

# SPIM

## Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques  
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

### THÈSE

De l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR

Discipline : Génie mécanique

# Analyse et modélisation de l'endommagement dû au couplage thermomécanique des multi-matériaux cylindriques

Par

## Bilal TAHER

Laboratoire Systèmes et Transports (SET)

Soutenue le 20 Décembre 2012 devant le jury composé de :

Jean Félix DURASTANTI	Rapporteur	Professeur, Université de Paris-Est Créteil
Mohamed LACHI	Rapporteur	Professeur, Université de Reims
Michel IMBERT	Examineur	Professeur, UTBM
Najib LARAQI	Examineur	Professeur, Université Paris 10
Saïd ABOUDI	Directeur	Professeur, UTBM
Rafic YOUNES	Codirecteur	Professeur, Université Libanaise





# SPIM

■ École doctorale SPIM - Université de Technologie Belfort-Montbéliard  
F - 90010 Belfort Cedex ■ tél. +33 (0)3 84 58 31 39  
■ [ed-spim@univ-fcomte.fr](mailto:ed-spim@univ-fcomte.fr) ■ [www.ed-spim.univ-fcomte.fr](http://www.ed-spim.univ-fcomte.fr)





# DEDICACES

*À mes chers et tendres parents, Khaled et Halima,  
sans vous, rien n'aurait pu être possible,  
que Dieu vous garde pour moi  
et vous prête une longue vie  
pleine de santé et de prospérité...*

*À mes sœurs et mes frères,  
merci de m'avoir soutenu tout au long de mes études  
et tout au long de cette aventure,  
que Dieu vous préserve...*

*À la personne que rien ne lui récompense,  
à l'acteur principal derrière la réussite de ce travail,  
à la personne qui a tant sacrifié et qui était à tout moment à côté de moi,  
à ma chère et merveilleuse femme, Nada  
que Dieu me donne le pouvoir de te récompenser...*

*À la source d'ambition, d'espoir, de bonheur et de joie,  
au petit ange dont le sourire a changé mon monde,  
à mes petits Mouvement et Nouredine  
que Dieu me permette de te voir un jour aux positions les plus élevées...*



# REMERCIEMENTS

Si cette thèse a pu voir le jour, c'est certainement grâce à Dieu et au soutien et à l'aide de plusieurs personnes. Je profite de cet espace pour les remercier tous.

Mes premiers remerciements vont à Saïd ABBOUDI, Professeur à l'université de technologie de Belfort-Montbéliard, ainsi qu'à Rafic Younes, Professeur à la faculté de génie de l'université libanaise. Les deux m'ont dirigé durant ces dernières années, ils ont été toujours une source inépuisable d'idées, de savoir et d'encouragement. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir sans eux, ils ont toujours su me guider, me conseiller, et me témoigner leur soutien et leur confiance. Je leur transmets l'expression de ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Mes très vifs remerciements vont à Jean Félix DURASTANTI et Mohamed LACHI pour m'avoir fait l'honneur et avoir accepté la lourde tâche d'être mes rapporteurs. Je les remercie pour leurs remarques et commentaires constructifs. J'ai pleinement profité de leurs expériences et compétences dans le domaine.

Je suis très heureux et c'est un grand honneur pour moi que Michel IMBERT et Najib LARAQI aient accepté d'examiner mes travaux de thèse et faire partie de mon jury.

Je ne pourrais clôturer ces remerciements sans me retourner vers les êtres qui me sont les plus chers, qui ont eu un rôle essentiel pendant plusieurs années d'études, et qui sans eux aucune réussite n'aurait été possible. J'adresse de tout mon cœur mes remerciements à mes parents qui furent toujours mon exemple du bon couple qui a réussi à faire de leurs enfants les bons exemples des êtres humains. Je leur suis infiniment reconnaissant pour leur amour et leur soutien moral. Qu'ils trouvent dans ce travail le fruit de leurs efforts. Chers sœurs et frères, merci beaucoup pour vos encouragements continus de près ou de loin.

Je ne connais pas de terme assez fort pour remercier ma merveilleuse femme. Je te remercie chère Nada pour tes encouragements, tes sacrifices, ta présence, ton écoute et ton soutien aux moments les plus difficiles. Sans toi, cette thèse n'aurait été ni débutée ni terminée. Je te remercie aussi pour tout l'amour, et pour m'avoir toujours poussé en avant, faisant foi de mes doutes et mes objections. Je ne vais pas ajouter plus car tous les mots de toutes les langues ne peuvent pas me servir pour exprimer mes remerciements et mes grâces envers toi.

Enfin, je voudrais remercier mes petits fils Mouemen et Nouredine pour, sans toujours le savoir, avoir donné plein de joie et de bonheur à ce travail. Je veux leur dire que leur beau sourire qui ne quitte pas leurs lèvres sera toujours ma source d'espoir et m'incitera toujours à penser à améliorer leur futur.





# RESUME

Un grand nombre de systèmes thermomécaniques industriels se trouve confronté à des régimes transitoires plus ou moins rapides suivant la fréquence de fonctionnement. L'amélioration de leurs performances nécessite l'utilisation de nouvelles structures du type multimatériaux ou barrière thermique. En effet, ces matériaux peuvent être de type multicouche en associant plusieurs couches rangées de façon à améliorer le comportement mécanique et thermique d'un système ou alors constitués d'un substrat revêtu d'une succession de couches minces obtenues par projection thermique par exemple.

Dans un système donné, ces matériaux subissent généralement des sollicitations cycliques qui peuvent être d'origine thermique et/ou mécanique. Il est donc nécessaire de mieux connaître leur comportement thermomécanique en régimes élastique et plastique. Ainsi, l'étude présentée dans ce travail, limitée ici à des conditions périodiques uniquement d'origine thermique, traite de l'évolution de l'endommagement d'un matériau sous une ou plusieurs formes de fatigue thermique.

L'origine de la sollicitation imposée provient d'une condition de flux périodique (sous forme d'échelon, de triangle ou de sinus) prenant en compte les pertes par convection. Sur le plan mécanique, le matériau est supposé fixe sur l'une de ses deux extrémités et libre de se déformer sur l'autre. Les contraintes et les déformations mécaniques dans le matériau proviennent essentiellement des différences des coefficients de dilatation thermique et des gradients de température dans le matériau. La nature variable et transitoire du comportement thermique du matériau permet de suivre l'évolution de la distribution des contraintes et des déformations au sein du matériau.

L'étude de son endommagement est menée selon les cas, soit sur des modèles établis directement à partir du comportement thermo élastique soit sur des modèles nécessitant l'étude thermo-élastoplastique. Dans les deux cas, comme la plupart des modèles d'endommagement (Lemaître et Chaboche) rencontrés dans la littérature ne sont valides que sur des matériaux uniformes et homogènes, une recherche de matériau équivalent du multi-matériau étudié était nécessaire. L'équivalence entre le matériau réel et le matériau équivalent repose sur un critère d'équivalence thermique. Les modèles étudiés fournissent dans les deux cas, l'évolution de l'endommagement du matériau, en fonction des paramètres géométriques et aussi de la forme des sollicitations thermiques imposées telles que le coefficient d'échange par convection, l'amplitude et la période du flux imposé.

Une application de ces modèles sur un exemple de moteur à combustion interne est proposée à la fin de ce mémoire. Elle montre une prédiction du nombre de cycles (durée de vie) du cylindre moteur en fonction des conditions de fonctionnement utilisées.

**Mots clés :** fatigue thermique, thermomécanique, endommagement, thermo-élastoplastique, couplage, multi-matériaux, charge cyclique thermique



# ABSTRACT

A great number of industrial thermo-mechanical systems are facing today transitory regimes with different speeds according to the functioning frequencies. Enhancing their performance imposes the use of new materials of different types; multimaterials is a good example. In fact, these new materials may be constituted of different layers where the layers are associated together in a way to enhance the mechanical and thermal behavior of the system. They may be also constituted of a substrate dressed by a succession of slim layers obtained by thermal projection.

In a given system, the constituting materials are generally subject to cyclic thermal or mechanical solicitations. It is very important to know at best their thermomechanical behavior in elastic and plastic regimes. Therefore, the study done during this thesis work, limited here uniquely to periodical solicitations resulting from thermal sources, deals with the evolution of the damage of these materials under multiple forms of thermal fatigue in plastic and elastic functioning regimes.

The imposed solicitations are obtained from a periodical thermal source (rectangular, triangular and sinusoidal form). The thermal loss resulting from the convection is also considered. On the mechanical side, the material is considered fixed on one of its extremities and free on the other one (subject to strain). The mechanical stress and strain in the material come essentially from the differences between the coefficients of thermal dilation and the gradient of temperature in the material. The transitory and variable thermal behavior of the material permits to track the evolution and the distribution of the stress and strain in the material.

The study of the damage is performed according the given case, either using models directly established from the thermomechanical elastic behavior, or using models that need a thermo-elastoplastic study. In the two cases, and because the majority of damage models (Lemaître and Chaboche) seen in the literature are valid and can be applied only to uniform and homogeneous materials, a research of an equivalent material to the studied multi-material was necessary. The equivalency between the real material and the equivalent one is based mainly on thermal equivalent criteria. The study provides in the two cases the damage evolution in the multimaterial function of the geometric parameters, depending on the form of the imposed thermal solicitations such as the heat transfer coefficient, the amplitude, the period and the shape of the imposed thermal flow.

An application of these models to an internal combustion engine is proposed at the end of this thesis. It gives a prediction of the number of cycles (lifetime) of the cylinder of the engine depending on the used functioning conditions.

**Keywords:** Thermal stress, thermo-mechanical, damage, thermo-elasto-plastic, coupling, multi-material, cycling thermal load



# LISTE DES PUBLICATIONS

---

## *Articles publiés dans des conférences*

- 1) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, " Effect of Frequency and Shape of Thermal Cycling on the Damage of Multi-material Under Thermo-elasto-plastic Behaviour ", PVP2009, ASME pressure vessels and piping division conference, Prague, republic de CZECK, ASME digital store PVP2009-77370, Juillet 2009.
- 2) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "Numerical Analysis of Thermo-Elastic Damage of Cylinder Body: Application to Engine System", NASCA conference, Numerical Analysis and Scientific Computing with Applications, Agadir, Morocco, Mai 2009.
- 3) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "Damage of thermo-elastoplastic multi-material under thermal cycling conditions using the homogenous method", IMECE 2008, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, Massachusetts, USA, ASME digital store IMECE2008-68815, Novembre 2008.
- 4) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "Study of homogenization technique in a two-layer cylindrical material", IMECE 2007, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Seattle, Washington, USA, ASME digital store IMECE2007-44084, Novembre 2007.
- 5) B. Taher, R. Younes, S. Abboudi, "Numerical analysis of thermo-mechanical behavior of a multi-material under thermal cycling conditions", PVP2006-ICPVT-11-2006, ASME pressure vessels and piping division conference, Vancouver, BC, CANADA, ASME digital store PVP2006-ICPVT-11-93495, Juillet 2006.
- 6) B. Taher, R. Younes, S. Abboudi, "Homogénéisation thermomécanique d'un multi-matériau", Cinquième Conférence Internationale sur la Science des Matériaux (CSM5), Beyrouth, Liban, P 55, Mai 2006.
- 7) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "Thermo-mechanical analysis of a multi-material under thermal cycling conditions", Second Conference on Simulation and Multidisciplinary Design Optimization (ASMDO), Belfort, France, Mai 2006.
- 8) R. Younes, B. Taher, S. Abboudi, "Optimisation thermomécanique du comportement transitoire d'un multi-matériau 2D", SCRO Montréal, canada, P 170, Janvier 2006.

---

## *Articles publiés dans des journaux*

- 9) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "A Study of the thermo-elastic damage in the cylinder of an engine", Journal Heat & Technologie, avril 2010.

10) B. Taher, S. Abboudi, R. Younes, "Multi-materials optimization and decrease of the thermo-elasto-plastic damage effect under thermal cycling conditions", Journal WSEAS, février 2009.

# TABLE DES MATIERES

## CONTENTS

<b>Dedicaces.....</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements.....</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé.....</b>	<b>v</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des publications.....</b>	<b>ix</b>
<b>Table des matières.....</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des figures.....</b>	<b>xv</b>
<b>Liste des tableaux.....</b>	<b>xxi</b>
<b>Nomenclature.....</b>	<b>xxiii</b>
<i>Chapitre 1 Introduction.....</i>	<i>1</i>
1.1 Introduction générale.....	1
1.2 Problématiques et motivations.....	1
1.3 Objectifs et démarches.....	2
1.4 Liste des contributions.....	2
1.5 Plan du manuscrit.....	3
<i>Chapitre 2 Eléments bibliographiques sur l'endommagement et le couplage thermo-mécanique....</i>	<i>5</i>
2.1 Introduction.....	5
2.2 Comportement mécanique.....	5
2.3 Comportement thermomécanique.....	7
2.3.1 Equation thermoélastique.....	7
2.3.2 Loi de Hooke en thermoélasticité.....	7
2.3.3 Équation de la chaleur en thermo-élasto-plasticité.....	8
2.4 L'endommagement des matériaux solides.....	10
2.4.1 Notion d'endommagement.....	10
2.4.2 Types d'endommagement.....	10
2.4.3 Des exemples d'endommagement thermomécanique.....	12
2.4.4 La Fatigue thermomécanique.....	13
2.4.5 Etudes de l'endommagement.....	14
2.5 Formulation mathématique de la Loi d'endommagement.....	17
2.5.1 Définition de la variable d'endommagement.....	17
2.5.2 La contrainte effective.....	18
2.5.3 Mesure de l'endommagement.....	19
2.5.4 Quelques modèles d'endommagement.....	20
2.6 Les multi-matériaux.....	22

2.7	Conclusion .....	22
<i>Chapitre 3 Description du modèle équivalent au modèle multi-couche.....</i>		<i>25</i>
3.1	Introduction.....	25
3.2	Formulations du couplage thermomécanique .....	26
3.2.1	Formulation thermique.....	26
3.2.2	Equations générales mécaniques .....	28
3.2.3	Couplage thermomécanique .....	29
3.3	Représentation multicouche théorique.....	31
3.3.1	Multimatériaux plans.....	31
3.3.2	Multimatériaux cylindriques.....	34
3.4	Représentation du milieu équivalent au matériau bicouche .....	36
3.4.1	Couplage thermomécanique en régime transitoire plan (x, y).....	36
3.4.2	Couplage thermomécanique en régime transitoire plan (r, z) .....	38
3.5	Résultats numériques .....	40
3.5.1	Influence de la géométrie .....	43
3.5.2	Influence de la densité du flux.....	47
3.5.3	Influence des propriétés des matériaux .....	49
3.5.4	Influence de la variation du module d'Young .....	50
3.6	Conclusion .....	53
<i>Chapitre 4 Analyse de l'endommagement sous chargement thermo-élastique.....</i>		<i>55</i>
4.1	Introduction.....	55
4.2	Matériaux uniques.....	56
4.2.1	Présentation du problème .....	56
4.2.2	Formulation thermique.....	57
4.2.3	Méthodes de résolution .....	57
4.2.4	Modèle d'endommagement : Loi de Woehler-Miner.....	60
4.2.5	Méthode Numérique .....	60
4.3	Multimatériaux .....	69
4.3.1	Présentation du problème .....	69
4.3.2	Influence des charges thermiques .....	70
4.3.3	Influence de la géométrie .....	74
4.4	Conclusions .....	80
<i>Chapitre 5 Analyse de l'endommagement des matériaux sous chargement thermo-élasto-plastique</i>		<i>82</i>
5.1	Introduction.....	82
5.2	Analyse de l'existant.....	82
5.3	Matériaux Uniques .....	84
5.3.1	Présentation du problème .....	84
5.3.2	Variation du module d'young .....	85
5.3.3	Organigramme de calcul .....	85
5.3.4	Influence des paramètres des Matériaux .....	88
5.3.5	Influence des conditions aux limites thermiques .....	92
5.3.6	Influence de l'épaisseur du matériau .....	98
5.4	Matériau bicouche.....	99
5.4.1	Présentation du problème .....	99
5.4.2	Résultats numériques et discussion.....	101
5.4.3	Influence de la forme du flux.....	101
5.4.4	Influence de la période .....	103
5.4.5	Influence de l'épaisseur des couches .....	106
5.4.6	Influence de l'épaisseur totale du multi-matériau .....	110



5.5	Conclusion .....	113
<i>Chapitre 6</i>	<i>Application sur un cylindre moteur .....</i>	<i>116</i>
6.1	Introduction .....	116
6.2	Description de l'application .....	116
6.3	résultats numérique et discussion .....	117
6.4	Conclusion .....	125
<i>Chapitre 7</i>	<i>Conclusions et Perspectives.....</i>	<i>127</i>
7.1	Principales contributions .....	127
7.2	Perspectives et nouveaux défis .....	128
<b>Annexe</b>	<b>.....</b>	<b>131</b>
<b>References bibliographiques</b>	<b>.....</b>	<b>137</b>



# LISTE DES FIGURES

Figure 2.1 : Courbe de comportement élasto-plastique.....	5
Figure 2.2: Dilatation linéaire.....	7
Figure 2.3 : Exemple d'endommagement ductile des matériaux [8].....	10
Figure 2.4 : Schématisation de l'endommagement cyclique de fatigue [8] .....	11
Figure 2.5 : Classification des types d'endommagements .....	11
Figure 2.6 : Fissures sur un disque de frein.....	12
Figure 2.7: Classification des fatigues thermiques.....	14
Figure 2.8: Section plane d'un élément de volume endommagé .....	18
Figure 3.1 : Comportement élasto-plastique.....	28
Figure 3.2 : Matériau bicouche .....	31
Figure 3.3 : Le corps étudié dans le plan $(x, y)$ .....	32
Figure 3.4 : Cylindre creux à deux couches.....	34
Figure 3.5 : Section B-B du cylindre à deux couches dans le plan $(r, z)$ . .....	34
Figure 3.6 : Matériau équivalent (plan $x, y$ ) .....	37
Figure 3.7 : Matériau équivalent (plan $r, z$ ).....	38
Figure 3.8 : Le corps étudié .....	40
Figure 3.9 : Courbe d'interpolation de $\rho$ .....	41
Figure 3.10 : Courbes d'interpolation de $C$ et $\lambda$ .....	42
Figure 3.11 : Courbe d'interpolation de $\alpha$ .....	42
Figure 3.12 : Courbe d'interpolation du module d'Young $E$ .....	43
Figure 3.13 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante $e=600$ mm, $n=8$ ....	43
Figure 3.14 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante, $e=60$ mm, $n=4$ ....	44
Figure 3.15 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante, $e=6$ mm, $n = 8$ . ....	44
Figure 3.16 : Variation de l'erreur relative sur la température avec l'épaisseur pour différents degrés du polynôme d'interpolation.....	45
Figure 3.17 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec l'épaisseur pour différents degrés du polynôme d'interpolation.....	45
Figure 3.18 : Variation de l'erreur relative sur la température avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages, $e=60$ mm.....	46
Figure 3.19 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages, $e=60$ mm.....	46
Figure 3.20 : Variation de l'erreur relative sur la température avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages, $e=600$ mm.....	46
Figure 3.21 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages, $e=600$ mm.....	47
Figure 3.22 : Comparaison des températures, $Q=1000$ W/m <sup>2</sup> .....	47
Figure 3.23 : Comparaison des températures, $Q=10000$ W/m <sup>2</sup> .....	48
Figure 3.24 : Comparaison des températures, flux variable, $e=12$ mm.....	48

Figure 3.25 : Comparaison des températures, cas (acier, cuivre), $n = 8$ .....	49
Figure 3.26 : Comparaison des températures : cas (acier, laiton), $n=8$ .....	49
Figure 3.27 : Erreur relative sur la température pour les trois cas étudiés. ....	50
Figure 3.28 : Comparaison des contraintes, $Q=5000 \text{ W/m}^2$ , $e=60 \text{ mm}$ , module d'Young constant. ....	51
Figure 3.29 : Comparaison des contraintes, $Q=5000 \text{ W/m}^2$ , $e=60 \text{ mm}$ , module d'Young variable. ....	51
Figure 3.30 : Comparaison des contraintes obtenues avec module d'Young constant et un flux variable ..... 52	52
Figure 3.31 : Comparaison des contraintes obtenues avec module d'Young variable $E(T)$ et un flux variable. .... 52	52
Figure 4.1: Le corps étudié .....	56
Figure 4.2 : Organigramme de calcul. ....	61
Figure 4.3 : Effet de la température sur la fatigue du FeAL [45]. ....	62
Figure 4.4: Evolution de la température à $\bar{\sigma} = 500 \text{ MPa}$ .....	62
Figure 4.5 : Evolution de la température à $\bar{\sigma} = 550 \text{ MPa}$ .....	63
Figure 4.6 : Evolution de la contrainte à $\bar{\sigma} = 500 \text{ MPa}$ .....	63
Figure 4.7 : Evolution de la contrainte à $\bar{\sigma} = 550 \text{ MPa}$ .....	63
Figure 4.8 : Endommagement en fonction du nombre de cycles à $\bar{\sigma} = 500 \text{ MPa}$ .....	64
Figure 4.9 : Endommagement en fonction du nombre de cycles à $\bar{\sigma} = 550 \text{ MPa}$ .....	64
Figure 4.10: Evolution de la température selon l'axe $r$ , $z=L/2$ .....	65
Figure 4.11 : Champ de température à $t=30000 \text{ s}$ .....	65
Figure 4.12 : Evolution de la contrainte selon l'axe $r$ , $z=L/2$ .....	65
Figure 4.13 : Champ de contraintes $\sigma_{zz}$ à $t=30000 \text{ s}$ .....	65
Figure 4.14 : Champ de contraintes $\sigma_{rr}$ , $t=30000 \text{ s}$ . ....	66
Figure 4.15 : Champ de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ , $t=30000 \text{ s}$ . ....	66
Figure 4.16 : Champ de contraintes $\sigma_{rz}$ , $t=30000 \text{ s}$ . ....	66
Figure 4.17 : Champ de contraintes de Von Mises $\sigma_M$ , $t=30000 \text{ s}$ .....	66
Figure 4.18 : Endommagement en fonction du nombre de cycles : calcul global des contraintes $\sigma_{zz}$ .....	67
Figure 4.19 : Distribution du nombre de cycles à l'endommagement dans le plan $(r, z)$ : calcul global des contraintes $\sigma_{zz}$ .....	67
Figure 4.20 : Endommagement en fonction du nombre de cycles : calcul des contraintes de Von-Mises, $z=L/2$ . 67	67
Figure 4.21 : Distribution du nombre de cycles à l'endommagement dans le plan $(r, z)$ : calcul des contraintes de Von-Mises.....	67
Figure 4.22: Evolution de la température selon l'axe $r$ , $z=L/2$ , Al.....	68
Figure 4.23 : Evolution de la contrainte selon l'axe $r$ , $z=L/2$ , matériau AL. ....	68
Figure 4.24 : Endommagement en fonction du nombre de cycles de l'Al: calcul global des contraintes $\sigma_{zz}$ . .... 69	69
Figure 4.25 : Champs de température pour un flux sinusoïdal à $t=360 \text{ s}$ .....	70
Figure 4.26 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme carrée. ....	71
Figure 4.27 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme sinusoïdale.....	71
Figure 4.28 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme triangulaire.....	72
Figure 4.29 : Contrainte thermomécanique, cas carré, $z=L/2$ . ....	73
Figure 4.30 : Contrainte thermomécanique, cas sinusoïdal, $z=L/2$ . ....	73

Figure 4.31 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.01$ m, $e_{Al}=0.05$ m).....	75
Figure 4.32 : Evolution de la contrainte $\sigma_{zz}$ du corps ( $e_{ac}=0.01$ m, $e_{Al}=0.05$ m).....	75
Figure 4.33 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.01$ m, $e_{Al}=0.05$ m).....	75
Figure 4.34 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.02$ m, $e_{Al}=0.04$ m).....	76
Figure 4.35 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.02$ m, $e_{Al}=0.04$ m).....	76
Figure 4.36 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.03$ m, $e_{Al}=0.03$ m).....	76
Figure 4.37 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.03$ m, $e_{Al}=0.03$ m).....	77
Figure 4.38 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.04$ m, $e_{Al}=0.02$ m).....	77
Figure 4.39 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.04$ m, $e_{Al}=0.02$ m).....	77
Figure 4.40 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.05$ m, $e_{Al}=0.01$ m).....	78
Figure 4.41 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.05$ m, $e_{Al}=0.01$ m).....	78
Figure 4.42 : Température maximale de l'aluminium à l'endommagement, en fonction de $e_{ac}$ .....	79
Figure 4.43 : Nombre limite de cycles à l'endommagement en fonction de $e_{ac}$ .....	79
Figure 5.1 : Le corps étudié.....	84
Figure 5.2: Section B-B.....	85
Figure 5.3 : Organigramme de calcul de l'endommagement.....	86
Figure 5.4: Flux de chaleur sinusoïdal appliqué.....	87
Figure 5.5: Distribution de la température à $t= 9000$ s.....	87
Figure 5.6 : Evolution de la température, cas de l'aluminium, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	88
Figure 5.7 : Evolution de la contrainte sur l'aluminium, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	88
Figure 5.8 : Evolution de la température, cas de l'acier, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	89
Figure 5.9 : Evolution de la contrainte, cas de l'acier, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	89
Figure 5.10 : Evolution de la température, cas de l'acier inoxydable, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	89
Figure 5.11 : Evolution de la contrainte, cas de l'acier inoxydable, ( $e_t = 0.06$ m, $\tau = 60$ s).....	90
Figure 5.12 : Variation de la température selon les matériaux à l'état stationnaire ( $z = L/2$ , $r = R_1$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m).....	90
Figure 5.13 : Variation de la contrainte selon les matériaux à l'état stationnaire ( $z = L/2$ , $r = R_1$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m).....	91
Figure 5.14 : Coefficient d'élasticité pour les 3 matériaux.....	91
Figure 5.15 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction des matériaux aux points $r = R_1$ , $r = (R_1 + R_2)/2$ , $r = R_2$ , $z = L/2$ , $e_t = 0.06$ m.....	91
Figure 5.16 : Variation de la durée de vie en fonction des matériaux aux points $r = R_1$ , $r = (R_1 + R_2)/2$ , $r = R_2$ , $z = L/2$ , $e_t = 0.06$ m.....	92
Figure 5.17 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état stationnaire, pour l'acier inoxydable en fonction de la période, pour $z = L/2$ , $r = R_1$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m.....	93
Figure 5.18 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état stationnaire pour l'acier inoxydable en fonction de la période, pour $z = L/2$ , $r = R_1$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m.....	93

Figure 5.19 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD pour un acier inoxydable en fonction de la période, pour $z = L/2$ et $r = R_1$ , $r = (R_1 + R_2)/2$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m .....	94
Figure 5.20 : Variation de la durée de vie (nombre de cycle*période) pour un acier inoxydable en fonction de la période, pour $z = L/2$ , $r = R_1$ , $r = (R_1 + R_2)/2$ , $r = R_2$ , $e_t = 0.06$ m. ....	94
Figure 5.21 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'amplitude maximale du flux $Q_0$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	95
Figure 5.22 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'amplitude maximale du flux $Q_0$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).....	95
Figure 5.23 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction de l'amplitude du flux $Q_0$ , (acier inoxydable, $z = L/2$ ). ....	95
Figure 5.24 : Variation de la durée de vie Lft en fonction de l'amplitude du flux $Q_0$ , (acier inoxydable, $z = L/2$ ). ....	96
Figure 5.25 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction du coefficient d'échange $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	96
Figure 5.26 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction du coefficient d'échange $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	97
Figure 5.27 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction du coefficient de convection $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	97
Figure 5.28 : Variation de la durée de vie Lft en fonction du coefficient de convection $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	97
Figure 5.29 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'épaisseur totale $e_t$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	98
Figure 5.30 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'épaisseur totale $e_t$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable). ....	98
Figure 5.31 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction de l'épaisseur totale $e_t$ , (acier inoxydable, $z = L/2$ ). ....	99
Figure 5.32 : Variation de la durée de vie Lft en fonction du coefficient de convection $h$ , (acier inoxydable, $z = L/2$ ). ....	99
Figure 5.33 : Matériau bicouche étudié. ....	100
Figure 5.34 : Variation du flux thermique appliqué (carré, triangulaire, sinusoïdal). ....	100
Figure 5.35: Matériau équivalent. ....	101
Figure 5.36 : Evolution de la température, sous différentes formes du flux thermique, ( $e_1 = e_2 = 0.03$ m, $\tau = 60$ s). ....	102
Figure 5.37 : Evolution des contraintes, sous différentes formes du flux thermique, ( $e_1 = e_2 = 0.03$ m, $\tau = 60$ s). ....	103
Figure 5.38 : Variation de la température moyenne à l'état stationnaire, ( $z = L/2$ , $r = R_1$ , $e_1 = e_2 = 0.03$ m) ....	104
Figure 5.39 : Variation de la contrainte moyenne à l'état stationnaire ( $z = L/2$ , $r = R_1$ , $e_1 = e_2 = 0.03$ m). ....	104
Figure 5.40 : Evolution de l'endommagement, cas sinusoïdal, $\tau = 6000$ s, $e_1 = e_2 = 0.03$ m .....	105

Figure 5.41 : Evolution de l'endommagement cas triangulaire, $\tau = 6000$ s, $e_1 = e_2 = 0.03$ m.....	105
Figure 5.42 : Evolution de l'endommagement cas carré, $\tau = 6000$ s, $e_1 = e_2 = 0.03$ m.....	105
Figure 5.43 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction de la période.....	106
Figure 5.44 : Durée de vie en fonction de la période.....	106
Figure 5.45: Evolution des températures pour un flux thermique sinusoïdal ( $e_1=0.01$ m et $e_2=0.05$ m).....	107
Figure 5.46: Evolution des contraintes pour un flux thermique sinusoïdal ( $e_1=0.01$ m et $e_2=0.05$ m).....	108
Figure 5.47 : Evolution de l'endommagement pour $e_1=0.01$ m et $e_2=0.05$ m.....	108
Figure 5.48 : Evolution de l'endommagement pour $e_1=0.02$ m et $e_2=0.04$ m.....	108
Figure 5.49 : Evolution de l'endommagement pour $e_1=0.03$ m et $e_2=0.03$ m.....	109
Figure 5.50 : Evolution de l'endommagement pour $e_1=0.04$ m et $e_2=0.02$ m.....	109
Figure 5.51 : Evolution de l'endommagement pour $e_1=0.05$ m et $e_2=0.01$ m.....	109
Figure 5.52 : Variation de la température en fonction de $e_1$ , ( $e_1+e_2=0.06$ m).....	110
Figure 5.53 : Variation de l'endommagement en fonction de $e_1$ , ( $e_1+e_2=0.06$ m).....	110
Figure 5.54 : Variation de l'amplitude maximale de la température à $z = 0.5 L$ , pour différentes périodes du flux thermique, ( $e_1 = e_2$ ).....	111
Figure 5.55 : Variation de l'amplitude des contraintes à $z = 0.5 L$ , pour différentes périodes du flux thermique, ( $e_1=e_2$ ).....	112
Figure 5.56 : Variation de la température moyenne de l'état stationnaire à $z = 0.5 L$ , et $r = R_1$ , pour différentes périodes du flux thermique (cas sinusoïdal) pour différentes épaisseurs ( $e_1=e_2$ ).....	112
Figure 5.57 : Variation des contraintes moyennes de l'état stationnaire à $z = 0.5 L$ , et $r = R_1$ , pour différentes périodes du flux thermique (cas sinusoïdal), et différentes épaisseurs ( $e_1=e_2$ ).....	112
Figure 5.58 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction de la période du flux thermique sinusoïdal pour différentes épaisseurs.....	113
Figure 5.59 : Variation de la durée de vie en fonction de la période pour différentes épaisseurs.....	113
Figure 6.1 : Présentation des quatre temps d'un cycle moteur avec combustion interne.....	117
Figure 6.2 : Variation réelle du flux thermique interne au cylindre durant une période, $N=500$ tr/min, $Z=0,05$ m et $Z=0,1$ m. ....	118
Figure 6.3 : Variation du flux thermique simulé à différentes positions le long du cylindre, .....	118
Figure 6.4 : Champs de températures à $t=80$ s. ....	119
Figure 6.5 : Evolution de la température du cylindre $z=0$ .....	119
Figure 6.6 : Champs de contraintes $\sigma_{rr}$ , $t=80$ s.....	120
Figure 6.7 : Champs de contraintes $\sigma_{zz}$ , $t=80$ s.....	120
Figure 6.8 : Champs de contraintes $\sigma_{\theta\theta}$ , $t=80$ s.....	120
Figure 6.9 : Champs de contraintes $\sigma_{zr}$ , $t=80$ s.....	120
Figure 6.10 : Champs de contraintes $\sigma_{Mises}$ à $t=80$ s.....	121
Figure 6.11 : Distribution ( $r,z$ ) du nombre de cycles.....	121
Figure 6.12 : Evolution de l'endommagement. ....	121
Figure 6.13 : Evolution de la température en $z= L/3$ . ....	122
Figure 6.14 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles.....	123
Figure 6.15 : Variation de la température aux points ( $R1, 0, 0$ ) et ( $R2, 0, 0$ ) en fonction du nombre de tours par minute du moteur. ....	124

<i>Figure 6.16 : Nombre de cycles à l'endommagement.....</i>	<i>124</i>
<i>Figure 6.17 : Durée de vie en fonction en fonction du nombre de tr/min. ....</i>	<i>124</i>



# LISTE DES TABLEAUX

<i>Tableau 2.1 : Valeurs des constantes de l'équation (2.3) pour quelques métaux [2].....</i>	<i>6</i>
<i>Tableau 2.2 : Propriétés thermo-élastiques de quelques matériaux [3] .....</i>	<i>7</i>
<i>Tableau 3.1 : Propriétés physiques des matériaux [2], [27] .....</i>	<i>41</i>
<i>Tableau 3.2 : Variation des caractéristiques avec T [2], [27] .....</i>	<i>41</i>
<i>Tableau 4.1: Spécifications physiques des matériaux [2] [49].....</i>	<i>56</i>
<i>Tableau 4.2 : Coefficients de la loi d'endommagement de Wöhler-Miner [2] .....</i>	<i>60</i>
<i>Tableau 5.1: Spécifications physiques des matériaux [36][52]. .....</i>	<i>85</i>
<i>Tableau 5.2 : Variation du module d'Young E avec la température [2], [27] .....</i>	<i>85</i>
<i>Tableau 6.1 : les quatre cas étudiés du système moteur à quatre temps.....</i>	<i>118</i>



# NOMENCLATURE

$B_0$	Constante de la loi d'endommagement (MPa)
$C$	Capacité calorifique (J/Kg.K)
$D$	Valeur d'endommagement
$E$	Module d'élasticité (Pa)
$e_i$	Epaisseur de la couche $i$ ( $i=1, 2$ ) (m)
$e$	Epaisseur totale du corps ( $e=e_1+e_2$ ) (m)
$f$	Force extérieure (N)
$H$	Coefficient de convection ( $W/m^2.K$ )
$K_y$	Coefficient de résistivité plastique (MPa)
$l_0$	Longueur initiale (m)
$L$	Longueur (m)
$LFT$	Durée de vie
$M_y$	Exposant d'écrouissage
$N_{cd}$	Nombre de cycles pour atteindre l'endommagement
$N_F$	Nombre de cycles pour atteindre la rupture
$Q_0$	Densité de flux maximal ( $W/m^2$ )
$Q$	Densité du flux ( $W/m^2$ )
$R$	Coordonnée radiale (m)
$\dot{r}$	Source de chaleur ( $W/m^3$ )
$R_i$	Rayon de cylindre selon la couche $i$ (m)
$R(p)$	Loi d'écrouissage
$T$	Température (K)
$T_0$	Température initiale (K)
$U$	Déplacement selon $r$ (m)
$V$	Déplacement selon $z$ (m)
$Z$	Coordonnée axiale (m)
$A$	Coefficient d'expansion (m/K)
$B$	Exposant de la loi d'endommagement
$P$	Densité ( $Kg/m^3$ )
$\lambda$	Conductivité thermique ( $W/m.K$ )
$N$	Coefficient de Poisson
$\Sigma$	Tenseur de contraintes (Pa)
$\bar{\sigma}$	Tenseur de contraintes moyennes (Pa)
$\sigma_l$	Tenseur de contraintes limites (Pa)
$\sigma_M$	Tenseur de contraintes maximales (Pa)

$\sigma_s$	Tenseur de contraintes (Pa)
$\sigma_u$	Tenseur de contraintes ultimes (Pa)
$\sigma_y$	Contrainte limite élastique (Pa)
$E$	Tenseur de déformation
$\varepsilon_e$	Tenseur de déformation élastique
$\varepsilon_p$	Tenseur de déformation plastique
$\varepsilon_{th}$	Tenseur de déformation thermique
$\varepsilon_c$	Tenseur de déformation avec fluage
$\Delta T$	Variation de la température (°C)
$\Delta l$	Variation de la longueur (m)
$\omega$	Pulsation (rd)
$\dot{v}$	Accélération (m <sup>2</sup> /s)
$\nabla^2$	Laplacien
$\tau$	Variation de température (°C)

# CHAPITRE 1 INTRODUCTION

## 1.1 INTRODUCTION GENERALE

Tout système ou composant mécanique est susceptible d'être soumis à un couplage thermomécanique (constructions métalliques, machines mécaniques, moteurs, turbines, etc.). Cependant, cet effet varie radicalement d'un domaine à un autre. Par exemple, dans les constructions métalliques, l'effet thermique est négligeable sur les matériaux puisque la température appliquée est permanente et en général faible. Par contre, ce même effet, sur un cylindre d'un moteur, une turbine, une chaudière ou un réacteur est très important, c'est dû au fait que la variation brusque et la périodicité de la température influent sur la fatigue des matériaux constitutants, ce qui conduit à leur destruction et par suite de ces systèmes complètement.

De plus, l'effet thermique variable, qu'il soit transitoire ou permanent, cause évidemment un effet mécanique variable sur ces matériaux. Ce dernier est responsable de la fatigue mécanique subie par les matériaux constitutants les parois. Ces matériaux doivent donc être capables de supporter longtemps de tels effets.

Les matériaux constitutants les parois d'un réacteur, des moteurs et des turbines thermiques doivent aussi assurer une bonne isolation, conserver l'énergie thermique (empêcher toute perte d'énergie) et résister contre les effets mécaniques et thermiques appliqués.

D'autre part, la révolution de l'emploi des matériaux multicouches dans les milieux industriels tels que l'aérospatiale, l'automobile et le nucléaire, et l'utilisation des méthodes avancées de collage de ces matériaux poussent les chercheurs à étudier ces matériaux et à découvrir leurs secrets et leurs réponses sous différents types de charges thermiques et/ou mécaniques.

## 1.2 PROBLEMATIQUES ET MOTIVATIONS

L'importance de traitement de ce problème augmente quand la destruction des matériaux met en danger l'environnement et la vie humaine, comme par exemple, la détérioration d'une turbine d'avion dédié au transport humain, d'un réacteur nucléaire, et de tout système mettant en jeu les problèmes de sécurité.

Dans certains cas, il peut arriver que ces deux problèmes soient liés. Par exemple quand on chauffe une pièce, elle se dilate et donc se déforme. Si la pièce ne peut pas se déformer librement, les contraintes apparaissent. Une sollicitation thermique provoque une contrainte ou une déformation mécanique. Au contraire, si l'on déforme fortement un matériau métallique, il s'échauffe. Une sollicitation mécanique engendre alors un effet thermique. On dit que les problèmes de mécanique et de thermique sont couplés et on parle alors de couplage thermomécanique.

De plus, ce domaine d'études trouve ses applications dans les projets qui cherchent à augmenter le rendement des turbines et des moteurs thermiques utilisés dans les centrales de génération de l'énergie électrique et dans les véhicules. Ceci est dû au fait que l'augmentation de la température du gaz utilisé dans la turbine ou dans le moteur à piston augmente le rendement de la turbine ou du moteur à piston. C'est le cas des aubes de turbines soumises à des températures élevées et aux efforts d'inertie, ou d'une pièce forgée qui s'échauffe quand elle se déforme. La simulation de tels problèmes nécessite la résolution à la fois d'un problème thermique (détermination du champ de température dans l'aube) et d'un problème mécanique (détermination de la contrainte dans l'aube).

### 1.3 OBJECTIFS ET DEMARCHES

Au cours de cette recherche, nous proposons une étude complète du couplage thermomécanique des matériaux et de son influence sur leur endommagement. Pour des raisons pratiques et d'utilisations dans de nombreux domaines d'applications, nous avons choisi de travailler sur des configurations cylindriques.

La démarche du travail est la suivante :

1. Etude de la méthode de calcul des contraintes thermo-mécaniques de matériaux simples et multicouches.
2. Etude de leur endommagement en régime thermo-élastique linéaire suivi d'une optimisation des performances du modèle utilisé.
3. Etude de leur endommagement en régime thermo-élasto-plastique non linéaire, suivi d'une optimisation des performances du modèle par rapport aux chargements thermiques et mécaniques appliqués.
4. Choix des matériaux candidats et application du modèle étudié sur un exemple pratique (moteur thermique ou turbine) avec optimisation de ses performances.

### 1.4 LISTE DES CONTRIBUTIONS

Les contributions principales de ce travail de thèse peuvent se résumer comme suit :

1. Proposition d'une méthode d'homogénéisation des multi-matériaux pour l'étude de leur endommagement, et étude du comportement des multi-matériaux sous l'application de charges thermiques en régime transitoire basée sur cette méthode.
2. Utilisation de la loi d'endommagement sur les multi-matériaux pour l'étude de l'endommagement résultant de l'application du couplage thermo-mécanique en régime transitoire.
3. Résolution des équations du bilan thermo-mécanique en régime élastique par une méthode analytique puis numérique par différences finies.
4. Etude de l'effet des charges thermiques appliquées, de la nature des matériaux constituants et de la géométrie sur l'endommagement des matériaux.

## 1.5 PLAN DU MANUSCRIT

Pour détailler l'ensemble de nos contributions et notre démarche de travail, ce manuscrit de thèse est organisé comme suit :

Après ce chapitre introductif, le Chapitre 2 a comme objectif de montrer l'état de l'art relatif à ce domaine de recherche sur le couplage thermomécanique des multi-matériaux en régimes élastique et plastique, régimes permanent et transitoire,...etc.

Le Chapitre 3 détaille notre première contribution. Nous exposerons la formulation mathématique du problème physique étudié, suivi de la méthode d'homogénéisation des multi-matériaux et de sa validation.

L'objectif du Chapitre 4 consiste à présenter l'étude de l'endommagement thermomécanique sur un matériau monocouche puis bicouche. Cette étude est réalisée par des approches analytique et numérique basée sur la méthode des différences finies. Dans ce chapitre, nous présentons une analyse de l'influence des différents paramètres du système (conditions aux limites, géométrie et propriétés physiques) sur son endommagement.

Dans le Chapitre 5, nous présenterons l'étude de l'endommagement thermomécanique dans le régime élasto-plastique sur un matériau simple puis bicouche.

Le Chapitre 6 est consacré à une application réelle du modèle étudié sur le cylindre d'un moteur à quatre temps, et à l'étude de la durée de vie et de son endommagement sous différents états de fonctionnement.

Le dernier chapitre est consacré aux conclusions générales obtenues sur l'ensemble de ces travaux et aux perspectives de cette thèse.





# CHAPITRE 2 ELEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES SUR L'ENDOMMAGEMENT ET LE COUPLAGE THERMO-MECANIQUE

## 2.1 INTRODUCTION

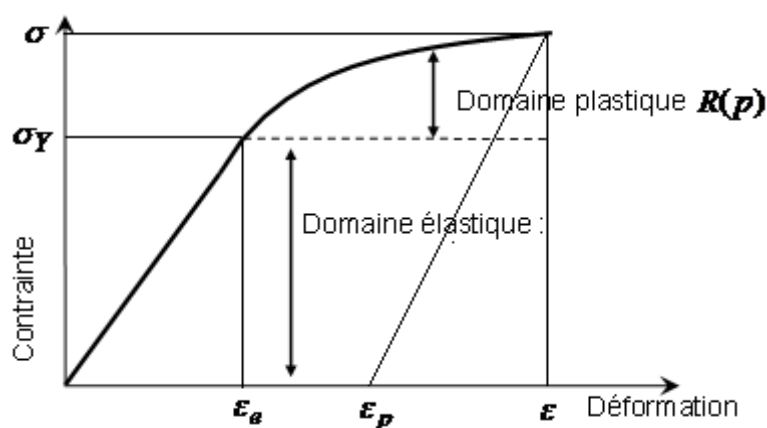
Le but de ce chapitre est de présenter les différents cas traités dans la littérature autour du sujet défini dans le Chapitre 1.

Les systèmes mécaniques sollicités par des comportements thermomécaniques sont nombreux et leurs traitements varient selon les cas étudiés et selon la méthode de résolution. Cependant, toutes les solutions sont basées sur les principes de la thermomécanique et sur quelques lois d'endommagement.

D'autre part, de nombreuses études sur l'endommagement thermomécanique sont basées sur des matériaux uniques. Très peu d'études sont faites sur des multi-matériaux avec des charges thermiques et mécaniques variables. Ceci est surtout remarqué dans le cas de multi-matériaux de forme cylindrique creuse, cas peu étudié à notre connaissance.

Dans ce chapitre, nous faisons une étude générale de l'état de l'art, puis nous définissons le comportement thermomécanique et la loi d'endommagement que nous allons considérer dans notre étude. Nous présenterons ensuite quelques exemples pratiques de l'utilisation des multi-matériaux puis une conclusion sur le modèle que nous avons retenu pour notre étude.

## 2.2 COMPORTEMENT MECANIQUE



**Figure 2.1 : Courbe de comportement élasto-plastique**

La Figure 2.1 montre le comportement élasto-plastique isotherme des matériaux, c'est le diagramme ( $\sigma$ - $\epsilon$ ).

Tout matériau solide soumis à des contraintes mécaniques, est sujet à deux types de déformations : une déformation élastique  $\varepsilon_e$  qui est réversible et une autre déformation plastique  $\varepsilon_p$  irréversible. La déformation totale observable  $\varepsilon$  est donc la superposition de ces deux déformations :

$$(2.1) \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

Si le matériau se trouve dans le domaine d'écrouissage (augmentation de la contrainte avec la déformation plastique), on parle alors de déformation plastique cumulée  $p$ . Dans le cas d'un chargement monotone sans restauration, on a :  $p = \varepsilon_p$ .

Si  $\sigma_Y$  représente la limite d'élasticité et  $R$  l'écrouissage isotrope pour un chargement monotone, la contrainte totale est donnée par :

$$(2.2) \quad \sigma = \sigma_Y + R(p)$$

La fonction  $R(p)$  étant la loi d'écrouissage.

