montrent principalement les lois de l'évolution du bruit de rugosité en fonction de la vitesse de glissement et la rugosité de surface. Pourtant, il reste encore des questions sans réponses : quelle est la relation du bruit de rugosité et d'autres paramètres importants comme l'aire de contact, ... ? Comment explique-t-on les lois du bruit de rugosité ? Pour répondre à ces questions, un tribomètre spécial a été développé au LTDS pour étudier le problème du bruit de rugosité. Ensuite, une théorie sur la dissipation de vibrations dans le contact rugueux est proposée pour expliquer les phénomènes du bruit de rugosité.

Du point de vue numérique, le bruit de rugosité reste un phénomène peu étudié. Le modèle dans la littérature est réalisé par la méthode des éléments finis. Cependant, le temps CPU est trop coûteux. De plus, il n'existe pas encore de modélisation 3D qui permet d'approcher des résultats expérimentaux et de prédire exactement le bruit généré par le contact rugueux. Parmi les formules de la relation force de contact - déplacement, on s'oriente vers la méthode de pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange, car elles ne requièrent pas d'hypothèses sur la géométrie de la surface (comme les formules de Hertz) et leurs domaines d'application couvrent le contact dynamique, alors que les formules intégrales sont appropriées seulement au contact statique.

Chapitre 2

Étude expérimentale du bruit de rugosité

Dans ce chapitre, des campagnes expérimentales sont réalisées pour établir les lois empiriques du bruit de rugosité. On étudie d'abord la relation entre le bruit émis et l'aire de contact. L'existence de deux régimes est mise en évidence. Dans le premier régime, le bruit croît avec l'aire de contact tandis que dans le second régime, le bruit est quasiment constant. Afin d'expliquer ce phénomène étrange, une théorie de la dissipation des vibrations dans un contact rugueux est proposée. On étudie ensuite l'évolution du bruit de rugosité en fonction de la vitesse de glissement. On observe naturellement que le bruit croît avec la vitesse de glissement selon une loi logarithmique dont la pente est mesurée précisément.

Ces expériences ont pour but de fournir des références expérimentales qui serviront pour la validation des simulations numériques des chapitres suivants.

2.1 Observation de deux régimes

La question posée est la suivante. Comment évolue le bruit de frottement avec l'aire de contact ? En particulier, on aimerait savoir si une surface de frottement plus grande provoque plus de bruit. Pour observer ce phénomène, on propose une expérience très simple basée sur le frottement de morceaux de sucre sur diverses surfaces.

Principe Dans cette expérience, on fait glisser à vitesse établie un certain nombre de morceaux de sucre sur diverses surfaces. Le niveau sonore émis est mesuré par un sonomètre situé au dessus du paquet de sucre. L'expérience est reproduite sur la même surface en faisant varier le nombre de morceaux de sucre de 1 à 100. On trace ensuite l'évolution du niveau sonore en fonction du nombre de morceaux de sucre.

Deux surfaces sont testées. La première est une simple table en bois aggloméré. La seconde surface est la membrane d'un tambour. Les deux surfaces, bien que de natures différentes, ont sensiblement la même aire. La table est une structure rigide très amortie tandis que la membrane du tambour est une structure souple très réverbérante.

Dispositif Le tambour et la table utilisés sont présentés figure 2.1. Ils ont l'un et l'autre le même diamètre de 60 cm. Le microphone de mesure est un microphone à condensateur Bruel & Kjaer type 4189-L-001 champ libre de sensibilité 46,5 mV/Pa. L'amplificateur associé est un Bruel & Kjaer type 2690-0S1. Enfin l'acquisition des signaux temporels est réalisée par un oscilloscope numérique Acute DS-1202 dont la fréquence d'échantillonnage est fixée à 40 kHz.

Les morceaux de sucre sont des parallélépipèdes identiques de dimension $12 \times 18 \times 27$ mm. Ils pèsent environ 7 g.

Les morceaux de sucre sont poussés à la main avec une palette en bois. La vitesse est maintenue sensiblement constante à 10 cm/s pour l'ensemble des mesures. Le microphone est placé une vingtaine de centimètres au dessus du paquet de morceaux de sucre.

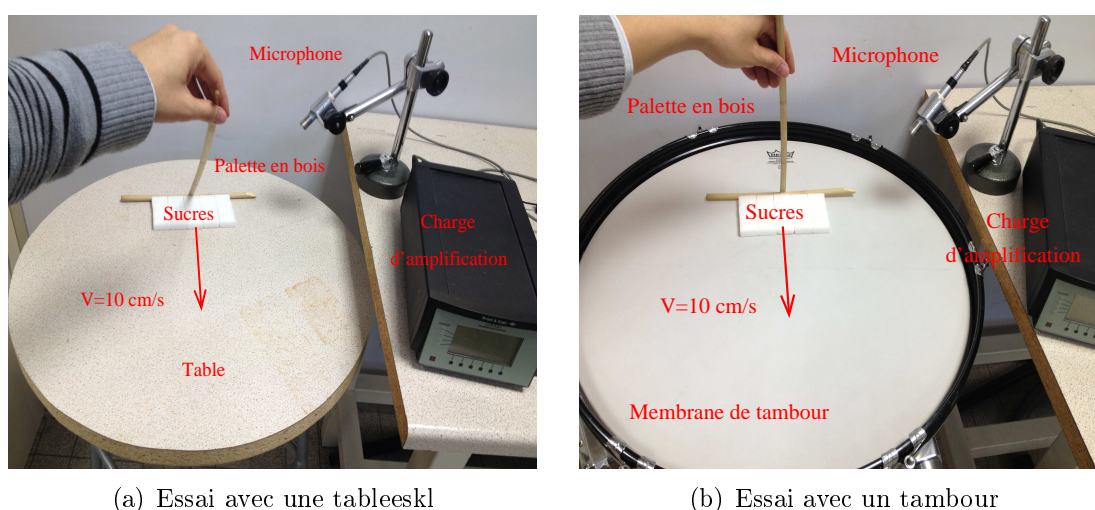


FIGURE 2.1 – Mesure du bruit rayonné par le frottement de morceaux de sucre sur un tambour (a), sur une table (b)

Protocole Le protocole de mesure est le suivant :

- Les surfaces sont nettoyées, dégraissées et séchées sous azote.
- n morceaux de sucre sont rangés sur le bord de la surface, leur plus grande face en contact avec la surface (table ou membrane de tambour).
- Les morceaux de sucre sont poussés ensemble manuellement à vitesse constante avec une palette en bois. Le signal temporel du bruit émis est enregistré. Puis, on calcule le niveau sonore suivant la formule $L_p = 20 \log p_{rms}/2.10^{-5}$ en dB où p_{rms} est la valeur RMS du signal temporel de la pression acoustique en Pa.
- Chaque mesure est reproduite trois fois.

Résultats Les résultats sont présentés figures 2.2 et 2.3. On observe que sur la table en bois le niveau sonore augmente sensiblement avec le nombre de morceaux de sucre. La pente estimée entre 1 et 100 morceaux de sucre est de 9,3 dB/décade. Cette évolution

indique clairement que plus le nombre de glisseurs est élevé, plus le bruit est important ce qui est conforme à l'intuition que l'on peut avoir du phénomène. On peut par ailleurs préciser que pour des sources sonores indépendantes, la puissance émise par celles-ci est additive. Ainsi une multiplication par 10 du nombre de sources induit une multiplication par 10 de la puissance émise et donc une augmentation de 10 dB du niveau sonore. Cette interprétation en termes de sources indépendantes nous indique que la pente théorique est de 10 dB/décade. La valeur observée de 9,3 dB/décade est donc voisine de ce résultat. Les morceaux de sucre sur une table en bois se comportent donc quasiment comme des sources sonores indépendantes.

Le résultat sur la membrane de tambour est plus surprenant. La pente mesurée est de 1,7 dB/décade seulement. On est donc loin du résultat attendu de 10 dB/décade et l'on peut même dire que le niveau sonore est faiblement dépendant du nombre de sources. Ce résultat est contre-intuitif. Il montre que le raisonnement sur l'additivité des sources tombe en défaut et met en évidence l'existence d'un régime de bruit constant, à l'opposé du régime additif observé sur la table en bois.

On retiendra que dans tous les cas, le niveau sonore varie selon la formule :

$$\Delta Lp = \lambda \cdot \log_{10} \frac{n_2}{n_1} \quad (2.1)$$

où λ est la pente exprimée en dB/décade et n_1, n_2 sont les nombres de morceaux de sucre.

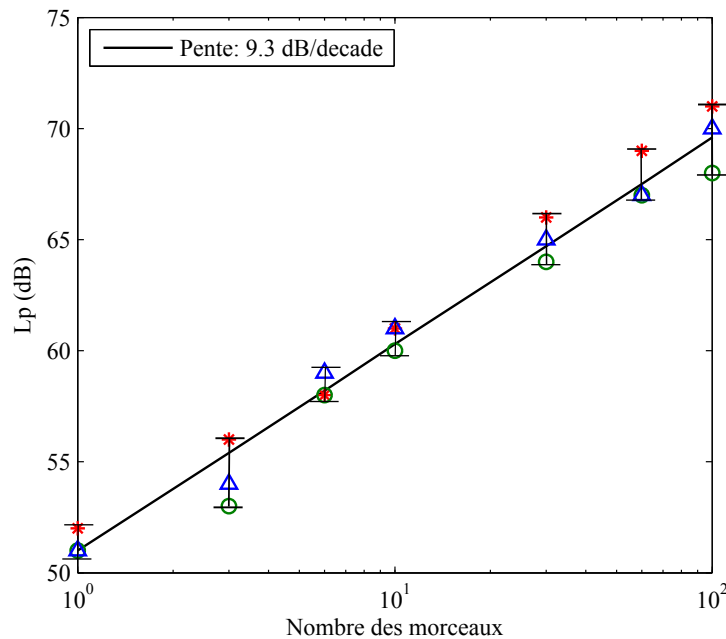


FIGURE 2.2 – Évolution du niveau sonore en fonction du nombre de morceaux de sucre. Glissement sur une table en bois. $V=10$ cm/s.

2.2 Vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact

Les questions posées ici sont de savoir si on peut reproduire les deux régimes de bruit de frottement observés précédemment sur une même surface et quelle est l'origine phy-

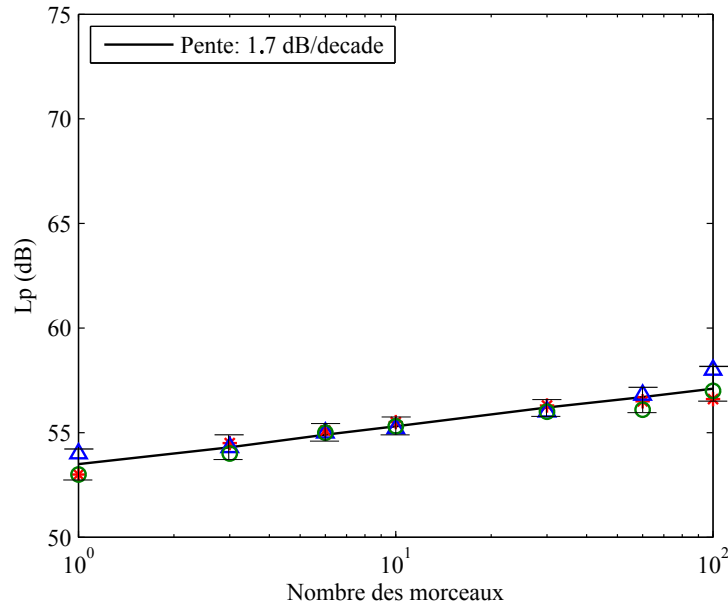


FIGURE 2.3 – Évolution du niveau sonore en fonction du nombre de morceaux de sucre. Glissement sur une membrane de tambour. $V=10\text{cm/s}$.

sique de ce phénomène contre-intuitif. Pour répondre à ces questions, nous poursuivons l'étude expérimentale sur la relation entre bruit de rugosité et aire de contact sur un tribomètre spécialement conçu à cet effet avec lequel tous les paramètres expérimentaux sont contrôlés d'une manière précise : rugosité de surface, vitesse de glissement, aire de contact, distance de passage... De plus, pour éviter l'influence du bruit ambiant, la vitesse vibratoire de la structure est mesurée à la place du niveau acoustique.

2.2.1 Principe

L'expérience consiste à faire glisser un certain nombre de solides identiques nommés glisseurs sur une plaque mince immobile appelée résonateur. Au cours du glissement, on mesure la vibration du résonateur à l'aide d'un accéléromètre piézoélectrique collé sur sa surface. Durant la phase stationnaire on mesure 1s du signal pour calculer sa valeur moyenne quadratique v_{rms} selon la formule suivante :

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} v^2(t) dt \quad (2.2)$$

où $v(t)$ est la vitesse vibratoire mesurée, T_1 , T_2 sont des instants de début et de fin de la phase stationnaire considérée.

Cette expérience est reproduite sur la même surface en faisant varier le nombre de glisseurs, puis on trace les courbes d'évolution de v_{rms} en fonction du nombre de glisseurs.

L'épaisseur des glisseurs et l'amortissement de la plaque peuvent être modifiés pour observer l'influence de la pression normale de contact et le pouvoir de dissipation du matériau sur la courbe d'évolution.

2.2.2 Dispositifs

Tribomètre linéaire RA

Le dispositif utilisé pour l'expérience est présenté figure 2.4. La plaque résonante est fixée à ses quatre extrémités sur un bâti rigide par quatre bagues de hauteur de 20 mm. Les glisseurs sont poussés droit par une palette fixée à une règle linéaire. Le mouvement est généré par un moteur de type Danaher AKM22C. La vitesse de glissement est contrôlée par un variateur électrique de type Servostar 300 qui permet d'appliquer des vitesses de 1 cm/s à 100 cm/s avec un taux d'erreur inférieur à 1%. La vibration de la plaque est mesurée dans la bande de fréquence [10 Hz - 10 kHz] en utilisant les accéléromètres piézoélectriques B&K de type 4393V de la sensibilité 0.3 pC/m.s^{-2} . L'accéléromètre est collé à la position d'un tiers de sa longueur, hors zone rugueuse. L'amplificateur de charge type B&K 2635 coupe le signal à 10 kHz. Il contient un filtre intégrateur analogique qui permet d'obtenir la vitesse vibratoire dans la gamme [10 Hz, 10 kHz]. Les signaux mesurés sont enregistrés par un oscilloscope numérique à mémoire Acute type DS-1020 avec une fréquence d'échantillonnage de 40 kHz. Pour la sécurité, un bouton d'arrêt d'urgence à proximité du banc coupe l'alimentation du moteur en cas de dysfonctionnement. Le schéma de ce tribomètre linéaire est donné figure 2.4.

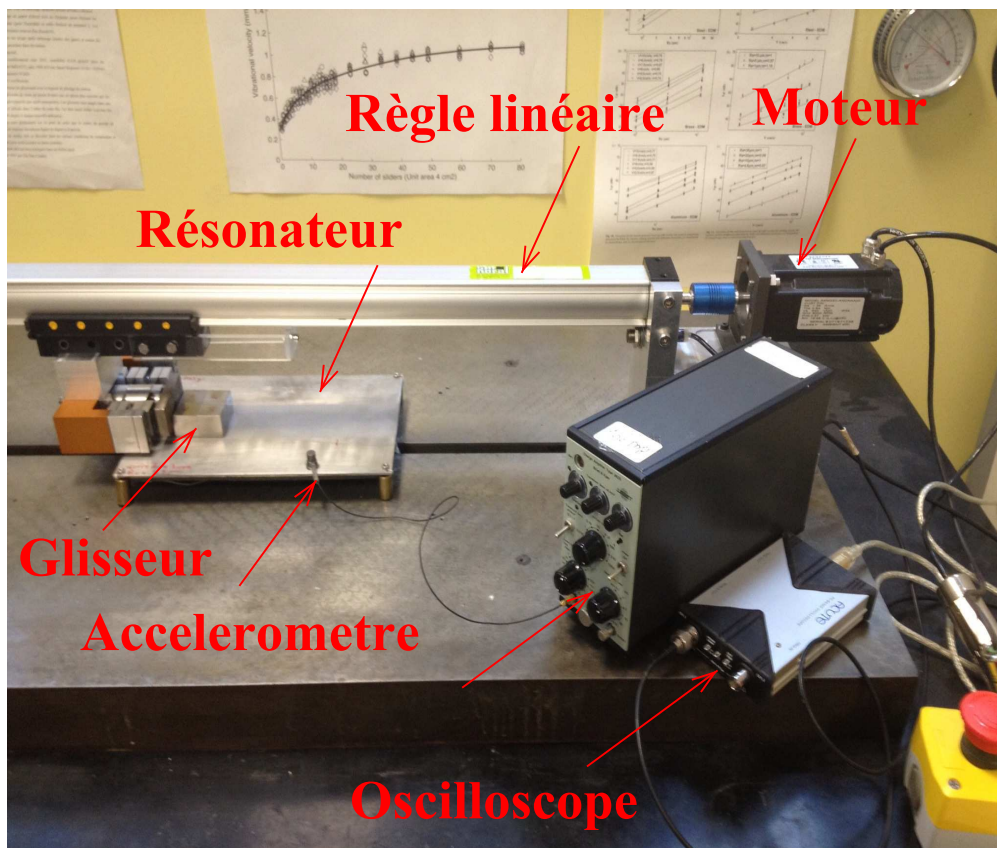


FIGURE 2.4 – Tribomètre linéaire RA

Ce tribomètre est piloté par un programme LabView dont l'interface est présentée figure 2.5. L'utilisateur doit spécifier la vitesse de glissement exprimée en tr/m (15 tours/min équivaut à 1 mm/s), si cette vitesse est positive, le déplacement se fait vers la

gauche, si elle est négative, il se fait vers la droite. Une barre bleue et une flèche blanche sur l'interface affichent la longueur de passage et la position instantanée du glisseur en temps réel. À tout moment, une pression sur STOP permet d'arrêter le moteur et l'exécution du programme.

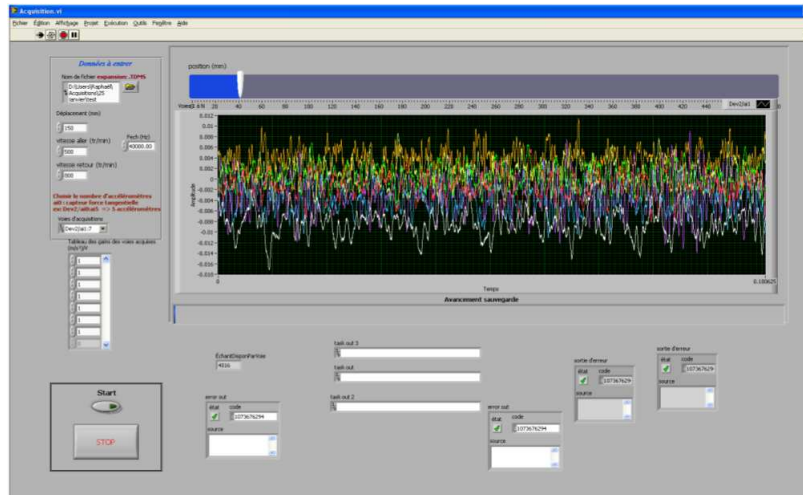


FIGURE 2.5 – Interface du programme LabView pour piloter le tribomètre linéaire Ra

Glisseurs

Les glisseurs sont des parallélépipèdes en acier inox avec pour propriétés mécaniques : module d'Young $E=210e^9$ Pa, coefficient de Poisson $\nu=0.3$, masse volumique $\rho=7800$ kg/m³. Leurs dimensions sont soit de $20 \times 20 \times 5$ mm soit de $20 \times 20 \times 20$ mm. Leurs masses sont respectivement 15.5 g et 62 g. Ces deux types de glisseurs d'épaisseurs différentes nous permettent de faire varier la charge normale de contact. La fréquence propre fondamentale du glisseur de 5 mm d'épaisseur est 35 kHz alors que celle du glisseur de 20 mm d'épaisseur est 75 kHz. Elles sont plus élevées que la gamme de fréquences mesurées (jusqu'à 10 kHz) et les glisseurs peuvent donc être considérés comme infiniment rigides par rapport à la plaque résonante à l'échelle de l'expérience. Une face du glisseur est rendue rugueuse par sablage. La rugosité des glisseurs est de $5 \pm 0.3 \mu\text{m}$. Le nombre de glisseurs utilisés dans cette expérience varie de 1 à 8, ceci équivaut à une variation de l'aire apparente de contact d'un ordre de grandeur, de 4 à 32 cm².

Résonateur

Le bruit est généré principalement par la vibration du résonateur. Le choix de ses dimensions et des caractéristiques du matériau influence donc directement les résultats mesurés. On choisit une plaque mince d'épaisseur 2 mm, de longueur 220 mm et de largeur 150 mm, c'est-à-dire que la longueur est 110 fois plus grande que l'épaisseur. Une telle plaque possède 200 modes de vibrations flexibles dans la bande de fréquence [10 Hz - 10 kHz]. Ce grand nombre de modes nous assure que le champ vibratoire du résonateur est diffus, autrement dit il est homogène et isotrope. Un champ vibratoire diffus est favorable à l'établissement du régime stationnaire puisque la vibration ne

dépend pas de la position de la source. De plus la position exacte de l'accéléromètre a peu d'importance.

La plaque est fabriquée avec le même acier inox que le glisseur. Son image est présentée figure 2.6. Une zone de dimension 50×220 mm au milieu de la surface est rendue

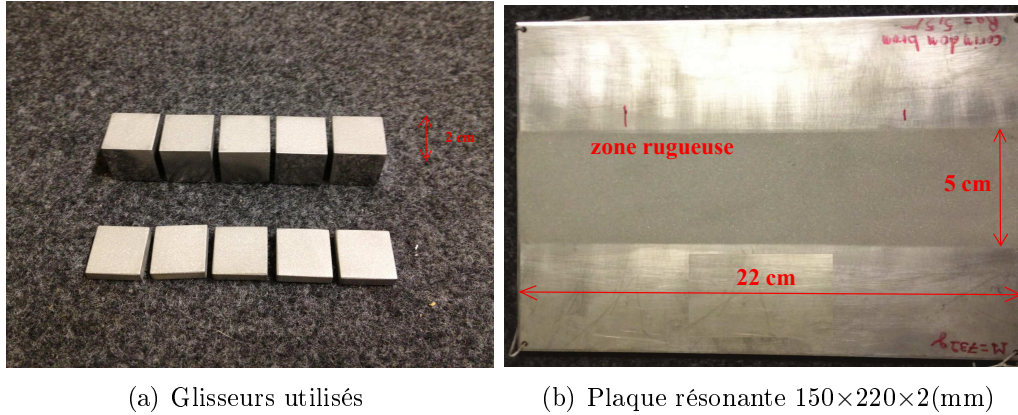


FIGURE 2.6 – Glisseur et plaque résonante utilisés

rugueuse par sablage avec une rugosité voisine de $5 \mu m$. C'est sur cette zone que les glisseurs sont déplacés. Aux quatre coins de la plaque, on perce des trous destinés aux fixations au bâti du tribomètre.

L'amortissement des matériaux constitutifs est une propriété importante qui influence le comportement vibratoire des structures. Dans cette expérience, deux plaques avec des taux d'amortissement différents sont considérées : une plaque nue avec un amortissement faible et une plaque où l'on a collé un viscoélastique de fort amortissement. Le matériau viscoélastique utilisé est VB5A 5 kg/m^2 auto-adhésif composé de bitume avec additifs chez DECIBEL FRANCE. Son efficacité est évaluée par la mesure du facteur d'amortissement η .

Une méthode directe pour déterminer la valeur de η est la mesure de la réponse impulsionnelle du système. On excite la plaque par un choc, puis on trace la courbe de décroissance de l'énergie par intégration rétrograde selon la méthode de Schroeder. L'énergie $EDC(t)$ restant dans la réponse impulsionnelle $h(t)$ à l'instant t est calculée par la formule suivante :

$$EDC(t) = \int_t^{\infty} h^2(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

En introduisant le temps de réverbération T_{60} durant lequel la réponse impulsionnelle diminue de 60 dB par rapport à sa valeur d'origine, l'amortissement des résonateurs est déterminé par [56] :

$$\eta\omega = \frac{2\pi \times 2.2}{T_{60}}, \quad (2.4)$$

où η est le facteur d'amortissement de la plaque, ω la pulsation moyenne de la bande de fréquence considérée.

La mesure de la réponse impulsionnelle s'effectue avec l'accéléromètre dans les mêmes conditions que pour la mesure du bruit stationnaire (intégration analogique - bande

passante 10 kHz - fréquence d'échantillonnage 40 kHz). Dans la figure 2.7 et le tableau 2.1 sont illustrés les résultats de mesure de la réponse impulsionnelle. En haut, c'est le signal

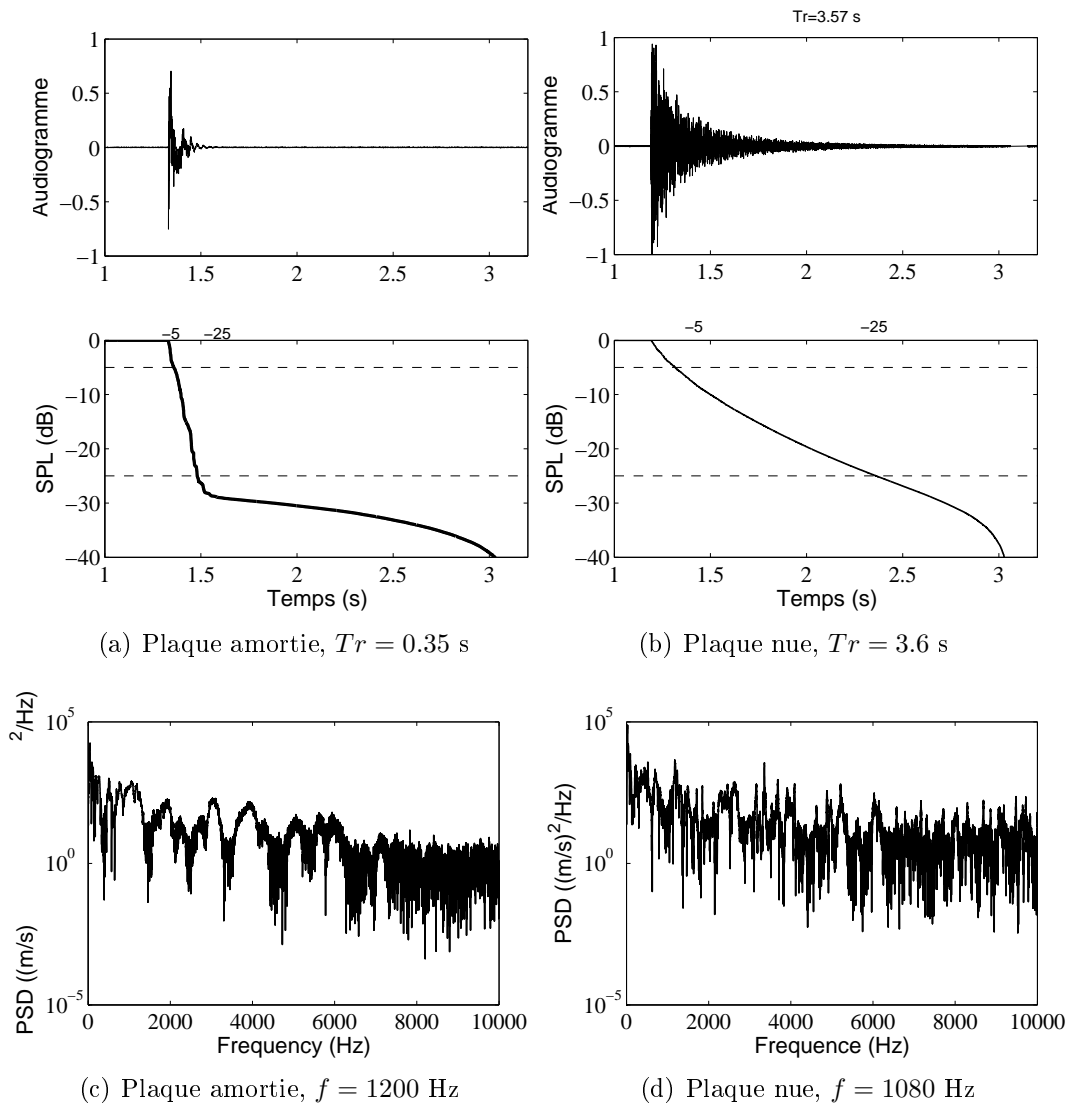


FIGURE 2.7 – Temps de réverbération des résonateurs utilisés.

de vitesse vibratoire du résonateur. La vitesse vibratoire change brusquement lors de l'apparition du choc, puis son amplitude décroît jusqu'à disparaître progressivement.

En bas de cette figure, c'est la courbe de décroissance de EDC(t) selon la formule (2.3) dont la partie linéaire est utilisée pour mesurer le temps de réverbération. En pratique, il n'est pas toujours possible d'obtenir une décroissance linéaire de 60 dB, on mesure alors la décroissance sur une plage de 30 dB ou 20 dB (de -5 dB à -35 ou -25 dB) puis on déduit la valeur de T_{60} [78] par extrapolation. Ces temps de réverbération sont appelés T_{30} et T_{20} . Ici, on utilise T_{20} qui vaut 0.35 s pour la plaque nue et neuf fois plus (3.57 s) pour la plaque amortie.

Ensuite, on va déterminer la valeur de fréquence moyenne du signal en utilisant sa fonction de densité spectrale de puissance 2.21(c) et (d).

Pour un signal donné $v(t)$, son énergie est définie par,

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt \quad (2.5)$$

Selon la théorème de Parseval, l'énergie du signal $v(t)$ est calculée en utilisant sa transformée de Fourier,

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{v}(f)|^2 df \quad (2.6)$$

où $\hat{v}(f)$ est la transformée de Fourier de $v(t)$.

$$\hat{v}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (2.7)$$

Et $|\hat{v}(f)|^2$ s'appelle la fonction de densité spectrale de l'énergie.

$$E_{vv}(f) = |\hat{v}(f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \quad (2.8)$$

Considérons un signal $v(t)$ sur un intervalle du temps $[-T/2; T/2]$, la densité spectrale de puissance du signal (PSD) est définie comme le rapport entre $E_{vv}(f)$ et T ,

$$S_{vv}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_{vv}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} v(t)e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \quad (2.9)$$

La fréquence moyenne du signal $v(t)$ mesuré dans la bande de fréquence $[f_1 \ f_2]$ est définie par :

$$f = \frac{\int_{f_1}^{f_2} f \cdot S_{vv}(f) df}{\int_{f_1}^{f_2} S_{vv}(f) df} \quad (2.10)$$

La densité spectrale de puissance des signaux mesurés est présentée sur la figure 2.7(c) et (d), la fréquence moyenne de la plaque amortie est 1200 Hz, et celle de la plaque nue est 1080 Hz.

Les résultats mesurés sont présentés dans le tableau 2.1.

Préparation des surfaces rugueuses

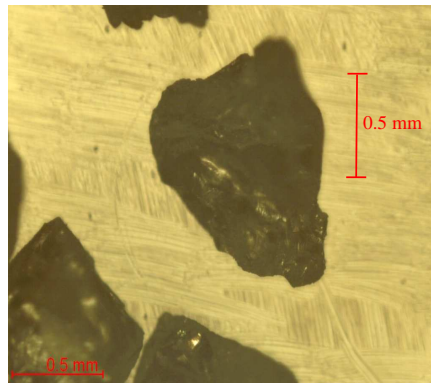
La surface est rendue rugueuse par sablage. C'est un traitement de surface par projection d'un abrasif à l'aide d'air comprimé au travers d'un pistolet. Ce procédé se fait

TABLE 2.1 – Résultats expérimentaux du temps de réverbération T_{60}

Plaque	T_{60} (s)	$\eta\omega$ (rad.Hz)	ω (rad.Hz)	η
Fort amortissement	0.35	39	$2\pi \cdot 1200$	0.005
Faible amortissement	3.6	3.8	$2\pi \cdot 1080$	0.0006

en cabine à manche (voir figure 2.8). L'abrasif utilisé est du sable de type corindon brun F24, 600-800 μm qui résulte de la fusion de bauxite et d'alumine de haute pureté. Le taux d'oxyde de titane élevé (TiO₂) lui confère une grande résistance et lui permet un excellent recyclage. L'image d'un grain de sable est présentée figure 2.8(a).

Lors du sablage, on doit déplacer régulièrement le pistolet sur la surface pour obtenir une surface homogène, isotrope. Après sablage, la surface doit être nettoyée pour enlever les résidus abrasifs et les poussières. Puis, il est nécessaire de réaliser une vingtaine de glissements pour le rodage afin d'éliminer les angles pointus des aspérités de surface.



(a) Grain de Corindon brun F24 (Microscope Olympus BX51M).



(b) Cabine à manche.

FIGURE 2.8 – Matériel pour le sablage.

La rugosité de surface est la même pour le glisseur et le résonateur. La figure 2.9 illustre l'image réelle de la surface rugueuse d'un glisseur. Sa valeur est de 5 μm mesurée avec un rugosimètre SOMICRONIC-SURFASCAN, équipé d'un palpeur à contact à pointe conique d'angle au sommet 90°. La densité de probabilité des hauteurs de la surface est montrée figure 2.10. On observe une distribution gaussienne d'une moyenne -0.57 μm et d'un écart-type de 6.22 μm . D'autres paramètres topographiques comme la moyenne arithmétique Ra , le Skewness Rsk , le Kurtosis Rku sont donnés dans le tableau 2.2.

2.2.3 Protocole

Le protocole à respecter dans tous les essais est le suivant [56] :

- L'électronique de mesure est allumée au moins 1 h avant les essais.
- Les essais sont réalisés en atmosphère ambiante, l'humidité relative est 75% et la température est 23°C.

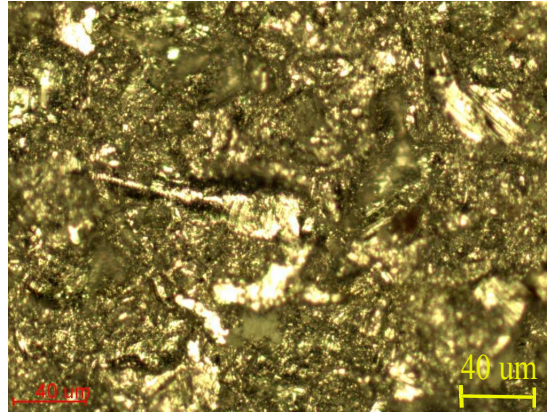


FIGURE 2.9 – Image de la surface rugueuse obtenue grâce à l'utilisation du microscope Olympus BX51 M (10 fois agrandi).

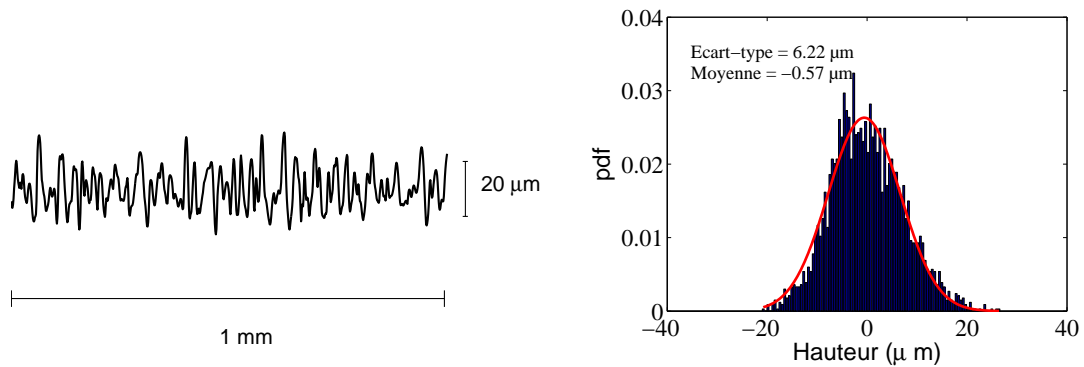


FIGURE 2.10 – Topographie des surfaces de glisseurs

- Le programme LabView est lancé, l'utilisateur entre une vitesse de glissement de 6 cm/s soit de 900 tours/min.

- Les surfaces doivent être nettoyées soigneusement. Les glisseurs sont trempés et agités : dans l'éthanol, le propanol puis séchés sous flux d'azote. La plaque résonante est nettoyée d'abord au papier avec de l'heptane (pour éliminer les graisses) puis avec de l'acétone et enfin les finitions se font au propanol 2. Les pelures de papier sont éliminées sous un flux d'azote.

- Au cours de l'expérience, il faut toujours mettre des gants en latex pour éviter tout contact avec la peau.

- Les glisseurs sont positionnés au milieu de la plaque, sur la zone rugueuse. Ils sont déplacés tout droit grâce à une palette plastique et une règle linéaire.

- Une série de expériences doit se dérouler dans les mêmes conditions de température et d'humidité (une seule journée).

- Chaque mesure est répétée trois fois.

- Quatre expériences sont réalisées. Dans la première campagne, on effectue les me-

TABLE 2.2 – Propriétés de rugosité de la surface obtenue

Propriété	Valeur
Ra (μm)	5.0 ± 0.3
Rq (μm)	6.2 ± 0.3
RSk	-0.3 ± 0.3
RKu	3.1 ± 0.2
RSm (μm)	245 ± 30

sures avec la plaque nue et les glisseurs de 0.5 cm d'épaisseur, dans la deuxième campagne la plaque nue, et les glisseurs de 2 cm sont utilisés, la troisième campagne correspond à la plaque amortie et les glisseurs de 0.5 cm et la dernière campagne se compose de la plaque amortie et les glisseurs de 2 cm.

2.2.4 Résultats

L'évolution du niveau vibratoire en fonction de l'aire de contact est présentée la figure 2.11. Les résultats des quatre campagnes sont notés par les symboles \blacktriangleright , \bullet , \triangleright , \circ respectivement. Ensuite, les courbes d'approximation sont tracées.

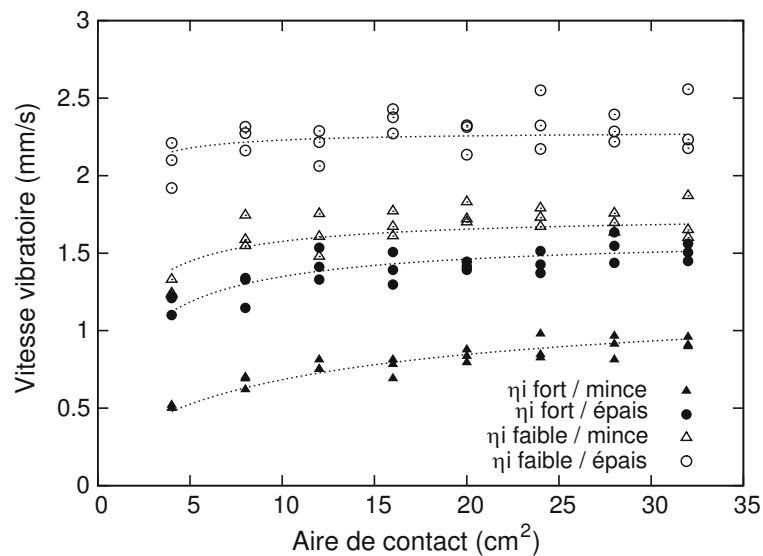


FIGURE 2.11 – Évolution de la vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact. Vitesse de glissement $V=6$ cm/s, Rugosité de surface $Ra=5$ μm , quatre combinaisons : glisseurs minces/épais et résonateurs avec fort/faible amortissement.

Dans le cas des glisseurs minces/plaque amortie (\blacktriangle), une croissance nette de la vitesse vibratoire selon le nombre des glisseurs est observée. Le glissement d'un seul glisseur donne une valeur de la vitesse vibratoire de 0.5 mm/s, alors qu'avec 6 glisseurs, elle est de 0.9 mm/s (1.8 fois). Il est noté que les essais avec 6, 7 et 8 glisseurs donnent des valeurs de la vitesse vibratoire peu différentes. D'ailleurs, l'incertitude sur les valeurs de mesure (même nombre de glisseurs) est faible, moins 0.2 mm/s.

Lorsque l'on fait glisser les cubes épais sur la plaque amortie (\bullet), l'amplitude de

TABLE 2.3 – Paramètres des essais sur l'évolution de la vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact

Résonateur			Glisseur				Matériaux	
Dimension (m)	Ra (μm)	η	Dimension (m)	Ra (μm)	V (cm/s)	A cm ²	E (N/m ²)	ρ (kg/m ³)
0.002×0.15×0.22	5	0.005	0.005×0.02×0.02 0.02×0.02×0.02	5	6	4 à 32	210e ⁹	7800
		0.0006						

la vitesse vibratoire est augmentée considérablement, 1,1 mm/s pour 1 glisseur et 1.5 mm/s pour 8 glisseurs. Les essais avec 5, 6, 7 et 8 glisseurs donnent des valeurs de vitesse vibratoire proches.

Quand on utilise des glisseurs minces avec une plaque nue de faible amortissement (Δ), l'amplitude des valeurs de vitesse vibratoire est plus élevée que celles obtenues dans les deux campagnes précédentes, et à partir de 4 glisseurs, on obtient des valeurs près de 1.7 mm/s.

Pour la dernière campagne d'essais, le glissement des cubes épais sur la plaque nue (\circ), l'amplitude des résultats obtenus est la plus élevée. De plus, le régime constant est bien observé. À part le premier essai avec un seul glisseur qui donne une valeur de vitesse vibratoire de 2.1 mm/s, pour tous les autres essais, on obtient des valeurs autour de 2.25 mm/s. Cependant, l'incertitude sur les mesures (même nombre de glisseurs) est importante. Par exemple avec 8 glisseurs, elle est de 0.4 mm/s.

Pour toutes les campagnes de mesures, la courbe d'approximation des résultats se compose de trois parties : une partie de régime proportionnel au début, une partie de régime constant à la fin et une partie de régime mixte au milieu. Mais avec le cas d'un glisseur mince et la plaque amortie, on observe plus clairement le régime proportionnel du bruit de glissement avec l'aire de contact, alors qu'avec le cas des glisseurs épais et plaque nue, le régime constant domine.

Ces constatations sont intéressantes car avec une surface de même nature (acier inox), tous les régimes du bruit de rugosité se manifestent. On se rappelle que dans la section précédente, nous n'étions capable que d'observer un seul régime pour chaque type de surface, soit le régime proportionnel avec la table, soit le régime constant avec la membrane de tambour.

On peut par ailleurs contrôler le régime ou l'amplitude de la vitesse vibratoire en changeant l'amortissement des plaques résonantes ou la charge normale de contact par l'épaisseur des glisseurs.

2.3 Dissipation de vibration

Dans cette section, nous cherchons l'origine physique de l'existence des différents régimes du bruit de frottement en fonction de l'aire de contact. Comme les expériences mentionnées ci-dessus nous montrent que ces deux régimes apparaissent sur un même système, le type de surface (la table ou la membrane de tambour) est donc peu important. L'explication pour l'évolution du bruit de rugosité en fonction de l'aire de contact

s'oriente donc vers l'interaction des surfaces et l'amortissement de la plaque résonante.

L'interaction entre des aspérités des surfaces rugueuses transforme l'énergie cinétique des glisseurs en énergie vibratoire du résonateur. Selon Chang [23], plus l'énergie cinétique incidente est importante, plus le choc est puissant. Par exemple, plus l'épaisseur du glisseur est augmentée, plus l'énergie vibratoire et donc la vitesse vibratoire de la plaque croissent. D'autre part, en raison du caractère aléatoire de la surface, chaque choc individuel n'est pas influencé par l'autre choc. Donc, l'énergie transférée est proportionnelle à la fréquence du choc et à l'aire de surface. On note P_{inj} la puissance vibratoire injectée dans la plaque résonante, S l'aire totale des glisseurs, p la puissance transférée par unité de surface alors :

$$P_{inj} = p.S, \quad (2.11)$$

La puissance vibratoire injectée est donc proportionnelle à l'aire de contact (nombre de glisseurs).

La dissipation des vibrations par amortissement interne du matériau se produit partout dans le solide. Si le champ vibratoire est diffus, l'énergie est dissipée également sur toute la surface. La puissance dissipée par amortissement interne est donc proportionnelle à l'aire de la surface du résonateur. Elle est calculée à l'aide du facteur d'amortissement η_i par :

$$P_{int} = \eta_i \omega m v^2 A, \quad (2.12)$$

où P_{int} est la puissance dissipée par amortissement interne, $m v^2 A$ est l'énergie totale du résonateur. m est la masse par unité de la surface, v est la valeur quadratique moyenne de la vitesse vibratoire. A est l'aire de la surface résonante, ω est la pulsation moyenne de la bande de fréquence considérée.

En 1930, Thomas [84] a observé que le contact lui-même dissipe considérablement l'énergie vibratoire. Cette portion dissipée dépend de l'aire de contact et de la vitesse vibratoire. En introduisant un facteur d'amortissement de contact η_c et par analogie avec la loi (2.12), on propose la loi de dissipation interfaciale suivante. La puissance vibratoire dissipée par frottement P_{fric} s'écrit :

$$P_{fric} = \eta_c \omega m v^2 S, \quad (2.13)$$

Cette loi est bien entendu une hypothèse qu'il convient de justifier par ses conséquences.

L'énergie vibratoire dissipée totale est donc la somme de celle dissipée par amortissement interne et par contact :

$$P_{diss} = P_{int} + P_{fric} = \eta_i \omega m v^2 A + \eta_c \omega m v^2 S. \quad (2.14)$$

D'autre part, le bilan de puissance appliquée au résonateur nous donne l'égalité entre la puissance injectée et la puissance dissipée :

$$P_{diss} = P_{inj} \quad (2.15)$$

ce qui induit

$$m v^2 = \frac{p S}{\eta_i \omega A + \eta_c \omega S}. \quad (2.16)$$

L'existence de deux régimes est expliquée comme suit : lorsque l'amortissement interne domine celui du contact, c'est-à-dire $\eta_i \gg \eta_c$, l'équation (2.16) devient :

$$mv^2 \simeq \frac{pS}{\eta_i \omega A}. \quad (2.17)$$

Comme l'aire du résonateur A est constante, la vitesse vibratoire du résonateur est donc proportionnelle à l'aire de contact (nombre de glisseurs) $mv^2 \propto S$.

En revanche, si l'amortissement par contact domine l'amortissement interne, c'est le cas où $\eta_c \gg \eta_i$, on a :

$$mv^2 \simeq \frac{p}{\eta_c \omega}. \quad (2.18)$$

L'énergie vibratoire du résonateur devient constante quelque soit l'aire de contact. C'est le régime constant.

On introduit les variables sans dimension qui sont le ratio entre la puissance dissipée par contact et la puissance transférée,

$$X = \frac{\eta_c \omega m v^2}{p} \quad (2.19)$$

et le ratio entre la puissance dissipée par contact et celle par amortissement interne,

$$Y = \frac{\eta_c \omega S}{\eta_i \omega A}. \quad (2.20)$$

L'équation d'équilibre des puissances (2.16) devient,

$$Y = \frac{X}{X + 1} \quad (2.21)$$

Il est clair qu'avec $X \ll 1$, on retrouve le régime proportionnel de bruit de rugosité $Y = X$. Au contraire, $X \gg 1$ conduit au régime constant ($Y \approx 1$). La dernière remarque est que Y est toujours inférieur à 1.

2.3.1 Confrontation de la théorie de dissipation avec les expériences

Cette section a pour but de prouver la conformité de la théorie de dissipation de vibration présentée ci-dessus avec les résultats expérimentaux obtenus.

Dans ce but, on retrace les résultats des différentes campagnes expérimentales avec les variables sans dimension X et Y et on la compare avec la courbe théorique d'évolution du bruit de rugosité avec l'aire de contact obtenue par l'équation (2.21).

La présentation des résultats expérimentaux avec les variables sans dimension X et Y est réalisée en utilisant les équations (2.20) et (2.19). Les valeurs de l'aire de contact S et les vitesses vibratoires v sont mesurées. Le point essentiel est donc d'estimer les valeurs de $\eta_c \omega$ et p qui sont a priori inconnues.

Détermination de $\eta_c\omega$ et p

On considère la partie proportionnelle des courbes logarithmiques d'ajustement sur la figure 2.11 correspondant au nombre de glisseurs de 1 à 5. La pente des courbes expérimentales exprimée en dB par décade est calculée selon la formule suivante :

$$\lambda = 20 \frac{\partial \log v}{\partial \log S} \quad (2.22)$$

D'autre part, en dérivant l'équation (2.21), la pente théorique en dB par décade est :

$$\lambda = 10 \frac{\partial \log Y}{\partial \log X} = \frac{10}{X + 1} \quad (2.23)$$

Donc, les valeurs moyennes de X et Y notées par \bar{X} et \bar{Y} déterminées à la valeur moyenne de l'aire de la surface de contact, $\bar{S}=12 \text{ cm}^2$ sont calculées par :

$$\bar{X} = \frac{10}{\lambda} - 1 \quad (2.24)$$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} + 1} \quad (2.25)$$

Les valeurs de $\eta_c\omega$ et p sont calculées par la suite :

$$\eta_c\omega = \frac{\bar{X}\eta_i\omega A}{\bar{S}} \quad (2.26)$$

$$p = \frac{\eta_c\omega m \bar{v}^2}{\bar{Y}} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

Courbe sans dimension

Les résultats estimés de λ selon l'équation (2.22), \bar{X} , \bar{Y} selon l'équation (2.25), et $\eta_c\omega$, p selon les équations (2.27) et (2.28) sont présentés dans le tableau 2.4,

TABLE 2.4 – Résultats expérimentaux de l'évolution de la vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact

Résonateur	Glisseur	λ (dB/décade)	$m\bar{v}^2$ ($\mu\text{J}/\text{m}^2$)	\bar{X}	\bar{Y}	$\eta_i\omega$ (s^{-1})	$\eta_c\omega$ (s^{-1})	p (mW/m^2)
Forte amort.	Mince	6.5	11	0.5	0.3	39	1,000	32
Faible amort.	Mince	1.6	41	5.2	0.8	3.8	550	27
Forte amort.	Épais	2.6	37	2.8	0.7	39	5,400	310
Faible amort.	Épais	0.4	78	24	1.0	3.8	2,500	210

Sur la figure 2.12 est illustrée la courbe des variables sans dimension représentant l'évolution de la vitesse vibratoire avec l'aire de contact. La ligne pointillée représente la relation théorique obtenue par l'équation (2.21). Les mesures de quatre campagnes expérimentales plaque amortie/glisseur mince, plaque amortie/glisseur épais, plaque

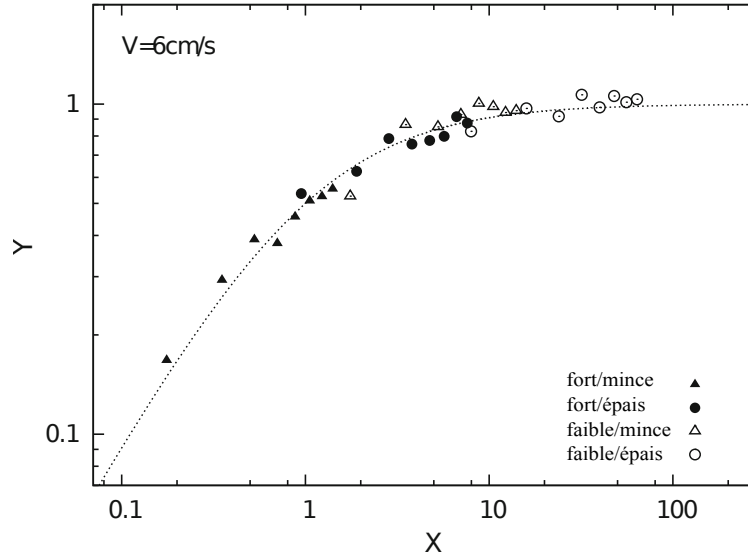


FIGURE 2.12 – Évolution des variables sans dimension représentant le niveau vibratoire avec l'aire de contact.

nue/glisseur mince et plaque nue/glisseur épais sont marquées par les symboles ▲, ●, △, ○. On observe que les résultats expérimentaux suivent bien la courbe théorique.

Avec la plaque amortie/glisseur mince, on observe clairement une augmentation proportionnelle de Y quand la valeur de X est inférieure à 1. En revanche, avec la plaque nue/glisseur épais, la valeur de X est très supérieure à 1 (de l'ordre de 10) donc, le régime constant de Y est obtenu. Plus précisément, quand l'amortissement interne de la plaque augmente de 10.2 fois (plaque amortie versus plaque nue), la valeur de X est multipliée par 10.4. Ce qui montre que le niveau vibratoire est effectivement piloté par amortissement du matériau constitutif de la plaque résonante.

2.4 Niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement

2.4.1 Objectif et principe

Dans la dernière partie de ce chapitre, la relation entre le niveau vibratoire (L_v) et la vitesse de glissement (V) est analysée. Les résultats obtenus serviront principalement de références pour la simulation numérique.

Le principe de l'expérience consiste à faire glisser un seul glisseur sur une plaque résonante à vitesse constante. L'essai est reproduit sur le même système glisseur, plaque mais avec des vitesses de glissement variant de 10 cm/s à 100 cm/s.

La vitesse vibratoire de la plaque est mesurée par l'accéléromètre piézoélectrique. La valeur moyenne quadratique v_{rms} est calculée selon l'équation (2.2) et le niveau vibratoire L_v selon la formule,

$$L_v = 20 \log_{10} \frac{v_{rms}}{v_{ref}} \quad (2.29)$$

où $v_{ref}=1e^{-9}$ (m/s) est la valeur référence.

Une fois que les valeurs de Lv pour différentes vitesses de glissement V sont déterminées, on trace la courbe d'évolution de Lv en fonction de V et on cherche à déduire la formule et les paramètres de la loi d'évolution.

Deux plaques ayant différents taux d'amortissement sont testées pour observer l'influence de la dissipation interne du matériau sur le résultat.

2.4.2 Dispositif et protocole

Dispositif Les mesures sont effectuées grâce au tribomètre linéaire Ra et les accéléromètres décrits dans la section 2.2.2. La vitesse de glissement varie de 10 à 100 cm/s. La plaque utilisée dans cette expérience est plus grande que celle de l'étude avec l'aire de contact. Elle est de dimension : $450 \times 300 \times 2$ mm (figure 2.13). Les solides sont en acier inox. Le facteur d'amortissement des plaques résonantes sont 0.0006 et 0.005. Le résonateur possède 460 modes propres dans la bande fréquentielle d'audio [20Hz – 20kHz]. Sa première fréquence fondamentale est de 50 Hz. Les surfaces sont rendues rugueuses par procédé de sablage avec l'abrasif Corindon brun F24, la rugosité est $Ra = 5\mu\text{m}$ pour les deux surfaces.

Les paramètres de l'expérience sont récapitulés dans le tableau 2.5.

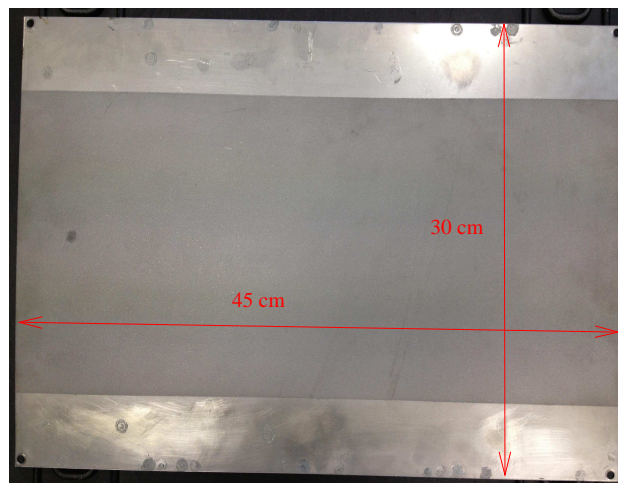


FIGURE 2.13 – Plaque résonante de dimension $300 \times 450 \times 2$ (mm).

TABLE 2.5 – Paramètres de l'expérience sur l'évolution du Lv en fonction de V .

Résonateur			Glisseur			Matériaux		
Dimensions (m)	Ra (μm)	η	Dimensions (m)	Ra (μm)	V (cm/s)	E (N/m^2)	ν	ρ (kg/m^3)
$0.002 \times 0.3 \times 0.45$	5	0.005 & 0.0006	$0.005 \times 0.02 \times 0.02$	5	10 à 100	$210e^9$	0.3	7800

Le protocole appliqué pour cette expérience est le même que pour la mesure de l'évolution du bruit de frottement en fonction de l'aire de contact (nettoyage, phase stationnaire du signal choisi pour le calcul de Lv) mais ici, la longueur de passage du glisseur sur le résonateur est 20 cm.

2.4.3 Résultats

Les résultats mesurés sont présentés figure 2.14, l'abscisse présentée en échelle logarithmique indique la vitesse de glissement en cm/s, l'ordonnée est le niveau vibratoire exprimé en dB. Pour chaque valeur de vitesse, on a trois points de mesure désignés par les symboles "*, Δ , o". Plus la vitesse est élevée, plus le niveau vibratoire est important. Il varie de 110 à 125 dB pour la plaque nue et il est plus faible de 103 à 117 dB pour la plaque amortie.