Plusieurs expressions ont été proposées [1], [2] pour modéliser la loi d'écrouissage. Parmi ces modèles, nous avons retenu l'équation de Ramberg-Osgood [2] :

$$\sigma = \sigma_Y + k_y \varepsilon_p^{1/M_y}$$

Cette équation s'inverse pour donner :

$$(2.3) \quad \varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma - \sigma_Y}{K_y} \right\rangle^{M_y}$$

Dans laquelle  $K_y$  est le coefficient de résistance plastique, et  $M_y$  est l'exposant d'écrouissage.

La détermination des ces deux coefficients s'effectue expérimentalement pour un matériau particulier par un essai d'écrouissage. Ils varient donc d'un alliage à un autre et dépendent de l'état du matériau. Le Tableau 2.1 donne les valeurs de  $M_y$  et de  $K_y$  pour quelques alliages [2].

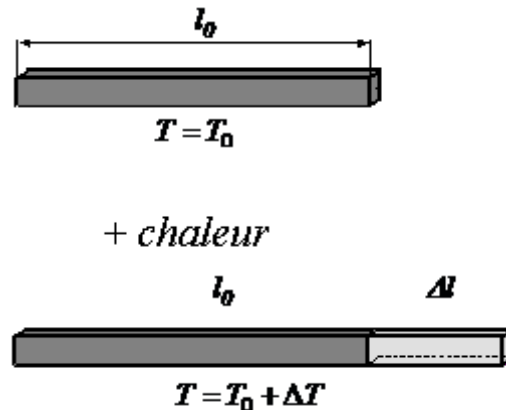
Matériau	$\sigma_Y$	$M_y$	$K_y$ (MPa)
Acier	1200	3.1	3340
Acier inoxydable	133	4.5	435
Aluminium	300	4.3	884

**Tableau 2.1 : Valeurs des constantes de l'équation (2.3) pour quelques métaux [2]**

## 2.3 COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE

### 2.3.1 EQUATION THERMOELASTIQUE

Un matériau, soumis à une variation de température  $\Delta T$ , se dilate. Si ce matériau est libre, il se dilate en passant de sa longueur initiale  $l_0$  à une longueur finale  $l_0 + \Delta l$  (voir Figure 2.2). La variation de la longueur  $\Delta l$  est proportionnelle à la variation de la température  $\Delta T$ .



**Figure 2.2: Dilatation linéaire**

Dans les matériaux solides, on peut admettre l'hypothèse de linéarité entre la déformation thermique  $\varepsilon_{th}$  et la variation de température  $\Delta T$ :

$$(2.4) \quad \varepsilon_{th} = \Delta l / l_0 = \alpha \Delta T = \alpha (T - T_0)$$

$T_0$ ,  $T$  étant respectivement les températures initiale et finale du matériau,  $\Delta l$  est la variation de la longueur et  $\alpha$  le coefficient de dilatation thermique linéique. On considère dans la suite que ce coefficient  $\alpha$  est indépendant de la température.

On donne dans le Tableau 2.2 les valeurs de  $\alpha$  pour quelques matériaux.

Matériau	$\rho$ (Kg.m <sup>-3</sup> )	$C_p$ (J. Kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (K <sup>-1</sup> )
Acier inox	7900	480	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Acier	7800	460	$13 \cdot 10^{-6}$
Duralumin	2800	900	$23,5 \cdot 10^{-6}$
Laitons	8600	380	$19 \cdot 10^{-6}$
Plexiglas	1800	1500	$9 \cdot 10^{-6}$

**Tableau 2.2 : Propriétés thermo-élastiques de quelques matériaux [3]**

### 2.3.2 LOI DE HOOKE EN THERMOELASTICITE

La loi de comportement thermo-élastique s'obtient à partir de la loi de Hooke classique :

$$(2.5) \quad \sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_{th})$$

Si l'on impose une déformation nulle (ou déplacement nul), la contrainte thermique est telle que :

$$(2.6) \quad \sigma = -E\varepsilon_{th}$$

Si la déformation est libre, la contrainte est nulle et la dilatation est donc égale à  $\varepsilon_{th}$ .

### 2.3.3 ÉQUATION DE LA CHALEUR EN THERMO-ELASTO-PLASTICITE

Généralement, on peut distinguer trois formes différentes d'énergie :

- 1- L'énergie potentielle d'interaction qui apparaît dans le domaine élastique (énergie élastique) et dans le domaine plastique (énergie d'écroissage).
- 2- L'énergie calorifique dissipée sous forme de chaleur dans le matériau.
- 3- L'énergie du couplage thermomécanique.

En thermo-élasticité, on a :

- L'énergie potentielle d'interaction : L'énergie élastique volumique correspondant à une variation  $d\varepsilon$  de la déformation  $\varepsilon$  vaut  $\sigma d\varepsilon$ . Si cette variation s'effectue pendant un temps  $dt$ , on obtient la puissance élastique volumique :

$$(2.7) \quad P_{elas} = \sigma \dot{\varepsilon}_e$$

- L'énergie d'agitation thermique : Pour une variation  $dT$  de la température, cette énergie vaut  $\rho c_\varepsilon dT$ , et la puissance calorifique volumique associée est :

$$(2.8) \quad P_{cal} = \rho c_\varepsilon \dot{T}$$

Avec  $c_\varepsilon$  la capacité thermique massique à déformation constante supposée égale à la capacité thermique massique à volume constant.

- L'énergie de couplage thermo-élastique : elle est proportionnelle à la vitesse de déformation et aux variations de la contrainte avec la température [3] :

$$(2.9) \quad P_{couplage} = -T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \dot{\varepsilon}_e$$

L'équation générale de l'énergie en thermo-élasticité s'écrit donc :

$$(2.10) \quad \rho \dot{e} = \rho c_\varepsilon \dot{T} + \sigma : \dot{\varepsilon}_e - T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}_e$$

En thermo-élasto-plasticité [3] :

- L'énergie potentielle d'interaction se divise en deux termes : l'énergie élastique  $\sigma d\varepsilon_e$  et l'énergie d'écroissage  $A_k dV$ . On obtient respectivement la puissance élastique volumique  $P_{élastique}$  et la puissance d'écroissage volumique  $P_{écroissage}$  :

$$(2.11) \quad p_{élastique} = \sigma \dot{\varepsilon}_e \text{ et } p_{écroissage} = A_k \dot{V}_k$$

- L'énergie d'agitation thermique : elle vaut  $\rho c_{\varepsilon,p} dT$  et la puissance calorifique associée est donnée par :

$$(2.12) \quad P_{calorique} = \rho c_{\varepsilon,p} \dot{T}$$

avec  $c_{\varepsilon,p}$  la capacité thermique massique à déformation et écrouissage constants.

- L'énergie de couplage thermomécanique comporte deux termes :

Le couplage thermo-élastique : comme dans le cas de l'élasticité on a :

$$(2.13) \quad P_{couplage\ élastique} = -T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}_e$$

Le couplage thermo-plastique qui vient du fait que l'écrouissage peut varier avec la température :

$$(2.14) \quad P_{couplage\ plastique} = -T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$$

On obtient alors l'expression de la puissance interne en thermo-élasto-plasticité :

$$(2.15) \quad \rho \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon}_e + A_k \dot{V}_k + \rho c_{\varepsilon,p} \dot{T} - T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k - T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}_e$$

Selon le premier principe de la thermodynamique, la formule locale qui traduit l'équilibre énergétique dans un volume infiniment petit s'écrit sous la forme suivante :

$$(2.16) \quad \rho \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \text{div}(\vec{q})$$

Pour obtenir l'équation de la chaleur en thermo-élasticité, on remplace l'expression de la puissance interne (2.10) dans l'équation (2.16) et en utilisant la loi de Fourier  $\vec{q} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ , on obtient l'équation de la chaleur en thermo-élasticité :

$$(2.17) \quad \rho c_{\varepsilon} \dot{T} = T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}_e + \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T)$$

On obtient de la même manière l'équation de la chaleur en thermo-élasto-plasticité :

$$(2.18) \quad \rho c_{\varepsilon,p} \dot{T} = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k + T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}_e + \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T)$$

On retrouve l'équation de la chaleur habituelle avec un terme de création volumique de puissance provenant du couplage thermomécanique. L'influence de la mécanique sur la thermique peut également intervenir sur les caractéristiques thermiques du matériau comme la conductivité thermique  $\lambda$ , la capacité thermique massique  $c_{\varepsilon,p}$  et la masse volumique  $\rho$ . Cependant, ces trois grandeurs dépendent peu de la contrainte ou de la déformation.

## 2.4 L'ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX SOLIDES

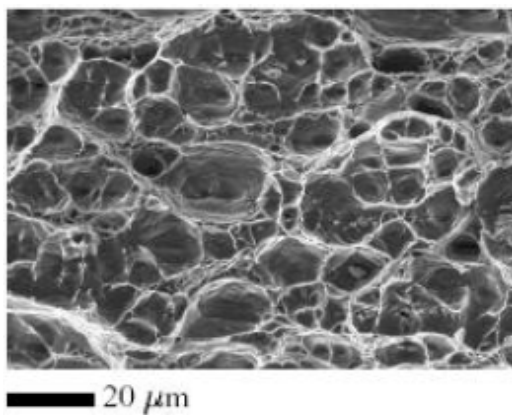
### 2.4.1 NOTION D'ENDOMMAGEMENT

On entend par endommagement ou fatigue la modification des propriétés des matériaux par conséquence de l'application des charges ou d'efforts. L'augmentation de ces efforts peut conduire à la rupture des liaisons entre les particules constituant ces matériaux [4], [5]. Ce phénomène de rupture est un phénomène irréversible qui crée des discontinuités au sein de la matière. On assiste alors à des fissures microscopiques et/ou macroscopiques pour aboutir parfois à des fissures visibles [6]. L'endommagement passe par plusieurs stades, il est considéré nul si les fissures n'apparaissent pas à l'échelle microscopique, et total s'il y a apparition des fissures visibles.

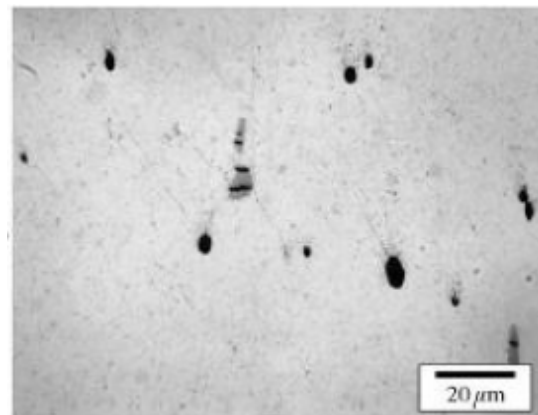
### 2.4.2 TYPES D'ENDOMMAGEMENT

On peut distinguer quatre principaux types d'endommagements [2][7]:

1. L'endommagement plastique ductile : L'endommagement se manifeste dans ce cas par cavitations, généralement transgranulaires qui résultent d'une croissance d'un défaut par déformation plastique des métaux aux températures ambiantes et peu élevées. La Figure 2.3 montre un exemple de cet endommagement.



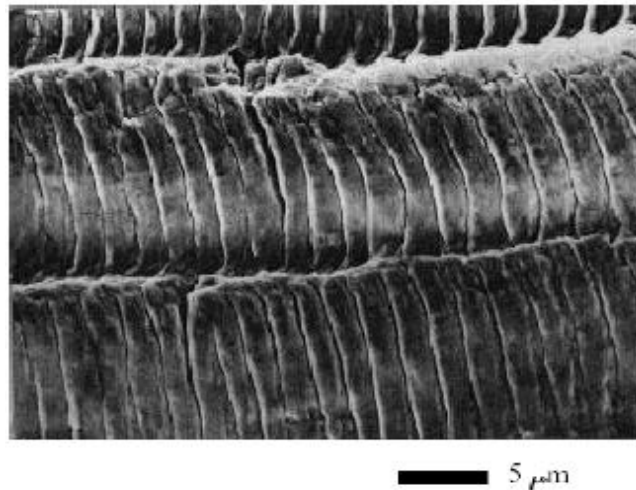
Acier



Alliage d'aluminium

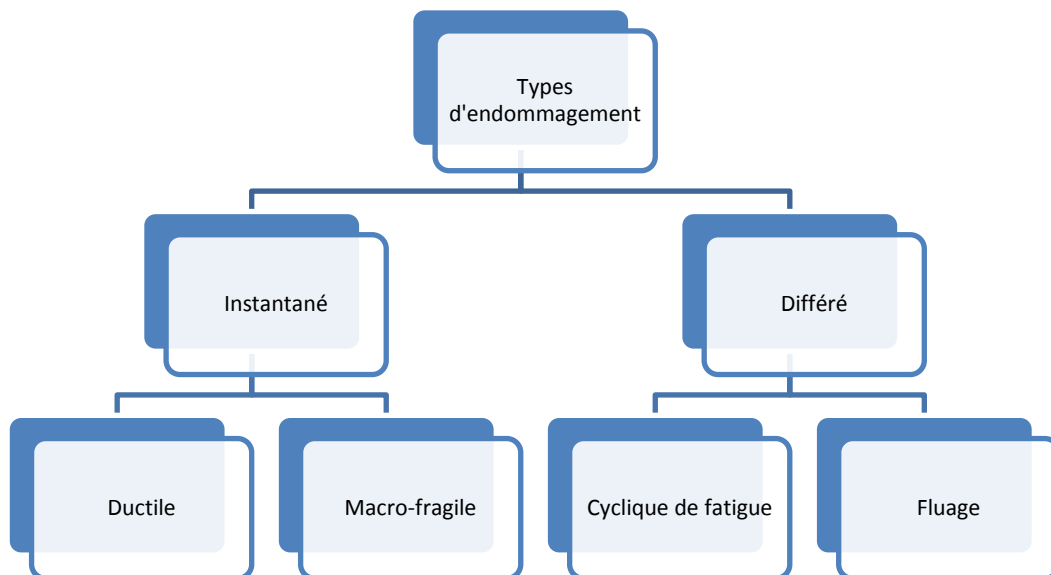
**Figure 2.3 : Exemple d'endommagement ductile des matériaux [8]**

2. L'endommagement viscoplastique fragile (ou de fluage) : pour les métaux soumis aux températures moyennes et élevées, cet endommagement correspond aux décohésions inter-granulaires accompagnant les déformations viscoplastiques.
3. L'endommagement de fatigue (ou de micro-plasticité) : il est du à la répétition des contraintes et que l'on repère en fonction du nombre de cycles. La fissure se propage lentement, cycle après cycle, voir Figure 2.4. C'est ce type d'endommagement qui nous intéresse dans cette thèse.



**Figure 2.4 : Schématisation de l'endommagement cyclique de fatigue [8]**

4. L'endommagement macro-fragile : il peut être provoqué par des sollicitations monotones sans déformations irréversibles appréciables, c'est le cas du béton par exemple.



**Figure2.5 : Classification des types d'endommagements**

D'autres phénomènes endommageant peuvent être envisagés : comme l'oxydation, la corrosion, l'irradiation, etc. Nous ne sommes pas intéressés à ces types d'endommagement.

Ces quatre types d'endommagement peuvent être classifiés en deux grandes familles [6]: l'endommagement instantané et l'endommagement différé. Dans la première, on trouve l'endommagement ductile et l'endommagement macro-fragile, alors que dans la deuxième, on peut avoir l'endommagement de fatigue cyclique et celui de fluage. La Figure2.5 décrit cette classification.

### 2.4.3 DES EXEMPLES D'ENDOMMAGEMENT THERMOMECHANIQUE

Dans ce travail, l'origine de l'endommagement est due à des sollicitations thermiques variables. Nous allons donc décrire dans ce paragraphe quelques exemples d'endommagement thermo-mécanique.

Dans l'industrie et autour de nous, on observe souvent des phénomènes de fissuration multiple associés à des phénomènes d'origine thermique comme le choc thermique par exemple. On peut citer dans ce domaine :

- 1) les fissurations dans les hélices de turbines à gaz d'un avion ou d'une station électrique à gaz ou à vapeur [9],
- 2) les fissurations des moules de fonderie,
- 3) les fissurations multiples des disques de frein des trains et des voitures [6],
- 4) les tuyaux d'échappement des véhicules,
- 5) et dans les centrales nucléaires [10], etc.

Dans la suite, nous détaillerons quelques exemples.

#### 2.4.3.1 LA FISSURATION DES OUTILS DE FORMAGE ET MOULES DE FONDERIE

Les outils de formage et les moules de fonderie représentent des moyens de mise en forme de matériaux. Ces outils sont utilisés par exemple, dans la fabrication de culasses, de jantes ou autres. Durant leur fonctionnement, ces outils subissent un choc chaud lorsqu'ils sont en contact avec les matériaux internes, soit la pièce à former soit le métal en fusion, suivi d'un refroidissement. Des fissures thermiques par fatigue peuvent se former dans le matériau constituant ces outils. Pour limiter ce problème dans l'industrie, des outils formés d'un mélange de plusieurs alliages de matériaux sont fabriqués dans le but d'allonger la durée de vie et retarder au maximum ces phénomènes de fissuration par fatigue thermique.

#### 2.4.3.2 LA FISSURATION DANS LES DISQUES DE FREIN



**Figure 2.6 : Fissures sur un disque de frein**



Les disques de frein dissipent l'énergie mécanique sous forme de chaleur, ce qui les chauffe. L'énergie cinétique d'un train ou d'une voiture est diminuée par frottement des patins sur le disque de frein et par échauffement de ces couples patin – disque. Il s'agit d'un cas de fatigue thermomécanique à cause de la répétition des freinages. Cet endommagement se traduit par la présence de fissures multiples macroscopiques radiales de plusieurs centimètres de long comme le montre la Figure 2.6.

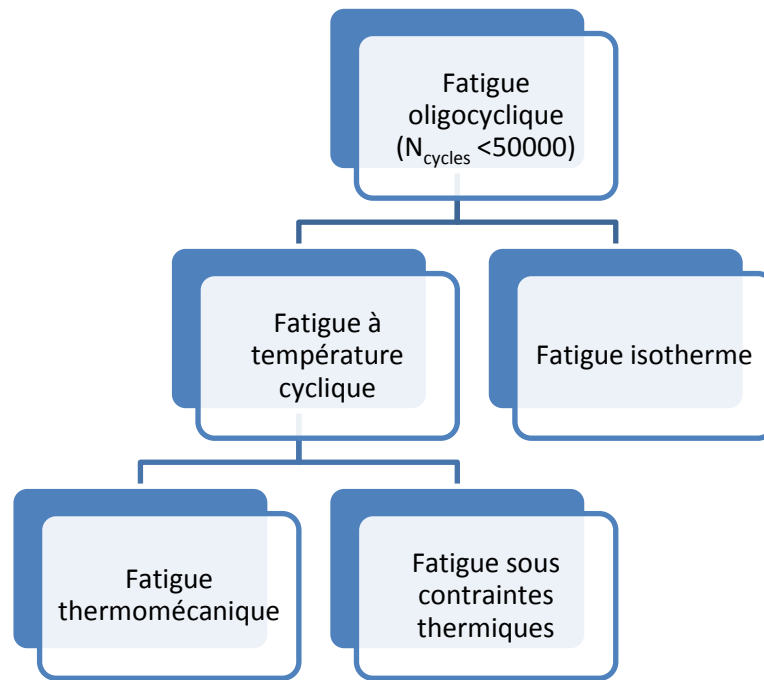
#### 2.4.3.3 LA FISSURATION DANS LES CENTRALES NUCLEAIRES

Des cas de fissuration multiple ont été observés lors d'exams de contrôle de certains constituants de centrales nucléaires. Ces constituants n'ayant pas tous été soumis aux mêmes conditions de sollicitations, plusieurs phénomènes peuvent être à l'origine d'un tel endommagement. Ces apparitions de fissuration multiple ou de réseaux de faïençage sont liées à des phénomènes de fatigue thermique dans la majorité des cas.

#### 2.4.4 LA FATIGUE THERMOMECHANIQUE

La fatigue est un processus (succession de mécanismes) qui sous l'action de contraintes cycliques, répétées ou alternées modifie les propriétés locales d'un matériau et peut entraîner la formation de fissures et éventuellement la rupture des matériaux. Les étapes principales de la fatigue sont l'amorçage de fissures (si des défauts ne sont pas déjà présents dans le matériau), la propagation des fissures et la rupture finale.

En ce qui concerne la fatigue thermique, on peut trouver plusieurs types de définitions qui dépendent des conditions d'application et de la nature de la charge thermique : d'après l'encyclopédie internationale des sciences et techniques [11], il s'agit de la répétition simultanée de cycles de contraintes thermiques et de contraintes mécaniques qui conduit à la rupture ou à des déformations. Dans [12], elle est définie comme un phénomène de fissuration par fatigue produit par des contraintes purement thermiques où aucune contrainte d'origine mécanique n'existe. On classe aussi la fatigue thermique en deux catégories en fonction de la nature des sollicitations ; Il distingue ainsi la fatigue provenant de sollicitations répétées de la fatigue résultante d'un choc thermique. Spera [13], parle de la détérioration graduelle et de la fissuration du matériau par cycles de chauffage et de refroidissement. Il définit ensuite deux sous-catégories : la fatigue thermomécanique et la fatigue sous contraintes thermiques, et propose d'inclure ces deux catégories dans la fatigue oligocyclique, comme présenté dans la Figure 2.7. Notons que la fatigue oligocyclique correspond par définition au domaine à très courte durée de vie, ou le nombre de cycles est inférieur à 50000 cycles.



**Figure2.7: Classification des fatigues thermiques**

#### 2.4.5 ETUDES DE L'ENDOMMAGEMENT

L'étude de l'endommagement des matériaux a attiré l'attention de nombreux chercheurs et industriels du domaine. Le but étant toujours la maximisation de la durée de vie des matériaux avec des coûts acceptables d'une part, la minimisation des risques des accidents dus à l'endommagement imprévu des matériaux d'autre part. Plusieurs techniques et solutions ont été proposées dans la littérature dont quelques unes ont été retenues. Une solution consiste par exemple à l'utilisation de nouveaux alliages plus résistants à la fatigue thermomécanique. Une autre solution se base sur le changement du comportement thermomécanique par le changement du mode de leur utilisation, etc.

Cette étude de l'endommagement peut être conduite soit par expérimentation, c'est le cas de travaux publiés dans [14], [15], [16], soit par simulation sur des logiciels spécifiques comme Ansys et Abaqus [17],[18], ou alors par modélisation et analyse numérique sous Matlab et d'autres logiciels [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25]. D'autres études combinent deux de ces approches pour valider leurs travaux.

L'étude expérimentale de l'endommagement est très coûteuse, et dans certains cas, il est impossible de reproduire en expérience un scénario spécifique d'utilisation des matériaux. Dans cette catégorie d'étude, un certain ensemble d'essais est généralement utilisé.

Comparée aux essais expérimentaux, l'étude par simulation paraît la moins coûteuse, cependant les simulateurs ne sont pas toujours disponibles et le prix des licences d'utilisation peut coûter cher. Un autre problème lié aux simulateurs est le degré de leur

validité et leur domaine d'application (conditions, résultats obtenus, simulations possibles, etc....)

L'étude numérique est la plus abordable et accessible par tous les chercheurs, cependant pour obtenir de bons résultats, il faut se baser sur modèle mathématique d'endommagement adéquat pour le problème étudié. Une loi d'endommagement convenable doit être choisie.

Une étude exhaustive autour des moyens possibles pour la modélisation du comportement et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques peut être trouvée dans [21]. Cette étude donne une critique générale des besoins et des défis devant ces moyens et le besoin d'un modèle fiable qui prend en compte les conditions en relation avec la vitesse de variation des sollicitations.

Dans la suite, nous allons analyser des principaux travaux de la littérature portant sur l'étude de l'endommagement et de la fatigue thermomécanique d'un point de vue expérimentale et numérique.

---

#### 2.4.5.1 POINT DE VUE EXPERIMENTALE

Dans [14], les auteurs effectuent des essais expérimentaux pour montrer que l'endurcissement des tuyaux en acier commercial aide à l'augmentation de la résistance à la propagation de la fatigue thermomécanique et par suite à l'augmentation de la durée de vie de ces tuyauteries. Des échantillons tests d'acier ont été préparés pour comparer leur comportement en fatigue thermique oligocyclique à celui des échantillons commerciaux.

Dans [15], une étude expérimentale est proposée pour comparer la fatigue de l'Aluminium renforcé avec des traces de SiC, dans le cas isotherme (IF) et thermomécanique (TMF) en phase (IP-TMF, contrainte mécanique et charge thermique en phase) et en opposition de phase (OP-TMF, contrainte mécanique, charge thermique en opposition de phase). Le test de l'IF est fait à une température constante de 300°C, alors que pour le TMF, la température varie entre 150 et 300°C. L'intervalle des valeurs des contraintes mécaniques appliquées a été bien contrôlé. Plusieurs tests ont été réalisés sous des conditions de charge mécaniques variables. Tous ces tests ont montre que le processus d'endommagement commence par une naissance, augmentation des trous de coalescence aux alentours des traces de SiC jusqu'à la rupture. La durée de vie du matériau dépend des conditions de charges dans chaque cas.

Des tests de fatigue thermique ont été faits aussi dans [16] sur un outil en acier qui a subi des traitements de revêtements par deux couches de matières chimiques. L'influence de chacune des couches et de la combinaison des deux a été étudiée. Sous toutes les conditions expérimentales choisies, les traitements de surface effectués ont diminué la résistance à la fatigue thermique de l'acier.

#### 2.4.5.2 POINT DE VUE NUMERIQUE

Avec le progrès des calculateurs numériques et le développement des outils et des méthodes numériques pour la résolution des problèmes thermiques/mécaniques, la majorité des études de l'endommagement se sont tournées vers ces outils numériques.

Dans [19], les auteurs montrent l'avantage du raffinement adaptatif dans la méthode des éléments finis pour la bonne prédiction de l'endommagement et du temps de la rupture. Les cas étudiés reflètent la fatigue oligocyclique à haute températures et tiennent compte de la variation des paramètres des matériaux en fonction de la température. L'adaptation se fait dans deux sens : spatial avec un maillage fonction des zones les plus susceptibles d'être endommagés, et temporel avec des intervalles de temps du calcul numérique pour la bonne prédiction du temps de la rupture. L'adaptation est basée sur les indicateurs d'erreurs. Cette étude est basée sur une méthodologie de modélisation de l'endommagement qui consiste à intégrer l'évolution de l'endommagement dans la solution transitoire non-linéaire du problème de la déformation élasto-visco-plastique. De même, l'étude menée dans [20] utilise la méthode des éléments finis pour caractériser la déformation thermomécanique des interconnexions électriques en cuivre (microvias) utilisées dans le conditionnement des microsystemes.

Wang et al. [22] utilise une méthode appelée « Cohesive Zone Model » associée à la méthode des éléments finis pour analyser l'effet des contraintes sur l'augmentation de la rupture sur une structure métallique. Cette structure est formée d'une couche métallique entourée de deux substrats élastiques. Deux types de charges ont été étudiés ; monotone et cyclique avec amplitude constante et variable. La géométrie de la structure (l'effet de l'épaisseur de la couche métallique sur l'augmentation de la rupture) a été discutée. De même dans [23], on trouve l'application de la méthode des différences finies pour la modélisation de l'endommagement thermique transitoire des matériaux de tire d'un canon. La variation de la température du gaz et du coefficient de convection a été prise en considération. Les résultats ont été donnés pour un gaz d'échauffement convectif utilisé typiquement dans le canon et pour les simulations de tir à feu par laser et par combustion.

Finalement, un modèle d'endommagement a été proposé pour le béton de piste d'atterrissage soumis à des processus rapides d'échauffement et de refroidissement dus au gaz d'échappement à haute température des turbines [24].

---

#### 2.4.5.3 DISCUSSION

A partir de ce qui précède, nous pouvons tirer les principales conclusions suivantes :

- L'étude de l'endommagement des matériaux a fait l'objet de nombreuses recherches et plusieurs solutions d'amélioration pour avoir un comportement plus robuste à la fatigue thermomécanique ont été proposées.
- La majorité de ces études se base sur la modélisation numérique (éléments finis, différences finies,..). L'utilisation de lois d'endommagement analytiques adaptées

permet d'effectuer des tests rapides tout en économisant le coût des expérimentations.

- Enfin la plupart des travaux existants traite le cas de structures formées de matériau uniforme. Le cas de multimatériaux a été très peu étudié et analysé dans la littérature.

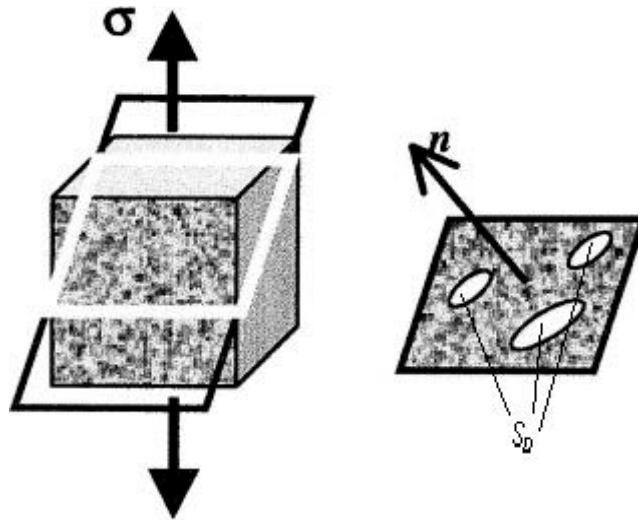
## 2.5 FORMULATION MATHÉMATIQUE DE LA LOI D'ENDOMMAGEMENT

### 2.5.1 DEFINITION DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT

Il n'est pas évident de définir une variable mécanique d'endommagement dans la mesure où, macroscopiquement, il est presque impossible de distinguer entre un élément volumique totalement endommagé d'un autre élément totalement sain. On peut donc imaginer une variable interne représentative de l'état de détérioration de la matière ; plusieurs approches existent [2] :

- Les mesures à l'échelle de la microstructure de la densité des microfissures ou de cavités. Cette méthode conduit à des modèles microscopiques transposables sur l'élément volumique macroscopique à l'aide de techniques mathématiques d'homogénéisation. On obtient les propriétés de l'élément endommagé mais il est difficile de définir une variable d'endommagement et une loi d'évolution de l'endommagement qu'on peut utiliser dans les calculs.
- Les mesures physiques globales convertissables en caractéristiques de résistance mécaniques.
- Des mesures liées à la durée de vie résiduelle ; ce concept n'aide pas à avoir une loi de comportement de l'endommagement.
- Les mesures mécaniques globales de la modification des caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité. Ces mesures sont faciles à interpréter en termes de variable d'endommagement. C'est cette approche que nous allons utiliser dans la suite pour représenter l'endommagement et son comportement.

Soit un corps endommagé dans lequel on considère un élément volumique fini de taille suffisamment grande par rapport aux hétérogénéités du milieu, Figure 2.8.



**Figure 2.8: Section plane d'un élément de volume endommagé**

Soit  $S$  l'aire d'une section de cet élément repérée par sa normale  $\vec{n}$ . Dans cette section, des traces de formes diverses parviennent des fissures et cavités après endommagement. Soit  $S_D$  la surface totale de ces traces dans le plan perpendiculaire à  $\vec{n}$ . La formule (2.19) représente la mesure mécanique de l'endommagement local relativement à la direction  $\vec{n}$

$$(2.19) \quad D_n = \frac{S_D}{S}$$

Physiquement,  $D_n$  est l'aire relative des fissures et cavités coupées par le plan normal à  $\vec{n}$ , alors que mathématiquement,  $D_n$  est la densité surfacique des discontinuités de la matière dans le plan normal à  $\vec{n}$ .

$D_n = 0$  correspond à un élément non endommagé

$D_n = 1$  correspond à un élément rompu en deux parties selon la direction normale à  $n$ .

$0 \leq D_n \leq 1$  caractérise l'état d'endommagement.

Dans le cas anisotrope, la variable scalaire  $D_n$  dépend de l'orientation de la normale. Par contre dans l'état isotrope  $D_n = D \quad \forall \vec{n}$ .

### 2.5.2 LA CONTRAINTE EFFECTIVE

Selon la définition de la variable d'endommagement, et dans le cas isotrope,  $S(1-D)$  est l'aire exacte qui peut transmettre les contraintes [26] et qui résiste effectivement aux efforts. Cette surface est donc la surface résistante effective :

$$\tilde{S} = S(1-D).$$

Ce qui conduit directement à la notion de contrainte effective que l'on définit par :

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}},$$

$$\text{Ce qui donne : } \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D}$$

Le principe d'équivalence en déformation unidimensionnelle ou tridimensionnelle d'un matériau endommagé consiste à l'utilisation des lois de comportement du matériau vierge dans lesquelles on remplace la contrainte usuelle par la contrainte effective.

Par exemple, la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle d'un matériau endommagé s'écrit :

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E}$$

En appliquant la notion de la contrainte effective à la rupture par décohésion, et en définissant par  $D_c$  la valeur critique de l'endommagement à l'apparition de la rupture, on obtient :

$$\tilde{\sigma}_u = \frac{\sigma_u}{1-D_c}, \text{ donc } D_c = 1 - \frac{\sigma_u}{\tilde{\sigma}_u}$$

où  $\tilde{\sigma}_u$  est la contrainte unidimensionnelle de rupture et  $\sigma_u$  la contrainte de rupture ultime usuelle ; la physique du solide montre que  $D_c$  est de l'ordre de 0.5 à 0.9.

### 2.5.3 MESURE DE L'ENDOMMAGEMENT

L'endommagement n'est pas facilement mesurable. Son évaluation quantitative est liée à la définition de la variable représentant l'endommagement. Les mesures sont donc essentiellement liées au couplage déformation-endommagement, c'est-à-dire à la variation des caractéristiques mécaniques des matériaux subissant ce phénomène [2] :

1. Variation du module d'élasticité :

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}$$

où  $\tilde{E}$  représente le module d'élasticité du matériau endommagé qui peut être mesuré soit par une méthode statique soit par une méthode dynamique par ultra-son.

2. Variation des caractéristiques de plasticité.

Deux méthodes de mesure peuvent être utilisées pour les caractéristiques d'érouissage monotone et d'érouissage cyclique. La première caractérise l'endommagement ductile et la deuxième est adaptée à la mesure de l'endommagement par fatigue oligocyclique.

3. Variation des caractéristiques de viscoplasticité.

La méthode de mesure est utilisée pour représenter l'endommagement de fluage qui se développe en fonction du temps, sous sollicitation constantes ou lentement évolutives et qui est plus clair lorsque la température est plus élevée.

#### 4. Variation de la résistance électrique

Dans cette méthode de mesure, la contrainte effective est remplacée par la notion de la densité du courant effective.

En pratique, nous n'avons pas seulement besoin de savoir la valeur de l'endommagement des matériaux à un moment donné et dans des conditions bien fixes, mais on a intérêt à trouver une loi qui décrit le comportement de l'endommagement des matériaux en fonction de leurs caractéristiques physiques et des contraintes appliquées. Dans ce qui suit, nous présentons quelques lois d'endommagement.

### 2.5.4 QUELQUES MODELES D'ENDOMMAGEMENT

Comme nous l'avons décrit dans la section 2.4.2, quatre types d'endommagement peuvent exister (ductile, macro-fragile, de fluage et de fatigue). Des lois d'endommagement appropriées existent dans la littérature pour ces différents types d'endommagement. Dans notre étude, les matériaux sont soumis à des charges thermiques de nature variable et cyclique, ce qui conduit à une fatigue des matériaux sollicités. Dans la suite, nous présentons uniquement quelques lois d'endommagement applicables au cas de fatigue thermomécanique.

#### 2.5.4.1 LOIS D'ENDOMMAGEMENT DE FATIGUE

L'endommagement de fatigue correspond à la naissance et la croissance de microfissures, généralement intra-cristallines dans les métaux sous l'effet de sollicitations cycliques, jusqu'à l'amorçage d'une fissure macroscopique. Ce phénomène peut intervenir pour des niveaux de contrainte faibles inférieurs à la limite d'élasticité conventionnelle. On distingue donc :

- La fatigue à grand nombre de cycles qui ne met en jeu que des déformations quasi élastiques et qui correspond à des nombres de cycles à rupture  $N_c > 50000$ ,  $10^6$ , ou même supérieurs à  $10^9$  cycles.

- La fatigue à faible nombre de cycles ou fatigue oligocyclique,  $N_c < 50000$  cycles, pour laquelle les déformations plastiques interviennent.

Dans ce qui suit, nous donnons deux lois utilisées pour modéliser l'endommagement par fatigue que ça soit à grand nombre de cycles ou oligocyclique.



### 2.5.4.1.1 LOI DE WOHLER-MINER

La loi Woehler-Miner [2],[27] représente la relation entre le nombre de cycles à la rupture  $N_F$ , la valeur de la contrainte maximale  $\sigma_M$  et la valeur moyenne  $\bar{\sigma}$ . Cette loi est démontrée expérimentalement pour quelques matériaux.

Le domaine de validité de cette loi est essentiellement la fatigue des métaux sous sollicitations périodiques. Les courbes de Wöhler expriment les résultats d'essais de fatigue unidimensionnels. Cette loi est développée dans le Chapitre 4 sur la fatigue thermo-élastique.

### 2.5.4.1.2 LOI DE MANSON-COFFIN

La loi Manson-Coffin [2], [27] est valable dans le domaine oligocyclique, et dans les cas où les déformations plastiques deviennent prépondérantes.

Le domaine d'application est limité aux faibles variations d'amplitude de déformation et aux températures peu élevées pour lesquelles l'endommagement de fluage est faible.

Nous trouvons que la loi de Woehler-Miner est plus générale que celle-ci et ne possède pas de limitations dans son application. C'est ce que nous avons adopté dans ce travail.

### 2.5.4.1.3 CAS DE LA TEMPERATURE VARIABLE AU COURS DU CYCLE

Lorsque la température augmente fortement au cours du cycle, cette loi introduit la contrainte réduite :  $S = \frac{\sigma}{\sigma_u(T)}$ ,  $\sigma_u(T)$  est la contrainte de rupture en traction qui dépend de la température.

La loi s'écrit sous la forme suivante :

$$(2.20) \quad \delta D = \frac{\delta N}{N_F(S_M, \bar{S}, T)} = \frac{(S_M - \bar{S})^{\beta(T)}}{A(\bar{S}, T)} \delta N$$

Où  $S_M$  et  $\bar{S}$  sont les valeurs maximale et moyenne de  $S$  au cours d'un cycle.

On définit alors l'accroissement de l'endommagement par cycle :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{cycle} \frac{\beta(T)}{2} \frac{(S - \bar{S})^{\beta(T)-1}}{A(\bar{S}, T)} dS$$

Cette loi est importante, mais il n'y a pas suffisamment d'expériences réalisées pour l'obtention de données et de paramètres qui dépendent de la température et de la nature des matériaux.

## 2.6 LES MULTI-MATERIAUX

L'évolution des techniques d'assemblage accompagne la généralisation des systèmes de type multi-matériaux développés pour répondre aux exigences des marchés utilisateurs : allègement, esthétique, nouvelles fonctionnalités. La réussite de la synergie des propriétés des différents matériaux composant une structure passe par la transmission optimale des contraintes entre eux. Les techniques concernées utilisent des mécanismes physiques (soudage, brasage, rivetage, vissage, boulonnage, sertissage, ...) ou chimiques (collage).

Les systèmes à base de multimatériaux sont utilisés dans plusieurs domaines, par exemple :

- Dans le domaine du sanitaire, il existe de nouveaux tubes formés de multi-matériaux, pour l'amélioration de la qualité et la bonne résistance contre les changements de la température. Ces tubes permettent aussi la protection contre les oxydations et contre beaucoup d'effets (interplast,...).
- Pour le BWR (Boiler Water Reactor), le réacteur utilisé pour faire bouillir l'eau (pressure vessel) est constitué de deux matériaux : l'acier à l'extérieur et une couche de protection à l'intérieur formée d'acier inoxydable [10].
- Dans les blocs moteurs à refroidissement par l'air ou par l'eau, les chemises cylindriques du piston sont en acier couplées directement lors de la fabrication avec l'aluminium (forme à ailettes pour un refroidissement à air), ou avec un bloc en fonte ou en alliage léger (cas du refroidissement par eau)[28] [29].

Il convient toujours de choisir l'assemblage optimal des matériaux dans une structure donnée en fonction de l'application.

## 2.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons donné les éléments bibliographiques essentiels et nécessaires pour bien comprendre les contributions que nous présenterons dans les chapitres qui suivent. D'abord, le comportement thermomécanique a été présenté et les équations de chaleur en thermo-élasticité et thermo-élasto-plasticité ont été développées. Nous avons aussi défini l'endommagement et les types d'endommagement tout en mettant un accent particulier sur l'endommagement par fatigue thermomécanique cyclique. Les représentations analytiques de l'endommagement et de ses lois de comportement ont été aussi présentées. Nous avons aussi discuté quelques travaux de la littérature autour de l'endommagement des matériaux et des moyens d'études utilisés.

A travers cette étude bibliographique, nous avons constaté l'existence de nombreux travaux sur les problèmes de l'endommagement mécanique d'une part et thermomécanique isotherme d'autre part. Le cas de l'endommagement prenant en compte le couplage mécanique et thermique de façon locale (prise en compte des gradients thermiques) a été très peu abordé et il l'est encore moins dans le cas de matériaux multicouches. La plupart des modèles d'endommagement reste adapté à des milieux uniques et uniformes. Pour les

milieux non homogènes et composites, beaucoup reste à faire sur la compréhension de leur endommagement surtout lorsqu'ils sont soumis à des sollicitations thermiques variables.

Dans la suite de ce travail, afin de pouvoir exploiter quelques modèles décrits dans ce chapitre, nous avons basé notre étude sur la notion de milieu équivalent au matériau bicouche étudié. La nature du cyclage thermique (variable et périodique) appliquée au multimatériau, nous conduit à l'utilisation du modèle d'endommagement oligocyclique. Ce choix résulte du fait qu'il n'y a pas de paramètres pour cette loi d'endommagement pour le modèle bidimensionnel ou tridimensionnel.



# CHAPITRE 3 DESCRIPTION DU MODELE EQUIVALENT AU MODELE MULTI-COUCHE

## 3.1 INTRODUCTION

Le besoin d'avoir plusieurs effets thermiques et/ou mécaniques des composants industriels dans une large gamme d'applications conduit à la fabrication de composants à la base de plusieurs matériaux. Ceci est nécessaire pour améliorer leur performance. Par exemple, le besoin de refroidissement sec d'un cylindre moteur conduit à le fabriquer en deux couches ; une en acier pour résister contre les contraintes mécaniques et l'autre en aluminium pour améliorer son refroidissement et diminuer son poids [28]. De même pour le « vessel » d'un réacteur nucléaire qui doit assurer trois fonctionnalités : résistance contre les contraintes intérieures, isolation de l'extérieur et diminution de la corrosion du fluide d'échange tout en minimisant le coût de fabrication. Le fabricant a tout intérêt à utiliser un matériau inoxydable à l'intérieur, de l'acier au milieu et un matériau isolant à l'extérieur [10].

Théoriquement, il est très important d'avoir un contact parfait entre les différentes couches qui constituent un composant industriel donné. Ceci est nécessaire pour obtenir un transfert thermique idéal et une distribution équitable des contraintes sur ces différents matériaux. Cependant, il est évident que dans un matériau multi-couches, il y a une influence mutuelle d'un matériau sur un autre, et il est presque impossible d'avoir une variation brusque des propriétés thermiques et mécaniques au niveau de l'interface entre deux matériaux. À ce niveau, on peut définir une zone dans laquelle les valeurs des propriétés thermiques et mécaniques sont supposées variables dans un domaine limité par celles des matériaux constituants.

D'autre part, les lois d'endommagement les plus connues, comme celles proposées par Lemaitre et Chaboche [2], ne s'appliquent qu'à des matériaux simples et homogènes. Comme on a pu le voir dans la section 2.5 du Chapitre 2, les lois d'endommagement ne sont valables que pour des matériaux ayant des propriétés homogènes. Ainsi, si nous voulons appliquer ces lois pour un composant multi-matériau, une des solutions consiste à définir un matériau équivalent au multi-matériau étudié.

L'approche proposée en [30] remplace le multi-matériau par un matériau unique ayant des propriétés physiques constantes partout dans le composant. Leurs valeurs sont obtenues de façon à assurer des niveaux de températures équivalents et plus particulièrement aux limites des deux matériaux (réel et équivalent). Cette méthode d'équivalence nous permet de traduire uniquement le comportement global du composant, mais elle ne peut pas prendre en compte les problèmes physiques liés aux discontinuités au niveau de l'interface entre deux couches du multi-matériau. Les modèles d'endommagement appliqués sur le matériau équivalent, ne peuvent en aucun cas traduire

le comportement local et réel du multi-matériau où les problèmes d'endommagement sont plus localisés dans les interfaces et sur les frontières les plus sollicitées par des contraintes.

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter les équations de bilan thermique, mécanique et thermomécanique pour un matériau unique et pour un multi-matériau pour des géométries cartésienne et cylindrique. Nous présenterons ensuite la méthode de recherche de milieu équivalent utilisée avec les équations de bilan correspondantes. Celle-ci est basée sur des propriétés thermo-physiques variables obtenues par interpolation polynômiale avec des ordres convenables de façon à s'affranchir des problèmes de discontinuités au niveau de l'interface entre matériaux. Une validation de cette méthode sera proposée dans ce chapitre.

## 3.2 FORMULATIONS DU COUPLAGE THERMOMECHANIQUE

### 3.2.1 FORMULATION THERMIQUE

Si on se limite seulement au domaine thermique, le transfert de chaleur est géré par les principaux modes de transfert à savoir, la conduction, la convection et le rayonnement. Pour un solide, les deux derniers modes de transfert de chaleur se manifestent au niveau de ses limites ou sous forme de génération interne de chaleur pour le rayonnement (laser par exemple). Sur le plan thermomécanique, des termes dus aux couplages thermiques et mécaniques doivent être pris en compte. La nature du couplage va dépendre du comportement mécanique du matériau selon les cas, élastique, plastique, voire élasto-plastique.

Dans ce qui suit, on présente une formulation plus générale du couplage thermomécanique en supposant les influences mutuelles des effets thermiques et mécaniques :

Effet thermique  $\longleftrightarrow$  Effet mécanique

Reprenons l'équation de conservation de l'énergie (premier principe)

$$(3.1) \quad \rho \dot{e} = \sigma : \dot{\varepsilon} + r - \text{div } \bar{q}$$

Et remplaçons  $\rho \dot{e}$  par son expression tirée de :  $e = \Psi + Ts$

$$(3.2) \quad \rho \dot{e} = \rho \dot{\Psi} + \rho T \dot{s} + \rho \dot{T} s$$

Puis  $\dot{\Psi}$  par son expression en fonction des variables d'état :

$$(3.3) \quad \rho \dot{e} = \rho \left[ \frac{1}{\rho} \sigma : \dot{\varepsilon}^e - s \dot{T} + \frac{1}{\rho} A_k \dot{V}_k \right] + \rho T \dot{s} + \rho \dot{T} s$$

Il vient que :

$$(3.4) \quad \sigma : \dot{\varepsilon}^e + A_k \dot{V}_k + \rho T \dot{s} = \sigma : \dot{\varepsilon} + r - \text{div} \vec{q}$$

Avec

$$(3.5) \quad \dot{s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial s}{\partial T} \dot{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$$

En introduisant la chaleur spécifique définie par  $C = T \frac{\partial s}{\partial T}$  dans le système de couplage thermomécanique et compte tenu de la loi de Fourier  $\vec{q} = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ , l'équation de bilan thermique en régime transitoire [2], [31],[32], [33] devient :

$$(3.6) \quad \rho C \dot{T} = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k + r + T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right]$$

Où  $\text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T)$  représente l'évolution adiabatique,  $A_k \dot{V}_k$  l'énergie non récupérable stockée dans le matériau,  $\sigma : \dot{\varepsilon}^p$  l'énergie plastique,  $T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e$  l'énergie de couplage thermomécanique,  $T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$  la variation de l'énergie non récupérable stockée dans le matériau par rapport à la température, et  $r$  la production interne de la chaleur créée par des sources externes.

### 3.2.1.1 COUPLAGE THERMO-MECANIQUE FORT

Dans ce cas, en plus du terme conductif, seuls les termes liés à l'énergie plastique et à l'énergie de couplage thermo-mécanique sont pris en compte. Le terme lié à la production interne de chaleur  $r$  est supposé négligeable ainsi que les deux autres termes ( $T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k$  et  $A_k \dot{V}_k$ ) liés à l'énergie non récupérable stockée dans le matériau. En effet, ils ne représentent que 5 à 10 % de l'énergie plastique  $\sigma : \dot{\varepsilon}^p$  [2].

$$(3.7) \quad A_k \dot{V}_k \cong 0 \text{ et } T \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \cong 0$$

L'équation (3.6) devient alors :

$$(3.8) \quad \rho C \dot{T} = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) + \sigma : \dot{\varepsilon}^p + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e$$

### 3.2.1.2 COUPLAGE THERMIQUE SIMPLE

Dans ce cas, le comportement thermomécanique est influencé uniquement par les sollicitations thermiques appliquées au matériau. Les effets mécaniques influencent très peu

le comportement thermique du matériau. Une telle hypothèse suppose négligeable les termes liés aux effets élastiques et plastiques :  $T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e = 0$  et  $\sigma : \dot{\varepsilon}^p = 0$

L'équation (3.6) devient :

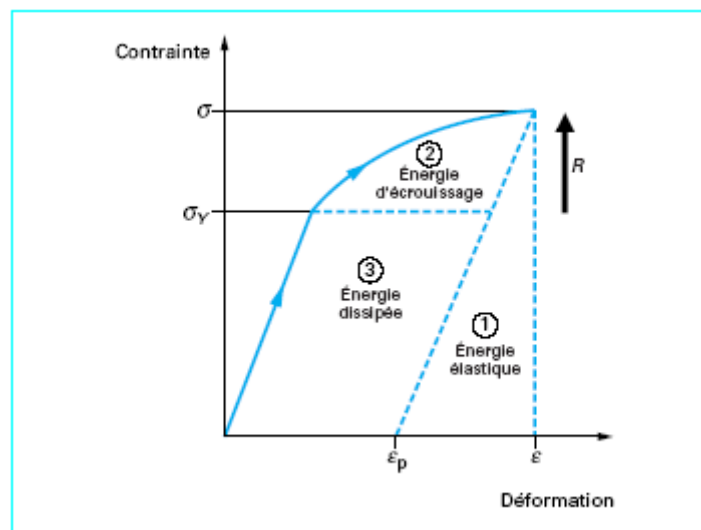
$$(3.9) \quad \rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T)$$

### 3.2.2 EQUATIONS GENERALES MECANIQUES

Le comportement et la déformation mécanique d'un solide isotrope, sous une charge élasto-plastique monotone unidirectionnelle, se traduit par les équations suivantes :

$$(3.10) \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$(3.11) \quad \sigma = \sigma_y + R(p)$$



**Figure 3.1 : Comportement élasto-plastique**

#### 3.2.2.1 COMPORTEMENT ELASTIQUE

L'équilibre mécanique d'un corps est décrit par l'équation suivante :

$$(3.12) \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji,j} + f_i = \rho \dot{v}_i$$

L'influence du terme  $\rho \dot{v}_i$  ne se manifeste que pour des problèmes de dynamiques rapides ou de vibration ; dans notre cas, son influence reste trop faible et sera considérée négligeable dans la suite de cette étude. Il en sera de même pour les forces volumiques  $f_i$ .

L'équation (3.12) devient :



$$(3.13) \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji,j} = 0$$

En régime élastique, l'équation de Lamé [34] s'écrit :

$$(3.14) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda e\delta_{ij}, (i, j = 1,2,3)$$

Avec :

$$(3.15) \quad e = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}$$

$$(3.16) \quad \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, (k = 1,2,3)$$

$$(3.17) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), (i, j = 1,2,3)$$

$$(3.18) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

En remplaçant (3.14) dans (3.13) et en prenant en considération (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18), nous obtenons les équations de déplacements sous la forme différentielle suivante :

$$(3.19) \quad \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = 0$$

Si la géométrie du corps ne conduit pas au flambement, le calcul des contraintes est obtenu par la loi de Hooke :

$$(3.20) \quad \sigma_{ij} = E_{ij}(\varepsilon_{ij}) \quad \text{où } (i, j = 1,2,3)$$

---

### 3.2.2.2 COMPORTEMENT PLASTIQUE

Dans le régime plastique, la déformation d'un matériau est donnée par la relation [2] :

$$(3.21) \quad \varepsilon^p = \left[ \frac{\sigma - \sigma_y}{K_y} \right]^{M_y}$$

$\sigma$  étant la contrainte appliquée,  $\sigma_y$  la contrainte limite élastique du matériau,  $K_y$  le coefficient de résistance plastique et  $M_y$  l'exposant d'écrouissage.

---

### 3.2.3 COUPLAGE THERMOMECHANIQUE

Le couplage thermomécanique dans sa formulation simplifiée, consiste d'abord à analyser l'influence des effets thermiques sur le comportement mécanique du système.

### 3.2.3.1 COUPLAGE THERMO-ELASTIQUE

Dans le cas du régime thermo-élastique, en plus de la déformation élastique, il faut ajouter la déformation d'origine thermique. La déformation totale s'écrit donc :

$$(3.22) \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{th}$$

En se plaçant dans le cadre des hypothèses décrites ci-dessus, l'équilibre thermomécanique du système s'écrit alors :

$$(3.23) \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji,j} = 0$$

La relation contrainte-déformation thermomécanique est décrite par la loi de Hooke généralisée [34] :

$$(3.24) \quad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda e - \beta\tau)\delta_{ij}, \quad (i, j = 1,2,3)$$

Avec :

$$(3.25) \quad e = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}$$

$$(3.26) \quad \varepsilon_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (k = 1,2,3)$$

$$(3.27) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (i, j = 1,2,3)$$

$$(3.28) \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \beta = \frac{\alpha E}{(1-2\nu)}$$

En remplaçant (3.24) dans (3.23), et en prenant en considération (3.25) à (3.28), nous obtenons les équations de déplacements sous la forme différentielle suivante :

$$(3.29) \quad \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) u_{k,ki} - \beta \tau_{,i} = 0$$

Dans le Chapitre 4, nous proposons une solution analytique de cette équation. La connaissance des déplacements permettra de calculer les contraintes et par suite l'endommagement local du corps étudié.

En tenant compte de (3.28), la relation (3.23) s'écrit :

$$(3.30) \quad \sigma_{ij} = E_{ij}(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}(T - T_0))$$

### 3.2.3.2 COUPLAGE THERMO-ELASTO-PLASTIQUE

Au-delà du régime élastique, le matériau rentre dans une phase inélastique (qu'on peut qualifier de phase plastique) dans laquelle les variations de température au sein du matériau conduisent fréquemment au développement de contraintes transitoires et de plus en plus élevées qui peuvent être à l'origine des phénomènes de fluage.

Dans ce cas, pour une analyse plus complète des contraintes thermiques, nous avons pris en compte les variations des propriétés de matériaux et de la déformation plastique en fonction de la température.

Ce problème est discuté par Ishikawa et Hata [35] qui suppose que le coefficient de poisson est indépendant de la température.

Ainsi la contrainte appliquée au modèle est donnée par la relation [36] :

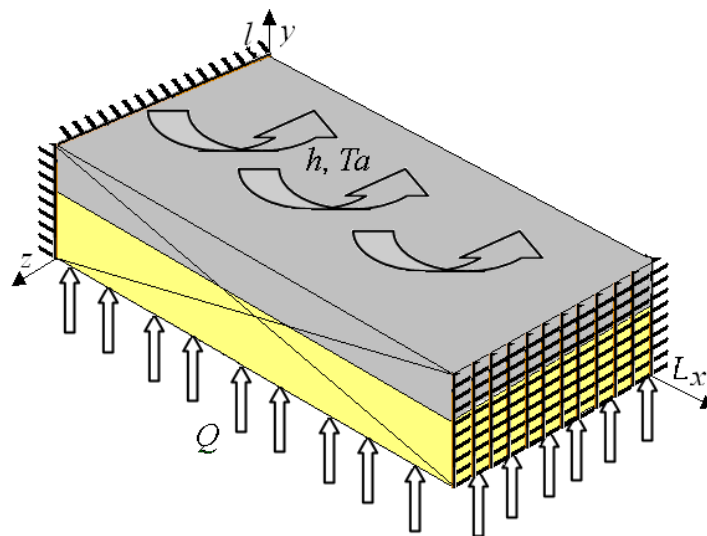
$$(3.31) \quad \sigma_{ii} = \frac{E_{ii}}{(1+\nu_{ii})(1-2\nu_{ii})} \left[ (1-\nu_{ii})\varepsilon_{ii} + \nu_{ii}(\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}) \right] - \frac{E_{ii}}{1-2\nu_{ii}} \varepsilon_{ii}^{th} - \frac{E_{ii}}{1+\nu_{ii}} (\varepsilon_{ii}^P + \varepsilon_{ii}^c) \quad i=1,2,3$$

$\varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e + \varepsilon_{ii}^P + \varepsilon_{ii}^c + \varepsilon_{ii}^{th}$  représente la déformation totale,  $\varepsilon_{ii}^e$  la déformation élastique,  $\varepsilon_{ii}^P$  la déformation plastique,  $\varepsilon_{ii}^c$  la déformation fluage, et  $\varepsilon_{ii}^{th} = \alpha_{ii}\Delta T(r, z, t)$  la déformation thermique.

### 3.3 REPRESENTATION MULTICOUCHE THEORIQUE

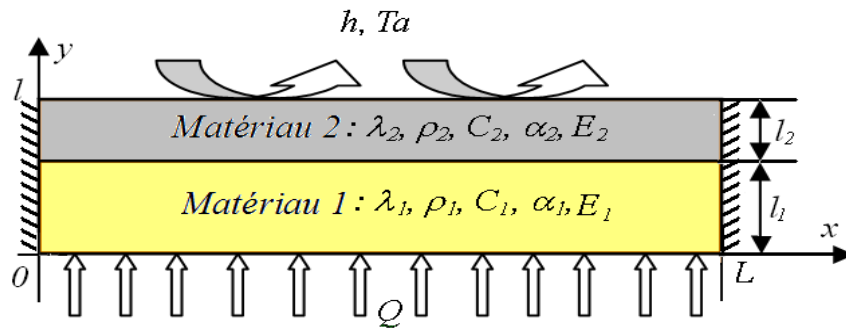
Dans ce paragraphe, nous donnons une formulation du problème pour des multimatériaux plans et cylindriques.

#### 3.3.1 MULTIMATERIAUX PLANS



**Figure 3.2 : Matériau bicouche**

Le multimatériau étudié est composé de deux couches parfaitement collées, Figure 3.2. Il est fixé sur les faces  $x=0$  et  $x=L$ , et libre sur les autres faces. D'un point de vue thermique, le matériau est soumis à un flux de chaleur sur la face  $y=0$ , et à un échange par convection sur la face  $y=e$ , les quatre autres faces sont supposées isolées. Donc, d'après ces conditions mécaniques et thermiques, une approche bidimensionnelle du problème sera proposée, Figure 3.3.



**Figure 3.3 : Le corps étudié dans le plan (x, y)**

### 3.3.1.1 FORMULATION DU COUPLAGE THERMOMECHANIQUE EN REGIME TRANSITOIRE DANS LE PLAN (X, Y)

#### 3.3.1.1.1 CONDITIONS AUX LIMITES THERMIQUES ET MECANIQUES

- Conditions aux limites thermiques :

$$(3.32) \quad -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y} = \phi_1, \quad y = 0, 0 < x < L$$

$$(3.33) \quad -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_p - T_0), \quad y = l, 0 < x < L$$

$$(3.34) \quad -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad i=1,2, \quad x=0, x=L, 0 < y < l$$

Au niveau de l'interface, on applique la continuité des flux et des températures :

$$(3.35) \quad -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial y} = -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{et} \quad T_1 = T_2, \quad y = l_1, 0 < x < L$$

- Conditions aux limites mécaniques :

$$(3.36) \quad V = 0, U = 0, \quad x = 0, x = L, 0 < y < l$$

#### 3.3.1.1.2 CAS THERMO-ELASTIQUE

Dans ce cas, les effets mécaniques influencent très peu le comportement thermique du matériau. L'équation de bilan thermique pour un matériau orthotrope prend alors la forme suivante :

$$(3.37) \quad (\rho c(T))_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_{yi} \frac{\partial T_i}{\partial y}) \quad i=1 \text{ (matériau 1)}, i=2 \text{ (matériau 2)}$$

Si le module d'Young dépend de la température, l'équation thermo-élastique (3.8) devient :

$$(3.38) \quad \rho c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yi} \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + T_i \left[ \frac{\partial \sigma_{xxi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xxi}^e}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{yyi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{yyi}^e}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_{xyi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xyi}^e}{\partial t} \right]$$

Pour un matériau isotrope, on a  $\alpha_{xy} = 0$  et  $\alpha_{ij} = \alpha$ , et par suite la relation contrainte-déformation (3.30) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_i = \frac{E_i}{(1+\nu)(1-2\nu)_i} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_{yy} - \alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}_i \quad i=1,2$$

Où  $\sigma, \varepsilon, \Delta T$  sont fonction de  $(x, y, t)$ .

### 3.3.1.1.3 CAS THERMO-ELASTO-PLASTIQUE

Dans ce cas, du fait du niveau plus élevé de la température, le passage du régime élastique au régime plastique se traduit par des variations de certains paramètres en fonction de la température. Il y a donc une influence des effets mécaniques sur le comportement thermique. L'équation de bilan thermique s'écrit alors :

$$(3.39) \quad \rho c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{xi} \frac{\partial T_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{yi} \frac{\partial T_i}{\partial y} \right) + \sigma_{xxi} \frac{\partial \varepsilon_{xxi}^p}{\partial t} + \sigma_{yyi} \frac{\partial \varepsilon_{yyi}^p}{\partial t} + 2 \sigma_{xyi} \frac{\partial \varepsilon_{xyi}^p}{\partial t} + T_i \left[ \frac{\partial \sigma_{xxi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xxi}^e}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{yyi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{yyi}^e}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_{xyi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xyi}^e}{\partial t} \right]$$

Pour chaque matériau, supposé isotrope, les déformations plastiques seront calculées par la relation (3.21) :

$$(3.40) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}_i^p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xxi} - \sigma_{yyi}}{K_{yi}} \right)^{M_{yi}} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xxi} - \sigma_{yyi}}{K_{yi}} \right)^{M_{yi}} \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

La contrainte  $\sigma_{xx}$  est la seule contrainte appliquée sur le matériau.

Pour un couplage thermo-élasto-plastique, l'expression des contraintes (3.31) devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{xxi} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[ (1-\nu_i) \varepsilon_{xxi}^e + \nu_i (\varepsilon_{yyi}^e + \varepsilon_{yyi}^p + \varepsilon_{yyi}^c + \varepsilon_{xxi}^p + \varepsilon_{xxi}^c) \right] - \frac{\nu_i E_i \alpha \Delta T}{1-2\nu_i} \\ \sigma_{yyi} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[ (1-\nu_i) \varepsilon_{yyi}^e + \nu_i (\varepsilon_{xxi}^e + \varepsilon_{xxi}^p + \varepsilon_{xxi}^c + \varepsilon_{yyi}^p + \varepsilon_{yyi}^c) \right] - \frac{\nu_i E_i \alpha \Delta T}{1-2\nu_i} \end{aligned} \quad i=1,2$$

Où  $\sigma, \varepsilon, \Delta T$  sont fonction de  $(x, y, t)$

### 3.3.2 MULTIMATERIAUX CYLINDRIQUES

Le cylindre étudié est composé de deux couches métalliques creuses, soumis à un flux de chaleur côté interne et à un échange convectif avec l'extérieur, côté externe. Ses faces latérales sont isolées sur le plan thermique et fixées sur le plan mécanique.

Pour des raisons de symétrie, l'étude est conduite en 2D axisymétrique selon le plan  $(r, z)$  (coupe B-B), Figure 3.4.

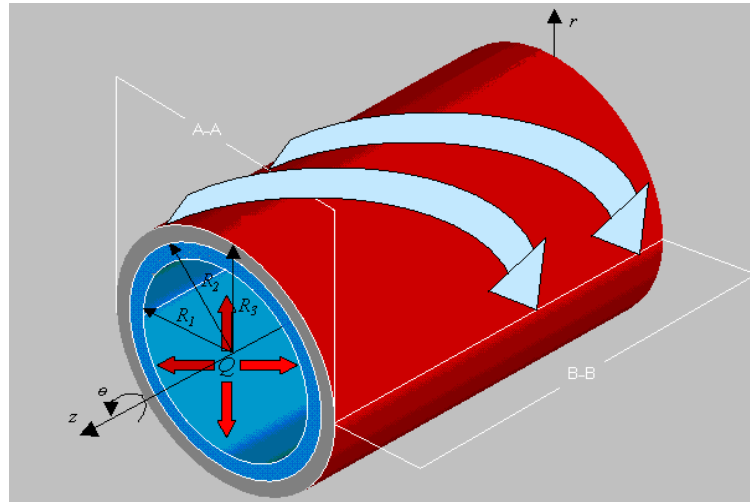


Figure 3.4 : Cylindre creux à deux couches

#### 3.3.2.1 FORMULATIONS DU COUPLAGE THERMO-MECANIQUE EN REGIME TRANSITOIRE

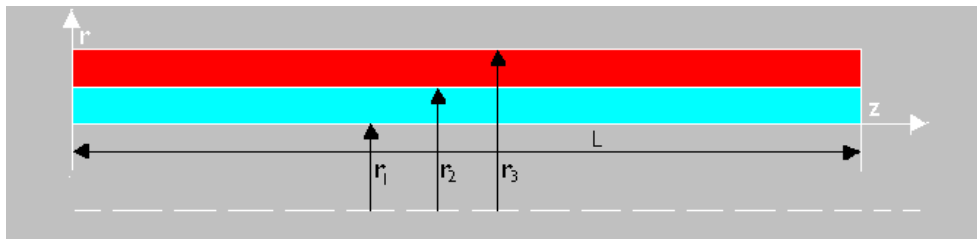


Figure 3.5 : Section B-B du cylindre à deux couches dans le plan  $(r, z)$ .

Dans le plan  $(r, z)$ , l'équation (3.8) devient :

$$(3.41) \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \sigma_{rr} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} + \sigma_{zz} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} + 2\sigma_{rz} \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} + T \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^e}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^e}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{rz}^e}{\partial t} \right]$$

### 3.3.2.1.1 CAS THERMO-ELASTIQUE

En négligeant les termes de couplage thermomécanique  $T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e = 0$  et de déformation inélastique  $\sigma : \dot{\varepsilon}^p = 0$ , l'équation de la chaleur (3.9) devient :

$$\rho c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) \quad i=1,2$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \phi, \quad r = r_1, \quad 0 \leq z \leq L$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad T_1 = T_2, \quad r = r_2, \quad 0 \leq z \leq L$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = h(T_2 - T_a), \quad r = r_3, \quad 0 \leq z \leq L$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = L, \quad r_1 \leq r \leq r_3$$

Dans le régime élastique, l'équation traduisant l'équilibre mécanique s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

Si on considère un matériau isotrope, alors  $\alpha_{rz} = 0$ , et en posant  $\alpha_{rr} = \alpha_{zz} = \alpha$ , on peut alors écrire l'équation de couplage thermo-élastique (3.30) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix}_i = \frac{E_i}{((1+\nu)(1-2\nu))_i} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} - \alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_{zz} - \alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix}_i \quad i=1,2$$

Avec  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  sont fonction de  $(r, z, t)$

### 3.3.2.1.2 CAS THERMO-ELASTO-PLASTIQUE

L'équation de bilan thermique (3.31) s'écrit :

$$\rho c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_{ri} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \lambda_{ri} \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{zi} \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) + \sigma_{rri} \frac{\partial \varepsilon_{rri}^p}{\partial t} + \sigma_{zzi} \frac{\partial \varepsilon_{zzi}^p}{\partial t} + 2\sigma_{rzi} \frac{\partial \varepsilon_{rzi}^p}{\partial t} + T_i \left[ \frac{\partial \sigma_{rri}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{rri}^e}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{zzi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{zzi}^e}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_{rzi}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{rzi}^e}{\partial t} \right] \quad i=1,2$$

Avec les conditions aux limites décrites ci-dessus.

La déformation plastique (3.21) du cylindre bicouche s'écrit séparément pour chaque couche. Comme les déformations à l'interface entre les couches sont égales  $\varepsilon_{rr1}^p = \varepsilon_{rr2}^p$  et  $\varepsilon_{zz1}^p = \varepsilon_{zz2}^p$ , la décomposition de la déformation plastique, selon le critère isotrope, s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_i^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zzi} - \sigma_{yi}}{K_{yi}} \right)^{M_{yi}} \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zzi} - \sigma_{yi}}{K_{yi}} \right)^{M_{yi}} \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

Où  $\sigma_{zz}$  est la seule contrainte appliquée sur le corps (selon notre cas)

L'équation de couplage thermo-élasto-plastique (3.31), pour les deux couches supposées isotropes, s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_{rri} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[ (1-\nu_i)\varepsilon_{rri}^e + \nu_i(\varepsilon_{zzi}^e + \varepsilon_{zzi}^p + \varepsilon_{zzi}^c + \varepsilon_{rri}^p + \varepsilon_{rri}^c) \right] - \frac{\nu_i E_i \alpha \Delta T}{1-2\nu_i} \\ \sigma_{zzi} &= \frac{E_i}{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)} \left[ (1-\nu_i)\varepsilon_{zzi}^e + \nu_i(\varepsilon_{rri}^e + \varepsilon_{rri}^p + \varepsilon_{rri}^c + \varepsilon_{zzi}^p + \varepsilon_{zzi}^c) \right] - \frac{\nu_i E_i \alpha \Delta T}{1-2\nu_i} \quad i=1,2 \end{aligned}$$

Avec  $\sigma, \varepsilon, \Delta T$  fonction de  $(r, z, t)$

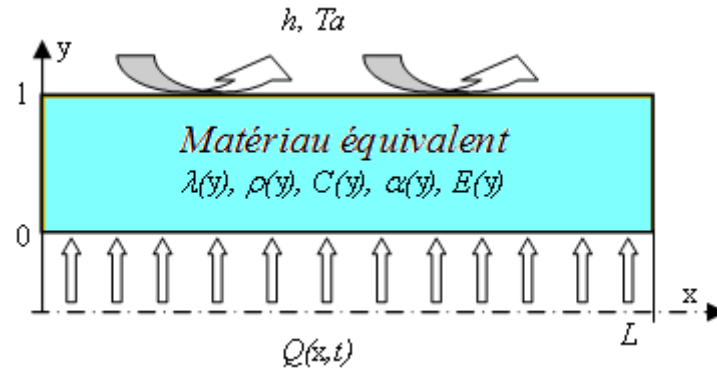
### 3.4 REPRESENTATION DU MILIEU EQUIVALENT AU MATERIAU BICOUCHE

Dans [37], l'étude considère une soudure hétérogène par laser de deux matériaux ayant des propriétés différentes. Cette étude montre, par l'expérience, que le module d'Young varie de manière continue d'un matériau à un autre. Dans notre approche, la recherche d'un matériau équivalent du matériau bicouche repose sur une interpolation des propriétés physiques des deux couches. Le matériau équivalent aura donc des propriétés variables en passant d'une couche à l'autre. Le domaine de variations de ses propriétés est donc limité par les propriétés des deux couches constituant le matériau bicouche.

#### 3.4.1 COUPLAGE THERMOMECHANIQUE EN REGIME TRANSITOIRE PLAN (X, Y)

La recherche du corps homogène équivalent au multimatériau repose sur l'hypothèse d'utiliser des propriétés physiques variables selon la direction  $oy$ , voir Figure 3.6.





**Figure 3.6 : Matériau équivalent (plan x, y)**

### 3.4.1.1.1 COUPLAGE THERMOELASTIQUE

L'équation de bilan thermique (3.6) s'écrit alors sous la forme :

$$(\rho c(y)) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_x(y) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_y(y) \frac{\partial T}{\partial y})$$

Avec les conditions aux limites :

$$-\lambda(y) \frac{\partial T}{\partial y} = \phi_1, \quad y = 0$$

$$-\lambda(y) \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_p - T_0), \quad y = 1$$

$$-\lambda(y) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\lambda(y) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad x = 0, x = L$$

L'équation du couplage thermo-élastique (3.22), s'écrit en supposant le matériau isotrope :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{((1+\nu)(1-2\nu))} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_{yy} - \alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

Où les coefficients  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$ , sont fonction de  $y$  et  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  sont fonction de  $x$ ,  $y$  et  $t$ .

### 3.4.1.1.2 COUPLAGE THERMO-ELASTO-PLASTIQUE

L'équation de bilan thermique (3.6) s'écrit sous la forme :

$$\rho c(y) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda_x(y) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_y(y) \frac{\partial T}{\partial y}) + \sigma_{xx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^p}{\partial t} + \sigma_{yy} \frac{\partial \varepsilon_{yy}^p}{\partial t} + 2\sigma_{xy} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^p}{\partial t} + T \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^e}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{yy}^e}{\partial t} + 2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^e}{\partial t} \right]$$

Avec les conditions aux limites et initiales décrites ci-dessus.

La déformation plastique (équation (3.21)) du corps homogène s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_y}{K_y} \right)^{M_y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_y}{K_y} \right)^{M_y} \end{bmatrix}$$

Où  $\sigma_{xx}$  est la seule contrainte appliquée sur le corps.

Sachant que les matériaux sont isotropes  $\alpha_{xy} = 0$ , et en posant  $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha$ , l'équation du couplage thermo-élasto-plastique (3.31), s'écrit :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{xx}^e + \nu(\varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{yy}^c + \varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{xx}^c) \right] - \frac{\nu E \alpha \Delta T}{1-2\nu}$$

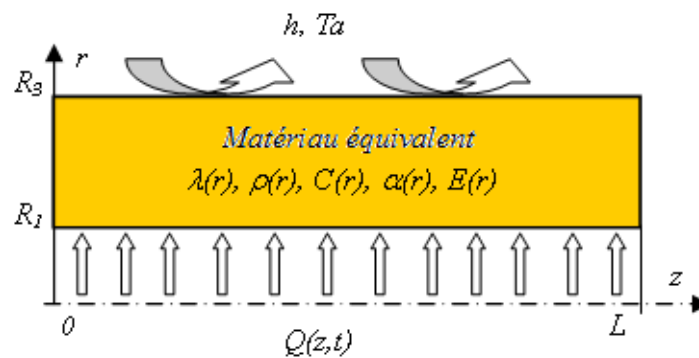
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{xx}^c + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{yy}^c) \right] - \frac{\nu E \alpha \Delta T}{1-2\nu}$$

Où les coefficients  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$ , sont fonction de  $y$  et  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  sont fonction de  $x$ ,  $y$  et  $t$ .

### 3.4.2 COUPLAGE THERMOMECHANIQUE EN REGIME TRANSITOIRE PLAN (R, Z)

La recherche du matériau équivalent (Figure 3.7) consiste à utiliser les modèles thermiques et mécaniques homogènes avec des propriétés physiques variables dans l'espace qui répondent à des charges thermiques équivalentes.

Le corps homogène équivalent suggéré dans le plan  $(r, z)$  a des propriétés physiques équivalentes variables selon  $r$ , voir Figure 3.7.



**Figure 3.7 : Matériau équivalent (plan  $r, z$ )**

#### 3.4.2.1 CAS THERMO-ELASTIQUE

L'équation thermique (3.6) s'écrit sous la forme suivante :

$$(\rho C)(r) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \lambda(r) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Avec les conditions aux limites :

$$-\lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} = Q(z, t) \quad , \quad r = R_1$$

$$-\lambda(r) \frac{\partial T}{\partial r} = h(T(r, z, t) - T_a) \quad , \quad r = R_3$$

$$\lambda(r) \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0 \text{ et } z = L$$

L'équation de couplage thermo-élastique (3.21), s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr}^e - \alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_{zz}^e - \alpha(T-T_0) \\ \varepsilon_{rz}^e \end{bmatrix}$$

Où les coefficients  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  sont fonction de  $r$  et les grandeurs  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  sont fonction de  $r$ ,  $z$  et  $t$ .

Les conditions initiales sont :

$$T(r, z, t) = T_0 \quad t = 0, \quad \forall r, z$$

### 3.4.2.2 CAS THERMO-ELASTO-PLASTIQUE

L'équation de bilan thermique s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} + T \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial T} \frac{\partial \varepsilon_{zz}^e}{\partial t} \right]$$

Avec les conditions aux limites et initiales décrites ci-dessus.

La déformation plastique (3.21) du corps équivalent s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zz} - \sigma_y}{K_y} \right)^{M_y} \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zz} - \sigma_y}{K_y} \right)^{M_y} \end{bmatrix}$$

Les paramètres  $\sigma_y$ ,  $K_y$  et  $M_y$  sont interpolés en fonction  $r$ ,

La contrainte  $\sigma_{zz}$  est la seule contrainte appliquée sur le corps (dans notre cas).

L'équation du couplage thermo-élasto-plastique (3.31), s'écrit :

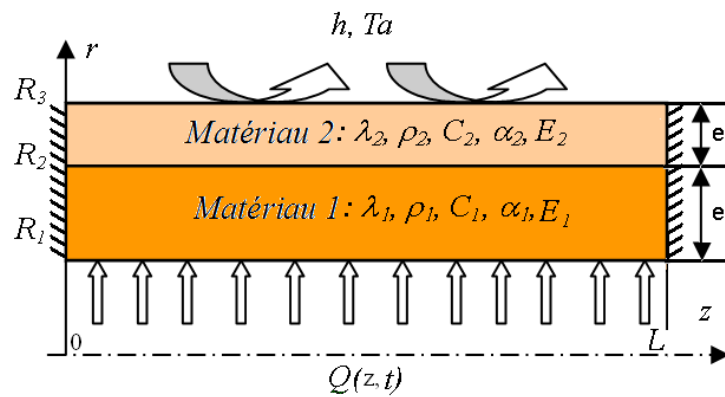
$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E(r,T)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{E(r,T)}{1-2\nu} \begin{bmatrix} \alpha_{rr}(T(r,z,t)-T_1) \\ \alpha_{zz}(T(r,z,t)-T_1) \end{bmatrix} - \frac{E(r,T)}{1+\nu} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr}^p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Où  $E$ ,  $\nu$  et  $\alpha$  sont fonction de  $r$  et  $T$  et  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  et  $T$  sont fonction de  $r$ ,  $z$  et  $t$ .

### 3.5 RESULTATS NUMERIQUES

Les deux systèmes décrits ci-dessus sont résolus numériquement sous Matlab par la méthode implicite des différences finies. Le champ de température est obtenu à chaque itération par la résolution d'un système tri-diagonal avec l'algorithme TDMA.

Dans la suite, les deux modèles « bicouche et équivalent » seront comparés en faisant varier les paramètres physiques et géométriques du matériau pour différentes sollicitations thermiques appliquées aux limites (Figure 3.8).



**Figure 3.8 : Le corps étudié**

Les domaines de variations des différents paramètres sont :

- 1) Epaisseur :  $6 \text{ mm} < e < 600 \text{ mm}$ ,  $e=e_1+e_2$
- 2) Flux de chaleur appliqué :  $103 \text{ W/m}^2 < Q < 104 \text{ W/m}^2$
- 3) Nature du flux de chaleur : constant ou périodique
- 4) Nature des matériaux : acier, cuivre, laiton, aluminium, voir Tableau 3.1 pour leurs propriétés thermiques et Tableau 3.2 pour leurs propriétés mécaniques pour trois valeurs de la température.

Les propriétés géométriques fixes du modèle sont :  $R_1=0.1 \text{ m}$  et  $L=0.6 \text{ m}$

Les conditions d'échange par convection sont telles que :  $T_a=300 \text{ K}$  et  $h=6 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ .

Rappelons que les faces de gauche et de droite sont isolées et que la température initiale est égale à  $T_a$ .

T=20 C	Laiton	Cuivre	Acier	Aluminium
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	8600	8930	7854	2770

C (J/kg.K)	450	385	434	875
$\lambda$ (W/m <sup>°K</sup> )	128	330	60.5	177
$\alpha$ (K-1)			1,18.10-5	2,3.10-5

**Tableau 3.1 : Propriétés physiques des matériaux [2], [27]**

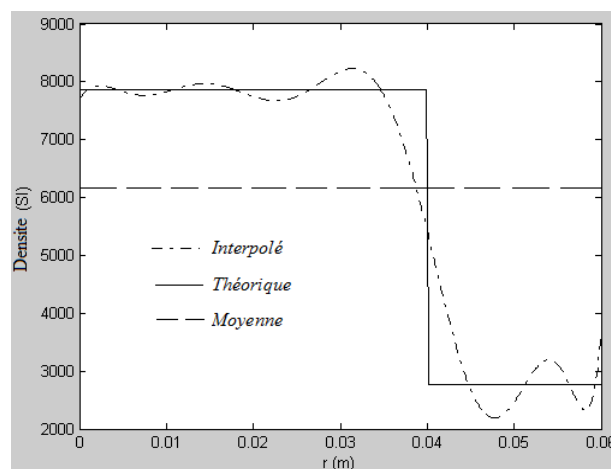
T(C)	E (MPa) Acier	$\nu$ : Acier
20	216000	0.29
200	205000	0.30
600	170000	0.315
T(C)	E (MPa) aluminium	$\nu$ : aluminium
20	72000	0.32
200	66000	0.325
500	50000	0.35

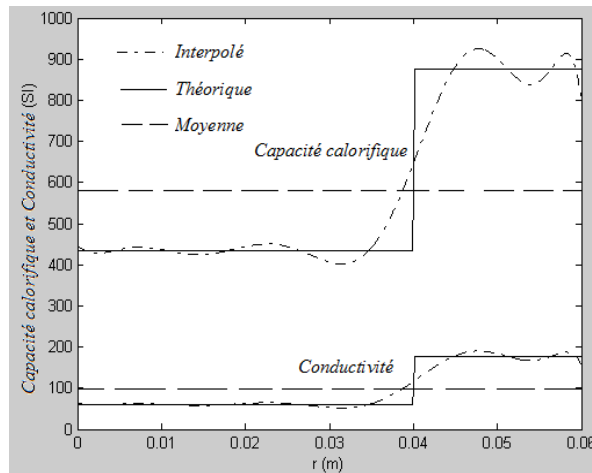
**Tableau 3.2 : Variation des caractéristiques avec T [2], [27]**

Pour le modèle équivalent, les propriétés thermiques et mécaniques sont obtenues par une approximation polynômiale en fonction de  $r$  (ou  $y$  dans le cas cartésien). Leur domaine de variation est limité par celui des deux matériaux utilisés. Le degré de l'approximation polynômiale dépend de la géométrie et des propriétés thermiques et mécaniques. Il a une influence directe sur la validité du modèle équivalent.

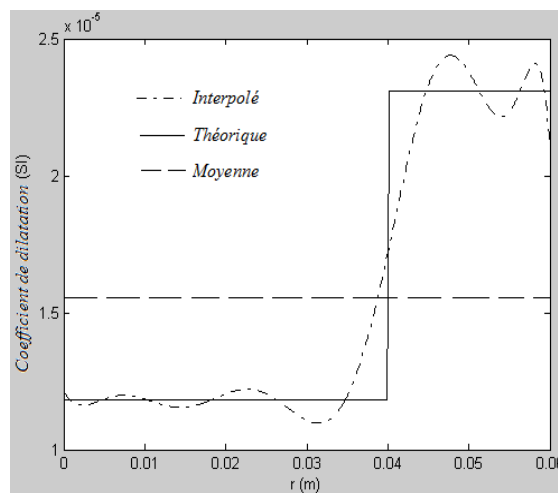
$$(3.42) \quad \phi(r) = \sum_{k=0}^n a_k r^k, \text{ avec } \phi = (\rho, c, \lambda, \alpha), \text{ n étant l'ordre de l'approximation.}$$

La Figure 3.9, la Figure 3.10 et la Figure 3.11 montrent les variations de  $\phi = (\rho, c, \lambda, \alpha)$  pour le cas d'un multi-matériau formé d'une couche en acier, d'épaisseur  $e_1=4$  cm et d'une couche d'aluminium d'épaisseur  $e_2=2$  cm, en utilisant une approximation polynômiale d'ordre 8.

**Figure 3.9 : Courbe d'interpolation de  $\rho$**



**Figure 3.10 : Courbes d'interpolation de C et  $\lambda$**



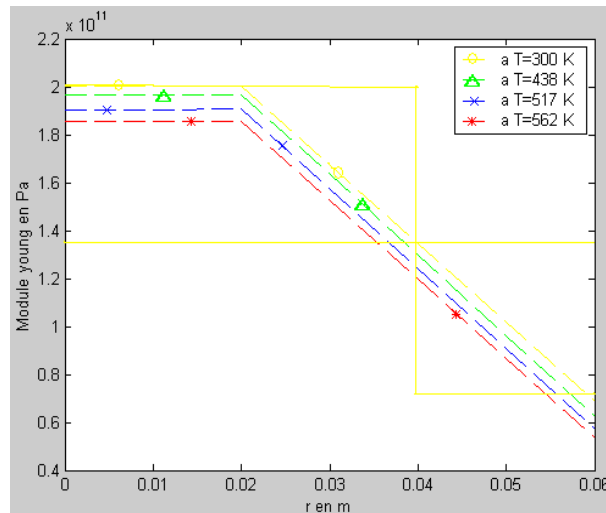
**Figure 3.11 : Courbe d'interpolation de  $\alpha$**

Pour les variations du module d'Young en fonction de la température, pour l'acier et l'aluminium, nous avons supposé les relations suivantes :

$$(3.43) \quad E_{ac}(T) = -0,2469086 T^2 + 157,6837 T + 175108,029$$

$$(3.44) \quad E_{al}(T) = -0,0990152 T^2 + 27,582 T + 69395,0859$$

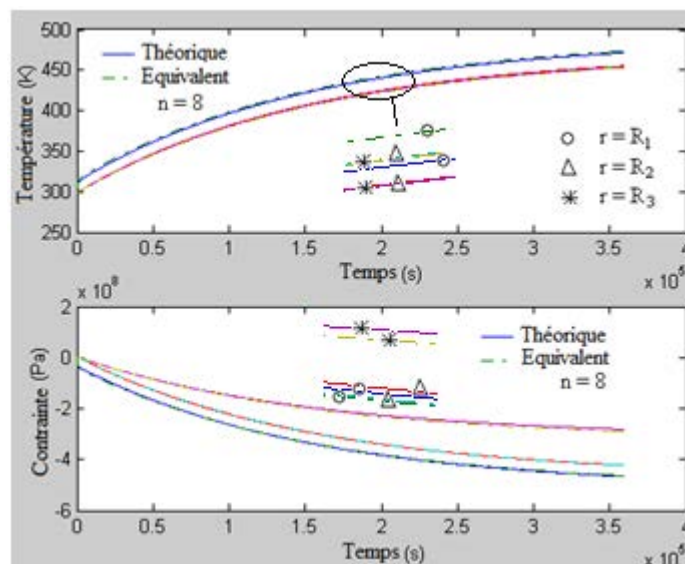
La Figure 3.12 montre une interpolation arithmétique du module d'Young dans le modèle à différentes températures.



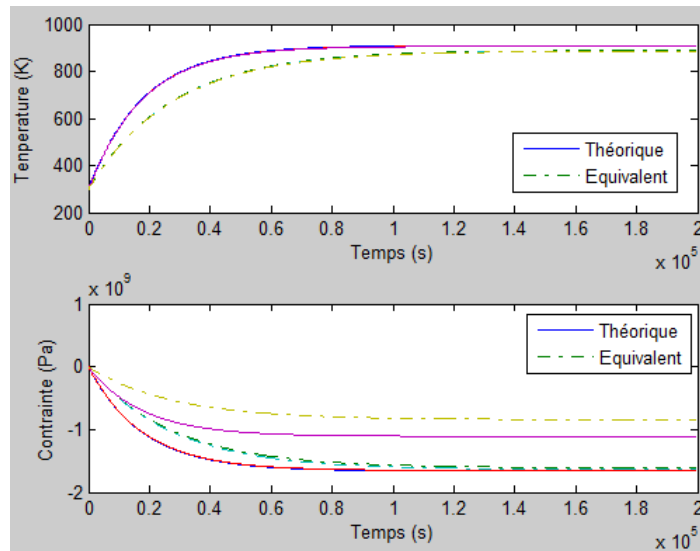
**Figure 3.12 : Courbe d'interpolation du module d'Young E.**

### 3.5.1 INFLUENCE DE LA GEOMETRIE

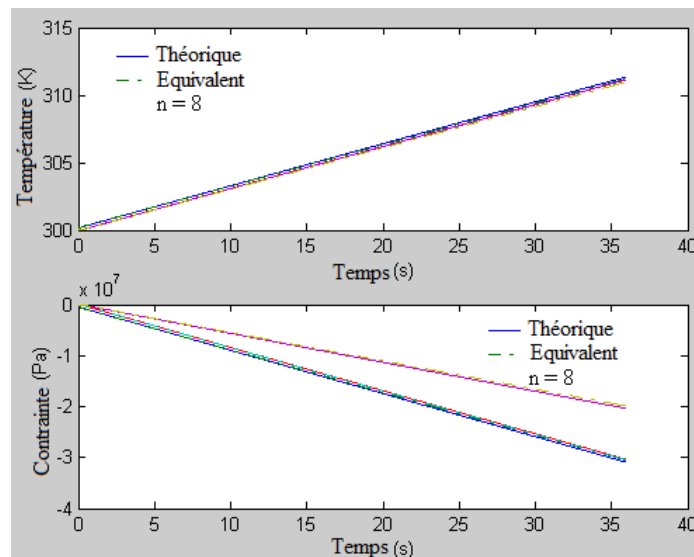
Dans cette section, nous avons supposé que le corps étudié est soumis à un flux de chaleur constant de  $5000 \text{ W/m}^2$  à l'intérieur du cylindre et nous avons fait varier l'épaisseur totale de  $e=600 \text{ mm}$ ,  $120 \text{ mm}$ ,  $60 \text{ mm}$ ,  $12 \text{ mm}$  à  $6 \text{ mm}$  avec un rapport des épaisseurs des deux matériaux (acier et aluminium) égale à  $e_1/e_2=2$ . Les autres paramètres du système sont ceux définis dans le Tableau 3.1 et le Tableau 3.2 Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 3.13, la Figure 3.14 et la Figure 3.15 pour un maillage = 12 tranches horizontale.



**Figure 3.13 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante  
e=600 mm, n=8**



**Figure 3.14 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante,  $e=60$  mm,  $n=4$**



**Figure 3.15 : Comparaison des températures et des contraintes sous une charge constante,  $e=6$  mm,  $n=8$ .**

La Figure 3.16 et la Figure 3.17 représentent respectivement l'erreur relative sur les températures et les contraintes, obtenue entre le modèle réel et équivalent, pour différentes valeurs du degré d'interpolation et avec un maillage fixé à 12 pas. On remarque sur ces courbes que les erreurs relatives sur les températures et les contraintes augmentent avec l'épaisseur des deux matériaux. On peut dire donc que, pour un maillage fixe, l'approche d'équivalence devient moins correcte avec l'augmentation de l'épaisseur. Ce qui est logique et attendu.

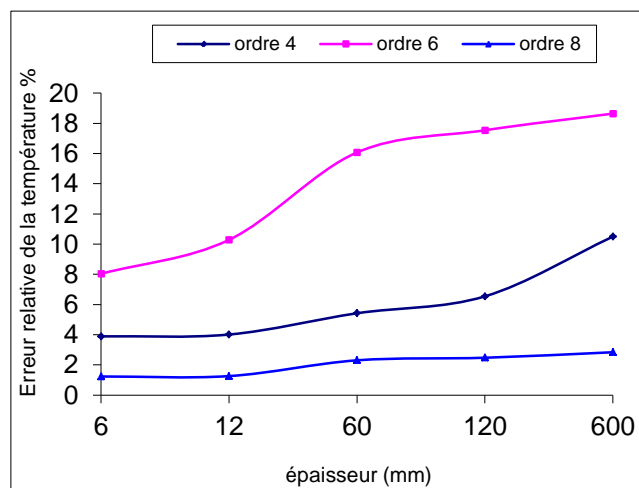
De plus, nous pouvons remarquer, dans la Figure 3.16 et la Figure 3.17 que le degré 6 donne plus d'erreurs que le degré 4. Ce résultat apparaît illogique car on s'attend à des



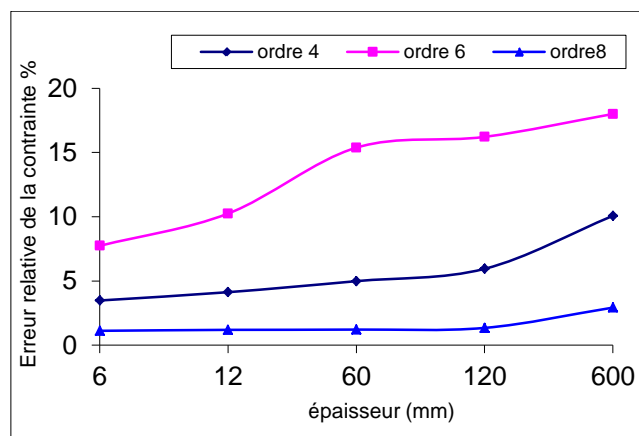
erreurs plus faibles quand on augmente le degré du polynôme d'interpolation. Ce problème peut être justifié et expliqué dans les figures allant de la Figure 3.18 à la Figure 3.21.