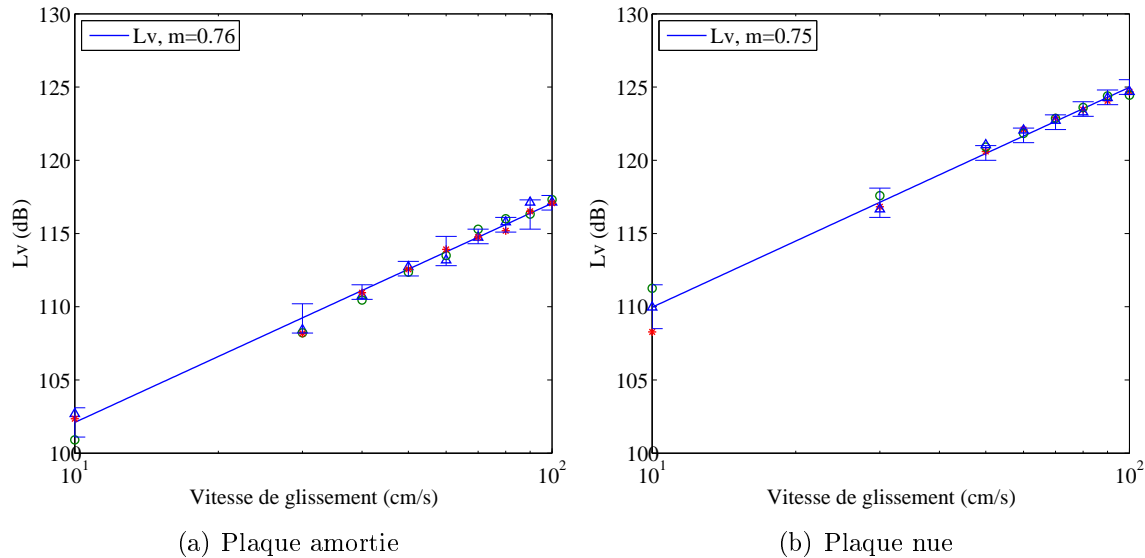


FIGURE 2.14 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse avec $Ra = 5 \mu m$.

Une ligne d'ajustement en noir est tracée pour prédire la loi d'évolution. Le bruit de rugosité est prédit par une fonction linéaire et croissante du logarithme de la vitesse de glissement :

$$Lv(dB) \propto 20 \log_{10} V^n \quad (2.30)$$

L'exposant n déterminé à partir de ligne d'ajustement est égal à 0.75, cette valeur est proche de celles publiées dans la littérature [13] ($0.51 \leq n \leq 0.78$).

Il est clair que la valeur de l'exposant n ne dépend pas du taux d'amortissement du résonateur. En revanche plus le taux d'amortissement est faible, plus l'amplitude de vibration est importante. Ce qui est conforme avec la conclusion de la section 2.2.

2.5 Conclusion

La relation entre bruit de rugosité et aire de contact n'est pas une simple loi linéaire comme l'intuition pourrait le suggérer. Les travaux présentés dans ce chapitre, des observations simples aux expériences rigoureuses avec un tribomètre spécialement conçu, ont mis en évidence l'existence de deux régimes : d'une part le niveau sonore est proportionnel à l'aire de contact, d'autre part le niveau sonore est constant. De plus, ces deux régimes peuvent apparaître sur un même système. Peu importe la nature des surfaces.

L'origine physique de ce phénomène étonnant s'explique par un raisonnement de transfert énergétique. L'énergie vibratoire de la plaque résonante, transférée de l'énergie cinétique des glisseurs mobiles par l'interaction des surfaces, est dissipée par deux mécanismes : l'amortissement du matériau constitutif caractérisé par le terme $\eta_i \omega A$ et l'amortissement dans le contact caractérisé par le terme $\eta_c \omega S$. C'est l'équilibre relatif entre ces deux grandeurs $\eta_i \omega A$ et $\eta_c \omega S$ qui décide le régime dominant, constant ou proportionnel.

Cette théorie a été validée par une bonne cohérence entre des résultats expérimentaux et la courbe théorique des variables sans dimension qui expriment les ratios entre les grandeurs énergétiques. Par ailleurs, cette théorie donne accès à une mesure indirecte de $\eta_i \omega$ et de p . Les valeurs de p , puissance injectée par unité de surface, pourront être vérifiées par la simulation numérique.

La relation entre niveau vibratoire et vitesse de glissement a également été étudiée. Les résultats montrent une croissance logarithmique du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement caractérisée par l'équation (2.30). La valeur de l'exposant n , estimée à 0.75, semble ne pas dépendre du taux d'amortissement de la plaque. La encore, cette valeur pourra être vérifiée par la simulation numérique.

Dans les chapitres suivants, on va décrire une approche numérique pour le problème du contact dynamique entre deux surfaces rugueuses pour avoir un accès direct aux chocs locaux entre les aspérités et évaluer ses caractéristiques immensurables.

Chapitre 3

Simulation numérique directe

Dans ce chapitre on décrit l'approche numérique appropriée au problème de contact dynamique entre deux surfaces rugueuses. Grâce à cette approche, on peut obtenir la déformation, la vitesse, l'accélération et la force de contact à chaque noeud de la surface et à chaque instant. En appliquant une décomposition modale, l'équation différentielle aux dérivés partielles régissant le mouvement des solides est réduite à un système d'équations différentielles ordinaires (ou problème de Cauchy), qui est ensuite résolu numériquement par différents schémas d'intégration temporelle. Les principales difficultés résident dans la non-linéarité de la force de contact et la relation implicite entre déformation et force. La force de contact provoque une vibration du corps solide. À son tour, la vibration modifie le contact [25]. Les déformations, la force de contact et la condition de non-pénétration sont couplées les unes aux autres. Plusieurs méthodes existent dans la littérature pour résoudre le problème du contact. On choisit deux méthodes : la méthode de pénalité simple et pratique, et la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui respecte rigoureusement la condition de non-pénétration.

3.1 Modèle du contact glissant entre deux surfaces rugueuses

Tout d'abord, on présente le modèle adopté pour le problème du contact glissant de deux surfaces rugueuses. Il se compose de deux profils rugueux en contact plan-plan (figure 3.1). Le profil supérieur se déplace horizontalement à vitesse constante V alors que le profil inférieur est fixe et appuyé à ses extrémités. À l'instant initial, l'écart vertical entre les deux lignes de référence des profils est noté δ . Lors du glissement, les aspérités du profil supérieur vont percuter celles du profil antagoniste. Comme les aspérités ne peuvent pas pénétrer le corps solide antagoniste, des forces compressives vont apparaître aux points de contact pour repousser les deux profils. Ces forces transitoires vont ensuite faire vibrer les corps solides. Ces vibrations rayonnent du bruit dans l'environnement. Cependant, cette dernière étape ne sera pas prise en compte dans ce modèle, où nous utiliserons les hypothèses suivantes :

- La déflexion du profil est calculée selon la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli (vibration flexible).

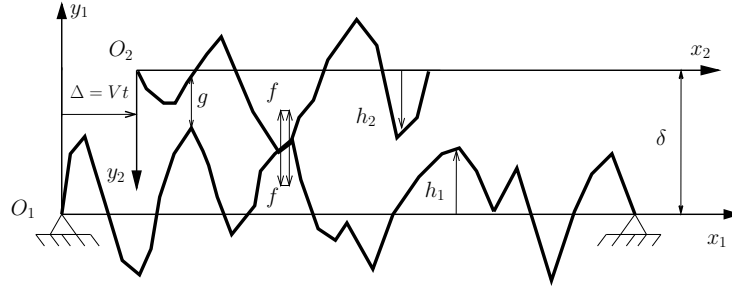


FIGURE 3.1 – Modèle de contact glissant entre profils rugueux. Le profil supérieur se déplace à vitesse constante V . Le profil inférieur est appuyé aux deux extrémités. L'écart horizontal entre les deux profils est $\Delta = Vt$

- Le profil est infiniment rigide dans le sens longitudinal, la position horizontale des noeuds est donc imposée (pas de vibration longitudinale).
- Les profils ne peuvent pas pénétrer l'un dans l'autre (condition de Signorini).
- Le contact est maintenu par la force de gravité.

3.1.1 Formulation mathématique

Chaque profil est décrit en condition statique par la fonction $h(x)$ qui donne l'altitude des noeuds relativement à la ligne de référence en fonction de l'abscisse x . Lors du glissement, nous introduisons deux repères attachés à chaque profil. Le repère (O_1, x_1, y_1) est fixe, l'axe x_1 est orienté vers la droite et l'axe y_1 est orienté vers le haut. Le profil inférieur est décrit par la fonction $h_1(x_1)$ dans ce repère. Le repère (O_2, x_2, y_2) est décalé verticalement de δ et se déplace vers la droite à la vitesse V . L'axe x_2 est orienté vers la droite et l'axe y_2 vers le bas. Le profil supérieur est décrit par la fonction $h_2(x_2)$ dans ce repère (voir figure 3.1). Les relations entre les coordonnées sont,

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - Vt \\ y_2 = \delta - y_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

En condition de déformation, la position verticale des noeuds sur la surface est obtenue par superposition de la déflexion $u_i(x_i, t)$ avec la position statique $h_i(x_i)$. Les coordonnées des noeuds sur le profil inférieur à l'instant t sont : x_1 et $y_1 = h_1(x_1) + u_1(x_1, t)$ dans le repère fixe. Alors que, les coordonnées des noeuds supérieurs sont : x_2 et $y_2 = h_2(x_2) + u_2(x_2, t)$ dans le repère mobile.

L'équation de la vibration transversale des profils est [87] :

$$D_i \Delta^2 u_i(x_i, t) + c_i \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, t) + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x_i, t) = f_i(x_i, t) \mp m_i g, \quad (3.2)$$

où i est l'indice des poutres (poutre inférieure $i=1$, poutre supérieure $i=2$), $D_i = E_i I_i$ est la rigidité de flexion, E_i est le module d'Young, I_i le moment d'inertie de la poutre, c_i le coefficient d'amortissement et m_i la masse linéique. La force de gravité est $-m_1 g$ pour la poutre inférieure mais $+m_2 g$ pour la poutre supérieure car le repère mobile est orienté vers le bas.

Dans le cas de conditions aux limites de type libre-libre (la poutre supérieure), le moment fléchissant et la force de cisaillement sont nuls aux extrémités :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(L_i, t) = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i^3}(0, t) = \frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i^3}(L_i, t) = 0. \quad (3.3)$$

Si les conditions aux limites sont appuyées-appuyées aux extrémités, le déplacement et le moment fléchissant sont nuls à $x_i = 0$ et $x_i = L_i$,

$$u_i(0, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(0, t) = u_i(L_i, t) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(L_i, t) = 0. \quad (3.4)$$

Les poutres sont au repos à l'instant $t = 0$, la déformation et la vitesse sont nulles. Les conditions initiales sont donc,

$$u_i(x_i, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x_i, 0) = 0. \quad (3.5)$$

Le jeu vertical entre les deux profils à la position x_1 est calculé par :

$$g(x_1, t) = \delta - h_1(x_1) - u_1(x_1, t) - h_2(x_1 - Vt) - u_2(x_1 - Vt, t). \quad (3.6)$$

Ce jeu est défini sur la zone de contact uniquement.

La condition de non-pénétration entre deux profils s'écrit [71],

$$g(x_1, t) \geq 0 ; f(x_1, t) \leq 0 ; g(x_1, t).f(x_1, t) = 0 \quad (3.7)$$

La première condition exprime l'impénétrabilité des solides. Elle se traduit par une valeur positive du jeu vertical $g(x_1, t) \geq 0$. Dans la seconde condition, la force de contact est négative car elle est répulsive. Elle disparaît s'il n'y a pas de contact. La troisième condition exprime que dans tous les cas le produit de la force de contact et du jeu vertical est nul.

3.1.2 Décomposition modale

En utilisant une décomposition modale, le déplacement vertical u_i peut être décrit par la somme de ses contributions modales :

$$u(x_i, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}(x_i) U_{i,k}(t) \quad (3.8)$$

et d'une manière similaire pour la force de contact :

$$f(x_1, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{1,k}(x_1) F_{1,k}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_{2,l}(x_1 - Vt) F_{2,l}(t) \quad (3.9)$$

et la force de gravité :

$$m_i g = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}(x_i) G_{i,k}, \quad (3.10)$$

où $U_{i,k}(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'amplitude modale et $\psi_{i,k}(x_i) : (0, L_i) \rightarrow \mathbb{R}$ est le mode propre de la vibration de flexion, $F_{i,k}(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ est la force modale de contact, $G_{i,k}$ est la force modale de gravité et T est la durée de simulation. Le mode propre de la vibration $\psi_{i,k}(x_i)$ ne dépend que des propriétés structurales de la poutre, alors que l'amplitude modale $U_{i,k}(t)$ dépend aussi des forces externes. Le mode propre est déterminé par la résolution du problème spectral suivant [37] :

$$\begin{cases} D_i \Delta^2 \psi_{i,k} = -m_i \omega_{i,k}^2 \psi_{i,k} \\ \text{Conditions aux limites (3.3) ou (3.4).} \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\omega_{i,k}$ est la pulsation propre du mode. Dans le cas d'une poutre appuyée-appuyée, la pulsation propre et les modes propres sont :

$$\begin{cases} \psi_{1,k}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{L_1}} \sin(k+1) \frac{\pi x_1}{L_1} \\ \omega_{1,k} = \sqrt{\frac{D_1}{m_1}} \left(\frac{(k+1)\pi}{L_1} \right)^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $k = 0, 1, 2, \dots$

Tandis que pour la poutre libre-libre, il faut d'abord prendre en compte deux modes de corps rigide (problème plan sans mouvement horizontal) le mode de translation verticale et le mode de rotation :

$$\begin{cases} \psi_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{L_2}} \\ \psi_{2,1} = \sqrt{\frac{3}{L_2}} \frac{2}{L_2} \left(x - \frac{L_2}{2} \right) \\ \omega_{2,0} = \omega_{2,1} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Les modes propres de vibration libre-libre sont :

$$\begin{cases} \psi_{2,k}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{L_2}} [\sin(\alpha_k x_2) + \sinh(\alpha_k x_2) + \beta_k (\cos(\alpha_k x_2) + \cosh(\alpha_k x_2))] \\ \omega_{2,k} = \alpha_k^2 \sqrt{\frac{D_2}{m_2}} \end{cases} \quad (3.14)$$

où α_k et β_k sont les paramètres modaux [40]

$$\begin{cases} \alpha_k \approx \frac{(2k+1)\pi}{2} \\ \beta_k = \frac{\cos(\alpha_k L_2) - \cosh(\alpha_k L_2)}{\sin(\alpha_k L_2) - \sinh(\alpha_k L_2)} \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $k = 2, 3, 4, \dots$

Tous les modes propres présentés ci-dessus satisfont la propriété d'orthonormalité :

$$\int_0^{L_i} \psi_{i,k}(x_i) \psi_{i,l}(x_i) dx_i = \delta^{kl} \quad (3.16)$$

Les composantes modales $A_{i,k}(t)$ sont obtenues par

$$A_{i,k}(t) = \int_0^{L_i} a(x_i, t) \psi_{i,k}(x_i) dx_i \quad (3.17)$$

où $A_{i,k}$ représente respectivement $U_{i,k}$, $F_{i,k}$, $G_{i,k}$, et a respectivement u , f et $m_i g$.

En introduisant l'équation (3.8) dans l'équation (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}(x_i) \left[m_i \omega_{i,k}^2 U_{i,k}(t) + 2m_i \zeta_{i,k} \omega_{i,k} \dot{U}_{i,k}(t) + m_i \ddot{U}_{i,k}(t) \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}(x_i) (F_{i,k}(t) \mp G_{i,k}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où $\zeta_{i,k} = c_i / (2m_i \omega_{i,k})$ est le coefficient d'amortissement modal.

En multipliant par un mode propre quelconque $\psi_{i,l}(x_i)$, en intégrant sur la longueur L_i et en appliquant la propriété d'orthonormalité des modes propres, on obtient une nouvelle équation modale du mouvement comme suit :

$$m_i \left[\ddot{U}_{i,k} + 2\zeta_{i,k} \omega_{i,k} \dot{U}_{i,k} + \omega_{i,k}^2 U_{i,k} \right] = F_{i,k}(t) \mp G_{i,k}, \quad (3.19)$$

Après avoir effectué les transformations présentées ci-dessus, nous nous retrouvons face à un nouveau problème à résoudre. Les inconnues en fonction du temps sont $U_{i,k}(t)$, $F_{i,k}(t)$ avec $k=0, 1, 2, \dots$ et $i=1, 2$ et les conditions initiales sont :

$$U_{i,k}(0) = \dot{U}_{i,k}(0) = F_{i,k}(0) = 0 \quad (3.20)$$

À chaque instant, les champs physiques comme le déplacement $u_i(x_i, t)$ et la force $f_i(x_i, t)$ sont obtenus par composition modale avec les équations (3.8) et (3.9). Ils satisfont automatiquement les conditions aux limites (3.3), (3.4). Cependant la condition de contact (3.7) doit encore être vérifiée et exige le calcul des u_i et g au travers de l'équation (3.6). Théoriquement, il est possible d'obtenir des solutions exactes du contact, comme l'aire de contact, la pression de contact, la déformation des aspérités ... avec un très grand nombre de modes de vibration. Cela conduit néanmoins à des pas de discrétisation du temps très petits et donc des temps CPU énormes. Donc, nous effectuerons une troncature du nombre de modes de vibration. Seuls les M premiers modes dans la bande des fréquences audibles seront pris en compte dans le calcul.

3.1.3 Technique de réduction de l'ordre

Introduisons les variables auxiliaires :

$$\begin{cases} V_{i,k} = \dot{U}_{i,k} \\ A_{i,k} = \ddot{U}_{i,k} \end{cases} \quad (3.21)$$

l'équation du mouvement (3.19) est réécrite sous la forme d'un système d'équations différentielles de premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{U}_{i,k} = V_{i,k} \\ \dot{V}_{i,k} = A_{i,k} \\ A_{i,k} = \frac{F_{i,k}}{m_i} - 2\zeta_{i,k} \omega_{i,k} V_{i,k} - (\omega_{i,k})^2 U_{i,k} \end{cases} \quad (3.22)$$

en oubliant pas que $F_{i,k}$ dépend implicitement des $U_{i,k}$ à travers la condition (3.19).

En posant $y = \begin{bmatrix} U(t) \\ V(t) \end{bmatrix}$ et $\dot{y} = \begin{bmatrix} V(t) \\ A(t) \end{bmatrix}$ on retrouve la forme générale d'un problème de valeur initiale (IVP) :

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Dans la partie suivante, nous présentons différents schémas d'intégration temporelle pour résoudre numériquement le problème de valeur initiale.

3.2 Schémas d'intégration temporelle

3.2.1 Discrétisation temporelle

L'intervalle de temps est discrétisé en séquences d'instantanés $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$ avec un pas de temps constant $\tau = t_{n+1} - t_n$.

Puis les variables discrétisées sont introduites. $U_{i,k,n}$ est l'amplitude modale du mode k de la poutre i à l'instant t_n , $\dot{U}_{i,k,n}$ est la vitesse modale à l'instant t_n , $\ddot{U}_{i,k,n}$ est l'accélération modale à l'instant t_n et $F_{i,k,n}$ est la force modale à l'instant t_n . L'équation discrétisée du problème modal (3.19), (3.20) est :

$$m_i \left[\ddot{U}_{i,k,n} + 2\zeta_{i,k}\omega_{i,k}\dot{U}_{i,k,n} + \omega_{i,k}^2 U_{i,k,n} \right] = F_{i,k,n} \mp G_{i,k}, \quad (3.24)$$

et les conditions initiales sont :

$$U_{i,k,0} = \dot{U}_{i,k,0} = F_{i,k,0} = 0 \quad (3.25)$$

3.2.2 Problème de valeur initiale

Le problème de valeur initiale (aussi appelé problème de Cauchy) consiste en une équation différentielle ordinaire (ODE) et des conditions initiales. Soit une application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, l'objectif est de trouver y qui satisfait :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.26)$$

où $f(y)$ est une fonction réelle définie sur $] -\infty, +\infty[$. Comme f ne dépend pas explicitement de t , l'ODE est dite autonome.

3.2.3 Notation

Considérons deux instants successifs t_n et t_{n+1} . L'équation différentielle (3.26) peut être mise sous la forme intégrale suivante :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \quad (3.27)$$

où $y(t_n)$ désigne la solution exacte du problème autonome à l'instant t_n .

La fonction d'incrément $\Phi(y(t_n), \tau)$ est introduite pour approximer l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt$. Sa formule dépend du choix du schéma numérique :

$$\tau \cdot \Phi(y(t_n), \tau) \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \quad (3.28)$$

Si y_n désigne la solution approchée à l'instant t_n obtenue par application du schéma d'intégration temporelle à partir de la valeur connue y_0 , alors :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \Phi(y_n, \tau) \quad (3.29)$$

Notons \bar{y}_{n+1} la solution à l'instant t_{n+1} obtenue en appliquant une seule fois le schéma d'intégration temporelle à partir de la valeur exacte à l'instant précédent t_n . Alors :

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau \Phi(y(t_n), \tau) \quad (3.30)$$

y_n^* est la solution à l'instant t_n obtenue en tenant compte des erreurs d'arrondi commises par l'ordinateur :

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \tau \Phi(y_n^*, \tau) + \delta_n \quad (3.31)$$

où δ_n est l'erreur d'arrondi d'un pas commise par l'ordinateur.

L'erreur de discrétisation e_n est la différence entre la solution exacte $y(t_n)$ et la solution approchée y_n obtenue théoriquement par application du schéma à partir de y_0 :

$$e_n = y(t_n) - y_n \quad (3.32)$$

La différence entre la solution exacte $y(t_n)$ et \bar{y}_n est nommée erreur de consistance c_n :

$$c_n = \frac{y(t_n) - \bar{y}_n}{\tau} \quad (3.33)$$

C'est l'erreur commise en un seul pas de calcul (voir figure 3.2).

L'erreur totale E_n est la différence entre la solution exacte $y(t_n)$ et la valeur obtenue y_n^* :

$$E_n = y_n^* - y(t_n) \quad (3.34)$$

C'est l'erreur observée par application du schéma en n pas sur un ordinateur en tenant compte des erreurs d'arrondi.

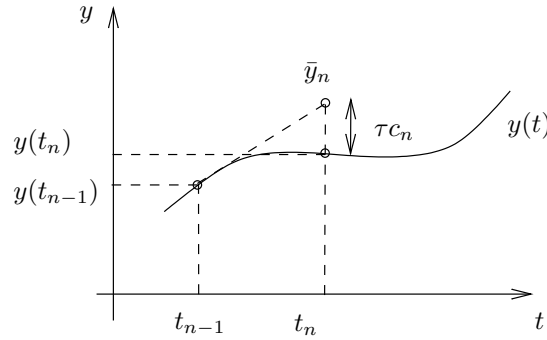


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de l'erreur de consistance

3.2.4 Propriétés

Avant d'entrer dans le détail de chaque schéma d'intégration temporelle, on présente les critères généraux pour évaluer un schéma.

Explicite/Implicite

Un schéma est explicite si l'on peut calculer une valeur à l'instant $n + 1$ à partir des valeurs obtenues aux instants précédents $n, n - 1, \dots$. La fonction d'incrément $\Phi(y_n, y_{n-1}, \dots, \tau)$ est déduite directement à partir des valeurs connues de y_n, y_{n-1}, \dots :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \approx \tau \Phi(y_n, y_{n-1}, \dots, \tau) \quad (3.35)$$

En revanche, s'il faut utiliser des valeurs à l'instant $n + 1$ (comme la vitesse, le déplacement,...) pour calculer une grandeur à l'instant $n+1$ (une accélération), le schéma est dit implicite [75]. Avec ce type de schéma, il faut faire des calculs itératifs. C'est-à-dire que des valeurs fictives sont d'abord attribuées pour les grandeur à l'instant $n + 1$, puis une procédure de prédiction-correction est appliquée en utilisant un schéma implicite pour corriger les valeurs de y_{n+1} :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \approx \tau \Phi(y_{n+1}, y_n, y_{n-1}, \dots, \tau) \quad (3.36)$$

Pour le problème de contact, il existe toujours un couplage entre la force de contact et la déformation qui se manifeste dans la condition de non pénétration. En pratique, cette relation de couplage est très couteuse en temps de calcul. Or, l'utilisation d'un schéma implicite nous oblige à résoudre au moins deux relations implicites à chaque pas de temps, l'une entre les variables du schéma, l'autre est la condition de non pénétration. Cela multiplie grandement la complexité de l'algorithme ainsi que le temps d'exécution. C'est pourquoi l'utilisation d'un schéma d'intégration explicite est plus répandue, et en l'accompagnant d'un algorithme de gestion du contact, on obtient une méthode dite semi-explicite.

Un pas/ pas multiples

Un schéma est appelé "un pas" lors que y_{n+1} est calculé seulement avec la valeur à l'instant précédent t_n [74] :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \approx \tau \Phi(y_n, \tau) \quad (3.37)$$

$$y_{n+1} \approx y_n + \tau \Phi(y_n, \tau) \quad (3.38)$$

Au contraire, s'il est nécessaire d'utiliser plusieurs instants précédents t_n, t_{n-1}, \dots pour calculer y_{n+1} , le schéma est dit "pas multiples" :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y) dt \approx \tau \Phi(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, \tau) \quad (3.39)$$

$$y_{n+1} \approx y_n + \tau \Phi(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, \tau) \quad (3.40)$$

Il faut souligner qu'à l'instant t_1 , seule la variable au pas précédent est connue (t_0) donc le schéma à pas multiples ne peut pas être appliqué. En général, les schémas à pas multiples sont "amorcés" par un schéma à un pas.

Consistance

Une méthode est dite consistante si son erreur de consistance définie par l'équation (3.33) tend vers zéro lorsque le pas de temps tend vers zéro. La condition de consistance s'écrit :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |c_n(\tau)| = 0 \quad (3.41)$$

De plus, un schéma est consistant d'ordre p si l'erreur de consistance est $\mathcal{O}(\tau^p)$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \max_{0 \leq n \leq N} |c_n(\tau)| = \mathcal{O}(\tau^p) \quad (3.42)$$

Zéro-stabilité

Considérons le problème IVP :

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + \tau \Phi(y_n, \tau) \\ y_0 &= y_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

et son problème perturbé :

$$\begin{cases} y_{n+1}^* &= y_n^* + \tau \Phi(y_n^*, \tau) + \delta_n \\ y_0^* &= y_0 + \delta_0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Le schéma d'intégration temporelle est dit zéro-stable si la différence entre la solution du problème origine et celle de son problème perturbé est contrôlée [45] :

$$\exists M > 0 \quad \text{pour} \quad \max_{0 \leq n \leq N} |y_n^* - y_n| \leq M \sum_{i=0}^N |\delta_i| \quad (3.45)$$

Cette propriété est indispensable pour contrôler les erreurs d'arrondi commises par l'ordinateur qui sont considérées comme des perturbations δ_n .

Convergence

Un schéma est dit convergent si la solution numérique y_n tend vers la solution exacte $y(t_n)$ quand τ tend vers zéro :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \tau \rightarrow 0. \quad (3.46)$$

Si $\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| = \mathcal{O}(\tau^p)$ le schéma est dit convergent d'ordre p .

D'après Lax-Richtmyer [42], une méthode consistante et zéro-stable est convergente [28].

En pratique, la présence de l'erreur d'arrondi ne nous permet pas d'obtenir des solutions exactes quand τ tend vers zéro. Si τ est grand, l'erreur de consistance domine l'erreur d'arrondi. Au contraire, si τ est très petit, il faut plus de calculs et l'erreur d'arrondi augmente. Théoriquement, il existe une valeur optimale τ_{opt} qui minimise la somme de l'erreur de la méthode et l'erreur d'arrondi.

Absolue-stabilité

La propriété d'absolue-stabilité exige que la différence entre la valeur exacte et la solution numérique pour un pas de temps choisi, ne s'amplifie pas au cours du temps quand le temps total T tends vers l'infini ou bien quand le nombre total des instants N devient très grand [74] :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n| \quad \text{bornée quand} \quad N \rightarrow \infty \quad (3.47)$$

En réalité, la stabilité absolue dépend à la fois des équations concrètes du problème IVP et du schéma numérique utilisé, donc l'étude de l'absolue-stabilité est souvent difficile à mener. C'est pourquoi, en pratique, on considère le problème IVP linéaire obtenu en simplifiant le problème origine :

$$\begin{cases} \dot{y} = A.y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.48)$$

avec la matrice $A \in R^{n \times n}$ et $y \in R^n$

L'application d'un schéma d'intégration nous donne une relation de récurrence :

$$y_{n+1} = M(\tau).y_n \quad (3.49)$$

$M(\tau)$ est la matrice d'amplification qui dépend du schéma et du pas de temps.

Une méthode est dite A-stable avec un pas de temps donné τ , si les valeurs propres λ de $M(\tau)$ satisfont $|\lambda| \leq 1$. L'ensemble des valeurs de τ qui assure la A-stabilité de la méthode est appelé région de stabilité.

On utilise cette propriété pour déterminer une valeur critique de stabilité, le pas de temps τ choisi doit être inférieur à cette valeur pour que la solution soit fiable.

Pour illustrer la notion de A-stabilité, prenons un exemple. Considérons le problème test suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \lambda y(t) & \text{avec } t > 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.50)$$

pour lequel la fonction f vaut $f(y) = \lambda y$.

La solution exacte de ce problème est $y(t) = e^{\lambda t}$. Lorsque $\lambda < 0$, $y(t)$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$.

La solution numérique à l'instant $t_n = n \cdot \tau$ est notée y_n . En utilisant le schéma d'intégration d'Euler explicite, $(\Phi(y_n, \tau) = f(y_n))$ on a :

$$y_{n+1} = (1 + \lambda\tau)y_n \quad (3.51)$$

donc,

$$y_n = (1 + \lambda\tau)^n \quad (3.52)$$

Si $|1 + \lambda\tau| > 1$, $y_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$, donc la méthode est A-instable. La région de stabilité de cette méthode est donc $|1 + \lambda\tau| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \tau \leq -2/\lambda$.

3.2.5 Schéma d'intégration temporelle

Dans cette section, sept schémas d'intégration temporelle pour résoudre un problème de valeur initiale sont présentés. L'intérêt d'implémenter plusieurs schémas est justifié par :

- Optimisation du temps CPU pour la simulation avec un pas de temps donné en choisissant le meilleur schéma.
- Assurance de la précision et de la bonne programmation en comparant les résultats obtenus par différents schémas.

La description de chaque schéma est constituée de sa formule d'approximation, du calcul de l'erreur de consistance, du pas de temps maximal pour satisfaire l'A-stabilité et la description des différentes étapes de son algorithme.

La méthode aux différences centrées

Le schéma aux différences centrées exprime les vitesses et accélérations à l'instant n en fonction des déplacements aux instants $n - 1$, n , $n + 1$ [75]. Les formules de cette méthode sont :

$$\begin{cases} \dot{y}_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} \\ \ddot{y}_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{\tau^2} \end{cases} \quad (3.53)$$

C'est un schéma explicite à pas multiple.

À partir de ces formules, on peut écrire :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \dot{y}_n + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}_n \quad (3.54)$$

L'erreur de consistance par la méthode des différences centrées vaut $(y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1})/\tau$. En effectuant un développement limité au deuxième ordre de $y(t)$, il vient :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.55)$$

Par ailleurs, l'application du schéma (3.54) en supposant connues les valeurs exactes à l'instant t_n donne :

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(t_n) \quad (3.56)$$

Par définition :

$$\tau \cdot c_{n+1} = y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} \quad (3.57)$$

d'où par différence de (3.55) et (3.56) :

$$c_{n+1} = \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.58)$$

Donc la méthode des différences centrées est consistante d'ordre 2.

On désigne $U_{i,k}(t_n)$ solution exacte de l'équation du mouvement modale (3.19). La solution obtenue par application du schéma numérique est notée $U_{i,k,n}$. Similairement, la vitesse modale $\dot{U}_{i,k}(t_n)$, l'accélération modale $\ddot{U}_{i,k}(t_n)$ et la force modale $F_{i,k}(t_n)$ sont approximées par $\dot{U}_{i,k,n}$, $\ddot{U}_{i,k,n}$ et $F_{i,k,n}$. En appliquant les formules de la méthode des différences finies, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{U}_{i,k,n} = \frac{U_{i,k,n+1} - U_{i,k,n-1}}{2\tau}, \\ \ddot{U}_{i,k,n} = \frac{U_{i,k,n+1} - 2U_{i,k,n} + U_{i,k,n-1}}{\tau^2}. \end{cases} \quad (3.59)$$

Introduisons ces formules dans l'équation (3.24), on a la relation de récurrence :

$$U_{i,k,n+1} - \frac{2 - (\tau\omega_{i,k})^2}{1 + \tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k}} U_{i,k,n} - \frac{\tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k} - 1}{1 + \tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k}} U_{i,k,n-1} = \frac{\tau^2}{m_i} (F_{i,k,n} \mp G_{i,k}). \quad (3.60)$$

Afin d'examiner la propriété d'absolue-stabilité, on considère le cas simplifié sans force extérieure ni contact ni amortissement. Le schéma se réduit à :

$$U_{i,k,n+1} - (2 - \tau^2\omega_{i,k}^2)U_{i,k,n} + U_{i,k,n-1} = 0 \quad (3.61)$$

Les racines de son équation caractéristique sont :

$$\lambda = 1 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^2}{2} \pm i \frac{\tau\omega_{i,k}}{2} \sqrt{4 - (\tau\omega_{i,k})^2} \quad (3.62)$$

Algorithm 1 Algorithme du schéma d'intégration temporelle des différences centrées

```

Initialiser  $U_{i,k,0} = 0, U_{i,k,1} = 0.$ 
for  $n = 1$  to  $N$  do
  Calculer les forces de contact  $f_{i,l,n}.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n}$  par (3.17).
      Prédire les variables modales  $U_{i,k,n+1}$  par (3.60) et  $\dot{U}_{i,k,n}$  par l'équation (3.59)
    end for
  end for
  Prédire et sauvegarder le déplacement et la force  $u_{i,l,n+1}, f_{i,l,n}.$ 
end for

```

Pour que les solutions de l'équation (3.61) soient stables, il faut que les modules de ses valeurs propres ne soient pas supérieurs à 1.

Les modules des valeurs propres valent $|\lambda| = 1$ si $4 - (\tau\omega_{i,k})^2 \geq 0$ ou bien $\tau \leq \frac{2}{\omega_{i,k}}$. La méthode des différences centrées est donc une méthode conditionnellement stable. Le critère de stabilité est $\tau \leq \frac{2}{\omega_{i,k}}$.

L'algorithme des différences centrées est présenté ci-dessus. C'est une méthode à deux pas, donc à chaque pas de temps il faut sauvegarder les variables modales aux deux instants précédents.

La méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite est la méthode la plus simple pour résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire. Elle consiste à approximer l'intégrale $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(y)dt$ par :

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(y)dt \approx \tau \cdot f(y_n) \quad (3.63)$$

La méthode d'Euler explicite est présentée figure 3.3 [28] :

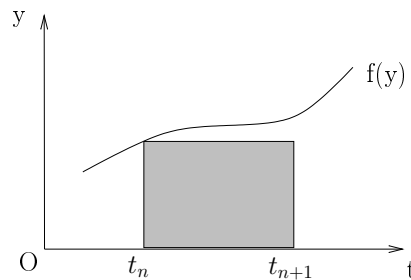


FIGURE 3.3 – Approximation de l'intégrale $\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(y)dt$ par la méthode d'Euler explicite

L'erreur de consistance est calculée en utilisant la formule de Taylor-Lagrange.

L'application de l'équation (3.63) en utilisant la valeur exacte à l'instant t_n donne :

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) \quad (3.64)$$

D'ailleurs, en effectuant un développement limité au deuxième ordre de $y(t)$, on a :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.65)$$

Par différence, l'erreur de consistance est :

$$\tau.c_{n+1} = y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.66)$$

La méthode d'Euler est donc consistante d'ordre 1 car $c_{n+1} = \mathcal{O}(\tau)$.

Pour vérifier l'A-stabilité de la méthode d'Euler explicite, nous considérons le problème homogène linéaire sans force de contact ni amortissement déduit de l'équation (3.24). En appliquant le schéma d'Euler explicite, il vient :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \tau \\ -\tau \omega_{i,k}^2 & 1 \end{bmatrix}}_{M(\tau)} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

L'équation caractéristique permettant de déterminer les valeurs propres de la matrice $M(\tau)$ a la forme générale :

$$\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad (3.68)$$

où $2b = \text{tr}(M)$ et $c = \det(M)$. Les valeurs propres de la matrice M sont :

$$\lambda = 1 \pm i(\tau\omega_{i,k}) \quad (3.69)$$

Pour que les solutions restent bornées, toutes les valeurs propres de la matrice d'amplification $M(\tau)$ doivent vérifier que $|\lambda| \leq 1$. Or, $|\lambda| = \sqrt{1 + (\tau\omega_{i,k})^2} > 1$ quel que soit le pas temporel τ . La méthode d'Euler explicite est donc instable au sens de l'absolue stabilité.

Dans le cas général où la force de contact et l'amortissement modal apparaissent, la formule pour le schéma d'Euler explicite s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\omega_{i,k}\zeta_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{m_i} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i,k,n} \mp G_{i,k} \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

On ne peut bien entendu pas faire l'analyse de stabilité puisque $F_{i,k,n}$ dépend implicitement des $U_{i,k,n}$. Cependant le schéma d'Euler étant instable dans un cas particulier il ne peut pas être un bon schéma dans le cas général.

L'algorithme du schéma d'Euler explicite est présenté dans l'Algorithme 2.

Le schéma d'Euler explicite est le plus simple et le plus rapide parmi tous les schémas, mais il est A-instable quelque soit le pas de temps. Donc, il est peu utilisé à cause de sa faible précision.

Algorithm 2 Algorithme du schéma d'intégration temporelle d'Euler explicite

Initialiser $U_{i,k,0} = 0$, $\dot{U}_{i,k,0} = 0$.
 Boucle sur le temps.
for $n = 1$ to N_t **do**
 Calculer les forces de contact $f_{i,l,n}$.
for $i = 1$ to 2 **do**
for $k = 1$ to M_i **do**
 Calculer les forces modales $F_{i,k,n}$ par (3.17).
 Calculer les variables modales $U_{i,k,n+1}$, $\dot{U}_{i,k,n+1}$ par (3.70).
end for
end for
 Prédire le déplacement $u_{i,l,n+1}$ par (3.8).
end for

La méthode de prédiction-correction

Avec cette méthode, l'intégration $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$ est approximée en utilisant la valeur de prédiction de $f(y)$ à l'instant t_{n+1} [74] :

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \tau f_n \quad (3.71)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt \approx \tau \cdot f(y_{n+1}^*) \quad (3.72)$$

La figure 3.4 illustre la méthode.

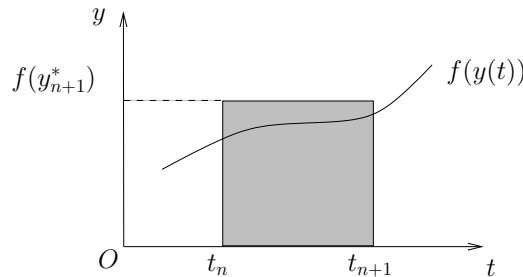


FIGURE 3.4 – Approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$ par la méthode de prédiction-correction

Voici, le calcul de l'erreur de consistance. On écrit d'abord le développement de Taylor-Lagrange limité au troisième ordre de $y(t_{n+1})$:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.73)$$

Puis, la formule (3.72) est utilisée pour calculer la leur \bar{y}_{n+1} :

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau \cdot f(y(t_n) + \tau \cdot \dot{y}(t_n))$$

L'application du développement de Taylor-Lagrange pour le deuxième terme de l'équation ci-dessus nous donne :

$$f(y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n)) = \dot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau) \quad (3.74)$$

La différence entre la valeur exacte $y(t_{n+1})$ et la valeur approximée \bar{y}_{n+1} est :

$$\tau \cdot c_{n+1} = y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1} = \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.75)$$

Donc la méthode de prédiction-corrrection est consistante d'ordre 1 car $c_{n+1} = \mathcal{O}(\tau)$.

En appliquant les formules de la méthode de prédiction-corrrection pour les variables modales de notre problème, on obtient :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1}^* \\ \dot{U}_{i,k,n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\omega_{i,k}\zeta_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{m_i} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i,k,n} + G_{i,k} \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\omega_{i,k}\zeta_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n+1}^* \\ \dot{U}_{i,k,n+1}^* \end{bmatrix} + \frac{\tau}{m_i} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i,k,n+1}^* + G_{i,k} \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

où $F_{i,k,n+1}^*$ est la prédiction de la force modale à l'instant $n+1$ issue des déplacements $U_{i,k,n+1}^*$.

Pour vérifier l'absolue stabilité de la méthode de prédiction-corrrection, on considère le problème simplifié sans force extérieure ni contact ni amortissement. En effectuant les simplifications, on obtient :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1 - \tau^2\omega_{i,k}^2) & \tau \\ -\tau\omega_{i,k}^2 & (1 - \tau^2\omega_{i,k}^2) \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

L'équation caractéristique permettant de déterminer les valeurs propres de la matrice M a la forme générale :

$$\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad (3.79)$$

où $2b = \text{tr}(M)$ et $c = \text{det}(M)$. Les valeurs propres de la matrice M sont,

$$\lambda = (1 - (\tau\omega_{i,k})^2)^2 \pm i\sqrt{(1 - (\tau\omega_{i,k})^2)^2 + (\tau\omega_{i,k})^2 - (1 - (\tau\omega_{i,k})^2)^4} \quad (3.80)$$

En effectuant les transformations mathématiques, on se ramène à $(\tau\omega_{i,k})^2 \leq 1$ soit $\tau \leq \frac{1}{\omega_{i,k}}$.

Le schéma prédiction-corrrection présenté ici est consistant d'ordre 1, conditionnellement stable et convergent.

L'algorithme du schéma de prédiction-corrrection est décrit dans l'algorithme 3. Cet algorithme demande deux fois plus de temps CPU que celle d'Euler explicite, mais il est plus précis et A-stable.

Algorithm 3 Algorithme du schéma d'intégration temporelle prédiction-correction

```

Initialiser  $U_{i,k,0} = 0, \dot{U}_{i,k,0} = 0.$ 
for  $n = 1$  to  $N_t$  do
  Calculer les forces de contact  $f_{i,l,n}.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n}$  par (3.17)..
      Prédire les variables modales  $U_{i,k,n+1}^*, \dot{U}_{i,k,n+1}^*$  par (3.76).
    end for
  end for
  Calculer les forces de contact  $f_{i,l,n+1}^*.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n+1}^*$  par (3.17).
      Prédire les variables modales  $U_{i,k,n+1}, \dot{U}_{i,k,n+1}$  par (3.77).
    end for
  end for
  Sauvegarder le déplacement  $u_{i,l,n+1}$  par (3.8).
end for

```

La méthode de Runge-Kutta 2

La famille de la méthode de Runge-Kutta peut être considérée comme une généralisation de la méthode d'Euler. Elle conserve la structure d'une méthode à un pas, mais on évalue plusieurs fois la fonction f afin d'augmenter la précision. Cependant, l'évaluation de l'erreur de consistance est plus difficile. La formule de la méthode de Runge-Kutta 2 (ou méthode de Heun) est la suivante [28] :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{2} [f(y_n) + f(y_{n+1}^*)] \quad (3.81)$$

où y_{n+1}^* est la valeur de prédiction de $y(t)$ à l'instant t_{n+1} obtenue en utilisant la méthode

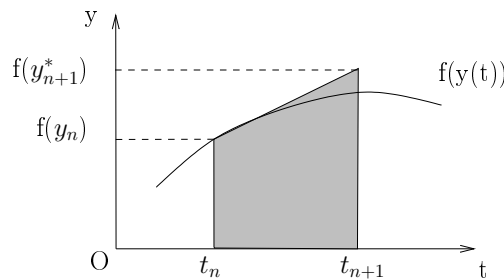


FIGURE 3.5 – Interprétation de la méthode de Runge Kutta d'ordre 2

d'Euler explicite :

$$y_{n+1}^* = y_n + \tau \cdot f(y_n) \quad (3.82)$$

Ensuite, l'erreur de consistance est calculée en utilisant la formule de Taylor-Lagrange. Le développement limité au troisième ordre de $y(t)$ donne :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.83)$$

La valeur approximée \bar{y}_{n+1} est obtenue grâce à l'application de la formule (3.81) en utilisant les valeurs exactes à l'instant t_n :

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \frac{\tau}{2} [f(y(t_n)) + f(y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n))] \quad (3.84)$$

Par la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}[f(y(t))] = f'(y(t)) \times \dot{y}(t) \quad (3.85)$$

Donc en appliquant Taylor-Lagrange à la fonction $\tau \mapsto f(y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n))$:

$$f(y(t_n) + \tau \dot{y}(t_n)) = f(y(t_n)) + \tau f'(y(t_n)) \times \dot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.86)$$

d'où

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \frac{\tau}{2} \cdot (\dot{y}(t_n) + \dot{y}(t_n) + \tau \ddot{y}(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.87)$$

l'erreur de consistance c_{n+1} est :

$$c_{n+1} = \frac{y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}}{\tau} = \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.88)$$

Donc la méthode de Runge-Kutta 2 est consistante d'ordre 2.

En appliquant les formules de la méthode de Runge-Kutta 2 pour calculer les variables modales (le déplacement et la vitesse), on obtient :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1}^* \\ \dot{U}_{i,k,n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\omega_{i,k}\zeta_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{m_i} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i,k,n} + G_{i,k} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\omega_{i,k}\zeta_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n+1}^* + U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n+1}^* + \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{\tau}{2m_i} \begin{bmatrix} 0 \\ F_{i,k,n} + F_{i,k,n+1}^* + 2G_{i,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

Afin d'analyser la stabilité du schéma Runge-Kutta 2, nous effectuons le calcul avec un système sans force extérieure ni contact ni amortissement :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^2}{2} & \tau \\ -\tau(\omega_{i,k})^2 + \frac{\tau^3\omega_{i,k}^4}{2} & 1 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^2}{2} \end{bmatrix}}_{M(\tau)} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Les valeurs propres de la matrice d'amplification M sont :

$$\lambda = 1 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^2}{2} \pm i\sqrt{(\tau\omega_{i,k})^2 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^4}{2}} \quad (3.92)$$

Les modules des valeurs propres $|\lambda| < 1$ si $(\tau\omega_{i,k})^2 - \frac{(\tau\omega_{i,k})^4}{2} > 0$ ou bien $\tau < \frac{\sqrt{2}}{\omega_{i,k}}$. Donc, c'est un schéma conditionnellement stable.

L'algorithme du schéma de Heun est illustré dans Algorithme 4.

Algorithm 4 Algorithme du schéma de Heun

```

Initialiser  $U_{i,k,0} = 0, \dot{U}_{i,k,0} = 0.$ 
for  $n = 1$  to  $N_t$  do
  Calculer les forces de contact  $f_{i,l,n}.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n}$  par (3.17)..
      Calculer les variables modales  $U_{i,k,n+1}^*, \dot{U}_{i,k,n+1}^*$  par (3.89).
    end for
  end for
  Calculer les forces de contact  $f_{i,l,n+1}^*.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n+1}^*$  par (3.17)..
      Prédire les variables modales  $U_{i,k,n+1}, \dot{U}_{i,k,n+1}$  par la formule (3.90).
    end for
  end for
  Calculer et sauvegarder le déplacement  $u_{i,n+1}$  par (3.8).
end for

```

Avec la famille des algorithmes de Runge Kutta, plusieurs calculs de la fonction f sont effectués à chaque pas de temps pour prédire les variables à l'instant t_{n+1} . L'ordre de l'algorithme désigne le nombre de calculs de f à chaque pas de temps. L'intérêt de l'algorithme est de pouvoir atteindre une précision locale d'ordre élevé. Pourtant, plus l'ordre de RK est élevé, plus il demande de temps CPU et plus les formules sont compliquées. De plus, les estimations de la stabilité et de la consistance sont rendues plus difficiles.

La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 - RK4

Cette méthode provient de l'approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$ en calculant $f(y)$ quatre fois par pas de temps. Les formules de la méthode RK4 sont les suivantes [28] :

$$\begin{cases} k_1 = f(y_n) \\ k_2 = f(y_n + \frac{\tau}{2}k_1) \\ k_3 = f(y_n + \frac{\tau}{2}k_2) \\ k_4 = f(y_n + \tau k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{cases} \quad (3.93)$$

Or

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad (3.94)$$

$$\ddot{y}(t) = \dot{y}(t) \times f'(y(t)) \quad (3.95)$$

$$y^{(3)}(t) = \ddot{y}(t) \times f'(y(t)) + \dot{y}^2(t) \times f''(y(t)) \quad (3.96)$$

$$y^{(4)}(t) = y^{(3)}(t) \times f'(y(t)) + 3\dot{y}(t)\ddot{y}(t) \times f''(y(t)) + \dot{y}^3(t) \times f^{(3)}(y(t)) \quad (3.97)$$

$$y^{(4)}(t) = y^{(3)}(t) \times f'(y(t)) + 3\dot{y}(t) \times f'(y(t))f''(y(t)) + \dot{y}^3(t) \times f^{(3)}(y(t)) \quad (3.98)$$

L'erreur de consistance est calculée en utilisant la formule de Taylor-Lagrange et l'application de la méthode de RK4 sur la valeur exacte $y(t_n)$ est comme suit :

$$k_1 = \dot{y}(t_n) \quad (3.99)$$

$$k_2 = \dot{y}(t_n) + \frac{\tau}{2}k_1f'(y(t_n)) + \frac{\tau^2}{8}k_1^2f''(y(t_n)) + \frac{\tau^3}{48}k_1^3f^{(3)}(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.100)$$

$$k_3 = \dot{y}(t_n) + \frac{\tau}{2}k_2f'(y(t_n)) + \frac{\tau^2}{8}k_2^2f''(y(t_n)) + \frac{\tau^3}{48}k_2^3f^{(3)}(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.101)$$

$$k_4 = \dot{y}(t_n) + \tau k_3f'(y(t_n)) + \frac{\tau^2}{2}k_3^2f''(y(t_n)) + \frac{\tau^3}{6}k_3^3f^{(3)}(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.102)$$

Donc

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \frac{\tau}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} &= y(t_n) + \frac{\tau}{6} \left[6\dot{y}(t_n) + \tau(k_1 + k_2 + k_3)f'(y(t_n)) + \frac{\tau^2}{4}(k_1^2 + k_2^2 + 2k_3^2)f''(y(t_n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^3}{24}(k_1^3 + k_2^3 + 4k_3^3)f^{(3)}(y(t_n)) \right] + \mathcal{O}(\tau^5) \end{aligned} \quad (3.104)$$

De plus,

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3\dot{y}(t_n) + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2)f'(y(t_n)) + \frac{\tau^2}{8}(k_1^2 + k_2^2)f''(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.105)$$

$$k_1 + k_2 = 2\dot{y}(t_n) + \frac{\tau}{2}\ddot{y}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.106)$$

$$\frac{\tau}{2}(k_1 + k_2)f'(y(t_n)) = \dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{4}\ddot{y}(t_n)f'(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.107)$$

$$k_1^2 + k_2^2 = 2\dot{y}^2(t_n) + \mathcal{O}(\tau) \quad (3.108)$$

$$\frac{\tau^2}{8}(k_1^2 + k_2^2)f''(y(t_n)) = \frac{\tau^2}{4}\dot{y}^2(t_n)f''(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.109)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3\dot{y}(t_n) + \tau\ddot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{4}\underbrace{[\ddot{y}(t_n)f'(y(t_n)) + \dot{y}^2(t_n)f''(y(t_n))]}_{y^{(3)}(t_n)} + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.110)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3\dot{y}(t_n) + \tau\ddot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{4}y^{(3)}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.111)$$

$$k_1^2 = \dot{y}^2(t_n) \quad (3.112)$$

$$k_2^2 = \dot{y}^2(t_n) + 2\dot{y}^2(t_n)\frac{\tau}{2}f'(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.113)$$

$$k_3^2 = \dot{y}^2(t_n) + 2\tau\dot{y}^2(t_n)f'(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.114)$$

$$k_1^2 + k_2^2 + 2k_3^2 = 4\dot{y}^2(t_n) + 3\tau\dot{y}^2(t_n)f'(y(t_n)) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.115)$$

$$k_1^3 + k_2^3 + 4k_3^3 = 6\dot{y}^3(t_n) + \mathcal{O}(\tau) \quad (3.116)$$

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \frac{\tau}{6}\left[6\dot{y}(t_n) + \tau\left(3\dot{y}(t_n) + \tau\ddot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{4}y^{(3)}(t_n)\right)f'(y(t_n))\right] \quad (3.117)$$

$$+ \frac{\tau^2}{4}\left(4\dot{y}^2(t_n) + 3\tau\dot{y}^2(t_n)f'(y(t_n))\right)f''(y(t_n)) + \frac{\tau^3}{24}\left(6\dot{y}^3(t_n)\right)f^{(3)}(y(t_n))\Big] + \mathcal{O}(\tau^5) \quad (3.118)$$

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau\dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{2}[\dot{y}(t_n)f'(y(t_n))] + \frac{\tau^3}{6}[\ddot{y}(t_n)f'(y(t_n)) + \dot{y}^2(t_n)f''(y(t_n))] \\ + \frac{\tau^4}{24}[y^{(3)}(t_n)f'(y(t_n)) + \dot{y}^2(t_n)f'(y(t_n))f''(y(t_n)) + \dot{y}^3(t_n)f^{(3)}(y(t_n))] + \mathcal{O}(\tau^5) \quad (3.119)$$

d'où

$$\bar{y}_{n+1} = y(t_n) + \tau\dot{y}(t_n) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t_n) + \frac{\tau^3}{6}y^{(3)}(t_n) + \frac{\tau^4}{24}y^{(4)}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^5) \quad (3.120)$$

Par ailleurs, le développement de Taylor-Lagrange limité au quatrième ordre de $y(t_{n+1})$ nous donne :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau y'(t_n) + \frac{\tau^2}{2}\ddot{y}(t_n) + \frac{\tau^3}{6}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}(t_n) + \frac{\tau^4}{24}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}(t_n) + \mathcal{O}(\tau^5) \quad (3.121)$$

L'erreur de consistance de la méthode de RK4 est déduite à partir de la différence de (3.120) et (3.121) :

$$c_n = \frac{y(t_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}}{\tau} = \mathcal{O}(\tau^4) \quad (3.122)$$

Ainsi, la méthode de Runge-Kutta est consistante d'ordre 4.

On va présenter les formules du schéma de Runge-Kutta 4 dans le cas général où la force de contact et l'amortissement modal apparaissent. Les équations à résoudre du problème général sont :

$$\begin{cases} y = f(y) \\ y = \begin{bmatrix} U_{i,k} \\ V_{i,k} \end{bmatrix} \\ f(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\zeta_{i,k}\omega_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k} \\ V_{i,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{i,k}}{m_i} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.123)$$

Selon les formules du schéma de Runge Kutta 4, il faut évaluer quatre fois la valeur $f(y)$ à l'instant t_n à l'instant t_{n+1} . La valeur de la première évaluation de $f(y)$ est notée k_1 :

$$k_1 = f(y_n) \quad (3.124)$$

donc,

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\zeta_{i,k}\omega_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ V_{i,k,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{i,k,n}}{m_i} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

où $\begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{1,2} \end{bmatrix}$ sont les composantes de k_1 .

La valeur de la deuxième évaluation de $f(y)$ est notée k_2 :

$$k_2 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2}k_1\right) \quad (3.126)$$

En introduisant les valeurs intermédiaires, $y_2^{\text{inter}} = \begin{bmatrix} U_2^{\text{inter}} \\ V_2^{\text{inter}} \end{bmatrix} = y_n + \frac{\tau}{2}k_1$, les formules pour calculer $k_2 = f(y_2^{\text{inter}})$ sont :

$$\begin{bmatrix} U_2^{\text{inter}} \\ V_2^{\text{inter}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ V_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{1,2} \end{bmatrix}; \quad (3.127)$$

$$\begin{bmatrix} K_{2,1} \\ K_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\zeta_{i,k}\omega_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2^{\text{inter}} \\ V_2^{\text{inter}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{i,k}(U_2^{\text{inter}})}{m_i} \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

où $\begin{bmatrix} K_{2,1} \\ K_{2,2} \end{bmatrix}$ sont les composantes de k_2 .

La valeur de la troisième évaluation de $f(y)$ est notée k_3 :

$$k_3 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2}k_2\right) \quad (3.129)$$

En introduisant les valeurs intermédiaires, $y_3^{\text{inter}} = \begin{bmatrix} U_3^{\text{inter}} \\ V_3^{\text{inter}} \end{bmatrix} = y_n + \frac{\tau}{2}k_2$, les formules pour calculer $k_3 = f(y_3^{\text{inter}})$ sont :

$$\begin{bmatrix} U_3^{\text{inter}} \\ V_3^{\text{inter}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ V_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{2} \begin{bmatrix} K_{2,1} \\ K_{2,2} \end{bmatrix}; \quad (3.130)$$

$$\begin{bmatrix} K_{3,1} \\ K_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\zeta_{i,k}\omega_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_3^{\text{inter}} \\ V_3^{\text{inter}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{i,k}(U_3^{\text{inter}})}{m_i} \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

où $\begin{bmatrix} K_{3,1} \\ K_{3,2} \end{bmatrix}$ sont les composantes de k_3 .