Les résultats sont présentés en fixant l'épaisseur et en variant le degré du polynôme d'interpolation et le maillage. La Figure 3.18 et la Figure 3.19 montrent les erreurs sur la température et la contrainte pour une épaisseur égale à 60 mm et sur la Figure 3.20 et la Figure 3.21 pour une épaisseur égale à 600 mm. Nous observons que les maillages faibles introduisent des erreurs en désordre, qui sont parfois faibles et d'autres fois élevées. En augmentant le maillage, les erreurs diminuent graduellement avec l'augmentation du degré du polynôme d'interpolation.

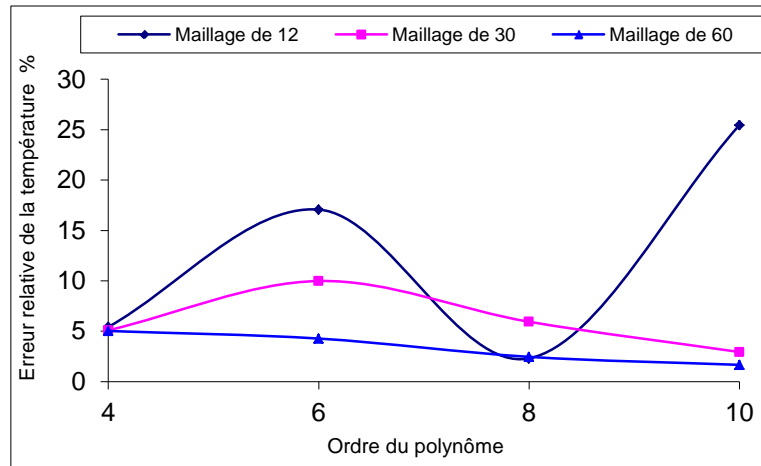
De plus, nous pouvons également conclure que les grandes épaisseurs (Figure 3.20 et Figure 3.21) nécessitent des maillages élevées pour obtenir une bonne équivalence (erreurs faibles). Pour une épaisseur de 60 mm, un maillage de 60 est suffisant pour obtenir des erreurs faibles et qui diminuent normalement quand on augmente le degré du polynôme d'interpolation. Pour 600 mm, un maillage de 60 nœuds est insuffisant, pour obtenir des résultats satisfaisants il faut utiliser un maillage à 120 pas.



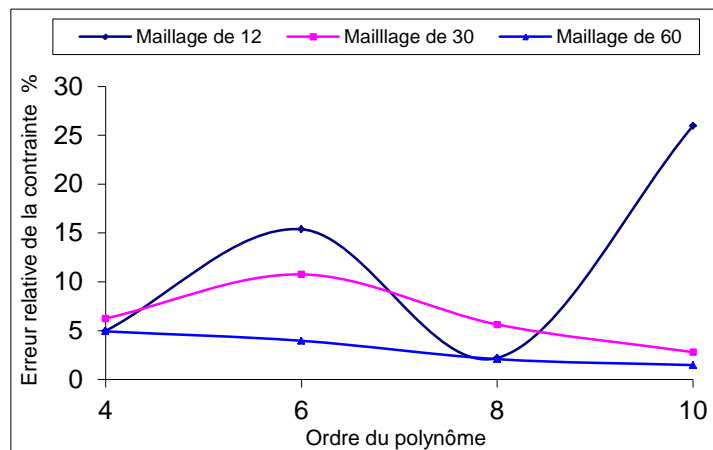
**Figure 3.16 : Variation de l'erreur relative sur la température avec l'épaisseur pour différents degrés du polynôme d'interpolation.**



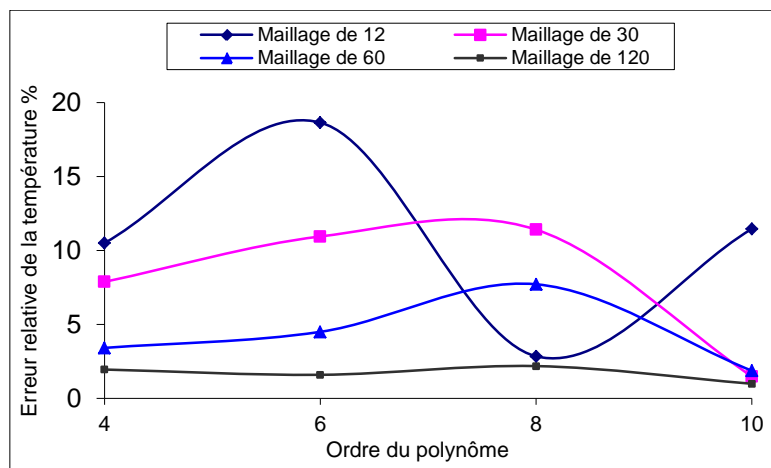
**Figure 3.17 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec l'épaisseur pour différents degrés du polynôme d'interpolation.**



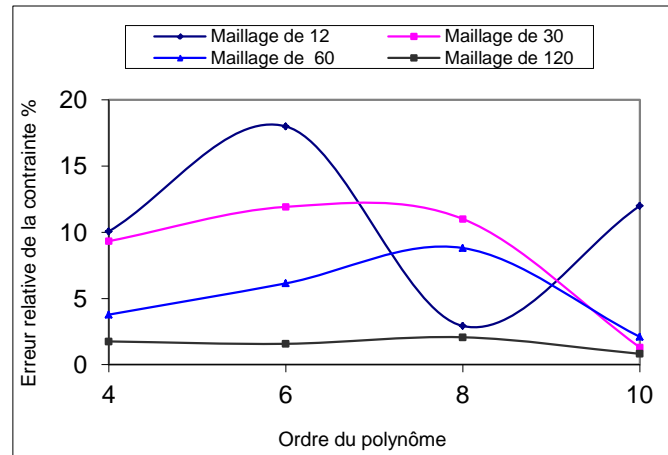
**Figure 3.18 : Variation de l'erreur relative sur la température avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages,  $e=60$  mm.**



**Figure 3.19 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages,  $e=60$  mm.**



**Figure 3.20 : Variation de l'erreur relative sur la température avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages,  $e=600$  mm.**



**Figure 3.21 : Variation de l'erreur relative sur la contrainte avec le degré du polynôme d'interpolation pour différents maillages,  $e=600$  mm.**

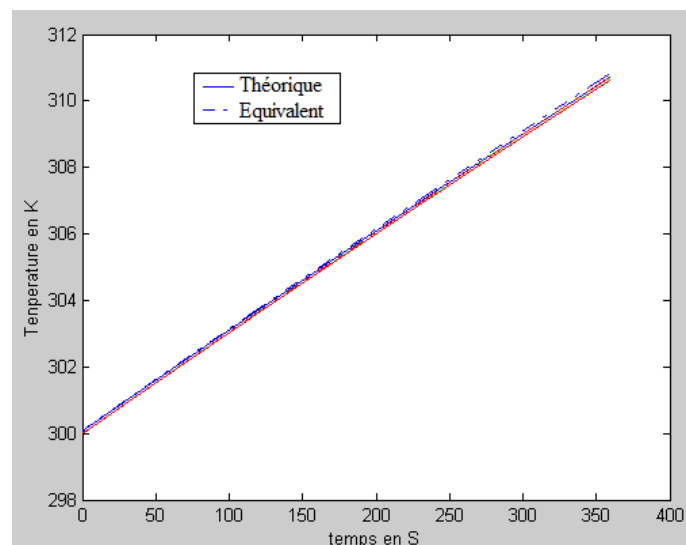
Pour conclure, nous pouvons dire que selon l'épaisseur totale des matériaux constituant le matériau bicouche, un choix adéquat du maillage et du degré du polynôme d'interpolation est nécessaire pour obtenir le matériau équivalent le plus représentatif. Pour les grandes épaisseurs, un maillage et un degré d'interpolation élevés sont nécessaires.

### 3.5.2 INFLUENCE DE LA DENSITE DU FLUX

#### 3.5.2.1 FLUX DE CHALEUR CONSTANT

Dans cette section, nous appliquons, d'abord, un flux de chaleur constant  $Q$  ( $1000 \text{ W/m}^2$ ,  $5000 \text{ W/m}^2$  et  $10000 \text{ W/m}^2$ ). Le second cas ( $Q=5000 \text{ W/m}^2$ ) est déjà étudié dans la sous-section 3.5.1. Les conditions aux limites imposées et les propriétés géométriques sont spécifiées lors de la description du modèle. L'épaisseur du corps est fixée à  $e=2$  mm.

La Figure 3.22 et la Figure 3.23 montrent que le modèle équivalent utilisé n'a pas été influencé par la variation de l'intensité du flux de chaleur appliqué.



**Figure 3.22 : Comparaison des températures,  $Q=1000 \text{ W/m}^2$**

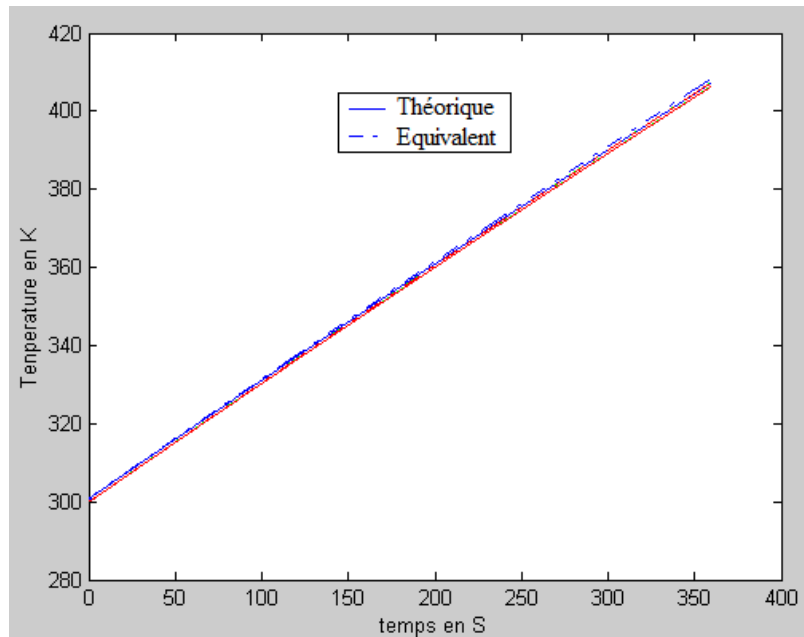


Figure 3.23 : Comparaison des températures,  $Q=10000 \text{ W/m}^2$

### 3.5.2.2 FLUX DE CHALEUR VARIABLE

Il s'agit d'un flux de forme parabolique selon la variable  $z$  et sinusoïdal au cours du temps :

$$(3.45) \quad Q(z,t) = 4Q_0 Z(1-Z)(1 + \sin(\omega t)), \quad Z = z/L, \quad Q_0 = 5000 \text{ W/m}^2, \quad \omega = \pi/20 \text{ rd/s}$$

Pour ce type de flux variable, la Figure 3.24 montre aussi un bon accord entre le modèle bicouche (théorique) et le modèle équivalent proposé.

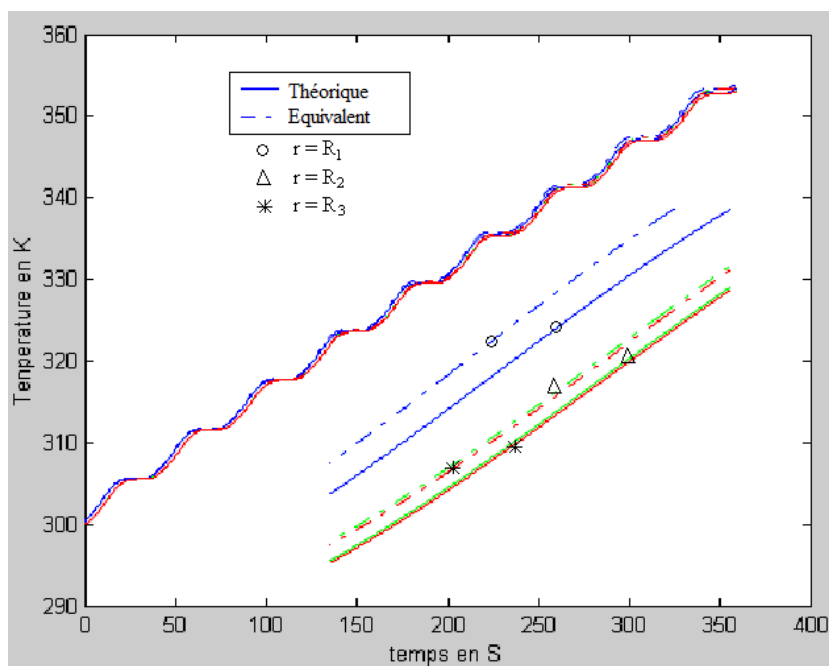
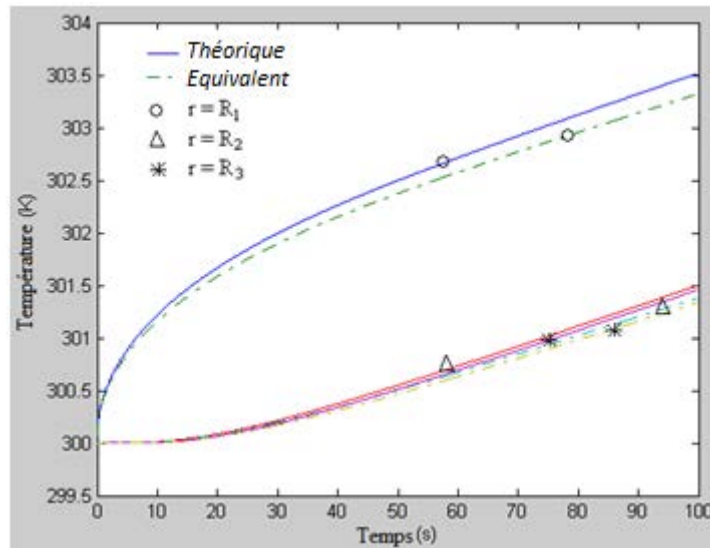


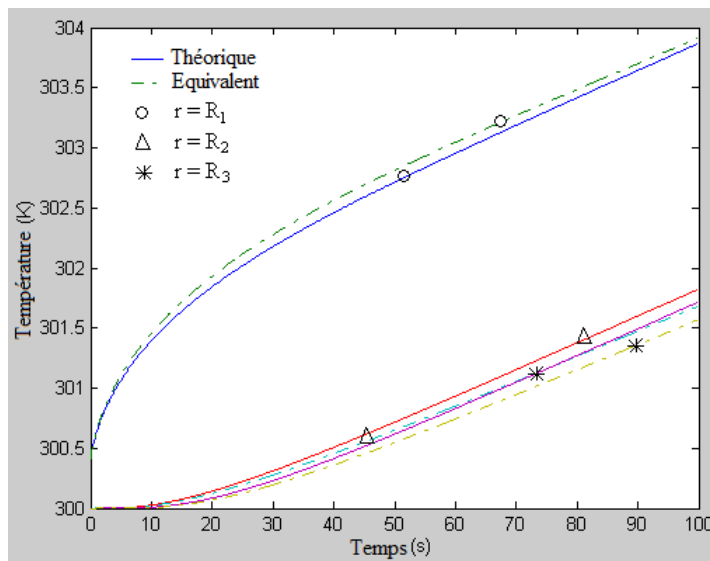
Figure 3.24 : Comparaison des températures, flux variable,  $e=12 \text{ mm}$

### 3.5.3 INFLUENCE DES PROPRIETES DES MATERIAUX

Trois couples de matériaux (acier, aluminium), (acier, cuivre) et (acier, laiton) ont été testés avec un flux de chaleur constant.



**Figure 3.25 : Comparaison des températures, cas (acier, cuivre),  $n = 8$ .**

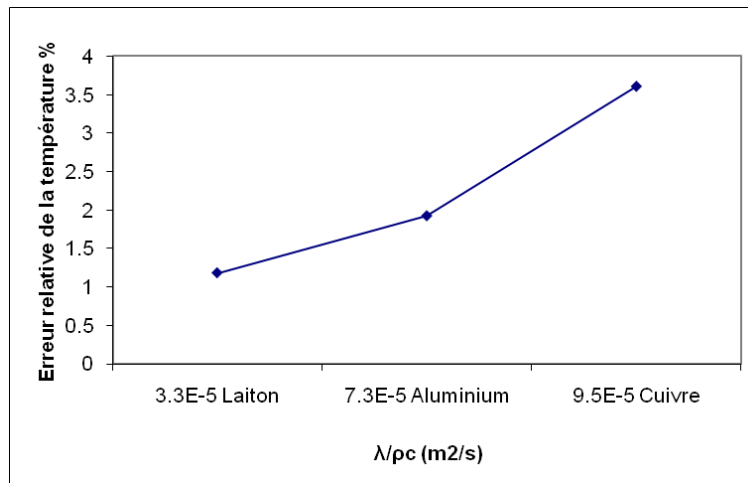


**Figure 3.26 : Comparaison des températures : cas (acier, laiton),  $n=8$ .**

Lors de l'application de la méthode de recherche de milieu équivalent, nous avons trouvé qu'il est nécessaire de changer le degré du polynôme d'interpolation  $n$  pour chaque couple de matériaux dans le but d'atteindre une bonne équivalence. L'utilisation d'une interpolation polynomiale de degré fixe pour tous les couples de matériaux n'est pas adéquate. Les résultats sont très sensibles à la différence entre les propriétés physiques des matériaux utilisés.

La Figure 3.27 montre l'erreur relative sur la température quand on utilise différents matériaux en association avec l'acier. Cette figure est présentée pour montrer la relation

entre les propriétés physiques de ces matériaux ( $\rho$ ,  $c$  et  $\lambda$ ) et la variation de l'erreur. On peut bien voir que quand  $\lambda$  augmente, l'erreur relative sur la température augmente.



**Figure 3.27 : Erreur relative sur la température pour les trois cas étudiés.**

#### 3.5.4 INFLUENCE DE LA VARIATION DU MODULE D'YOUNG

Dans cette section, nous effectuons une comparaison des contraintes obtenues avec le modèle bicouche et le modèle équivalent sous une charge constante. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.28 en supposant un module d'Young constant et sur la Figure 3.29 en supposant un module d'Young variable en fonction de  $T$ .

Ces courbes montrent que l'utilisation d'un module d'Young variable augmente l'écart entre les deux modèles mais reste relativement faible. A titre d'exemple, dans la Figure 3.28 et la Figure 3.29, les erreurs relatives sur la contrainte sont respectivement de l'ordre de 2.5825 %, et 4.013 %. Ceci résulte de l'accumulation des erreurs d'interpolation du module d'Young  $E$  en fonction de l'espace et de la température.

La Figure 3.29 montre l'effet de la variation du module d'Young avec la température sur les contraintes. Il est bien clair que l'augmentation de la température dans le corps augmente la différence entre les contraintes théoriques ( $E$  constant) et les contraintes corrigées ( $E$  fonction de  $T$ ). En effet, quand la température augmente, le module d'Young diminue dans les deux matériaux, et par conséquent, la résistance du corps diminue aussi.

L'équivalence entre les deux modèles est donc valide même pour le cas de modules d'Young variables en fonction de la température.

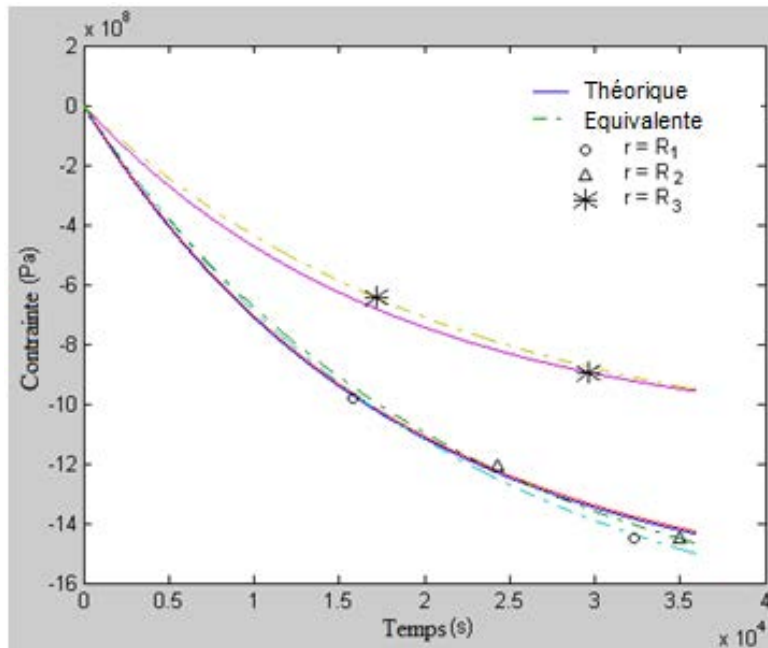


Figure 3.28 : Comparaison des contraintes,  $Q=5000 \text{ W/m}^2$ ,  $e=60 \text{ mm}$ , module d'Young constant.

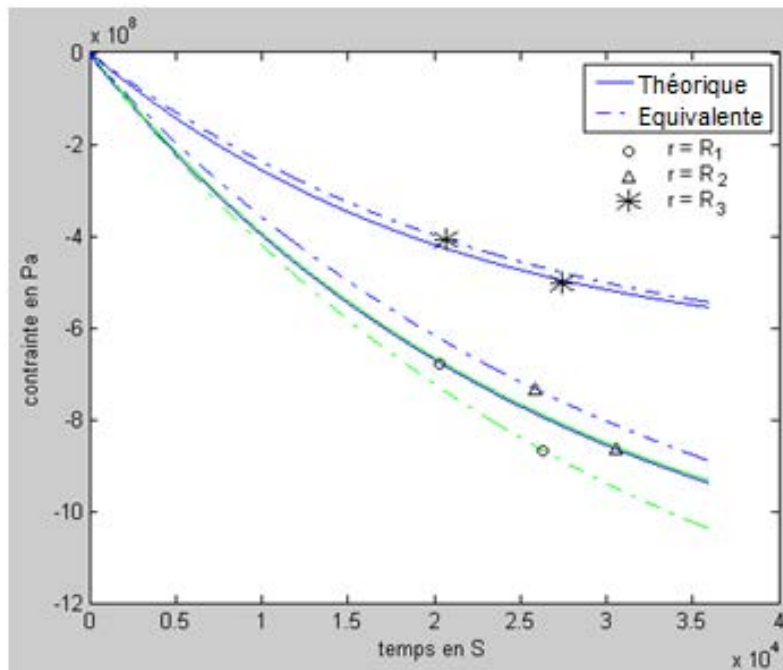
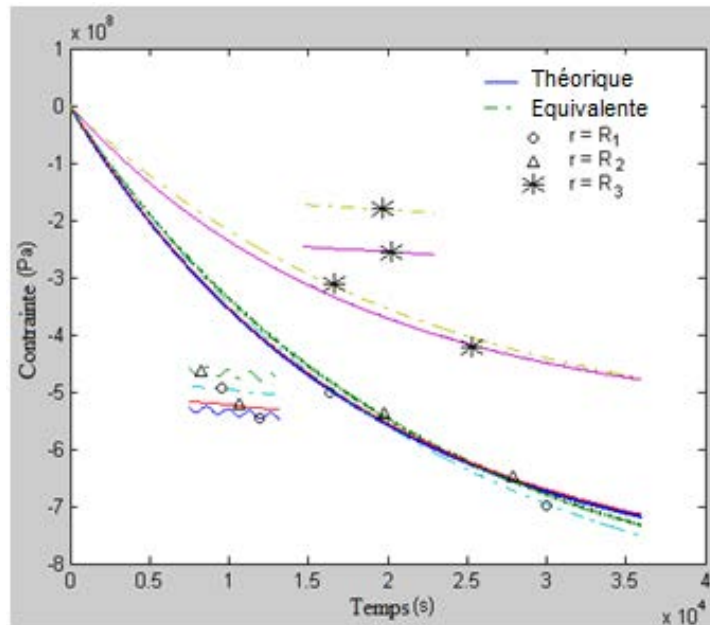
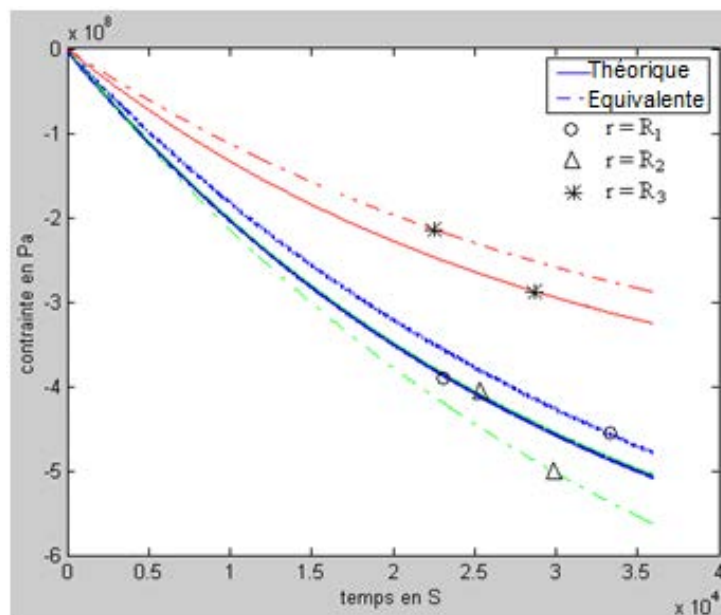


Figure 3.29 : Comparaison des contraintes,  $Q=5000 \text{ W/m}^2$ ,  $e=60 \text{ mm}$ , module d'Young variable.



**Figure 3.30 : Comparaison des contraintes obtenues avec module d'Young constant et un flux variable**



**Figure 3.31 : Comparaison des contraintes obtenues avec module d'Young variable  $E(T)$  et un flux variable.**

Avec un flux de chaleur variable, nous avons obtenu des résultats similaires au cas d'un flux constant, soit une erreur relative de l'ordre de 2,5826 pour  $E$  constant, Figure 3.30 et de l'ordre de 4,1275 pour  $E$  variable, Figure 3.31. Ainsi, nous pouvons conclure que le modèle équivalent proposé reste valide dans le cadre des hypothèses et des conditions analysées précédemment.



### 3.6 CONCLUSION

Le concept de modèle équivalent des multi-matériaux est nécessaire pour l'analyse des comportements thermomécaniques des systèmes et de leur endommagement puisque la plupart des modèles d'endommagement existants dans la littérature sont basés sur le concept de milieux équivalents.

Dans ce chapitre, nous avons étudié et proposé une méthode de recherche de milieu équivalent et nous avons montré son domaine de validité. Ceci a été démontré en se basant sur des critères thermiques et mécaniques donnés. Nous avons montré que l'épaisseur des matériaux bicouches étudiés et leur nature ont une influence directe sur la technique d'interpolation utilisée. Il est donc nécessaire d'ajuster correctement le degré du polynôme d'interpolation en fonction des différentes propriétés du matériau et de leurs variations ou non en fonction de la température.

Le but essentiel de cette étude est de pouvoir appliquer les modèles d'endommagement dans le multi-matériau à travers son milieu équivalent, c'est l'objet du Chapitre 4.



# CHAPITRE 4 ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT SOUS CHARGEMENT THERMO-ELASTIQUE

## 4.1 INTRODUCTION

Les problèmes de couplages thermomécaniques affectent de nombreux systèmes énergétiques comme les réacteurs dans les centrales nucléaires, les moteurs dans le domaine de l'automobile, l'aviation, l'aérospatiale ou la marine, les turbines à gaz dans le domaine du chemin de fer et dans tout système mécanique mettant un ou plusieurs modes simultanés de transfert de chaleur. La nature constante ou variable des sollicitations thermiques conditionne en grande partie le comportement thermomécanique de ces systèmes et par suite leur endommagement et enfin leur fatigue. Ces variations peuvent être de nature brusque, c'est le cas de la multiplication des démarrages et des arrêts de nombreux systèmes ou périodique rapide, c'est le cas de moteurs à piston, ou lente, c'est le cas de systèmes exposés aux variations journalières ou saisonnières de la température.

L'endommagement sous chargement mécaniques a fait l'objet bien entendu de nombreux travaux aussi bien numérique qu'expérimentaux [38],[39],[40],[41],[42],[43],[44]. Le couplage avec les effets thermiques a été également largement exploité mais en se plaçant dans le cadre de systèmes isothermes [45] et [46]; hypothèse qui néglige le comportement du système d'un point de vue local et également d'un point de vue transitoire. Ces approches sous estiment de manière générale le comportement thermo-élastique local de ces matériaux et par suite leur comportement en cas de fatigue [47].

D'autres études prennent en considération le régime transitoire global d'un chargement thermique variable appliqué au système. On peut retenir le travail expérimental réalisé dans [48] dans lequel la recherche d'un modèle d'endommagement correct s'avérait difficile à trouver. Si de nombreuses lois d'endommagement existent dans la littérature pour modéliser le comportement en fatigue mécanique des matériaux, en revanche, on trouve peu de lois sur l'endommagement des matériaux en présence de thermique et encore très peu sur les systèmes composites.

L'endommagement n'est pas limité au régime plastique uniquement, il peut se produire également dans le régime élastique. Selon [41], nous pouvons distinguer deux formes d'endommagement:

- Le premier se produit quand la déformation est élastique ou quasi-élastique. Dans ce cas, nous avons un nombre de cycles de rupture allant approximativement de  $10^4$  à  $10^9$  et parfois un nombre supérieur en fonction du domaine d'application et de la nature des matériaux utilisés. La contrainte étant toujours inférieure à la limite élastique dans ce cas.

- Le second apparait quand la déformation est plastique, c.à.d. quand la contrainte est supérieure à la limite élastique, et la structure est soumise à un chargement thermique très

fort. Dans ce cas, la fatigue commence à apparaître vers un nombre de cycles faible correspondant à celui de la rupture, inférieur à  $10^4$ .

Dans ce chapitre, nous sommes intéressés à l'étude de l'effet de chargements thermomécaniques variables sur différents matériaux en régime élastique. Le cas du régime élasto-plastique fera l'objet du Chapitre 5.

Pour la loi d'endommagement, nous utilisons celle de Woehler Miner qui se justifie par le fait que les contraintes sur le modèle sont unidirectionnelles selon  $x$  pour le cas cartésien ou selon  $r$  pour le cas cylindrique et résultent uniquement des charges thermiques. Enfin, la connaissance des paramètres relatifs à cette loi, disponibles dans la littérature, facilite son utilisation.

## 4.2 MATERIAUX UNIQUES

Nous commençons d'abord l'étude de l'endommagement sur des matériaux simples avant de passer aux cas des multi-matériaux.

### 4.2.1 PRESENTATION DU PROBLEME

Le système étudié est présenté dans le Chapitre 3 et ses propriétés physiques et géométriques sont rappelées dans le Tableau 4.1. Dans cette partie, nous allons travailler d'abord sur l'acier puis sur l'aluminium. Rappelons que pour des raisons de symétrie, l'étude sera conduite dans le plan  $(r, z)$  comme indiqué sur la Figure 4.1.

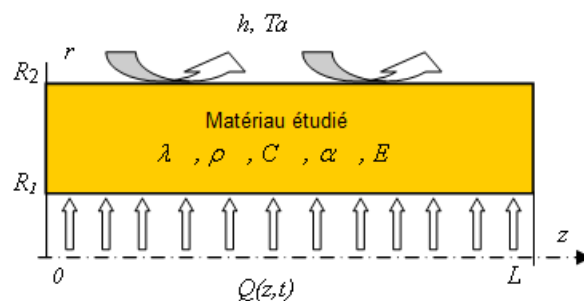


Figure 4.1: Le corps étudié

	Acier	Aluminium
$\rho$ : densité, $\text{kg/m}^3$	7854	2770
$C$ : capacité calorifique, $\text{J}/(\text{Kg.K})$	434	875
$\lambda$ : conductivité thermique, $\text{W}/(\text{m.K})$	60.5	177
$L$ : longueur m	0.6	0.6
$e$ : épaisseur m	0.06	0.06

Tableau 4.1: Spécifications physiques des matériaux [2] [49]

## 4.2.2 FORMULATION THERMIQUE

Compte tenu des hypothèses décrites dans le Chapitre 3, l'équation de bilan thermique prenant en compte le couplage thermomécanique, [41],[45],[46] :

$$(4.1) \quad \rho C \dot{T} = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) + \sigma : \dot{\varepsilon}^p - A_k \dot{V}_k + r + T \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial A_k}{\partial T} \dot{V}_k \right]$$

devient :

$$(4.2) \quad (\rho c) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} : \dot{\varepsilon}^e$$

Avec les conditions aux limites et initiales décrites précédemment :

$$(4.3) \quad -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r} = \phi(z, t) \quad r = R_1$$

$$(4.4) \quad -\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial r} = h(T(r, z, t) - T_f) \quad r = R_2$$

$$(4.5) \quad -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \quad \forall r$$

## 4.2.3 METHODES DE RESOLUTION

### 4.2.3.1 SOLUTION ANALYTIQUE

L'équilibre mécanique formulé en termes de déplacements s'écrit :

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est obtenue d'après Navier, Goodier et Boussinesq par le potentiel de déplacement  $\phi$  et les fonctions harmoniques  $\varphi, \psi$  [27].

La résolution de ces équations dans les conditions de notre étude est montrée en détails en annexe. La solution prend alors la forme suivante :

$$(4.7) \quad u_r(r, z) = ABw \cos(wz) (I_1(wr) - C_1 K_1(wr)) - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial r}$$

$$(4.8) \quad u_z(r, z) = ABw \sin(wz) (I_0(wr) - C_1 K_0(wr)) - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial z}$$

Avec :

$$(4.9) \quad C_1 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_1) - I(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} K(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) - K(w_n R_1)}$$

$$(4.10) \quad \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) = \frac{\int_0^L \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) \cos w_n z dz}{\int_0^L \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_2, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_2, z)}{\partial r^2} \right) \cos w_n z dz}$$

$$(4.11) \quad AB = \frac{2}{L} \frac{\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) \cos w_n z dz}{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_1) + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (I(w_n R_1) - I(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n)) K(w_n R_1)}{\sum_{n=0}^{\infty} K(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) - K(w_n R_1)}}$$

Pour  $i=1$  ou  $2$

$$I(w_n R_i) = w_n I_0(w_n R_i) - \frac{1}{R_i} I_1(w_n R_i)$$

$$K(w_n R_i) = w_n K_0(w_n R_i) - \frac{1}{R_i} K_1(w_n R_i)$$

$$\tau(r, z) = T(r, z) - T_0(r, z)$$

#### 4.2.3.2 RESOLUTION PAR DIFFERENCES FINIES DES DEFORMATIONS ET DES CONTRAINTES

L'équation (4.6) traduisant l'équilibre pour les déplacements peut s'écrire après développement :

$$(4.12) \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

qu'on peut réduire sous la forme :

$$(4.13) \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + K_2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + K_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} - K_1 \frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \left( K_2 \frac{\partial u_z}{\partial r} + K_3 \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + K_2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + K_3 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} - K_1 \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$(4.14) \quad r = R_1, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{zr} = 0$$

$$(4.15) \quad r = R_2, \sigma_{rr} = 0, \sigma_{zr} = 0$$

$$(4.16) \quad z = 0 \text{ et } z = L, U = W = 0$$

Où les coefficients  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  sont donnés par :

$$K_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha, \quad K_2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, \quad K_3 = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

Une discrétisation par différences finies de ces 2 équations et conditions aux limites associées conduit au système algébrique suivant :

$$(4.17) \quad \begin{aligned} & -4(2r^2\Delta z + r^2\Delta r^2 K_2 + \Delta r^2\Delta z)U_K + 2r\Delta z(2r + \Delta r)U_{K+N} + 2r\Delta z(2r - \Delta r)U_{K-N} \\ & + 2r^2\Delta r^2 K_2 U_{K+1} + 2r^2\Delta r^2 K_2 U_{K-1} = -r^2\Delta r K_3 W_{K+N+1} + r^2\Delta r K_3 W_{K+N-1} \\ & + r^2\Delta r K_3 W_{K-N+1} - r^2\Delta r K_3 W_{K-N-1} + 2r^2\Delta r\Delta z K_1 T_{K+N} - 2r^2\Delta r\Delta z K_1 T_{K-N} \\ & - 8r(\Delta r^2 + \Delta z^2 K_2)W_K + 2\Delta z^2 K_2(2r + \Delta r)W_{K+N} + 2\Delta z^2 K_2(2r - \Delta r)W_{K-N} \\ & + 4r\Delta r^2 W_{K+1} + 4r\Delta r^2 W_{K-1} = -r\Delta r\Delta z K_3 U_{K+N+1} + r\Delta r\Delta z K_3 U_{K+N-1} \\ & - 2\Delta r^2\Delta z K_3 U_{K+1} + 2\Delta r^2\Delta z K_3 U_{K-1} + r\Delta r\Delta z K_3 U_{K-N+1} - r\Delta r\Delta z K_3 U_{K-N-1} \\ & + 2r\Delta r^2\Delta z K_1 T_{K+1} - 2r\Delta r^2\Delta z K_1 T_{K-1} \end{aligned}$$

$$r = R_1, \quad \sigma_{rr} = 0 \Rightarrow$$

$$2(-(2\mu + \lambda)r + \lambda\Delta r)\Delta z U_k + 2r\Delta z(2\mu + \lambda)U_{K+N} = -\lambda r\Delta r W_{K-1} + \lambda r\Delta r W_{K-1} + 2r\Delta r\Delta z\beta(T_K - T_i)$$

$$r = R_1, \quad \sigma_{zr} = 0 \Rightarrow -2\Delta z W_K + 2\Delta z W_{K-N} = -\Delta r U_{k+1} + \Delta r U_{K-1}$$

$$r = R_2, \quad \sigma_{rr} = 0 \Rightarrow$$

$$2(-(2\mu + \lambda)r + \lambda\Delta r)\Delta z U_k + 2r\Delta z(2\mu + \lambda)U_{K+N} = -\lambda r\Delta r W_{K-1} + \lambda r\Delta r W_{K-1} + 2r\Delta r\Delta z\beta(T_K - T_i)$$

$$r = R_1, \quad \sigma_{zr} = 0 \Rightarrow -2\Delta z W_K + 2\Delta z W_{K-N} = -\Delta r U_{k+1} + \Delta r U_{K-1}$$

#### 4.2.3.3 RESOLUTION A L'AIDE DE LA RELATION CONTRAINTES-DEFORMATIONS

L'équation thermomécanique en régime élastique s'écrit en introduisant la déformation thermique dans la loi de comportement mécanique de Lamé [34] :

$$(4.19) \quad \sigma(r, z, t)_{ij} = E(T)_{ij}(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}(T(r, z, t) - T_0))$$

L'hypothèse d'isotropie de la contrainte unidirectionnelle (cylindre fixé en  $z=0$  et  $z=L$  selon la direction  $z$ ) et de la géométrie  $L/R \ll 45$  (pas de flexion), permet d'écrire (4.19) sous la forme :

$$(4.20) \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} - \alpha(T(t) - T_0) \\ \varepsilon_{zz} - \alpha(T(t) - T_0) \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix}$$

#### 4.2.4 MODELE D'ENDOMMAGEMENT : LOI DE WOHLER-MINER

La loi Wöhler-Miner [2] exprime la relation entre le nombre de cycles à la rupture  $N_F$ , la valeur de la contrainte maximale  $\sigma_M$  et la valeur moyenne  $\bar{\sigma}$ . Elle s'écrit :

$$(4.21) \frac{\delta D}{\delta N} = f(\sigma_M, \bar{\sigma}) = \frac{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \left( \frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B(\bar{\sigma})} \right)^\beta$$

Avec  $\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_{l_0}(1 - b\bar{\sigma})$  et  $B(\bar{\sigma}) = B_0(1 - b\bar{\sigma})$

L'intégration de cette loi suppose les conditions suivantes :

En  $N=0$   $D=0$  le matériau est supposé vierge

En  $N=N_F$   $D=1$  le matériau est supposé rompu

$N_F$  représente le nombre de cycles pour atteindre la rupture :

$$(4.22) N_F = \frac{\sigma_u - \sigma_M}{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})} \left( \frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B(\bar{\sigma})} \right)^{-\beta}$$

Cette loi concerne essentiellement la fatigue des matériaux sous sollicitations périodiques. Les courbes de Wöhler expriment les résultats d'essais de fatigue unidimensionnelle. Elle est donc adaptée à notre cas.

Les paramètres  $\sigma_u, \sigma_l, B_0, \beta$  sont présentés dans le Tableau 4.2 pour les deux matériaux étudiés :

Matériau	$\sigma_l$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$B_0$ (MPa)	$\beta$
Aluminium	150	412	932	6
Acier inoxydable	222	760	1213	5
Acier	360	2005	6320	3.3

**Tableau 4.2 : Coefficients de la loi d'endommagement de Wöhler-Miner [2]**

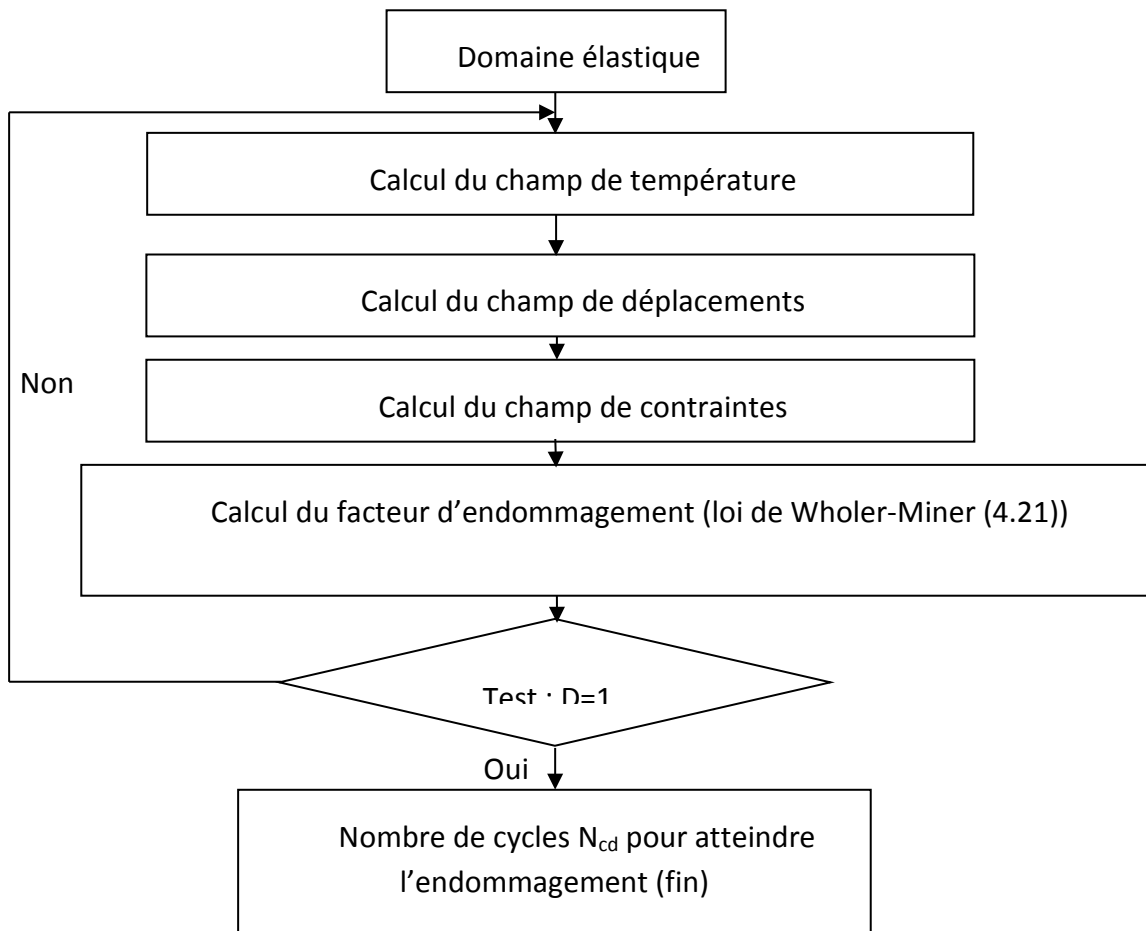
#### 4.2.5 METHODE NUMERIQUE

##### 4.2.5.1 ORGANIGRAMME

Les étapes de calcul par différences finies sont décrites dans l'organigramme ci-dessous ; Figure 4.2. Le champ de température, calculé à chaque instant, est introduit dans le problème mécanique pour obtenir le champ de déplacements. On calcule ensuite le champ



des contraintes résultant à partir de la loi de Lamé (4.20). Les contraintes maximales  $\sigma_M$  et moyennes  $\bar{\sigma}$  sont introduites dans la loi de Wöhler-Miner pour calculer l'endommagement  $D$  obtenu à cet instant. Ces étapes sont répétées jusqu'à que la valeur de  $D$  atteigne la valeur 1. L'état d'endommagement du matériau,  $D=1$ , sera alors défini par le nombre de périodes correspondant noté  $N_{cd}$ .



**Figure 4.2 : Organigramme de calcul.**

L'étude numérique est conduite dans les conditions citées dans le Tableau 4.1 et le Tableau 4.2 et avec les conditions aux limites suivantes :

Pour le problème thermique :

$$T_0 = 300 \text{ K} , T_a = 300 \text{ K} , h = 100 \text{ W}/(m^2.K)$$

Flux thermique variable :

$$(4.23) \quad Q(z, t) = \frac{4Q_0}{L^2} z(L-z) \left( 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \right), \quad Q_0 = 12000 \text{ W/m}^2, \quad \tau = 60 \text{ s}$$

Pour le problème mécanique :

$$V(z=0)=0, \quad V(z=L)=0, \quad U(z=0)=0, \quad U(z=L)=0,$$

$$U = V = \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \text{à } t=0.$$

#### 4.2.5.2 VERIFICATION

Jaskea et al, dans [45], ont effectué un ensemble de tests expérimentaux de traction en utilisant l'aluminite ferrique FeAl sous le régime thermique stationnaire. Les résultats obtenus dans leurs expérimentations sont présentés dans la Figure 4.3 qui montre l'effet de la température sur la fatigue et la résistance de déformation cyclique d'un matériau soumis à des contraintes. Dans cette figure, on peut voir une fatigue moyenne aux alentours de  $10^4$  à  $10^5$  cycles à la rupture pour des températures égales à 400, 600 et 750 °C.

Pour pouvoir faire une comparaison avec ces travaux, nous avons appliqué des sollicitations thermiques conduisant aux mêmes conditions de contraintes utilisées dans les tests expérimentaux [45]. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure 4.8 et la Figure 4.9.

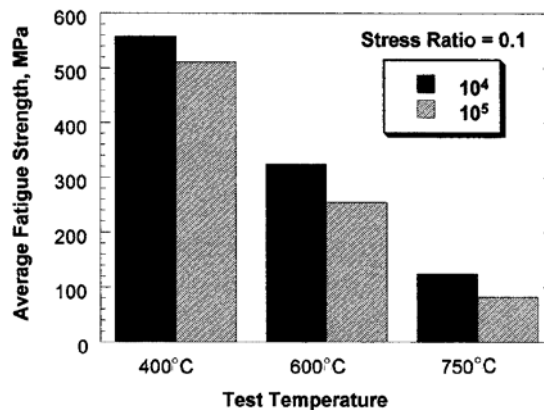


Figure 4.3 : Effet de la température sur la fatigue du FeAl [45].

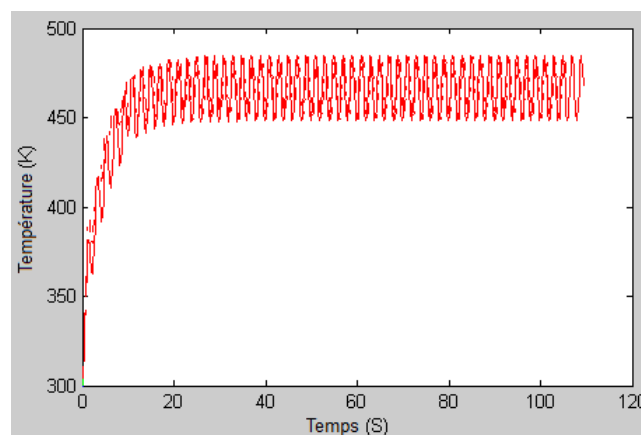


Figure 4.4: Evolution de la température à  $\bar{\sigma} = 500 \text{ MPa}$

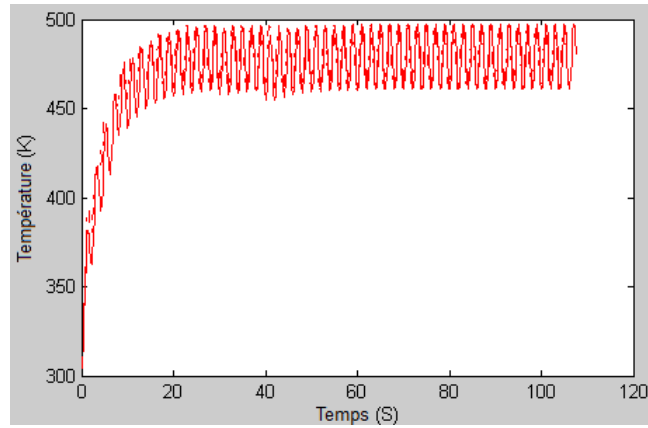


Figure 4.5 : Evolution de la température à  $\bar{\sigma} = 550$  MPa

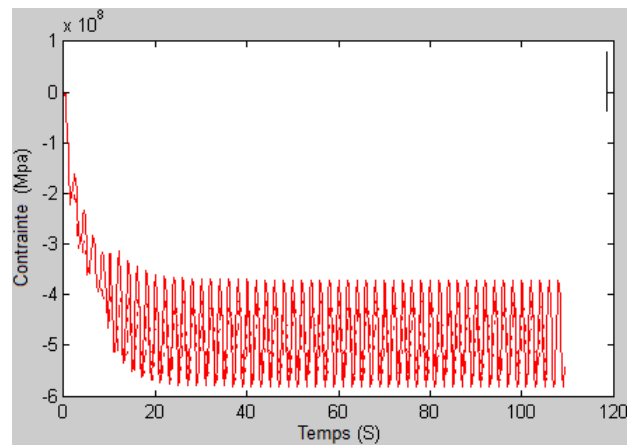


Figure 4.6 : Evolution de la contrainte à  $\bar{\sigma} = 500$  MPa

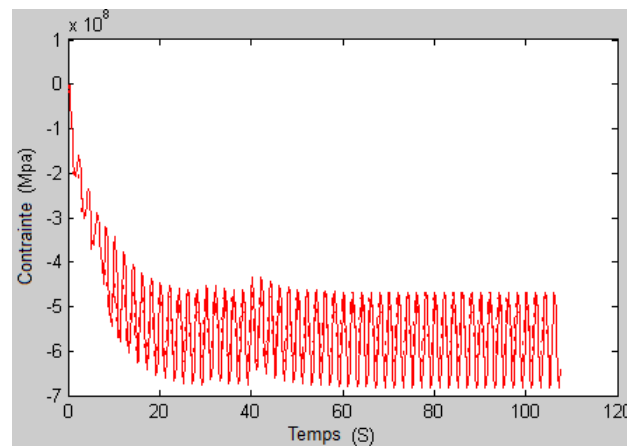
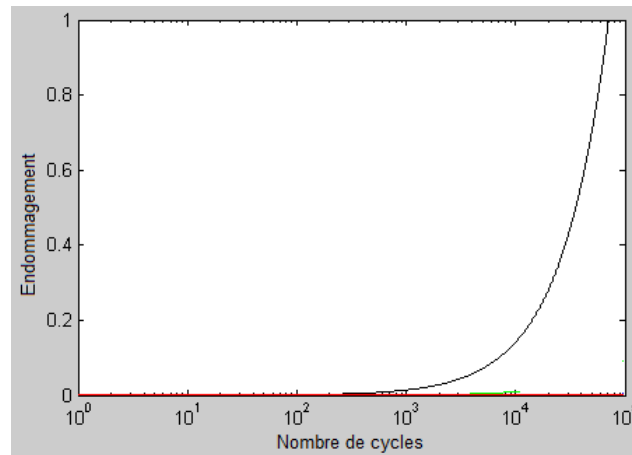
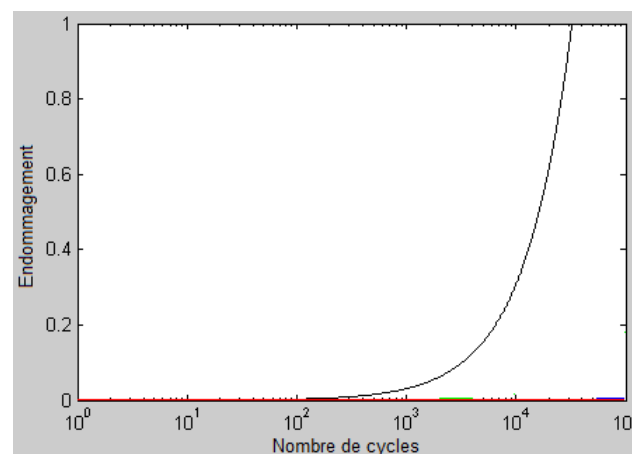


Figure 4.7 : Evolution de la contrainte à  $\bar{\sigma} = 550$  MPa



**Figure 4.8 : Endommagement en fonction du nombre de cycles à  $\bar{\sigma} = 500$  MPa**



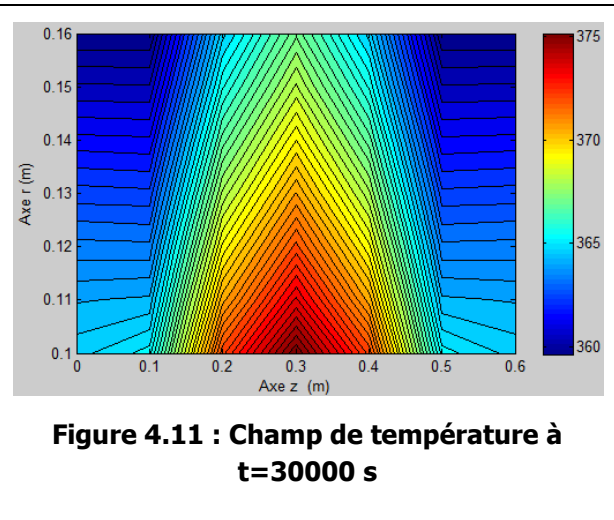
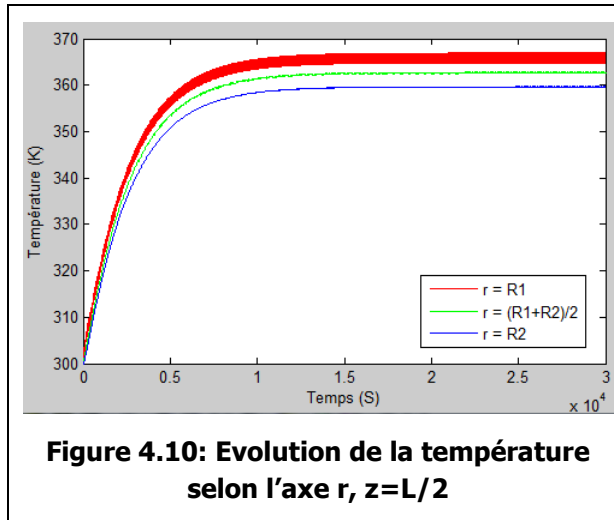
**Figure 4.9 : Endommagement en fonction du nombre de cycles à  $\bar{\sigma} = 550$  MPa**

La comparaison de ces résultats avec ceux de la réf. [45], montre que le nombre de cycles à l'endommagement obtenu numériquement est bien situé dans l'intervalle des valeurs expérimentales. Le modèle d'endommagement utilisé permet donc d'estimer correctement la durée de vie d'un matériau sous sollicitations thermiques périodiques.

#### 4.2.5.3 RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

##### 4.2.5.3.1 CAS DE L'ACIER

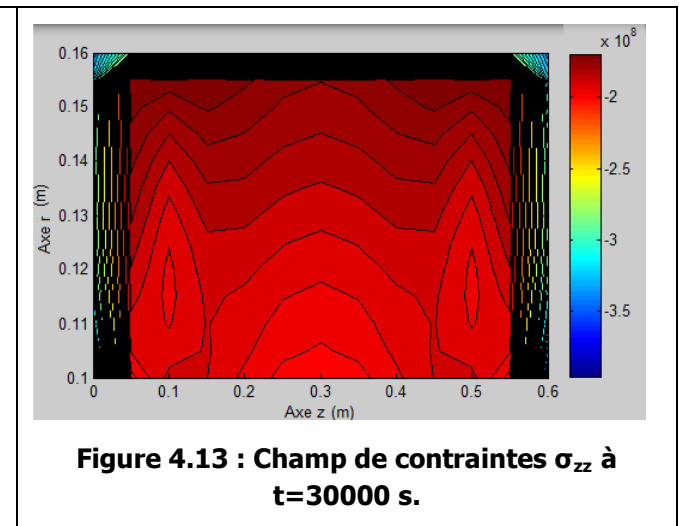
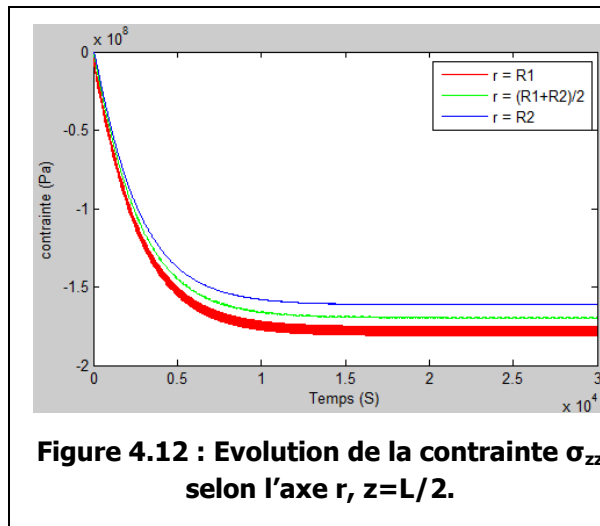
D'après les conditions citées dans le paragraphe 4.2.5.1, l'évolution de la température en  $r=R_1$ ,  $r=(R_1+R_2)/2$  et  $r=R_2$ , à  $z=L/2$  et le champ de températures en régime stationnaire sont présentées respectivement sur la Figure 4.10 et sur la Figure 4.11. La nature du flux imposé en surface interne et les sources de chaleur résultant de la déformation élastique expliquent les évolutions et les distributions de températures observées. Le maximum de la température correspond au maximum du flux thermique.

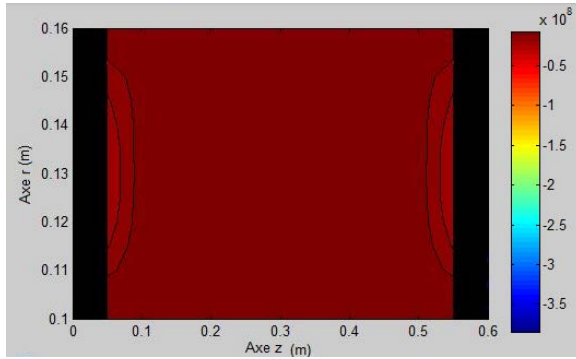


L'évolution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  aux mêmes positions et sa distribution à  $t=30000$  s (régime stationnaire), présentées respectivement sur la Figure 4.12 et la Figure 4.13, montrent que la distribution des contraintes est conforme avec la propagation du flux dans le matériau à l'exception de ses extrémités qui sont fixées d'un point de vue mécanique.

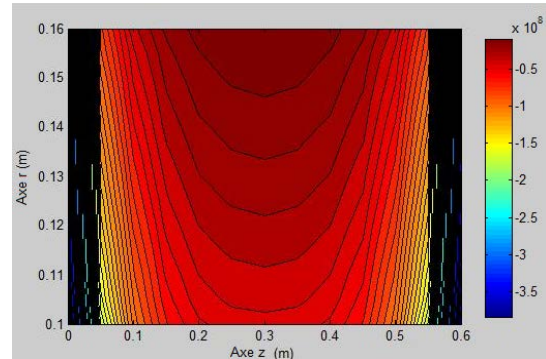
Les champs des autres contraintes ( $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{rz}$ ) et de Von-Mises (4.24), qui sont nécessaires au calcul de l'endommagement, sont représentés respectivement sur la Figure 4.14, la Figure 4.15, la Figure 4.16 et la Figure 4.17.

$$(4.24) \quad \sigma_M^2 = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2) \right]$$

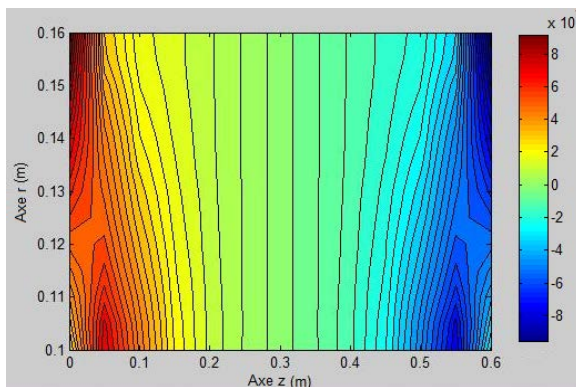




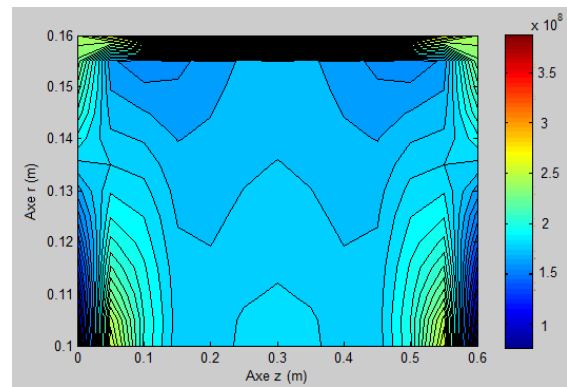
**Figure 4.14 : Champ de contraintes  $\sigma_{rr}$   
t=30000 s.**



**Figure 4.15 : Champ de contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$   
t=30000 s.**



**Figure 4.16 : Champ de contraintes  $\sigma_{rz}$   
t=30000 s**

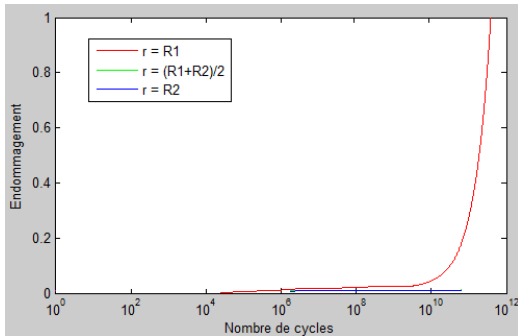


**Figure 4.17 : Champ de contraintes de Von Mises  $\sigma_M$ , t=30000 s**

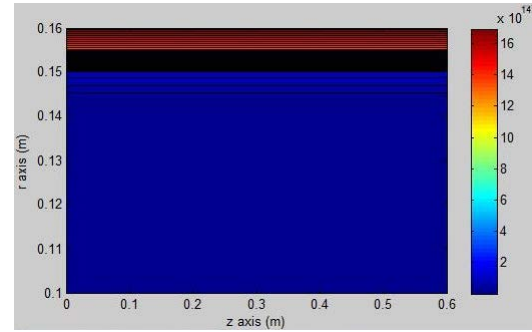
La Figure 4.14 montre que la contrainte radiale  $\sigma_{rr}$  est presque nulle, seules quelques faibles variations apparaissent au niveau des extrémités fixes et au milieu du corps étudié.

La contrainte  $\sigma_{\theta\theta}$ , Figure 4.15, passe de la valeur 0 à l'extérieur jusqu'à  $-2 \text{ MPa}$  à l'intérieur là où le flux thermique est appliqué. La forme du champ de contrainte présente une symétrie par rapport à l'axe  $r=0.13 \text{ m}$ , similaire à celle du flux thermique imposé, alors que la contrainte  $\sigma_{rz}$ , Figure 4.16, présente une symétrie par rapport à l'axe  $z=0.3 \text{ m}$ . Celle-ci est nulle au milieu du matériau et maximale en valeur absolue, au niveau de ses deux extrémités fixes.

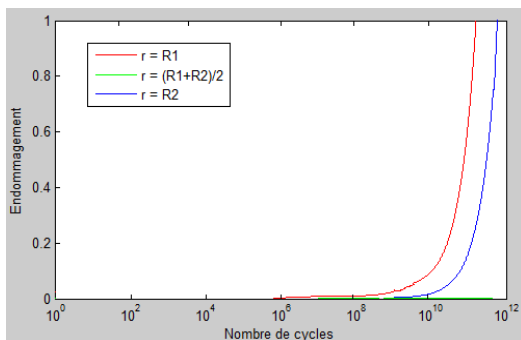
Enfin la contrainte de Von Mises, Figure 4.17 exprime toutes les contraintes appliquées sur le matériau en chaque point. Les valeurs et la forme du champ de cette contrainte sont presque similaires à celles de la contrainte  $\sigma_{zz}$ . Ceci est logique car cette contrainte est la plus importante dans les conditions de notre étude. Ainsi, dans la suite du travail, nous nous intéresserons uniquement à cette contrainte  $\sigma_{zz}$ .



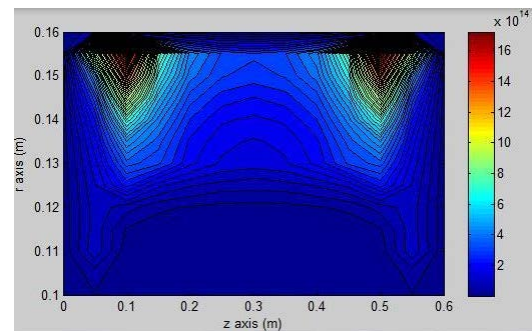
**Figure 4.18 : Endommagement en fonction du nombre de cycles basé sur le calcul global des contraintes  $\sigma_{zz}$ .**



**Figure 4.19 : Distribution du nombre de cycles à l'endommagement dans le plan (r, z) : calcul global des contraintes  $\sigma_{zz}$ .**



**Figure 4.20 : Endommagement en fonction du nombre de cycles basé sur le calcul des contraintes de Von-Mises,  $z=L/2$ .**



**Figure 4.21 : Distribution du nombre de cycles à l'endommagement dans le plan (r, z) : calcul des contraintes de Von-Mises.**

La Figure 4.18 et la Figure 4.19 montrent respectivement l'évolution et la distribution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles en se basant sur un calcul direct, pour chaque pas spatial  $\Delta r$ , des contraintes, équation (4.20), section 4.2.3.3. Sur la Figure 4.20 et la Figure 4.21 on présente les résultats obtenus en se basant sur les contraintes de Von-Mises. Ces résultats montrent, que pour l'analyse de l'endommagement, on peut se baser sur le calcul direct (présenté en section 4.2.3.3) des contraintes qui permet d'obtenir des résultats suffisants et rapides reflétant globalement le comportement thermomécanique du matériau étudié. C'est ce que nous avons utilisé pour la suite de nos calculs.

#### 4.2.5.3.2 CAS DE L'ALUMINIUM

Pour le matériau de l'Aluminium, nous avons appliqué les mêmes conditions de charges externes pour voir l'influence de ces contraintes sur celui-ci.

La Figure 4.22 et la Figure 4.23 représentent l'évolution de la température et de la contrainte sur l'aluminium. Le résultat de l'endommagement est montré sur la Figure 4.24.

On remarque que la température sur l'aluminium est proche de celle obtenue sur l'acier avec une différence de température faible entre les différents points de l'aluminium. Ceci justifie la bonne convection de l'aluminium. Alors que la contrainte sur l'aluminium (Figure

4.23) est faible par rapport à celle sur l'acier (Figure 4.12). En effet, le module d'élasticité ou la rigidité de l'aluminium est faible se traduit par une contrainte faible.

Puisque la contrainte sur l'aluminium est faible, le nombre de cycles pour atteindre l'endommagement est grand (Figure 4.24), et reste supérieur à celui obtenu dans le cas de l'acier.

Dans la section 4.3, nous appliquerons cette étude de couplage thermomécanique et d'endommagement sur un matériau bicouche.

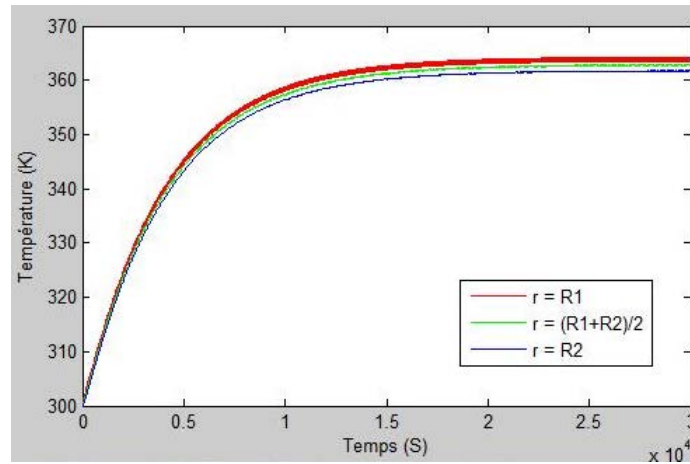


Figure 4.22: Evolution de la température selon l'axe  $r$ ,  $z=L/2$ , Al.

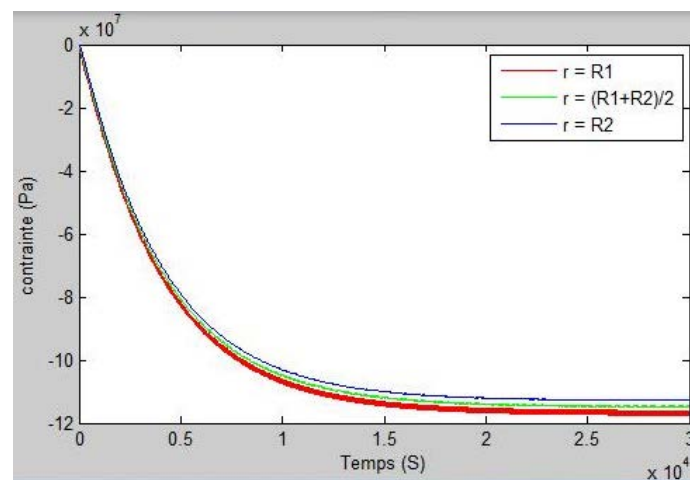
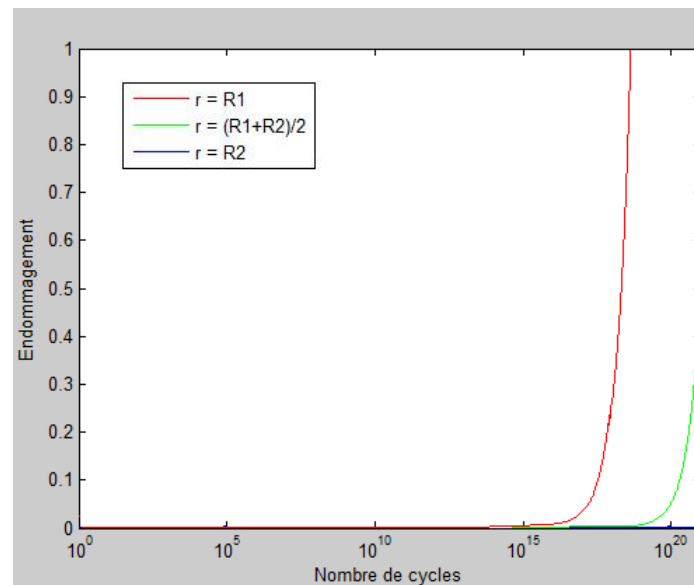


Figure 4.23 : Evolution de la contrainte selon l'axe  $r$ ,  $z=L/2$ , matériau AL.





**Figure 4.24 : Endommagement en fonction du nombre de cycles de l'Al : calcul global des contraintes  $\sigma_{zz}$ .**

### 4.3 MULTIMATERIAUX

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'endommagement de multimatériaux de type bicouche avec un contact parfait. Nous analyserons l'influence des charges thermiques, de la géométrie et des propriétés physiques des deux couches utilisées. L'analyse bibliographique a montré que très peu de travaux ont été consacrés à l'étude locale de l'endommagement dans les multimatériaux sous sollicitations thermiques variables. En effet, la majorité des études ont été réalisées en régime thermique stationnaire [50] ; les travaux relatifs au cas non-stationnaire supposent une résistance thermique négligeable à chaque instant [51]. D'une manière générale, ces approches sous-estiment le comportement thermo-élasto-plastique de ces matériaux et par suite leur comportement en cas de fatigue [47].

#### 4.3.1 PRESENTATION DU PROBLEME

Le matériau étudié, constitué de deux couches, est celui présenté sur la Figure 3.5 et dont les propriétés sont données dans le Tableau 3.1.

L'algorithme de calcul, les formulations, les contraintes, les conditions aux limites et la loi d'endommagement sont cités dans la section 4.2.

Dans ce cas, l'étude de l'endommagement de ce matériau bicouche nécessite le passage par la notion de matériau équivalent traitée dans le Chapitre 3, section 3.4.

Nous rappelons que la recherche du matériau équivalent au matériau bicouche repose sur une interpolation polynômiale de ses propriétés dans des domaines limités par celles des deux couches constituant le multimatériau.

$$(4.25) \quad \phi(r) = \sum_{k=0}^n a_k r^k \quad \text{Avec } \phi = (\rho, C, \lambda, \alpha, E), \quad \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \quad \phi_i : \text{propriétés du matériau } i=1,2$$

### 4.3.2 INFLUENCE DES CHARGES THERMIQUES

Plusieurs formes de flux de chaleur ont été appliquées :

- Cas sinusoïdal :

$$(4.26) \quad Q(z,t) = f(z) \left( 1 + \sin\left(\frac{2k\pi}{\tau} t\right) \right)$$

- Cas triangulaire :

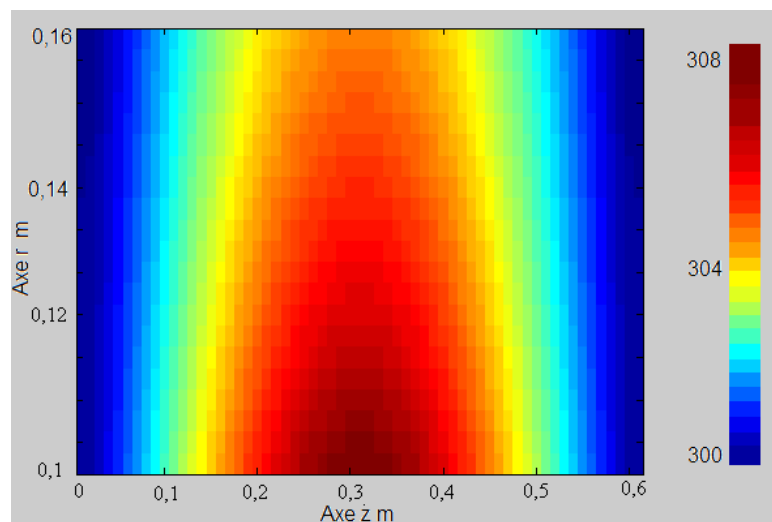
$$(4.27) \quad Q(z,t) = \begin{cases} 4f(z) \left( \frac{t}{\tau} - k \right) & 0 \leq \frac{t}{k\tau} < \frac{1}{2} \\ 4f(z) \left( 1 + k - \frac{t}{\tau} \right) & \frac{1}{2} \leq \frac{t}{k\tau} < 1 \end{cases}$$

- Cas carré :

$$(4.28) \quad Q(z,t) = \begin{cases} 2f(z) & 0 \leq \frac{t}{k\tau} < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leq \frac{t}{k\tau} < 1 \end{cases}$$

Avec  $f(z) = \frac{4Q_0 z(L-z)}{L^2}$ ,  $Q_0 = 12000 \text{ W/m}^2$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$  (période).

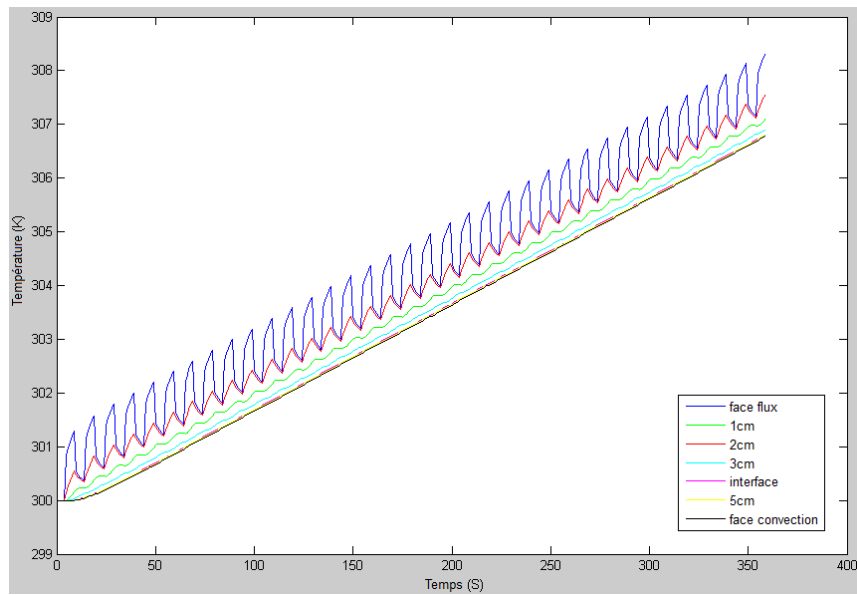
$k=1, 2, \dots, n$  (nombre de périodes)



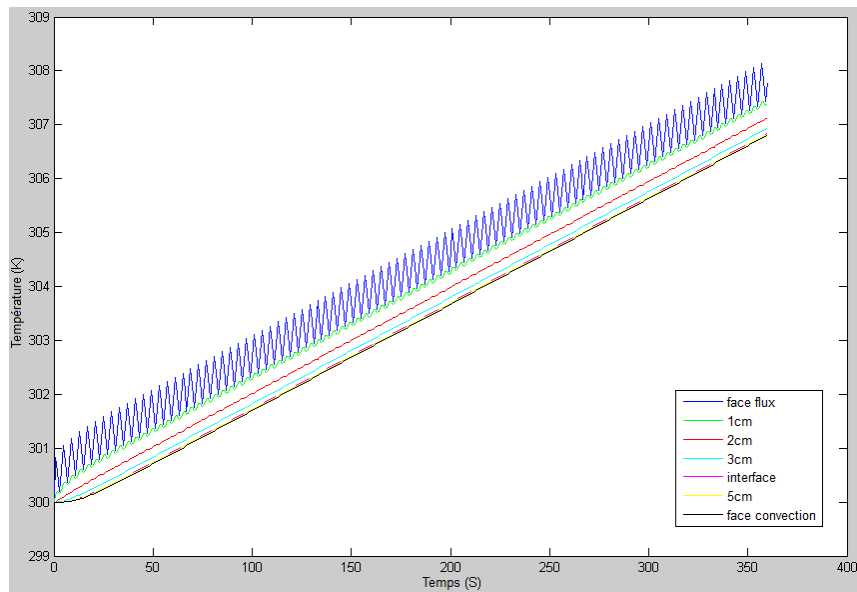
**Figure 4.25 : Champs de température pour un flux sinusoïdal à t=360 s**

Sur la Figure 4.25, on montre un exemple de champ de température obtenu à l'instant t=360 s en appliquant un flux sinusoïdal, et sur la Figure 4.26, Figure 4.27 et Figure 4.28, on

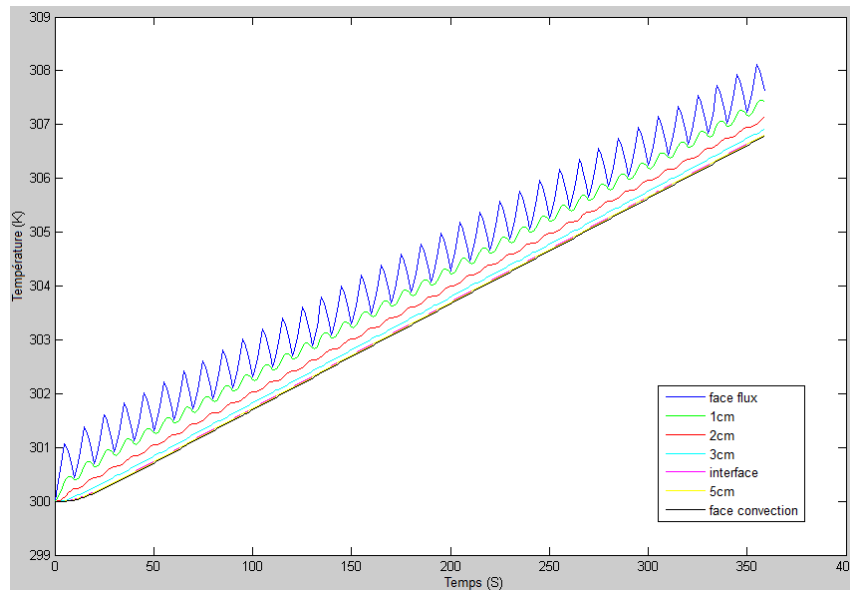
présente l'évolution de la température, (pour  $z=L/2$  et  $r=R_1$ ,  $r=R_2$ ,  $r=R_3$  et entre ces points) obtenue avec les trois formes de flux présentée ci-dessus.



**Figure 4.26 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme carrée.**



**Figure 4.27 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme sinusoïdale.**

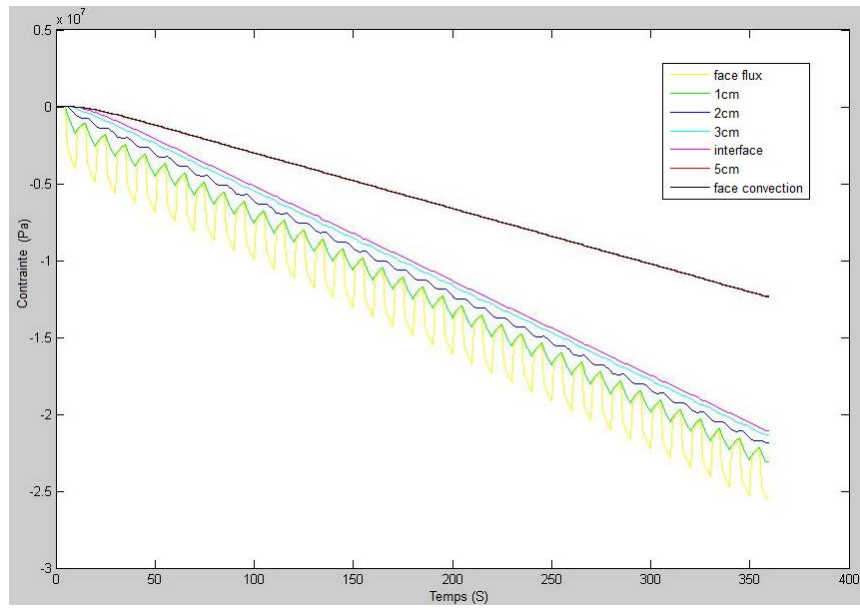


**Figure 4.28 : Evolution de la température, cas d'un flux de forme triangulaire.**

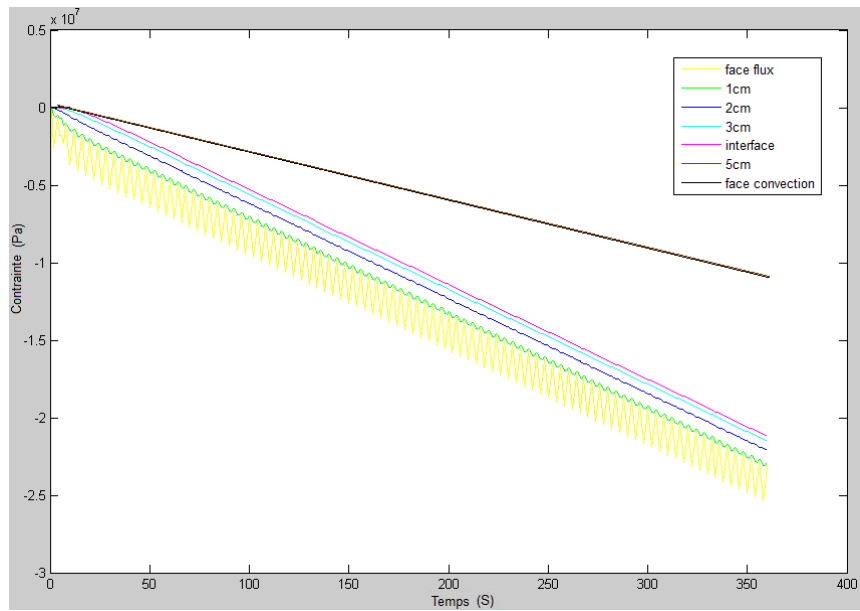
Le calcul des contraintes peut être facilement effectué sur les frontières en utilisant l'équation (4.20), traduisant la loi de Lamé, du fait que nous connaissons la valeur de la température à chaque point et à chaque instant.

Nous savons aussi d'une part que les déformations sont nulles dans les directions  $r$  et  $z$  sur les faces internes fixes et isolées et d'autre part,  $\sigma_{rr}=0$  sur les extrémités inférieures et supérieures. Ceci nous permet de calculer la contrainte en chaque point sur la face isolée et par conséquent partout dans le corps. La contrainte maximale résultante se trouve donc sur la face inférieure du multimatériau (face acier) là où la température est maximale, voir Figure 4.26, Figure 4.27 et Figure 4.28.

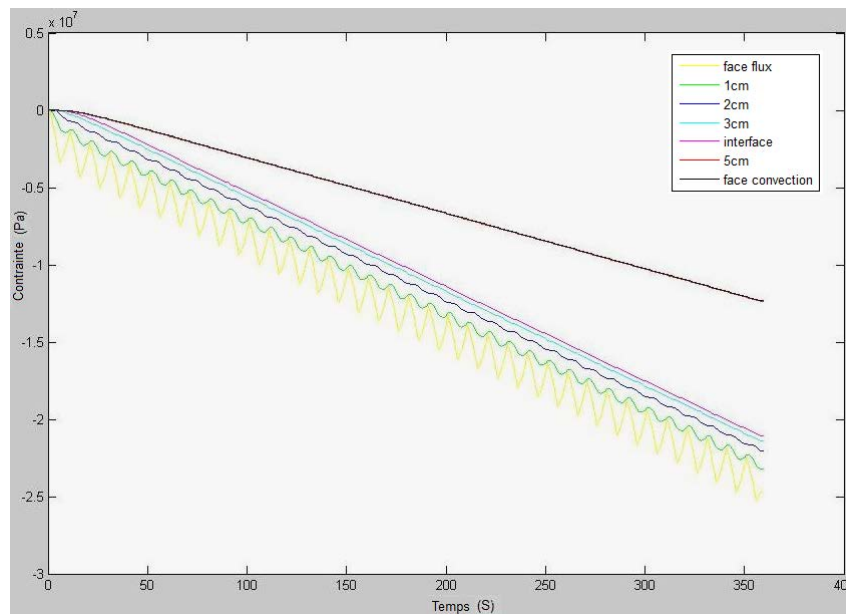
La Figure 4.29, la Figure 4.30 et la Figure 4.28 montrent l'évolution des contraintes thermo-mécaniques pour les trois types de sollicitations thermiques analysés (carré, sinusoïdal et triangulaire). Ces contraintes sont négatives puisque les extrémités du matériau sont fixées et augmente en valeur absolue avec le temps et diminuent en valeur absolue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la face intérieure (face exposée au flux) jusqu'à la face extérieure (face refroidie par convection).



**Figure 4.29 : Contrainte thermomécanique, cas carré,  $z=L/2$ .**



**Figure 4.30 : Contrainte thermomécanique, cas sinusoïdal,  $z=L/2$ .**



**Figure 4.28 : Contrainte thermomécanique, cas triangulaire,  $z=L/2$ .**

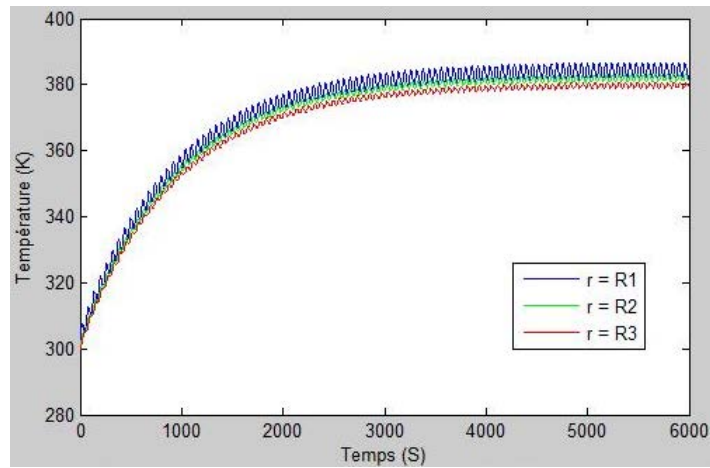
Même si ces contraintes présentent des variations périodiques différentes en fonction de la forme du flux imposé, elles présentent, en revanche, des variations globales maximales du même ordre (de 0 à -2.5 Mpa). Pour la suite, nous considérons uniquement le cas d'un flux de forme sinusoïdale.

#### 4.3.3 INFLUENCE DE LA GEOMETRIE

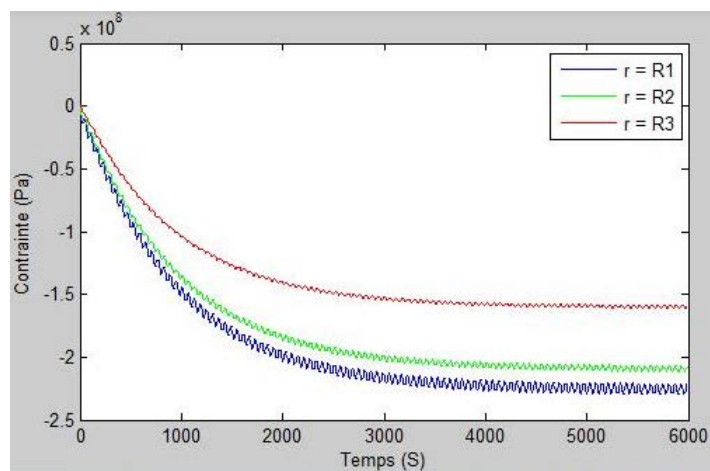
L'implémentation dans le logiciel Matlab de la loi d'endommagement nous permet de calculer l'endommagement sur le matériau équivalent.

Dans cette section, nous présentons une comparaison entre les limites d'endommagement du multimatériau en considérant différents pourcentages des épaisseurs des deux couches.

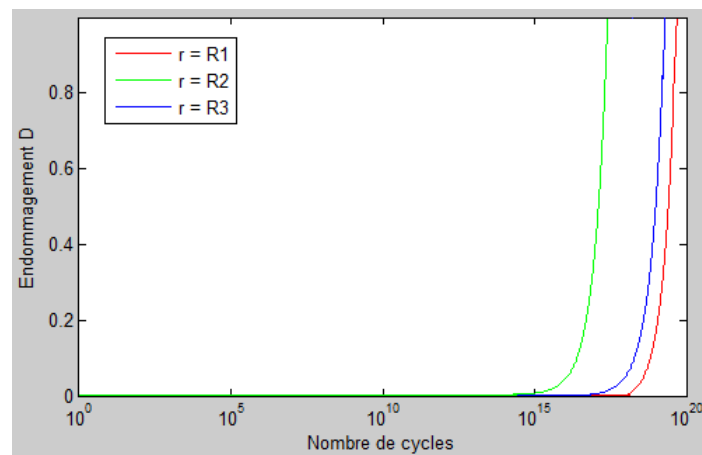
Pour  $e_{ac}=0.01$  m,  $e_{Al}=0.05$  m, nous avons obtenu les résultats présentés sur les figures allant de la Figure 4.31 à la Figure 4.33. Il faut cependant noter que les contraintes  $\sigma_{zz}$ , obtenues pour les autres pourcentages des épaisseurs étudiés ressemblent bien à celles montrées ci-dessous, c'est pour cela que nous allons présenter, pour les autres épaisseurs, seulement les courbes de température et d'endommagement en trois positions du multimatériau.