La valeur de la quatrième évaluation de $f(y)$ est notée k_4 :

$$k_4 = f(y_n + \tau k_3) \quad (3.132)$$

En introduisant les valeurs intermédiaires, $y_4^{\text{inter}} = \begin{bmatrix} U_4^{\text{inter}} \\ V_4^{\text{inter}} \end{bmatrix} = y_n + \tau k_3$, les formules pour calculer $k_4 = f(y_4^{\text{inter}})$ sont :

$$\begin{bmatrix} U_4^{\text{inter}} \\ V_4^{\text{inter}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ V_{i,k,n} \end{bmatrix} + \tau \begin{bmatrix} K_{3,1} \\ K_{3,2} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

$$\begin{bmatrix} K_{4,1} \\ K_{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{i,k}^2 & -2\zeta_{i,k}\omega_{i,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_4^{\text{inter}} \\ V_4^{\text{inter}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_{i,k}(U_4^{\text{inter}})}{m_i} \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

où $\begin{bmatrix} K_{4,1} \\ K_{4,2} \end{bmatrix}$ sont les composantes de k_4 .

Donc, la valeur de y_{n+1} est :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (3.135)$$

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ V_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ V_{i,k,n} \end{bmatrix} + \frac{\tau}{6} \left[\begin{bmatrix} K_{1,1} \\ K_{1,2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} K_{2,1} \\ K_{2,2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} K_{3,1} \\ K_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{4,1} \\ K_{4,2} \end{bmatrix} \right] \quad (3.136)$$

La méthode de Runge Kutta d'ordre 8 - RK8

Il existe des méthodes de Runge Kutta d'ordre très élevé, mais l'ordre de consistance n'augmente pas toujours proportionnellement au numéro de la méthode. Par exemple, la méthode de Runge-Kutta d'ordre 8 consiste à évaluer 8 fois $f(y)$ par pas de temps. Mais,

Algorithm 5 Algorithme du schéma de RK4

Initialiser $U_{i,k,0} = 0, \dot{U}_{i,k,0} = 0$.

for $n = 1$ to N_t **do**

for $j = 1$ to 4 **do**

 Calculer les valeurs intermédiaires $U_{i,k,n}^{inter}, V_{i,k,n}^{inter}$ par (3.127), (3.130), (3.133).

 Calculer les forces de contact $f_{i,l,n}^{inter}$ en fonction de $U_{i,k,n}^{inter}$.

for $i = 1$ to 2 **do**

for $k = 1$ to M_i **do**

 Calculer les forces modales de contact $F_{i,k,n}^{inter}$.

 Calculer les valeurs de $K_{j,1}, K_{j,2}$ par (3.125), (3.128), (3.131) et (3.134).

end for

end for

end for

 Calculer les valeurs $U_{i,k,n+1}, V_{i,k,n+1}$ par (3.136)

 Calculer et sauvegarder le déplacement $u_{i,n+1}$ par (3.8).

end for

elle est consistante d'ordre 6. Les formules de la méthode RK8 se présentent comme suit :

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(y_n) \\
k_2 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{3}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{24}(k_1 + 3k_2)\right) \\
k_4 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{6}(k_1 - 3k_2 + 4k_3)\right) \\
k_5 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{8}(-5k_1 + 27k_2 - 24k_3 + 6k_4)\right) \\
k_6 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{9}(221k_1 - 981k_2 + 867k_3 - 102k_4 + k_5)\right) \\
k_7 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{48}(-183k_1 + 678k_2 - 472k_3 - 66k_4 + 80k_5 + 3k_6)\right) \\
k_8 &= f\left(y_n + \frac{\tau}{82}(716k_1 - 2079k_2 + 1002k_3 + 834k_4 - 454k_5 - 9k_6 + 72k_7)\right)
\end{aligned}$$

Alors :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\tau}{840} [41((k_1 + k_8) + 216(k_3 + k_7) + 27(k_4 + k_6) + 272k_5)] \quad (3.137)$$

La méthode de Newmark

C'est une famille de méthodes implicites introduite par Newmark en 1959. Sa forme générale se présente comme suit [1] :

$$y_{n+1} = y_n + \tau \dot{y}_n + \tau^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{y}_n + \beta \ddot{y}_{n+1} \right] \quad (3.138)$$

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + \tau [(1 - \gamma) \ddot{y}_n + \gamma \ddot{y}_{n+1}] \quad (3.139)$$

La détermination de la consistance de la méthode Newmark est difficile à cause de l'apparition de l'accélération $\ddot{U}_{i,k,n+1}$. Il est convenu qu'il s'agit d'une méthode d'ordre 1 si $\gamma \neq 0.5$ et d'ordre 2 pour $\gamma = 0.5$ [28].

Pour évaluer la stabilité de la méthode de Newmark, on effectue le calcul sur le système non amorti sans contact ni force extérieure :

$$\begin{cases} U_{i,k,n+1} = U_n + \tau \dot{U}_{i,k,n} + \tau^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{U}_{i,k,n} + \beta \ddot{U}_{i,k,n+1} \right] \\ \dot{U}_{i,k,n+1} = \dot{U}_{i,k,n} + \tau \left[(1 - \gamma) \ddot{U}_{i,k,n} + \gamma \ddot{U}_{i,k,n+1} \right] \\ \ddot{U}_{i,k,n+1} = -\omega_{i,k}^2 U_{n+1} \end{cases} \quad (3.140)$$

Après simplifications, on obtient :

$$\begin{bmatrix} (1 + \beta \omega_{i,k}^2 \tau^2) & 0 \\ (\omega_{i,k}^2 \tau \cdot \gamma) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - (\frac{1}{2} - \beta) (\omega_{i,k} \tau)^2) & \tau \\ -\omega_{i,k}^2 \tau (1 - \gamma) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

La relation de récurrence est comme suit :

$$\begin{bmatrix} U_{i,k,n+1} \\ \dot{U}_{i,k,n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + \beta (\tau \omega_{i,k})^2} \begin{bmatrix} 1 - (\frac{1}{2} - \beta) (\tau \omega_{i,k})^2 & \tau \\ \tau \omega_{i,k}^2 (\gamma (\frac{1}{2} - \beta) (\tau \omega_{i,k})^2 - 1) & 1 + (\beta - \gamma) (\tau \omega_{i,k})^2 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} U_{i,k,n} \\ \dot{U}_{i,k,n} \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

L'équation caractéristique permettant de déterminer les valeurs propres a la forme générale :

$$\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0 \quad (3.143)$$

où $2b = \text{tr}(M)$ et $c = \text{det}(M)$.

Pour que les solutions soient bornées, les valeurs propres de la matrice d'amplification M doivent satisfaire la condition $|\lambda| < 1$. Il faut donc avoir :

$$c \leq 1; \quad 1 - 2b + c \geq 0 \quad \text{et} \quad 1 + 2b + c \geq 0 \quad (3.144)$$

où

$$c = 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \frac{(\tau \omega_{i,k})^2}{1 + \beta (\tau \omega_{i,k})^2} \quad 2b = 2 - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \frac{(\tau \omega_{i,k})^2}{1 + \beta (\tau \omega_{i,k})^2} \quad (3.145)$$

Avec $\gamma < \frac{1}{2}$ la méthode est instable. La méthode est inconditionnellement stable avec $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$. Et quand $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\gamma > 2\beta$, la condition de stabilité est $\tau \leq \frac{1}{\omega_{i,k} \sqrt{\gamma/2 - \beta}}$.

La méthode de Newmark est une méthode implicite. À chaque instant considéré $n+1$, elle exige la valeur de l'accélération à l'instant $n+1$ pour calculer le déplacement et la vitesse $U_{i,k,n+1}$ et $\dot{U}_{i,k,n+1}$ selon la formule de l'équation (3.139). Donc, il est nécessaire de réaliser le processus de prédiction-correction. L'accélération est d'abord supposée être égale à celle à l'instant précédent $\ddot{U}_{i,k,n+1} = \ddot{U}_{i,k,n}$, et puis le déplacement u_{n+1}^* est prédit. Ensuite, l'accélération $\ddot{U}_{i,k,n+1}$ est recalculée et le déplacement u_{n+1} est corrigé.

L'algorithme du schéma de Newmark est illustré dans l'Algorithme 6

Algorithm 6 Algorithme du schéma de Newmark

```

Initialiser  $U_{i,k,0} = 0, \dot{U}_{i,k,0} = 0, \ddot{U}_{i,k,0} = 0.$ 
for  $n = 1$  to  $N_t$  do
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les variables modales  $U_{i,k,n+1}^*$  en supposant  $\dot{U}_{i,k,n+1} = \dot{U}_{i,k,n}$ 
    end for
  end for
  Calculer les forces de contact  $f_{i,n+1}.$ 
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    for  $k = 1$  to  $M_i$  do
      Calculer les forces modales  $F_{i,k,n+1}.$ 
      Recalculer les variables modales  $U_{i,k,n+1}, \dot{U}_{i,k,n+1}, \ddot{U}_{i,k,n+1}$  par la formule (3.139).
    end for
  end for
  Calculer et sauvegarder le déplacement et la vitesse  $u_{i,n+1}, v_{i,n+1}.$ 
end for

```

3.2.6 Tableau des schémas d'intégration temporelle

Tous les schémas d'intégration temporelle utilisés dans cette thèse et leurs propriétés sont récapitulés dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Récapitulation des propriétés des schémas d'intégration temporelle

Schéma	un pas/ multiple	Exp/Imp	Consistance	Zéro -stabilité	Conver- gence	Absolue -stabilité
Euler	un pas	Explicite	$\mathcal{O}(\tau)$	Oui	Oui	Instable
Euler 2	un pas	Implicite	$\mathcal{O}(\tau)$	Oui	Oui	$\tau \leq \frac{1}{\omega_i^k}$
RK 2	un pas	Explicite	$\mathcal{O}(\tau^2)$	Oui	Oui	$\tau < \frac{\sqrt{2}}{\omega_i^k}$
RK 4	un pas	Explicite	$\mathcal{O}(\tau^4)$	Oui	Oui	
RK 8	un pas	Explicite		Oui	Oui	
Newmark	un pas	Implicite	$\mathcal{O}(\tau^2)$ si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{3}$ $\mathcal{O}(\tau)$ si $\frac{\alpha}{\beta} \neq 0.5$	Oui	Oui	$\tau \leq \frac{1}{\omega \sqrt{\beta/2 - \alpha}}$ si $\beta \geq 0.5$ & $\beta > 2\alpha$ $\forall \tau$ si $\alpha \geq \beta \geq \frac{1}{2}$
différence -centrée	multiple	Explicite	$\mathcal{O}(\tau^2)$	Oui	Oui	$\tau < \frac{2}{\omega_i^k}$

Tous ces schémas sont intégrés dans le programme Ra2D, il suffit de préciser le nom du schéma lors du lancement de la simulation.

3.2.7 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale des profils continus est maintenant introduite. Le profil i est discrétisé en un ensemble de noeuds notés par $x_{i,l} = \chi.l$ où $l = 1, \dots, N_i$ dans le repère i , χ est le pas spatial, N_i est le nombre total de noeuds discrets. La position verticale statique (ou altitude) du point $x_{i,l}$ est $h_{i,l}$ alors que le déplacement vertical à l'instant

t_n et au noeud $x_{i,l}$ est $u_{i,l,n}$. Ce déplacement vertical $u_{i,k,n}$ est obtenu par composition modale selon l'équation (3.146),

$$u_{i,l,n} = \sum_{k=0}^{M_i} \psi_{i,k}(x_{i,l}) U_{i,k,n}, \quad (3.146)$$

où M_i désigne le nombre de modes du profil i . La force de contact à l'instant t_n et au noeud $x_{i,l}$ est $f_{i,l,n}$. La condition de non-pénétration (3.7) est appliquée seulement sur l'ensemble fini des noeuds [46].

3.2.8 Continuité des surfaces discrétisées

Quand on effectue les calculs numériques, la surface est discrétisée en un ensemble de points $x_0 = 0, x_1 = \chi, \dots, x_N = L$. Seules les altitudes de ces points discrets sont connues $h_{i,l} = h_i(x_{i,l})$. L'interpolation est le procédé d'estimation de l'altitude dans les régions où la surface n'est pas discrétisée. Dans ce but, on approche la surface $h(x)$ par des fonctions mathématiques convenablement choisies,

$$h_i(x_i) = \sum_{l=1}^{N_i} P_l \cdot h_{i,l} \quad (3.147)$$

où P_l est la fonction d'interpolation. Les valeurs obtenues dépendent du nombre de points discrets utilisés et de la fonction choisie.

La qualité du profil interpolé est évaluée par un critère de continuité. Ce critère est présenté comme suit (figure 3.6 [33]),

- Non-continuité : deux courbes voisines ne se rencontrent pas.
- G0-continuité : deux courbes voisines se rencontrent à une extrémité.
- G1-continuité : deux courbes voisines se rencontrent à une extrémité et ont la même tangente au point de rencontre.
- G2-continuité : les profils numériques satisfont la G1-continuité et ont la même courbure au point de rencontre.

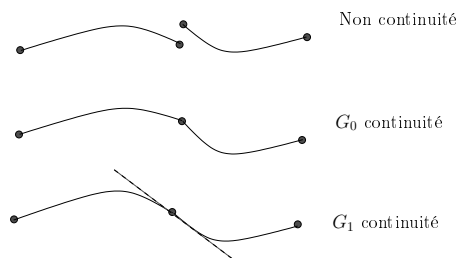


FIGURE 3.6 – Continuité des courbes

Par la suite, deux méthodes d'interpolation sont présentées.

3.2.9 Interpolation linéaire

Cette méthode consiste à interpoler l'altitude à l'abscisse x en fonction des deux points discrétisés les plus proches de x et en utilisant une fonction d'interpolation G_0 -continue selon la formule suivante (figure 3.7) .

$$h_i(x) = \xi \cdot h_{i,l} + (1 - \xi)h_{i,l+1} \quad (3.148)$$

avec $x_{i,l} < x < x_{i,l+1}$ et ξ est définie par :

$$\xi = \frac{x - x_{i,l}}{\chi} \quad (3.149)$$

Cette technique est simple, rapide à programmer et le profil obtenu est G_0 -continu.

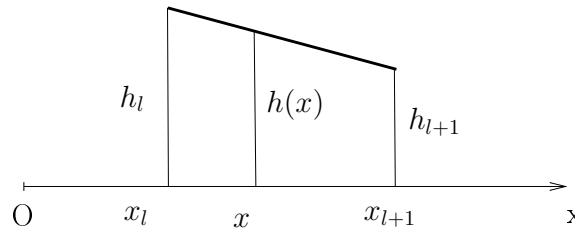


FIGURE 3.7 – Surface interpolée linéairement

3.2.10 Interpolation d'Hermite

La deuxième méthode utilisée est l'interpolation d'Hermite assurant le critère de continuité G_1 . La surface $h(x)$ est interpolée en fonction des quatre noeuds les plus proches de x et par les fonctions d'interpolation cubique [54].

$$h(x) = N_0 \cdot h_{l-1} + N_1 \cdot h_l + N_2 \cdot h_{l+1} + N_3 \cdot h_{l+2} \quad (3.150)$$

$$\begin{cases} N_0(\xi) = -0.5\xi + \xi^2 - 0.5\xi^3, \\ N_1(\xi) = 1 - 2.5\xi^2 + 1.5\xi^3, \\ N_2(\xi) = 0.5\xi + 2\xi^2 - 1.5\xi^3, \\ N_3(\xi) = -0.5\xi^2 + 0.5\xi^3. \end{cases} \quad (3.151)$$

avec $x_l \leq x < x_{l+1}$ et $1 \leq l \leq N - 2$ et $\xi = (x - x_l)/\chi$.

Lorsque $l = 0$ ou $l = N - 1$, on utilise une interpolation linéaire.

Cette méthode garantit la continuité G_1 de la surface interpolée. Ce critère est essentiel pour éviter la discontinuité de l'altitude d'un segment à un autre. L'utilisation d'une interpolation d'Hermite est conseillée car elle permet une bonne précision dans le calcul sans augmenter le nombre de noeuds discrétisés ou diminuer le pas de temps comme l'interpolation linéaire.

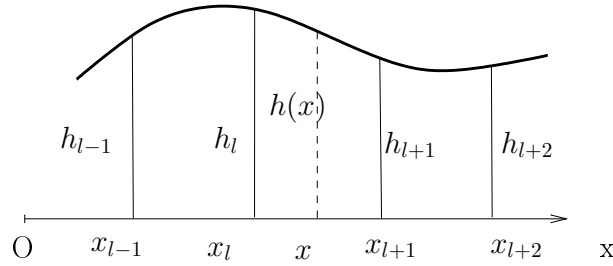


FIGURE 3.8 – Surface interpolée d'Hermite

3.3 Algorithme pour le calcul des forces de contact

3.3.1 Détection du contact

Dans cette section, le procédé de détection des noeuds en contact est présenté. L'algorithme est le "noeud-segment" choisi pour sa rapidité et sa flexibilité [94]. Deux surfaces sont classées surface esclave et surface maître. Les points de la surface esclave peuvent pénétrer dans la surface maîtresse. Comme ce classement n'est pas une propriété physique de la surface, le rôle esclave-maître est échangeable.

Nous désignons i, i' respectivement la surface esclave et la surface maître. Considérons le noeud $x_{i,l}$ de la surface esclave, le segment de la surface maître i' potentiellement en contact avec lui est $l', l' + 1$. Les coordonnées du noeud esclave situé entre les deux extrémités du segment maître :

$$x_{i',l'} \leq x_{i,l} \mp V.t_n < x_{i',l'+1}. \quad (3.152)$$

Le signe dépend du choix du repère (moins pour $i = 1$ et plus pour $i = 2$).

La coordonnée locale de la projection verticale du noeud esclave $x_{i,l}$ sur le segment maître $x_{i',l'}, x_{i',l'+1}$ est :

$$\xi = \frac{x_{i,l} \mp V.t_n - x_{i',l'}}{\chi}. \quad (3.153)$$

Puis, le jeu vertical entre le noeud esclave et le segment maître est calculé en utilisant

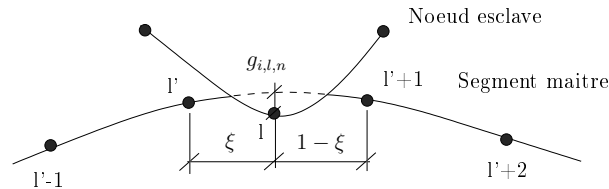


FIGURE 3.9 – Détection du contact par l'algorithme noeud-segment

la fonction d'interpolation. Dans le cas de l'interpolation d'Hermite, il est donné par la formule suivante :

$$g_{i,l,n} = \delta - (h_{i,l} + u_{i,l,n}) - \sum_{r=0}^3 N_r(\xi) (h_{i',l'+r-1} + u_{i',l'+r-1,n}), \quad (3.154)$$

où $N_r(\xi)$ est la fonction d'interpolation définie par l'équation (3.151). Comme l'interpolation d'Hermite requiert la connaissance de l'altitude aux quatre noeuds $l' - 1, l', l' +$

$1, l'+2$, pour les deux segments des extrémités de la surface maître ($l' = 0$ et $l' = N_{l'} - 1$), une interpolation linéaire est plutôt utilisée :

$$g_{i,l,n} = \delta - (h_{i,l} + u_{i,l,n}) - (1 - \xi)(h_{i',l'} + u_{i',l',n}) - \xi(h_{i',l'+1} + u_{i',l'+1,n}). \quad (3.155)$$

Dans ces formules, h est l'altitude des surfaces, u est le déplacement vertical des noeuds, δ est l'écart entre les lignes de référence des surfaces. Si la valeur du jeu est négative $g(x) < 0$, un contact entre ce noeud esclave et la surface antagoniste se produit.

C'est cette partie qui prend le plus de temps CPU dans la simulation, car il faut réaliser deux boucles d'itération : une boucle de deux itérations pour assurer la symétrie du rôle maître/esclave, l'autre sur tous les noeuds de la surface esclave. Plus la discrétisation de la surface est fine, plus cela prend de temps CPU. Après avoir détecté les noeuds en contact, deux algorithmes pour le calcul de la force de contact sont présentés dans la section suivante.

3.3.2 Algorithme de pénalité

Le principe de l'algorithme de pénalité consiste à autoriser une valeur négative nommée pénétration du jeu vertical déterminé par l'équation (3.154) entre un noeud esclave et la surface maître. Puis la force de contact est calculée par une relation explicite avec cette pénétration. Ce procédé est comme si l'on introduisait un ressort fictif dans la surface. Plus le noeud esclave s'enfonce dans la surface, plus la force est importante.

L'équation caractéristique de cet algorithme est [62] :

$$f_{i,l,n} = \kappa \cdot g_{i,l,n} \cdot H(-g_{i,l,n}) \quad (3.156)$$

où $f_{i,l,n}$ est la force de contact appliquée au noeud esclave $x_{i,l,n}$, $g_{i,l,n}$ est le jeu vertical, κ est le coefficient de pénalité et H est la fonction de Heaviside. La représentation graphique de la méthode de pénalité est illustrée figure 3.10. Plus le coefficient de pénalité est grand, plus la pente de la ligne présentant la relation force-pénétration est importante (figure 3.10). Dans cette étude, les surfaces sont homogènes et isotropes, la valeur de κ est la même pour tous les points des surfaces.

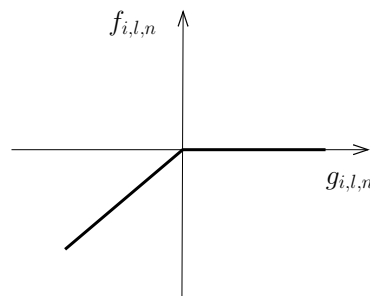


FIGURE 3.10 – Représentation graphique de la méthode de pénalité

Une fois que la force de contact appliquée sur le noeud esclave est déterminée, on calcule les réactions aux noeuds du segment de la surface maître. Il faut que ces réactions

satisfassent à la condition d'équilibre du segment maître considéré. Si l'interpolation d'Hermite est utilisée, les réactions sont définies par :

$$f_{i',l'-1+r,n} = N_r(\xi)f_{i,l,n} \quad \text{avec} \quad r = 0, 1, 2, 3. \quad (3.157)$$

où $N_r(\xi)$ est la fonction d'interpolation donnée par l'équation (3.151).

L'algorithme pour la méthode de pénalité est présenté dans l'Algorithme 7.

Algorithm 7 Algorithme de pénalité

```

Initialiser  $U_{i,k,0} = 0$ ,  $U_{i,k,1} = \mp \frac{G_{i,k}}{m_i} \cdot \frac{\tau^2}{2}$ .
Boucle du temps :
for  $n = 1$  to  $T$  do
  Initialiser  $f_{i,l,n}$ 
  Boucle de la surface maître/esclave
  for  $i = 1$  to  $2$  do
    Calculer le déplacement  $u_{i,l,n}$  par l'équation (3.146)
    for  $l = 1$  to  $N_i$  do
      Déterminer le segment maître  $l'$  et la coordonnée locale  $\xi$  par les
      équations (3.152) et (3.153).
      Calculer  $g_{i,l,n}$  par l'équation (3.154)
      if  $g_{i,l,n} < 0$  then
         $f_{i,l,n} = \kappa \cdot g_{i,l,n}$ 
        Calculer les réactions  $f_{i',l',n}$  par l'équation (3.157)
      end if
    end for
  end for
  Calculer  $F_{i,k,n}$ 
  Calculer  $U_{i,k,n+1}$ ,  $\dot{U}_{i,k,n}$ .
end for

```

Avec cette méthode, le résultat dépend sensiblement du coefficient de pénalité. Quand κ est grand, la pénétration est faible. Toutefois, un coefficient de pénalité trop important provoque des problèmes d'instabilités numériques alors qu'un paramètre trop faible conduit à des pénétrations inacceptables. Une valeur de référence pour le choix du coefficient de pénalité est donnée par Mohammadi [62] : $0.1E < \kappa < 10E$ où E est le module d'Young. Cette méthode est facile à implémenter dans le programme de plus, elle est très rapide. Grâce à ces avantages, on peut l'utiliser pour estimer dans un premier temps les simulations ou effectuer des calculs avec des données de tailles très importantes.

3.3.3 Algorithme des multiplicateurs de Lagrange

Le deuxième algorithme que nous utilisons est l'algorithme des multiplicateurs de Lagrange qui respecte la condition de non-pénétration. Son principe consiste à calculer les forces de contact à l'instant t_n pour garantir la condition de Signorini à l'instant suivant t_{n+1} [21].

Tout d'abord, on évalue la variation du jeu vertical g à l'instant t_{n+1} des noeuds esclaves lorsqu'une variation de force unitaire $\Delta f_{i,l,n} = -1$ est appliquée au noeud $x_{i,l}$ de la surface esclave i . La réaction du segment maître correspondant au $\Delta f_{i,l,n}$ est calculée en utilisant les formules d'interpolation cubique (3.157) :

$$\Delta f_{i',l'-1+r,n} = N_r(\xi) \quad \text{avec} \quad r = 0, 1, 2, 3, \quad (3.158)$$

où ξ est la coordonnée locale du noeud $x_{i,l}$ sur le segment maître l' du profil i' 3.153.

Par la suite, la variation de la force modale est obtenue par une projection modale (3.17) :

$$\begin{cases} \Delta F_{i,k,n} = \chi \cdot \psi_{i,k}(x_{i,l}), \\ \Delta F_{i',k,n} = \chi \cdot \sum_{r=0}^3 N_r(\xi) \cdot \psi_{i',k}(x_{i',l'-1+r}). \end{cases} \quad (3.159)$$

La variation de l'amplitude modale du profil esclave à l'instant t_{n+1} est déduite à l'aide des relations de récurrence des schémas d'intégration temporelle, par exemple dans le cas du schéma aux différences centrées (3.60), on a :

$$\Delta U_{i,k,n+1} = \frac{\tau^2}{m_i} \Delta F_{i,k,n}, \quad (3.160)$$

et de la même manière pour la variation de l'amplitude modale du profil maître $\Delta U_{i',k,n+1}$.

En appliquant l'équation (3.146), la variation du déplacement vertical à un noeud quelconque $x_{i,m}$ du profil esclave est la somme des contributions modales :

$$\Delta u_{i,m,n+1} = \sum_{k=0}^{M_i} \psi_{i,k}(x_{i,m}) \Delta U_{i,k,n+1}. \quad (3.161)$$

et pareillement pour celle du profil maître, où M_i est le nombre de modes de vibration pris en compte dans le calcul.

La variation du jeu vertical à un noeud esclave quelconque $x_{i,m}$ du profil i dû à une force unitaire appliquée à noeud esclave $x_{i,l}$ est calculée selon l'équation (3.154) :

$$\Delta g_{i,m,n+1} = -\Delta u_{i,m,n+1} - \sum_{r=0}^3 N_r(\xi) \Delta u_{i',m'-1+r,n+1} \quad (3.162)$$

où $m', m' + 1$ est le segment maître qui contient la projection verticale du noeud esclave m .

La matrice d'influence $[\Delta]$ est introduite. C'est une matrice de dimension $N_i \times N_i$ dont le composant $\Delta_{m,l}$ est la variation du jeu vertical au noeud esclave $x_{i,m}$ du profil i causée par l'application d'une force de contact unitaire $\Delta f_{i,l,n} = -1$ au noeud esclave $x_{i,l}$:

$$\Delta_{m,l} = \Delta g_{i,m,n+1}. \quad (3.163)$$

En pratique, le nombre de pénétrations prédites noté N_c est beaucoup plus petit que le nombre total de noeuds $N_c \ll N_i$ [38]. Pour optimiser la taille des variables, on introduit le vecteur $\{q\}$ qui contient les indices des noeuds de pénétration en ordre croissant $q_\alpha < q_{\alpha+1}$. Le vecteur $\{e\}$ contient les N_c valeurs de pénétration. Si $q_\alpha = l$, on a $e_\alpha = g_{i,l,n+1}^0$. La matrice d'influence effective $[\Delta']$ de dimension $N_c \times N_c$ est extraite de la matrice d'influence $[\Delta]$:

$$\Delta'_{\alpha,\beta} = \Delta_{q_\alpha,q_\beta}. \quad (3.164)$$

Maintenant, nous précisons les étapes de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Considérons l'instant t_n , la force de contact est initialisée nulle $f_{i,l,n} = 0$. Le jeu vertical $g_{i,l,n+1}^0$ est prédit par les équations (3.60, 3.146 et 3.154) avec la seule force de gravité ($F_{i,k,n} = 0$). Ensuite, le vecteur des multiplicateurs de Lagrange $\{\lambda\}$ est introduit. C'est la variation de la force de contact aux noeuds de pénétration $\lambda_\alpha = \Delta f_{i,q_\alpha,n}$. Afin d'éliminer toutes les pénétrations, nous résolvons le système d'équation linéaire suivant :

$$\{e\} = [\Delta'] \cdot \{\lambda\}. \quad (3.165)$$

La valeur λ obtenue est ensuite utilisée pour corriger la force de contact :

$$f_{i,q_\alpha,n} = f_{i,q_\alpha,n}^0 + \lambda_\alpha. \quad (3.166)$$

Cependant, il n'est pas assuré que toutes les forces de contact obtenues soient répulsives. De plus, de nouvelles pénétrations peuvent se produire avec l'apparition de $f_{i,q_\alpha,n}$. Donc des itérations doivent être effectuées. Mais en pratique, le nombre de noeuds de pénétration est relativement faible par rapport au nombre total de noeuds, et l'écart entre les aspérités en contact est assez grand. Par conséquent, la version à une seule itération de cet algorithme peut être utilisée. Bien qu'il ne reste que quelques noeuds de pénétration, il est capable de fournir des résultats raisonnables. Toutes les étapes expliquées ci-dessus sont décrites dans l'algorithme 8.

Avec cette méthode, la condition de Signorini est respectée. Pourtant, des variables supplémentaires et des systèmes d'équations linéaires sont introduits. Le calcul est donc plus compliqué et demande plus de temps CPU. D'ailleurs le résultat est influencé par le nombre de modes de flexion pris en compte.

3.3.4 Le système masse-ressort

Nous présentons un cas analytique pour montrer le fonctionnement des algorithmes de contact. Soit un système de deux masses m_1, m_2 et deux ressorts k_1, k_2 . δ est l'écart initial entre les deux masses. Il faut trouver la position d'équilibre du système soumis aux forces de gravité P_1 et P_2 .

Le repère Ox est donné figure 3.11, x_{01} et x_{02} désignent respectivement les positions initiales des masses m_1 et m_2 ; x_1, x_2 sont les positions d'équilibre à chercher.

Si les deux masses ne sont pas en contact à la position d'équilibre, les déformations des ressorts sont déduites directement à partir des forces de gravité et des rigidités des ressorts. En revanche, si le contact se produit à la position d'équilibre, il faut calculer d'abord la force de contact, puis la déformation totale des ressorts résulte de la somme de la force de contact et de la force de gravité.

Algorithm 8 Algorithme des multiplicateurs de Lagrange

Initialiser $U_{i,k,0} = 0$, $\dot{U}_{i,k,0} = 0$, $U_{i,k,1} = \mp \frac{G_{i,k}}{m_i} \cdot \frac{\tau^2}{2}$.

Boucle du temps

for $n = 1$ à T **do**

 Supposer $f_{i,l,n}^0 = 0$, prédire $U_{i,k,n+1}^0$, $u_{i,l,n}^0$ par les équations (3.60) et 3.146

 Boucle de surface maître/esclave

for $i = 1$ to 2 **do**

 Calcule la matrice d'influence $[\Delta]$ par les équations (3.159)-(3.162)

 Calcul itératif

for $j = 0, 1, 2, \dots$, jusqu'à la convergence **do**

for $l = 1$ to N_i **do**

 Déterminer le segment maître l' , la coordonnée locale ξ par les équations (3.152), (3.153).

 Calculer le jeu vertical $g_{i,l,n+1}^j$ par l'équation (3.154)

 Initialiser le nombre des pénétrations $N_c = 0$;

if $g_{i,l,n+1}^j > 0$ **then**

$N_c = N_c + 1$, $e_{N_c} = g_{i,l,n+1}^j$, $q_{N_c} = l$, $q'_{N_c} = l'$

end if

end for

 Calculer la matrice d'influence effective $E_{\alpha,\beta} = G_{q_\alpha,q_\beta}$

 Résoudre le système des équations linéaires $[E] \cdot \{\lambda\} = \{e\}$

 Corriger la pression de contact

for $\alpha = 1$ to N_c **do**

if $f_{q_\alpha}^j + \lambda_\alpha < 0$ **then**

$f_{q_\alpha}^{j+1} = f_{q_\alpha}^j + \lambda_\alpha$

 Calculer les réactions aux noeuds de la surface maître par l'équation.

end if

end for

 Corriger $\{g_{i,n+1}^{j+1}\} = [G] \cdot \{f_{i,n}^{j+1}\}$

if Condition de non-pénétration $\{g_{i,n+1}^{j+1}\}$ est tolérable **then**

 Quitter l'itération

else

 Refaire les étapes itératives.

end if

end for

end for

 Corriger $U_{i,k,n+1}$, calculer $\dot{U}_{i,k,n}$, aller au pas de temps prochain

end for

Méthode des multiplicateurs de Lagrange

En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, le système des équations d'équilibre de les conditions de non-pénétration du système s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} k_1(x_{01} - x_1) - P_1 - \lambda & = 0 \\ k_2(x_2 - x_{02}) + P_2 - \lambda & = 0 \\ \lambda & \leq 0 \\ g = \delta - (x_1 + x_2) & \geq 0 \\ \lambda \cdot g & = 0 \end{cases} \quad (3.167)$$

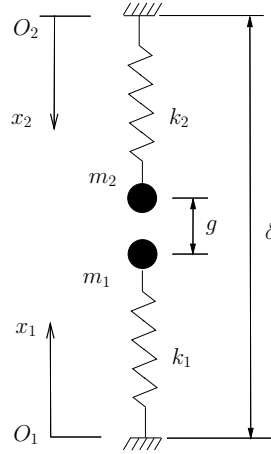


FIGURE 3.11 – Système masse-ressort de deux degrés de liberté.

où λ est le multiplicateur de Lagrange jouant le rôle de la force de contact.

Si les deux masses ne sont pas en contact à la position d'équilibre, le jeu vertical est positif et la force est nulle, donc :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - \delta < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_{01} - \frac{P_1}{k_1} \\ x_2 = x_{02} - \frac{P_2}{k_2} \\ x_{01} + x_{02} - \frac{P_1}{k_1} - \frac{P_2}{k_2} - \delta < 0 \end{cases} \quad (3.168)$$

Si le contact se produit à la position d'équilibre, le jeu vertical est nul, la force de contact est compressive :

$$\begin{cases} \lambda < 0 \\ x_1 + x_2 - \delta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{k_1 x_{01} - k_2 x_{02} + k_2 \delta}{(k_2 + k_1)} - \frac{P_1 + P_2}{(k_2 + k_1)} \\ x_2 = \frac{k_2 x_{02} - k_1 x_{01} + k_1 \delta}{(k_2 + k_1)} + \frac{P_1 + P_2}{(k_2 + k_1)} \\ \lambda = -\frac{k_1 k_2}{(k_2 + k_1)} \left(x_{01} + x_{02} + \frac{P_1}{k_1} - \frac{P_2}{k_2} - \delta \right) \\ x_{01} + x_{02} - \frac{P_1}{k_1} - \frac{P_2}{k_2} - \delta \geq 0 \end{cases} \quad (3.169)$$

Méthode de pénalité

Avec la méthode de pénalité, la condition de non-pénétration est approximée par une relation explicite entre la force de contact et la pénétration fictive :

$$\begin{cases} g = \delta - (x_1 + x_2) \\ -k_1 (x_1 - x_{01}) - P_1 - \epsilon.g.H(-g) = 0 \\ -k_2 (x_2 - x_{02}) + P_2 - \epsilon.g.H(-g) = 0 \end{cases} \quad (3.170)$$

où g est la pénétration entre deux masses, $H(x)$ est la fonction d'Heaviside.

S'il y a contact, on a :

$$\delta - (x_1 + x_2) < 0 \quad (3.171)$$

$$-k_1(x_1 - x_{01}) - P_1 - \epsilon(x_1 + x_2 - \delta) = 0 \quad (3.172)$$

$$-k_2(x_2 - x_{02}) + P_2 - \epsilon(x_1 + x_2 - \delta) = 0 \quad (3.173)$$

La différence de l'équation (3.172) et (3.173) nous donne :

$$k_1(x_1 - x_{01}) - k_2(x_2 - x_{02}) + P_2 + P_1 = 0 \quad (3.174)$$

Alors,

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1}(x_2 - x_{02}) - \frac{P_2 + P_1}{k_1} + x_{01} \quad (3.175)$$

$$x_2 = \frac{k_1}{k_2}(x_1 - x_{01}) + \frac{P_2 + P_1}{k_2} + x_{02} \quad (3.176)$$

Introduit l'équation (3.175) dans (3.173) et l'équation (3.176) dans (3.172), on obtient :

$$\left(\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + (k_1 + k_2)\right) x_2 - \left(\frac{k_1}{\epsilon}\right) (P_2 + k_2 x_{02}) - k_1 \delta - P_1 - P_2 + k_1 x_{01} - k_2 x_{02} = 0 \quad (3.177)$$

$$\left(\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + (k_1 + k_2)\right) x_1 + \left(\frac{k_2}{\epsilon}\right) (P_1 - k_1 x_{01}) - k_2 \delta + P_1 + P_2 + k_2 x_{02} - k_1 x_{01} = 0 \quad (3.178)$$

La solution du système est donc :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{k_2 \delta + k_1 x_{01} - k_2 x_{02} - (P_1 + P_2)}{\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + (k_1 + k_2)} - \left(\frac{k_2}{\epsilon}\right) \left(\frac{P_1 - k_1 x_{01}}{\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + (k_1 + k_2)}\right) \\ x_2 = \frac{k_1 \delta - k_1 x_{01} + k_2 x_{02} + (P_2 + P_1)}{\left(\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + k_1 + k_2\right)} + \frac{k_1}{\epsilon} \frac{P_2 + k_2 x_{02}}{\left(\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + k_1 + k_2\right)} \\ f_{contact} = -\frac{k_1 k_2}{\frac{k_1 k_2}{\epsilon} + (k_1 + k_2)} \left(\frac{P_2}{k_2} - \frac{P_1}{k_1} + x_{01} + x_{02} - \delta\right) \end{cases} \quad (3.179)$$

Quand $\epsilon \rightarrow \infty$ les solutions de la méthode de pénalité sont identiques à celles obtenues par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Pour une étude dynamique, au lieu de la position d'équilibre, il faut chercher les positions de contact entre deux masses qui ne sont pas fixes. Avec l'apparition des forces d'inertie et de l'accélération, la solution devient très compliquée.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode numérique est développée pour l'étude de la vibration induite par le frottement des surfaces rugueuses. Sa chaîne de calcul est résumée dans le diagramme ci-dessous :

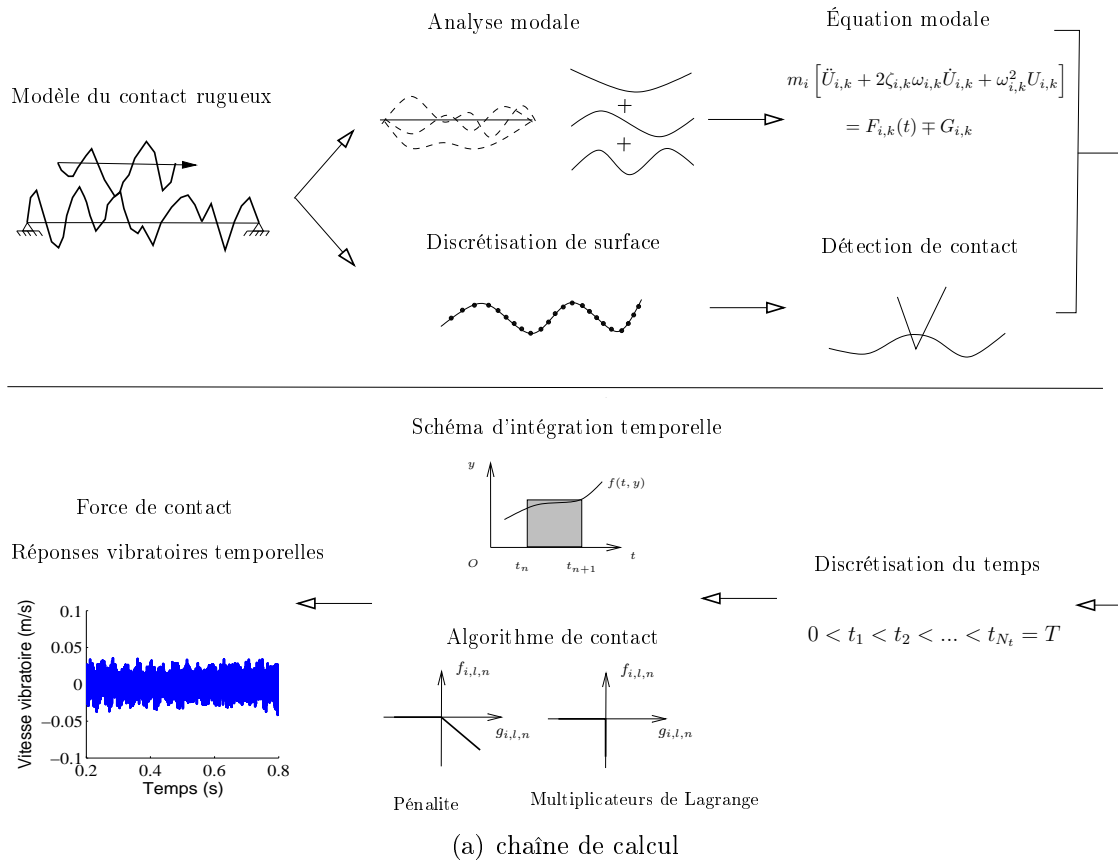


FIGURE 3.12 – chaîne de calcul

Avec cette méthode, on ne doit pas recourir à des hypothèses sur la géométrie des aspérités comme la méthode de Greenwood-Williamson. De plus la surface rugueuse sera décrite précisément en utilisant une discrétisation spatiale à haute résolution. À partir de cette description détaillée, on souhaite capturer les micro-événements situés au niveau des interfaces au cours du glissement, puis caractériser le comportement vibratoire global des solides dans la bande de fréquence audio de [20 Hz à 20 kHz] pour étudier les lois du bruit de rugosité.

En outre, la connaissance des évolutions temporelles des variables dynamiques nous permet de mieux comprendre l'aspect dynamique du contact des surfaces rugueuses ainsi que le processus de transfert d'énergie.

Chapitre 4

Outils numériques

Ce chapitre a pour objectif de détailler les outils numériques qui ont servi à la simulation du problème de contact glissant de deux surfaces rugueuses. Les schémas d'intégration temporelle et les algorithmes de gestion du contact mentionnés dans le chapitre 3 sont implémentés dans un programme en langage C nommé "Ra2D". Sa structure et son fonctionnement seront décrits dans la première partie de ce chapitre. Puis les techniques d'optimisation sont considérées pour minimiser les ressources utilisées (mémoire, stockage, temps d'exécution) par ce programme. Dans la dernière partie du chapitre, nous présenterons la structure du supercalculateur destinée aux calculs hautes performances à Lyon avec laquelle nos simulations ont été réalisées.

4.1 Structure du programme Ra2D

4.1.1 Organigramme

Ra2D est un code de calcul en C dédié à l'étude du comportement vibratoire des solides induits par un contact glissant de surfaces rugueuses, développé au laboratoire LTDS. Le nom "Ra" signifie un paramètre caractérisant la rugosité de la surface, la moyenne arithmétique et "2D" indique que la simulation est réalisée dans le cadre de deux dimensions.

Un calcul mené avec Ra2D consiste à enchaîner un certain nombre d'étapes. D'abord des profils des surfaces rugueuses sont établis dans un fichier **.pro*. Ce profil est obtenu par un générateur numérique. Ensuite, nous préparons un fichier texte de format **.txt* qui contient des paramètres nécessaires à la simulation. Ce fichier est utilisé comme un fichier de données pour le solveur Ra2D. Une fois que l'exécution du programme Ra2D est finie, nous obtenons un fichier de résultat **.ra2*. Ce fichier est traité visuellement en utilisant un programme en Matlab nommé MRa2D. Cette chaîne de calcul est montrée figure 4.1,

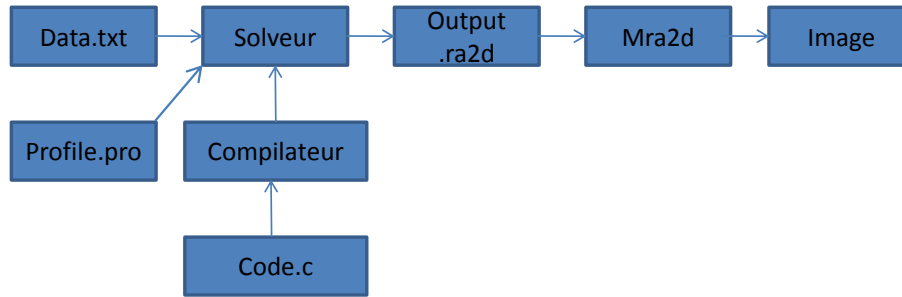


FIGURE 4.1 – Organigramme du programme Ra2D

4.1.2 Conventions

Ra2D utilise le format ASCII pour les fichiers de profils, de données et de résultats.

Règles syntaxiques de base pour les fichiers ASCII

La structure des fichiers ASCII utilisés par le code Ra2D se compose de trois éléments principaux : balises, attributs et commentaires.

Les « balises » sont utilisées pour déclarer les composants racines de la simulation. Le nom de chaque composante racine est mis entre des chevrons `<...>`, la fin est indiquée par une barre oblique de plus `</...>` [22]. Les balises sont séparées entre elles par une ligne blanche. Exemple :

```
<CONTACT>
</CONTACT>
```

Pour chaque composante racine, on a des sous-éléments précisant leur caractéristiques. Ces sous-éléments sont composés d'un nom et d'une valeur liés par le signe "=". Les sous-éléments consécutifs sont séparés par un espace. Exemple :

```
DENSITY=7800 YOUNG=210e9
```

Il est nécessaire de commenter les éléments apparus dans le programme afin de fournir les informations essentielles pour l'utilisateur c'est-à-dire d'assurer la lisibilité du code. Une ligne de commentaires commence par un dièse « # ». Exemple :

```
# Frequency (Hz) of first beam
```

Il est à noter que l'ordre des attributs n'a pas d'importance alors que celui des balises est hiérarchique. D'ailleurs, il faut distinguer les caractères majuscules et minuscules pour la définition des variables. Exemple, "x" et "X" sont deux variables différentes.

Systeme d'unité

Le système d'unité utilisé dans le programme est donné dans le tableau 4.1. Il est nécessaire de convertir toutes les variables en ce système d'unité.

TABLE 4.1 – Vitesse de glissement de la masse

Masse	Longueur	Temps	Force	Pression	Énergie
kg	m	s	N	N/m ²	J

4.1.3 Profil

Génération des profils numériques

Pour générer numériquement les surfaces rugueuses avec les statistiques gaussiennes, on utilise la méthode décrite dans la publication de Garcia et Stoll [34] et le programme de David Bergström.

Tout d'abord on génère un ensemble de valeurs non-corrélées notées $h_u(x)$ qui suivent la loi normale ayant la valeur moyenne nulle et l'écart-type σ (σ est aussi la rugosité quadratique Rq). On écrit $h_u(x) \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$. La densité de probabilité de la distribution gaussienne est donnée par :

$$f(h_u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{h_u-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (4.1)$$

où σ est l'écart-type et μ est la valeur moyenne. En pratique, la génération des valeurs aléatoires selon la loi gaussienne de distribution normale est effectuée en utilisant l'algorithme de Marsaglia implémenté dans la commande "normrnd" du programme Matlab.

Ensuite, un produit de convolution de l'ensemble des valeurs non corrélées $h_u(x)$ avec la fonction de corrélation gaussienne $C(x)$ est effectué pour obtenir le profil gaussien-corrélé noté $h_c(x)$.

La fonction de corrélation gaussienne est :

$$C(x) = e^{-x^2/l_c^2} \quad (4.2)$$

où l_c est la longueur de corrélation dont la définition est donnée dans le chapitre 1.

Le produit de convolution à calculer est :

$$h_c(x) = \frac{\sqrt{l_c}}{(2\pi)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} C(x-\chi) \cdot h_u(\chi) d\chi = \frac{\sqrt{l_c}}{(2\pi)^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\chi)^2/l_c^2} \cdot h_u(\chi) d\chi \quad (4.3)$$

Ce produit de convolution est calculé à l'aide de l'algorithme de la transformée de Fourier. Les transformées de Fourier de $h_c(x)$ et $C(\chi)$ sont d'abord déterminées, puis nous les multiplions et effectuons finalement une transformation de Fourier inverse :

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x-\chi) h_u(\chi) d\chi = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}[C] \cdot \mathcal{F}[h_u]] \quad (4.4)$$

où la transformée de Fourier d'une fonction $\mathcal{F}[f]$ est donnée par :

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (4.5)$$

et la transformée inverse de Fourier \mathcal{F}^{-1} est :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} dx \quad (4.6)$$

Fichier pro

Le profil rugueux utilisé pour la simulation est défini dans un fichier **.pro*. Ce fichier contient une seule colonne dont la deuxième ligne donne le type du profil (gaussien ou sinus) la troisième ligne l'axe de la mesure, les cinquième et sixième lignes précisent respectivement le nombre de noeuds du profil ainsi que le pas spatial en μm . La valeur à la neuvième ligne correspond à l'altitude du point $x = 0$. À partir de la neuvième ligne jusqu'à la fin, ce sont les valeurs d'altitude exprimées en μm des noeuds dans l'ordre croissant de l'abscisse X . Le tableau 4.2 présente un exemple du fichier pro.

TABLE 4.2 – Exemple d'un fichier pro

```
V2
GAUSSIAN
X+
0.00E+00
5          # Nombre de points
8.00E+00  # Pas spatial ( $\mu m$ )
0.00E+00
0.00E+00
11.42     # Altitude  $i = 1$ 
7.81
3.87     ...
0.03
-3.22    # Altitude  $i = 5$ 
```

4.1.4 Fichier de données

Dans la deuxième étape de la chaîne de calcul, on crée un fichier de données incluant tous les paramètres nécessaires à une simulation. Ce fichier doit satisfaire les conventions mentionnées ci-dessous.

À la tête de ce fichier, ce sont les commentaires pour mentionner l'auteur et sa date de création, ensuite nous avons quatre éléments racines présentés dans l'ordre suivant : <UPSOLID>, <DOWNSOLID>, <CONTACT> et <SIMULATION>.

Les balises <UPSOLID> et <DOWNSOLID> sont de même nature, elles décrivent les propriétés géométriques et matériaux des profils supérieur et inférieur respectivement. Les sous-éléments de ces deux éléments racines sont listés comme suit :

- DENSITY est la masse volumique du matériau.
- YOUNG est la valeur du module d'Young du matériau.
- DAMPING est le coefficient d'amortissement du matériau.
- LENGTH est la longueur de la poutre.
- THICKNESS est l'épaisseur de la poutre.
- WIDTH est la largeur de la poutre.
- PROFILE est le nom du fichier **.pro* qui décrit le profil rugueux.
- EDGES précise le type de conditions aux limites. SS désigne une poutre appuyée-appuyée, FF : une poutre libre-libre.

- MODE est le nombre de modes pris en compte dans le calcul.
- GRAVITY précise si la force de gravité est prise en compte dans le calcul (1 : oui, 0 : non).

L'élément racine <CONTACT> et ses sous-éléments détaillent les conditions qui engendrent l'interaction entre les profils,

- SPEED est la valeur de la vitesse de glissement.
- DELTAZ est la valeur de l'écart vertical initial entre les deux profils.
- DELTAX est la position initiale du profil supérieur par rapport au profil inférieur selon l'abscisse X .

L'élément racine <SIMULATION> précise les paramètres numériques choisis par l'utilisateur pour une simulation. Le choix de ces paramètres doit satisfaire la condition de stabilité des schémas algorithmiques en assurant un temps de calcul raisonnable.

- DURATION est la durée de simulation correspondant au temps de glissement du profil supérieur.
- TIMESTEP est le pas de temps.
- SAMPLING est la fréquence d'échantillonnage pour la sauvegarde des résultats.
- PENALTY est la valeur du coefficient de pénalité.

Sur la figure 4.2 est illustré un exemple du fichier des données.

```
# Created by ra2D version 1.00
# DANG, December, 17, 2012
<UPSOLID>
DENSITY=7800 YOUNG=2.10e+11 DAMPING=0.01 LENGTH=0.02 THICKNESS=0.005 WIDTH=1.00 PROFILE=top.pro EDGES=FF MODE=4 GRAVITY=1
</UPSOLID>

<DOWNSOLID>
DENSITY=7800 YOUNG=2.10e+11 DAMPING=0.01 LENGTH=0.40 THICKNESS=0.002 WIDTH=1.00 PROFILE=bottom.pro EDGES=SS MODE=20
GRAVITY=0
</DOWNSOLID>

<CONTACT>
SPEED=1.00e-01 DELTAX=1.00e-01 DELTAZ=3.61e-05
</CONTACT>

<SIMULATION>
DURATION=1.00 TIMESTEP=1.00e-07 SAMPLING=40000 RECORD=40000 CONTACT=enalty PENALTY=1.00e+13
</SIMULATION>
```

FIGURE 4.2 – Fichier de données

4.1.5 Solveur Ra2D

Le solveur Ra2D est écrit en langage C qui est un langage compilé, donc son exécution se fait en trois étapes : écriture du code source avec un éditeur de texte, compilation du code et exécution du programme. Les détails sur la programmation en C sont abondamment décrits dans la littérature.

Le code source du programme Ra2D débuté à partir du 13 mars 2007 comporte aujourd'hui 2500 lignes de code.

La compilation est une succession d'étapes qui transforment le code C en un fichier exécutable par la machine. Nous compilons le programme Ra2D sous Linux en utilisant le compilateur gcc développé par GNU ou icc fourni par INTEL lorsque nous travaillons

avec le centre de calcul Kepler. La ligne de commande est donc :

```
gcc -o Ra2D Ra2D.c -lm -llapack
```

ou

```
icc -o Ra2D Ra2D.c -lm -llapack
```

Ensuite, nous lançons le calcul avec le programme exécutable Ra2D en précisant le fichier de données ainsi que les options précisant le choix des algorithmes et le type de résultats souhaités. La ligne de commande pour exécuter le programme est,

```
./Ra2D [OPTION] [DATAFILE] [OUTPUTFILE]
```

Le programme Ra2D possède au total 7 options

-h, -help affiche le guide d'utilisation.

-v, -version affiche l'information de la version.

-f, -force sauvegarde toutes les forces de contact.

-m, -movie sauvegarde la vibration temporelle des profils

-s, -sound sauvegarde l'audiogramme de la vitesse vibratoire.

-c A, -contact=A fixe l'algorithme de contact, avec A=penalty (par défaut) ou A=lagrange.

-a A, -algo=A fixe le schéma d'intégration temporelle où A=diff, euler, euler2, rk2, rk4, rk8 ou newmark

Un exemple de la commande d'exécution du programme Ra2D est,

```
./Ra2D -a diff -c lagrange -m Elie_Ra5_v10.txt Elie_Ra5_v10.txt.ra2
```

4.1.6 Fichier de résultats

Le fichier de résultats se compose de trois parties principales. La première partie du fichier précise les informations circonstanciées de la simulation présentées sous forme de commentaires tels que le nom et la version du programme utilisée (la première ligne), la date de création à la deuxième ligne, le temps CPU et la machine de calcul à la troisième ligne, le nom et le répertoire racine du fichier de résultats (la quatrième et cinquième ligne). La deuxième partie reprend les éléments donnés pour la simulation de sorte qu'on n'a pas besoin du fichier de données pour reproduire la simulation. La troisième partie contient les résultats de simulation. Les éléments racines de la troisième partie sont présentés comme suit.

```
# Created by ra1D version 1.00
# Date Wed Mar 27 00 :50 :25 2013
# CPU time 1 s on NFV6
# Data file moving_mass.025.txt
# Output file moving_mass.025.txt.LA.ra1
```

```
<UPSOLID>
DENSITY=89.0 YOUNG=1.72e+10 DAMPING=0.00 THICKNESS=1.0 WIDTH=0.02 PROFILE=top.pro
```

```
EDGES=FF MODE=2 GRAVITY=1
</UPSOLID>
```

```
<DOWNSOLID>
DENSITY=3105.0 YOUNG=1.72e8 DAMPING=0.00 THICKNESS=0.25 WIDTH=0.02 PROFILE=bottom.pro
EDGES=SS MODE=3 GRAVITY=0
</DOWNSOLID>
```

```
<CONTACT>
SPEED=1.15 DELTAX=6.32e-6 DELTAZ=1.00e-5
</CONTACT>
```

```
<SIMULATION>
DURATION=1.0 TIMESTEP=5e-6 STEP=2e5 SAMPLING=5 RECORD=5 CONTACT=lagrange ALGORITHM=diff
</SIMULATION>
```

```
<UPPROFILE>
NODE=3 SPACESTEP=1.10 PROFILE=0.0 1.00e-5 0.0
</UPPROFILE>
```

```
<DOWNPROFILE>
NODE=11 SPACESTEP=1.17 PROFILE=0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
</DOWNPROFILE>
```

```
# Frequency (Hz) of first beam
<UPFREQUENCY>
0.0 0.0
</UPFREQUENCY>
```

```
# Frequency (Hz) of second beam
<DOWNFREQUENCY>
1.96e-1 7.82e-1 1.76
</DOWNFREQUENCY>
```

```
# Mode shape (m) of first beam
<UPMODE>
6.74e-1 6.74e-1 6.74e-1
-1.17 0.0 1.17
</UPMODE>
```

```
# Mode shape (m) of second beam
<DOWNMODE>
0.0 1.28e-1 2.43e-1 3.35e-1 3.94e-1 4.14e-1 3.94e-1 3.35e-1 2.43e-1 1.28e-1 5.07e-17
0.0 2.43e-1 3.94e-1 3.94e-1 2.43e-1 5.07e-17 -2.43e-1 -3.94e-1 -3.94e-1 -2.43e-1 -1.01e-16
0.0 3.35e-1 3.94e-1 1.28e-1 -2.43e-1 -4.14e-1 -2.43e-1 1.28e-1 3.94e-1 3.35e-1 1.52e-16
</DOWNMODE>
```

```
# Vibrational velocity of upper solid (m/s)
<SOUND>
0.0 -3.45e-7 -6.63e-2 -1.71e-1 -1.74e-1 -1.75e-1
</SOUND>
```

```
# First vibration (m)
<UPVIBRATION>
0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0
1.91e-3 7.94e-3 1.40e-2
9.52e-3 2.45e-2 3.94e-2
2.19e-2 4.52e-2 6.86e-2
4.23e-2 7.22e-2 1.02e-1
</UPVIBRATION>
```

```

# Second vibration (m)
<DOWNVIBRATION>
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 -9.66e-3 -1.42e-2 -1.18e-2 -5.25e-3 7.31e-4 2.86e-3 1.32e-3 -1.04e-3 -1.55e-3 -7.76e-19
0.0 -2.42e-2 -3.91e-2 -4.02e-2 -2.97e-2 -1.46e-2 -1.67e-3 5.22e-3 6.29e-3 3.83e-3 1.56e-18
0.0 -3.71e-2 -6.39e-2 -7.38e-2 -6.61e-2 -4.59e-2 -2.16e-2 -1.82e-3 8.06e-3 7.37e-3 3.34e-18
0.0 -5.38e-2 -9.23e-2 -1.07e-1 -9.95e-2 -7.86e-2 -5.47e-2 -3.46e-2 -1.99e-2 -9.11e-3 -3.46e-18
</DOWNVIBRATION>

# First force (N/m)
<UPFORCE>
NUMBER=9
-3.34e1 -3.42e1 -3.42e1 -3.46e1 -3.46e1 -3.41e1 -3.42e1 -3.54e1 -3.55e1
</UPFORCE>

# First power (W/m)
<UPPOWER>
-7.71e-5 -8.67e-1 -4.10 -1.63 -4.49 -2.85 -5.66 -3.78 -5.60
</UPPOWER>

<UPCOL_IND>
1 0 2 0 2 0 2 0 2
</UPCOL_IND>

<UPROW_PTR>
0 1 2 4 6 8 10
</UPROW_PTR>

# Second force (N/m)
<DOWNFORCE>
NUMBER=18
-1.83 -2.96e1 -2.59e1 -6.33 -2.96e1 -2.57 -1.98e1 -1.28e1 -2.36e1
-9.01 -1.32e1 -1.89e1 -1.70e1 -1.52e1 -7.16 -2.62e1 -1.11e1 -2.23e1
</DOWNFORCE>

# Second power (W/m)
<DOWNPOWER>
-0.0 6.84e-5 -0.0 5.11e-1 3.65 2.91e-1 -0.0 7.57e-1 2.75 1.44 -0.0 1.51 2.40 2.62 -0.0 1.80 1.34 3.44
</DOWNPOWER>

<DOWNCOL_IND>
0 1 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3 0 1 2 3
</DOWNCOL_IND>

<DOWNROW_PTR>
0 1 3 7 11 15 19
</DOWNROW_PTR>

```

Dans l'élément racine <SOUND> correspondant à l'option -s du programme Ra2D, on sauvegarde l'évolution temporelle de la vitesse vibratoire en un point précisé. Si Nt est le nombre total des instants de sauvegarde, donc dans cet élément, il y a Nt valeurs. Si l'option -s est omise, le contenu de cet élément est vide.

Dans les éléments racines <UPVIBRATION> et <DOWNVIBRATION> correspondant à l'option -m du programme Ra2D, ce sont les évolutions temporelles de tous les noeuds des deux profils. Nous désignons Nx_1 , Nx_2 le nombre de noeuds des profils supérieur et inférieur. Dans l'élément <UPVIBRATION>, il y a Nt lignes, chaque ligne

contient Nx_1 valeurs. Alors que dans l'élément <DOWNVIBRATION>, il y a aussi Nt lignes, chaque ligne contient Nx_2 valeurs. Si l'option -m est omise, le contenu de ces éléments est vide.

Ensuite, les éléments racines <UPFORCE>, <UPCOL_IND>, <UPROW_PTR> sont utilisés pour stocker les forces de contact exercées sur le glisseur selon le format Yale Sparse Matrix mentionné dans la section 4.2.5. L'élément <UPFORCE> contient les valeurs non-nulles de force. L'élément <UPCOL_IND> contient $Nt + 1$ lignes. Sa ligne n ième précise le numéro dans l'élément racine <UPFORCE> de la première valeur non-nulle à l'instant n ième. Et l'élément <UPROW_PTR> contient Nt lignes, sa ligne j donne les nodes où la force de contact est appliquée.

De même manière, les forces de contact exerçant sur le résonateur sont stockées dans trois éléments racines <DOWNFORCE>, <DOWNCOL_IND>, <DOWNROW_PTR>. Nous rappelons que ces éléments racines de force sont obtenus avec l'utilisation de l'option -f du programme Ra2D.

En fin, la puissance transférée, provoquée par la force de contact est enregistrée dans les éléments racines <UPPOWER> et <DOWNPOWER>.

4.1.7 Traitement des résultats

Les fichiers de résultats sont ensuite traités d'une manière interactive par le programme Matlab nommé MRa2D dont l'interface est présentée figure 4.3. Les quatre fonctions principales de ce programme sont la création des animations, la caractérisation des chocs, l'analyse de la vitesse vibratoire et l'évolution du niveau vibratoire. Les boutons dans la zone "vidéo" permettent de lancer des fonctions graphiques qui créent des vidéos du mouvement des systèmes en se basant sur le contenu de l'élément racine <VIBRATION> du fichier de résultats. Grâce à ces vidéos, on peut visualiser les vibrations des profils induites par les chocs entre aspérités au cours du glissement. Les boutons de la fenêtre "SON" permettent de tracer l'évolution de la vitesse vibratoire en fonction du temps, analysent la densité spectrale de puissance et calculent le niveau vibratoire grâce aux résultats enregistrés dans l'élément racine <SOUND> du fichier de résultats. Dans la fenêtre "FORCE", on trouve des fonctions servant aux calculs statistiques des forces de contact tels que l'histogramme, la fonction cumulative des probabilités (cdf) et la fonction de densité de probabilité (pdf). De plus, ce programme a la capacité de travailler avec de multiples fichiers de résultats ce qui nous autorise à observer l'évolution des variables dynamiques en fonction des paramètres des données : le nombre de modes, le pas de temps, le pas spatial, la rugosité de surface, la vitesse de glissement, le taux d'amortissement.

4.2 Optimisation du programme Ra2D

Avant de réaliser des simulations avec le programme Ra2D, il est nécessaire de l'optimiser et le valider. Dans cette section, nous allons présenter le processus d'optimisation de ce programme qui consiste en les étapes suivantes :

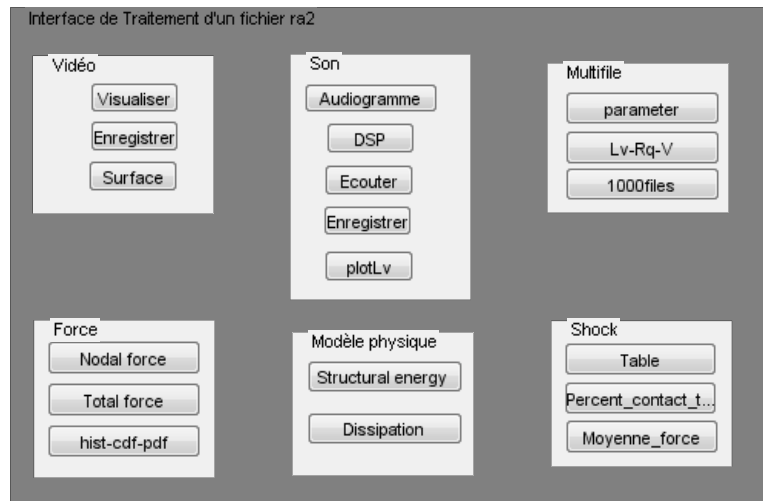


FIGURE 4.3 – Interface du logiciel MRa2D

- D'abord, une simulation de contact entre glisseur et résonateur, avec des dimensions de taille réelle est créée. Mais cette simulation est de courte durée (0.01s). Par conséquent, nous pouvons la refaire plusieurs fois pour observer l'effet de l'optimisation.

- Puis, un outil de profilage est utilisé pour analyser le temps CPU consommé par chaque fonction et chaque ligne du code.

- Seules les fonctions et les lignes qui prennent le plus de temps CPU seront optimisées.

- Ensuite, de multiples techniques d'optimisation pour réduire le temps CPU et la taille de stockage sont abordées.

Pour autant une optimisation trop poussée rendrait le code très illisible, difficile à modifier. Donc changer les algorithmes ou ajouter de nouvelles fonctions devient compliqué. Il est préférable de suivre les indications de Donald Knuth, "On devrait oublier les petites optimisations locales, disons, 97 % du temps : l'optimisation prématurée est la source de tous les maux" [50].

4.2.1 Outil de profilage Perfsuite

Afin de mesurer la performance des codes, l'outil Perfsuite est utilisé [52]. Cet outil nous fournit des informations précises sur la consommation de temps CPU du programme Ra2D : le temps CPU pour la simulation, le temps CPU consommé par chaque fonction dans le programme et surtout il est capable d'indiquer les lignes de code qui consomment le plus de temps CPU. Grâce à ces informations, nous pouvons nous concentrer sur la partie essentielle pour effectuer les optimisations. De plus, l'outil Perfsuite affiche aussi le nombre d'opérations à virgule flottante par seconde (FLOPS) du programme. Plus le nombre de MFLOPS est important, mieux le programme exploite la puissance du super ordinateur. Un exemple d'utilisation de Perfsuite est présenté figure 4.4. Il montre que le calcul de contact par la fonction de pénalité prend le plus de

temps CPU et plus précisément, ce sont les lignes 1840 et 1832 du code qui utilisent 9.40% et 5.48% du temps CPU. La valeur MFLOPS mesurée du programme Ra2D (déjà optimisé) est 1615, le temps CPU du test est 24.45 s. Les informations sur le processeur, la mémoire utilisée, sont également affichées. Après avoir identifié les zones à optimiser en priorité, les techniques principales d'optimisation seront abordées.

```

PerfSuite Hardware Performance Summary Report
Version          : 1.0

Processor and System Information
=====
Brand            : Intel(R) Xeon(R) CPU      X7542 @ 2.67GHz

Statistics
=====
MFLOPS (cycles)..... 1615.476
CPU time (seconds)..... 24.453
% CPU utilization..... 99.697

Function Summary
=====
Samples  Self % Total % Function

   194  50.65%  50.65% penalty_mod
   126  32.90%  83.55% main
    10   2.61%  92.95% __intel_new_memset

Function:File:Line Summary
=====
Samples  Self % Total % Function:File:Line

   74  19.32%  19.32% main:/egypte/dang/ra1D/./src/ra1D-1.00.c:517
   36   9.40%  28.72% penalty_mod:/egypte/dang/ra1D/./src/ra1D-1.00.c:1840
   21   5.48%  40.99% penalty_mod:/egypte/dang/ra1D/./src/ra1D-1.00.c:1832

```

FIGURE 4.4 – Analyse de la performance de code par le programme PerfSuite

4.2.2 Optimisation par compilateur

Un compilateur est un programme informatique qui transforme un code source écrit dans des fichiers texte en un langage machine. Le compilateur C sous UNIX s'appelle « cc » : "gcc" du projet GNU et "icc" fourni par Intel. Il est appelé par la ligne de commande en l'accompagnant d'options de configuration. Les options d'activation pour l'optimisation du compilateur sont : -O1, -O2, -O3 [5]. Les options correspondent à différents types d'optimisation : -O1 à faible optimisation, -O3 à l'optimisation maximale. Le niveau d'optimisation -O2 est compilé par défaut. La ligne de commande que l'on utilise est donc :

```
"gcc -O3 -o Ra2D Ra2D.c"
```

où Ra2D est le nom du programme exécutable, Ra2D.c est la source code en C, icc

est le compilateur C de Intel.

4.2.3 Lapack

Dans notre calcul, il faut souvent résoudre des problèmes d'algèbre linéaire à titre d'exemple : le produit de matrice-vecteur dans l'équation (3.146) ou le système d'équations linéaires dans l'équation (3.165).

Il existe des bibliothèques standards pour gérer l'algèbre linéaire d'une manière efficace et optimisée. Pour notre étude, nous avons choisi deux bibliothèques : BLAS pour la manipulation des vecteurs, matrices et LAPACK pour la réalisation des opérations matricielles [11, 41]. Pour effectuer l'opération en double précision,

$$y := \alpha * A * x + \beta * y$$

la routine *dgemv_* de BLAS avec l'interface langage C est utilisée,

$$dgemv_(trans, m, n, \alpha, A, lda, x, incx, \beta, y, incy); \quad (4.7)$$

où A est une matrice de m lignes et n colonnes, x est un vecteur de n éléments. y est un vecteur de m éléments. α et β sont les scalaires. lda est un entier qui indique le nombre effectif de lignes de A lors de la déclaration de la variable. $incx$, $incy$ sont des entiers qui désignent l'incrément entre éléments successifs de x et y . $trans$ est un caractère ('N' ou 'n' pour utiliser la matrice A ; 'T' ou 't' pour utiliser sa transposée).

Afin de résoudre le système d'équations linéaires,

$$A * x = B \quad (4.8)$$

la routine *dgesv_* de LAPACK avec l'interface langage C est utilisée [10],

$$dgesv_(n, nrhs, A, lda, ipvt, B, ldb, info); \quad (4.9)$$

où A est une matrice de dimensions $lda \times n$, B est une matrice de dimension $ldb \times nrhs$.

Les fonctions de Lapack sont écrites en Fortran, alors que notre programme est en C. Il faut donc effectuer des passages de Fortran en C. Les difficultés viennent essentiellement de deux différences spécifiques du C par rapport au Fortran. Premièrement, en C, le passage des arguments est effectué par valeur, alors que le Fortran les passe par adresse. Deuxièmement, dans le stockage des tableaux à deux dimensions, les éléments sont rangés selon l'ordre "RowMajor" en C tandis que le stockage en Fortran est en "ColMajor".

La ligne de commande pour appeler la bibliothèque Lapack du GNC est donc :

```
"gcc -O3 -o Ra2D Ra2D.c -llapack"
```

4.2.4 Optimisation de l'algorithme

La partie qui prend le plus de temps CPU est la détection du contact. À chaque pas du temps, il faut effectuer deux boucles : l'une pour assurer la symétrie de surface

esclave/maître et l'autre pour vérifier la pénétration de tous les noeuds de la surface esclave. Il faut donc effectuer au total $N_\tau * (N_1 + N_2)$ fois l'algorithme de détection de pénétration, où N_τ est le nombre d'instantants, N_1 et N_2 sont respectivement le nombre de noeuds du résonateur et du glisseur. Avec une durée de simulation de 1 s, un pas de temps $1e-7$ s, un pas spatial $1e-5$ m, la longueur du résonateur est 0.45 m, la longueur du glisseur est 0.02 m, cette valeur est de l'ordre de $1e12$.

À partir de l'équation de la fonction distance verticale l'équation. (3.6), on constate que la zone potentielle de contact est restreinte aux noeuds x_l ayant

$$V.t \leq x_l < \min(L_2 + Vt, L_1) \quad (4.10)$$

Le nombre de ces noeuds est autour de $2 * \min(N_1, N_2)$. Ce nombre est inférieur au nombre total de noeuds des deux surfaces surtout dans le cas $N_1 > N_2$. Donc, une fonction supplémentaire pour déterminer la zone de contact potentielle par l'équation (4.10) est ajoutée au programme Ra2D.

Grâce à l'ajout d'une fonction simple, on réduit considérablement le nombre de réalisations des fonctions de l'algorithme de détection de pénétration en conséquence, le temps CPU est plus court. Cette modification se présente comme un exemple clair d'optimisation de l'algorithme.

4.2.5 Matrice creuse

Un des caractères particuliers du contact entre surfaces rugueuses est que la surface réelle en contact est très petite par rapport à la surface apparente. La matrice de la force de contact contient une fraction significative de zéros. Une telle matrice est appelée matrice creuse.

Pour économiser la consommation de mémoire, la matrice bidimensionnelle classique est remplacée par un autre type de présentation : le format Yale Sparse Matrix (YSM) [31]. Une matrice M de taille $m \times n$ est stockée sous la forme de trois tableaux unidimensionnels A , IA , JA . Le tableau A ne contient que les valeurs non-nulles de la matrice M . Les valeurs sont prises de gauche à droite et de haut en bas. Le tableau JA contient les chiffres précisant l'indice de la colonne des valeurs de A dans la matrice M . Le tableau IA a la taille de $m + 1$ (le nombre de lignes plus un). L'élément i de IA est lié à la ligne i de la matrice M . Il indique la position de la première valeur non nulle à la ligne i de la matrice M dans le tableau A . Prenons un exemple pour mieux illustrer :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} A & = [3 \ 5 \ 1 \ 2 \ 4] \\ IA & = [1 \ 3 \ 5 \ 6] \\ JA & = [2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3] \end{cases}$$

où M est une matrice de taille 3×3 ayant 5 valeurs non-nulles, donc A est le tableau des 5 valeurs non-nulles de matrice M . L'indice de la colonne de ces valeurs est indiqué dans le tableau JA de taille 5, par exemple la valeur $A(2) = 5$ a l'indice de colonne 3 dans la matrice M , donc $JA(2) = 3$, $A(4) = 2$, a l'indice de colonne 2 donc $JA(4) = 2$. Le tableau IA a 4 valeurs. Le premier terme non nul de la première ligne de la matrice M est en première position dans le tableau A donc $IA(1) = 1$, le premier terme non

nul de la deuxième ligne de la matrice M est en troisième position dans le tableau A , donc $IA(2) = 3$, le premier terme non nul de la troisième ligne de la matrice M est en cinquième position dans le tableau A , donc $IA(3) = 5$ et $IA(4) = 6$ est le nombre total des valeurs non nulles plus 1.

En utilisant le format YSM, l'espace mémoire utilisé est optimisé, donc le temps CPU consacré à la lecture et à l'écriture de données est réduit.

4.3 Méso centre

Les résultats numériques présentés dans ce mémoire sont obtenus à l'aide des centres de calcul haute performance de Lyon : le centre de calcul P2CHPD à l'Université Lyon 1 et le centre PMCS2I (Kepler) à l'Ecole Centrale de Lyon [4]. Grâce à ces centres, des milliers de simulations 2D et presque cent simulations 3D du contact dynamique des surfaces rugueuses ont été réalisées, utilisant environ 6000 heures de temps CPU.

Avant de décrire les caractéristiques de ces centres de calcul, nous rappelons d'abord les notions principales d'une machine de calcul.

4.3.1 Matériel d'un ordinateur normal

Un ordinateur quelconque se compose de trois parties principales : le centre de calcul, la mémorisation et la communication.

Le calcul est traité par le processeur (CPU) dont la puissance est caractérisée par le nombre d'opérations en virgule flottante par seconde (FLOPS). Exemple un processeur cadencé à 3 Ghz est capable de réaliser environ 3 milliards d'opérations par seconde. Cependant, une fréquence de fonctionnement élevée entraîne une augmentation de la dissipation thermique. Afin d'augmenter la capacité de calcul évitant une haute température de CPU, les nouvelles technologies cherchent à multiplier le nombre de coeurs par processeur. Par exemple le processeur Intel Xeon 7560 Core i7 (Nehalem-EX) a huit coeurs par processeur.

La mémoire est le composante où les informations sont stockées. Elle est évaluée par sa capacité et son temps d'accès (lecture/écriture). Il existe plusieurs types de mémoires : mémoire de stockage, mémoire dynamique, cache, registre. La mémoire de stockage est un disque magnétique de grande capacité, de coût bas mais ayant un temps d'accès lent. La mémoire dynamique (DRAM) stocke temporairement les données utilisées par les programmes en cours d'exécution. Le cache emmagasine les données auxquels le processeur a récemment accédé. Elle est plus petite que la DRAM mais beaucoup plus rapide et plus chère (de 100 à 10000 fois). La vitesse d'accès à le cache est presque la même que celle des opérations de calcul. Le registre est la mémoire interne d'un processeur. Le temps d'accès au registre est le plus rapide mais sa capacité est la plus limitée. La hiérarchie graphique de la mémoire est présentée figure 4.6.

La communication entre les composantes d'un ordinateur est effectuée par le bus caractérisé par un nombre de bits d'informations qu'il peut transmettre par l'unité

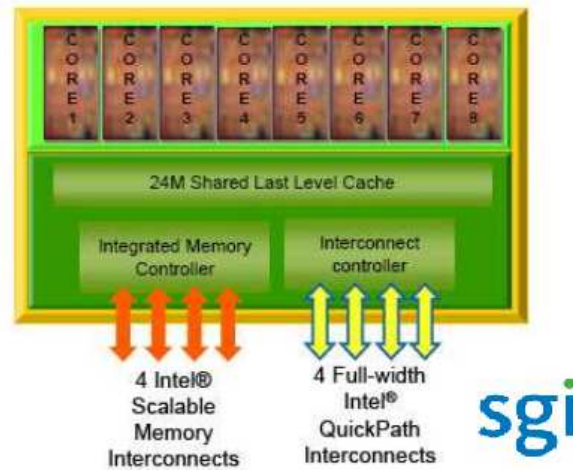


FIGURE 4.5 – Processeur Intel Nehalem, 8 coeurs 2.66 GHz par processeur.

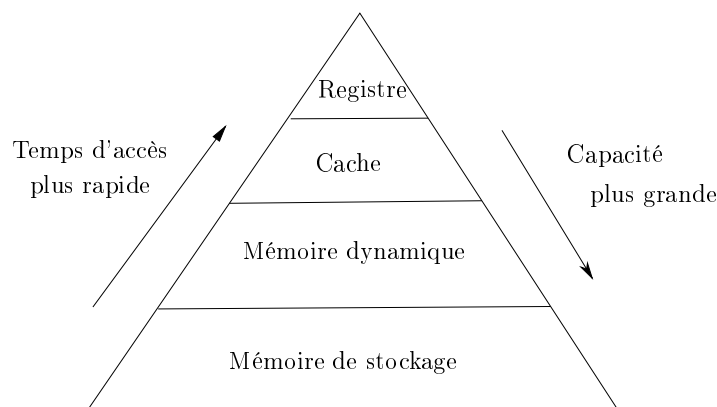


FIGURE 4.6 – Hiérarchie de la mémoire

de temps. Le bus interne ou bus de données relie tous les composants internes d'un ordinateur, tels que le processeur et la mémoire. Le bus externe, ou bus d'expansion, relie les différents dispositifs externes, tels que l'imprimante, clé usb, ... à l'ordinateur.

4.3.2 Machines parallèles

Le supercalculateur est une machine parallèle construite à partir de plusieurs machines de calcul séquentiel. Il est équipé de multiples processeurs, de grandes mémoires ainsi que des techniques spéciales de communication pour rendre cohérentes les données entre les mémoires et pour paralléliser des tâches à différents processeurs.

Du point de vue de la structure de la mémoire, les machines parallèles sont classées en deux types : machines à mémoire partagée et machine à mémoire distribuée. La machine à mémoire distribuée est composée d'un ensemble de noeuds constituant d'un cpu et d'une mémoire locale. Cette mémoire est privée, seuls les processeurs locaux peuvent avoir un accès direct aux mémoires locales. Lorsque le processeur veut prendre les données stockées dans les mémoires de noeuds différents, la technique de communication appelée "transmission des messages" est exécutée via le réseau d'interconnexions.

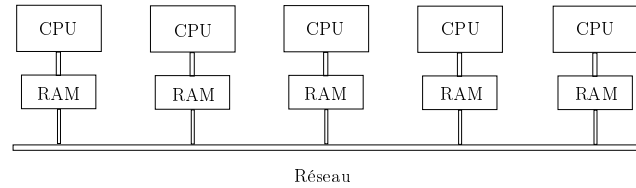


FIGURE 4.7 – Machine parallèle à mémoire partagée

Le deuxième type de machine est celle à mémoire partagée. Elle se compose d'un ensemble de processeurs et d'une mémoire globale. Tous les processeurs peuvent accéder directement à cette mémoire. Grâce à la mémoire globale, la communication, le partage des variables entre les processeurs sont faciles. La réalisation d'une machine à mémoire partagée est peut-être aisée avec peu de processeurs mais avec environ cent processeurs, cette tâche devient compliquée.

Il existe deux architectures pour réaliser une machine à mémoire partagée [19]. La première architecture est appelée l'UMA (universal memory access) où l'accès à la mémoire est le même pour tous les processeurs. Cependant, les architectures de type UMA ne permettent qu'à un nombre relativement restreint de processeurs (en général 2 à 8 processeurs) de partager une mémoire commune (figure 4.8).

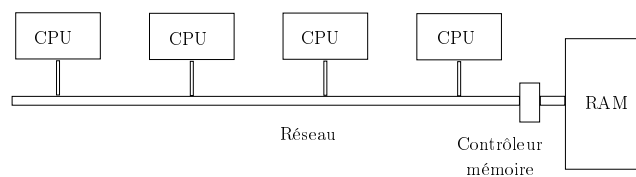


FIGURE 4.8 – Structure UMA de la machine parallèle à mémoire partagée [19]

La deuxième architecture appelée le NUMA (No uniform memory access) qui est l'extension de la structure UMA (figure 4.9) permet d'utiliser un grand nombre de processeurs simultanément. L'accès à la mémoire peut être différent en fonction des processeurs et les zones de mémoires visées.

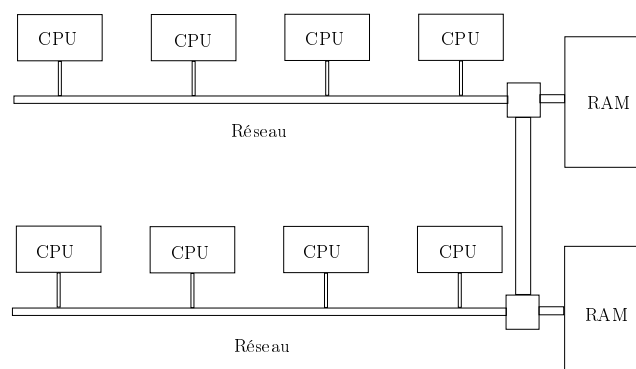


FIGURE 4.9 – Structure NUMA de la machine parallèle à mémoire partagée [19]

4.3.3 Programmation parallèle

Afin de profiter de la puissance de la machine parallèle, des interfaces de programmation parallèle sont développées. Pour la machine à mémoire distribuée, l'interface MPI (Message Passing Interface) est la plus connue, alors que l'interface OpenMP est souvent utilisée pour la machine à mémoire partagée.

MPI

L'interface MPI est basée sur une technique de communication entre processus appelée échange de messages. Elle est implémentée dans les bibliothèques telles que OpenMPI ou MPICH. Le principe est que le problème est décomposé en éléments qui peuvent être traités de façon parallèle par les processus, puis la communication entre eux est effectuée par des fonctions primitives de communication point-à-point (entre deux processus) et d'opérations collectives (entre tous les processus) [88]. Le résultat de l'utilisation MPI dépend de la gestion des processus du programmeur : envoi, réception et synchronisation des messages. Les inconvénients de l'interface MPI sont donc le coût du développement et l'illisibilité du programme.

OpenMP

L'OpenMP (Open Multi-Processing) est une interface de programmation parallèle adaptée à la machine à mémoire partagée. Un programme avec OpenMP est divisé en régions séquentielles et régions parallèles. Toutes les variables déclarées avant la région parallèle sont partagées et celles déclarées à l'intérieur de la région parallèle sont, par défaut, privées. Avec cette interface, la communication des variables est réalisée automatiquement. De plus elle fait partie intégrante de tout compilateur Fortran/C/C++ récent donc elle est facile à implémenter et à déboguer. Pourtant, la mémoire est partagée automatiquement mais non hiérarchique donc la gestion des parallélisations des tâches n'est pas certainement optimisée.

Loi d'Amdahl

Amdahl propose une formule pour estimer l'efficacité de la parallélisation d'un programme. Le code se divise en deux parties : l'une est parallélisée et l'autre est séquentielle (non parallélisable). La formule d'Amdahl est [9] :

$$S = 1/(1 * p + (p/N)) \quad (4.11)$$

où S est le facteur d'accélération. N est le nombre de noeuds. p est le pourcentage de parallélisation du programme. Soit T est le temps CPU pour l'exécution du programme. T_a est le temps CPU amélioré. Donc

$$S = \frac{T}{T_a} \quad (4.12)$$

Sur la figure 4.10 est illustrée la valeur S en fonction du N avec différents pourcentages

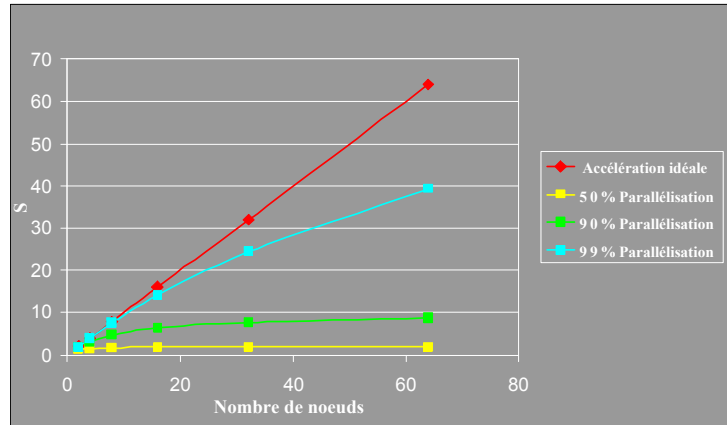


FIGURE 4.10 – Loi d'Amdahl sur l'efficacité de la parallélisation

de parallélisation. Pourtant, ces résultats sont considérés dans le cas où la tâche de calcul est distribuée d'une manière équivalente aux processeurs ou aux threads. Ce cas n'est pas toujours réalisable. L'efficacité dépend donc autant de la structure de la machine que de l'habileté de programmation de l'utilisateur.

4.3.4 Centre de calcul haute performance à Lyon

Les calculs sont effectués à l'aide des centres de calcul haute performance P2CHPD à l'Université de Lyon 1 et PMCS2I à l'Ecole Centrale de Lyon.

Le centre PMCS2I est équipé de 16 noeuds de calcul 2P6C, 192 processeurs Intel nehalem EX, 2.66 GHz, l'interconnexion NUMA links 480 Gb/s, 1To de mémoire SDRAM et 20Tb de stockage. Le refroidissement est effectué par eau. La chaleur générée par les éléments est transférée, via un échangeur thermique, dans le circuit hydraulique puis est évacuée dans l'atmosphère via un dissipateur thermique. Cette technique permet de contrôler précisément le refroidissement des éléments et de centraliser la dissipation thermique dans un endroit approprié. Ce centre est capable d'effectuer $2 \cdot 10^{12}$ opérations par seconde, (2 Tflops). Quant à la configuration logicielle, le système d'exploitation utilisé est basé sur Linux : SUSE Linux Enterprise Server 11 (SLES). C'est le système recommandé par Microsoft et SAP. Pour l'environnement de programmation, plusieurs outils permettant le développement et le déploiement d'applications de calcul intensif sont installés. Ce sont les compilateurs C/C++/Fortran Intel et Gnu, les bibliothèques spéciales comme la bibliothèque de programmation parallèle OpenMP et MPI, SGI, MPICH, MPT, les bibliothèques scientifiques d'Intel MKL, les bibliothèques mathématiques optimisées NAG, l'outil de profilage : perfsuite.

Le centres de calcul haute performance P2CHPD à l'Université Lyon 1 est équipé de 100 serveurs de calcul(900 coeurs), 2.4 To de mémoire, 2 serveurs GPGPU, 50Tb de stockage et le réseau Gigabit pour les données. Le système d'exploitation est Linux : CENTOS 5.7.

La procédure pour travailler avec les méso-centres est présentée sur la figure 4.12. Le code est préparé avec les ordinateurs normaux ensuite il est adapté au mésocentre en modifiant les paramètres par exemple l'augmentation de taille des matrices, de la durée

de simulation, ou la réduction du pas du temps. Puis, le lancement du programme doit être impérativement activé à distance sous mode batch. On ne peut pas travailler de manière interactive avec le méso-centre. Une fois que la simulation et le traitement sont finis, les résultats sont retransmis aux ordinateurs des utilisateurs car le stockage dans le méso-centre est temporaire.

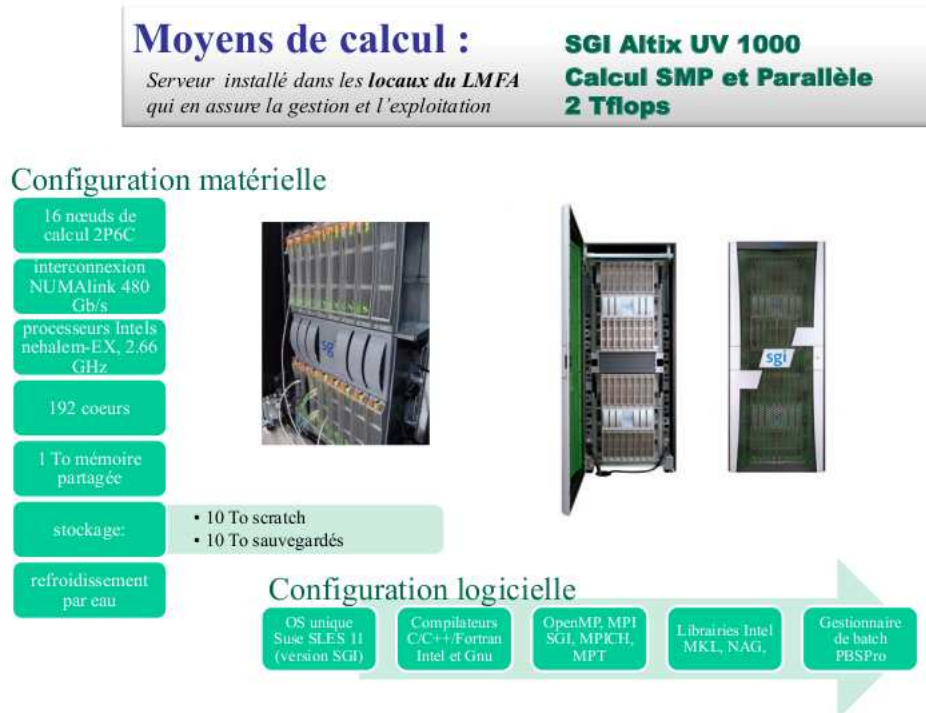


FIGURE 4.11 – Mesocentre de calcul PMCS2I

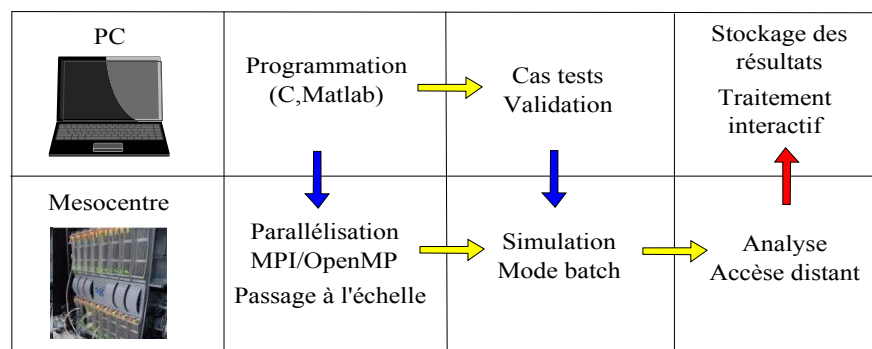


FIGURE 4.12 – Procédure pour travailler avec le méso-centre de calcul

Dans ce chapitre, nous avons décrit un logiciel permettant de modéliser la vibration induite par le contact glissant des surfaces rugueuses. Ce programme est très portable, il peut fonctionner avec seulement un compilateur C et les fichiers en ASCII sans demander d'autres applications supplémentaires. De plus, il est optimisé et conçu avec la programmation en parallèle. C'est pourquoi l'intégration de ce logiciel permet de multiplier rapidement des simulations de contact en bénéficiant des apports matériels du méso-centre de calcul à Lyon.

Chapitre 5

Résultats de simulation

Ce chapitre est dédié aux résultats obtenus par l'approche numérique décrite dans la partie précédente. La première partie concerne la validation du programme Ra2D. La deuxième partie présente les études paramétriques qui déterminent le choix des paramètres optimaux pour les simulations. La dernière partie est consacrée à la présentation et aux commentaires des résultats obtenus par une simulation réaliste.

Les objectifs principaux de la modélisation sont l'analyse statistique des chocs au niveau des aspérités entre les deux profils rugueux l'étude de la réponse vibratoire des solides ainsi que le transfert de l'énergie cinétique à l'énergie vibratoire.

5.1 Validation du programme Ra2D

Avant d'effectuer les simulations, il convient de s'assurer que les résultats fournis par le programme Ra2D sont justes. Cette validation est effectuée à l'aide de cas tests représentatifs. Les cas tests choisis doivent permettre de surveiller les aspects suivants : la réponse vibratoire des solides aux excitations données, le calcul de la force de contact et l'influence des paramètres sur le résultat obtenu.

5.1.1 Poutre soumise à une masse mobile

Pour le premier cas test, on compare Ra2D avec une solution analytique sur le problème de la vibration d'une poutre flexible soumise à l'action d'une masse mobile (voir figure 5.1). Ce problème est souvent utilisé dans le domaine de transport pour examiner la vibration d'un pont lorsque les voitures passent dessus.

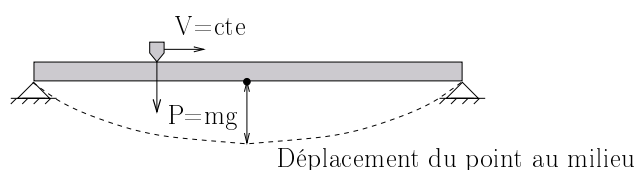


FIGURE 5.1 – Poutre soumise à une masse mobile.

Soit une poutre appuyée aux extrémités, de section rectangulaire possédant les propriétés suivantes : aire de section A , module d'Young E , moment d'inertie I , masse volumique ρ , longueur L . La masse mobile m se déplace à vitesse constante V . Les données numériques du problème sont affichées dans le tableau 5.1. La question est de

TABLE 5.1 – Données du problème de la masse mobile.

Mass (kg)	L (m)	E (N/m ²)	ρ (kg/m ³)	A (m ²)	I (m ⁴)
0.36	11.6	1.7e8	3100	0.005	2.6e-5

TABLE 5.2 – Vitesse de glissement de la masse

V (m/s)	0.57	1.15	2.3	4.6
α	0.125	0.25	0.5	1.0

connaître la flexion de la poutre au cours du glissement de la masse.

Formule analytique

La solution analytique du problème de masse mobile est proposée par M.Olsson en 1991 [66]. L'équation de mouvement de la poutre est

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \delta(x - Vt).P \quad (5.1)$$

avec $P = m.g$

Les conditions aux limites correspondant aux extrémités appuyés sont

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0; \end{cases} \quad (5.2)$$

À l'instant initial, le déplacement et la vitesse vibratoire sont nuls,

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (5.3)$$

En utilisant le principe de séparation des variables, le déplacement est écrit sous forme de la somme des contributions modales,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin(n\pi x/L) \quad (5.4)$$

où $U_n(t)$ et $\sin(n\pi x/L)$ sont l'amplitude modale et la fonction propre de la poutre.

Introduisons cette expression dans l'équation du mouvement en intégrant les fonctions sur la longueur de la poutre, on obtient :

$$\ddot{U}_n(t) + \omega_n^2 U_n(t) = \frac{2P}{\rho AL} \int_0^L \sin(n\pi x/L) \cdot \delta(x - Vt) dx \quad (5.5)$$

où $\omega_n^2 = (n\pi)^4 EI / (\rho AL^4)$, $n = 1, 2, \dots$ et $0 \leq t \leq L/V$.

Ensuite, nous utilisons la propriété concernant l'intégrale de la fonction de Dirac pour ramener la force impulsionnelle mobile à une fonction sinusoïdale :

$$\int_0^L \sin(n\pi x/L) \cdot \delta(x - Vt) \cdot dx = \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (5.6)$$

où $\bar{\omega}_n = n\pi V/L$

Alors, l'équation modale du mouvement s'écrit :

$$\ddot{U}_n(t) + \omega_n^2 U_n(t) = \frac{2P}{\rho AL} \sin(\bar{\omega}_n t) \quad (5.7)$$

En utilisant les condition initiale $U(0) = \dot{U}(0) = 0$, la solution de l'équation (5.7) est :

$$U_n(t) = \begin{cases} \frac{2P}{\rho AL \omega_n^2} \cdot \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cdot (\sin(\bar{\omega}_n t - \beta_n) \sin(\omega_n t)) & \text{si } \beta_n \neq 1 \\ \frac{2P}{\rho AL \omega_n^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin(\bar{\omega}_n t) - \omega_n t \cdot \cos(\omega_n t)) & \text{si } \beta_n = 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

où β_n et le ratio de fréquences défini par $\beta_n = \bar{\omega}_n / \omega_n$.

Ensuite, on introduit des paramètres supplémentaires pour alléger l'écriture de la solution du problème. Le temps de passage de la masse sur la poutre est $\tau = L/V$. Le coefficient adimensionnel α est égal au rapport entre la première période de la poutre et deux fois le temps de passage, $\alpha = T_1 / (2\tau)$, $T_1 = 2/\pi \cdot L^2 \sqrt{\rho A / (EI)}$ (table 5.2).

Alors, le déplacement $u(x, t)$ solution analytique du problème d'une poutre soumise à une masse mobile est :

$$u(x, t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1, n \neq \alpha}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha^2)} \left(\sin\left(\frac{n\pi t}{\tau}\right) - \frac{\alpha}{n} \sin\left(\frac{n^2 \pi t}{\alpha \tau}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] + \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \left[\frac{1}{2\alpha^4} \left(\sin\left(\frac{\alpha \pi t}{\tau}\right) - \frac{\alpha \pi t}{\tau} \cos\left(\frac{\alpha \pi t}{\tau}\right) \right) \sin\left(\frac{\alpha \pi x}{L}\right) \right] \quad (5.9)$$

Solution numérique

La résolution numérique de ce problème de masse mobile avec le programme Ra2D est présentée dans cette sous-section. Les paramètres pour la simulation sont les suivants. Une durée de simulation de 20 s assure un passage complet de la masse mobile sur la

poutre avec toutes les vitesses choisies. Le nombre de modes de la poutre N_m pris en compte dans le calcul est 20. La fréquence maximale est $f_{20} = 77$ Hz, la fréquence fondamentale est $f_1 = 0.2$ Hz, la période fondamentale est $T_1 = 5.11$ s. La discrétisation temporelle est faite avec un pas de temps $\tau = 5e^{-6}$ s, la poutre est discrétisée en 1160 noeuds avec un pas spatial $\chi = 1e^{-2}$ m. Ces paramètres sont récapitulés dans le tableau 5.3.

TABLE 5.3 – Paramètres de simulation du problème de la masse mobile

Pas spatial (m)	Pas de temps (s)	Durée (s)	Temps CPU (s)	f_1 (s)	f_{20} (s)	N_m
1e-2	5e-6	20	9	0.2	77	20

La surface est décrite par un ensemble de noeuds discrets. Pourtant, le calcul de la force de contact requiert un profil continu pour la détection du contact donc un processus d'interpolation doit être réalisé. On a deux méthodes d'interpolation présentées dans le chapitre 3 : méthode linéaire et méthode d'Hermite. Avec ce cas test de la masse mobile, nous pouvons étudier l'effet des méthodes d'interpolation sur les résultats obtenus.

En réalité, avec le déplacement d'une voiture sur un pont, il est naturel d'obtenir que le contact entre la voiture et le pont soit continuellement maintenu et la force de contact varie autour du poids propre de la voiture. La figure 5.2 présente trois résultats de force de contact dans le cas $V = 1.15$ m/s en utilisant l'interpolation linéaire et l'algorithme de pénalité, l'interpolation d'Hermite et l'algorithme de pénalité et l'interpolation d'Hermite et l'algorithme de Lagrange.

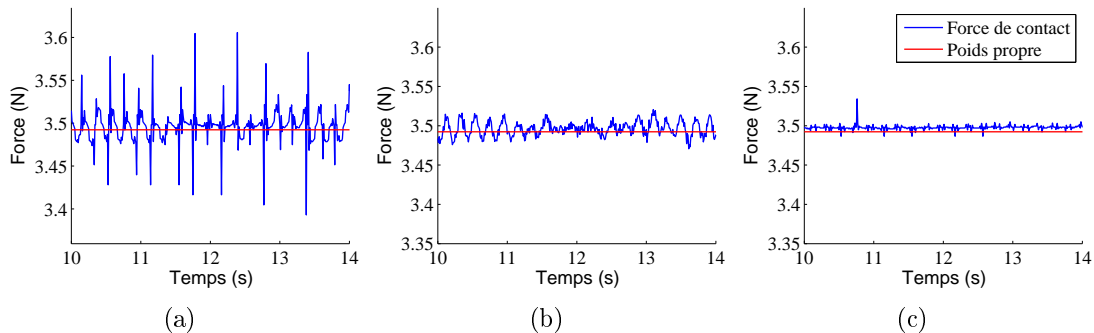


FIGURE 5.2 – Problème de la masse mobile. Force de contact obtenue par le programme Ra2D. (a) Utilisation de l'interpolation linéaire et l'algorithme de pénalité. (b) Utilisation de l'interpolation d'Hermite et de l'algorithme de pénalité. (c) Utilisation de l'interpolation d'Hermite et de l'algorithme des multiplicateurs de Lagrange.

La ligne droite en rouge représente le poids propre de la masse, la ligne oscillante représente la force de contact appliquée à la masse. Dans tous les cas, la force est toujours positive c'est-à-dire que le contact est maintenu.

Beaucoup de fluctuations sont observées avec l'utilisation de l'interpolation linéaire. Alors que l'utilisation de l'interpolation d'Hermite fournit des résultats moins oscillants. La combinaison de l'interpolation d'Hermite et l'algorithme de Lagrange donnent les

valeurs les plus stables. Donc, l'utilisation de l'interpolation d'Hermite est conseillée pour le calcul de la force de contact.

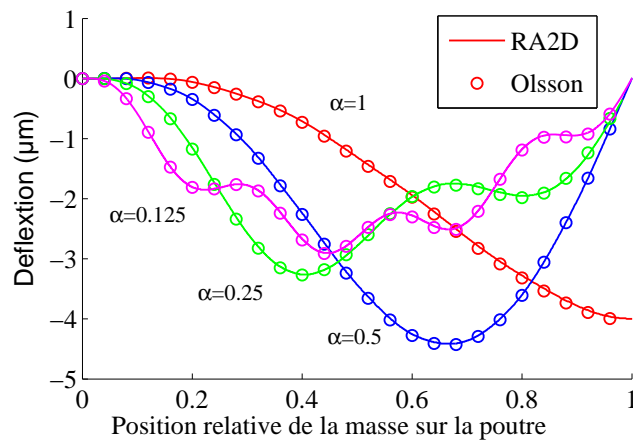


FIGURE 5.3 – Comparaison de la déflexion du point milieu de la poutre obtenue par Ra2D et la solution analytique de Olsson. Quatre vitesses de glissement sont utilisées ($\alpha=0.125$, 0.25 , 0.5 , 1.0 (table 5.2)).

Après d'avoir examiné la force de contact, nous comparons le déplacement du point au milieu de la poutre obtenu par le programme Ra2D et la formule (5.8). Le résultat est illustré dans la figure 5.3. L'abscisse X est la position relative de la masse sur la poutre, l'ordonnée est la déflexion. On a quatre courbes correspondant à 4 vitesses différentes. Avec $\alpha = 0.125$ et 0.25 , on observe respectivement quatre et deux cycles de vibration. Alors qu'avec $\alpha = 0.5$, le temps de passage est exactement égale à T_1 , un cycle complet de vibration se présente. Avec $\alpha = 1$, un demi de cycle de vibration est observé et la déflexion du point au milieu de la poutre atteint sa valeur maximale à la fin du temps de passage. Si $\alpha > 1$, cette déflexion maximale se produit après la passage de la masse mobile. Les résultats sont en parfait accord.

5.1.2 Comparaison avec un logiciel éléments finis

Dans ce deuxième cas test, nous comparons le programme Ra2D avec le code éléments finis ABAQUS, connu et répandu, en particulier pour ses traitements du contact. Le problème appelé "contact à une seule aspérité" consiste en deux surfaces : la surface supérieure possède une seule aspérité alors que la surface inférieure en compte six. Les deux solides sont appuyés aux deux extrémités. La surface supérieure se déplace horizontalement à une vitesse constante alors que celle inférieure est fixe.

Les deux poutres ont les mêmes caractéristiques géométriques et matériaux. Chaque poutre a pour longueur $L=0.01$ m, épaisseur $5e-4$ m, module d'Young $E=2000$ N/m², masse volumique $\rho=2000$ kg/m³, et l'écart initial entre les lignes de référence de deux poutres où l'altitude des noeuds est nulle est $\delta = 1.45e-6$ m. Ces paramètres sont donnés dans le tableau 5.4.

Le profil rugueux des surfaces est décrit par l'ensemble des noeuds discrets dont la coordonnée horizontale et l'altitude verticale sont données dans un fichier texte. Ces

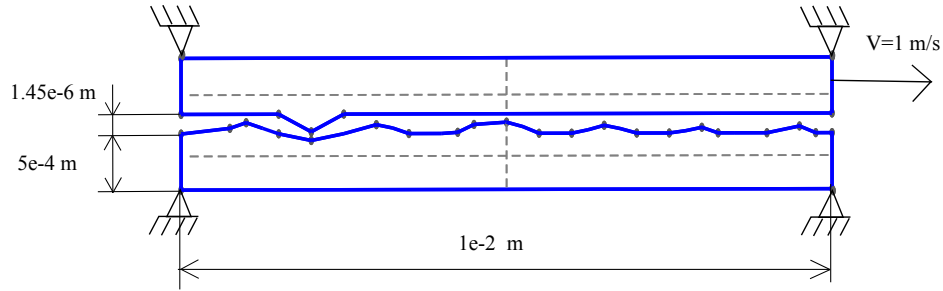


FIGURE 5.4 – Modèle utilisé pour le problème du contact à une seule aspérité

TABLE 5.4 – Paramètres du problème de contact à une seule aspérité

Longueur (m)	Épaisseur (m)	E (N/m^2)	ρ (kg/m^3)	V (m/s)	δ m
0.01	5e-4	5e10	2000	10	1.45e-6

valeurs sont présentées dans les deux tableaux 5.5 et 5.6.

TABLE 5.5 – Profil rugueux de la poutre supérieure

Point	1	2	3	4	5
Altitude (μm)	0.2	0.2	1.0	0.2	0.2

TABLE 5.6 – Profil rugueux de la poutre inférieure

Point	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Altitude (μm)	0.2	0.3	0.5	0.4	0.2	0.4	0.6	0.4	0.3	0.6	0.7

Point	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Altitude (μm)	0.5	0.2	0.5	0.3	0.4	0.3	0.2	0.5	0.3	0.2

Calcul avec le logiciel ABAQUS/EXPLICIT

Le calcul avec un logiciel éléments finis commence par la création des maillages. Le maillage est créé en utilisant le logiciel libre et multi-plateforme nommé Gmsh développé par Christophe Geuzaine et Jean-François Remacle [35]. Puis, il est exporté sous forme d'un fichier de format "*.inp" lisible par ABAQUS.

Le maillage est raffiné au niveau des aspérités de surface et plus grossier vers l'arrière. Le pas spatial au niveau de l'interface est $8e^{-5}$ m. Alors que le pas spatial sur la base de la poutre est $3.33e^{-4}$ m. Le type d'élément utilisé est triangulaire quadratique à 6 noeuds (CPE6M). L'algorithme choisi est la triangulation de Delaunay. Le nombre total de noeuds est 547, le nombre d'éléments est 1130. Le maillage du modèle est présenté figure 5.5.

ABAQUS utilise la structure ASCII pour les fichiers de données. Les différentes fonctions de calcul sont définies à travers des mots clés. Le syntaxe à utiliser pour définir le matériau est :

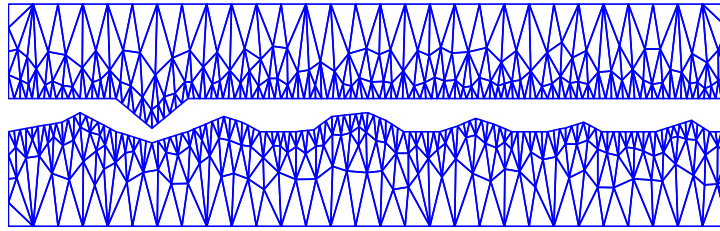


FIGURE 5.5 – Maillage pour le problème de contact d’une seule aspérité

```
*MATERIAL,NAME=STEEL
  *DENSITY
    2000.0
  *ELASTIC
    50.0E9, 0.3
```

Les conditions aux limites sont définies par le mot clé `*BOUNDARY`. Pour la poutre supérieure, le déplacement vertical (l’axe 2 dans ABAQUS) des noeuds aux extrémités est imposé nul. Alors que pour la poutre inférieure, le déplacement des noeuds aux extrémités est nul dans les deux sens, vertical et horizontal (l’axe 1 et 2 dans ABAQUS) :

```
*BOUNDARY
  LEFT_TOP,2,2,0.0
  RIGHT_TOP,2,2,0.0
  LEFT_BOT,1,2,0.0
  RIGHT_BOT,1,2,0.0
```

Le déplacement horizontal de la poutre supérieure a une vitesse constante $V=10$ m/s. Il se traduit par une condition aux limites appliquée à tous les noeuds de la poutre supérieure :

```
*BOUNDARY, TYPE=VELOCITY
  NODE_ALL_TOP, 1, 10.
```

Le contact est géré par l’algorithme de pénalité. Le coefficient de pénalité est $\kappa = 1e12$ N/m². Le syntaxe pour la gestion du contact dans ABAQUS est :

```
*SURFACE BEHAVIOR, PRESSURE-OVERCLOSURE=LINEAR
  1e12
  *CONTACT PAIR, MECHANICAL CONSTRAINT=PENALTY
  SURFACE_TOP, SURFACE_BOT
```

L’analyse du problème commence par la syntaxe `STEP`. Le pas de temps choisi est $1e-8$ s, la durée de simulation est 0.001 s. Ces paramètres sont définis dans le mot clé `DYNAMIC, EXPLICIT` :

```
*STEP
  *DYNAMIC, EXPLICIT, DIRECT USER CONTROL
  1e-8, 0.001
```


Le calcul avec le logiciel ABAQUS est exécuté avec le calculateur Kepler, sous la plateforme UNIX. Dans la ligne de commande, il suffit de préciser le nom du fichier de données, par exemple :

```
/appli/ABAQUS/Commands/ABAQUS job=sixChocs_testcontact
```

Calcul avec le logiciel Ra2D

Les paramètres choisis pour la simulation sont le pas spatial $\xi=8e-5 \mu\text{m}$, le nombre de modes pris en compte dans le calcul est 15, la fréquence maximale de la poutre est $f_{15}=2.55e6 \text{ Hz}$, le pas du temps est $\tau = 1e-8 \text{ s}$. La durée de la simulation est $1e-3 \text{ s}$. Ces paramètres sont récapitulés dans le tableau 5.7.

TABLE 5.7 – Paramètres de simulation du problème de contact à une seule aspérité

Pas spatial (m)	Pas de temps (s)	Durée (s)	δ (m)	f_1 (Hz)	f_{15} (Hz)	Nombre de modes
8e-5	1e-8	1e-3	1.45e-6	1.13e4	2.55e6	15

Ensuite, nous allons étudier l'influence du nombre de modes, le choix du coefficient de pénalité et les algorithmes de contact sur les résultats obtenus. Deux valeurs du coefficient de pénalité sont utilisées, $\kappa = 0.1 E$ et $\kappa = 10 E$, le nombre de modes de vibration varie de 1 à 15.

Les résultats de la comparaison sont présentés figure 5.6. À gauche, c'est le déplacement au sommet de l'aspérité unique de la surface supérieure, alors que la force de contact au même point est présentée à droite. Figure 5.6a présente les résultats obtenus avec le logiciel ABAQUS qui sont utilisés comme référence. La figure 5.6b représente les résultats obtenus en utilisant l'algorithme de Lagrange avec 15 modes de vibration. Nous observons un bon accord avec les valeurs de référence. Les résultats sont également valables avec l'utilisation de l'algorithme de pénalité avec un coefficient $\kappa = 10E$ et 15 modes de vibration (figure 5.6c). Cependant, l'utilisation d'un coefficient de pénalité trop faible $\kappa = 0.1E$ conduit à des résultats inexacts figure 5.6d. La force de contact est trop faible, alors que la durée d'un choc est très longue. La figure 5.6e souligne les défauts quand peu de modes sont pris en compte ($N_m = 1$). La force est surestimée et les informations concernant la vibration à haute fréquence sont filtrées.