**Figure 4.31 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.01$  m,  $e_{Al}=0.05$  m).**

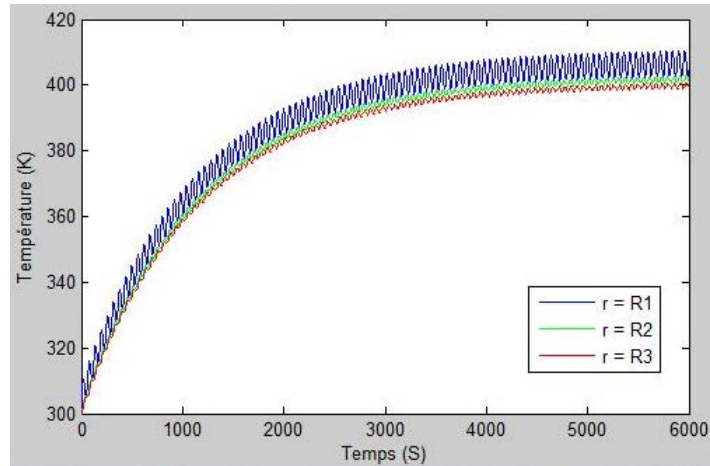


**Figure 4.32 : Evolution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  du corps ( $e_{ac}=0.01$  m,  $e_{Al}=0.05$  m).**

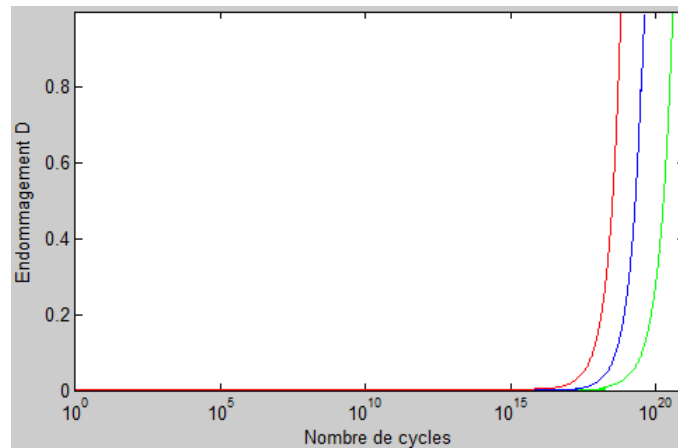


**Figure 4.33 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.01$  m,  $e_{Al}=0.05$  m).**

Pour  $e_{ac}=0.02$  m,  $e_{Al}=0.04$  m, on obtient :

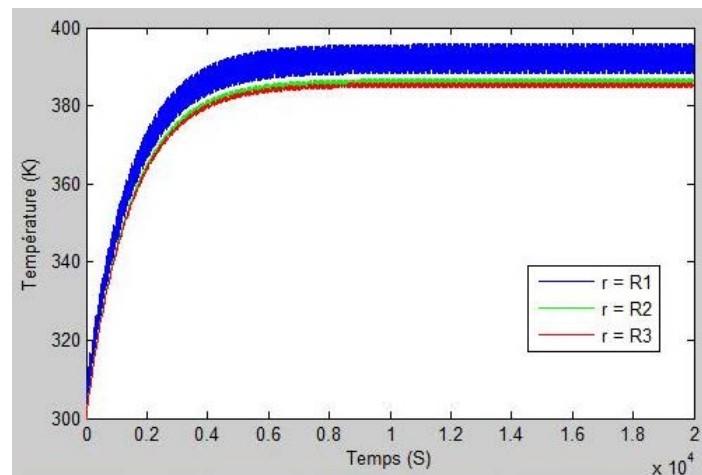


**Figure 4.34 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.02$  m,  $e_{al}=0.04$  m).**



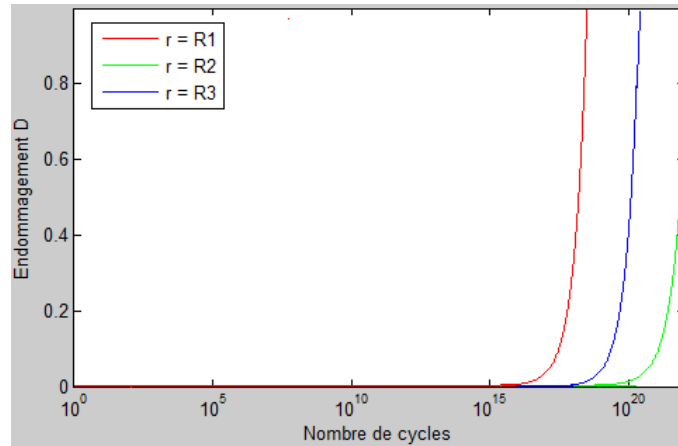
**Figure 4.35 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.02$  m,  $e_{al}=0.04$  m).**

Pour  $e_{ac}=0.03$  m,  $e_{al}=0.03$  m, on obtient :



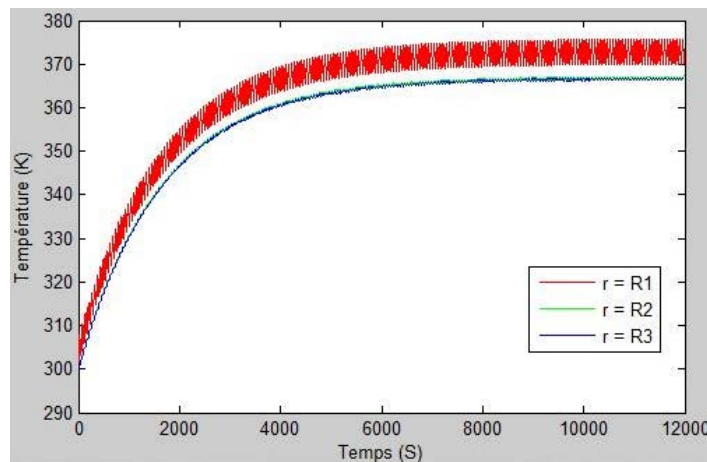
**Figure 4.36 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.03$  m,  $e_{al}=0.03$  m).**



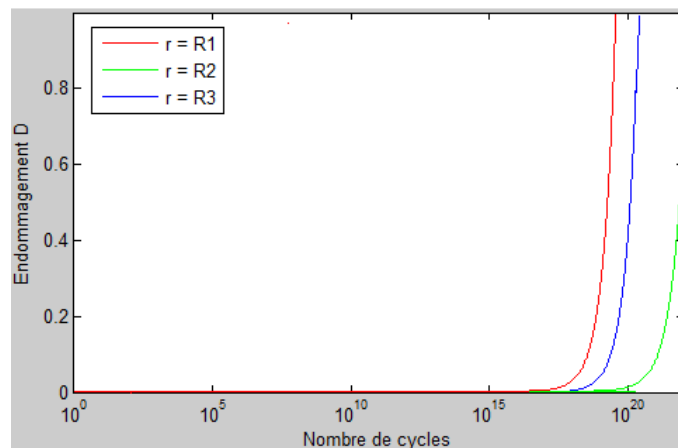


**Figure 4.37 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles**  
**( $e_{ac}=0.03$  m,  $e_{al}=0.03$  m).**

Pour  $e_{ac}=0.04$  m,  $e_{al}=0.02$  m, on obtient :

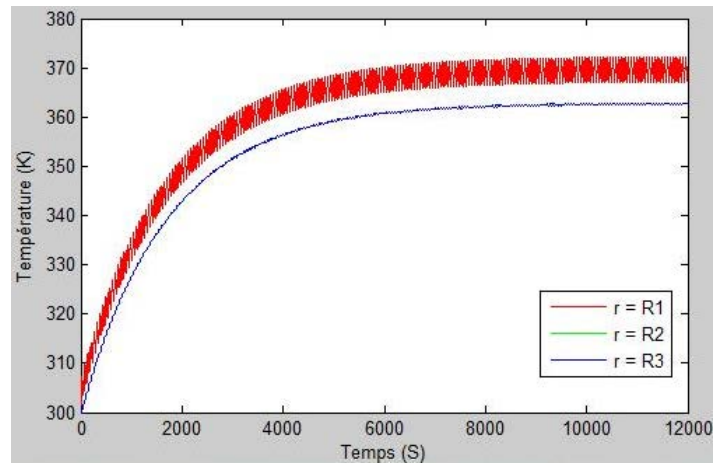


**Figure 4.38 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.04$  m,  $e_{al}=0.02$  m).**

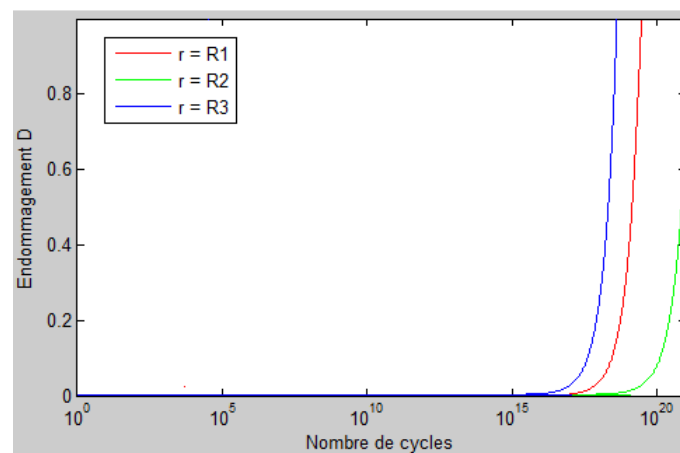


**Figure 4.39 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles**  
**( $e_{ac}=0.04$  m,  $e_{al}=0.02$  m).**

Et finalement, pour  $e_{ac}=0.05$  m,  $e_{al}=0.01$  m, on obtient :



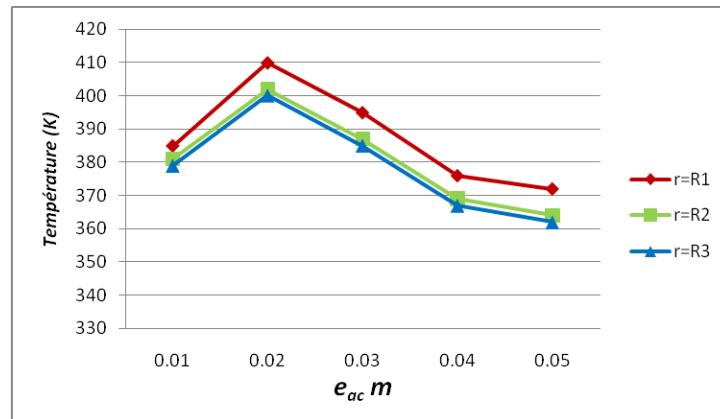
**Figure 4.40 : Evolution de la température du corps ( $e_{ac}=0.05$  m,  $e_{al}=0.01$  m).**



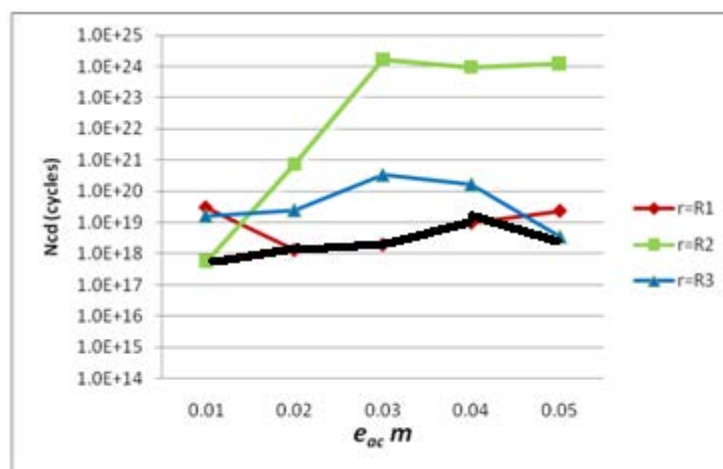
**Figure 4.41 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles ( $e_{ac}=0.05$  m,  $e_{al}=0.01$  m).**

#### 4.3.3.1 OPTIMISATION EMPIRIQUE DE LA GEOMETRIE

Il s'agit d'une optimisation purement empirique. Pour une épaisseur totale des deux couches fixée à 0.06 m, nous avons fait varier l'épaisseur de la couche d'acier de 0.01 m à 0.05 m, par pas de 0.01 m et analyser ensuite la valeur stationnaire moyenne de la température (Figure 4.42) et le nombre de cycles nécessaire à l'endommagement du corps en fonction de l'épaisseur de l'acier (Figure 4.43). Cet analyse se fait pour  $z=L/2$  et  $\vartheta=0$  sur les 3 points critiques du corps ;  $r=R_1$  (face de flux : Ac),  $r=R_2$  (face intermédiaire) et  $r=R_3$  (face de convection : Al). Ces valeurs stationnaires moyennes de la température et du nombre de cycles nécessaires à l'endommagement sont extraites de l'ensemble des figures allant de la Figure 4.31 à la Figure 4.41.



**Figure 4.42 : Température maximale de l'aluminium à l'endommagement, en fonction de  $e_{ac}$**



**Figure 4.43 : Nombre limite de cycles à l'endommagement en fonction de  $e_{ac}$ .**

La Figure 4.43 montre que pour  $e_{ac}$  allant de  $0.01$  m à  $0.04$  m le nombre de cycles à l'endommagement  $N_{cd}$  augmente globalement sur l'ensemble du corps étudié, puis diminue au point  $e_{ac} = 0.05$  m (la courbe la plus basse). En effet, pour  $e_{ac} = 0.01$  m l'endommagement commence à l'interface ( $N_{cd}$  est le plus faible), pour  $e_{ac} = 0.02$  m, l'endommagement commence à la face de l'acier, pour  $0.02$  m  $\leq e_{ac} \leq 0.04$  m,  $N_{cd}$  augmente et atteint une valeur maximale sur l'ensemble du corps pour  $e_{ac} = 0.04$  m. Avec l'augmentation de l'épaisseur de l'acier à  $0.05$  m l'endommagement commence sur la couche de l'aluminium et devient plus faible par rapport  $e_{ac} = 0.04$  m.

Donc la meilleure durée de vie est obtenue pour  $e_{ac} = 0.04$  m, de l'ordre de  $10^{19}$ , avec une température relativement faible (Figure 4.42). Ce résultat peut être utile pour des applications pratiques mettant en jeu des faibles températures.

#### 4.4 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons analysé et étudié l'endommagement dans le cas des régimes thermo-élastiques, d'abord sur des matériaux simples (Acier puis aluminium séparément), puis sur un multi-matériau formé de ces deux matériaux sous forme d'un bicouche.

Nous avons effectué la résolution du problème par la méthode analytique sur un matériau unique pour montrer que, sous certaines conditions simples, une solution analytique est possible. Puis nous avons utilisé la méthode de différences finies pour approcher la solution du problème différentes types de conditions aux limites variables pour calculer l'endommagement sur le multi-matériau.

Un résultat significatif a été obtenu durant cette étude, c'est que l'endommagement n'est pas influencé par la nature de l'excitation appliquée (carrée, triangulaire ou sinusoïdale) tant que l'amplitude et la période de cette excitation ne sont pas très trop élevées. Cependant, l'épaisseur des matériaux influe directement sur l'endommagement du multi-matériau.

Un autre résultat intéressant est que le couplage parfait des deux matériaux a allongé la durée de vie du corps par rapport au cas de simples matériaux chacun tout seul.

Dans ce chapitre, nous avons également proposé une optimisation empirique de la géométrie du multi-matériau dans le but de satisfaire certains critères (durée de vie la plus longue possible, température limites, faible poids, etc.). A travers cette analyse, nous avons montré l'existence d'une valeur optimale de la distribution des épaisseurs des deux matériaux qui peut dépendre des conditions thermiques imposées.

Dans le chapitre qui suit, nous allons étendre cette au régime thermo-élasto-plastique.



# CHAPITRE 5 ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX SOUS CHARGEMENT THERMO- ELASTO-PLASTIQUE

## 5.1 INTRODUCTION

Dans les nouvelles technologies, le besoin croissant des structures ayant des fonctions multiples oriente les concepteurs à combiner plusieurs matériaux dans le but d'obtenir, selon les échelles de couplage, des structures en multi-matériaux. Ces structures, sont soumises, lors de leur fonctionnement, à une ou plusieurs charges thermiques, en général variables, qui peuvent causer leur endommagement.

L'étude du comportement de ces structures, lorsqu'elles sont soumises à des sollicitations thermiques cycliques, est donc très importante. Elle permet de prédire leur durée de vie et leur réponse à n'importe quelle sollicitation. Il est évident que la variation de la charge thermique et/ou mécanique en termes d'amplitude et de fréquence conduit à une variation de l'endommagement résultant. A notre connaissance, cet effet n'a pas été suffisamment exploité dans la littérature, surtout dans le cas des structures multi-matériaux.

Dans ce chapitre, nous présentons une analyse numérique du comportement thermo-élasto-plastique de ces multi-matériaux et de leur endommagement sous des sollicitations thermiques cycliques. Les conditions de l'étude sont similaires à celles décrites dans le Chapitre 4. Le modèle d'endommagement utilisé est basé sur les travaux de Lemaitre et Chaboche qui est conçu uniquement pour des matériaux homogènes. Ce constat justifie l'étude présentée au Chapitre 3 sur la recherche de milieu équivalent (ou homogène) d'un multimatériau (bicouche dans notre cas).

Les résultats numériques sont présentés pour différentes formes (triangulaire, carrée et sinusoïdale) et fréquences de la sollicitation thermique périodique. Ils sont donnés également pour différentes épaisseurs du multi-matériau.

## 5.2 ANALYSE DE L'EXISTANT

L'étude des composants métalliques sollicités par de hautes températures a réellement commencé dans les années 50, d'abord par l'industrie aéronautique puis par l'évolution de l'industrie nucléaire. Dans ces applications, les matériaux sont soumis à de très hautes températures, parfois plus de la moitié de la température de fusion. Dans ce domaine de température, leurs propriétés mécaniques sont considérablement modifiées et les mécanismes d'endommagement sont multipliés. Les cycles de sollicitation, auxquelles ces structures métalliques sont soumises, causent fréquemment des déformations cycliques

inélastiques. Chaque système ou composant mécanique, est presque toujours le siège d'un couplage thermo-élasto-plastique. Ceci est dû au fait que la variation brusque et la périodicité de la température influence la fatigue des matériaux constitutants.

La présence de chargements thermiques et mécaniques dans chaque système a motivé les chercheurs à travailler dans ce domaine et spécialement dans le champ des charges variables en analysant l'influence de leur période de sollicitation, leur amplitude et leur forme sur l'endommagement des matériaux [38],[39],[40],[41] et[42].

La majorité de ces travaux évoquent uniquement les effets de charges mécaniques sur l'endommagement. Ils sont de natures expérimentales et/ou numériques, [2], [43], [40] et [44].

Dans [38] et [41], Les auteurs ont effectué une étude en utilisant des vibrations mécaniques à hautes fréquences. Ils ont conclu qu'il y a une relation entre la fréquence de la charge et la fatigue des matériaux soumis à des sollicitations mécaniques. Ils ont démontré également qu'il y a une variation de la fatigue relative à la valeur de résonance du matériel. En se basant sur les résultats de ces études, nous trouvons qu'il est très important d'étudier l'influence de la variation de la fréquence et de l'amplitude de la charge thermique sur la durée de vie et sur le nombre de cycles causant l'endommagement de ces matériaux.

Ceci ne veut pas dire que l'effet thermomécanique n'a pas été étudié auparavant. On trouve dans la littérature des études avancées dans lesquelles on a abordé une analyse de l'endommagement thermo-mécanique avec une charge thermique. Cependant, ces études supposent une charge thermique constante [45],[46], et une charge mécanique variable. Cette hypothèse permet de simplifier l'étude en négligeant les effets du régime transitoire de la charge thermique. En général, ces approches sous-estiment le comportement thermo-élasto-plastique de ces matériaux et par suite leur comportement en cas de fatigue [47].

D'autres études, [48], [45], de nature uniquement expérimentale, ont pris en considération le régime transitoire d'une charge thermique variable. Les auteurs ont montré l'effet de quelques fréquences de cette charge thermique sur l'endommagement [48]. Sur le plan analytique, on constate un manque de modèles corrects d'endommagement à adapter et à appliquer car il n'y a pas suffisamment de lois analytiques qui décrivent l'endommagement sous chargement thermique variable. Ceci est vérifié par la présence, dans la littérature, d'un nombre important de lois d'endommagement mécaniques, mais uniquement sur des structures supposées isothermes [2]. A notre connaissance, il n'y a pas de loi d'endommagement adaptées à des régimes thermiques variables.

De plus, l'étude de plusieurs couches, supposées en contact parfait, aboutit à des résultats théoriques parfaits. Par exemple, cette étude va mener à un transfert de chaleur idéal avec des contraintes distribuées régulièrement et discontinues au niveau de l'interface entre les couches.

Il est évident que dans un matériau à deux couches, il y a une influence mutuelle d'un matériau sur l'autre. Nous ne pouvons pas avoir une variation brusque des propriétés

thermiques et mécaniques au niveau de l'interface entre les couches. Dans cette zone d'influence, les valeurs des propriétés thermiques et mécaniques doivent varier entre celles des matériaux constitutifs. Ce raisonnement impose la nécessité de chercher une méthode de correction basée sur le principe d'équivalence du multimatériau par un matériau homogène sur lequel nous pouvons étudier son endommagement sous contraintes thermomécaniques.

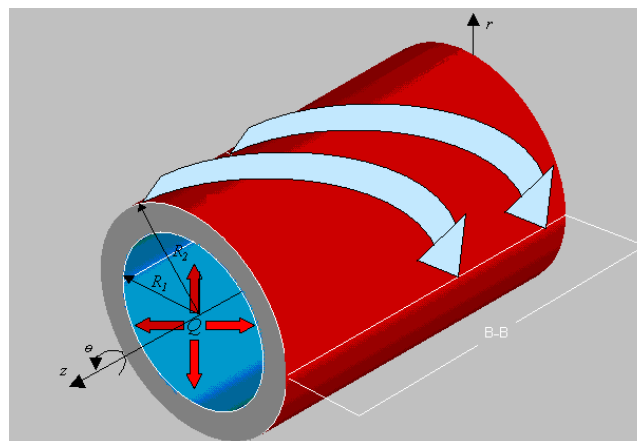
L'approche d'homogénéisation proposée dans [30] remplace le multi-matériau par un matériau unique ayant des propriétés thermo-physiques équivalentes. Ces valeurs sont obtenues par l'intermédiaire des modèles qui permettent d'obtenir les mêmes températures dans le matériau bicouche et son équivalent. Cette approche ne peut pas être utilisée pour obtenir les bonnes valeurs de l'endommagement à chaque point des matériaux car en réalité la température ne peut pas être constante dans le matériau. Pour cette raison, nous utilisons ici l'approche d'équivalence détaillée dans le Chapitre 3. Le matériau bicouche est remplacé par un matériel unique dans lequel les propriétés varient avec la géométrie. Cette technique est validée dans ce travail.

### 5.3 MATERIAUX UNIQUES

#### 5.3.1 PRESENTATION DU PROBLEME

Le corps étudié est constitué d'un matériau homogène formé de l'acier inoxydable, de l'acier et de l'aluminium, les spécifications physiques de ces matériaux sont présentées dans le Tableau 5.1.

Rappelons que la surface interne du corps étudié est soumise à un flux de chaleur périodique et la surface externe est soumise à un transfert de chaleur par convection avec la température ambiante. Les extrémités gauche et droite du corps sont supposés isolés et fixes, Figure 5.1.



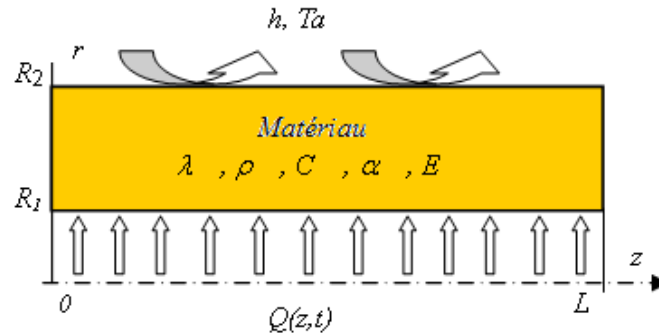
**Figure 5.1 : Le corps étudié.**

	Acier inoxydable	Aluminium	Acier
P : densité	7854 kg/m <sup>3</sup>	2770	7854 kg/m <sup>3</sup>



c : capacité calorifique	477 J/Kg.°K	875	434 J/Kg.°K
$\lambda$ : conductivité thermique	35 W/m°K	177	60.5 W/m°K
$\alpha$ : coefficient d'expansion	15.10-6 m/K	23.1.10 <sup>-6</sup>	11.8.10 <sup>-6</sup> m/K
$\nu$ : coefficient de poisson	0.3	0.3	0.3
L : longueur	0.6 m	0.6 m	0.6 m
R <sub>1</sub> : rayon interne	0.1 m	0.1 m	0.1 m
e : épaisseur	e=0.06 m	e=0.06 m	e=0.06 m

**Tableau 5.1: Spécifications physiques des matériaux [36][52].**



**Figure 5.2: Section B-B**

La résolution de l'équation de bilan thermique prenant en compte la chaleur générée par le comportement thermo-élasto-plastique du matériau permet d'obtenir l'évolution du champ de température au sein du matériau et par suite son comportement thermo-élasto-plastique en fonction du type de l'excitation thermique appliquée.

### 5.3.2 VARIATION DU MODULE D'YOUNG

En régime thermo-élasto-plastique, le niveau élevé des températures a des conséquences évidentes sur la variation des propriétés du système en fonction de la température, en particulier sur le module d'Young des matériaux étudiés, voir Tableau 5.2.

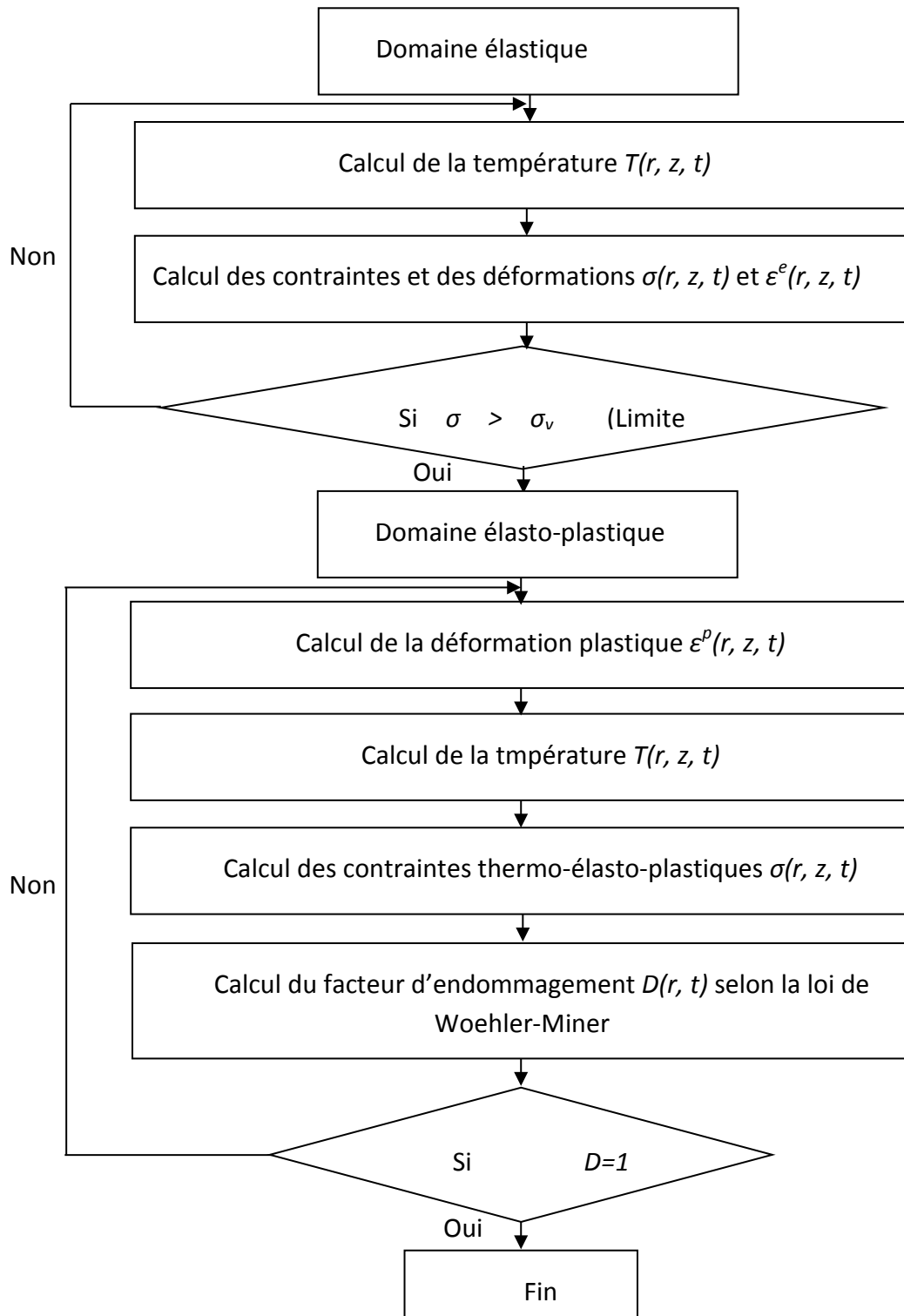
Température (°C)	20	205	430	650
Acier inoxydable (MPa)	196	183	165	146
Aluminium (MPa)	72	65	55	42
Acier (MPa)	210	198	180	155

**Tableau 5.2 : Variation du module d'Young E avec la température [2], [27]**

### 5.3.3 ORGANIGRAMME DE CALCUL

La méthode décrite au Chapitre 4 est utilisée pour la résolution de l'équation de la chaleur. La distribution de la température, calculée à chaque instant, est utilisée dans le problème mécanique pour calculer la distribution des contraintes et des déformations aux régimes élastique et élasto-plastique. L'évolution et la répartition du facteur de

l'endommagement  $D(r,t)$  est ensuite calculé selon la loi de Woehler-Miner, voir organigramme Figure 5.3 :



**Figure 5.3 : Organigramme de calcul de l'endommagement.**

L'étude numérique est conduite dans les conditions citées dans le Tableau 5.1 et le Tableau 5.2 et avec les conditions aux limites suivantes :

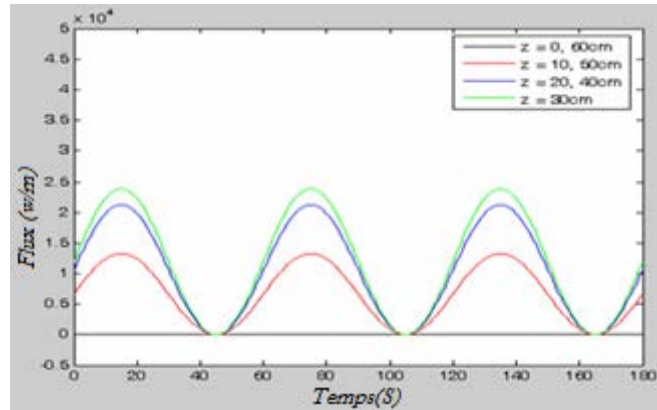
Pour le problème thermique :

$$T_0 = 300 \text{ K}, T_a = 300 \text{ K}, h = 50 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Le flux thermique imposé est de type sinusoïdal, Figure 5.4 :

$$(5.1) \quad Q(z, t) = \frac{4Q_0 z(L-z)}{L^2} \left( 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \right)$$

Avec  $Q_0 = 30000 \text{ W}/\text{m}$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$  (période),



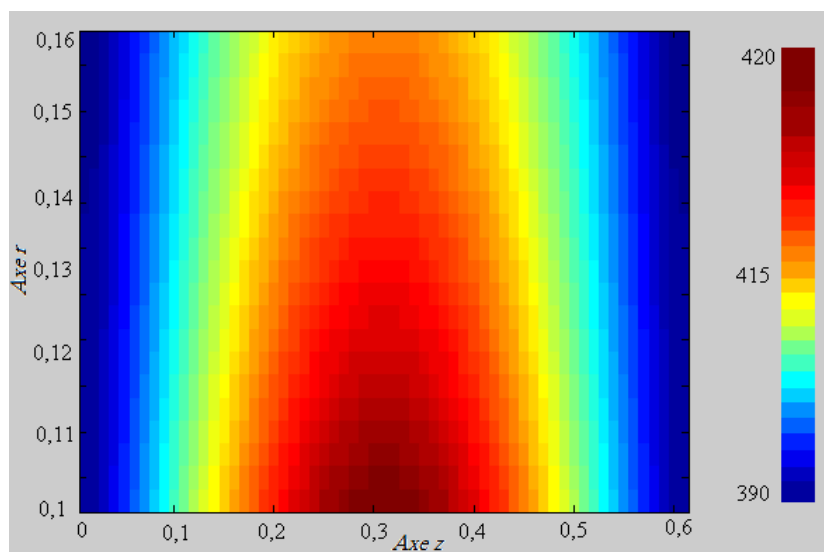
**Figure 5.4: Flux de chaleur sinusoïdal appliqué.**

Pour le problème mécanique:

$$V = 0 \text{ à } z = 0 \text{ et } z = L$$

$$U = V = \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0 \text{ à } t = 0$$

Dans ces conditions, la distribution de la température, à  $t = 9000 \text{ s}$ , est présentée sur la Figure 5.5. Elle dépend évidemment de la variation du flux de chaleur appliqué mais aussi des sources thermiques résultant des déformations plastique et élastique du matériau. La température maximale correspond à la valeur maximale du flux de chaleur.



**Figure 5.5: Distribution de la température à  $t = 9000 \text{ s}$ .**

La suite de ce chapitre sera consacrée à l'étude des influences de paramètres physiques, géométriques du matériau et des conditions aux limites sur son endommagement. L'analyse portera d'abord sur un matériau simple puis sur un matériau bicouche en s'appuyant sur son modèle équivalent.

### 5.3.4 INFLUENCE DES PARAMETRES DES MATERIAUX

Les évolutions des températures et des contraintes, aux points ( $r=R_1$ ,  $r=(R_1+R_2)/2$ ,  $r=R_2$ ),  $z=L/2$ , sont présentées respectivement sur la Figure 5.6 et la Figure 5.7 pour l'Aluminium, sur la Figure 5.8 et la Figure 5.9 pour l'acier et sur la Figure 5.10 et la Figure 5.11 pour l'acier inoxydable. Ces trois matériaux sont soumis aux mêmes conditions de charges citées dans le paragraphe 5.3.3.

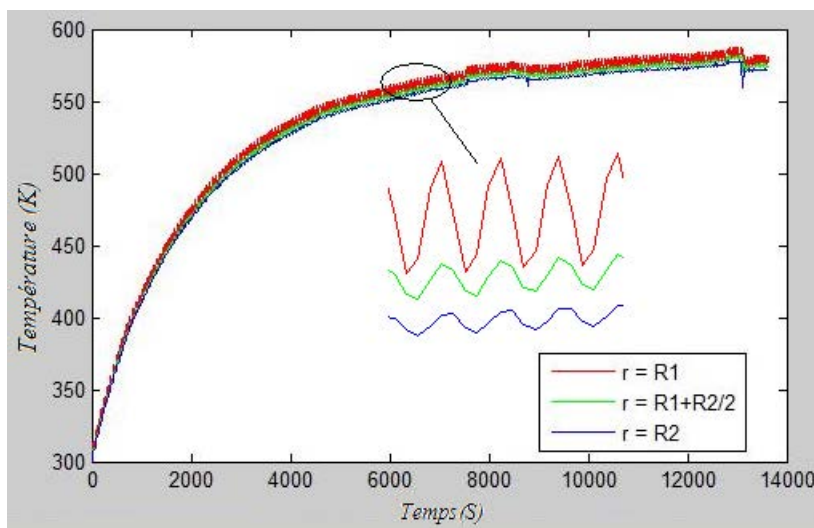


Figure 5.6 : Evolution de la température, cas de l'aluminium, ( $e_t = 0.06$  m,  $\tau = 60$  s).

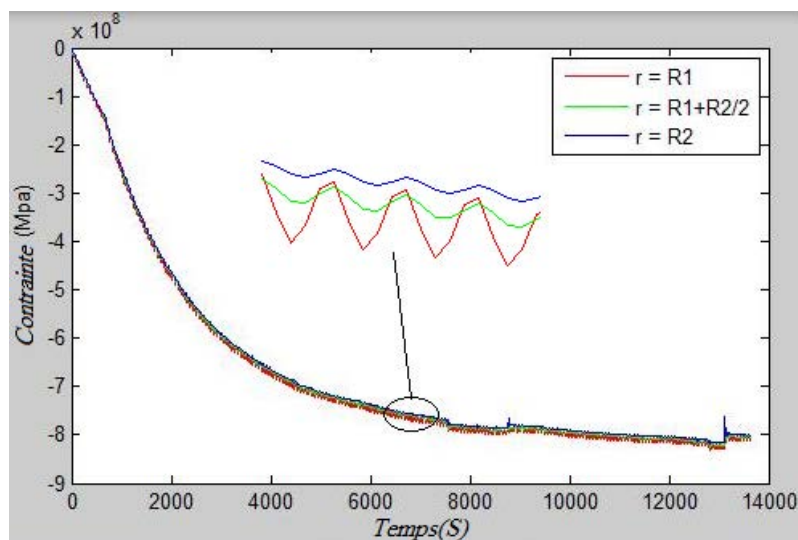


Figure 5.7 : Evolution de la contrainte sur l'aluminium, ( $e_t = 0.06$  m,  $\tau = 60$  s).

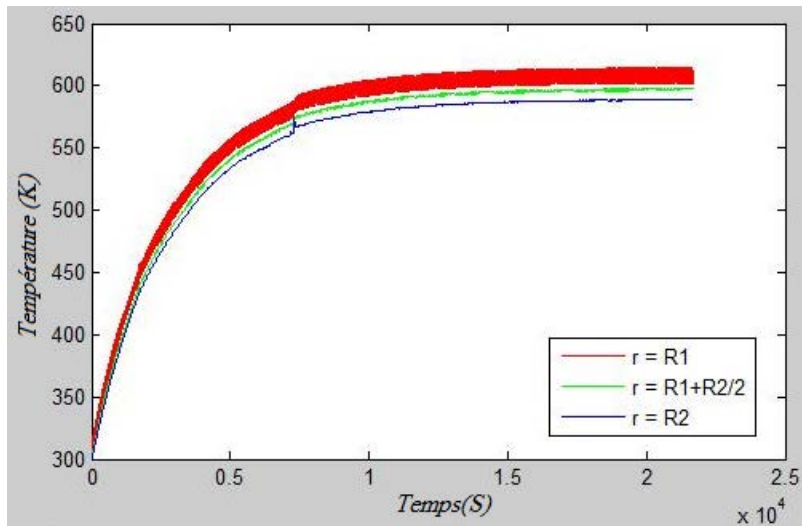


Figure 5.8 : Evolution de la température, cas de l'acier, ( $e_t = 0.06 \text{ m}$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$ ).

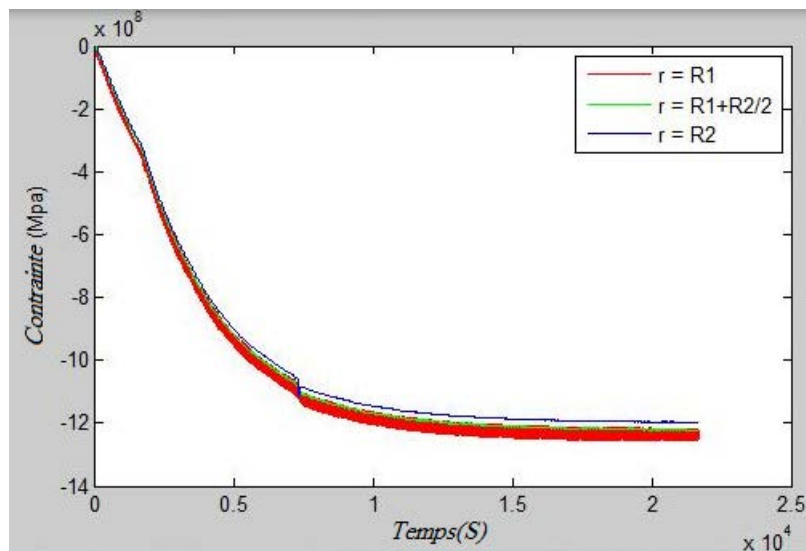


Figure 5.9 : Evolution de la contrainte, cas de l'acier, ( $e_t = 0.06 \text{ m}$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$ ).

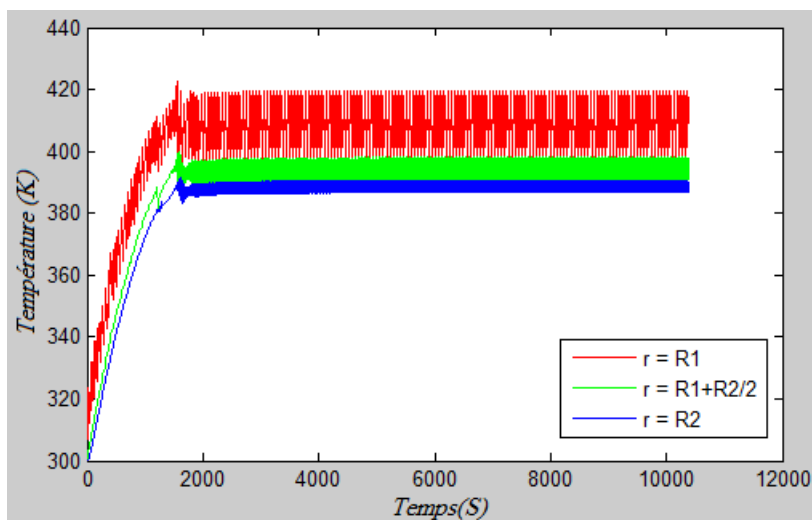
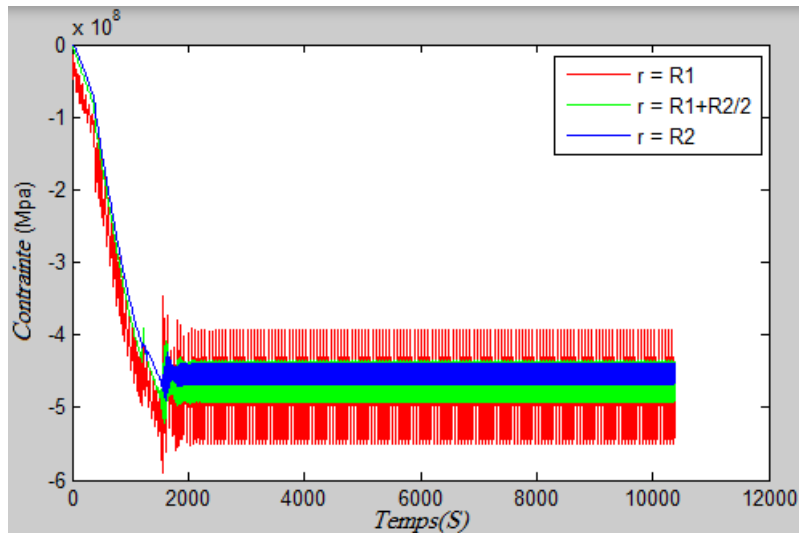
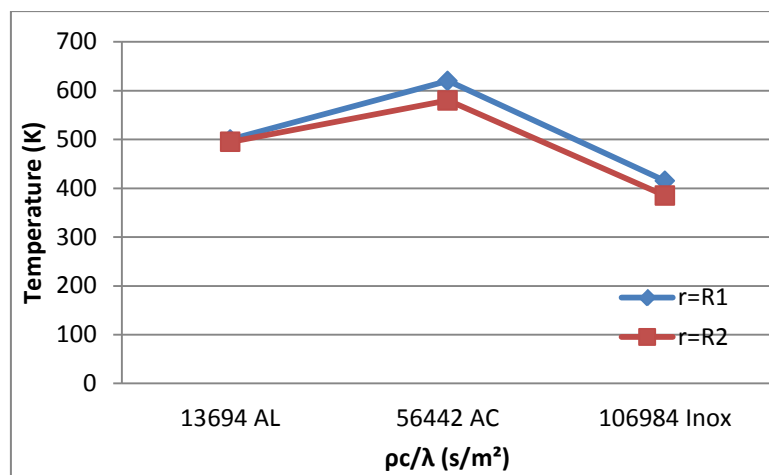


Figure 5.10 : Evolution de la température, cas de l'acier inoxydable, ( $e_t = 0.06 \text{ m}$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$ ).



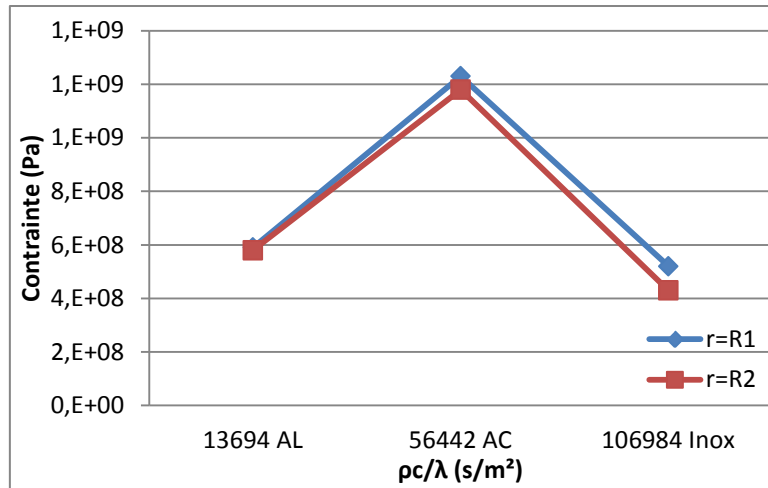
**Figure 5.11 : Evolution de la contrainte, cas de l'acier inoxydable, ( $e_t = 0.06$  m,  $\tau = 60$  s).**

On peut voir dans la Figure 5.12 que les températures les plus élevées se situent sur l'acier aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur à cause de sa faible conductivité thermique. Sur la Figure 5.13, les contraintes les plus importantes sont observées aussi sur l'acier car il possède la plus haute température et le plus grand module d'Young. Par contre, pour l'aluminium, beaucoup plus conducteur que l'acier, on observe des températures et des contraintes plus faibles alors que pour l'acier inoxydable, la température est relativement faible malgré sa faible conductivité par rapport à celle de l'aluminium. Cette contradiction s'explique par le fait que l'acier inoxydable passe par la zone plastique avant l'aluminium et sa contrainte d'élasticité est plus grande que celle de l'acier inoxydable. De même, on peut voir que les contraintes maximales sur l'acier inoxydable sont plus petites que celles de l'aluminium et de l'acier à cause de sa faible température. On remarque aussi sur la Figure 5.14, que quand la diffusivité thermique  $\lambda / \rho C$  diminue, le coefficient d'élasticité thermique augmente et par suite la fatigue de ces matériaux, exprimée en nombre de cycles à l'endommagement, Figure 5.15, ou de durée de vie, Figure 5.16, diminue.