Par ailleurs, l'erreur relative notée ρ du déplacement au sommet de l'aspérité sur la surface supérieure obtenue par ABAQUS et Ra2D est calculée. La valeur de l'erreur relative est égale au rapport entre la valeur RMS (moyenne temporelle) de la différence entre les résultats et la valeur RMS obtenue par ABAQUS. Le déplacement utilisé pour le calcul de ρ est pris entre 0 à 0.4s. L'évolution de ρ en fonction du nombre de modes de vibration est tracée sur la figure 5.7. L'augmentation du nombre de modes diminue cette erreur relative. L'erreur relative est considérable pour les nombres de modes inférieurs à 10. Avec plus de 15 modes utilisés, l'erreur relative devient stable et autour de 6%. Cette erreur résiduelle est expliquée par la sensibilité du problème de contact (non-linéaire) aux conditions initiales et les erreurs numériques (erreur d'arrondi et erreur de consistance).

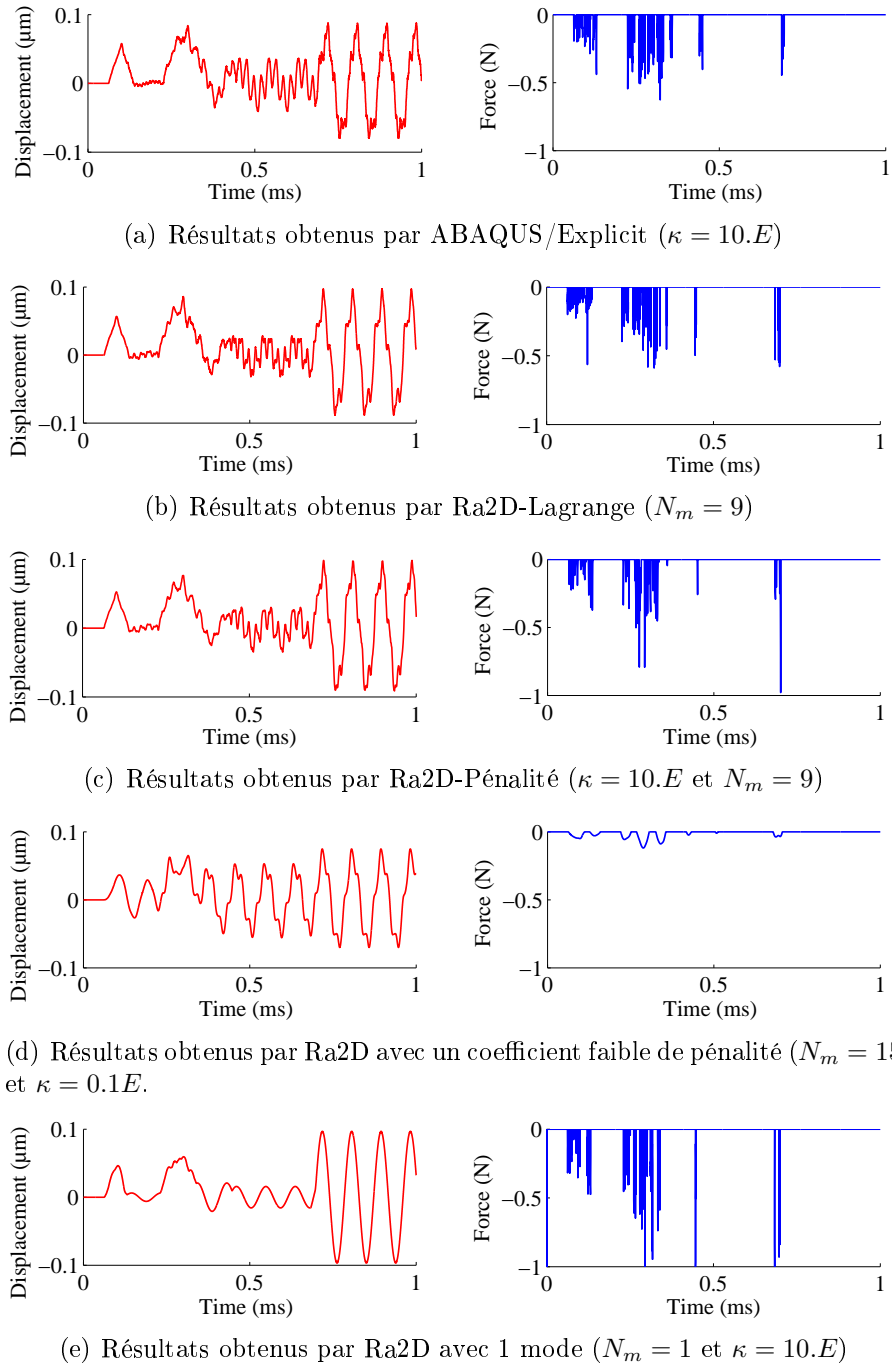


FIGURE 5.6 – Comparaison du déplacement et de la force de contact au sommet de l'aspérité unique de la surface supérieure entre ABAQUS et Ra2D.

Cependant, le programme Ra2D est presque dix fois plus rapide qu'ABAQUS. Le temps d'exécution avec ABAQUS est 280 s, alors qu'avec Ra2D, il faut seulement 30 s.

5.2 Configuration des simulations numériques

Dans cette partie, les simulations sont effectuées avec des données de taille réelle. Nous considérons le système composé d'un glisseur et d'un résonateur comme dans

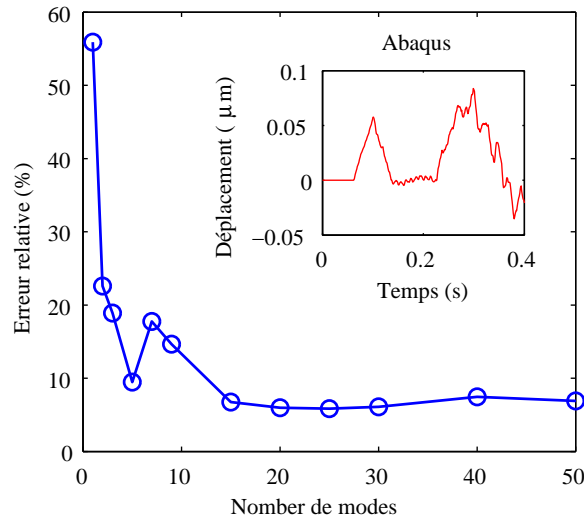


FIGURE 5.7 – Evolution de l’erreur relative du déplacement au sommet de l’aspérité sur la surface supérieure entre ABAQUS et Ra2D en fonction du nombre de modes. Le déplacement de 0 à 0.4s est utilisé pour le calcul de cette erreur relative. L’algorithme de Lagrange est utilisé.

l’expérience présentée chapitre 2. Les données des éprouvettes sont affichées dans le tableau 5.8. ζ dénote l’amortissement modal, ν le coefficient de Poisson, E le module

TABLE 5.8 – Paramètres du problème de contact

Glisseur		Résonateur			Matériaux		
Ra (μm)	Dimensions (m)	Ra (μm)	Dimensions (m)	Amortis- -sement	E (Pa)	ν	ρ (kg/m^3)
1 à 30	$0.02 \times 0.02 \times 0.005$	1 à 30	$0.45 \times 0.30 \times 0.002$	0.0006	$210e^9$	0.3	7800

d’Young. L’épaisseur du résonateur est très faible par rapport aux autres dimensions. La rugosité des éprouvettes varie de 1 à 30 μm . Cependant dans chaque essai, la rugosité est toujours la même pour le glisseur et le résonateur.

En ce qui concerne les paramètres nécessaires à la simulation, il faut fixer la durée de simulation, le pas de temps, le pas spatial, le nombre de modes de vibration pris en compte, le coefficient de pénalité. Ces paramètres sont affichés dans le tableau 5.10. La distance de déplacement du glisseur est la même pour toutes les simulations, donc la durée de chaque simulation dépend de la vitesse de glissement. On prend un pas spatial de 4 μm pour les surfaces numériques. Puisque l’on s’intéresse aux vibrations du résonateur dans la bande audible, le nombre de modes de vibration utilisé est de 30 pour le résonateur ($f_{30}=20900$ Hz).

5.2.1 Choix des paramètres

Dans la simulation, plusieurs paramètres influencent le résultat comme ceux qui décrivent le profil, le pas spatial, le nombre de noeuds, les caractéristiques du matériau utilisé, ou ceux qui servent au calcul, le pas de temps, le coefficient de pénalité. Du point de vue pratique, on peut diviser ces paramètres en deux groupes : ceux fixés pour tous les

TABLE 5.9 – Données du problème glisseur-résonateur

Matériau			Résonateur		Glisseur		
E (<i>Pa</i>)	ρ (<i>kg/m</i>)	η	H (<i>m</i>)	L (<i>m</i>)	H (<i>m</i>)	L (<i>m</i>)	Vitesse (<i>m/s</i>)
210e9	7800	0.0006	0.002	0.45	0.005	0.02	0.02 → 0.7

TABLE 5.10 – Paramètres de simulation du modèle glisseur-résonateur

Pas spatial (μm)	Pas de temps (μs)	Durée (<i>s</i>)	Nombre de modes	Temps CPU (heures)	T_1 <i>s</i>	f_{30} (<i>kHz</i>)
4	0.1	1	30	3	0.044	20.9

calculs et les variables à adapter. Les paramètres communs sont le nombre de modes de vibration appliqué pour les solides, le pas de temps, la durée de simulation, le coefficient de pénalité. Donc afin d'obtenir les bons paramètres, il est nécessaire d'effectuer des suites de tests. Les tests sont effectués avec un profil quelconque, on choisit une rugosité et une vitesse moyenne ni trop grande ni trop petite par exemple $Ra = 5 \mu m$, $v = 0.1$ m/s. Le schéma d'intégration temporelle utilisé est celui des différences centrées qui est rapide et conditionnellement stable.

5.2.2 Surface numérique

Les surfaces numériques sont générées en utilisant la méthode spectrale et le programme de Berstrom. Ses dimensions sont celles des résonateurs et glisseurs utilisés dans les expériences présentées dans le chapitre 2. Le glisseur a une épaisseur de 0.5 cm, une longueur de 2 cm. Le résonateur a une épaisseur de 0.2 cm, une longueur de 45 cm. La rugosité de surface est choisie entre 3 μm et 30 μm . Dans chaque simulation, le glisseur et le résonateur présentent la même rugosité mais pas le même profil. Le paramètre important de la génération des surfaces est le pas spatial, il est fixé à 4 μm . Des extraits de profils simulés et leurs propriétés sont présentés dans la figure 5.8 et la table 6.1.

TABLE 5.11 – Surface rugueuse numérique

Surface	Ra3	Ra5	Ra8	Ra10	Ra20	Ra30
Ra (μm)	3.1	4.8	9.65	9.8	19.1	29.2
Rsk (μm)	-0.04	-0.12	-0.05	-0.08	+0.01	-0.11
Rku (μm)	3.07	3.33	3.10	3.15	3.33	3.06
l_c (μm)	500	500	500	500	500	500

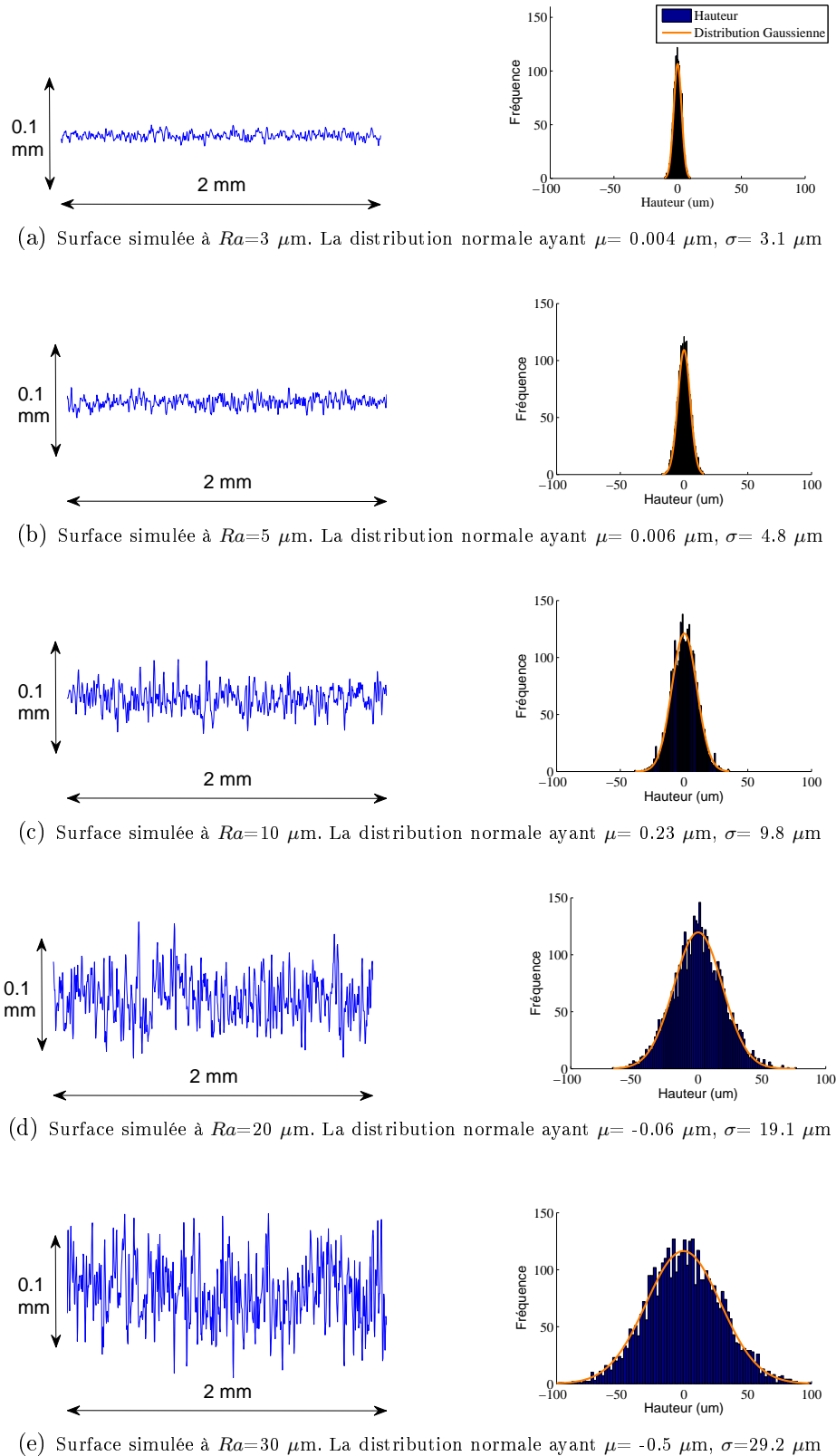


FIGURE 5.8 – Profils numériques, histogramme des hauteurs et courbe d'approximation par une distribution normale.

Nombre de modes de vibration

Le nombre de modes de vibration du résonateur pris en compte dans la simulation est un paramètre important, car il influence directement les résultats. Par ailleurs le

temps CPU requis est proportionnel au nombre de modes. Celui-ci doit donc être choisi au plus juste. Par exemple, en multipliant par deux le nombre de modes, nous doublons au minimum le temps de calcul. Cependant, plus le nombre de modes est important, plus les résultats sont exacts. Pourtant on s'intéresse plutôt aux valeurs statistiques que déterministes. Un nombre de modes suffisamment grand peut assurer la fiabilité des résultats obtenus. Pour déterminer ce nombre, une expérience numérique est réalisée. L'évolution du niveau vibratoire L_v et la valeur moyenne de la pression de contact en fonction du nombre de modes sont étudiés. Le nombre de modes varie de 1 à 100.

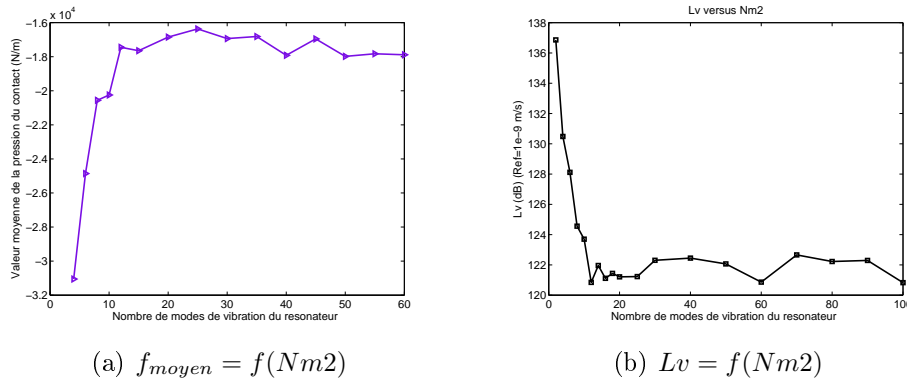


FIGURE 5.9 – Influence du nombre de modes de vibration du résonateur sur les résultats

Selon le critère de stabilité des schémas numériques, la valeur maximale de la fréquence propre influence le choix du pas de temps. C'est-à-dire qu'il faut diminuer le pas de temps lorsque le nombre de modes pris en compte est grand. Comme $Nm_{max} = 100$ ($f_{100} = 5.23e5$ Hz), donc on prend $dt = 1e - 8$ (s). 20 simulations sont réalisées avec différentes valeurs de Nm de 1 à 100. La valeur L_v et la pression de contact maximale sont tracées sur la figure 5.9.

En observant cette figure, on constate qu'avec Nm de 1 à 15, L_v et la pression de contact f évoluent rapidement, alors qu'avec Nm de 20 à 100, les courbes deviennent stationnaires. Cela confirme notre prédiction, avec une valeur suffisamment grande de Nm, on peut atteindre des valeurs statistiques suffisamment exactes. Un nombre de modes Nm=30 ($f_{30} = 20900$ Hz) est choisi pour la totalité des prochaines simulations.

Pas de temps

Après avoir déterminé le nombre de modes de vibration, il est nécessaire de fixer le pas de temps optimal pour que le schéma temporel soit stable et le temps CPU le plus court. Le critère de stabilité du schéma de différences centrées demande $dt \leq 1/(2\pi \cdot f_{max})$ [75]. Avec $f_{30} = 20900$ Hz $\Rightarrow dt \leq 7e^{-6}$.

Par ailleurs, un des buts principaux de cette étude est la capture des chocs entre des aspérités. Cela exige que le pas de temps soit inférieur à la durée de choc [14], la durée de choc est environ de $1e-5$ à $1e-4$ (s).

Un pas de temps $dt = 1e^{-7}$ satisfait donc tous ces critères et il permet d'effectuer les simulations avec un temps CPU raisonnable.

5.3 Résultats numériques

Pour chaque simulation, on obtient les résultats suivants :

- Evolution temporelle de la vitesse vibratoire d'un point fixé.
- Analyse de la densité spectrale de puissance de la vitesse vibratoire.
- Evolution de la force de contact exercée sur le solide en fonction du temps.
- Analyse statistique des chocs : la durée d'un choc entre un noeud et la surface antagoniste, la force de contact maximale pour chaque choc, l'énergie transférée lors du choc, le tableau où les chocs sont précisés : l'instant début, l'instant fin, la position, la force de contact, l'énergie transférée.
- Le niveau vibratoire (Lv).

5.3.1 Le niveau vibratoire

Les vitesses vibratoires obtenues numériquement pour différentes vitesses de glissement et de rugosités de surface sont présentées sur la figure 5.10 pour les cas $Ra=5 \mu m$ et $V=0.1, 0.2$ et 1 m/s et 5.11 pour les cas $V=0.2$ m/s et $Ra=3, 10$ et $30 \mu m$. L'évolution temporelle de la vitesse est présentée à gauche, alors que sa densité spectrale de puissance est à droite. Ces résultats nous permettent d'observer l'intensité de la vitesse ainsi que les composants de son spectre. On constate que l'évolution temporelle de la vitesse a une allure de vibration périodique de moyenne nulle, 4,6 cycles de vibration se produisent pendant 0,2 s (figure 5.10), c'est-à-dire que la période est 0,044 s et elle égale celle de la première période de vibration du résonateur. D'autre part, l'amplitude de la vitesse est augmentée lorsque la vitesse ou la rugosité croissent : les valeurs maximales de la vitesse sont 0,002, 0,004 et 0,014 m/s respectivement pour les cas de $V=0.2$ m/s et $Ra=3, 10$ et $30 \mu m$ et 0,002, 0,005 et 0,016 m/s respectivement pour les cas de $Ra=5 \mu m$ et $V=0.1, 0.3$ et 1 m/s.

Quant au densité spectral de puissance, elles ont des pics situés proches des valeurs des fréquences propres du résonateur dont les valeurs sont données dans le tableau 5.12. Et comme l'évolution temporelle, l'augmentation des paramètres macroscopiques (la vitesse et la rugosité) conduit à la croissance de l'amplitude de la DSP.

TABLE 5.12 – Fréquences propres du résonateur

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fréquence (kHz)	0.02	0.09	0.21	0.37	0.58	0.84	1.14	1.49	1.88	2.32
Mode	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Fréquence (kHz)	2.81	3.35	3.93	4.55	5.23	5.95	6.72	7.53	8.39	9.30
Mode	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Fréquence (kHz)	10.25	11.25	12.29	13.39	14.52	15.71	16.94	18.22	19.54	20.91

Dans la suite, on évalue le niveau vibratoire Lv en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité de surface. La vitesse de glissement varie de 0,1 à 1 m/s et la rugosité de 3 à 30 μm .

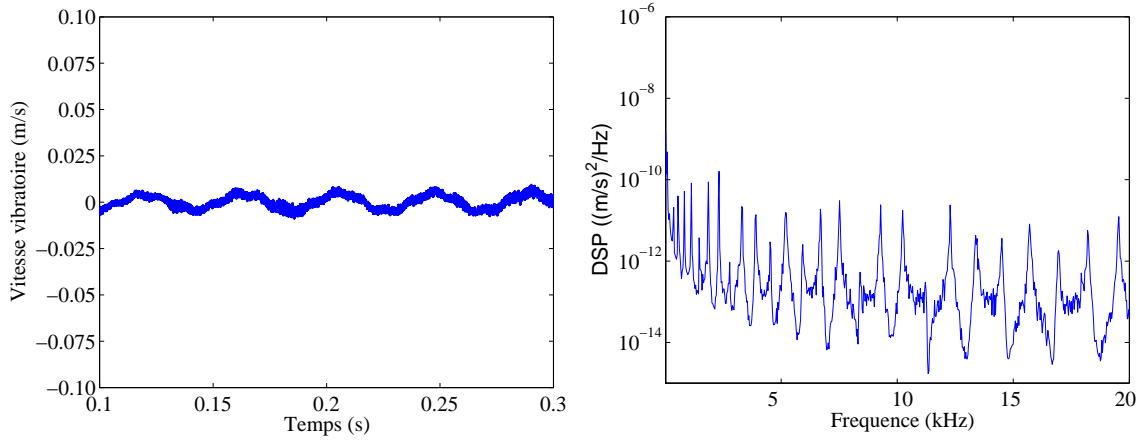
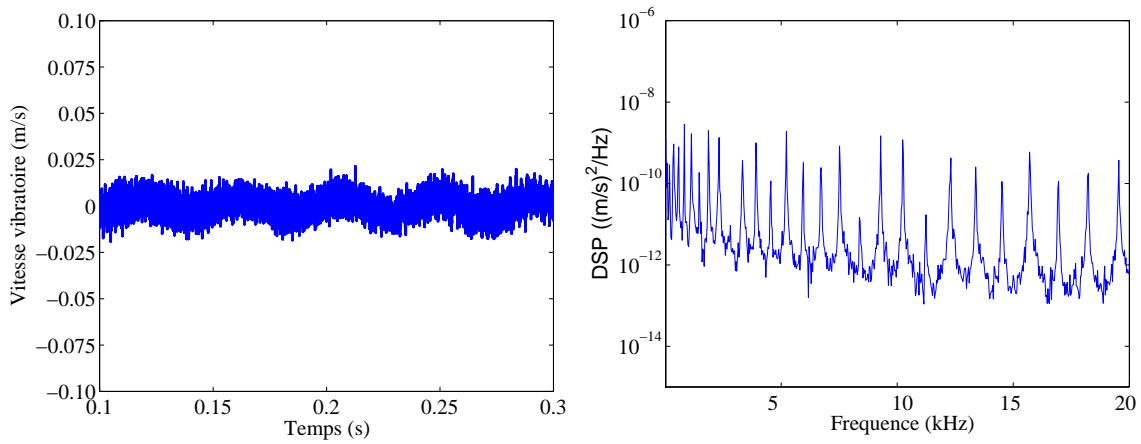
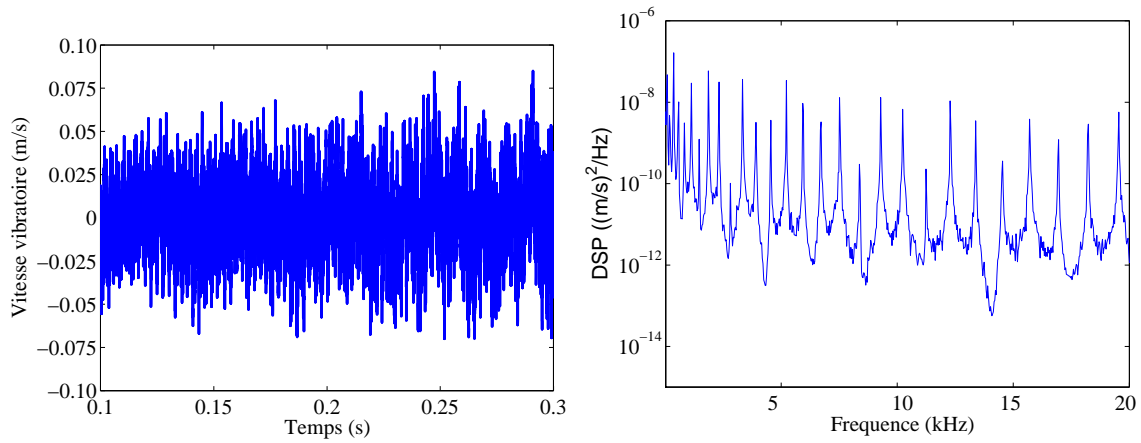
(a) $Ra=5 \mu m$, $V=0.1$ m/s(b) $Ra=5 \mu m$, $V=0.3$ m/s(c) $Ra=5 \mu m$, $V=1$ m/s

FIGURE 5.10 – Vitesse vibratoire et sa densité spectrale de puissance pour les cas de $Ra=5 \mu m$ et $V=0.1, 0.3$ et 1 m/s.

Le niveau vibratoire L_v du résonateur est calculé en fonction de la valeur quadratique moyenne de la vitesse vibratoire v_{rms} . Elle est donnée par la formule suivante :

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{L} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^L v^2(x, t). dx. dt. \quad (5.10)$$

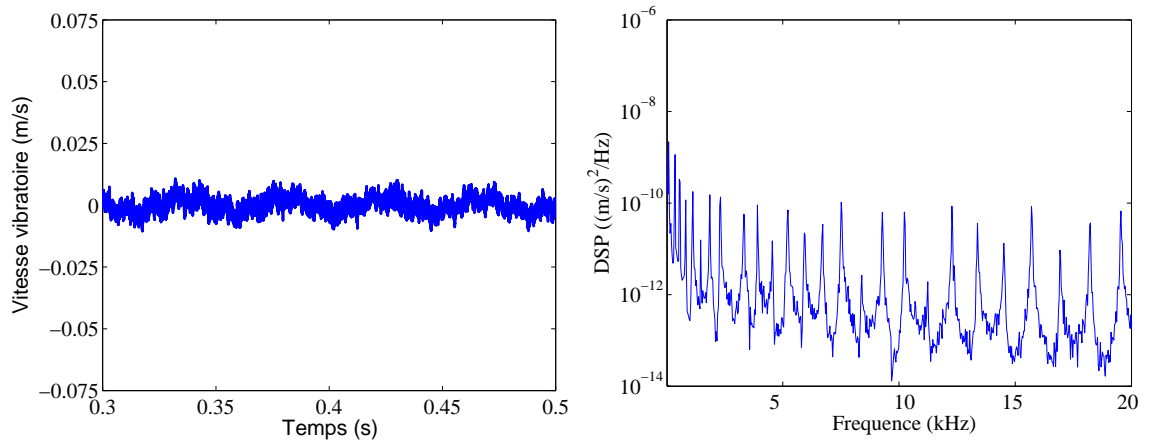
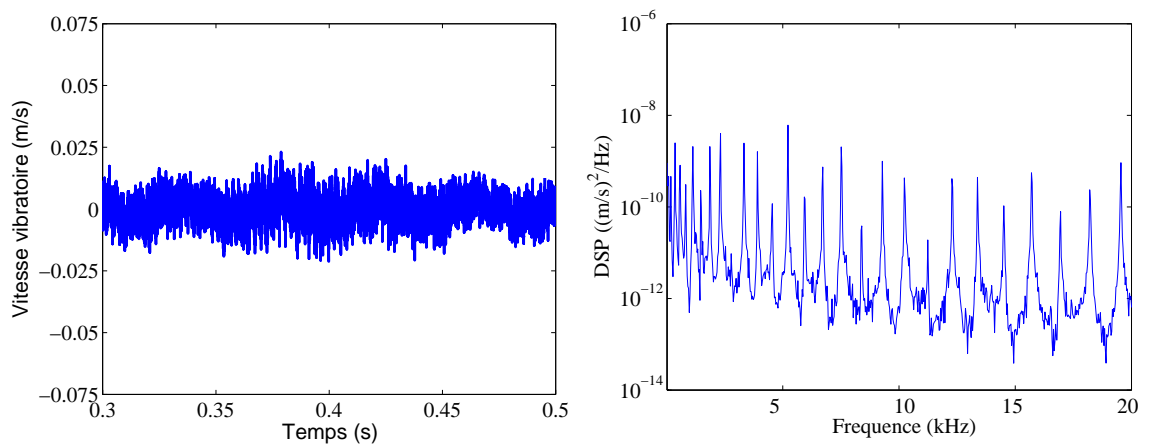
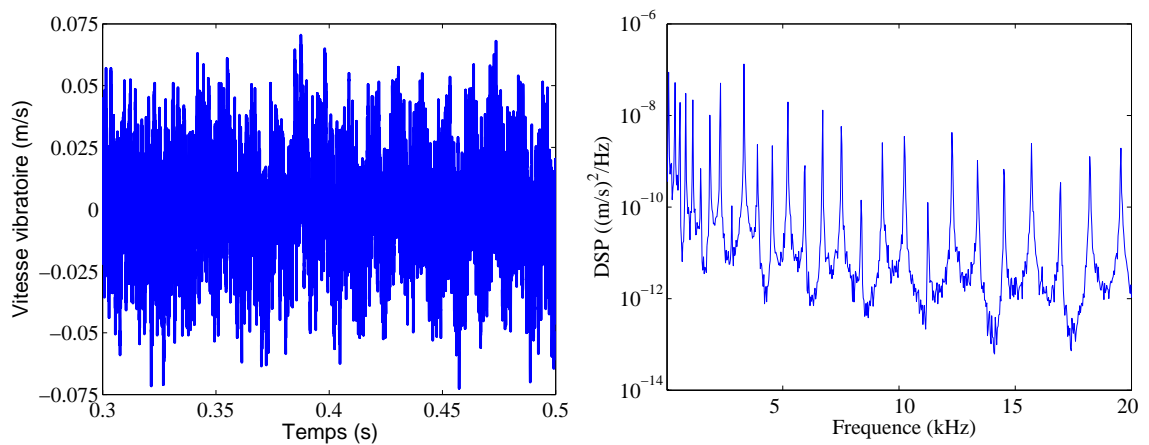
(a) $Ra=3 \mu m, V=0.2 \text{ m/s}$ (b) $Ra=10 \mu m, V=0.2 \text{ m/s}$ (c) $Ra=30 \mu m, V=0.2 \text{ m/s}$

FIGURE 5.11 – Vitesse vibratoire et sa densité spectrale de puissance pour les cas de $V=0.2 \text{ m/s}$ et $Ra=3, 10$ et $30 \mu m$.

La forme discrète de cette formule est,

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{N_\tau} \frac{1}{N_1} \sum_{i,j} v_{i,j}^2, \quad (5.11)$$

où $v_{i,j}$ est la vitesse vibratoire du noeud x_i à l'instant $t_j \in [0, T]$ est une plage stationnaire du signal temporel. N_τ, N_1 sont respectivement le nombre d'instants et le nombre de noeuds du résonateur. Le niveau vibratoire vaut,

$$Lv(dB) = 20 \log_{10} \frac{v_{rms}}{v_0}, \quad (5.12)$$

où v_0 est la valeur de référence $v_0=10^{-9}$ m/s [65].

Dans ce paragraphe, on vérifie la répétabilité des résultats numériques. Plusieurs simulations possédant les mêmes vitesses de glissement et rugosité sont réalisées. Les valeurs des rugosités et des vitesses choisies sont : $Ra=5 \mu m$, $V=0.2$ m/s et $V=1$ m/s. 100 profils de surfaces numériques sont d'abord générés. Puis, 200 simulations (100 profils x 2 vitesses différentes) sont effectuées à l'aide du programme Ra2D. Grâce au méso-centre de calcul Kepler, il est possible de lancer plusieurs simulations en même temps. Le calcul est réalisé sur une queue de calcul de 60 processeurs. Le temps CPU utilisé est de 3 heures pour chaque simulation. Ensuite, la dispersion des résultats est évaluée en déterminant la valeur moyenne μ , l'écart-type σ et le coefficient de variation ou écart-type relatif c_v qui est défini comme le rapport entre l'écart-type et la moyenne.

$$c_v = \frac{\mu}{\sigma} \quad (5.13)$$

Ces variables et la distribution des niveaux vibratoires Lv sont présentés sur la figure 5.12 et le tableau 5.13. Le coefficient de variation est inférieur à 1%. Par conséquent, cette expérience montre la fiabilité des valeurs Lv obtenues numériquement.

TABLE 5.13 – Répétabilité du niveau vibratoire

<i>Test</i>	Moyenne (dB)	Ecart-type (dB)	Coef. de variation (%)
$Ra=5 \mu m, V=0.2$ m/s	126	0.45	0.36
$Ra=5 \mu m, V=1.0$ m/s	138	0.47	0.34

Niveau vibratoire en fonction du taux d'amortissement.

Dans cette section, on étudie l'influence du facteur d'amortissement sur le niveau vibratoire.

Les simulations numériques sont réalisées avec la configuration glisseur-résonateur ayant une vitesse de glissement $V = 10$ cm/s, une rugosité $Ra=10 \mu m$ fixées et une durée de simulation de 1 s. Seul le facteur d'amortissement varie de $\eta = 3e-4$ à $9e-1$. La valeur de η est la même pour les deux solides glisseur et résonateur. On rappelle les relations entre les différents paramètres d'amortissement. Le coefficient d'amortissement modal (visqueux équivalent) est $\zeta = c/(2m\omega)$ où ω est la pulsation propre du solide (ζ dépend donc du mode propre), m est la masse linéique de la poutre et c est la viscosité par unité de longueur (unité N.s). Le facteur d'amortissement est $\eta = 2\zeta$.

Le niveau vibratoire Lv du résonateur est calculé par les équations (5.11) et (5.12).

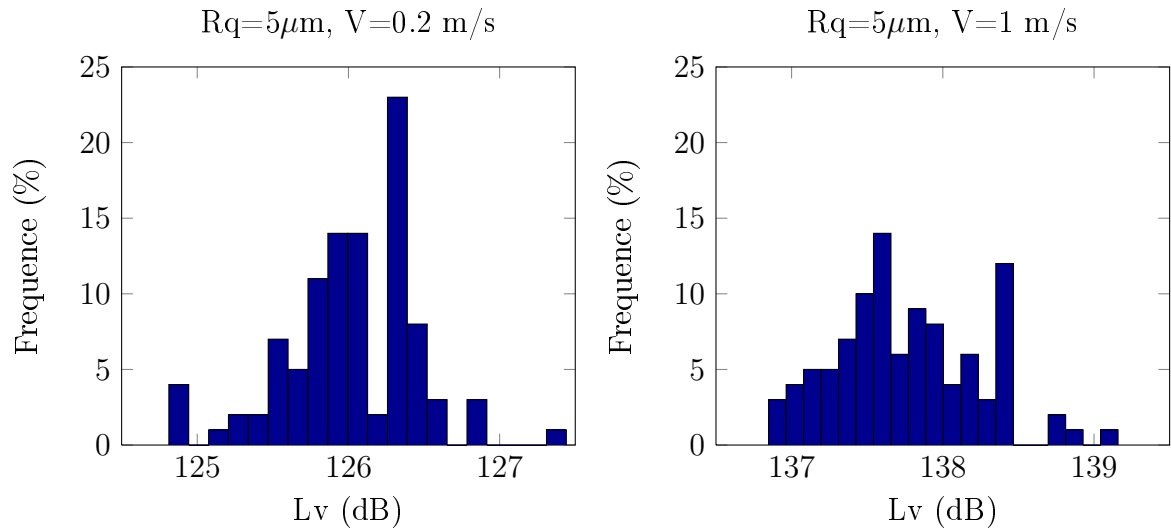


FIGURE 5.12 – Répétabilité du calcul du niveau vibratoire L_v

Les résultats sont présentés sur la figure 5.13 en échelle logarithmique. On observe l'évolution du niveau vibratoire moyen L_v du résonateur en fonction du facteur d'amortissement η .

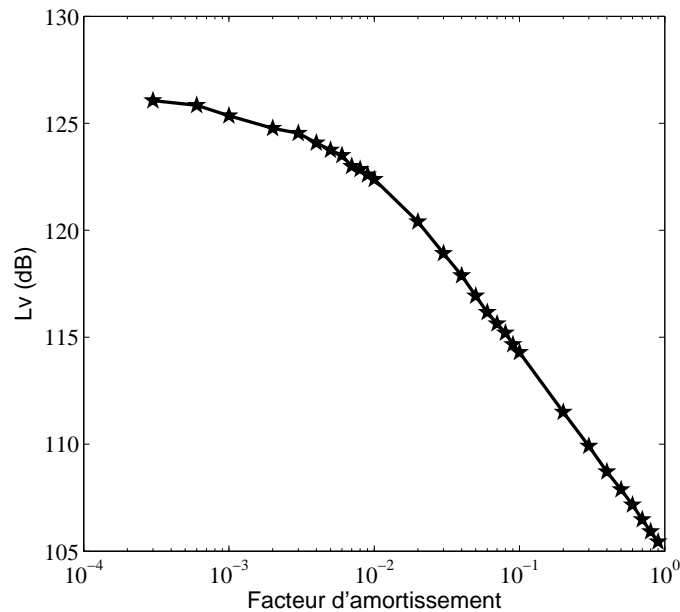


FIGURE 5.13 – Évolution du vibratoire en fonction du facteur d'amortissement ($V = 10$ cm/s et $Ra = 10 \mu\text{m}$).

La courbe d'évolution de L_v en fonction de η se compose de deux parties.

La partie droite de la courbe correspondant aux valeurs du facteur d'amortissement de 0.01 à 0.9, est linéaire avec une pente de 10 dB/décade. Une multiplication par 10 du facteur d'amortissement conduit à une diminution de 10 dB du niveau vibratoire. Ce résultat est conforme à l'idée habituelle que l'on se fait du rôle de l'amortissement. On peut l'expliquer avec un bilan d'énergie dans lequel le terme source est maintenu

constant. Si l'on écrit le bilan d'énergie du système résonateur isolé en régime établi, on obtient,

$$P = \eta\omega_0 E \quad (5.14)$$

où E est l'énergie vibratoire totale contenue dans le résonateur, P la puissance vibratoire introduite dans le résonateur par l'ensemble des chocs et ω_0 la fréquence centrale de la vibration (définie par exemple comme le second moment normalisé de la densité spectrale de puissance de la vitesse vibratoire *i.e.* $\omega_0^2 = \int \omega^2 S_{vv} d\omega / \int S_{vv} d\omega$). Or le niveau vibratoire est $Lv = 10 \log_{10} E/E_0 = 10 \log_{10} P/\eta\omega_0 E_0$ où E_0 est la valeur de référence. Si on admet que la puissance ne dépend pas du niveau d'amortissement, on obtient une pente de 10 dB/décade ce qui correspond au régime inertiel observé figure 5.13.

La partie gauche de la courbe correspondant aux valeurs de facteur d'amortissement de 0.0003 à 0.01 est plus étonnante. Une augmentation par 10 du facteur d'amortissement de 0.001 à 0.01 n'induit qu'une baisse de 3 dB du niveau vibratoire. Cette pente de 3 dB/décade ne peut plus être expliquée par l'hypothèse que le terme source est constant. On est donc conduit à admettre que la puissance P change avec η . C'est un régime où le niveau vibratoire modifie la dynamique des chocs et par la même, la puissance vibratoire gérée par ceux-ci. On peut même préciser de quelle façon évolue $P(\eta)$. La puissance vibratoire croît en fonction de η avec une pente de 7 dB/décade. Il s'agit d'un régime dans lequel le niveau vibratoire modifie les conditions tribologiques. La dynamique du contact et la tribologie sont couplées.

Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité

Pour chaque valeur de Ra , on génère 10 couples de profils (glisseur et résonateur). Par exemple, avec la vitesse de glissement $V = 0.3$ m/s, les valeurs de Lv obtenues avec différentes rugosités Ra et 10 couples profils sont présentés figure 5.14,

La relation entre Lv et la rugosité Ra est tracée sur la figure 5.15. Les barres d'erreur sont utilisées pour présenter les résultats obtenus. Une loi linéaire et croissante du logarithme est clairement observée :

$$\Delta Lv = 20 \log_{10} \left(\frac{Ra_2}{Ra_1} \right)^m \quad (5.15)$$

où m est compris entre 0.69 et 0.84. Ces valeurs sont en accord avec celles des expériences ($0.7 \leq m \leq 0.96$).

Sur la figure 5.16 est présentée l'évolution de Lv en fonction de la vitesse de glissement. Lv est une fonction linéaire et croissante du logarithmique de V .

$$\Delta Lv = 20 \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^n \quad (5.16)$$

où n est compris entre 0.71 et 0.79. Ces valeurs sont légèrement plus faibles que celles obtenues par l'expérience ($0.8 \leq n \leq 1.1$).

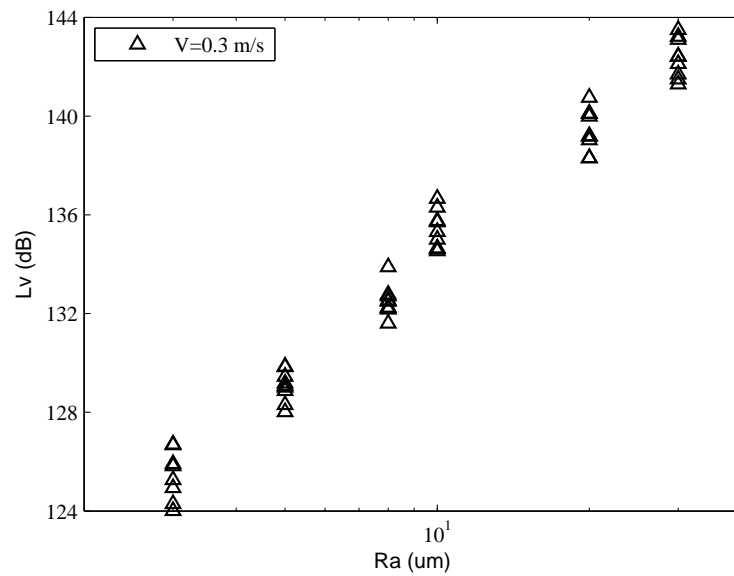
(a) $V=0.3$ m/s

FIGURE 5.14 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité de surface avec $V = 0.3$ m/s. Pour chaque valeur de Ra , on génère 10 couples de profils (glisseur et résonateur).

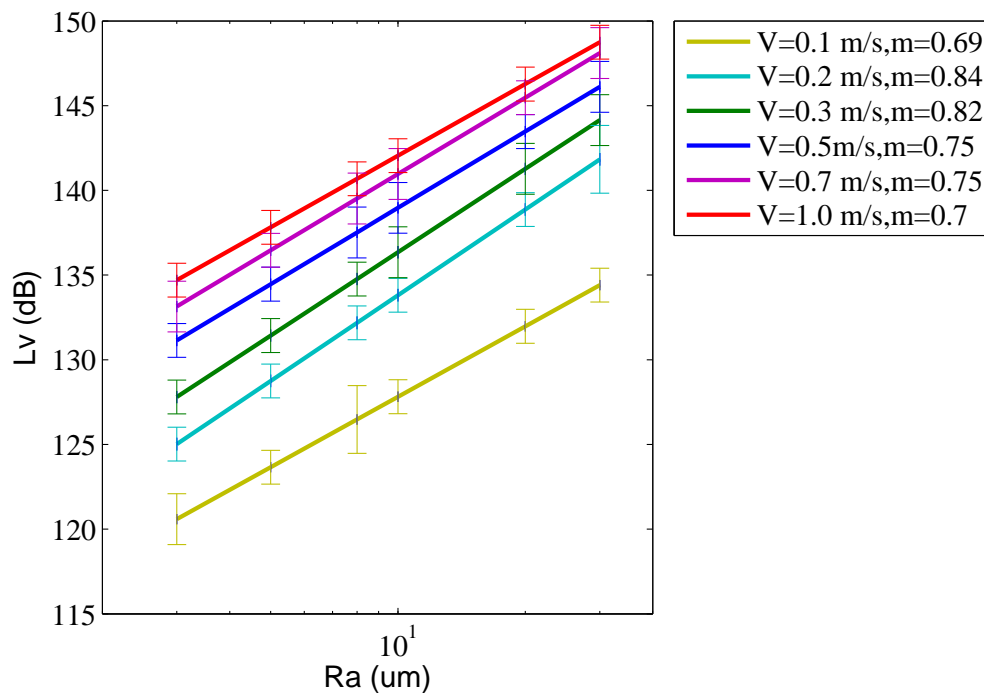


FIGURE 5.15 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité de surface. Les barres d'erreur sont estimées par 10 calculs avec différents profils.

Les deux équations (5.15) et (5.16) sont combinées dans une formule générale de Lv comme suit :

$$Lv(dB) = 20\log_{10}(Ra^m V^n) + cste \quad (5.17)$$

Le niveau vibratoire est prédit par une fonction logarithmique croissante en fonction de

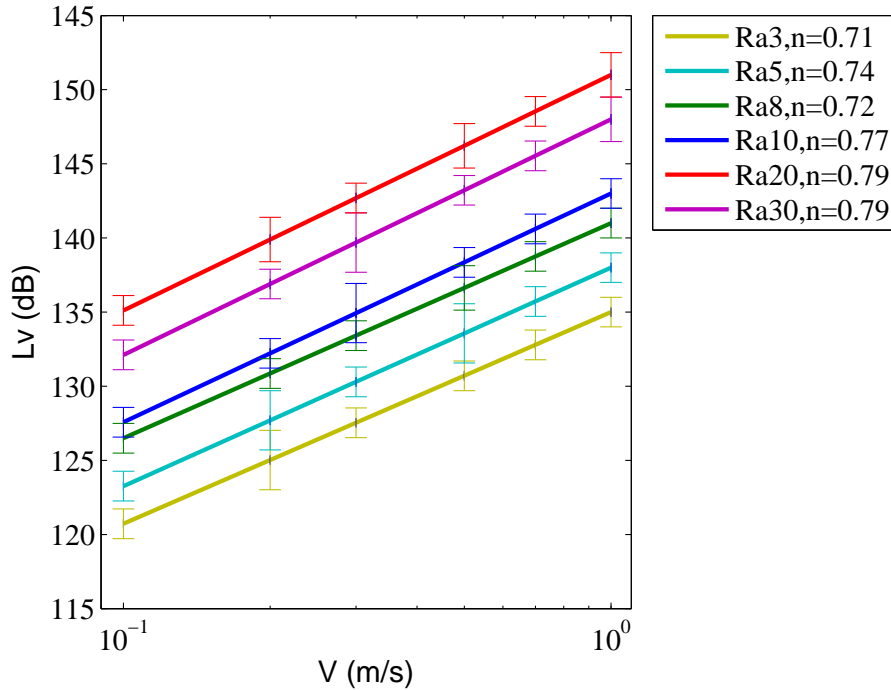


FIGURE 5.16 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement. Les barres d'erreur sont estimées par 10 calculs avec différents profils.

la rugosité de surface Ra et la vitesse de glissement V .

D'autre part, l'amplitude de L_v obtenue par la simulation est plus élevée que l'expérience. Par exemple, avec $V=0.1$ m/s, $Ra=5$ μm , on a $L_{v_{simulation}} > L_{v_{expérience}}$ ($123 > 110$ (dB)). Cette différence est expliquée par :

- Modèle d'une poutre au lieu d'une plaque
- Différence des conditions aux limites. (En réalité, il s'agit de l'appui aux quatre coins du résonateur.)
- Amortissement mal estimé.

5.3.2 Étude statistique des chocs

Le fichier de résultats obtenus par le programme Ra2D, contient la force de contact à tous les noeuds avec une fréquence d'échantillonnage de 100 kHz. En se basant sur ces résultats, les spécificités statistiques du contact sont déterminées. Un des objectifs principaux de cette étude est d'analyser les chocs en réalisant un traitement statistique. Les grandeurs primaires qui permettent de connaître les spécificités du choc sont les forces de contact et les vitesses au niveau des noeuds en contact. On présente sur la figure 5.17 un extrait de l'évolution de la force de contact en fonction du temps au noeud $x=0.012$ m du profil inférieur dans le cas $Ra=5$ μm et $V=0.1$ m/s. Lorsque la force devient non nulle, le choc entre ce noeud et le profil antagoniste commence [53]. Le temps nécessaire pour que la force revienne à zéro est la durée de choc. Sur la figure 5.17, de l'instant 0.5915 s à 0.5925 s, trois chocs se produisent. La durée des chocs est autour de $1e-4$ s, les valeurs maximales de la force sont respectivement 2.5, 0.8 et 4.5 (N).

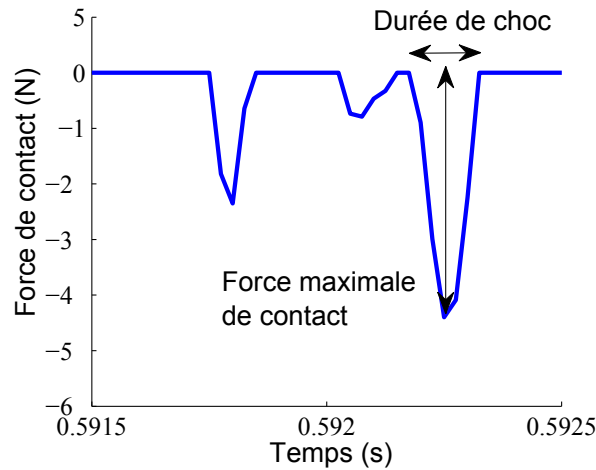


FIGURE 5.17 – Évolution de la force de contact au noeud $x=0.012$ m sur le résonateur pour le cas où $Ra=5 \mu\text{m}$ et $V=0.1 \text{ m/s}$. À partir de cette évolution, les valeurs maximales de la force de contact de choc et la durée de choc sont déterminées.

Tableau des chocs

Le tableau 5.14 présente les caractéristiques des chocs : l'instant de début, la durée, la position sur le résonateur, la force maximale de contact, la force moyenne de choc et l'énergie transférée par choc. Les chocs sont numérotés par ordre croissant des positions (les noeuds) où ils se produisent.

TABLE 5.14 – Tableau des statistiques des chocs

N° choc	Début (s)	Durée (s)	Position (mm)	f_{max} (N)	$f_{moyenne}$ (N)	Énergie transférée (J)
1000	0.0360	2.0e-05	104.2	0.03	0.02	1.22e-05
2000	0.0775	7.0e-05	106.7	0.90	0.49	-2.52e-04
3000	0.1019	1.0e-05	107.8	0.42	0.42	-2.20e-04
4000	0.1179	4.0e-04	109.0	0.18	0.25	-5.36e-03
5000	0.0586	1.0e-05	109.9	0.01	0.01	-1.40e-05
6000	0.1385	1.0e-04	110.1	0.76	0.47	1.27e-05
7000	0.1614	1.0e-04	112.0	0.09	0.04	3.36e-04
8000	0.1714	6.0e-05	112.2	0.11	0.05	1.16e-04
9000	0.1911	1.0e-05	113.6	0.01	0.01	2.20e-06
10000	0.2055	2.0e-05	114.3	0.41	0.21	-3.03e-03

Durée de choc

La durée est une des trois quantités importantes pour caractériser les chocs. Pour l'estimer, une formule se basant sur la théorie de Hertz est proposée dans la littérature [12] :

$$\tau(s) = 9,36 \cdot 10^{-5} \frac{m^{2/5}}{(V \cdot \beta)^{1/5}} \quad (5.18)$$

où V est la vitesse, m est la masse du solide (0.0156 g) et β est le rayon de courbure des aspérités qui sont supposées sphériques. En pratique, pour une surface donnée, on calcule le rayon de courbure pour chaque aspérité puis on déduit sa valeur moyenne. Le rayon de courbure β d'une surface très rugueuse est faible. Ici, nous prenons pour valeur de β les mesures expérimentales de Houcine [12]. Les valeurs estimées de la durée des chocs sont présentées dans le tableau 5.15.

TABLE 5.15 – Durée des chocs estimée en utilisant la formule 5.18

V (m/s)	0.1			0.2			1.0		
Ra (μm)	5	10	20	5	10	20	5	10	20
β (μm)	57	52	30	57	52	30	57	52	30
Durée (ms)	0.19	0.20	0.21	0.17	0.17	0.19	0.12	0.12	0.14

Ensuite, les résultats numériques concernant la durée des chocs sont analysés. La figure 5.18 présente la fonction cumulative des probabilités (CDF) et l'histogramme de la durée des chocs. On se rappelle que le pas de temps est de $1e-7$ s et la fréquence d'échantillonnage est 100 kHz. Ces paramètres nous assurent bien de capturer tous les chocs dont la durée est supérieure à $1e-5$ s.

Par ailleurs, l'augmentation de la vitesse de glissement et la rugosité de surface ont tendance à diminuer la durée de choc. En considérant les sous figures de la première colonne de la figure 5.18, avec $Ra = 5 \mu m$, $V = 0.1$ m/s, 40 % des chocs ont une durée supérieure à 0.1 ms, avec $Ra = 5 \mu m$, $V = 0.2$ m/s, c'est 20 % et avec $Ra = 5 \mu m$, $V = 1$ m/s, il ne reste que 2 %. Puis, les sous-figures de la deuxième colonne ($Ra = cte$), pour $V = 0.2$ m/s et $Ra = 3, 10$ et $30 \mu m$, le nombre de choc dont la durée est supérieure à 0.1 ms, diminue respectivement 18%, 9 % et 4 %.

Ensuite, on trouve que la durée de choc obtenue numériquement est en accord avec la formule analytique 5.18 et le tableau 5.15. On obtient dans les deux cas des chocs ayant une durée de l'ordre de $1e-4$ s. De plus, la durée de choc est diminuée lorsque la vitesse de glissement augmente et elle est légèrement influencée par la rugosité de surface.

Force de contact du choc

Puis, on s'intéresse à la force maximale de contact de choc. Sur la figure 5.19 sont présentés l'histogramme et la fonction cumulative des probabilités de la force maximale de choc pour des simulations avec trois vitesses de glissement $V = 0.2, 0.5, 1.0$ m/s et trois rugosités $Ra = 3, 10, 30 \mu m$.

Chaque sous-figure est indexée par les lettres a,b,... et elle consiste en deux parties : l'histogramme (en haut) et la fonction cumulative distribution (CDF, en bas). Grâce à l'histogramme, on peut déterminer le nombre de chocs ayant la valeur de force de contact maximale égale à une valeur donnée. Alors que la CDF a servi à estimer la répartition de la variable considérée, les valeurs de CDF sont entre 0 et 1. Tous les axes des sous-figures sont choisis identiques pour faciliter l'observation de la relation entre la force de contact et les deux paramètres macroscopiques V et Ra .

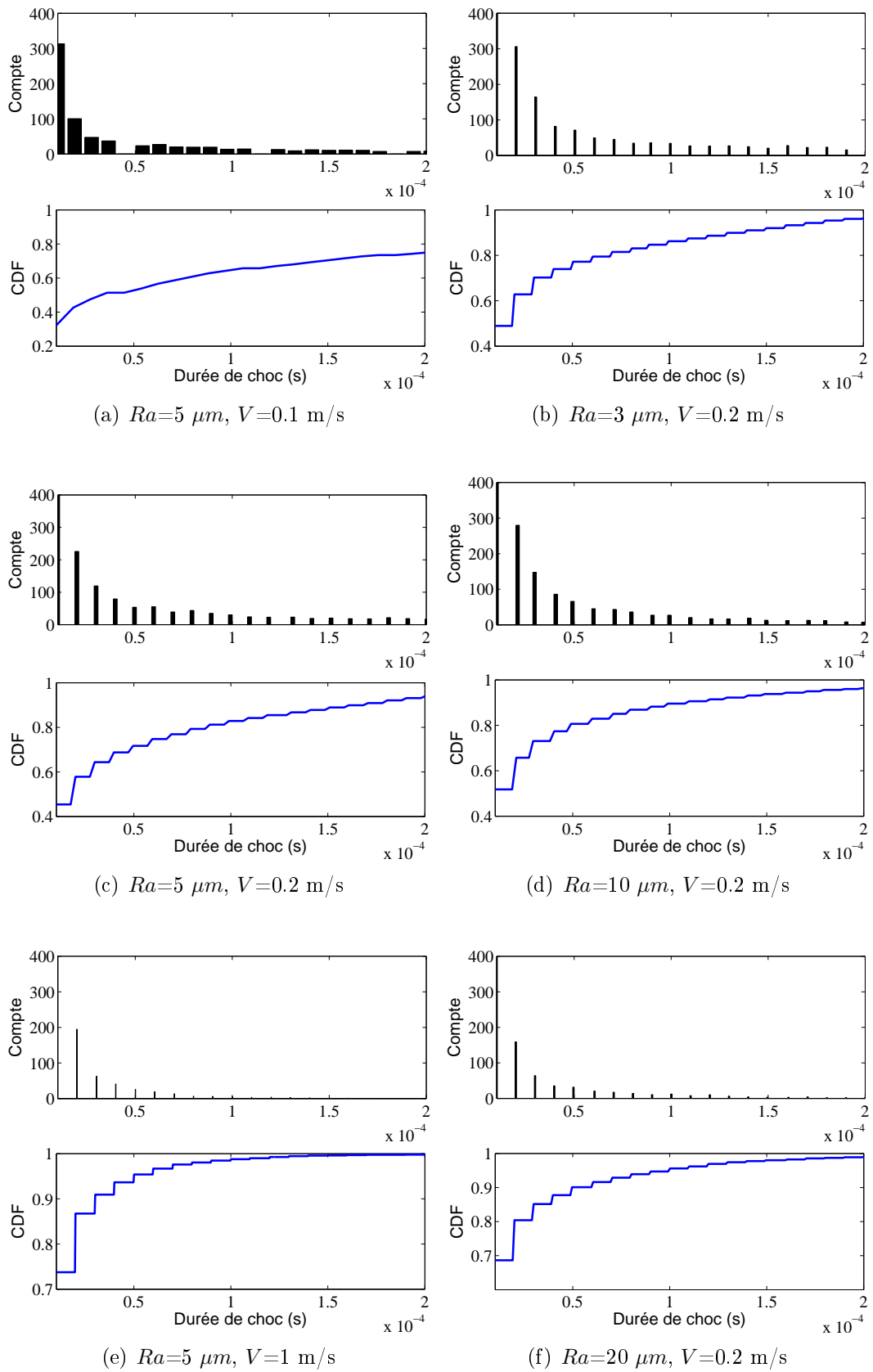


FIGURE 5.18 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la durée de choc.

D'abord, on constate que le nombre de chocs diminue lorsque la valeur de force de contact maximale augmente. Ensuite, la première colonne des sous-figures est considérée. Avec $Ra=5 \mu\text{m}$, $V=0.2 \text{ m/s}$, toutes les forces de contact sont inférieures à 20 N, alors qu'avec $Ra = 5\mu\text{m}$, $V = 0.5\text{m/s}$, les forces de contact peuvent atteindre 100 N, avec $Ra=5 \mu\text{m}$, $V=1 \text{ m/s}$, il existe 18% des valeurs de force de contact supérieures à 100 N.

Pour la deuxième colonne des sous-figures, l'effet de l'augmentation de la vitesse de glissement est étudié. Avec $Ra=3 \mu\text{m}$, $V=0.2 \text{ m/s}$, toutes les forces de contact sont inférieures à 20 N, alors qu'avec $Ra=10 \mu\text{m}$, $V=0.2 \text{ m/s}$, les forces de contact peuvent atteindre 80 N, avec $Ra=30 \mu\text{m}$, $V=0.2 \text{ m/s}$, il existe 20% des valeurs de force de contact supérieures à 100 N.

Donc les chocs deviennent plus violents quand la vitesse ou la rugosité sont augmentées.

Sur la figure 5.20 est illustrée la force totale de contact appliquée à la surface du résonateur à chaque instant. Cette valeur est la somme des forces de contact de tous les noeuds du profil à chaque instant. Elle est donnée par la formule suivante :

$$f_{i,n,total} = \sum_{l=1}^{N_i} f_{i,l,n} \cdot \chi_i \quad (5.19)$$

où N_i est le nombre de noeuds, χ_i est le pas spatial du profil i et $f_{i,l,n}$ est la force de contact par unité de longueur au noeud l du profil i à l'instant n .

Et sa valeur moyenne quadratique est calculée par :

$$f_{total,rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{i,n,total}^2} \quad (5.20)$$

où N est le nombre total des instants.

Dans la figure 5.20, on trace la force de contact appliquée au résonateur au cours du temps avec différentes vitesses de glissement et de rugosité de surface et sa valeur moyenne quadratique. Il y a 6 sous-figures, l'ordre de présentation est le suivant : la vitesse croît dans la première colonne ($Ra=5 \mu\text{m}$, $V=20, 50, 1 \text{ m/s}$) et la rugosité augmente dans la deuxième colonne ($Ra=3, 10, 30 \mu\text{m}$, $V=0.2 \text{ m/s}$). Les axes des sous figures sont fixés identiques pour faciliter l'observation de l'évaluation des variables.

On constate que la force de contact est discontinue et son amplitude n'est pas uniforme. Lorsque la vitesse ou la rugosité augmente, la force totale de contact est plus importante et plus discontinue. Par exemple, dans la sous figure 5.20(f), il n'y a que 6 pics clairement observés de 0.25 s à 0.3 s, la force est très importante et peut atteindre une valeur proche de 450 N.

En ce qui concerne la valeur moyenne quadratique de la force totale de contact f_{rms} , sa valeur est de 10 fois plus que le poids propre du glisseur (0.15 N). Par exemple, avec le cas $V=0.2 \text{ m/s}$ et $Ra=3 \mu\text{m}$, on a $f_{rms} = 1.6 \text{ N}$. De plus, cette valeur augmente en fonction de la vitesse V et de la rugosité Ra , la valeur de f_{rms} pour le cas $V=1.0 \text{ m/s}$, $Ra=5 \mu\text{m}$, est $f_{rms} = 6.5 \text{ N}$ et pour $V=0.2 \text{ m/s}$, $Ra=30 \mu\text{m}$, $f_{rms} = 8.1 \text{ N}$.

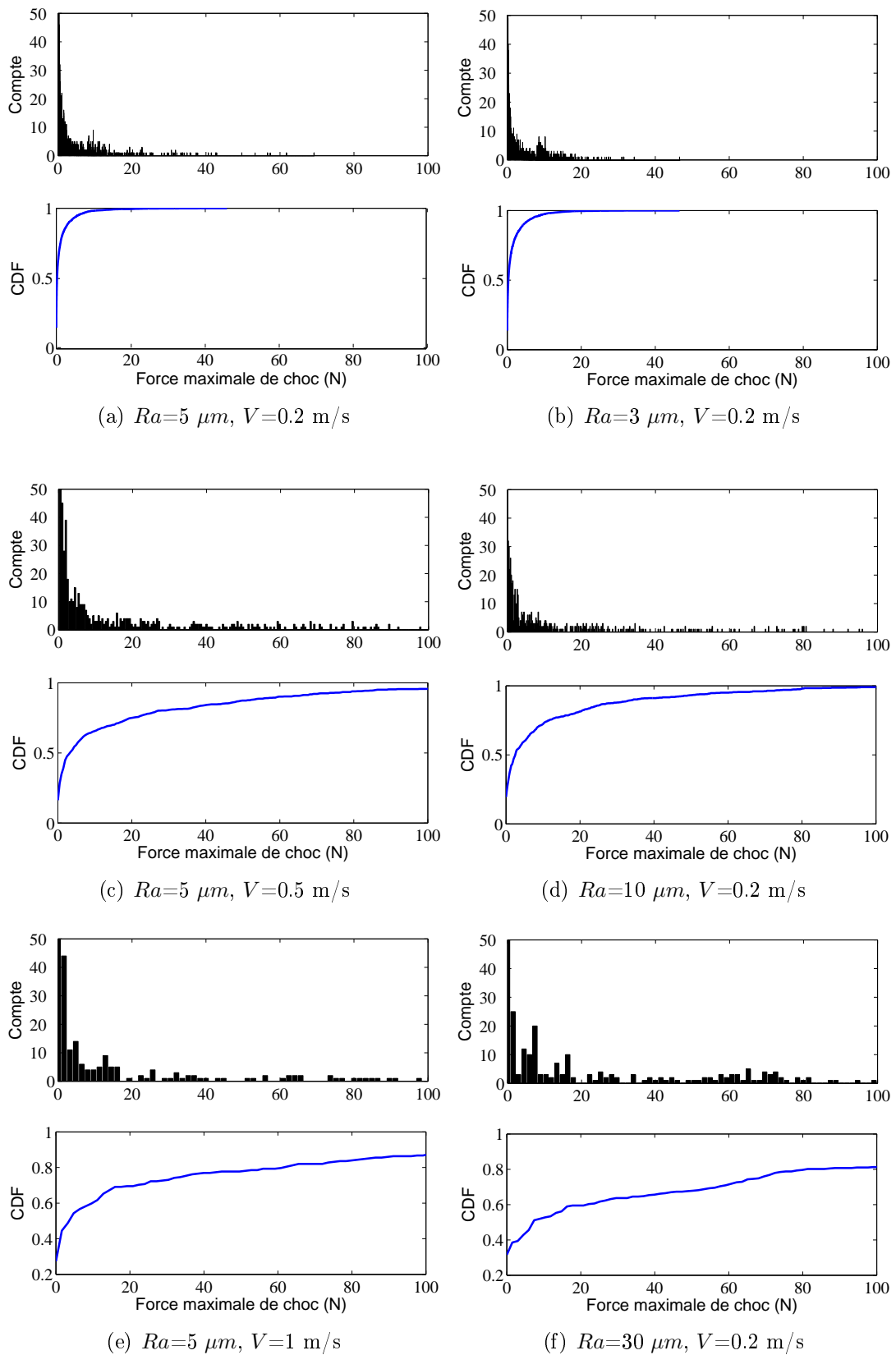


FIGURE 5.19 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de force maximale de choc.

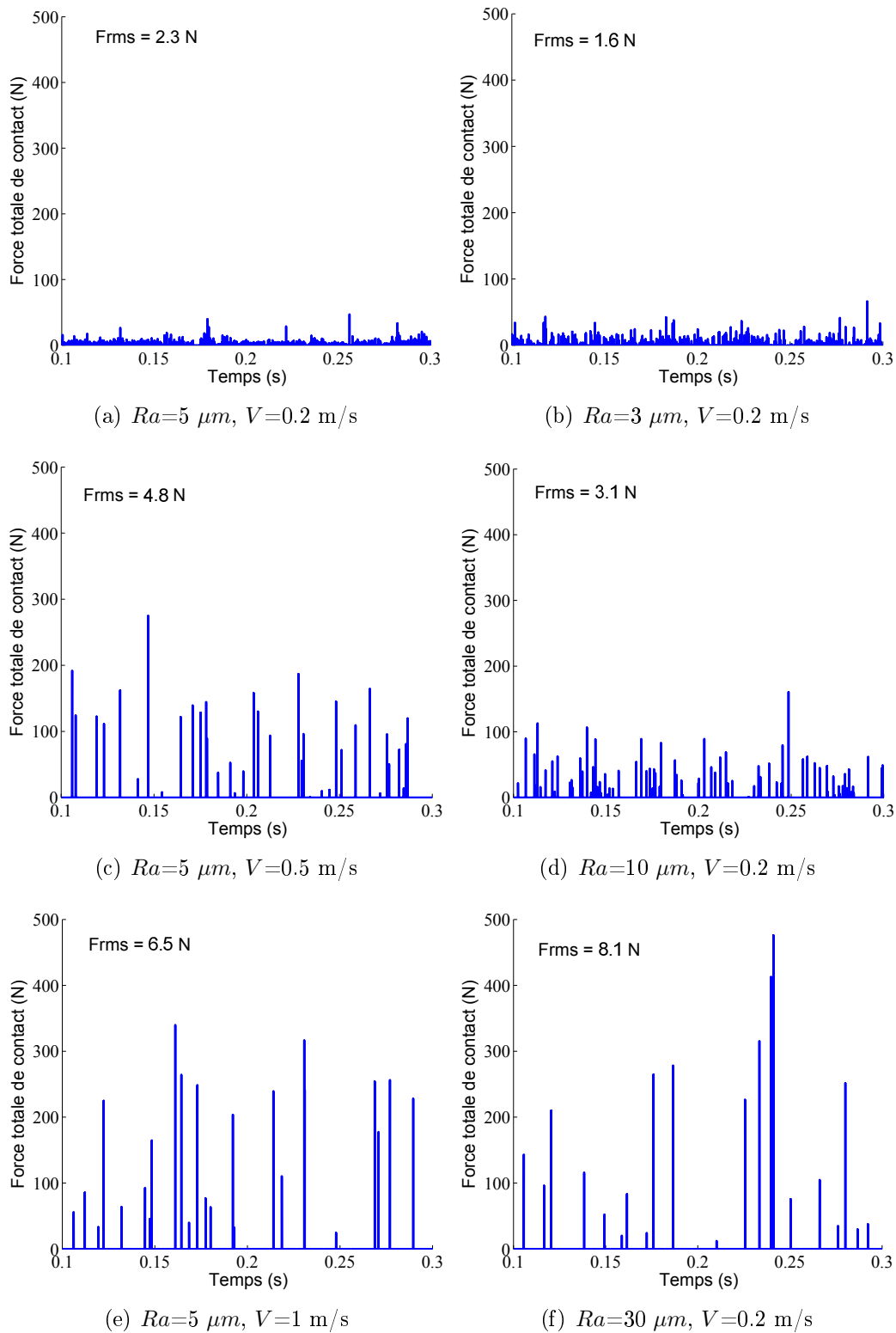


FIGURE 5.20 – Évolution de la force totale de contact en fonction du temps et sa valeur moyenne quadratique pour différentes vitesses de glissement et rugosités de surface. Le poids propre du glisseur est 0.15 N.

Pourcentage de temps de contact

En fonction de la force totale de contact, le pourcentage de temps de contact est calculé [2]. Ce sont des informations concernant l'occurrence des contacts. Le pourcentage

est calculé par la formule :

$$\%T_{choc} = \frac{N_{choc}}{N_{\tau}} \quad (5.21)$$

où N_{choc} est le nombre des instants où la force totale est non nulle ($F_{i,n}^{total} \neq 0$), N_{total} est le nombre total des instants de simulation. La figure 5.21 présente la relation entre le pourcentage de temps de choc et la vitesse V , la rugosité Ra . On observe que plus la vitesse ou la rugosité augmentent, plus le contact est rare.

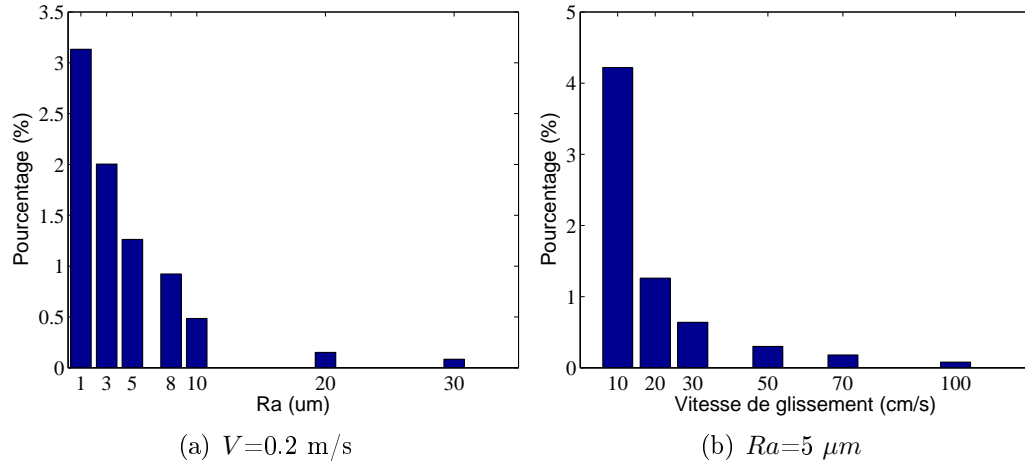


FIGURE 5.21 – Pourcentage de temps de choc en fonction de la vitesse et de la rugosité.

Énergie transférée

Une fois que les vitesses vibratoires et les forces de contact sont connues, l'énergie transférée par choc est déduite. Elle est égale à l'intégrale du produit de la force de contact avec la vitesse vibratoire au point de contact sur la durée de choc,

$$e_{choc} = \int_0^{\tau} f_i(x_i, t) \dot{u}_i(x_i, t) \chi_i dt \quad (5.22)$$

où $f_i(x_i, t)$, $\dot{u}_i(x_i, t)$ sont respectivement la force de contact et la vitesse vibratoire au point de contact, τ est la durée de choc, χ_i est le pas spatial. Par convention, cette énergie est comptée positivement lorsque le transfert s'effectue du glisseur vers le résonateur. Le système thermodynamique considéré est donc le résonateur. L'énergie totale injectée au résonateur de l'instant initial à l'instant t est égale à la somme des énergies élémentaires transférées par tous les chocs.

La figure 5.22 représente l'évolution de l'énergie totale transférée au résonateur pendant 0.3 s pour les cas $Ra = 5 \mu m$, $V=0.1, 0.5, 1.0$ m/s et les cas $V=0.2$ m/s et $Ra=3, 10$ et $30 \mu m$. On observe que l'énergie totale transférée ne dépasse pas $2e^{-4}$ J. Plus la vitesse de glissement ou la rugosité de surface augmentent, plus l'énergie transférée pour le résonateur est importante. Cette quantité a tendance à augmenter de façon monotone en fonction du temps. Cependant il existe des instants où elle peut décroître.

L'explication de ce phénomène est que la majorité des chocs injectent de l'énergie vers le résonateur. Pourtant il existe certains chocs qui sont responsables d'un transfert

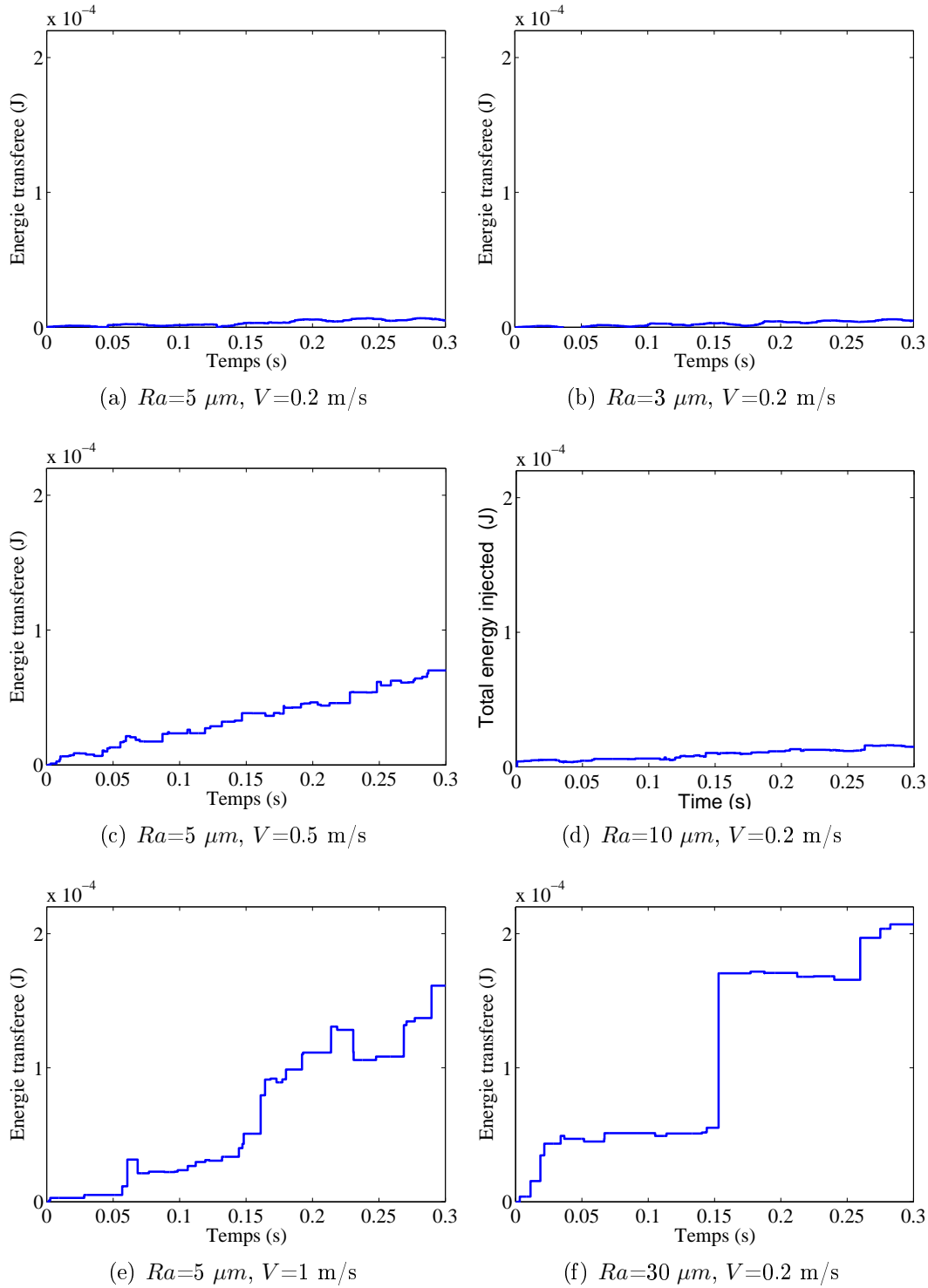


FIGURE 5.22 – Énergie totale transférée au résonateur.

d'énergie du résonateur vers le glisseur. Du point de vue du système thermodynamique "résonateur", ces chocs "inverses" agissent comme une dissipation. Pour montrer cette idée, on trace l'histogramme et les fonctions cumulatives de probabilité (CDF) de l'énergie transférée par choc pour les cas $Ra=5 \mu m$ et $V=0.2, 0.5, 1 \text{ m/s}$ (colonne de gauche) et $V=0.2 \text{ m/s}$, $Ra=3, 10, 30 \mu m$ (colonne de droite) figure 5.23.

L'histogramme de l'énergie transférée est asymétrique de skewness positif. Le pic

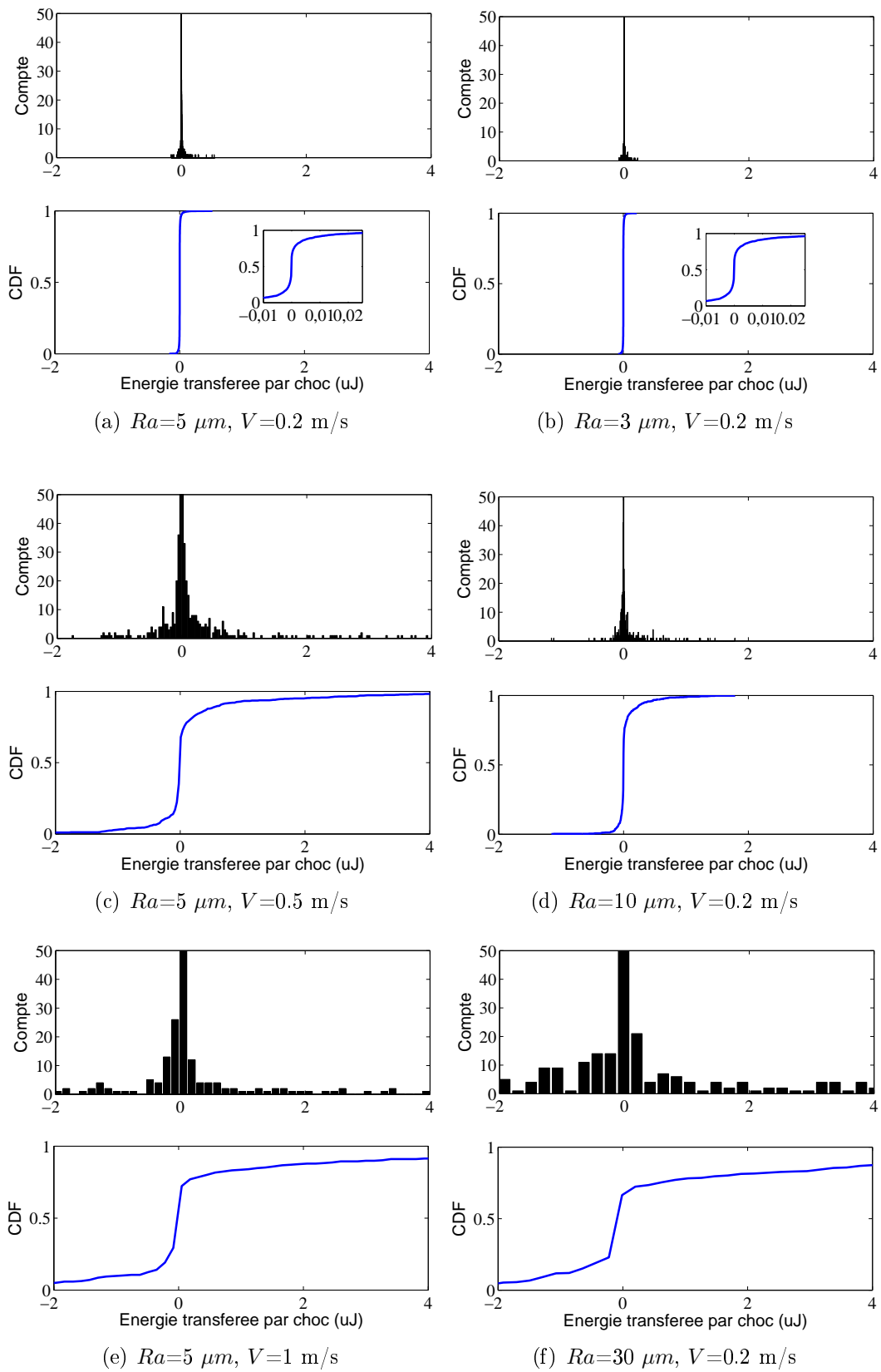


FIGURE 5.23 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la force maximale de choc.

le plus haut correspond à la valeur zéro. La courbe CDF consiste en trois parties : une partie correspondant aux valeurs négatives de la force, une partie présentant des valeurs positives et une transition rapide entre ces deux parties. Mais les valeurs positives dominent celles négatives.

Puis, on étudie l'évolution de l'énergie moyenne transférée notée ϵ vers le résonateur en fonction de Ra et V . Pour obtenir ϵ , on calcule l'énergie transférée totale et on divise par le nombre de chocs. La figure 5.24 présente l'évolution de ϵ en fonction de Ra (à droite) et de V (à gauche). Ce sont des lois logarithmiques croissantes.

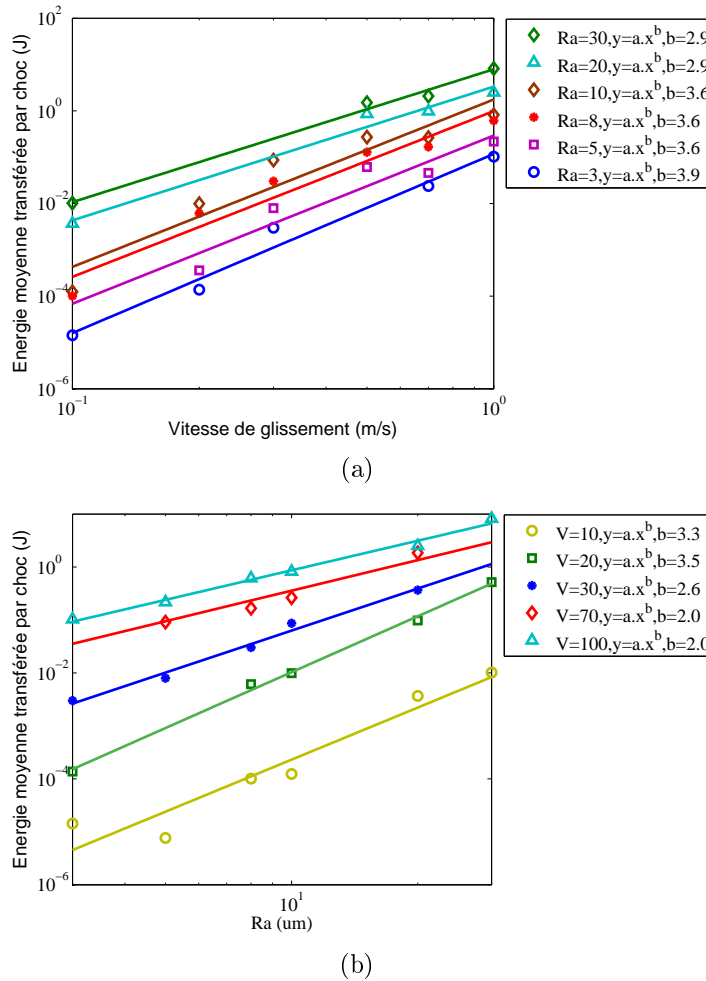


FIGURE 5.24 – Evolution de l'énergie moyenne transférée en fonction de la vitesse de glissement (en haut) et la rugosité de surface (en bas).

La relation entre l'énergie moyenne transférée et la vitesse de glissement est approximée par la loi suivante,

$$\epsilon \sim V^\gamma \quad \text{avec} \quad 2.9 \leq \gamma \leq 3.9 \quad (5.23)$$

Et la relation entre l'énergie moyenne transférée et la rugosité de surface est approximée par la loi suivante,

$$\epsilon \sim Ra^\delta \quad \text{avec} \quad 2.0 \leq \delta \leq 3.3 \quad (5.24)$$

Donc on retiendra que l'énergie moyenne transférée par choc est

$$\epsilon \sim V^\gamma Ra^\delta \quad (5.25)$$

Nombre de chocs par seconde

Ensuite, le nombre de chocs par seconde est calculé. Sur la figure 5.25 sont illustrées les évolutions du nombre de chocs par seconde en fonction de la vitesse V et de la rugosité Ra en échelle logarithmique. Le nombre de chocs par seconde de l'ordre de $1e4$ montre le caractère abondant de cet événement. De plus, le nombre de chocs par seconde diminue clairement lorsque la rugosité ou la vitesse de glissement augmentent.

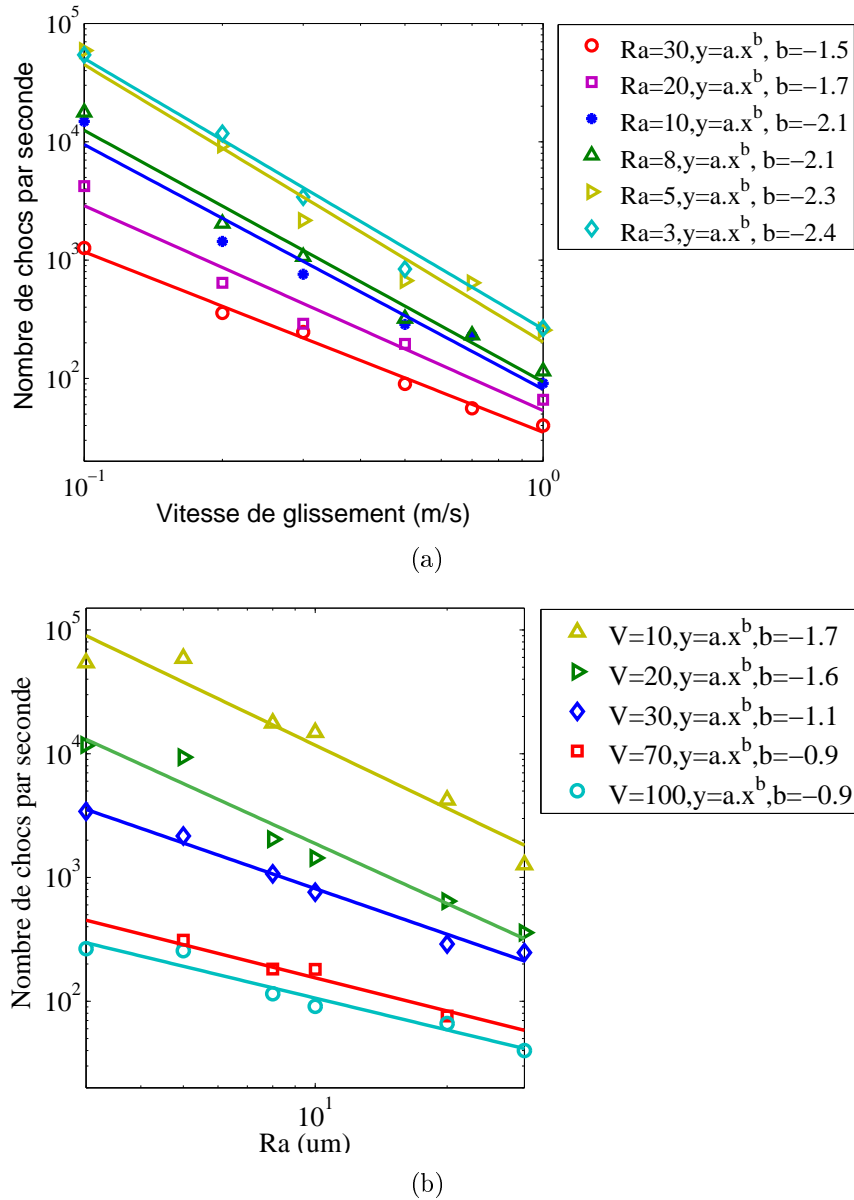


FIGURE 5.25 – Evolution du nombre de chocs par seconde en fonction de la vitesse de glissement (en haut) et de la rugosité de surface (en bas).

On note η le nombre de chocs par seconde. La relation entre le nombre de chocs par seconde et la vitesse de glissement est approximée par la loi suivante :

$$\eta \sim \frac{1}{V^\alpha} \quad \text{avec} \quad 1.5 \leq \alpha \leq 2.4 \quad (5.26)$$

Par ailleurs, la relation entre le nombre de chocs par seconde et la rugosité de surface est décrit par :

$$\eta \sim \frac{1}{Ra^\beta} \quad \text{avec} \quad 0.9 \leq \beta \leq 1.7 \quad (5.27)$$

On retiendra donc la loi :

$$\eta \sim \frac{1}{V^\alpha Ra^\beta} \quad (5.28)$$

En résumé, les équations caractéristiques du bruit de rugosité sont,

$$Lv \sim Ra^m V^n \quad \text{avec} \quad 0.71 \leq n \leq 0.79 \quad \text{et} \quad 0.69 \leq m \leq 0.84 \quad (5.29)$$

$$\epsilon \sim V^\gamma Ra^\delta \quad \text{avec} \quad 2.9 \leq \gamma \leq 3.9 \quad \text{et} \quad 2.0 \leq \delta \leq 3.3 \quad (5.30)$$

$$\eta \sim \frac{1}{V^\alpha Ra^\beta} \quad \text{avec} \quad 1.5 \leq \alpha \leq 2.4 \quad \text{et} \quad 0.9 \leq \beta \leq 1.7 \quad (5.31)$$

Les relations entre les valeurs exposants sont,

$$m \approx \frac{\delta - \beta}{2} \quad (5.32)$$

$$n \approx \frac{\gamma - \alpha}{2} \quad (5.33)$$

5.3.3 Synthèse des résultats numériques

Dans ce chapitre, deux cas tests représentatifs ont d'abord été utilisés pour valider le programme Ra2D. Avec la comparaison entre la formule théorique et le problème de masse mobile, les réponses vibratoires du système sont validées. On montre aussi l'effet des techniques d'interpolation de surface sur les résultats obtenus. Le second cas test avait pour but de valider la partie concernant la gestion du contact et de montrer l'influence des paramètres essentiels comme le nombre de modes pris en compte dans le calcul, le coefficient de pénalité pour le calcul de la force de contact.

Ensuite, la répétabilité de l'évolution du niveau vibratoire pour chaque couple de paramètres (Ra, V) est vérifiée. Cent profils différents avec la même rugosité sont utilisés pour cette expérience. Une faible valeur de coefficient de variation est obtenue. Ce qui d'une part confirme la répétabilité de la méthode numérique et d'autre part met en évidence le rôle déterminant de la rugosité des surfaces dans le phénomène du bruit de rugosité.

Après la validation de l'outil numérique, des expériences paramétriques sont effectuées pour déterminer les paramètres de simulation optimale afin de fournir des résultats pertinents avec les temps CPU les plus courts. En utilisant des modes de la vibration dans la bande [20 Hz-20 kHz], on peut obtenir le niveau vibratoire et la valeur moyenne de la force de contact en convergence. Le pas de temps à $1e-7$ assure la stabilité et la capacité de capture des chocs avec un temps CPU rapide. Les surfaces numériques ont une rugosité de 1-30 μm et la distribution des hauteurs est gaussienne.

Le premier résultat concerne le niveau vibratoire. C'est une fonction logarithmique croissant en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité de surface, conforme avec les lois empiriques. Il s'agit d'un résultat classique de la théorie du bruit de rugosité

qui peut servir de cas test avec l'expérience. Pourtant, le niveau vibratoire obtenu par la simulation 2D a une amplitude plus élevée que les mesures. De plus, les exposants obtenus numériquement sont légèrement plus faibles que ceux issus des expériences.

La contribution principale de cet outil numérique est la capacité d'analyser précisément les chocs entre deux surfaces rugueuses. Le choc est défini à partir de l'évolution de la force de contact en fonction du temps. Lorsque la force est positive, le choc débute. Les spécificités sont la durée de choc, la valeur maximale de la force de contact, le nombre de chocs par seconde. La durée est de l'ordre de $1e-4$ s, la force de contact maximale est éventuellement étant à 1000 fois le poids propre du glisseur et le nombre de chocs par seconde est de $1e4$. *Donc, les chocs sont des excitations transitoires qui possèdent une durée brève mais intense et abondante.*

Une augmentation de la vitesse de glissement ou de la rugosité de surface entraînent l'accroissement de l'intensité de la force de contact. Le contact devient moins continu (le nombre de chocs par seconde diminue), la durée de choc reste autour de $1e-4$ s. L'analyse des chocs permet aussi de découvrir le processus de transfert énergétique. Les chocs sont considérés comme la source principale de l'énergie vibratoire. Cependant, il existe aussi des "chocs inverses" qui ont le pouvoir dissiper l'énergie vibratoire.

Chapitre 6

Simulation 3D

La simulation 3D du problème de contact dynamique de deux surfaces rugueuses est présentée dans ce chapitre. La vibration des surfaces est modélisée en utilisant la théorie des plaques minces de Love [57]. L'équation du mouvement est résolue numériquement par le schéma d'intégration temporelle aux différences centrées, et le calcul de contact est réalisé par l'algorithme de pénalité. Cette approche est implémentée dans le programme Ra3D en langage C et un programme MRa3D en Matlab pour le post traitement des résultats.

La réalisation d'une modélisation 3D présente plusieurs difficultés. Du point de vue théorique, la recherche des modes propres de vibration est difficile car il n'existe pas de solution analytique pour les conditions aux limites spécifiques. Dans notre cas, il s'agit d'une plaque appuyée aux quatre coins. Sur le plan numérique, le problème majeur provient du temps CPU et de la taille des fichiers de résultats. À titre d'exemple, pour une simulation 2D, le résonateur est présenté par un profil de 45 cm de longueur, un pas spatial de 40 μm , et de 12501 noeuds, alors que pour une simulation 3D, le résonateur est composé d'une surface de 45 \times 30 cm, d'un pas spatial de 40 μm , et 12501 \times 7501 noeuds. Donc, le temps CPU utilisé pour la détection de contact est augmenté de 7501 fois. D'autre part, la taille d'un fichier de résultats est considérable, souvent de l'ordre 10 Go, et si l'on veut avoir des animations, elle peut monter à 100 Go.

Grâce à la rapidité, l'optimisation et la pertinence de l'approche numérique décrite dans chapitre 3, une version pour la modélisation 3D est développée.

6.1 Formulation mathématique

Sur la figure 6.1, sont illustrés le modèle pour la simulation 3D et ses deux projections sur les plans vertical et horizontal. Deux repères attachés respectivement au profil inférieur et supérieur sont introduits. Le repère (O_1, x_1, y_1, z_1) est fixe, l'axe z_1 orienté en haut, l'axe x_1 coïncide avec la longueur de la plaque inférieure. Alors que le repère (O_2, x_2, y_2, z_2) se déplace à la vitesse V , l'axe z_2 orienté vers le bas. L'écart vertical entre les deux surfaces est δ alors que les écarts horizontaux dans les directions x, y sont

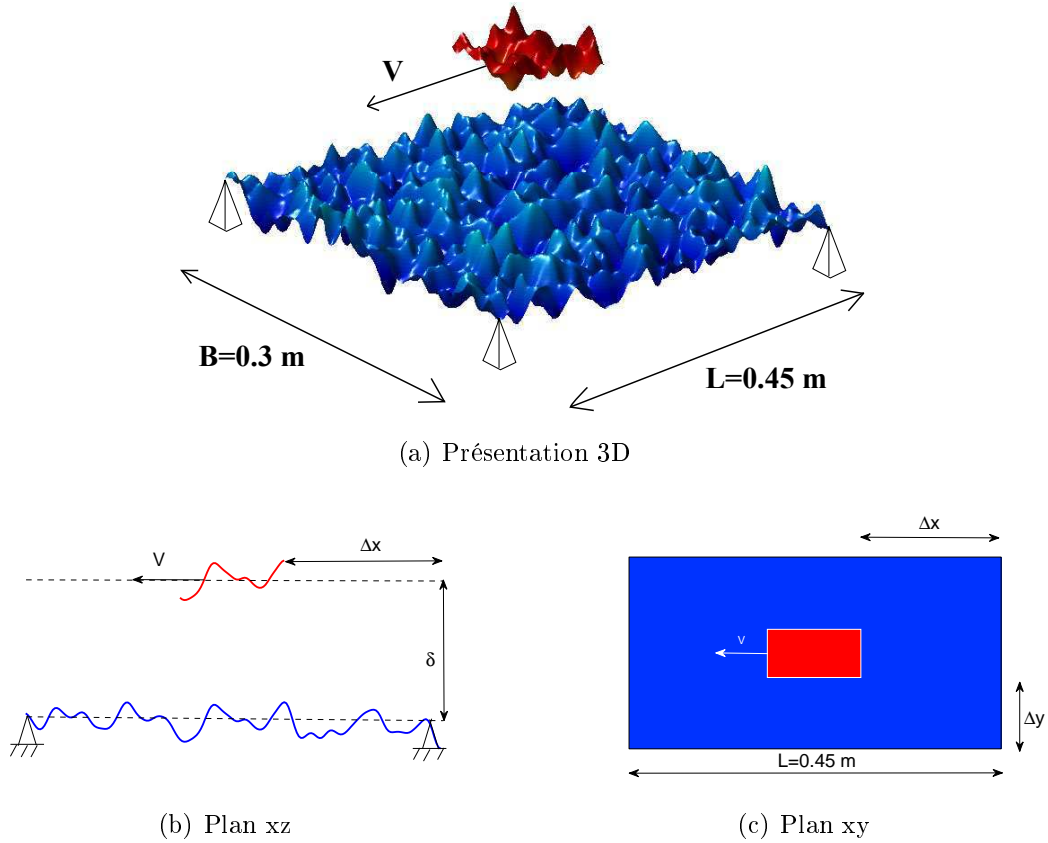


FIGURE 6.1 – Modèle de contact glissant entre deux surfaces rugueuses. La surface supérieure se déplace à une vitesse constante V dans la direction x (la longueur de la surface inférieure). L'écart horizontal entre deux profils est $\Delta x = Vt$ dans la direction x et $\Delta y = ct$ dans la direction y .

respectivement Δ_x, Δ_y . Le changement de repère est effectué par les formules suivantes :

$$x_2 = x_1 - \delta_x - Vt; \quad y_2 = y_1 - \delta_y; \quad z_2 = \delta - z_1. \quad (6.1)$$

Les hypothèses ci-dessous sont appliquées :

- Les surfaces sont infiniment rigides dans le plan horizontal, la position horizontale des noeuds est fixée.
- Les surfaces ne peuvent pas pénétrer l'une dans l'autre.
- La persistance du contact entre les deux surfaces est assurée par la force de gravité.

L'équation de la vibration de flexion d'une plaque amortie forcée est donnée par la formule suivante [37] :

$$D_i \nabla^4 u_i + c_i \dot{u}_i + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i(x_i, y_i, t) \mp m_i g, \quad (6.2)$$

où D_i est la rigidité de flexion et défini par :

$$D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (6.3)$$

E est le module d'Young, h_i l'épaisseur du solide, ν le coefficient de Poisson, $m_i = \rho \cdot h_i$ est la masse surfacique, ρ la masse volumique, c le coefficient d'amortissement visqueux, $f_i(x_i, y_i, t)$ la force de contact par unité de surface et ∇^2 l'opérateur de Laplace :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.4)$$

La force de gravité est négative $-m_1g$ pour la surface inférieure et positive pour la surface supérieure m_2g .

La plaque inférieure (résonateur) est appuyée aux quatre coins. Pour les points situés sur les bords libres, il faut :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (6.5)$$

pour $x = 0$ ou $x = L_i$, et :

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2-\nu) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \quad (6.6)$$

pour $y = 0$ ou $y = B_i$.

Pour les points appuyés, le déplacement est nul :

$$u_i(0, 0) = u_i(0, B_i) = u_i(L_i, 0) = u_i(L_i, B_i) = 0 \quad (6.7)$$

À l'instant initial, le système est en repos :

$$u_i(x_i, y_i, 0) = \dot{u}_i(x_i, y_i, 0) = \ddot{u}_i(x_i, y_i, 0) = 0 \quad (6.8)$$

La fonction de distance verticale entre les deux surfaces est définie par :

$$g(x_1, y_1, t) = \delta - h_1(x_1, y_1) - u_1(x_1, y_1, t) - h_2(x_1 - V.t, y_1) - u_2(x_1 - V.t, y_1, t). \quad (6.9)$$

La condition de non-pénétration s'écrit :

$$g(x_1, y_1, t) \geq 0; \quad f(x_1, y_1, t) \geq 0; \quad g(x_1, y_1, t) \cdot f(x_1, y_1, t) = 0. \quad (6.10)$$

Les équations (6.2, 6.6, 6.8 et 6.10) constituent la formulation mathématique du problème de contact dynamique que nous traitons dans ce chapitre. Il faut trouver les solutions de l'équation du mouvement en satisfaisant les conditions aux limites, la condition initiale et la condition de non-pénétration du contact.

6.2 Décomposition modale

En utilisant la méthode de décomposition modale, le déplacement vertical de la plaque est exprimé sous la forme des contributions des modes propres :

$$u_i(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{i,k}(t)\psi_{i,k}(x, y), \quad (6.11)$$

et pareillement pour la force :

$$f_i(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{i,k}(t)\psi_{i,k}(x, y), \quad (6.12)$$

où $\psi_{i,k}(x, y)$ est le mode propre de flexion de la poutre i , $U_{i,k}(t)$, $F_{i,k}(t)$ sont l'amplitude modale et la force modale. k désigne le mode de vibration. Les modes sont classés par ordre croissant de fréquence propre.

En introduisant l'équation (6.11) dans l'équation (6.2) en multipliant par $\psi_{i,k}$, en intégrant sur la surface et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes propres l'équation (6.15), on obtient l'équation modale du mouvement :

$$m_i \left[\omega_{i,k}^2 U_{i,k}(t) + 2\zeta_{i,k} \dot{U}_{i,k}(t) + \ddot{U}_{i,k}(t) \right] = \int_0^{L_i} \int_0^{B_i} (f_i(x_i, y_i, t) \mp m_i \cdot g) \cdot dx \cdot dy \quad (6.13)$$

où $\zeta_{i,k} = c_i / (2m_i \omega_{i,k})$ est le coefficient d'amortissement modal.

6.3 Problème modal

Les modes propres sont déterminés par la résolution du problème suivant :

$$D_i \nabla^4 \psi_{i,k}(x_i, y_i) = \omega_{i,k}^2 m_i \psi_{i,k}(x_i, y_i) \quad (6.14)$$

Les modes propres $\psi_{i,k}(x, y)$ sont classés par ordre croissant de fréquence et satisfont la condition d'orthogonalité :

$$\int_0^{L_i} \int_0^{B_i} \psi_{i,k} \cdot \psi_{i,l} \cdot dx_i \cdot dy_i = \delta_{k,l}. \quad (6.15)$$

Trois modes de corps rigide sont pris en compte pour la surface supérieure. Un mode pour la translation verticale selon l'axe z et deux modes de rotation autour des axes Ox et Oy .

Pour calculer les modes propres d'une plaque 3D avec les conditions aux limites correspondantes, on a deux méthodes possibles : l'utilisation de formules analytiques ou d'un code éléments finis. Le logiciel éléments finis utilisé est Abaqus Standard [3]. Cette procédure comporte les étapes suivantes :

- On crée un modèle de plaque en introduisant les paramètres physiques comme le matériau, la géométrie, les conditions aux limites.

- Ensuite on discrétise la plaque avec un pas spatial suffisamment petit, dans cette étape, une discrétisation à haute résolution n'est pas nécessaire car seuls les modes contenus dans la gamme audio seront utiles.
- En utilisant le solveur d'Abaqus, on peut obtenir les valeurs des fréquences propres de la plaque ainsi que la forme de chaque mode propre.
- Ensuite il est nécessaire de créer un programme qui convertit le fichier de résultats d'Abaqus en un fichier de données utilisable par le programme Ra3D.
- Pour obtenir l'amplitude modale en tout lieu de la plaque, on va utiliser les formules d'interpolation.

Avec cette méthode, les résultats obtenus sont approximatifs en raison à la fois de l'utilisation du logiciel Abaqus et des formules d'interpolation. Mais elle est capable de fournir les résultats nécessaires quelle que soient les conditions aux limites pour lesquelles il n'existe pas de formule analytique comme dans le cas d'appui aux quatre coins.

Dans la bande de fréquences audibles, il y a au total 460 modes de vibration pour le résonateur, ils sont classés dans l'ordre croissant de la fréquence propre $f_1=27$ Hz, $f_{460}=20011$ Hz. Des exemples de modes obtenus grâce au logiciel Abaqus/STANDARD sont présentés figure 6.2, où la couleur rouge exprime la déformation maximale, le bleu indique les zones non-déformées.

6.3.1 Schéma d'intégration temporelle

Afin de résoudre numériquement, l'équation (6.13), on utilise le schéma d'intégration temporelle aux différences centrées. Avec celui-ci, les valeurs de la vitesse modale et de l'accélération modale sont approximées par :

$$\begin{cases} \dot{U}_{i,k,n} = \frac{U_{i,k,n+1} - U_{i,k,n-1}}{2\tau}, \\ \ddot{U}_{i,k,n} = \frac{U_{i,k,n+1} - 2U_{i,k,n} + U_{i,k,n-1}}{\tau^2}. \end{cases} \quad (6.16)$$

L'introduction de l'équation (6.16) dans l'équation (6.13) nous donne une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$U_{i,k,n+1} - \frac{2 - (\tau\omega_{i,k})^2}{1 + \tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k}} U_{i,k,n} - \frac{\tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k} - 1}{1 + \tau\zeta_{i,k}\omega_{i,k}} U_{i,k,n-1} = \tau^2 \frac{F_{i,k,n} \mp G_{i,k}}{m_i}. \quad (6.17)$$

6.3.2 Méthode de pénalité

Interpolation de la surface

La surface bicubique d'Hermite est formée à partir de deux familles de la courbe cubique d'Hermite. Seize points sont nécessaires pour l'interpolation de la surface [54]. La formule pour la surface bicubique d'Hermite est :

$$h_i(x_{i,l}, y_{i,m}) = \sum_{r=0}^3 \sum_{p=0}^3 R_r(\xi) P(p)(\theta) h_{i',l'-1+r,m'-1+p}(x(i', l'-1+r), y(i', m'-1+p)) \quad (6.18)$$

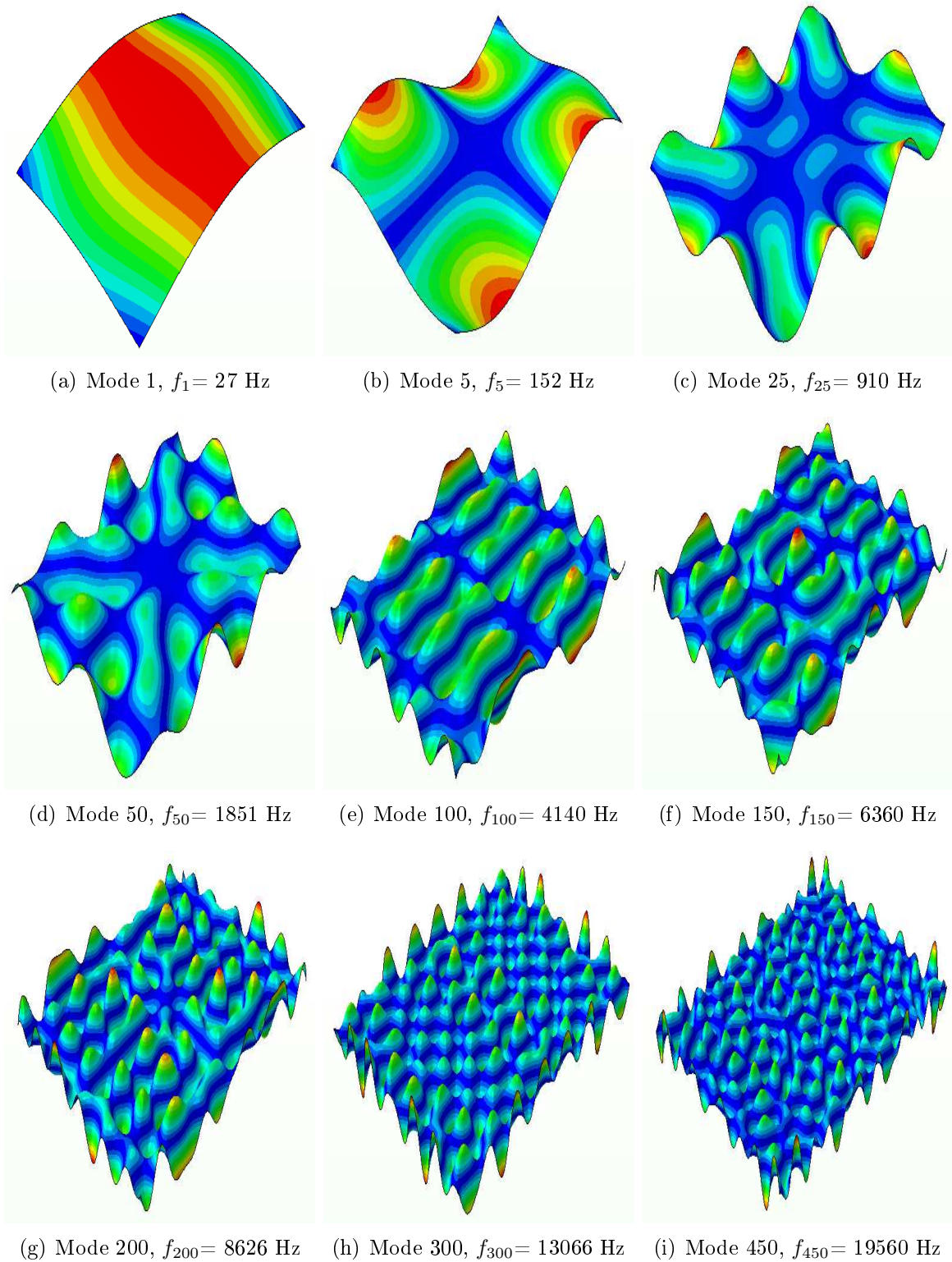


FIGURE 6.2 – Mode de la vibration du résonateur appuyé aux quatre coins.

où ξ, θ sont les coordonnées locales du point esclave $(x_{i,l}, y_{i,m})$ sur la facette maître formée par quatre noeuds $(x_{i',\nu}, y_{i',m'}), (x_{i',\nu+1}, y_{i',m'}), (x_{i',\nu+1}, y_{i',m'+1}), (x_{i',\nu}, y_{i',m'+1})$. La présentation graphique des noeuds m, l, m', ν est donnée dans la figure 6.3. $R_r(\xi)$ et

$P_p(\theta)$ sont les fonctions d'interpolation [90] :

$$\begin{cases} R_0(\xi) = -0.5\xi + \xi^2 - 0.5\xi^3, \\ R_1(\xi) = 1 - 2.5\xi^2 + 1.5\xi^3, \\ R_2(\xi) = 0.5\xi + 2\xi^2 - 1.5\xi^3, \\ R_3(\xi) = -0.5\xi^2 + 0.5\xi^3. \end{cases} \quad (6.19)$$

de même pour $P_p(\theta)$.