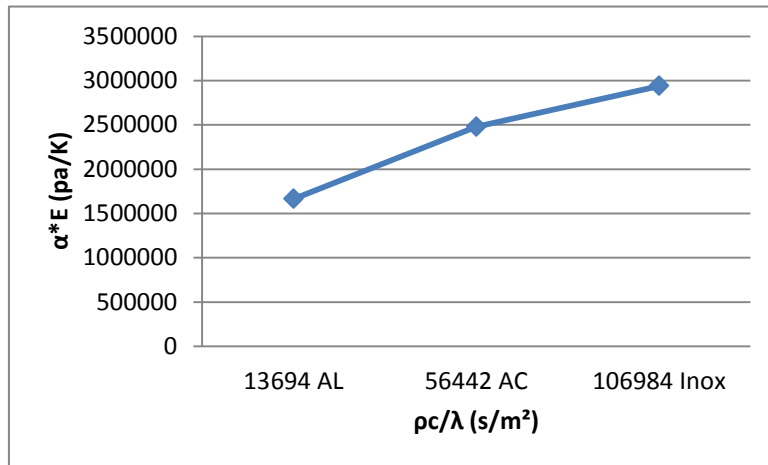


**Figure 5.12 : Variation de la température selon les matériaux à l'état stationnaire**

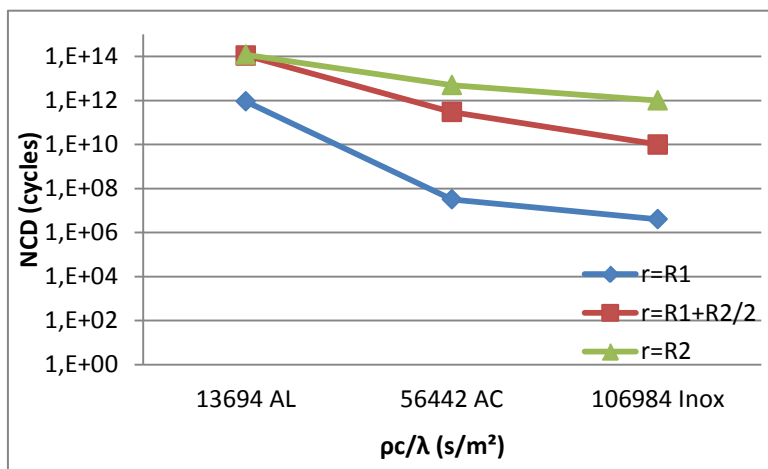
( $z = L/2$ ,  $r = R_1$ ,  $r = R_2$ ,  $e_t = 0.06$  m)



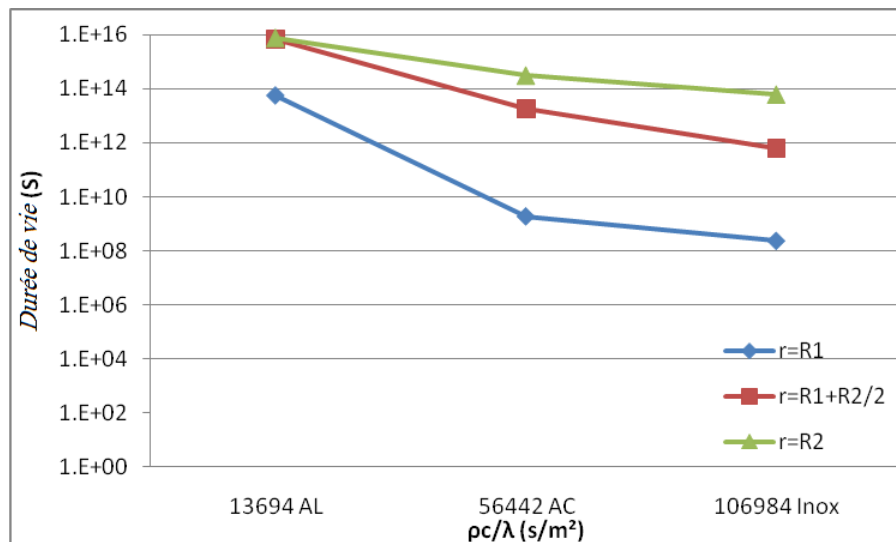
**Figure 5.13 : Variation de la contrainte selon les matériaux à l'état stationnaire**  
 ( $z = L/2, r = R_1, r = R_2, e_t = 0.06$  m)



**Figure 5.14 : Coefficient d'élasticité pour les 3 matériaux.**



**Figure 5.15 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction des matériaux aux points  $r = R_1, r = (R_1 + R_2) / 2, r = R_2, z = L/2, e_t = 0.06$  m.**



**Figure 5.16 : Variation de la durée de vie en fonction des matériaux aux points  $r = R_1$ ,**

$$r = (R_1 + R_2) / 2, r = R_2, z = L/2, e_i = 0.06 \text{ m}$$

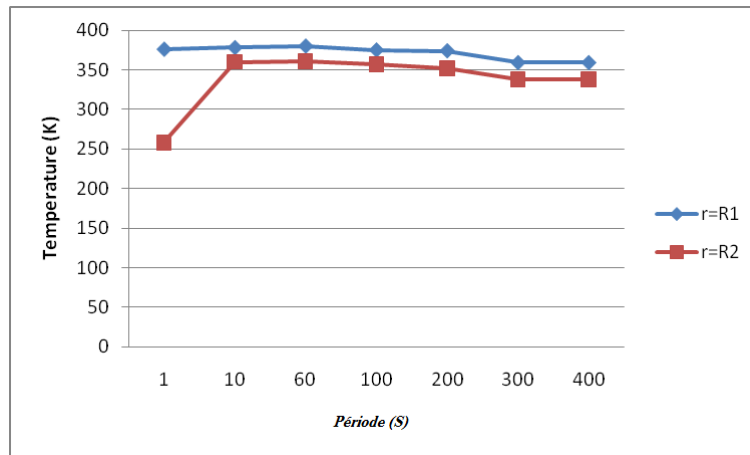
### 5.3.5 INFLUENCE DES CONDITIONS AUX LIMITES THERMIQUES

Sur le cas de l'acier inoxydable, nous analysons l'influence du flux de chaleur sinusoïdal (période et amplitude) imposé à l'intérieur du cylindre et des échanges convectifs (coefficient de transfert de chaleur) imposés à l'extérieur.

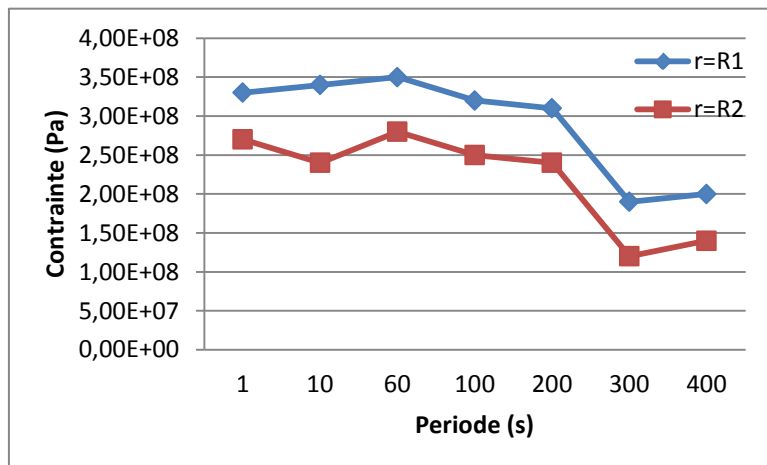
#### 5.3.5.1 INFLUENCE DE LA PERIODE

Le domaine des périodes étudiées s'étend d'une seconde à 400 secondes. En régime quasi-stationnaire, les températures et les contraintes moyennes maximales sur une période, le nombre de cycle à l'endommagement (durée de vie du matériau) sont présentés respectivement sur les figures allant de la Figure 5.17 à la Figure 5.20. Nous pouvons voir que les températures et par suite les contraintes diminuent avec l'augmentation de la période d'oscillation du flux de chaleur. Enfin, on voit sur la surface intérieure qui est sollicitée par le flux, que le nombre de cycles pour atteindre l'endommagement est quasiment identique pour toutes les périodes. Celui-ci augmente en s'éloignant de la zone sollicitée et décroît logiquement au fur et à mesure que la période augmente.

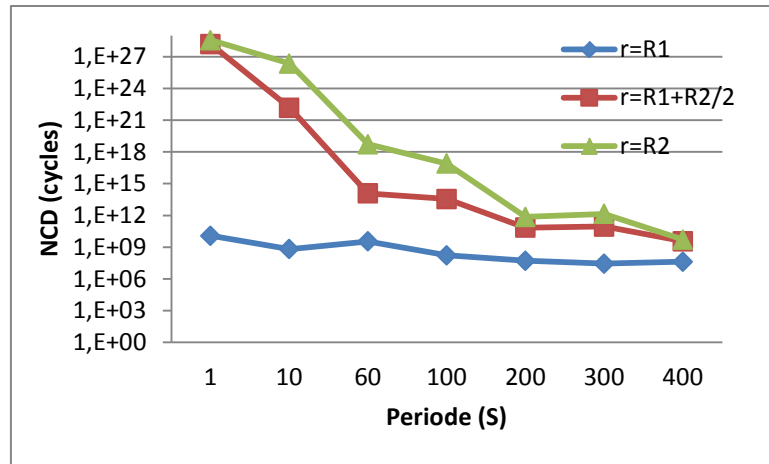




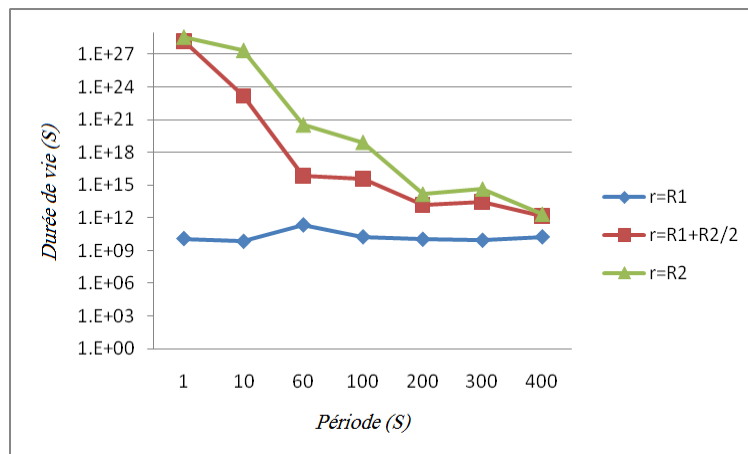
**Figure 5.17 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état stationnaire, pour l'acier inoxydable en fonction de la période, pour  $z = L/2$ ,  $r = R_1$ ,  $r = R_2$ ,  $e_t = 0.06$  m**



**Figure 5.18 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état stationnaire pour l'acier inoxydable en fonction de la période, pour  $z = L/2$ ,  $r = R_1$ ,  $r = R_2$ ,  $e_t = 0.06$  m**



**Figure 5.19 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD pour un acier inoxydable en fonction de la période, pour  $z = L/2$  et  $r = R_1$ ,  $r = (R_1 + R_2)/2$ ,  $r = R_2$ ,  $e_t = 0.06$  m.**



**Figure 5.20 : Variation de la durée de vie (nombre de cycle\*période) pour un acier inoxydable en fonction de la période, pour  $z = L/2$ ,  $r = R_1$ ,  $r = (R_1 + R_2)/2$ ,  $r = R_2$ ,  $e_t = 0.06$  m.**

### 5.3.5.2 INFLUENCE DE L'AMPLITUDE

Le domaine d'amplitude étudié est compris entre 10000 et 22000 W/m<sup>2</sup> pour une période fixée à 60 s. On constate logiquement une augmentation des températures moyennes et par suite des contraintes moyennes sur une période en fonction de l'amplitude du flux, Figure 5.21 et Figure 5.22. Le nombre de cycles (ou durée de vie du matériau) ne peut que décroître avec l'augmentation de l'amplitude, Figure 5.23. Plus on augmente le flux (c.à.d. son amplitude) plus sa durée de vie diminue.

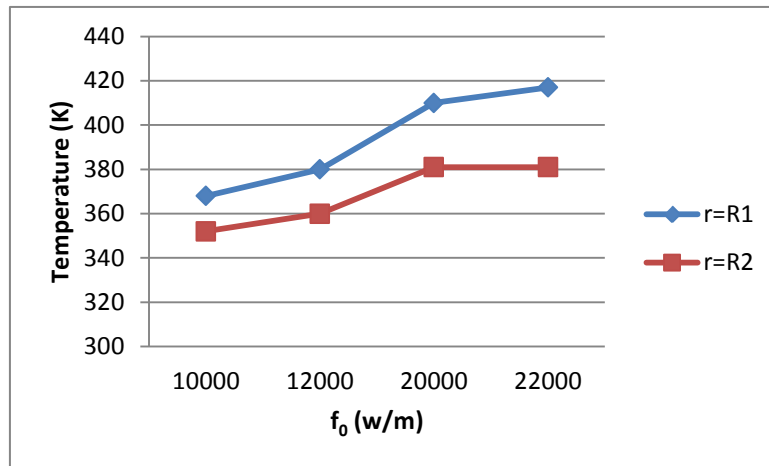


Figure 5.21 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'amplitude maximale du flux  $Q_0$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).

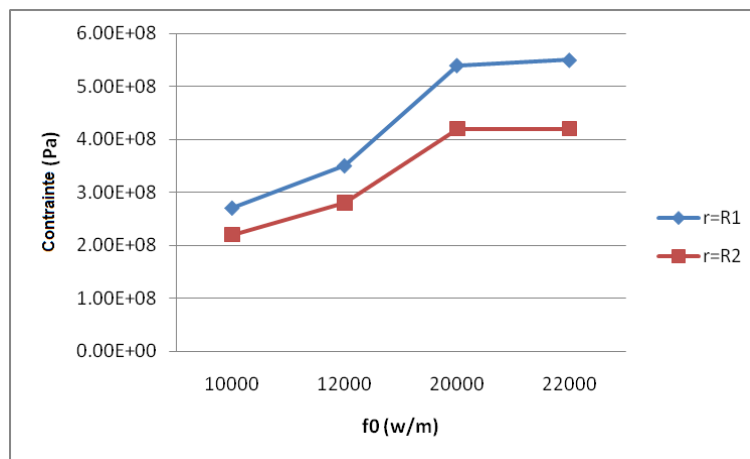


Figure 5.22 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'amplitude maximale du flux  $Q_0$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable)

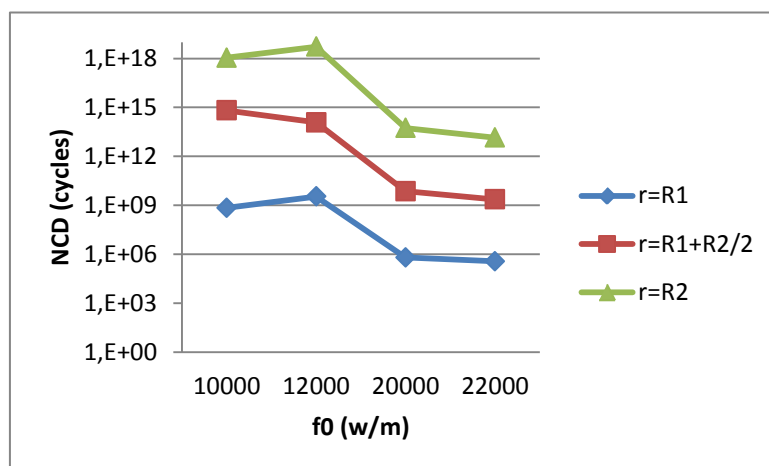
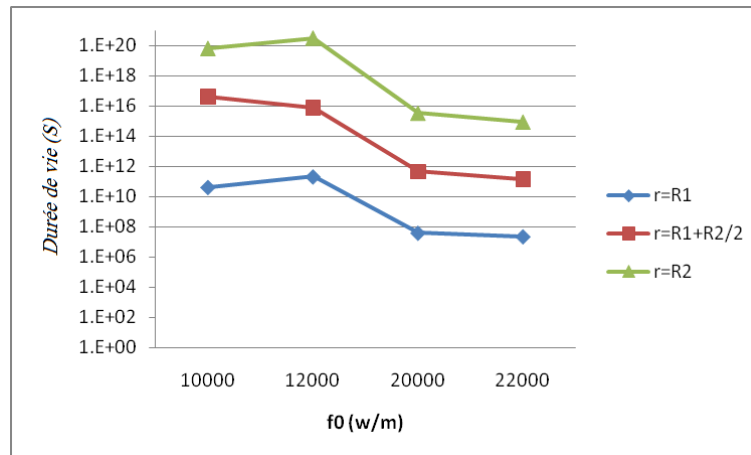


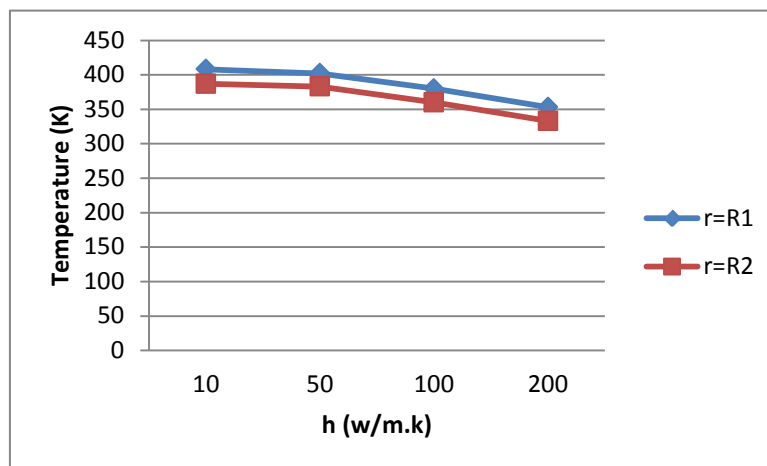
Figure 5.23 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction de l'amplitude du flux  $Q_0$ , (acier inoxydable,  $z = L/2$ ).



**Figure 5.24 : Variation de la durée de vie Lft en fonction de l'amplitude du flux  $Q_0$ , (acier inoxydable,  $z = L/2$ ).**

### 5.3.5.3 INFLUENCE DES ECHANGES CONVECTIFS

Le domaine du coefficient d'échange  $h$  analysé simule des situations d'échange normales (naturelles) avec l'ambient jusqu'aux situations d'échanges forcés (refroidissement par exemple). On constate que l'augmentation de  $h$  se traduit par une diminution de la température, Figure 5.25 et donc de la contrainte Figure 5.26. Cette baisse de contrainte entraîne par la suite une augmentation du nombre de cycles à l'endommagement ou de durée de vie du matériau, augmentation observable même au niveau de la surface intérieure qui est directement sollicitée par le flux de chaleur, Figure 5.27.



**Figure 5.25 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction du coefficient d'échange  $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).**

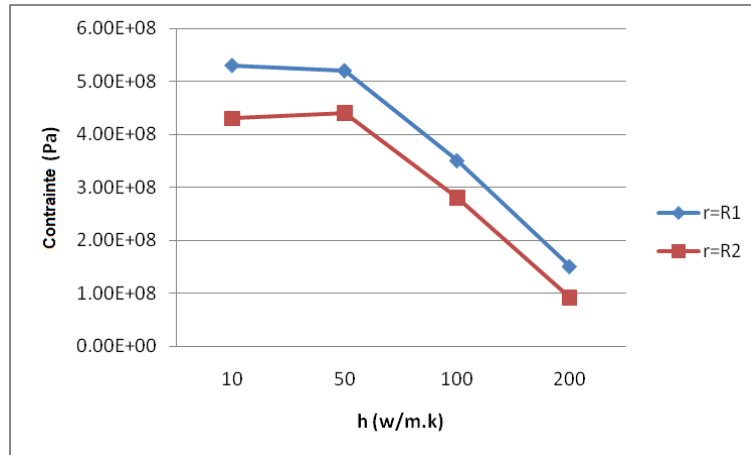


Figure 5.26 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction du coefficient d'échange  $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).

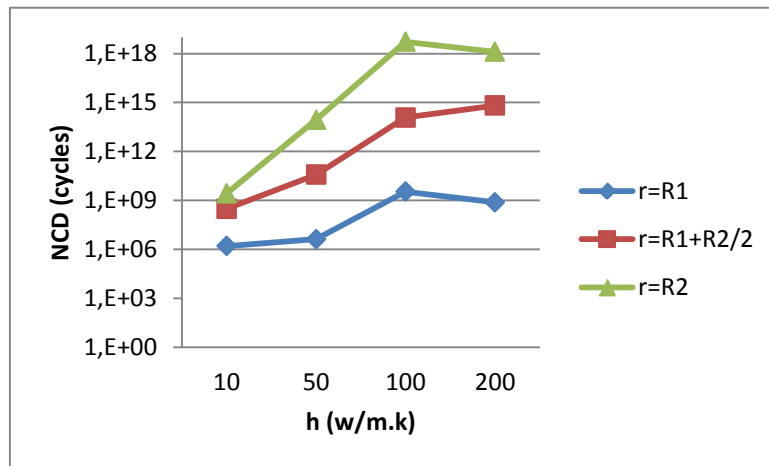


Figure 5.27 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction du coefficient de convection  $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).

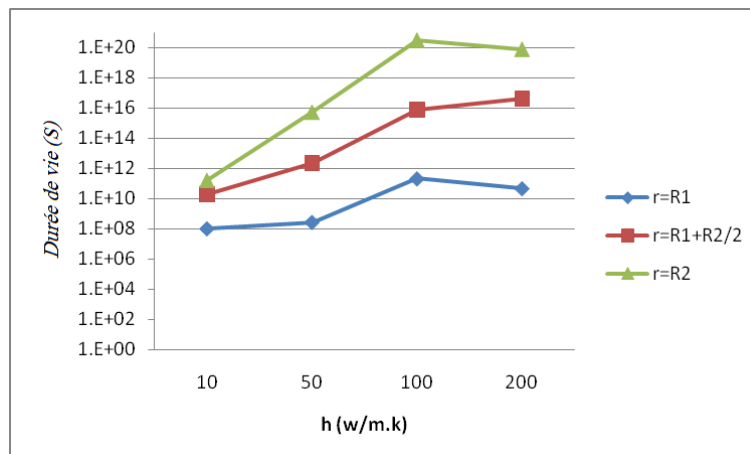
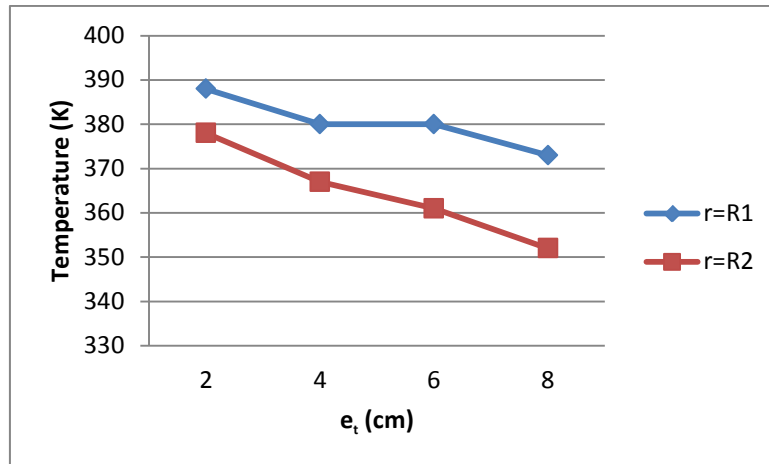


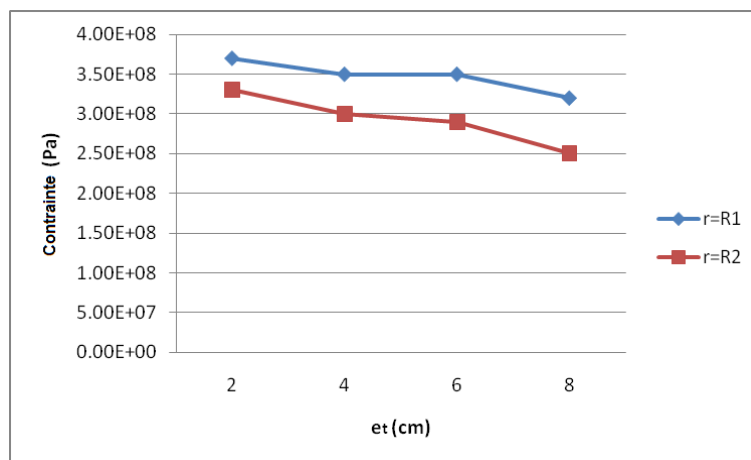
Figure 5.28 : Variation de la durée de vie  $L_{ft}$  en fonction du coefficient de convection  $h$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).

### 5.3.6 INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DU MATERIAU

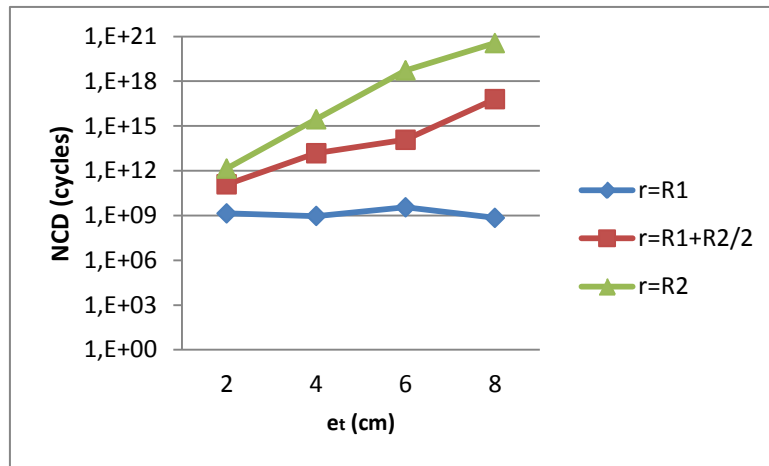
L'augmentation de l'épaisseur entraîne une baisse de la température et de la contrainte, voir Figure 5.29 et Figure 5.30 et par suite une augmentation du nombre de cycles à l'endommagement du matériau et par conséquent de sa durée de vie, Figure 5.31 et Figure 5.32. On retrouve un comportement similaire au cas précédent sur l'influence du coefficient d'échange convectif.



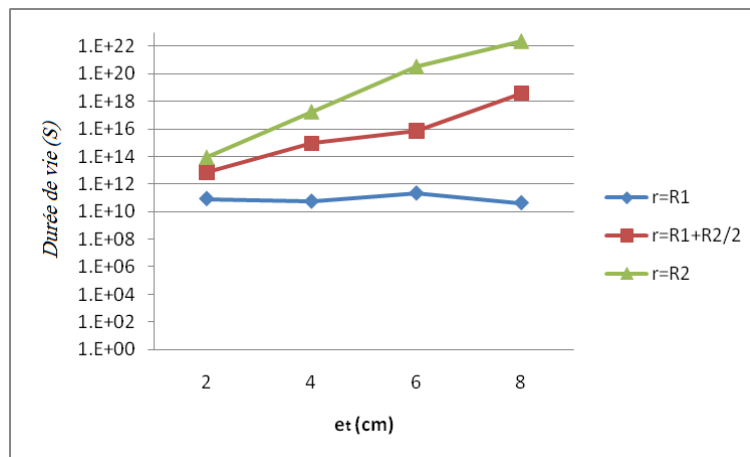
**Figure 5.29 : Variation de la température moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'épaisseur totale  $e_t$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).**



**Figure 5.30 : Variation de la contrainte moyenne maximale sur une période à l'état quasi-stationnaire en fonction de l'épaisseur totale  $e_t$ , ( $z = L/2$ , acier inoxydable).**



**Figure 5.31 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement NCD en fonction de l'épaisseur totale  $e_t$ , (acier inoxydable,  $z = L/2$ ).**

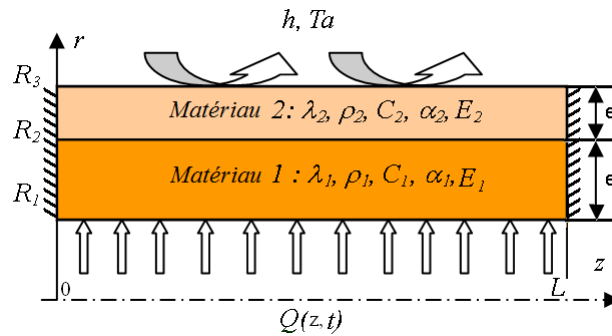


**Figure 5.32 : Variation de la durée de vie Lft en fonction du coefficient de convection  $h$ , (acier inoxydable,  $z = L/2$ ).**

## 5.4 MATERIAU BICOUCHE

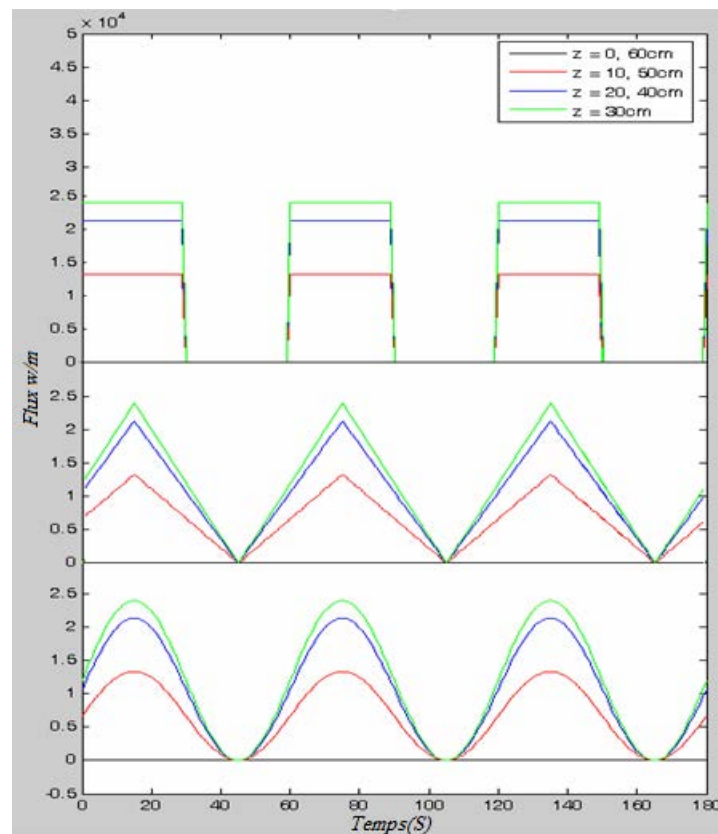
### 5.4.1 PRESENTATION DU PROBLEME

Le matériau bicouche étudié, Figure 5.33, a été déjà présenté dans le Chapitre 3. Les caractéristiques des deux couches (couche 1 en acier inoxydable, couche 2 en acier) sont données dans le Tableau 5.1 et le Tableau 5.2 (pour le module d'Young) aux paragraphes 5.3.1 et 5.3.2. Les conditions thermiques et mécaniques de l'étude sont similaires à celles présentées ci-dessus.



**Figure 5.33 : Matériau bicouche étudié.**

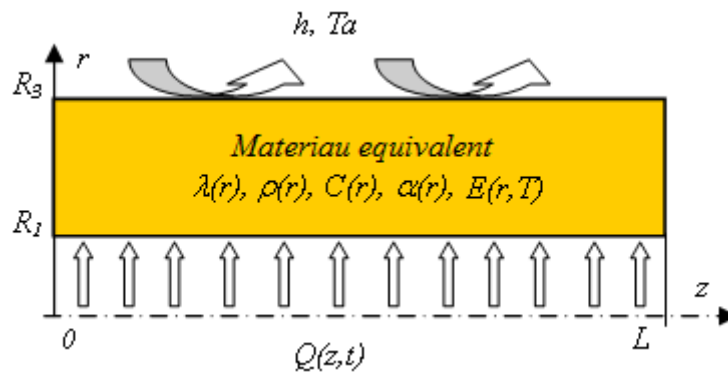
En plus d'une variation sinusoïdale, en fonction du temps, pour le flux de chaleur, des sollicitations de types carré et triangulaire, voir Figure 5.34, ont été aussi analysées et comparées. Les équations des flux de chaleur sont données par les équations (4.26), (4.27) et (4.28).



**Figure 5.34 : Variation du flux thermique appliqué (carré, triangulaire, sinusoïdal).**

La recherche du matériau équivalent, Figure 5.35 au matériau bicouche repose sur l'approche d'homogénéisation présentée dans le Chapitre 3.





**Figure 5.35: Matériau équivalent.**

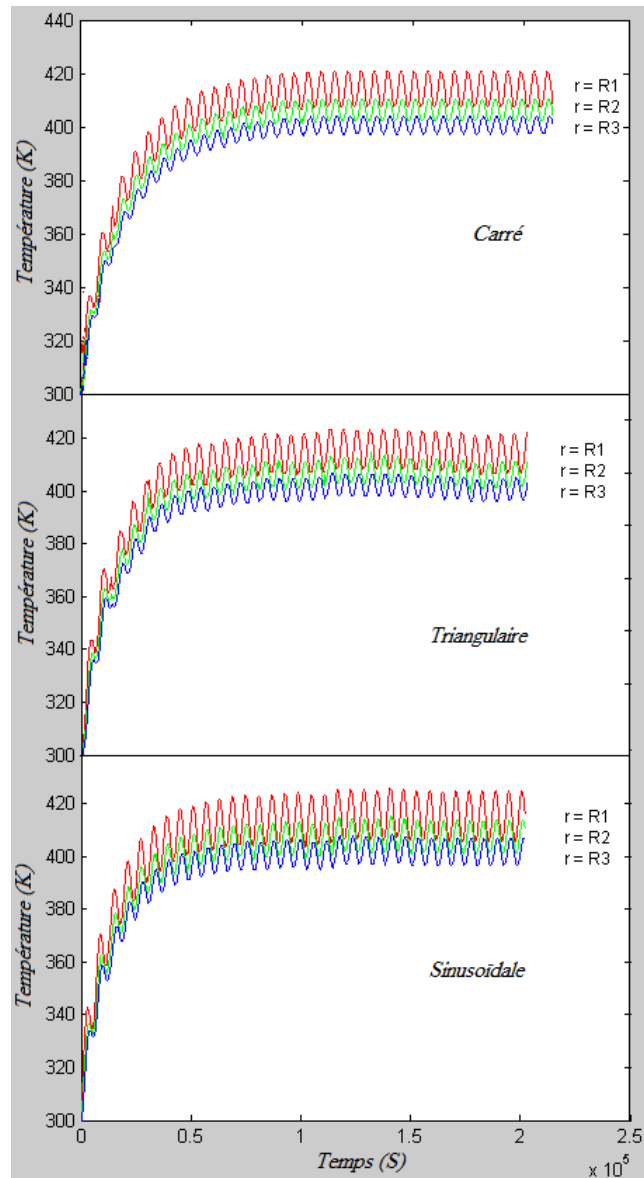
#### 5.4.2 RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSION

L'étude numérique est conduite dans les conditions citées dans le Tableau 5.1 et le Tableau 5.2 et avec les mêmes conditions aux limites,  $h = 100 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ .

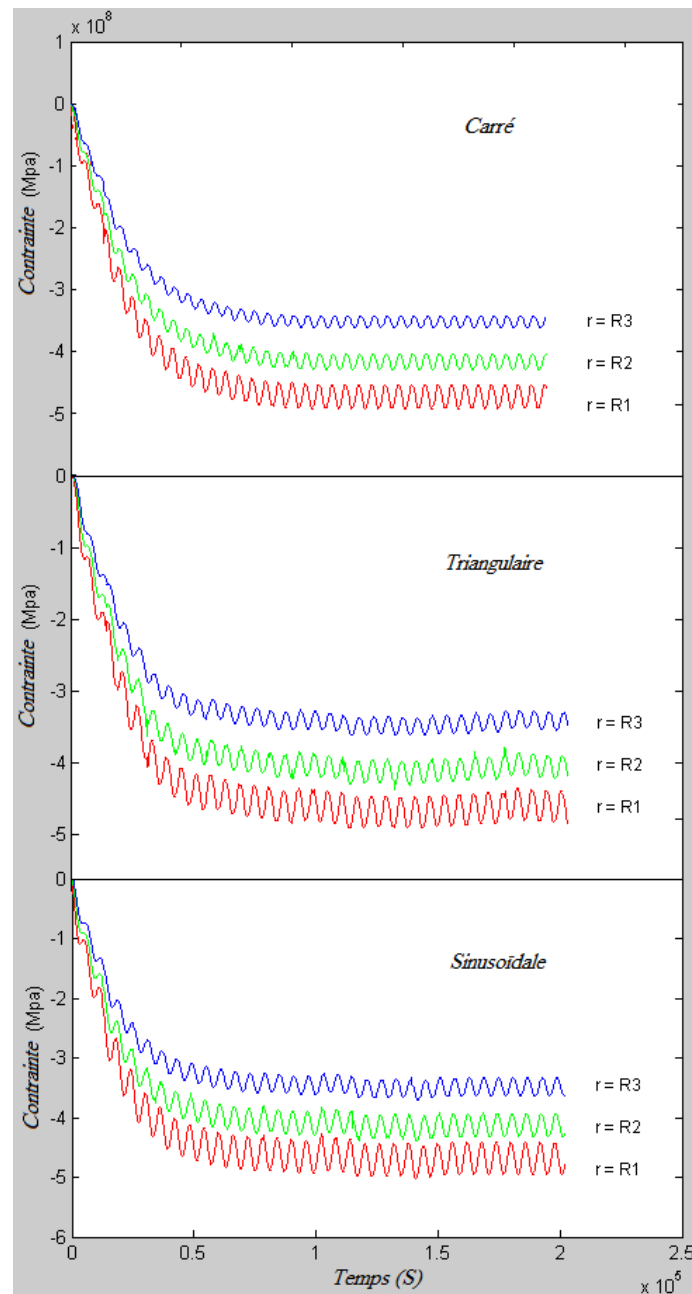
Rappelons que dans cette étude, nous avons pris en considération, en plus du régime élastique, le régime plastique. Son influence agit au niveau des termes sources dans l'équation de l'énergie (voir équation (3.31)). Les résultats présentés dans ce paragraphe montrent l'influence de la forme du flux et de sa périodicité sur l'endommagement du multimatériau pour différents pourcentages d'épaisseurs des deux couches.

#### 5.4.3 INFLUENCE DE LA FORME DU FLUX

Pour les trois formes de flux de chaleur imposé sur la surface interne du multimatériau, les évolutions des températures et des contraintes, aux points ( $r=R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ ),  $z=L/2$ , sont présentées, pour une période  $\tau = 60 \text{ s}$ , respectivement sur la Figure 5.36 et la Figure 5.37. Puisque le matériau reçoit la même quantité de chaleur sur une période pour les trois types de flux, on remarque que l'ordre de grandeurs des températures et contraintes est quasiment identique pour les trois cas, seules des petites différences non significatives, au niveau de la forme et de l'amplitude, peuvent être observées.



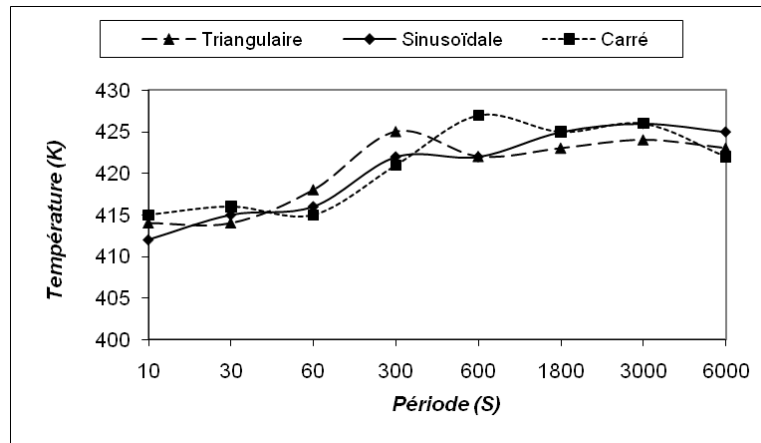
**Figure 5.36 : Evolution de la température, sous différentes formes du flux thermique, ( $e_1 = e_2 = 0.03$  m,  $\tau = 60$  s).**



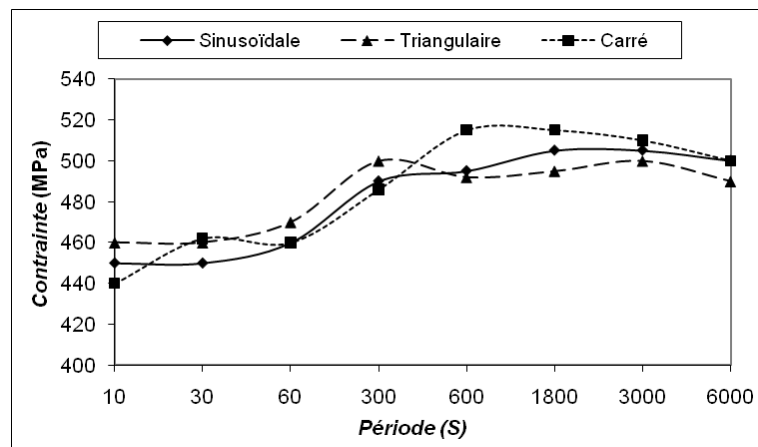
**Figure 5.37 : Evolution des contraintes, sous différentes formes du flux thermique, ( $e_1 = e_2 = 0.03 \text{ m}$ ,  $\tau = 60 \text{ s}$ ).**

#### 5.4.4 INFLUENCE DE LA PERIODE

Les effets de la période sur les températures et les contraintes, présentées respectivement sur la Figure 5.38 et la Figure 5.39, sous forme de moyenne en régime quasi-stationnaire, montrent un comportement similaire pour les trois formes de flux et que les écarts, sur le domaine des périodes (10 s à 6000 s) étudiées restent inférieurs à 10% pour les trois cas.

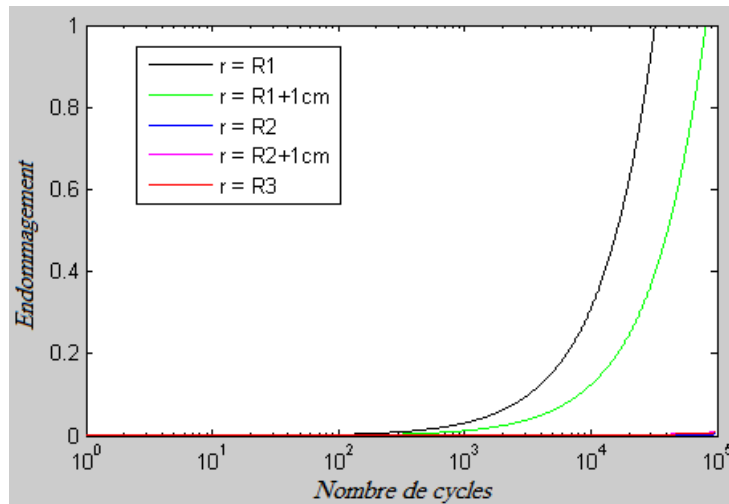


**Figure 5.38 : Variation de la température moyenne à l'état stationnaire,**  
 $(z = L/2, r = R_1, e_1 = e_2 = 0.03 \text{ m})$

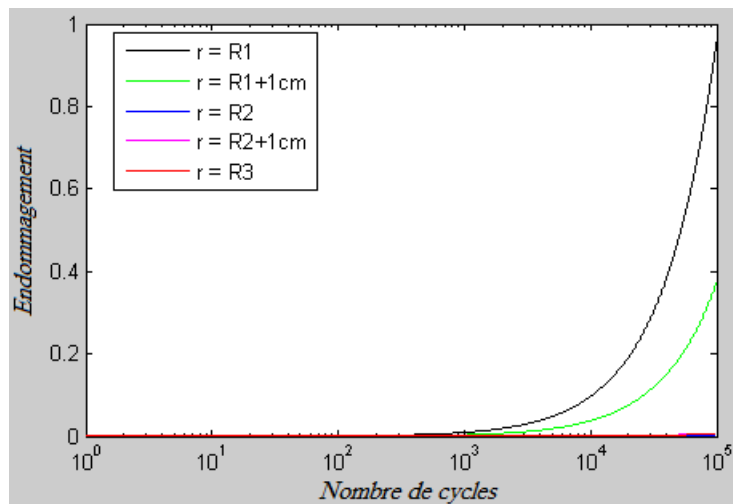


**Figure 5.39 : Variation de la contrainte moyenne à l'état stationnaire**  
 $(z = L/2, r = R_1, e_1 = e_2 = 0.03 \text{ m})$

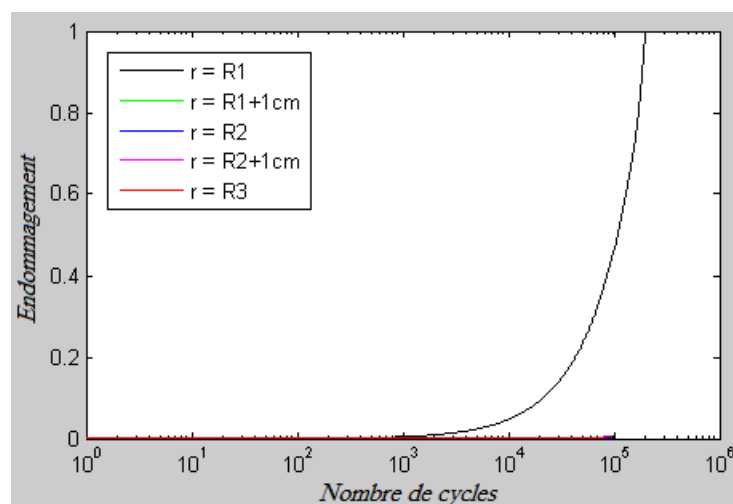
L'endommagement  $D$ , sur les surfaces intérieure  $r = R_1$  et extérieure  $r = R_3$ , à l'interface  $r = R_2$  et aux points  $r = R_1 + 1 \text{ cm}$  et  $r = R_2 + 1 \text{ cm}$  internes aux couches, est présenté, pour chaque forme de flux sur la Figure 5.40, la Figure 5.41 et la Figure 5.42 respectivement pour les cas sinusoïdal, triangulaire et carré. Les résultats montrent un comportement thermomécanique différent entre les trois types de flux. En effet, sur une base de  $10^6$  cycles, le cas sinusoïdal, suivi du cas triangulaire puis du cas carré, endommage en premier la surface interne et pratiquement la moitié de la couche interne du matériau bicouche.