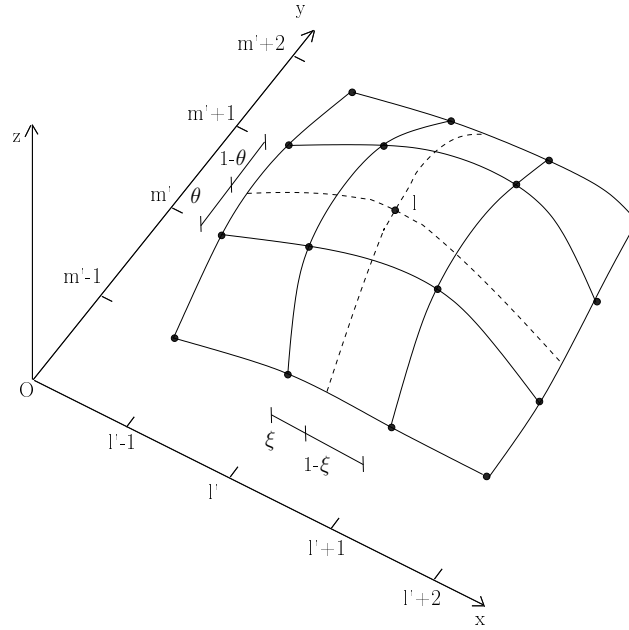


FIGURE 6.3 – Patch bicubique d'Hermite et projection verticale du noeud esclave

En appliquant la discrétisation spatiale et l'interpolation de surface à la formule du jeu vertical 6.9, on obtient :

$$g_{i,m,l,n} = \delta - (h_{i,m,l} + u_{i,m,l,n}) - \sum_{r=0}^3 \sum_{p=0}^3 R_r(\xi) P_p(\theta) [h_{i',l'-1+r,m'-1+p} + u_{i',l'-1+r,m'-1+p}] \quad (6.20)$$

Force de contact

Comme les ressources utilisées pour la simulation 3D sont importantes on a choisi la méthode de pénalité pour calculer la force de contact. La procédure de calcul est similaire à celle de la simulation 2D. D'abord on détecte les pénétrations dont la valeur de la distance verticale déterminée par l'équation (6.20) est négative ($g_{i,m,l,n} < 0$). Ensuite la force de contact est calculée par une relation explicite avec la pénétration :

$$f_{i,m,l,n} = \kappa \cdot g_{i,m,l,n} \quad (6.21)$$

Les réactions des forces appliquées aux noeuds des facettes de la surface maître sont déterminées proportionnellement à la contribution du noeud dans le calcul de la

pénétration :

$$f_{i',m'-1+r,l'-1+p,n} = R_r(\xi)P_p(\theta) \cdot f_{i,m,l,n} \quad (6.22)$$

Une fois que les forces de contact à l'instant n sont obtenues, on calcule les forces modales, puis le déplacement modal à l'instant t_{n+1} par l'équation (6.17).

6.4 Résultats et discussion

6.4.1 Surface numérique

Les surfaces rugueuses sont générées à l'aide de la méthode spectrale et du programme de Berstrom [15]. Les surfaces générées sont isotropiques et ont des propriétés proches de celles des surfaces utilisées dans l'expérience $Ra = 5 \mu\text{m}$, skewness $Rsk \simeq 0$ et kurtosis $Rku \simeq 3$. La surface générée est présentée dans la figure 6.4. La distribution des hauteurs est gaussienne.

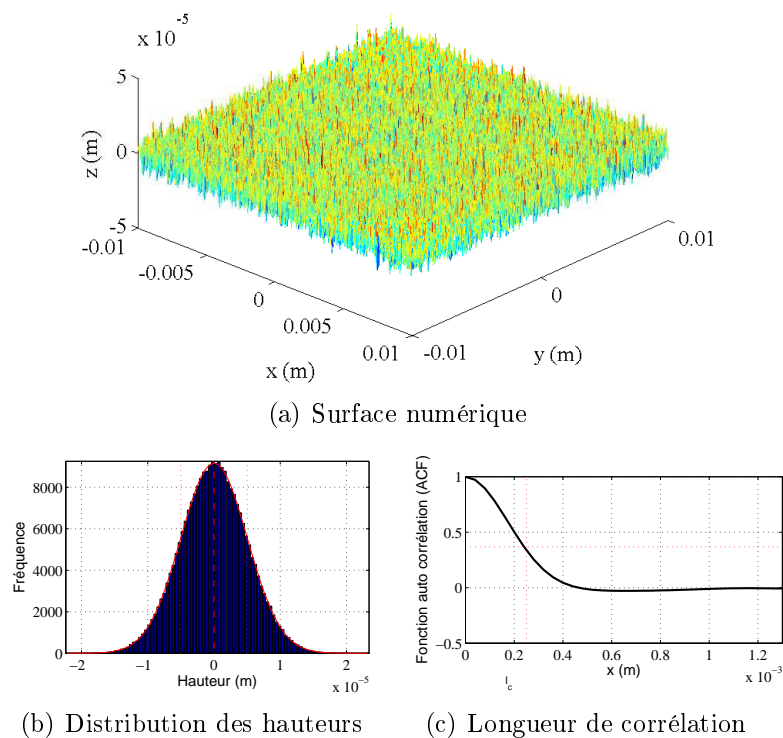


FIGURE 6.4 – Surface simulée $Ra=5 \mu\text{m}$

TABLE 6.1 – Surface numérique

Ra (μm)	Rkewness (μm)	Kurtosis (μm)	Moyenne (μm)	Longueur de corrélacion (μm)
5.03	0.01	3.01	0.01	60

6.4.2 Paramètres des simulations

Les paramètres des simulations sont donnés dans le tableau 6.2. La plaque est une structure mince de dimension 45x30x0.02 (cm), il y a au total 459 modes dont les fréquences sont dans la bande de fréquences audibles. $f_1=26.8$ Hz, $f_{460}=20011$ Hz. C'est-à-dire 15 fois plus que pour la simulation 2D équivalente (30 modes).

Le pas de temps est $1e-7$ (s) ce qui assure la stabilité du schéma d'intégration aux différences centrées et est inférieur à la durée des chocs. Une simulation 3D prend un temps CPU très long (10000 fois plus qu'une simulation 2D). C'est pourquoi, la durée de simulation ne dépasse pas 0.1 s, le pas spatial est de $40 \mu\text{m}$ ce qui est plus grand que pour la simulation 2D, la vitesse de glissement est choisie de 0.1 à 0.9 m/s. Donc le passage de glissement est de 1 à 9 cm. Pour une telle simulation, le temps CPU est 58 heures.

TABLE 6.2 – Données du problème glisseur-résonateur 3D

Matériau			Résonateur			Glisseur			
E (Pa)	ρ (kg/m)	η	H (m)	L (m)	B (m)	H (m)	L (m)	B (m)	Vitesse (m/s)
210e9	7800	0.0006	0.002	0.45	0.30	0.005	0.02	0.02	0.1 → 0.9

TABLE 6.3 – Paramètres de simulation du modèle glisseur-résonateur 3D

Pas spatial (m)	Pas de temps (s)	Durée (s)	Nombre de mode	Temps CPU (h)	f_1 (Hz)	f_{460} (Hz)
40e-6	1e-7	0.1	460	58	26.8	20011

Le fichier de résultats du programme de Ra3D contient la force de contact en chaque noeud, la vitesse vibratoire en un noeud fixé et le déplacement de chaque noeud. Ces variables sont enregistrées au cours de la simulation avec une fréquence d'échantillonnage de 100 kHz. Par la suite, un programme de traitement MRa3D en Matlab permet de déterminer les chocs et leurs spécificités à partir des forces de contact. Sur le tableau 6.4 sont présentées les informations quantitatives des chocs. Ces derniers sont choisis d'une manière aléatoire. Grâce au programme Ra3D, pour chaque choc, on peut connaître sa durée, son instant du début, sa position, sa force maximale, son énergie transférée.

Le temps CPU est le facteur crucial pour la réalisation d'une simulation 3D et a des relations étroites avec les paramètres donnés tels que le nombre de modes, le pas spatial, le pas de temps. Afin d'évaluer l'influence exacte des ces paramètres sur le temps CPU, une étude sur la scalabilité [72] du programme Ra3D est présentée dans ce paragraphe. Tout d'abord on choisit une simulation avec vitesse de glissement V et rugosité de surface Ra fixées comme référence, $V=10$ cm/s et $Ra=5 \mu\text{m}$. Les paramètres de la simulation de référence sont : pas spatial $40 \mu\text{m}$, pas de temps $\tau=1e-7$ (s), nombre de modes 100, fréquence d'échantillonnage $f=100$ kHz, durée de simulation $T=0.001$ s. Le temps CPU pour une telle simulation est 459 s. Trois types de scalabilité sont investigués : scalabilité temporelle pour le pas de temps, scalabilité spatiale pour le pas

TABLE 6.4 – Tableau des chocs obtenus par le schéma aux différences centrées et l'algorithme de pénalité

N° choc	Début (s)	Durée (s)	Position (mm)	Force maximale (N)	Énergie transférée (J)
10101	0.8062	4.9e-4	117.83	6.3500	0.8e-6
10202	0.6747	1.2e-4	117.93	0.0281	-4.0e-8
10303	0.6748	8.0e-5	117.96	0.0062	-4.8e-8
10404	0.2250	7.0e-5	118.48	0.0030	7.5e-5
10505	0.5518	9.8e-4	118.50	0.1580	-0.1e-6
10606	0.6991	4.4e-4	118.69	0.5450	0.8e-6
10707	0.5371	3.7e-4	118.71	1.2550	-4.1e-6
10808	0.1298	7.0e-5	118.73	0.0135	4.6e-9
10909	0.3685	2.4e-4	119.13	0.1920	-0.8e-6
11010	0.1281	1.9e-4	119.14	0.5800	-4.0e-6

spatial, scalabilité modale pour le nombre de modes. Pour chaque type de l'étude de scalabilité, le paramètre concerné est changé (5 fois pour chaque étude) alors que les autres sont gardés identiques comme dans la simulation de référence.

- Le nombre de modes vaut respectivement 10, 50, 100, 200, 300.
- Le pas spatial vaut respectivement 5, 10, 50, 100, 500 (μm).
- Le pas de temps vaut respectivement 5e-9, 1e-8, 5e-8, 1e-7, 5e-7 (s).

La figure 6.5 représente le temps CPU en fonction du pas spatial choisi (en haut, de 5 μm à 500 μm) et du nombre de noeuds (en bas, de 1600 noeuds à 1.6e7 noeuds pour le glisseur). Ces deux relations ont la même nature de scalabilité spatiale, car en diminuant le pas spatial, on augmente le nombre de noeuds. Par exemple, avec un pas spatial deux fois inférieur, le nombre de noeuds est quatre fois plus grand. La relation entre le temps CPU et le nombre de noeuds est $t \sim N_x^{0.74}$ où N_x est le nombre de noeuds, par exemple avec 4e6 noeuds, le temps CPU est 7500 s, et avec 16e6 noeud, le temps CPU est 30e4 s.

La scalabilité temporelle du programme Ra3D est présentée figure 6.6, le pas de temps est pris de 5e-9 à 5e-7 s (deux ordres de grandeur). Afin de prédire la loi d'évolution du temps CPU, cette relation est retracée avec une échelle du CPU en fonction de τ dans le repère logarithmique dans laquelle une ligne droite est obtenue $t \sim \tau^{-0.81}$ où x est le pas de temps. On rappelle que l'algorithme de contact consiste en deux étapes : détection du contact et calcul des forces de contact. Lorsqu'il n'y a pas de contact, le temps CPU est consommé seulement par la détection du contact, et donc il est simplement inversement proportionnel au pas de temps. En revanche, dans le cas où un contact est détecté, il faut calculer la force et la réaction de contact, puis la force modale, et sauvegarder la force de contact sous forme d'une matrice creuse. C'est-à-dire que le temps CPU pris pour un instant où le contact a lieu est supérieur à celui d'un instant sans contact. D'ailleurs, un pas de temps affiné permet de détecter précisément le contact, c'est pourquoi la relation entre le temps CPU et le pas de temps choisi n'est pas simplement linéaire.

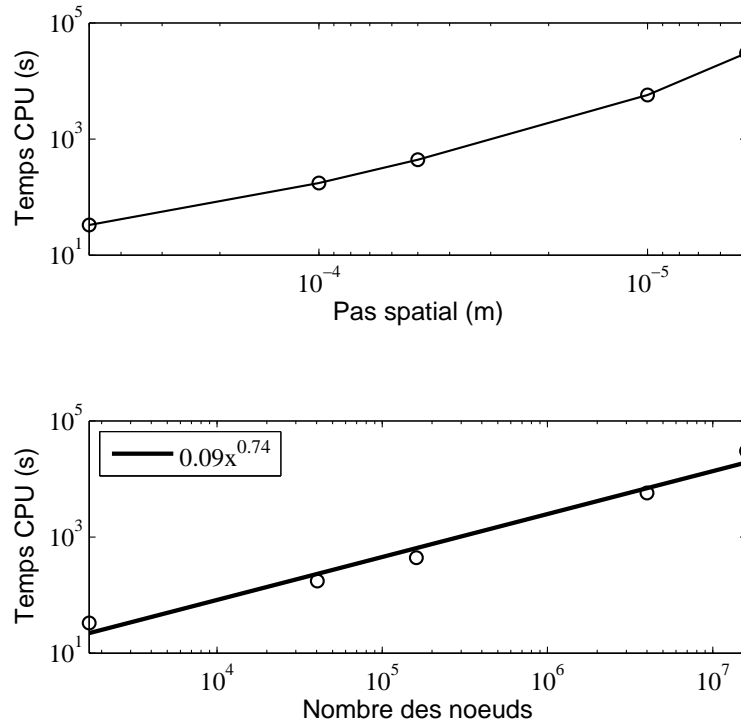


FIGURE 6.5 – Scalabilité spatiale

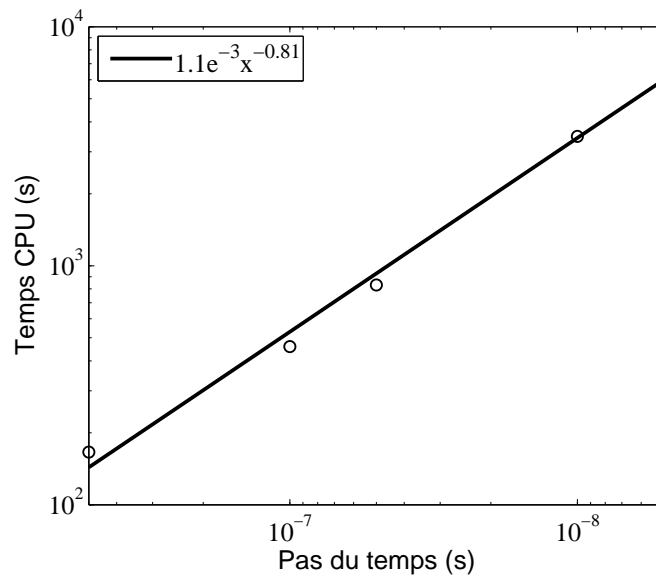


FIGURE 6.6 – Scalabilité temporelle

La scalabilité modale est illustrée dans la figure 6.7. Le nombre de modes utilisés est de 10 à 300 modes, et tous les modes ont leur fréquence dans la bande audio de 20 Hz à 20 kHz. De manière attendue, on observe une ligne droite qui présente la relation proportionnelle entre le temps CPU et le nombre de modes utilisés $t \sim Nm$ où Nm est le nombre de modes.

Cette étude de scalabilité nous permet d'effectuer le changement d'échelle pour les simulations 3D avec les paramètres réels équivalents à l'expérience. En fait, pour obtenir les courbes de l'évolution du niveau vibratoire L_v en fonction de la rugosité et de la

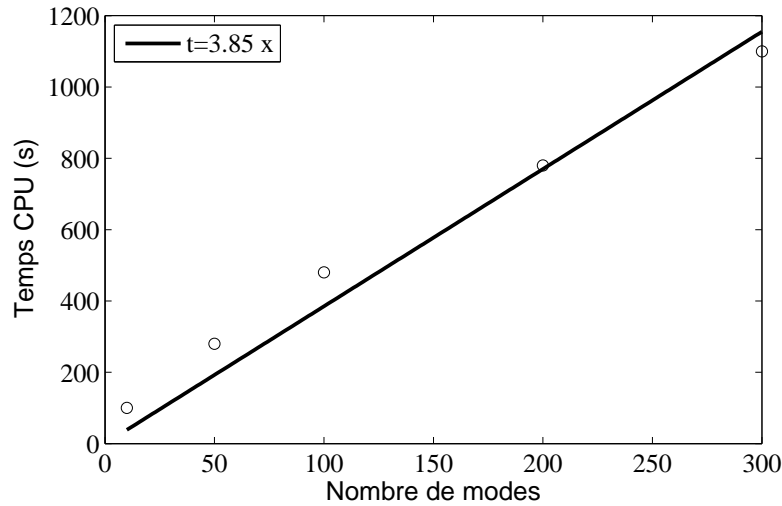


FIGURE 6.7 – Scalabilité modale

vitesse de glissement, il nous faut 50 simulations ayant un pas de temps de $1e-7$ s, un pas spatial de $4 \mu\text{m}$, une fréquence d'échantillonnage $f = 100$ kHz, une durée de simulation $T=1$ s et le nombre de modes $Nm=460$. Une simulation avec ces paramètres demande :

$$460 * 4.6 * 1000 * 100^{0.74} = 5.54e7(s) = 736 \text{ jours} \quad (6.23)$$

de temps CPU sur une machine équipée un processeur de 3.14 GHz et 8 Go RAM, et donc $736*50$ jours de temps CPU au total sans compter que chaque calcul doit être réalisé plusieurs fois. Cela nous conduit à l'utilisation de méso-centres de calcul avec lesquels on peut effectuer du calcul parallèle. Plusieurs simulations peuvent être réalisées simultanément, par exemple, 60 calculs simultanés sur le calculateur Kepler. Ou le code lui-même peut être parallélisé : plusieurs processeurs sont utilisés pour une seule simulation.

Dans le cadre de cette thèse, on se limite à des simulations dont le temps CPU ne dépasse pas trois jours de calculs (un facteur de 250 par rapport au temps CPU estimé) car en réalité il n'est pas certain qu'un seul lancement de calcul soit suffisant pour fournir de bons résultats. Des difficultés peuvent ne pas être détectées avec la simulation 2D et les cas test sont souvent apparus. Exemple l'utilisation de l'option supplémentaire "mcmode=large" pour le compilateur gcc lorsque la mémoire nécessaire aux données excède les 2 Go (environ 5 Go dans notre cas) et les erreurs humaines au cours de la programmation. Donc, avec trois jours de temps CPU, un pas spatial de $40 \mu\text{m}$ est choisi car le pas de temps doit être suffisamment petit pour assurer la stabilité du schéma d'intégration temporelle, et la diminution de nombre de modes ne baisse pas suffisamment le temps de calcul.

6.4.3 Force de contact des chocs

Dans cette section, on présente les résultats des simulations 3D. Le traitement de ces résultats est similaire à celui de la simulation 2D. Tout d'abord, le choc est déterminé à partir de l'évolution de la force de contact d'un noeud. Le choc est caractérisé par sa durée, la force de contact maximale et l'énergie transférée. Dans l'ensemble, on s'intéresse

à l'histogramme et à la fonction cumulative des probabilités de ces caractères et au nombre de chocs par seconde.

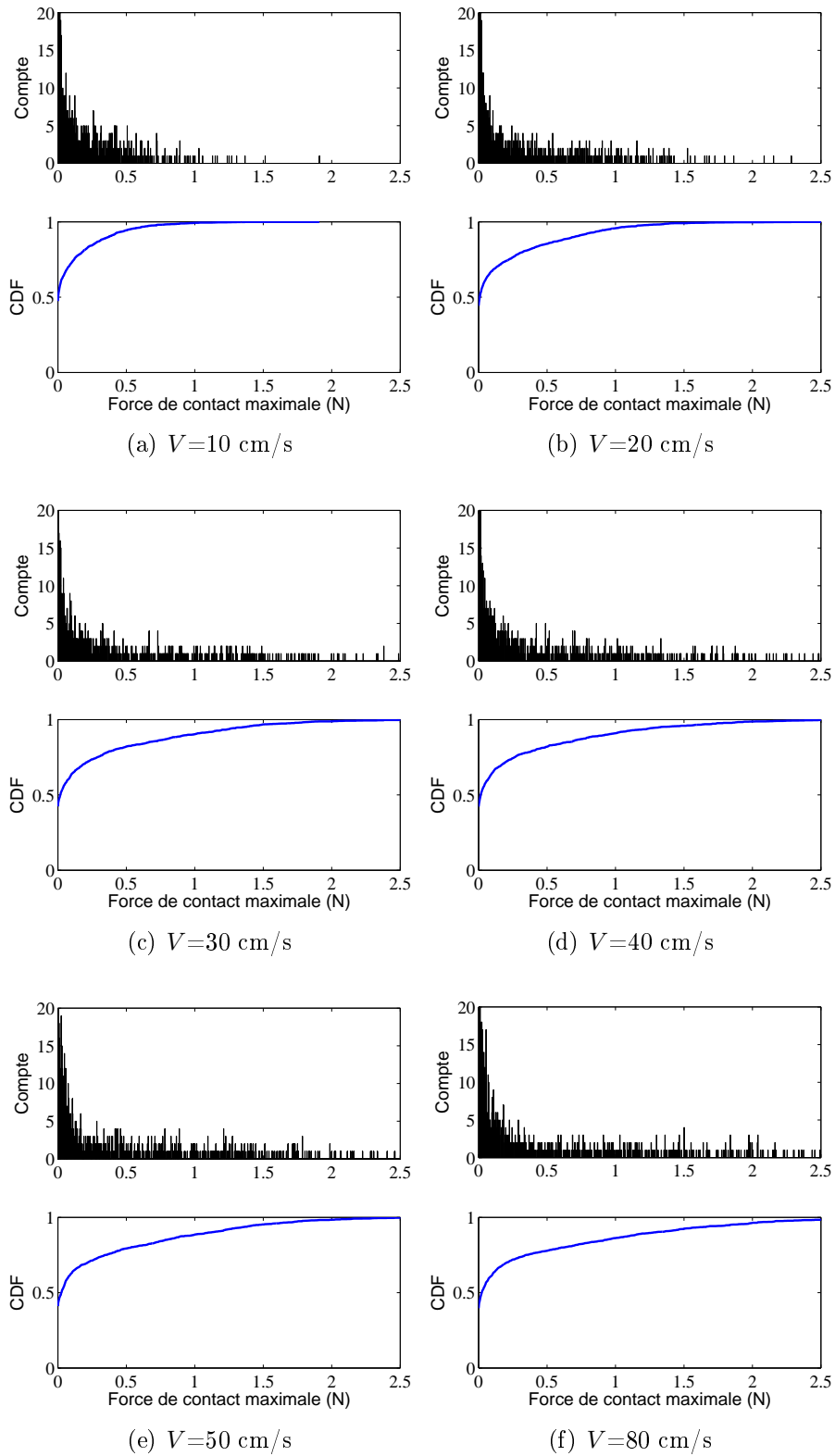


FIGURE 6.8 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la force de contact maximale de choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement

Dans la figure 6.8 sont illustrés l'histogramme (en haut) et la fonction cumulative des probabilités (en bas) de la valeur maximale de la force de contact des chocs dans le cas où la rugosité de la surface est de $5 \mu\text{m}$ et six vitesses de glissement de 0.1 à 0.8 m/s. La force augmente avec la vitesse par exemple, avec une valeur de CDF égale à près de 1, les valeurs de la force maximale correspondant aux vitesses $V=0.2, 0.4, 0.8$ (m/s) sont respectivement 1.5, 2.0 et 2.5 (N).

Ensuite, on calcule la force totale de contact appliquée à la surface du résonateur à l'instant n quelconque. Pour calculer cette grandeur, il faut d'abord chercher tous les noeuds en contact à l'instant n et puis sommer les forces de contact appliquées à ces noeuds :

$$f_{i,n,total} = \sum_{l=1}^{N_i} f_{i,m,l,n} \cdot \chi_i^2 \quad (6.24)$$

où N_i est le nombre de noeud, χ_i est le pas spatial du profil i et $f_{i,m,l,n}$ est la force de contact par unité de surface au noeud m, l de la surface i à l'instant n . Sur la figure 6.9 est illustrée la force totale de contact appliquée à la surface du résonateur.

On observe que la force totale de contact augmente selon la vitesse de glissement. Et dans le cas $V=80$ cm/s, la force totale de contact peut atteindre une valeur de 24 N soit 160 fois plus que le poids propre du glisseur (0.15 N).

6.4.4 Durée des chocs

Puis, on présente les résultats statistiques sur la durée des chocs figure (6.10). La plupart des chocs ont une durée entre $1\text{e-}5$ et $1\text{e-}4$ (s). Lorsque la vitesse est faible, quelques chocs durent pourtant plus longtemps (0.2 (ms)) comme dans le cas de $V=0.1$ m/s.

La courbe de CDF nous permet d'observer plus clairement l'évolution de la durée de choc avec la vitesse de glissement. Lorsque le CDF atteint près de 1, les valeurs de durée de choc pour trois vitesses de glissement 0.2, 0.4 et 0.8 m/s sont respectivement 0.2, 0.16 et 0.13 (ms). La durée de choc a tendance à diminuer lorsque la vitesse augmente.

6.4.5 Énergie transférée par choc

L'énergie transférée par choc est calculée en fonction de la force de contact et de la vitesse vibratoire au point de contact :

$$e_{choc} = \int_0^{\tau} f_i(x_i, y_i, t) \dot{u}_i(x_i, y_i, t) \cdot dx \cdot dy \cdot dt \quad (6.25)$$

où $f_i(x_i, y_i, t)$, $\dot{u}_i(x_i, y_i, t)$ sont respectivement la force de contact et la vitesse vibratoire au point de contact, τ est la durée de choc.

L'énergie totale transférée vers le résonateur de l'instant initial à l'instant t est égale à la somme des énergies élémentaires transférées par tous les chocs. L'évolution de cette variable en fonction du temps est présentée figure 6.11. Par convention, on considère

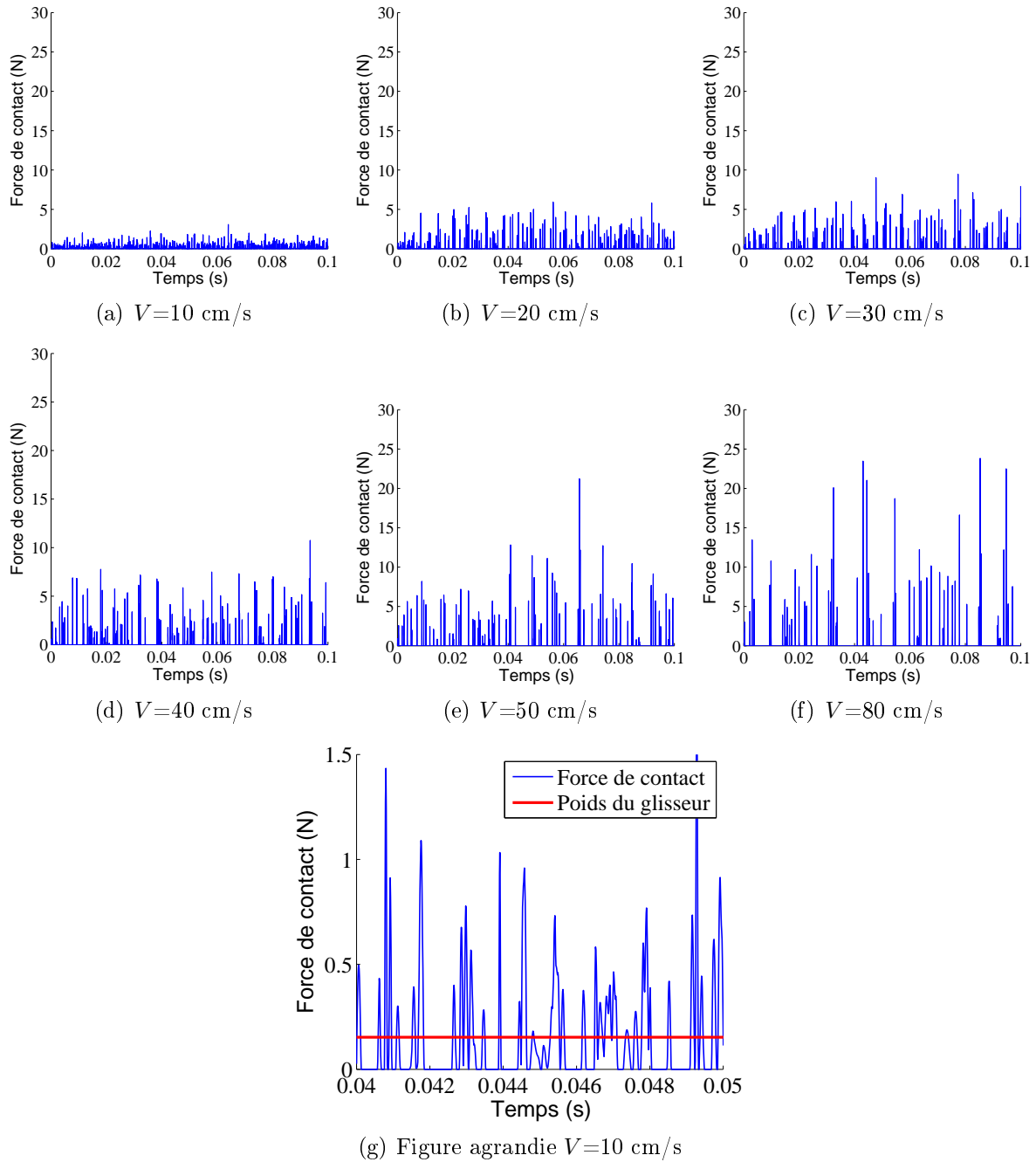


FIGURE 6.9 – Force totale de contact avec les surfaces de $Ra=5 \mu m$ rugosité et différentes vitesses de glissement

que cette énergie est comptée positive lorsque le transfert s'effectue du glisseur vers le résonateur.

Dans la figure 6.12 sont présentés l'histogramme (en haut) et la fonction cumulative des probabilités (en bas) de l'énergie transférée par choc. Cette énergie est calculée à partir de l'équation (6.25). L'énergie vibratoire du résonateur peut être injectée ou dissipée par les chocs mais la somme de l'énergie transférée est toujours positive. En outre, l'amplitude de l'énergie transférée augmente avec la vitesse de glissement.

D'ailleurs, nous nous intéressons à l'évolution de l'énergie transférée moyenne, notée

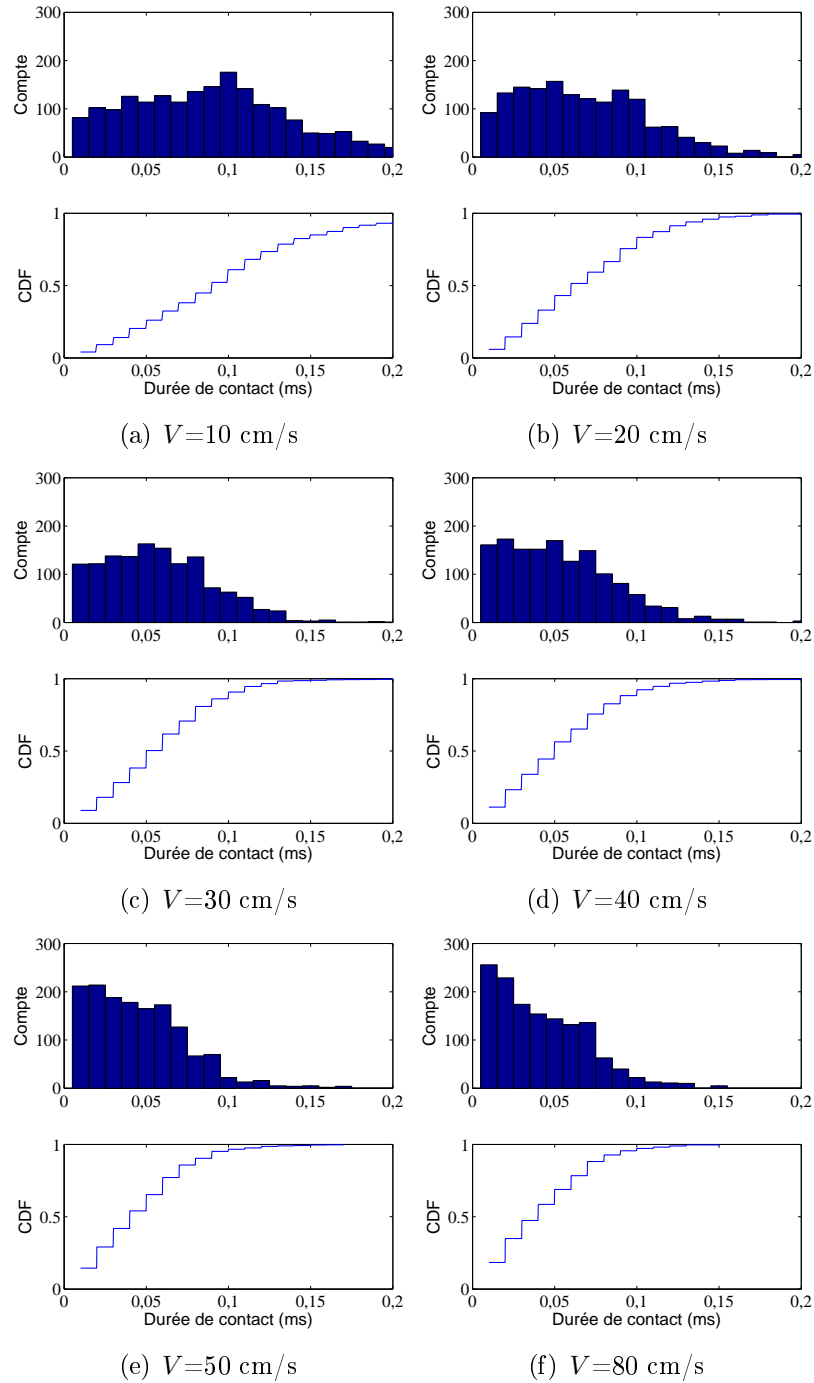


FIGURE 6.10 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la durée de choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement

ϵ en fonction de la vitesse de glissement. Cette valeur moyenne est obtenue en divisant la somme de l'énergie transférée de tous les chocs par le nombre total de chocs. Cette évolution est présentée dans la figure 6.13a. C'est une loi exponentielle approximée par la relation suivante $\epsilon \sim V^{1.67}$

Contrairement à l'évolution de l'énergie transférée moyenne, le nombre de chocs par seconde η (le nombre de chocs par seconde) diminue avec la croissance de la vitesse. Cette constatation est prouvée par la figure 6.13b et la relation $\eta \sim V^{-0.33}$

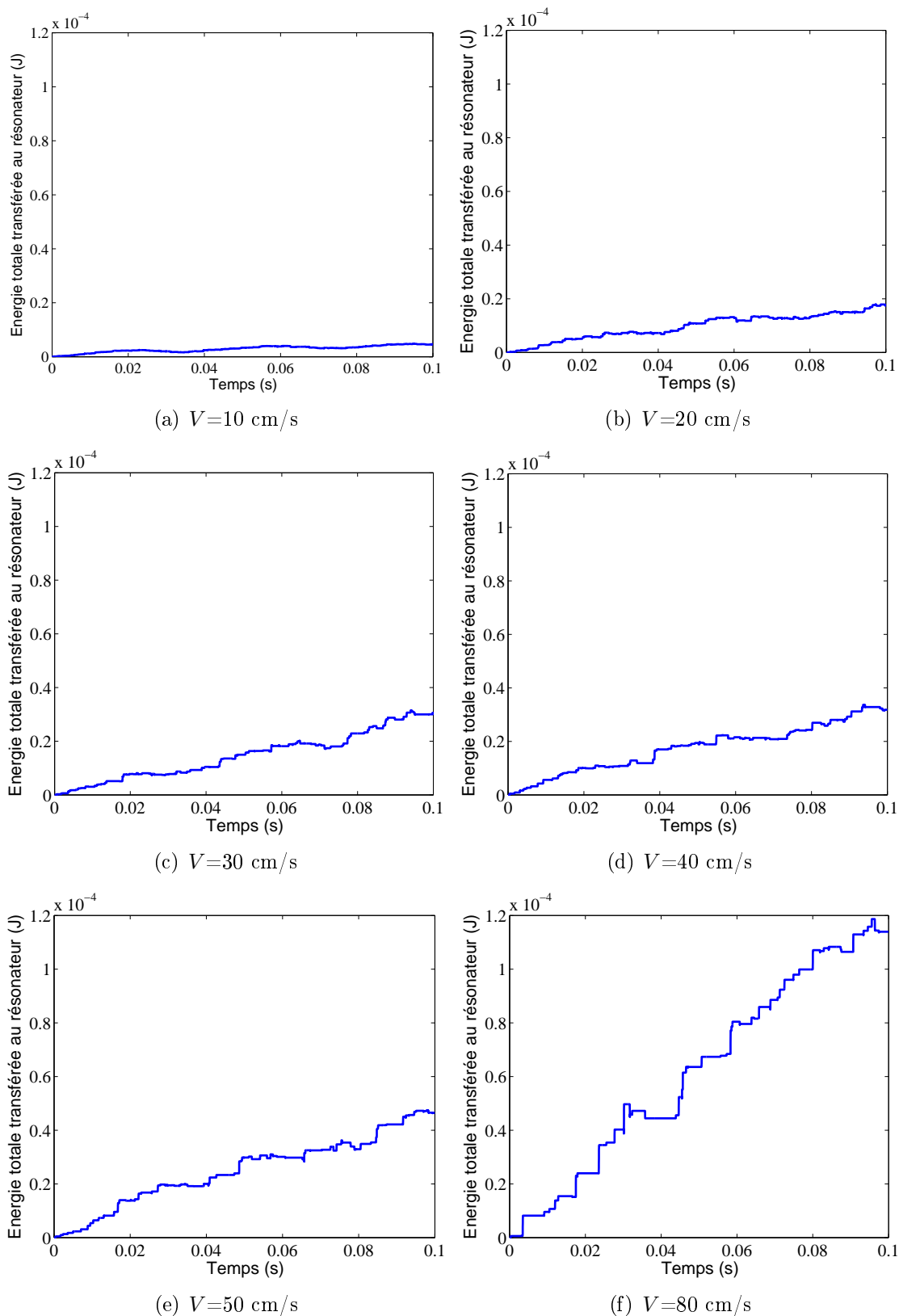


FIGURE 6.11 – Energie totale transférée vers le résonateur.

6.4.6 Vitesse vibratoire

Dans la figure (6.14) est présentée la vitesse vibratoire au noeud $x=0.176$ m, $y=0.15$ m sur le résonateur. La vitesse vibratoire atteinte au maximum est de 5 mm/s avec

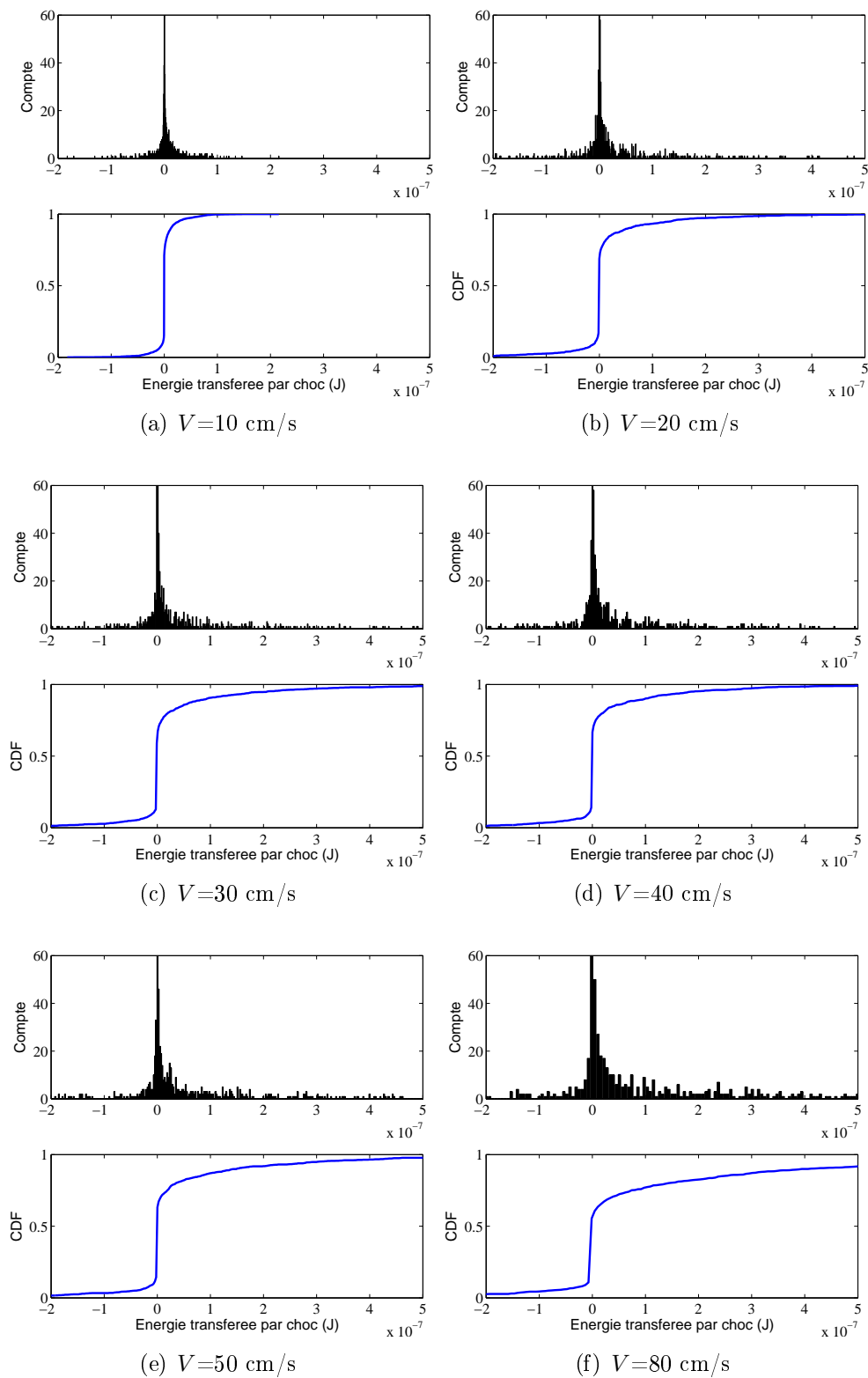


FIGURE 6.12 – Histogramme et fonction cumulative des probabilités de l'énergie transférée du choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement

$V=0.1$ m/s et 35 mm/s avec $V=0.9$ m/s ($Ra=5\mu m$). On observe bien la croissance de l'amplitude de la vitesse vibratoire en fonction de la vitesse de glissement.

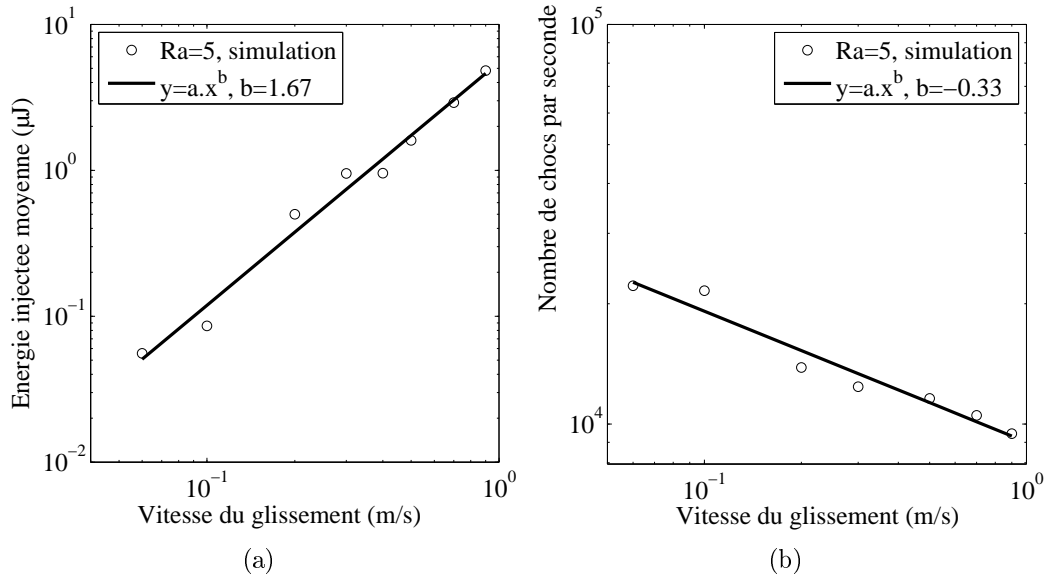


FIGURE 6.13 – Evolution de l'énergie moyenne (à gauche) et du nombre de chocs par seconde (droite) en fonction de la vitesse de glissement.

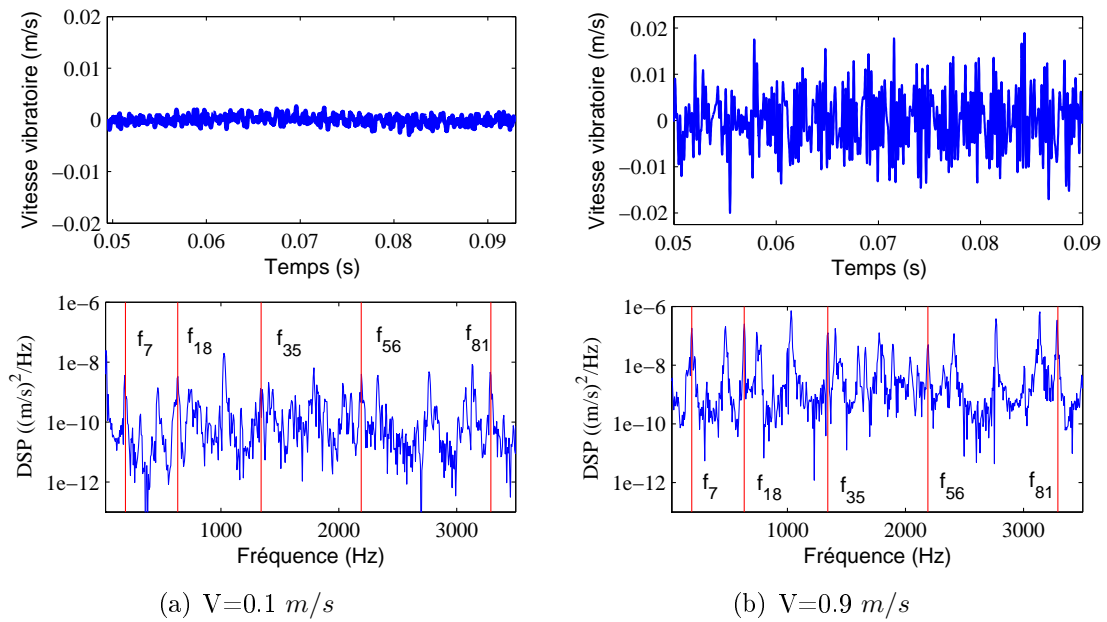


FIGURE 6.14 – Vitesse vibratoire au noeud $x=0.176$ m, $y=0.15$ m du résonateur avec la vitesse de glissement $V=0.1, 0.4, 0.9$ (m/s)

TABLE 6.5 – Fréquences propres du résonateur

	f_7	f_{18}	f_{35}	f_{56}	f_{81}
Fréquence (Hz)	189.04	633.78	1340.8	2189.8	3289.9

La densité spectrale de puissance (DSP) est aussi calculée pour l'analyser dans le domaine fréquentiel [58]. Sur la figure, les traits rouges verticaux représentent les fréquences propres du résonateur obtenues par la méthode éléments finis 6.5. Les pics de

DSP sont très proches de ces traits. L'écart relatif entre les pics de DSP avec les traits verticaux (les fréquences propres du résonateur) relève du couplage dynamique entre les deux solides. Si l'on modélise l'interaction entre les deux surfaces en contact par une rigidité de contact située au niveau des interfaces, cette rigidité agit en tant que contrainte additionnelle, ce qui provoque une augmentation des fréquences fondamentales. Si cette rigidité est importante, la DSP de la vitesse vibratoire a des pics qui se décalent vers droite des traits verticaux. Au contraire, la coïncidence des positions des pics avec celles des traits verticaux montre une faible rigidité de contact et le découplage dynamique entre les deux solides.

6.4.7 Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse

Ensuite, à partir de la vitesse vibratoire de tous les points discrétisés du résonateur, la valeur moyenne quadratique v_{rms} est calculée par :

$$v_{rms}^2 = \frac{1}{T} \frac{1}{L_1} \frac{1}{B_1} \int_0^T \int_0^{L_1} \int_0^{B_1} v_1^2(x_1, t) \cdot dx_1 \cdot dy_1 \cdot dt \quad (6.26)$$

et puis le niveau vibratoire selon la formule suivante :

$$Lv = 20 \log_{10} \left(\frac{v_{rms}}{v_{ref}} \right). \quad (6.27)$$

où v_{ref} est la valeur de référence de vitesse vibratoire $v_{ref} = 1e - 9$ m/s [65].

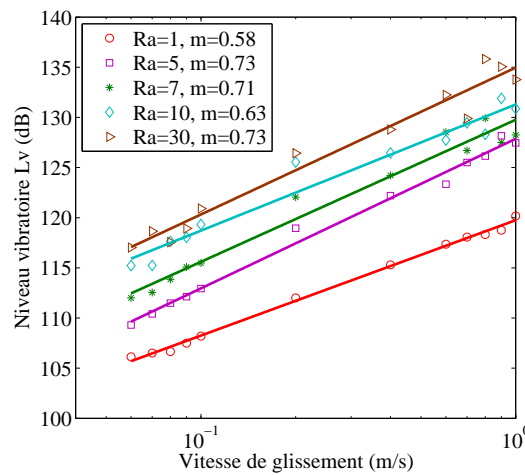


FIGURE 6.15 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement et la rugosité de la surface obtenue par le programme Ra3D

Sur la figure 6.16 est présentée l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement obtenue par la simulation 3D, 2D et l'expérience. La vitesse s'exprime par l'échelle logarithmique. On observe la croissance de Lv par rapport V avec la valeur de l'exposant n déterminée à partir des courbes approximatives. La valeur de n obtenus par trois approches sont la même pourtant. On note une nette amélioration de l'amplitude entre la simulation 3D et 2D. La simulation 3D nous permet d'obtenir des valeurs plus proches celles expérimentales.

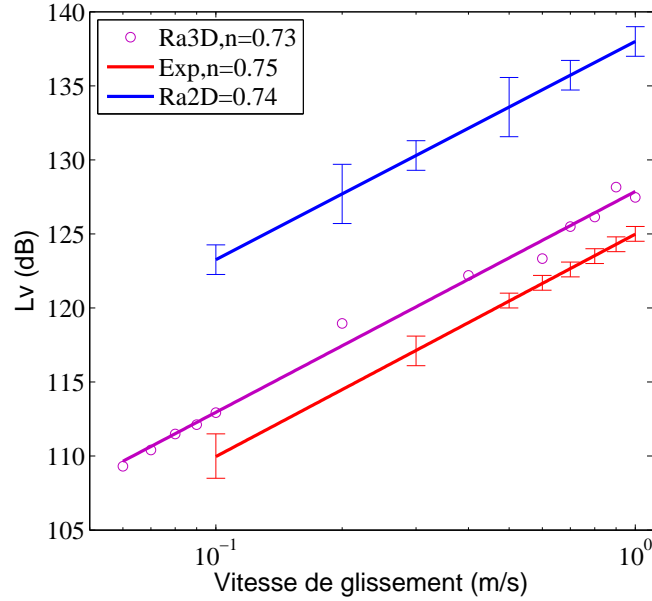


FIGURE 6.16 – Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement obtenue par la simulation 3D, 2D et l'expérience

6.4.8 Puissance transférée

En se basant sur les calculs statistiques des chocs présentés supra, le processus de transfert de l'énergie entre les solides est analysé. L'énergie cinétique du glisseur est transformée en énergie vibratoire du résonateur. Cette quantité énergétique est la somme de l'énergie transférée par tous les chocs :

$$E = \sum_{i=1}^{N_c} e_{choc} \quad (6.28)$$

où N_c est le nombre de chocs. En divisant l'énergie totale transférée par la durée de simulation, la puissance transférée obtenue est :

$$P = \frac{E}{T} \quad (6.29)$$

D'ailleurs, la puissance transférée pour le résonateur est aussi égale au produit du nombre de chocs avec l'énergie moyenne transférée par choc :

$$P = ne \quad (6.30)$$

La simulation directe nous permet de déterminer la loi d'évolution du nombre de chocs par second $\eta \propto V^{-0.3}$, et de l'énergie transférée moyenne $e \propto V^{1.7}$ (figure 6.13). Donc, la loi d'évolution de P en fonction de V est $P \propto V^{1.4}$, à partir de laquelle on déduit la loi d'évolution du niveau vibratoire est $Lv \propto V^{0.7}$ (la valeur de l'exposant est divisée par deux), cette valeur est en accord avec le résultat observé sur la figure 6.16. Grâce à cette simulation directe, on peut comprendre plus exhaustivement le mécanisme de génération du bruit de rugosité, puis expliquer ses lois d'évolution macroscopique.

La puissance transférée par unité de surface est :

$$p = \frac{P}{S} \quad (6.31)$$

où S est l'aire du glisseur. Sur le tableau 6.6 sont montrées les valeurs de p obtenues grâce

TABLE 6.6 – Puissance injectée par unité de surface obtenue par le programme Ra3D

Vitesse (m/s)	0.06	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.8
p (mW/m ²)	77.2	116	433	738	798	1162	1910

au programme Ra3D, dans le cas $Ra = 5\mu m$ et avec différentes vitesses de glissement. Il est clair que cette variable énergétique augmente selon la vitesse.

On se rappelle que dans le chapitre consacré aux expériences, la puissance transférée par unité de surface p est obtenue expérimentalement. Cette valeur est déduite en fonction de la pente des courbes qui représentent la relation entre le niveau vibratoire et l'aire de contact. Donc, il est intéressant de comparer la valeur de p obtenue par la simulation 2D, la simulation 3D et l'expérience. Cette comparaison est présentée dans le tableau 6.7. La valeur expérimentale est $27 mW/m^2$ alors que la valeur obtenue par

TABLE 6.7 – Comparaison des variables énergétiques entre les simulations et l'expérience

Amorti. faible/Glisseur mince	$\eta_i\omega$ (s ⁻¹)	p (mW/m ²)
Simulation 2D	49.68	140
Simulation 3D	49.68	77.2
Expérience	39	27

la simulation 3D est $77.2 mW/m^2$ c'est-à-dire 2,5 fois plus. La valeur obtenue par la simulation 2D est de $140 mW/m^2$.

6.4.9 Commentaire

Ce chapitre avait pour objectif d'effectuer une simulation 3D du problème de la vibration induite par un contact de surfaces rugueuses. Une approche numérique étendue à partir de celle de la simulation 2D a été développée. La vibration de la plaque est analysée par la théorie de Love-Kirchhoff, ensuite une décomposition modale est utilisée pour réduire l'équation aux dérivées partielles du mouvement au système d'équations différentielles ordinaires dépendant seulement du temps. Le contact est détecté en utilisant l'algorithme noeud-facette, et puis la force de contact est calculée par la méthode de pénalité. Le système des équations ordinaires inclut les forces de contact. Il est résolu numériquement grâce au schéma d'intégration temporelle aux différences centrées.

L'accent des résultats a été mis sur la prédiction exacte de la relation entre Lv et la vitesse de glissement par la simulation 3D, tant l'amplitude et la pente de la courbe de l'évolution sont cohérentes avec celles de la courbe expérimentale.

D'autre part, une étude de scalabilité a été menée rigoureusement pour effectuer le passage d'échelle. Il nous a fallu utiliser un pas spatial assez grossier $40 \mu m$ avec lequel l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité obtenue est peu précis.

Parce que, la description exacte de la surface rugueuse requiert un pas spatial plus petit, environ $4 \mu\text{m}$. Pourtant avec un pas spatial $40 \mu\text{m}$, le temps CPU a déjà atteint 58 h pour chaque simulation.

À l'appui des résultats quantitatifs sur les statistiques des chocs : durée de chocs, force de contact, nombre de chocs par seconde, on arrive à chiffrer l'énergie transférée au cours du glissement. La puissance transférée par unité de surface est ensuite calculée et comparée entre la simulation 2D, 3D et l'expérience. Cette comparaison nous montre la concordance quantitative entre la micro-approche (simulation) et la macro-approche (expérience), il renforce donc la théorie de dissipation de la vibration dans le contact rugueux mentionnée dans le chapitre 2.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

Cette thèse s'inscrit dans l'ensemble des travaux effectués pour étudier le phénomène du bruit de rugosité qui résulte de multicontact entre aspérités au niveau des interfaces sous un faible chargement normal. La motivation du présent travail de thèse a émané de la constatation du défaut de compréhension des mécanismes de génération des vibrations et de la dissipation de l'énergie à l'interface. Les principaux objectifs étaient de prédire l'évolution du niveau vibratoire en fonction des paramètres macroscopiques, d'obtenir les propriétés statistiques des dynamiques locales (le choc) et de découvrir le processus de dissipation de la vibration dans le contact rugueux. La démarche utilisée a suivi plusieurs étapes : une étude bibliographique, diverses expériences sur le bruit de rugosité, une proposition concernant la théorie de dissipation de la vibration, des simulations directes 2D du contact dynamique et des simulations 3D du contact entre surfaces rugueuses.

L'état de l'art a montré que le bruit de rugosité est un phénomène pluridisciplinaire. Le processus de génération du bruit de rugosité est constitué de trois phases : le glissement provoque des chocs entre les aspérités (tribologie), les vibrations générées aux points de contact se propagent dans le corps solide (dynamique) et la vibration rayonne le bruit dans l'air (acoustique). Le contenu fréquentiel de l'audible par l'homme est généralement compris entre 20 Hz et 20 kHz. Expérimentalement, le niveau du bruit de rugosité L_p (dB) est une fonction croissante du logarithme de la rugosité des surfaces Ra et de la vitesse de glissement V :

$$\Delta L_p(\text{dB}) = 20 \log_{10} Ra^m V^n \quad (6.32)$$

Numériquement, la modélisation du bruit de rugosité nécessite la description détaillée des surfaces rugueuses car les interfaces présentent des spots de contact très petits se renouvelant très rapidement. Les difficultés majeures résident dans la détection de contact entre les aspérités et dans le calcul de la force de contact.

Dans le deuxième chapitre, des expériences simples avec des morceaux de sucres comme des expériences plus pointues avec le tribomètre RA au laboratoire LTDS, ont relevé un phénomène surprenant du bruit de rugosité. Deux régimes du bruit peuvent exister en fonction de l'aire de contact. Dans le régime linéaire, le bruit est proportionnel à l'aire de contact. Tandis que dans le second régime, le bruit ne dépend pas de la surface de frottement. Pour expliquer ce phénomène, une théorie de la dissipation de

l'énergie vibratoire dans l'interface du vibration est proposée. L'interaction entre les aspérités des surfaces rugueuses transmet l'énergie cinétique des glisseurs vers l'énergie vibratoire du résonateur. Cette énergie est dissipée soit par l'amortissement interne, soit par l'amortissement dans le contact. Lorsque l'amortissement interne domine, on obtient le régime proportionnel, en revanche si l'amortissement interne est très petit par rapport à celui du contact, le régime constant se manifeste. La relation classique entre le bruit de rugosité et la vitesse de glissement est aussi confirmée sur notre système glisseur-résonateur. Cela nous procure des références pour les résultats numériques.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'un outil numérique spécifique pour le problème de vibration induite par le contact dynamique des surfaces rugueuses. Cette approche se base sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Seule la vibration verticale est considérée. Ensuite l'équation générale du mouvement est réduite à une équation différentielle d'ordre 2 d'une seule variable (le temps) grâce à la méthode de décomposition modale. Pour résoudre numériquement cette équation différentielle, six schémas d'intégration temporelle sont implémentés. Ces six schémas rendent notre outil plus flexible sur le choix du pas de temps pour assurer les critères de stabilité, de consistance et de convergence. Pour le calcul de la force de contact, deux algorithmes populaires sont utilisés : l'algorithme de Lagrange et l'algorithme de pénalité. Cette approche est implémentée dans le programme appelé Ra2D en langage C. Après avoir développé l'outil numérique, on a réussi à diminuer le temps de calcul grâce à l'optimisation du code séquentiel, la technique multitâche et l'utilisation de méso-centres de calcul.

Les validations de l'approche choisie et les résultats numériques des simulations d'un système à deux dimensions sont présentés dans le chapitre 3. En comparant avec la formule théorique du problème d'une masse mobile sur une poutre, la partie dynamique de l'approche est validée. De plus, on a montré l'effet de différentes techniques d'interpolation des surfaces sur la force de contact obtenue. Plus l'ordre des fonctions d'interpolation est élevé, moins la force de contact fluctue. Le deuxième cas test est la comparaison avec la méthode des éléments finis (FEM), les avantages et les inconvénients de chaque algorithme de contact sont établis. En choisissant un coefficient de pénalité convenable et un nombre de modes suffisamment grand, la méthode de pénalité peut fournir des résultats proches de ceux obtenus par l'algorithme de Lagrange et par FEM. Surtout, le programme Ra2D est presque 10 fois plus rapide que la méthode des éléments finis. Après avoir validé l'outil numérique, les simulations 2D avec les profils de mêmes dimensions que dans l'expérience sont réalisées. De nombreux résultats sont obtenus, ils sont classés dans deux groupes : la réponse vibratoire du résonateur et l'analyse statistique des chocs entre deux surfaces.

Le dernier intérêt de cette thèse est l'extension de l'approche à la simulation 3D. La théorie de la vibration d'une plaque mince est utilisée. Contrairement à l'utilisation des formules analytiques dans la simulation 2D, les modes propres de vibration du résonateur appuyés aux extrémités sont déterminés en utilisant le logiciel des éléments finis Abaqus. La partie demandant le plus de temps de calcul est la détection des contacts. Dans cette thèse, on a choisi un pas spatial de $40 \mu\text{m}$ afin de réaliser les simulations 3D avec un temps CPU raisonnable. Les démarches de traitement des résultats sont similaires à celles des simulations 2D. Une comparaison entre l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse obtenue par la simulation 2D, la simulation 3D et l'expérience est réalisée. Une

amélioration est observée avec la simulation 3D. Cette dernière est capable de fournir non seulement la pente des courbes du niveau vibratoire mais également une amplitude très proche de celles obtenues par les expériences. De plus, avec la simulation 3D, le calcul quantitatif de la puissance transférée par unité de surface donne des résultats de même ordre de grandeur qu'à l'expérience ce qui n'est pas le cas avec la simulation 2D.

Originalité des résultats

Ce travail de thèse a permis d'étudier le contact dynamique de surfaces rugueuses à deux échelles : échelle macroscopique (vibration du résonateur) et échelle locale (statistique des chocs).

L'approche numérique nous permet désormais de prédire précisément et rapidement le bruit de rugosité généré lors du contact glissant entre deux surfaces rugueuses. Le niveau vibratoire L_v (dB) est une fonction linéaire et croissante du logarithme de la rugosité de surface et de la vitesse de glissement.

L'accès à des dynamiques locales est aussi possible. Le choc est déterminé à partir de l'évolution de la force de contact en fonction du temps. Il est caractérisé par trois propriétés : durée du choc, force maximale de contact et énergie transférée. Sur l'ensemble des chocs, les propriétés à connaître sont le nombre de chocs par seconde et le pourcentage du temps de contact.

L'accroissement de la vitesse de glissement ou de la rugosité de surface entraîne une augmentation de la force de contact, de l'énergie transférée par le choc, mais aussi une décroissance de la durée des chocs, du nombre de chocs par seconde et du pourcentage du temps de contact.

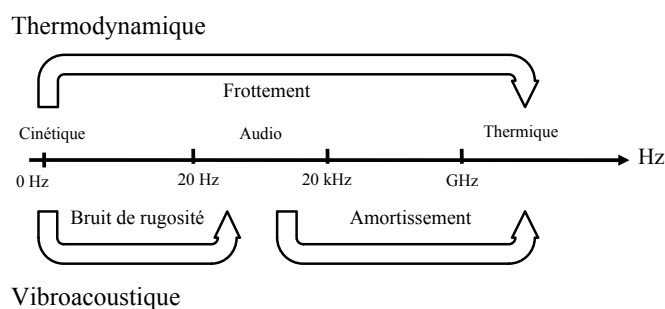


FIGURE 6.17 – Transformation de l'énergie dans les bandes de fréquences

Le bilan d'énergie du problème du bruit de rugosité s'établit en deux étapes. Le résonateur est considéré comme un réservoir d'énergie. D'une part, l'énergie est fournie par micro-chocs entre les aspérités avec la surface antagoniste, cela est considéré comme étant le transfert de l'énergie cinétique du glisseur à basses fréquences à l'énergie vibratoire du résonateur dans la bande de fréquence de l'audible. D'autre part, l'énergie du réservoir est dissipée par l'amortissement interne des matériaux et l'amortissement de contact. Cette dissipation se produit dans la gamme de hautes fréquences (GHz).

Perspectives

Même si les objectifs principaux ont été atteints, quelques problèmes demandent un développement plus approfondi.

Sur le plan numérique, il est nécessaire de paralléliser le programme RA3D et de travailler avec des supercalculateurs plus puissants afin de réaliser les simulations avec un pas spatial plus fin ($4 \mu\text{m}$). Si un tel pas spatial est utilisé, la surface est mieux décrite et l'évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité de surface est correctement simulée.

Le champ d'application de notre approche peut être élargi à d'autres types de géométrie : sphère/plan, sphère/sphère, cylindre/plan. Les modes propres des solides sont obtenus grâce au logiciel des éléments finis Abaqus. La démarche de calcul est similaire à celle de RA3D : établir les équations du mouvement, utiliser la méthode de décomposition modale, détecter les points de pénétration et calculer la force de contact.

Sur le plan expérimental, il est indispensable d'avoir des expériences qui permettent de valider les résultats statistiques numériques. Bien que la confrontation de chaque choc soit impossible, les variables sur l'ensemble des chocs comme le nombre de chocs par seconde, la pourcentage du temps de contact, ou la force totale de contact sont potentiellement mesurables.

Annexes

Abaqus

```
*HEADING
sixChocs
**
*PREPRINT,MODEL=NO,HISTORY=NO,ECHO=NO
**
**
*INCLUDE, INPUT=MODEL_sixChocs_L01.inp
**
*****
** node set and element set definitions**
*****
***** NODE SET *****
***** NODE TOP *****
***** NODE BOUNDARY *****
*NSET,NSET=LEFT_TOP
1,22,23,44
*NSET,NSET=RIGHT_TOP
11,12,33,34
*NSET,NSET=LEFT_BOT
45,86,87,128
*NSET,NSET=RIGHT_BOT
65,66,107,108
**
***** NODE OUT *****
*NSET,NSET=NODE_OUT
3
**
*****
***** SIMULATION *****
*****
**material definitions
**
*MATERIAL,NAME=STEEL
*DENSITY
2000.0
```

```

*ELASTIC
50.0E9, 0.3
*DAMPING, ALPHA=0., BETA=0.00
**
**sections
**
*SOLID SECTION, ELSET=ELEM_ALL, MATERIAL=STEEL
**
**boundary conditions
**
*BOUNDARY
LEFT_TOP,2,2
LEFT_BOT,1,2
RIGHT_TOP,2,2
RIGHT_BOT,1,2
**
**surface interaction
**
*SURFACE INTERACTION, NAME=INTPROP-1
***CONTACT DAMPING, DEFINITION=DAMPING COEFFICIENT
**0.0
***SURFACE BEHAVIOR
**1e10
*SURFACE BEHAVIOR, PRESSURE-OVERCLOSURE=LINEAR
1e12
**
*INITIAL CONDITIONS , TYPE=VELOCITY
NODE_ALL_TOP, 1, 10.
*****
** STEP DYNAMIC CONTACT GENERAL *****
*****
*STEP
*DYNAMIC, EXPLICIT, DIRECT USER CONTROL
2e-9, 0.001
**
*CONTACT PAIR, CPSET=new, INTERACTION=INTPROP-1,MECHANICAL
CONSTRAINT=PENALTY
SURFACE_TOP,SURFACE_BOT
**
*OUTPUT,HISTORY,TIME INTERVAL=0.25e-8
*NODE OUTPUT, NSET=NODE_OUT
U,V,A
*CONTACT OUTPUT, NSET=NODE_OUT
BONDSTAT, BONDLOAD
*OUTPUT,FIELD,NUMBER INTERVAL=4000
*CONTACT OUTPUT, Variable=ALL
*END STEP
*****

```



```

*****
***DYNAMIC, EXPLICIT, DIRECT USER CONTROL
**1e-8, 0.001
***DYNAMIC, EXPLICIT
**, 0.1
***DLOAD
**ELEM_TOP, GRAV, 7800., 0., -1.
***INCRÉMENTATION OUTPUT
**DT

```

Relation de rugosité sur le spectre de fréquence du bruit de rugosité

Dans cette section, on s'intéresse à l'effet de la rugosité sur le spectre du bruit survenant lorsque deux surfaces sèches et rugueuses sont frottées les unes contre les autres avec une faible pression normale .

Expérience

Le principe de l'expérience est le suivant. Deux éprouvettes plates ayant les surfaces rugueuses sont frottées l'un contre l'autre dans une direction transversale comme illustré sur la figure 18. Pendant le glissement, un bruit de rugosité est produit et enregistré avec un microphone. L'expérience est réalisée dans une chambre anéchoïque pour éviter l'influence des bruits extérieurs.

Deux campagnes d'essais avec deux éprouvettes de matériaux et dimensions différentes sont réalisées. Dans la première campagne, on utilise des éprouvettes en acier parallélépipédique ayant la longueur de 100 mm, la largeur 18 mm et l'épaisseur de 4 mm. Leurs caractéristiques sont le module d'Young 210 GPa, coefficient de Poisson 0.3, densité 7800 kg/m³, la limite d'élasticité 235 MPa.

Les éprouvettes utilisées dans la deuxième campagne sont en aluminium avec les dimensions de 120×20×8 mm. Leurs caractéristiques sont le module d'Young 69 GPa, coefficient de Poisson 0.34, densité ρ 2700 kg/m³.

Sample	Ra (μm)	Rsk	Rku	Rsm (μm)
ED01	1.09	-0.06	2.8	122
ED02	1.66	-0.3	3.4	197
ED05	6.09	0.15	2.8	234
ED10	13.24	0.52	2.6	357

TABLE 8 – Roughness parameters of samples.

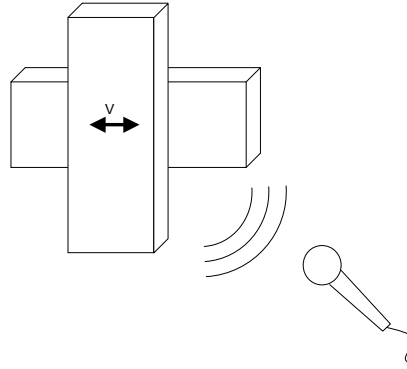


FIGURE 18 – Expérience sur le spectre de fréquence du bruit de rugosité

Sample	Ra (μm)	Rsk	Rku	Rsm (μm)
ED01	1.0	-0.5	3.4	116
ED04	4.1	-0.04	2.7	205
ED10	9.6	-0.02	2.6	350
ED20	22.4	0.23	2.6	683

TABLE 9 – Roughness parameters of samples.

Les surfaces des éprouvettes sont usinées par décharge électrique (EDM) avec des intensités différentes pour produire une rugosité variable.

La pression acoustique est enregistrée avec un microphone Bruel&Kjaer de type 4189 dont la sensibilité est de 50 mV/Pa et la bande passante de fréquence est 6 Hz - 20 kHz. Le signal est acquis par un oscilloscope numérique avec le gain de 1 V/Pa pour toutes les mesures. La fréquence d'échantillonnage est de 40 kHz et le temps d'acquisition est d'environ 2 s pour chaque test.

Les tests ont été réalisées en atmosphère ambiante (humidité relative 70 % et température de 25 °C). Les échantillons sont soigneusement nettoyés et dégraissés avec l'acétone et le flux d'azote. Chaque essai de frottement est répété cinq fois. La force appliquée correspond approximativement au poids réel de l'échantillon entraîné. La vitesse de glissement est d'environ 10 cm/s.

Le spectre de fréquence d'un échantillon isolé est déterminé à partir d'un test d'impact entre une bille avec un échantillon (figure 19). La bille en acier, ayant le rayon $r=12$ mm vient en impact avec l'éprouvette appuyée aux deux extrémités, le bruit généré est ensuite enregistré par un microphone. La durée du bruit est très courte. Et puis, on effectue une transformation de Fourier (FFT) pour obtenir le spectre du bruit d'impact. Les pics dans le spectre sont proches des fréquences naturelles de vibration de l'éprouvette.

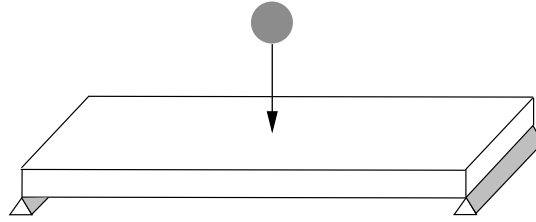


FIGURE 19 – Expérience de l'impact d'une bille avec un échantillon

Résultat

Les résultats de mesure de la première campagne (éprouvette en acier) sont présentés sur la figure 20. Dans cette figure, la ligne noire représente le spectre de fréquence de l'éprouvette isolée obtenue par l'essai d'impact. Les positions des pics des fréquences propres sont marquées par les lignes pointillées, la forme de ces modes propres sont aussi montrées en bas de la figure. Les lignes en couleurs vert, violet, bleu et rouge représentent respectivement le spectre du bruit généré par les surfaces de rugosité 1, 2, 5 et 10 μm .

Les résultats mesurés avec les éprouvettes en aluminium ($Ra=1,4,10$ et $20 \mu m$) sont présentés d'une manière similaire sur la figure 21.

Les résultats montrent que la densité spectrale de puissance du bruit est principalement contrôlée par les fréquences propres de l'éprouvette isolée. Mais un faible décalage des pics vers droite est observé, et ce décalage est plus important pour les modes élevés. D'autre part, plus la rugosité est faible, plus le décalage est important.

TABLE 10 – Tableau des fréquences propres de l'échantillon

Mode	1	2	3	4	5	6
Fréquence (Hz)	2070	5625	6367	8555	10900	12890

TABLE 11 – Tableau des fréquences propres de l'échantillon

Mode	1	2	3	4	5
Fréquence (Hz)	2578	7070	7344	13400	14770

Pourtant les pics correspondant aux modes de vibration non flexibles (dans le plan de la surface) ne sont pas décalés.

Explication

Pour comprendre le décalage des pics dans le spectre de fréquence, nous considérons que l'interaction dynamique peut être modélisée comme une raideur de contact localisée dans le centre des échantillons comme le montre la figure 22.

Les fréquences propres de l'échantillon en contact sont notées ω^* , tandis que la fréquence propre de l'échantillon libre est notée ω . La valeur de ω^* devrait être légèrement

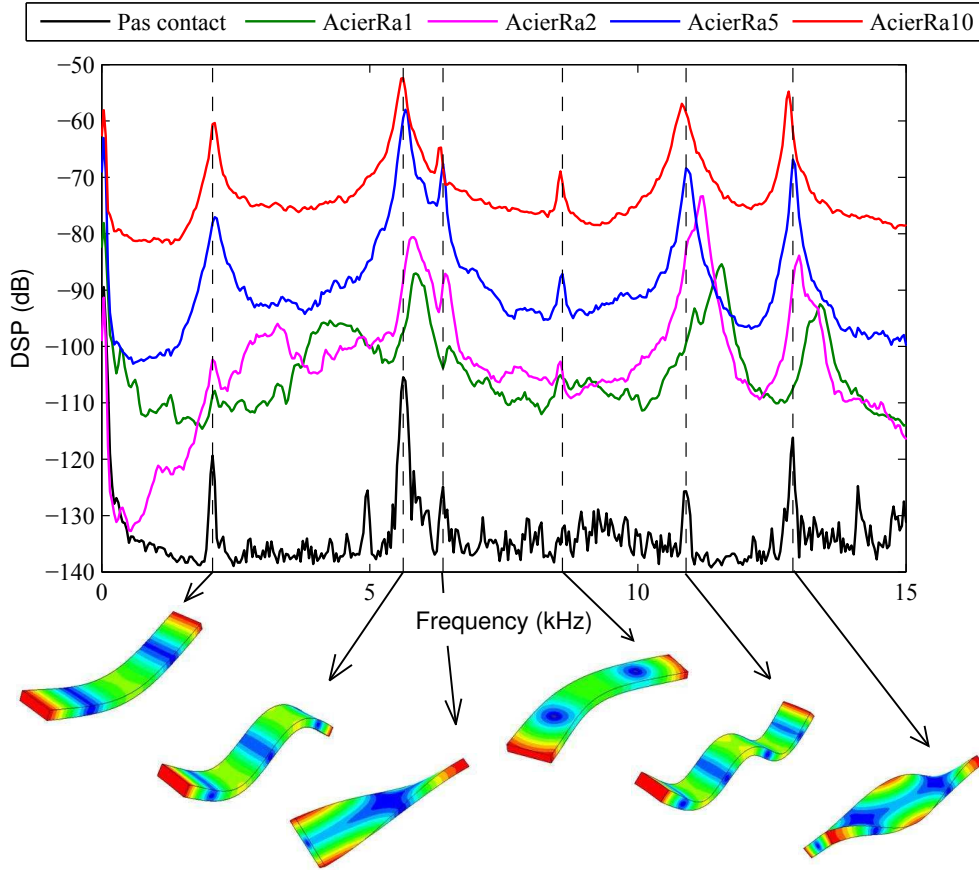


FIGURE 20 – Spectre de fréquence du bruit de rugosité obtenu avec les éprouvettes en acier

supérieure à ω . Le principe de la méthode de Rayleigh-Ritz suppose que des énergies élastiques et cinétique sont égales. Pour la vibration libre ω , cette égalité s'écrit par :

$$D \int_0^L \psi''^2(x) dx = m\omega^2 \int_0^L \psi^2(x) dx. \quad (33)$$

où $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)E$ est la rigidité en flexion de la poutre, E le module de Young, h l'épaisseur, ν le coefficient de Poisson, m la masse linéique, L et la longueur de la poutre. La fonction du mode propre est notée $\psi(x)$

Pour trouver ω^* , il faut modifier l'équation (33) en ajoutant un terme de l'énergie élastique du ressort. Dans la figure 22, on présente le système modifié des deux échantillons avec le ressort au centre. L'énergie élastique stockée dans le ressort est $1/2 \times k_{\text{exp}}(\psi(L/2) + \psi(L/2))^2$ et l'équation (33) devient :

$$D \int_0^L \psi''^2(x) dx + 2k_{\text{exp}}\psi^2(L/2) = m\omega^2 \int_0^L \psi^2(x) dx, \quad (34)$$

où k_{exp} est la raideur de contact. Dans l'équation (34), on a approximé que la forme de mode $\psi(x)$ n'est pas affectée par le contact.

Donc, la présence de cette raideur supplémentaire agit comme une condition aux limites qui entraîne une augmentation de la fréquence propre.

En outre, pour les modes de vibration dans le plan de la surface, au centre de la pièce de vibration, il n'y a pas de déplacement dans la direction normale. Ils ne sont donc

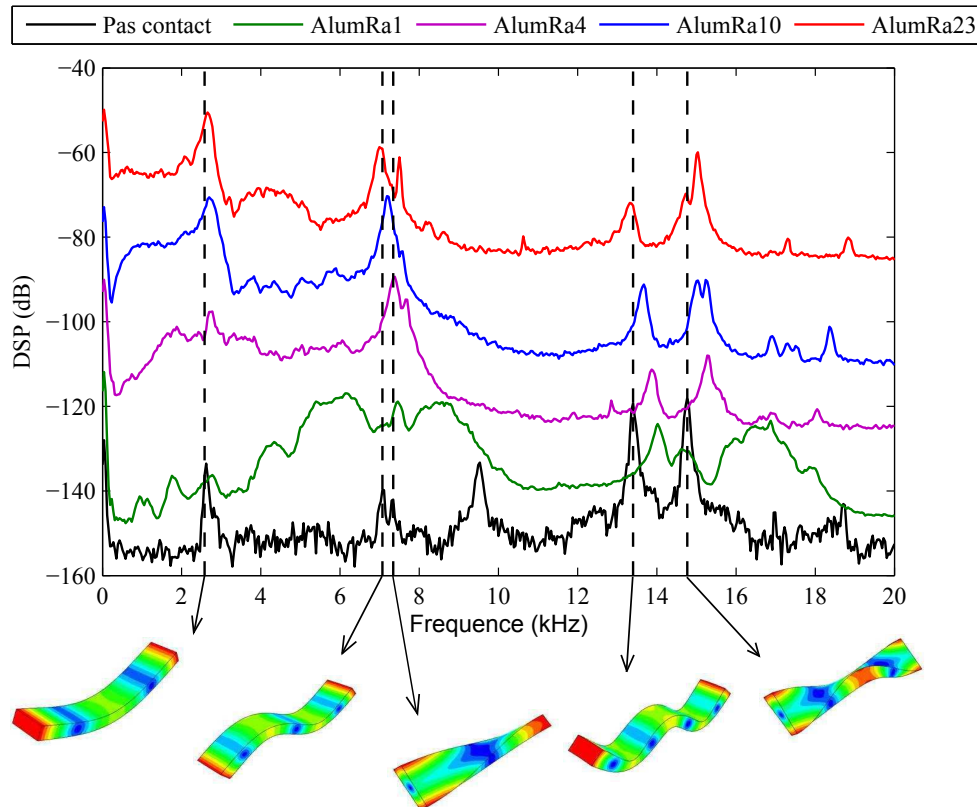


FIGURE 21 – Spectre de fréquence du bruit de rugosité obtenue avec les éprouvettes en aluminium

pas affectés par l'application d'une rigidité supplémentaire (raideur de contact) c'est pourquoi ces fréquences propres ne dépendent pas des conditions de contact.

Equation d'Euler-Bernoulli

Pour décrire la vibration d'une poutre, le modèle d'Euler-Bernoulli est largement utilisé pour la commodité de sa forme mathématique. Avec ce modèle, on accepte les hypothèses suivantes :

- Géométrie des poutres : l'élancement est grand $L \gg h$. (Longueur supérieure à 20 fois la plus grande dimension transversale)
- Hypothèse de Barré de Saint-Venant : les résultats ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la zone d'application des forces extérieures (deux à trois fois la largeur de la section normale).
- Hypothèse de Bernoulli : les sections planes, normales aux fibres avant déformation demeurent normales aux fibres après déformation.
- Poutre de type d'Euler-Bernoulli : l'inertie en rotation et la déformation en cisaillement sont négligées.
- Les matériaux utilisés sont homogènes, isotropes et élastiques. La loi de Hooke est utilisée pour la relation contrainte-déformation.
- Hypothèse de Barré de Saint-Venant : les résultats ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la zone d'application des forces extérieures (deux

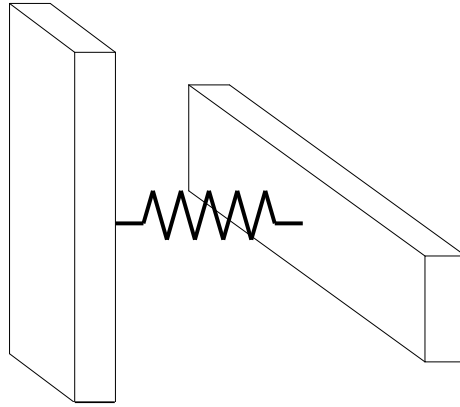


FIGURE 22 – Modèle de la raideur de contact

à trois fois la largeur de la section normale).

Considérons un élément infinitésimal dx d'une poutre vibrante. On désigne $u(x,t)$ comme étant le déplacement au point d'abscisse x à l'instant t , Q est l'effort tranchant, M est le moment fléchissant, $f(x,t)$ est la force extérieure, ρ est la densité de la masse volumique de matériau et m , la masse linéique. D'après la théorie de résistance des matériaux, le

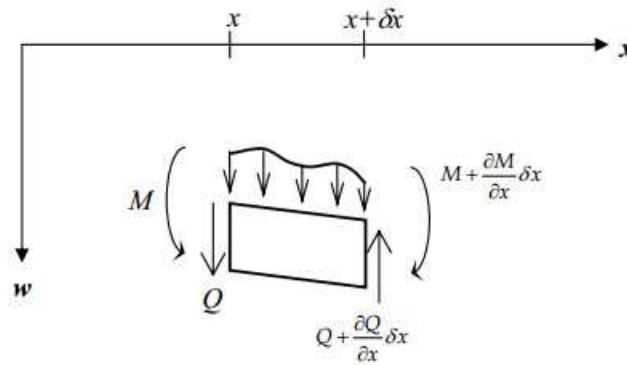


FIGURE 23 – Eléments de poutre en flexion

moment fléchissant et l'effort tranchant sont calculés par

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (35)$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (36)$$

Par le théorème général de la dynamique, on obtient :

$$(\rho \cdot A \cdot \delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) \cdot \delta x + Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (37)$$

Puis en introduisant l'équation (36) dans l'équation (37) et en effectuant des simplifications, on obtient l'équation d'Euler-Bernoulli qui décrit la vibration de la poutre :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,t) \quad (38)$$

$$D \cdot \Delta^2 u + m \ddot{u} = f(x,t) \quad (39)$$

Bilan d'énergie

L'énergie cinétique de la poutre est :

$$K = \frac{1}{2} \int_L m \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dV \quad (40)$$

L'énergie de déformation élastique de la poutre est :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \sigma : \delta \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_L M \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \int_L EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dV \quad (41)$$

L'énergie potentielle occasionnée par les forces extérieures est :

$$V = \frac{1}{2} \int_L f \delta u dx \quad (42)$$

En utilisant le principe d'Hamilton (aussi appelé principe de l'énergie potentielle complémentaire ou principe de stationnarité), on arrive à l'expression de la vibration de la poutre d'Euler-Bernoulli comme suit :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (U + V)] dt = 0 \quad (43)$$

Annexe 2

L'énergie totale de la poutre Euler-Bernoulli est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. A partir de l'équation du mouvement des poutres en flexion, on multiplie les deux membres par la vitesse vibratoire :

$$D_i \Delta^2 u_i + m_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f(t, x) \quad (44)$$

$$m \ddot{u} + D u^{(4)} \dot{u} = f \dot{u} \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} D (u'')^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (D u^{(3)} \dot{u} - D u^{(2)} \dot{u}') = f \dot{u} \quad (46)$$

Dans le cas des poutres appuyées, les conditions aux limites satisfont toujours :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_0^L = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \delta u \Big|_0^L = 0 \quad (47)$$

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (D u^{(3)} \dot{u} - D u^{(2)} \dot{u}') dx = 0 \quad (48)$$

En posant $w = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} D (u'')^2$ et p_e sont respectivement l'intensité de l'énergie totale de la poutre et l'intensité de puissance de force extérieure, on a :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = p_c - p_g \quad (49)$$

$$\int_0^L w dx = \int_0^T \int_0^L (p_c - p_{g0}) dx dt \quad (50)$$

La variation de l'énergie totale du système est égale à la puissance injectée par le contact et la gravité. La puissance dans la vibration transversale de la poutre est transférée par la force de cisaillement et le moment.

Fichier de données pour le problème de masse mobile

```
# Fichier de donnees pour ra2d
# V.H. DANG le 10 mars 2011.
# v=0.5733 ;1.1466 ; 2.2932 ; 3.4398 ; 4.5864
```

```
<UPSOLID>
DENSITY=89. YOUNG=1.72e10 DAMPING=0.0 THICKNESS=1.0 WIDTH=0.02
PROFILE=top_moving.pro EDGES=FF MODE=0 GRAVITY=1
</UPSOLID>
```

```
<DOWNSOLID>
DENSITY=3105. YOUNG=1.72e8 DAMPING=0.0 THICKNESS=0.25 WIDTH=0.02
PROFILE=bottom_moving.pro EDGES=SS MODE=20 GRAVITY=0
</DOWNSOLID>
```

```
<CONTACT>
SPEED=0.5733 DELTAZ=1.45e-6
</CONTACT>
```

```
<SIMULATION>
DURATION=25. TIMESTEP=1e-05 SAMPLING=500 PENALTY=1e9
</SIMULATION>
```

Fichier de données pour le problème de contact à une seule aspérité

```
# Fichier de donnees pour ra2d
# V.H. DANG le 20 mai 2011.
```

```
<UPSOLID>
DENSITY=2000.00 YOUNG=5.00e+10 DAMPING=0.00 LENGTH=0.01 THICK-
NESS=0.0005 WIDTH=0.02 PROFILE=Abaqus_L01-1pic-top.pro EDGES=SS
MODE=20 GRAVITY=0
</UPSOLID>
```

```
<DOWNSOLID>
DENSITY=2000.00 YOUNG=5.00e+10 DAMPING=0.00 LENGTH=0.01 THICK-
NESS=0.0005 WIDTH=0.02 PROFILE=Abaqus_L01-5pic-bottom.pro EDGES=SS
MODE=20 GRAVITY=0
</DOWNSOLID>
```



```
<CONTACT>  
SPEED=1.00e+01 DELTAZ=1.45e-06  
</CONTACT>
```

```
<SIMULATION>  
DURATION=1.0e-3 TIMESTEP=2.0e-09 SAMPLING=1e7 PENALTY=0.500e+13  
</SIMULATION>
```

Bibliographie

- [1] *Algorithmes d'intégration directe de l'opérateur DYNA_LINE_TRAN.*
- [2] *Post-traitement des calculs modaux avec choc.*
- [3] *ABAQUS 6.9 User Documentation.* 2011.
- [4] Fédération lyonnaise de calcul haute performances, 2011.
- [5] *Linux Application Tuning Guide for SGI X86-64 Based Systems.* System Software SGI Linux. SGI Technical Publications, 2012.
- [6] A. Akay. Acoustics of friction. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4) :1525–1548, 2002.
- [7] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (92) :353–375, 1991.
- [8] A. Almqvist. *Rough Surface Elastohydrodynamic Lubrication and Contact Mechanics.* Licentiate thesis / Luleå University of Technology. 2004.
- [9] Gene M. Amdahl. Validity of the single processor approach to achieving large scale computing capabilities. In *Proceedings of the April 18-20, 1967, spring joint computer conference*, AFIPS '67 (Spring), pages 483–485, 1967.
- [10] E. Anderson. *LAPACK users' guide.* Miscellaneous Bks. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [11] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, et al. *LAPACK Users' Guide.* Software, Environments and Tools. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [12] H. Ben Abdelounis. *Dynamique et vibroacoustique du contact rugueux : expérimentation et modélisation.* PhD thesis, 2010.
- [13] H. Ben Abdelounis, A. Le Bot, J. Perret-Liaudet, and H. Zahouani. An experimental study on roughness noise of dry rough flat surfaces. *Wear*, 268(1-2) :335–345, 2010.
- [14] H. Ben Abdelounis, H. Zahouani, A. Le Bot, J. Perret-Liaudet, and M. Ben Tkaya. Numerical simulation of friction noise. *Wear*, In Press, Corrected Proof, 2010.
- [15] David Bergstrom. Rough surface generation & analysis, 2012.
- [16] B. Bhushan. *Modern tribology handbook : Materials, coatings, and industrial applications.* The Mechanics and Materials Science Series. CRC Press, 2001.
- [17] Stefan Bjorklund and Soren Andersson. A numerical method for real elastic contacts subjected to normal and tangential loading. *Wear*, 179(1 - 2) :117 – 122, 1994.

- [18] L. Stoimenova Boyko, Suguru Maruyama, Koshi Adachia, and Koji Kato. The roughness effect on the frequency of frictional sound. *Tribology international*, 2007.
- [19] François Broquedis. *De l'exécution d'applications scientifiques OpenMP sur architectures hiérarchiques*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, DEC 2010.
- [20] Bruitparif. Etat des lieux des performances acoustiques des revêtements de chaussées. Technical report, 2011.
- [21] Nicholas J. Carpenter, Robert L. Taylor, and Michael G. Katona. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :103–128, 1991.
- [22] G. Chagnon and F. Nolot. *XML : Synthèse de cours & exercices corrigés*. Pearson, 2007.
- [23] Wen-Ruey Chang and Frederick F. Ling. Normal impact model of rough surfaces. *Journal of Tribology*, 114(3) :439–447, 1992.
- [24] A.B. Chaudhary and K.J. Bathe. A solution method for static and dynamic analysis of three dimensional contact problems with friction. *Computers and Structures*, (24 (6)) :855–873, 1986.
- [25] J.W. Chen and A. Soom. Simulation of random surface roughness-induced contact vibrations at hertzian contacts during steady sliding. *Journal of tribology*, 108(1) :123–127, 1986.
- [26] X. Chen and T. Hisada. Development of a finite element contact analysis algorithm to pass the patch test. *JMSE Int. J. Series A : Solid Mech. Mater. Eng.*, (49) :483–491, 2007.
- [27] M. Ciavarella, G. Demelio, J.R. Barber, and Y.H. Jang. Linear elastic contact of the weierstrass profile. *Proc.Roy.Soc. (London)*, (456) :387–405, 2000.
- [28] David Dureisseix. Méthodes numériques appliquées à la conception par éléments finis. September 2008.
- [29] G. DUVAUT and J.L. LIONS. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, 1972.
- [30] W. E and J. Lu. Multiscale modeling. *Scholarpedia*, 6(8) :11527, 2011.
- [31] S. C. Eisenstat, M. C. Gursky, M. H. Schultz, and A. H. Sherman. Yale sparse matrix package i : The symmetric codes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(8) :1145–1151, 1982.
- [32] Fichera and Gaetano. Elastostatic problems with unilateral constraints : the signorini problem with ambiguous boundary conditions. *Seminari dell'istituto Nazionale di Alta Matematica 1962-1963, Rome : Edizioni Cremonese*, pages 613–679, 1964.
- [33] J.D. Foley. *Computer Graphics : Principles and Practice, Second Edition in C*. The Systems Programming Series. Addison-Wesley Pub, 1996.
- [34] N. Garcia and E. Stoll. Monte carlo calculation for electromagnetic-wave scattering from random rough surfaces. *Physical review letters*, 52(20), 1984.
- [35] C. Geuzaine and J. F. Remacle. Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009.
- [36] D. Givoli and I. Doukhovni. Finite element-quadratic programming approach for contact problems with geometrical nonlinearity. *Computers and Structures*, (61) :31–41, 1996.

- [37] Karl F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press, 1975.
- [38] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of Nominally Flat Surfaces. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 295 :300–319, December 1966.
- [39] E.J. Haug, S.C. Wu, and S.M. Yang. Dynamics of mechanical systems with coulomb friction, stiction, impact and constraint addition-deletion-i. *Mechanism and Machine Theory*, (21 (5)) :401–406, 1986.
- [40] PIERCE Alvin HODGES Dewey. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*. Cambridge Aerospace Series, 2002.
- [41] Intel Corporation. *Intel Math Kernel Library for Linux* OS User's Guide*, 2006.
- [42] E. Isaacson and E.I.H.B. Keller. *Analysis of Numerical Methods*. Dover Books on Mathematics Series. John Wiley & Sons, 1994.
- [43] Persson B. N. J. Theory of rubber friction and contact mechanics. *J. Chem. Phys.*, (115) :3840, 2001.
- [44] Whitehouse D. J. and Archard J. F. The properties of random surface of significance in their contact. *Proc. R. Soc. London A*, (316) :97–121, 1970.
- [45] Demailly Jean-Pierre. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP SCIENCES, 2006.
- [46] K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [47] Y. Ju and T. N. Farris. Spectral analysis of two-dimensional contact problems. *Journal of Tribology*, 118(2) :320–328, 1996.
- [48] J.J. Kalker. A minimum principle for the law of dry friction with application to elastic cylinders in rolling contact. part 1 : fundamentals, application to steady state rolling. *Transaction ASME, Journal of Applied Mechanics*, (38) :875, 1971.
- [49] N. Kikuchi and J.T. Oden. *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Studies in Applied Mathematics Series. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [50] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Art of Computer Programming. Prentice Hall, 2009.
- [51] M.J. Kontoleon and C.C. Baniotopoulos. Computational aspects on the frictional unilateral contact problem arising on steel base plate connections. *COMPUT STRU*, (78(1-3)) :303–309, 2000.
- [52] Rick Kufirin. Perfsuite : An accessible, open source performance analysis environment for linux. In *In Proc. of the Linux Cluster Conference, Chapel*, 2005.
- [53] C. Lalanne. *Vibrations et chocs mécaniques : Tome 2, Chocs mécaniques*. Vibrations et chocs mécaniques. Hermès science publications, 1999.
- [54] T.A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics : Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Engineering Online Library. Springer, 2003.
- [55] A. Le Bot and E. Bou Chakra. Measurement of friction noise versus contact area of rough surfaces weakly loaded. *Tribology Letters*, 37(2) :273–281, 2010.
- [56] A. Le Bot and E. B. Chakra. Measurement of friction noise versus contact area of rough surfaces weakly loaded. *Tribology Letters*, 37(2) :273–281, 2010.

- [57] A.W. Leissa. *Vibration of plates*. NASA SP. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration; [for sale by the Supt. of Docs., U.S. Govt. Print. Off.], 1969.
- [58] Damien Lieber and Dominik Scholl. Densités spectrales de puissance. Master's thesis, INSA de Lyon, 2011.
- [59] D.G. Luenberger and Y. Ye. *Linear and Nonlinear Programming*. Springer, 2008.
- [60] C.D. McGillem and G.R. Cooper. *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*. Oxford series in electrical and computer engineering. Oxford University Press, 1991.
- [61] A. Meziane, S. D'Errico, Laurent Baillet, and B. Laulagnet. Instabilities generated by friction in a pad–disc system during the braking process. *Tribology International*, 40(7) :1127–1136, 2007.
- [62] S. Mohammadi. *Discontinuum Mechanics : Using Finite and Discrete Elements*. WIT Press, 2003.
- [63] M. Moore and J. Wilhelms. Collision detection and response for computer animation. *ACM Computer Graphics*, (22(4)) :289, 1988.
- [64] Hu Ning. A solution method for dynamic contact problems. *Computers and Structures*, 63(6) :1053–1063, 1997.
- [65] P. Norton and D.G. Karczub. *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*. Cambridge University Press, 2003.
- [66] M. OLsson. On the fundamental moving load problem. *Journal of Sound and Vibration*, 1991.
- [67] M. O. Othman, A. H. Elkholy, and A. A. Seireg. Experimental investigation of frictional noise and surface-roughness characteristics. *Experimental Mechanics*, 30(4) :328–331, 1990.
- [68] Nayak R. P. Random process model of rough surfaces. *Lubr. Technol. Trans. ASME*, (93) :398–407, 1971.
- [69] Panagiotopoulos, E.S. Mistakidis, and O.K. Panagouli. Fractal interfaces with unilateral contact and friction conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (99) :395–412, 1992.
- [70] A. Panaït. *Étude expérimentale et numérique des problèmes de contact unilatéral et de frottement sec dans les assemblages verriers*. la-Vallée : 2004, 2004.
- [71] Wriggers Peter. *Computational Contact Mechanics*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K, 2006.
- [72] Y. Pitrey. *Stratégies d'encodage pour codeur vidéo scalable*. 2009.
- [73] V.L. Popov. *Contact Mechanics and Friction : Physical Principles and Applications*. Springer, 2010.
- [74] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer, 2007.
- [75] A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio. *Scientific Computing with MATLAB and Octave*. Springer-Verlag, 2011.
- [76] Reizer R. Simulation of 3d gaussian surface topography. *Wear*, (271) :539–543, 2011.

- [77] G. Rimondi. Tire contribution in the context of automobile noise reduction. *Tire Science and Technology*, 23(3) :189–208, 1995.
- [78] M. Rossi. *Audio*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2007.
- [79] Abdelaziz Sameur. *Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision du bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole des Ponts ParisTech, 2004-12.
- [80] R. S. Sayles. Basic principles of rough surface contact analysis using numerical methods. *Tribology International*, 29(8) :639–650, 1996.
- [81] G. Sheng. *Friction-Induced Vibrations and Sound : Principles and Applications*. Taylor & Francis, 2007.
- [82] J.C. Simo, P. Wriggers, and R.L. Taylor. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, (50) :163–180, 1985.
- [83] H. M. Stanley and T. Kato. An fft-based method for rough surface contact. *Journal of Tribology*, 119(3) :481–485, 1997.
- [84] S. Thomas. Vibrations damped by solid friction. *Philosophical Magazine*, (9) :329–345, 1930.
- [85] D. Thompson. *Railway Noise and Vibration : Mechanisms, Modelling and Means of Control*. Elsevier, 2009.
- [86] Xuefeng Tian and Bharat Bhushan. A numerical three-dimensional model for the contact of rough surfaces by variational principle. *Journal of Tribology*, 118(1) :33–42, 1996.
- [87] S. Timoshenko. *Vibration Problems in Engineering*. Wolfenden Press, 2008.
- [88] Jérôme Vienne. *Prédiction de performances d'applications de calcul haute performance sur réseau Infiniband*. These, Université de Grenoble, 2010.
- [89] Bush A. W., Gibson R. D., and Thomas T. R. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, (35) :87–111, 1975.
- [90] Heinstein Martin W., Mello Frank J., Attaway Stephen W., and Laursen Tod A. Contact–impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3-4) :621–640, 2000.
- [91] M. Yokoi and M. Nakai. A fundamental study of frictional noise. (1st report, the generating mechanism of rubbing noise and squeal noise). *BULL.JSME*, 22(173 , Nov. 1979) :1665–1671, 1979.
- [92] Masayuki Yokoi and Mikio Nakai. Fundamental study on frictional noise - 5. the influence of random surface roughness on frictional noise. In *Bulletin of the JSME*, volume 25, pages 827–833, 1982.
- [93] H. Zahouani, R. Vargiolu, G. Boyer, C. Pailler-Mattei, L. Laquière, and A. Mavon. Friction noise of human skin in vivo. *Wear*, 267(5-8) :1274–1280, 2009.
- [94] ZAVARISE, Giorgio, LORENZIS DE, and Laura. *A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test*, volume 79. Wiley, Chichester, ROYAUME-UNI, 2009.

Table des figures

1	Présentation graphique de la surface rugueuse.	11
2	Présentation graphique de la hiérarchie mécanique [30].	12
1.1	Exemples d'un bruit d'instabilité mécanique	15
1.2	Mécanisme du bruit de rugosité	16
1.3	Tribomètre acoustique	18
1.4	Évolution du niveau de la pression acoustique en fonction de la vitesse de glissement et de la rugosité de la surface [13]	18
1.5	Bruit de roulement [85]	19
1.6	Les sources importantes du bruit automobile. Figure extraite de [20]	20
1.7	Influence de la vitesse sur le bruit de contact pneumatique [79]	20
1.8	Différentes surfaces ayant la même valeur Ra	22
1.9	Représentation graphique d'une loi Gaussienne de moyenne $m=0$	23
1.10	Coefficient Rsk pour la mesure de la symétrie du profil et coefficient Rku pour la mesure de l'aplatissement de la distribution du profil	23
1.11	Surface sinusoïdale	24
1.12	Fonction d'auto corrélation pour décrire la caractéristique spatiale de la surface [16]	25
1.13	Problème de contact des deux solides [64]	26
1.14	La condition de non-pénétration	27
1.15	Calcul du déplacement d'un demi-espace élastique soumis à une pression uniforme [46]	28
1.16	Calcul du déplacement d'un demi-espace élastique soumis à une pression uniforme - 3D formulation [46]	28
1.17	Contact de Hertz [70]	28
1.18	Modèle GreenWood-Williamson pour contact rugueux [73]	32

1.19	Maillage de discrétisation d'une surface [86]	34
1.20	Modèle de méthode des éléments finis de contact rugueux [14]	36
2.1	Mesure du bruit rayonné par le frottement de morceaux de sucre sur un tambour (a), sur une table (b)	39
2.2	Évolution du niveau sonore en fonction du nombre de morceaux de sucre. Glissement sur une table en bois. $V=10$ cm/s.	40
2.3	Évolution du niveau sonore en fonction du nombre de morceaux de sucre. Glissement sur une membrane de tambour. $V=10$ cm/s.	41
2.4	Tribomètre linéaire RA	42
2.5	Interface du programme LabView pour piloter le tribomètre linéaire Ra	43
2.6	Glisseur et plaque résonante utilisés	44
2.7	Temps de réverbération des résonateurs utilisés.	45
2.8	Matériel pour le sablage.	47
2.9	Image de la surface rugueuses obtenue grâce à l'utilisation du microscope Olympus BX51 M (10 fois agrandi).	48
2.10	Topographie des surfaces de glisseurs	48
2.11	Évolution de la vitesse vibratoire en fonction de l'aire de contact. Vitesse de glissement $V=6$ cm/s, Rugosité de surface $Ra=5 \mu m$, quatre combinaisons : glisseurs minces/épais et résonateurs avec fort/faible amortissement.	49
2.12	Évolution des variables sans dimension représentant le niveau vibratoire avec l'aire de contact.	54
2.13	Plaque résonante de dimension $300 \times 450 \times 2$ (mm).	55
2.14	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse avec $Ra = 5 \mu m$	56
3.1	Modèle de contact glissant entre profils rugueux. Le profil supérieur se déplace à vitesse constante V . Le profil inférieur est appuyé aux deux extrémités. L'écart horizontal entre les deux profils est $\Delta = V.t$	59
3.2	Représentation graphique de l'erreur de consistance	65
3.3	Approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$ par la méthode d'Euler explicite	70
3.4	Approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(y)dt$ par la méthode de prédiction-correction	72
3.5	Interprétation de la méthode de Runge Kutta d'ordre 2	74
3.6	Continuité des courbes	84

3.7	Surface interpolée linéairement	85
3.8	Surface interpolée d'Hermite	86
3.9	Détection du contact par l'algorithme noeud-segment	86
3.10	Représentation graphique de la méthode de pénalité	87
3.11	Système masse-ressort de deux degrés de liberté.	92
3.12	chaîne de calcul	94
4.1	Organigramme du programme Ra2D	96
4.2	Fichier de données	99
4.3	Interface du logiciel MRa2D	104
4.4	Analyse de la performance de code par le programme Perfsuite	105
4.5	Processeur Intel Nehalem, 8 coeurs 2.66 GHz par processeur.	109
4.6	Hierarchie de la mémoire	109
4.7	Machine parallèle à mémoire partagée	110
4.8	Structure UMA de la machine parallèle à mémoire partagée [19]	110
4.9	Structure NUMA de la machine parallèle à mémoire partagée [19]	110
4.10	Loi d'Amdahl sur l'efficacité de la parallélisation	112
4.11	Mesocentre de calcul PMCS2I	113
4.12	Procédure pour travailler avec le méso-centre de calcul	113
5.1	Poutre soumise à une masse mobile.	114
5.2	Problème de la masse mobile. Force de contact obtenue par le programme Ra2D. (a) Utilisation de l'interpolation linéaire et l'algorithme de pénalité. (b) Utilisation de l'interpolation d'Hermite et de l'algorithme de pénalité. (c) Utilisation de l'interpolation d'Hermite et de l'algorithme des multiplicateurs de Lagrange.	117
5.3	Comparaison de la déflexion du point milieu de la poutre obtenue par Ra2D et la solution analytique de Olsson. Quatre vitesses de glissement sont utilisées ($\alpha=0.125, 0.25, 0.5, 1.0$ (table 5.2)).	118
5.4	Modèle utilisé pour le problème du contact à une seule aspérité	119
5.5	Maillage pour le problème de contact d'une seule aspérité	120
5.6	Comparaison du déplacement et de la force de contact au sommet de l'aspérité unique de la surface supérieure entre ABAQUS et Ra2D.	122

5.7	Evolution de l'erreur relative du déplacement au sommet de l'aspérité sur la surface supérieure entre ABAQUS et Ra2D en fonction du nombre de modes. Le déplacement de 0 à 0.4s est utilisé pour le calcul de cette erreur relative. L'algorithme de Lagrange est utilisé.	123
5.8	Profils numériques, histogramme des hauteurs et courbe d'approximation par une distribution normale.	125
5.9	Influence du nombre de modes de vibration du résonateur sur les résultats	126
5.10	Vitesse vibratoire et sa densité spectrale de puissance pour les cas de $Ra=5 \mu m$ et $V=0.1, 0.3$ et $1 m/s$	128
5.11	Vitesse vibratoire et sa densité spectrale de puissance pour les cas de $V=0.2 m/s$ et $Ra=3, 10$ et $30 \mu m$	129
5.12	Répétabilité du calcul du niveau vibratoire L_v	131
5.13	Évolution du vibratoire en fonction du facteur d'amortissement ($V = 10 cm/s$ et $Ra=10 \mu m$).	131
5.14	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité de surface avec $V = 0.3 m/s$. Pour chaque valeur de Ra , on génère 10 couples de profils (glisseur et résonateur).	133
5.15	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la rugosité de surface. Les barres d'erreur sont estimées par 10 calculs avec différents profils.	133
5.16	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement. Les barres d'erreur sont estimées par 10 calculs avec différents profils.	134
5.17	Évolution de la force de contact au noeud $x=0.012 m$ sur le résonateur pour le cas où $Ra=5 \mu m$ et $V=0.1 m/s$. À partir de cette évolution, les valeurs maximales de la force de contact de choc et la durée de choc sont déterminées.	135
5.18	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la durée de choc.	137
5.19	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de force maximale de choc.	139
5.20	Évolution de la force totale de contact en fonction du temps et sa valeur moyenne quadratique pour différentes vitesses de glissement et rugosités de surface. Le poids propre du glisseur est $0.15 N$	140
5.21	Pourcentage de temps de choc en fonction de la vitesse et de la rugosité.	141
5.22	Énergie totale transférée au résonateur.	142
5.23	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la force maximale de choc.	143
5.24	Evolution de l'énergie moyenne transférée en fonction de la vitesse de glissement (en haut) et la rugosité de surface (en bas).	144

5.25	Evolution du nombre de chocs par seconde en fonction de la vitesse de glissement (en haut) et de la rugosité de surface (en bas).	145
6.1	Modèle de contact glissant entre deux surfaces rugueuses. La surface supérieure se déplace à une vitesse constante V dans la direction x (la longueur de la surface inférieure). L'écart horizontal entre deux profils est $\Delta x = Vt$ dans la direction x et $\Delta y = cte$ dans la direction y	149
6.2	Mode de la vibration du résonateur appuyé aux quatre coins.	153
6.3	Patch bicubique d'Hermite et projection verticale du noeud esclave . . .	154
6.4	Surface simulée $Ra=5 \mu m$	155
6.5	Scalabilité spatiale	158
6.6	Scalabilité temporelle	158
6.7	Scalabilité modale	159
6.8	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la force de contact maximale de choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement	160
6.9	Force totale de contact avec les surfaces de $Ra=5 \mu m$ rugosité et différentes vitesses de glissement	162
6.10	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de la durée de choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement	163
6.11	Energie totale transférée vers le résonateur.	164
6.12	Histogramme et fonction cumulative des probabilités de l'énergie transférée du choc pour $Ra=5\mu m$ et différentes vitesses de glissement	165
6.13	Evolution de l'énergie moyenne (à gauche) et du nombre de chocs par seconde (droite) en fonction de la vitesse de glissement.	166
6.14	Vitesse vibratoire au noeud $x=0.176$ m, $y=0.15$ m du résonateur avec la vitesse de glissement $V=0.1, 0.4, 0.9$ (m/s)	166
6.15	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement et la rugosité de la surface obtenue par le programme Ra3D	167
6.16	Évolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse de glissement obtenue par la simulation 3D, 2D et l'expérience	168
6.17	Transformation de l'énergie dans les bandes de fréquences	173
18	Expérience sur le spectre de fréquence du bruit de rugosité	178
19	Expérience de l'impact d'une bille avec un échantillon	179
20	Spectre de fréquence du bruit de rugosité obtenu avec les éprouvettes en acier	180

21	Spectre de fréquence du bruit de rugosité obtenue avec les éprouvettes en aluminium	181
22	Modèle de la raideur de contact	182
23	Eléments de poutre en flexion	182

RÉSUMÉ

Le bruit de frottement de deux surfaces rugueuses est dû à la vibration verticale engendrée par les impacts inter-aspérités de deux solides glissants. Il relève de la physique des interfaces multicontact dont les propriétés sont encore largement méconnues. L'objet de cette thèse est de comprendre les mécanismes de transfert d'énergie et de génération des vibrations à l'oeuvre à l'interface entre deux surfaces rugueuses en glissement relatif. Ces interfaces présentent des spots de contact qui se renouvellent très rapidement mais dont la physique statistique reste à découvrir. Un outil numérique est spécialement développé pour étudier efficacement ce phénomène aux échelles microscopique et macroscopique. Les simulations sont effectuées à l'aide de centres de calcul haute performance à Lyon. Elles ont mené aux conclusions suivantes. Le niveau de la vibration L_v (dB) est une fonction croissante du logarithme de la rugosité de surface Ra et de la vitesse de glissement V , ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux issus de la littérature. De plus, grâce à cet outil numérique, on a pu analyser précisément les chocs entre surfaces définis à partir de l'évolution temporelle de la force de contact. Leur durée est de l'ordre de 0.1 ms, la force maximale de contact peut atteindre 100 fois le poids propre du solide glissant, et le nombre de chocs est de l'ordre de 10000 par seconde pour une surface de l'ordre de 4 cm². Les chocs sont donc des excitations transitoires brèves mais nombreuses et intenses. Ces chocs se comportent comme les sources d'énergie vibratoire qui sont responsables d'un transfert d'énergie à l'interface. C'est en effet la transformation de l'énergie cinétique du mouvement solide glissant en énergie vibratoire qui est responsable du bruit de frottement.

Mot-clés : Rugosité, Mécanique de contact, Bruit de frottement, Analyse numérique.

ABSTRACT

The friction noise between two rough surfaces is caused by the vertical vibration generated by inter-asperity impacts of sliding solids. This phenomenon involves the physics of multicontact interfaces, a field which is largely unknown. The purpose of this thesis is to understand the mechanisms of noise generation and the energy transfer process between two rough surfaces in sliding contact. The contact spots in the interface are rapidly renewed during the movement in a random fashion but their statistical properties remain to be discovered. A numerical tool is developed in order to efficiently study this phenomenon at both macroscopic and microscopic scales. The simulations are carried out thanks to the high performance computing centre in Lyon. This study leads to the following conclusions. The vibration level L_v (dB) is an increasing logarithm function of surface roughness Ra and sliding velocity V . This statement is consistent with experimental results available in the literature. Moreover, we can analyze precisely the asperity shocks which are defined from the time evolution of the contact force. The shock duration is of the order of 0.1 ms, the maximal contact force can reach to 100 times the weight of sliding solid, and the shock rate is of the order of 10000 for a surface of 4 cm². The asperity shocks are transient excitations, brief but abundant and intensive. These shocks behave like vibrational energy sources and are responsible of the energy transfer in the interface. This is the transformation process of kinetic energy to vibrational energy which is responsible of friction noises.

Keywords : Roughness, Contact mechanics, Friction noise, Numeric analysis.