**Figure 5.40 : Evolution de l'endommagement, cas sinusoïdal,  $\tau = 6000$  s,  $e_1 = e_2 = 0.03$  m**



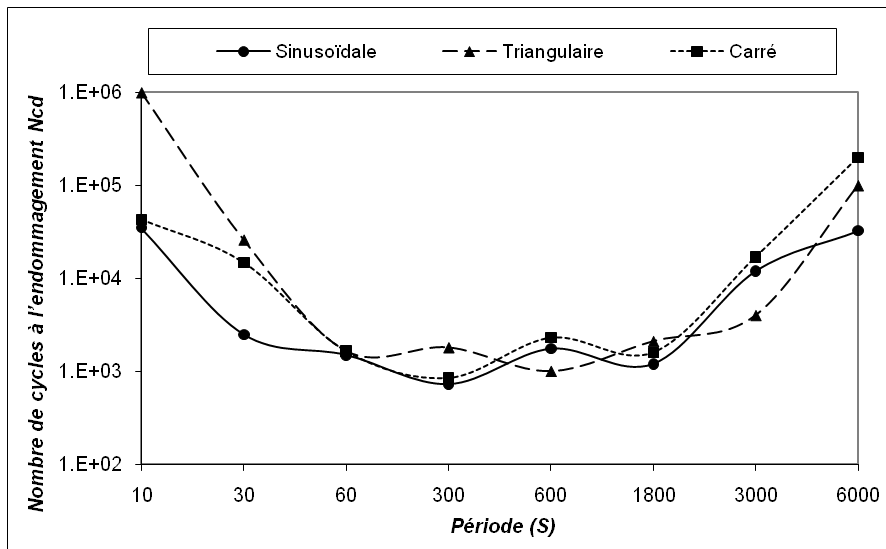
**Figure 5.41 : Evolution de l'endommagement cas triangulaire,  $\tau = 6000$  s,  $e_1 = e_2 = 0.03$  m**



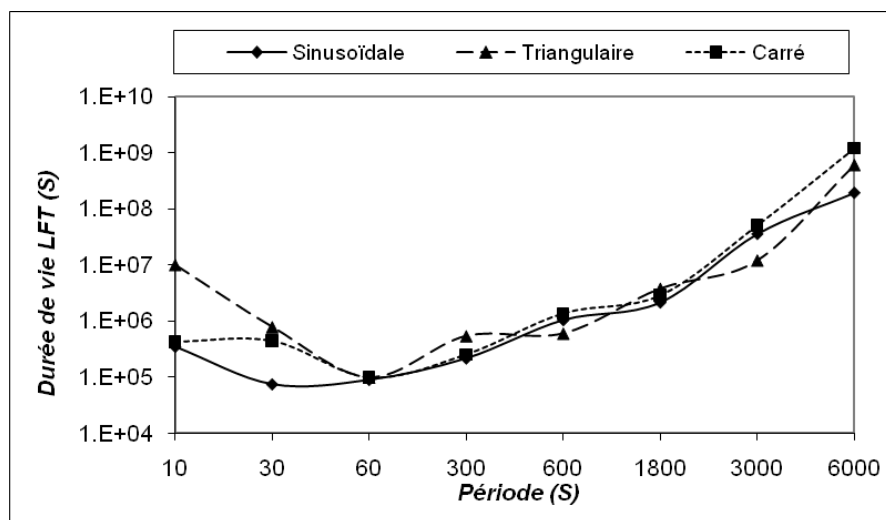
**Figure 5.42 : Evolution de l'endommagement cas carré,  $\tau = 6000$  s,  $e_1 = e_2 = 0.03$  m**

La Figure 5.43 et la Figure 5.44 montrent le nombre de cycles pour atteindre l'endommagement et la durée de vie en fonction de la période. On remarque que dans le

domaine de périodes comprise entre 60 et 1800 s, l'endommagement est plus rapide ( $N_{cd}$  minimum). A l'extérieur de ce domaine, le matériau se trouve sollicité soit rapidement  $\tau < 60$  s soit très lentement  $\tau > 1800$  s avec des oscillations quasi inexistantes ce qui n'est pas le cas pour les autres périodes où leur influence sur l'endommagement est remarquable. Le matériau se fatigue alors plus vite, puisqu'il est sollicité par de fortes variations thermiques. La Figure 5.44 montre une durée de vie minimale atteinte à la période  $\tau = 60$  s. Il faut donc éviter cette période de fonctionnement si on veut augmenter sa durée de vie.



**Figure 5.43 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction de la période.**



**Figure 5.44 : Durée de vie en fonction de la période.**

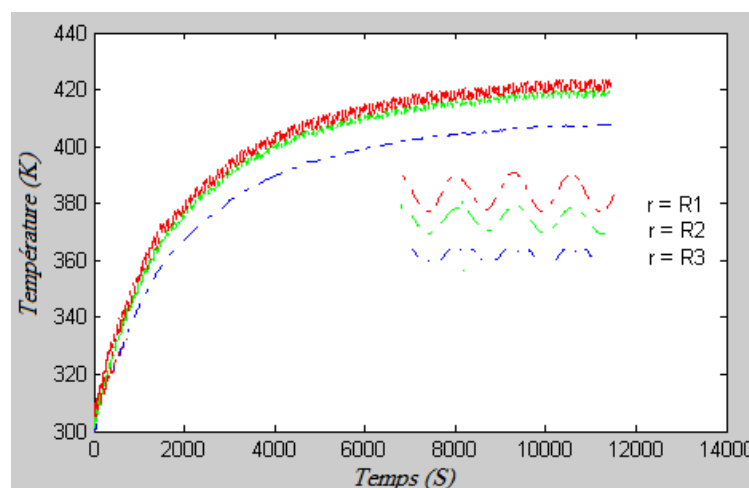
#### 5.4.5 INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR DES COUCHES

Dans cette section, nous faisons une comparaison entre les limites d'endommagement tout en considérant différents pourcentages d'épaisseur des deux matériaux. Sur la Figure 5.45 et la Figure 5.46 on présente l'évolution des températures et des contraintes en

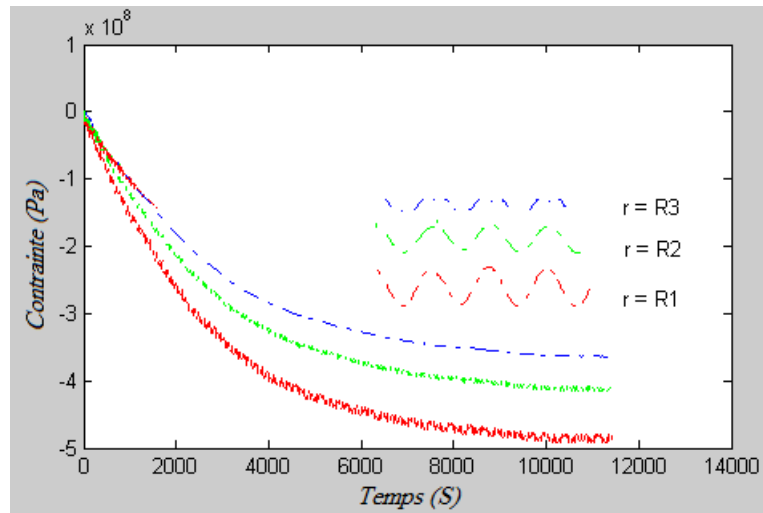
fonction des charges thermiques appliquées. Rappelons que le flux appliqué dans ce cas est de forme sinusoïdale, d'amplitude 12000 W/m et de période 60 s.

Pour une épaisseur totale fixée du matériau  $e=e_1+e_2=0,06$  m, nous avons analysé le comportement thermomécanique du multimatériau en faisant varier l'épaisseur de la couche interne  $e_1$  (de 0,01 m à 0,05 m par pas de 0,01 m). Les résultats de l'endommagement local, le long de la direction radiale, en  $z=L/2$ , sont présentés sur les figures allant de la Figure 5.47 à la Figure 5.51. On constate alors que plus l'épaisseur  $e_1$  augmente plus le nombre de cycles à l'endommagement augmente avant de décroître à partir de  $e_1=0,03$  m. La Figure 5.50 qui correspond à  $e_1=0,04$  m présente un nombre de cycles presque identique à celui obtenu pour  $e_1=0,01$  m pour la surface intérieure. En revanche, l'endommagement se propage plus vite à l'intérieur de la couche 1, comparé au cas  $e_1=0,01$  m puisqu'il occupe le plus d'espace,  $e_1=0,04$  m. Ces remarques peuvent être observées sur La Figure 5.52 et la Figure 5.53 qui montrent respectivement les variations des températures internes ( $r=R_1$ ) et externe ( $r=R_3$ ) et l'endommagement du matériau pour différentes valeurs de l'épaisseur  $e_1$ . La valeur  $e_1=e_2=0,03$  m apparaît donc comme un optimum intéressant qui correspond aux températures les plus faibles et au nombre de cycles le plus élevé.

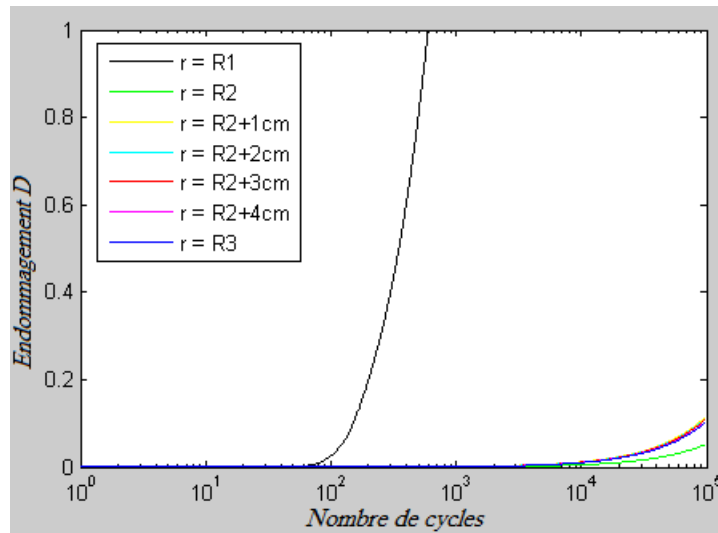
A partir de ces deux figures, nous pouvons conclure que pour les hautes valeurs des températures dans le corps (Figure 5.52 pour  $e_1 \leq 0,02$  m et  $e_1 \geq 0,04$ ) correspond une faible résistivité et une faible limite d'endommagement (Figure 5.53). Contrairement, quand la valeur de la température est faible ( $e_1=e_2=0,03$  m), les contraintes dans le matériau augmentent et la limite d'endommagement est élevée; ceci signifie que le matériau peut résister plus. Le but est donc de maximiser la durée de vie du multi-matériau avec un bon transfert thermique. Dans cette étude, la valeur optimale de l'épaisseur  $e_1$  pour atteindre ce but est égale à 0.03 m.



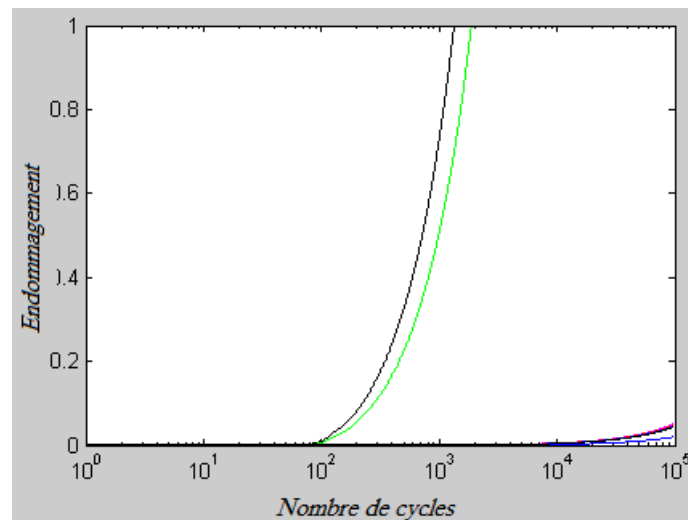
**Figure 5.45: Evolution des températures pour un flux thermique sinusoïdal ( $e_1=0.01$  m et  $e_2=0.05$  m)**



**Figure 5.46: Evolution des contraintes pour un flux thermique sinusoïdal ( $e_1=0.01$  m et  $e_2=0.05$  m)**



**Figure 5.47 : Evolution de l'endommagement pour  $e_1=0.01$  m et  $e_2=0.05$  m**



**Figure 5.48 : Evolution de l'endommagement pour  $e_1=0.02$  m et  $e_2=0.04$  m**



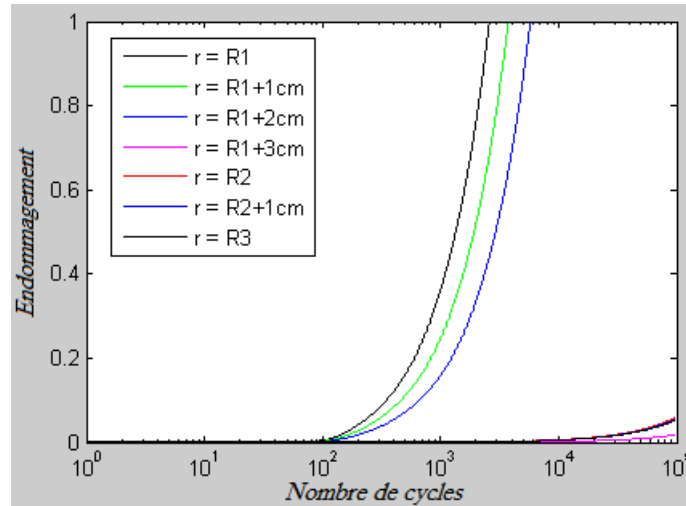


Figure 5.49 : Evolution de l'endommagement pour  $e_1=0.03$  m et  $e_2=0.03$  m.

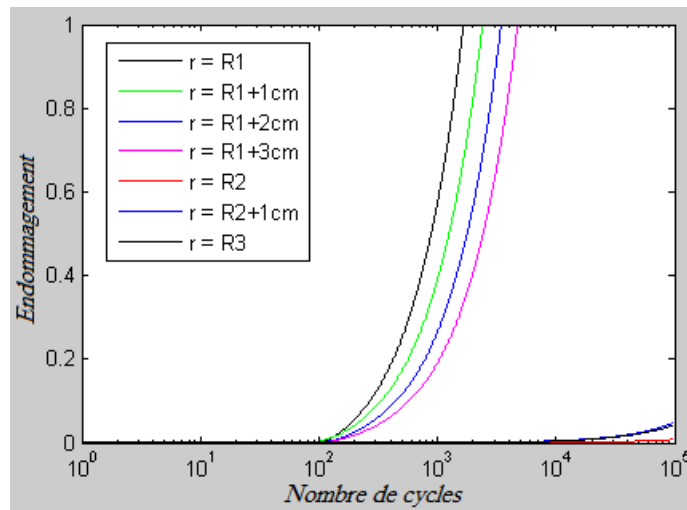


Figure 5.50 : Evolution de l'endommagement pour  $e_1=0.04$  m et  $e_2=0.02$  m

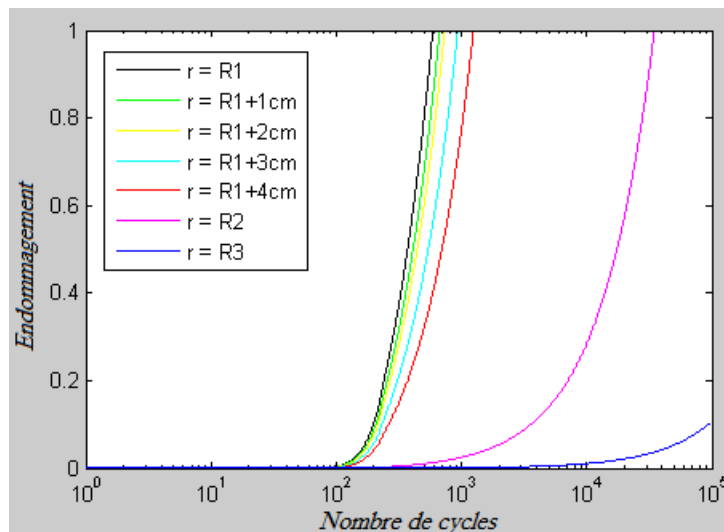


Figure 5.51 : Evolution de l'endommagement pour  $e_1=0.05$  m et  $e_2=0.01$  m

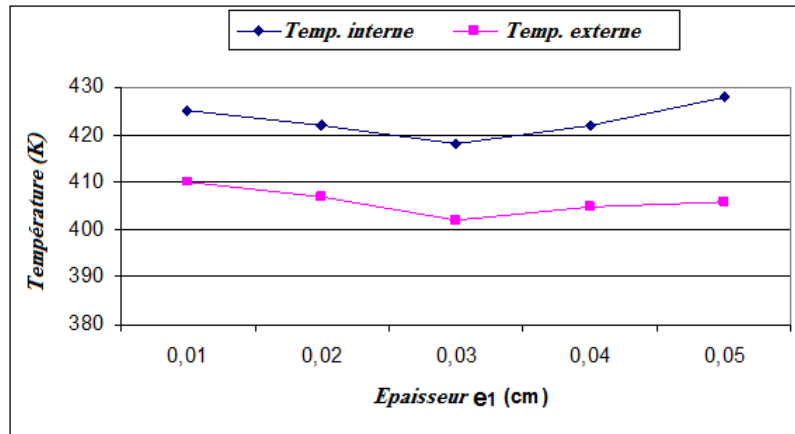


Figure 5.52 : Variation de la température en fonction de  $e_1$ , ( $e_1 + e_2 = 0.06$  m)

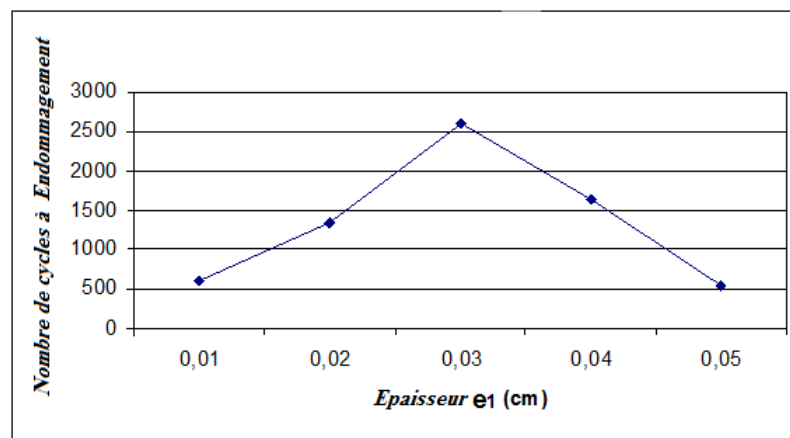


Figure 5.53 : Variation de l'endommagement en fonction de  $e_1$ , ( $e_1 + e_2 = 0.06$  m)

#### 5.4.6 INFLUENCE DE L'ÉPAISSEUR TOTALE DU MULTI-MATÉRIAU

Les résultats des calculs analytiques, présentés sur la Figure 5.54 à la Figure 5.59, sont obtenus dans les conditions décrites ci-dessus en fonction de la période du flux imposé (sinusoïdal dans ce cas) et pour différentes épaisseurs totales du multimatériau avec  $e_1 = e_2$ . Nous pouvons conclure les remarques suivantes :

- Quand l'épaisseur totale du matériau augmente, la durée de vie et le nombre de cycles, pour atteindre l'endommagement, augmentent (voir Figure 5.58 et Figure 5.59). Ceci s'explique par le fait que la température maximale et les contraintes diminuent quand l'épaisseur totale augmente, voir Figure 5.56 et Figure 5.57 au point ( $r = R_1, z = L/2$ ).

- Les Figure 5.54 et Figure 5.55 représentent respectivement les amplitudes de la température et des contraintes dans le matériau à l'intérieur  $r = R_1$  et à l'extérieur  $r = R_3$ , en  $z = L/2$ . On voit que plus l'épaisseur augmente plus les amplitudes à l'intérieur augmentent et qu'en revanche, elles diminuent à l'extérieur à cause de la faible influence de la condition de refroidissement.

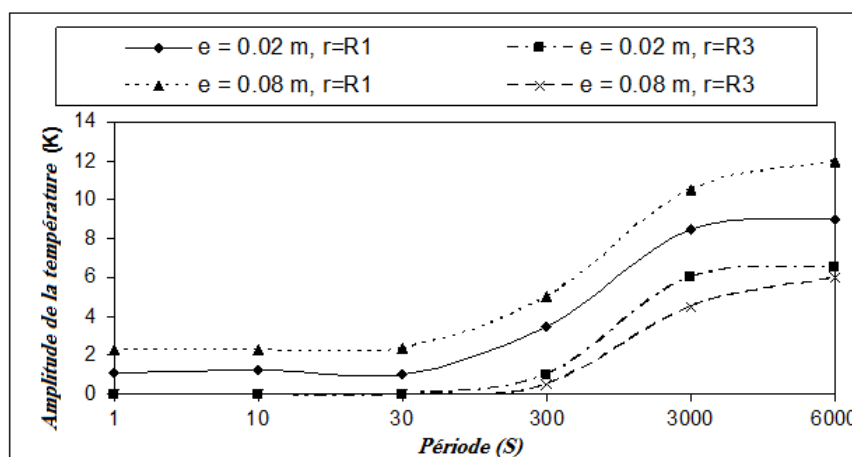
Le nombre de cycles à l'endommagement, Figure 5.58, présente, pour les épaisseurs analysées, des minimas localisés sur le domaine de périodes  $\tau \in [30, 2400]$ . Si la décroissance du nombre de cycles est relativement rapide pour les hautes fréquences (faibles périodes), la croissance est revanche relativement lente pour les faibles fréquences (grandes périodes). Celle-ci est causée par l'effet de relaxation à des périodes élevées où les amplitudes maximales des températures et des contraintes ont tendance à se stabiliser aux valeurs élevées de la période.

La durée de vie du matériau  $LFT = N_c \times \tau$ , présentée sur la Figure 5.59, montre que celle-ci augmente en général avec l'épaisseur du matériau et présente une croissance en fonction de la période pour les faibles épaisseurs ( $e = 0.02 \text{ m}$  et  $e = 0.04 \text{ m}$ ), et ce malgré l'augmentation des valeurs des amplitudes de la température et des contraintes, voir Figure 5.56 et Figure 5.57.

Pour les épaisseurs et les périodes faibles (haute fréquence), le multi-matériau est plus sensible aux conditions imposées et donc il est sujet à un endommagement plus rapide et par suite à une durée de vie plus faible, malgré les faibles variations de la température et des contraintes [48],[53].

Pour les grandes épaisseurs, ( $e = 0.06 \text{ m}$ ,  $e = 0.08 \text{ m}$ ), la durée de vie présente, comme pour le nombre de cycles, des minimas sur un domaine défini par  $[25, 300]$ . Pour les périodes faibles, les amplitudes des oscillations de la température et des contraintes (Figure 5.54 et Figure 5.55), sont faibles et insuffisantes pour causer l'endommagement du multi-matériau.

Enfin, à travers ces résultats, on peut dire que pour un bon fonctionnement et une meilleure utilisation du matériau étudié, nous devons prendre en considération le facteur géométrique (épaisseur du matériau) et la période de la sollicitation thermique imposée. Il faut donc choisir une période de préférence hors du domaine  $[30, 600]$ .



**Figure 5.54 : Variation de l'amplitude maximale de la température à  $z = 0.5 L_r$  pour différentes périodes du flux thermique, ( $e_1 = e_2$ )**

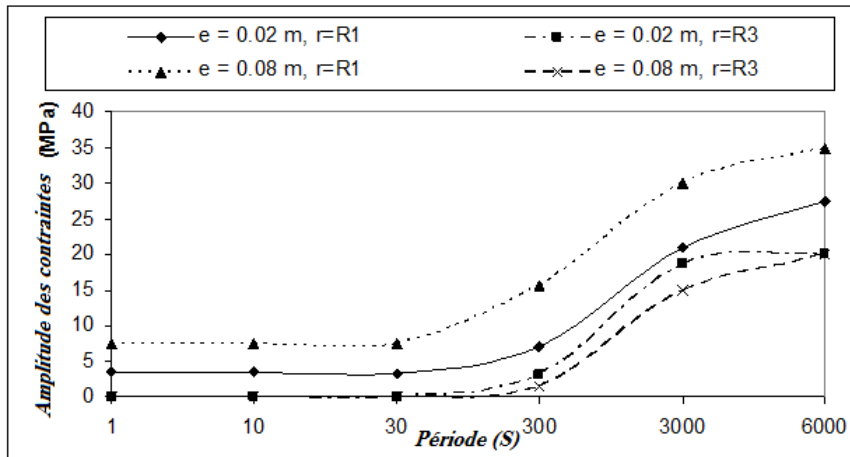


Figure 5.55 : Variation de l'amplitude des contraintes à  $z = 0.5 L$ , pour différentes périodes du flux thermique, ( $e_1 = e_2$ ).

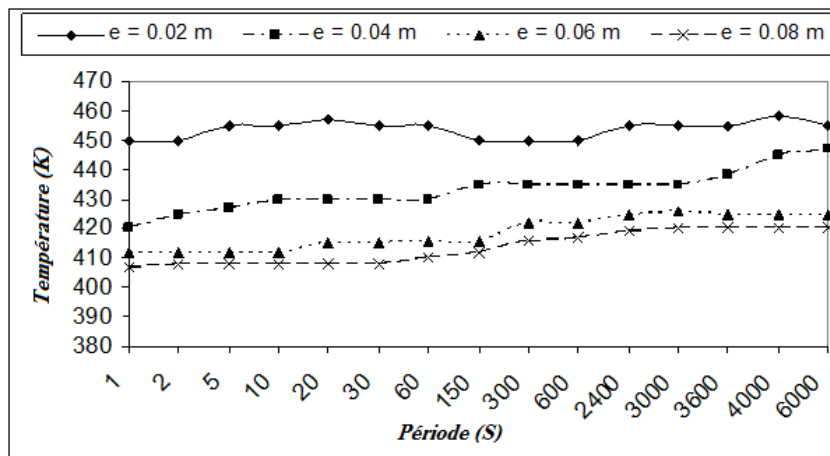


Figure 5.56 : Variation de la température moyenne de l'état stationnaire à  $z = 0.5 L$ , et  $r = R_1$ , pour différentes périodes du flux thermique (cas sinusoïdal) pour différentes épaisseurs totales  $e$  ( $e_1 = e_2$ ).

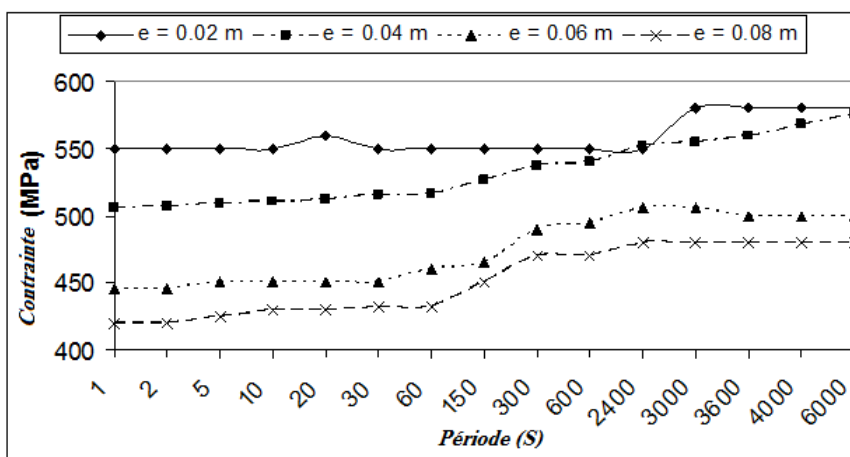
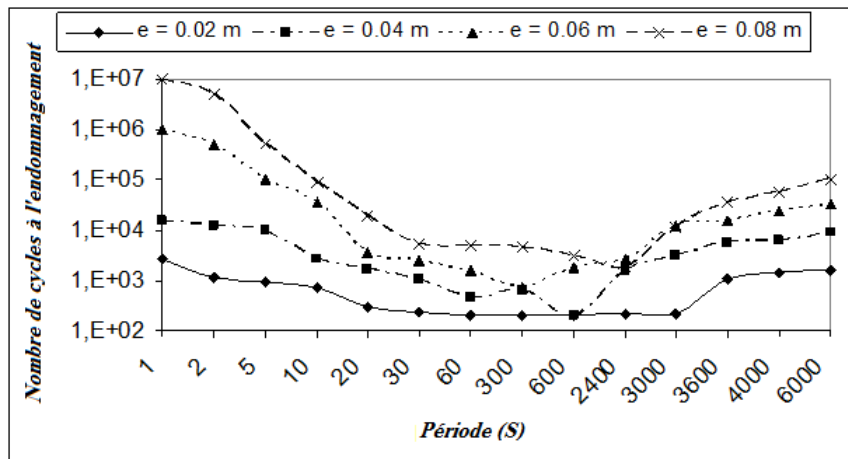
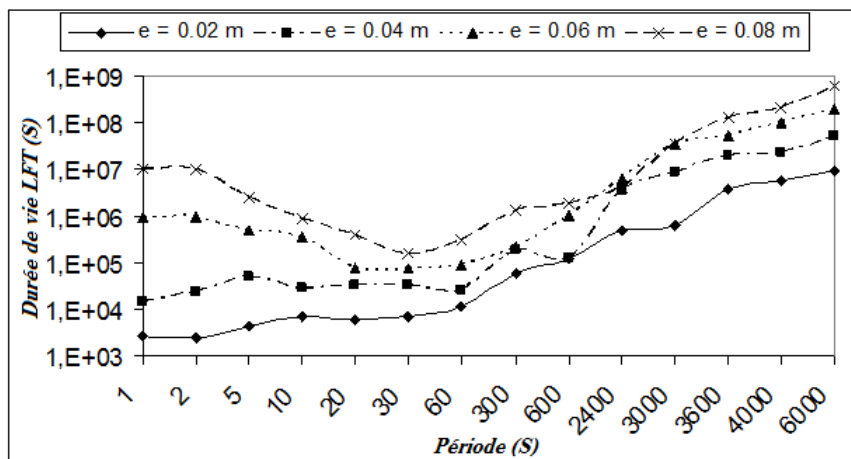


Figure 5.57 : Variation des contraintes moyennes de l'état stationnaire à  $z = 0.5 L$ , et  $r = R_1$ , pour différentes périodes du flux thermique (cas sinusoïdal), et différentes épaisseurs totales  $e$  ( $e_1 = e_2$ ).



**Figure 5.58 : Variation du nombre de cycles pour atteindre l'endommagement en fonction de la période du flux thermique sinusoïdal pour différentes épaisseurs totales.**



**Figure 5.59 : Variation de la durée de vie en fonction de la période pour différentes épaisseurs totales.**

## 5.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'étude de l'endommagement des multi-matériaux dans le régime thermo-élasto-plastique. Le modèle d'endommagement est appliqué sur le matériau équivalent (ou homogénéisé). L'endommagement est représenté par le nombre de cycles et la durée de vie pour différentes formes du flux thermique appliqué et pour différentes épaisseurs du multi-matériau. Les principaux résultats sont résumés comme suit :

- L'application des trois types du flux thermiques; sinusoïdale, triangulaire et carré, donnent des résultats quasiment similaires sur l'endommagement. On ne peut pas dire qu'une forme donnée du flux est meilleure qu'une autre. Ceci est obtenu pour différentes valeurs de la période de l'excitation.

- La fréquence d'excitation thermique appliquée a une influence remarquable sur l'endommagement. Nous avons observé la présence de minimas locaux pour la durée de vie

sur des intervalles de périodes. Leurs valeurs dépendent bien évidemment des propriétés physiques et géométriques des matériaux étudiés.

- L'amplitude du flux thermique appliqué possède évidemment une influence directe sur l'endommagement. Si l'amplitude augmente, la durée de vie et le nombre de cycles à l'endommagement diminuent.

- Nous avons également remarqué que la distribution des pourcentages des épaisseurs des couches du multimatériau étudié possède un impact sur sa durée de vie. Une optimisation de ce paramètre a été faite ici dans le cas de couches en acier et en acier inoxydable. Cette optimisation permet d'obtenir un transfert thermique maximal (faibles valeurs de températures) et une durée de vie maximale du multi-matériau.



# CHAPITRE 6 APPLICATION SUR UN CYLINDRE MOTEUR

## 6.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous proposons un calcul de l'endommagement sur l'exemple d'un cylindre moteur à combustion interne.

Ce type d'application a été choisi pour son intérêt pratique puisqu'on le rencontre dans de nombreux systèmes mécaniques et dans le transport en particulier. Après une certaine période de fonctionnement, il est bien connu que chaque moteur a besoin d'une maintenance qui couvre ses différentes composantes (cylindre, piston, segments, culasse, etc...). Dans la majorité des cas, ce besoin de maintenance concerne la fatigue thermomécanique.

L'endommagement dans le collecteur avec une charge thermique constante et dans la culasse du moteur a déjà fait l'objet de quelques travaux à caractère numérique, [46] et [54]. En ce qui nous concerne, nous nous sommes intéressés à l'étude thermomécanique du cylindre moteur en se rapprochant le plus possible des sollicitations thermiques auxquelles il est soumis (calcul des contraintes et endommagement).

L'endommagement n'est pas limité au régime plastique uniquement, il peut se produire aussi en régime élastique. Selon [41], la déformation peut être considérée élastique ou quasi-élastique et le nombre de cycles à l'endommagement peut parfois dépasser les valeurs attendues (entre  $10^4$  et  $10^9$ ) en fonction des matériaux utilisés et du type d'application. Les contraintes étant toujours inférieures à la limite élastique du matériau.

Dans cette application, l'étude est conduite, en régime élastique, sur un cylindre moteur en acier, sollicité par des charges thermomécaniques variables.

## 6.2 DESCRIPTION DE L'APPLICATION

Le modèle étudié est assimilé à un cylindre « moteur », en acier, fixé à ses deux extrémités. D'un côté, il est fixé par le bloc du cylindre, et de l'autre par la culasse. A l'intérieur, il y a un flux de chaleur variable et à l'extérieur, il est refroidi par convection par circulation d'eau, voir Figure 6.1.

En plus des conditions citées dans le Tableau 3.1 et le Tableau 3.2, nous avons supposé :

Pour le problème thermique :

Conditions initiales :  $T_0 = 300 \text{ K}$

Conditions d'échange par convection :  $T_a = 300 \text{ K}$ ,  $h = 2000 \rightarrow 4000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$



Flux de chaleur interne : La modélisation exacte des échanges de chaleur à l'intérieur d'un cylindre moteur à quatre temps s'avère difficile à évaluer. Nous pouvons cependant, approcher son fonctionnement par la relation (6.1) qui traduit de façon raisonnable la variation transitoire périodique du flux pour un cycle à quatre temps ( $1 + \sin(\omega t)$ ), et la variation spatiale le long de l'axe du cylindre ( $1 - z/L$ ) (diminution du flux en fin de course du piston). Le flux thermique peut donc être modélisé par l'équation suivante :

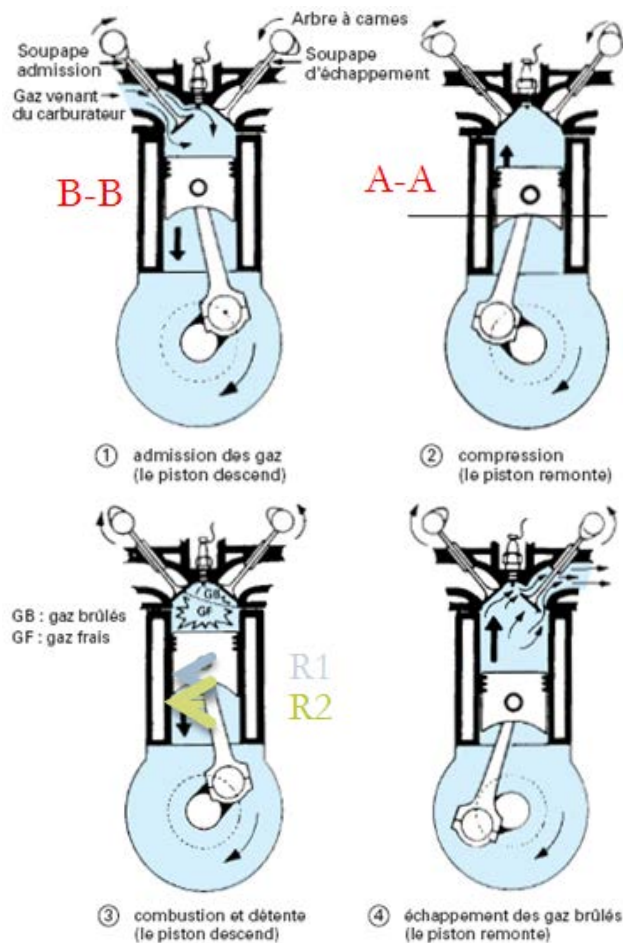
$$(6.1) \quad Q(z, t) = Q_0(1 - z/L)(1 + \sin(\omega t))$$

Avec :  $Q_0 = 1 \rightarrow 2 \text{ MW/m}^2$ ,  $N = 250 \rightarrow 3000 \text{ cycles/mn}$

Pour le problème mécanique :

$$V = 0, \text{ en } z = 0 \text{ et } z = L$$

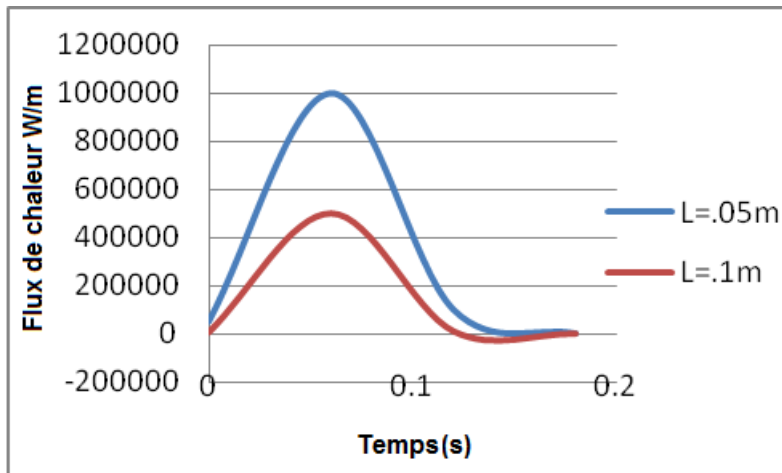
$$U = V = \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \text{à } t = 0$$



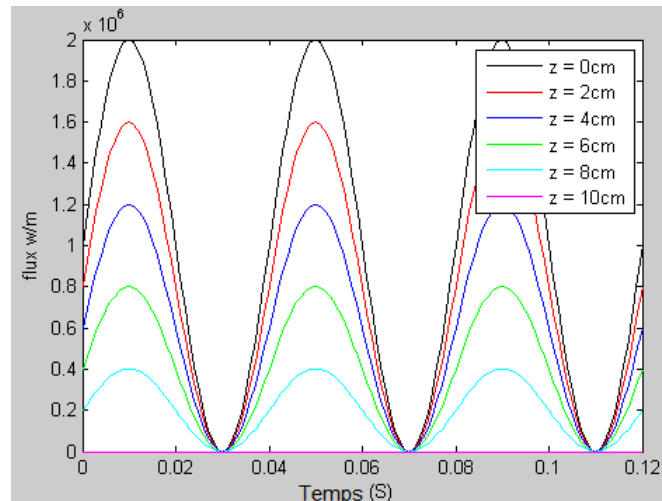
**Figure 6.1 : Présentation des quatre temps d'un cycle moteur avec combustion interne.**

### 6.3 RESULTATS NUMERIQUE ET DISCUSSION

La Figure 6.2 et la Figure 6.3 montrent respectivement des exemples de variations du flux de chaleur interne réelles et simulées.



**Figure 6.2 : Variation réelle du flux thermique interne au cylindre durant une période,  $N=500$  tr/mn,  $Z=0,05$  m et  $Z=0,1$  m.**



**Figure 6.3 : Variation du flux thermique simulé à différentes positions le long du cylindre,  $N= 1500$  tr/mn**

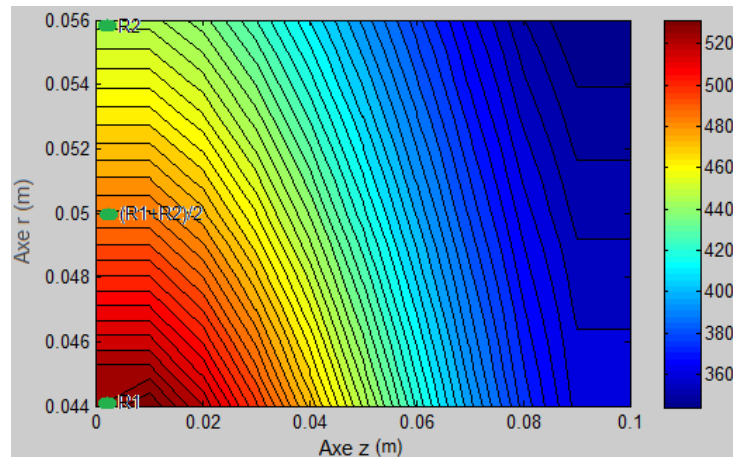
Nous présenterons les résultats obtenus pour quatre cas de simulation, voir Tableau 6.1 , en faisant varier le nombre  $N$  de cycles (ou tours) par minutes, la valeur du flux  $Q_0$  et la valeur du coefficient d'échange  $h$  à l'extérieur. Ces exemples illustrent quelques cas de systèmes moteurs à quatre temps, en mode de fonctionnement diesel ou essence et aussi des systèmes de refroidissement adaptés (à air, eau, voire à l'huile).

	<b>N (tr/mn)</b>	<b><math>Q_0</math> (W/m<sup>2</sup>)</b>	<b><math>h</math> (W/(m<sup>2</sup>.K))</b>
<b>Cas 1</b>	<b>3000</b>	<b><math>6 \times 10^5</math></b>	<b>2500</b>
<b>Cas 2</b>	<b>500</b>	<b><math>5 \times 10^5</math></b>	<b>2000</b>
<b>Cas 3</b>	<b>1500</b>	<b><math>5,5 \times 10^5</math></b>	<b>2300</b>
<b>Cas 4</b>	<b>6000</b>	<b><math>8 \times 10^5</math></b>	<b>4000</b>

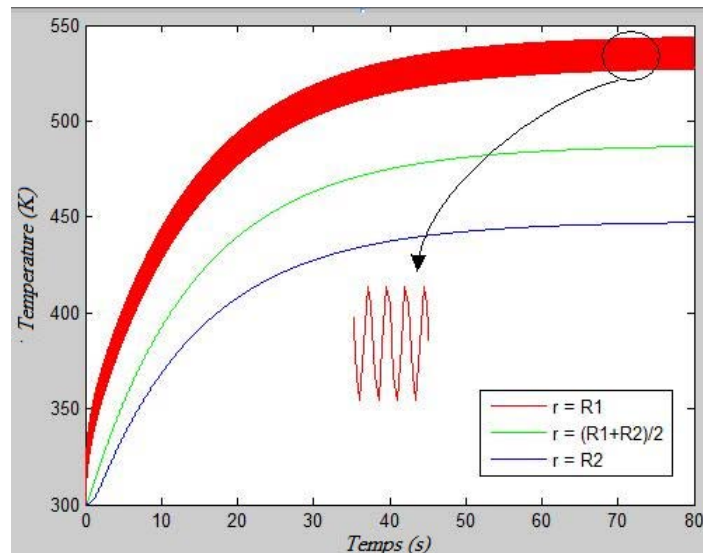
**Tableau 6.1 : Les quatre cas étudiés du système moteur à quatre temps.**

Pour le premier cas ( $N = 3000$  tr/min,  $Q_0 = 6 \cdot 10^5$  W/m,  $h = 2500$  W/m<sup>2</sup>K), on présente respectivement la distribution et la variation de la température, (Figure 6.4 et Figure 6.5) et

des contraintes ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zr}$  et  $\sigma_{Mises}$ ), (Figure 6.6 à Figure 6.10), une distribution de l'endommagement du cylindre (Figure 6.11) et son évolution au cours des cycles (Figure 6.12).



**Figure 6.4 : Champs de températures (isothermes) à t=80 s.**



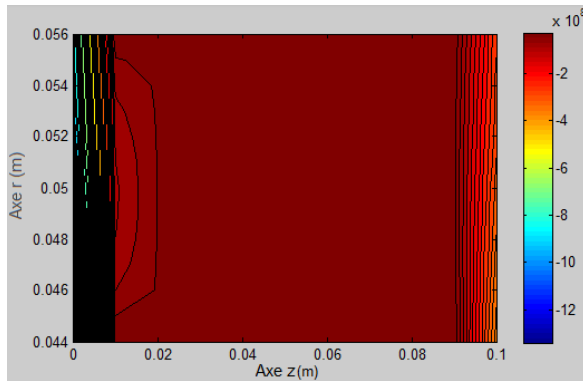
**Figure 6.5 : Evolution de la température du cylindre en z=0.**

La distribution des températures, présentée sur la Figure 6.4 à  $t = 80$  s est en accord avec la variation du flux imposé le long de l'axe  $z$  et en fonction du temps. Elle prend en compte également les effets des sources thermiques résultant de la déformation élastique. La température maximale est localisée en  $z=0$ , là où le flux thermique est maximum.

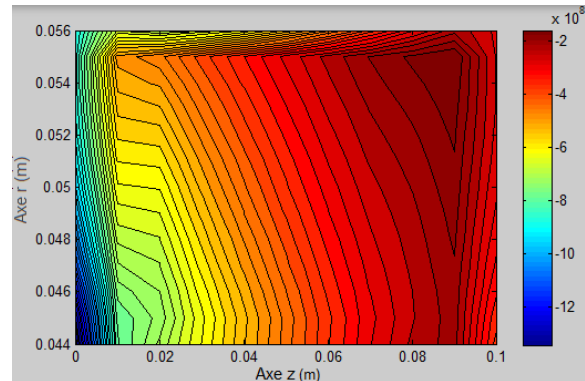
La Figure 6.5 représente l'évolution de la température en  $z=0$ , à l'intérieur  $r=R_1$ , à l'extérieur  $r=R_2$  et au milieu  $r=(R_1+R_2)/2$  de la couche cylindrique étudiée, Figure 6.4. Les courbes montrent des oscillations importantes pour la température interne, en accord avec le flux imposé et quasiment inexistantes au milieu et à l'extérieur de la couche cylindrique. L'amplitude des oscillations décroît donc plus vite en s'éloignant de la face exposée au flux.

Les variations observées de la température au sein de la couche cylindrique étudiée crée des contraintes distribuées sur les 3 axes ( $r, \vartheta, z$ ),  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zr}$  et  $\sigma_{Mises}$  que nous avons

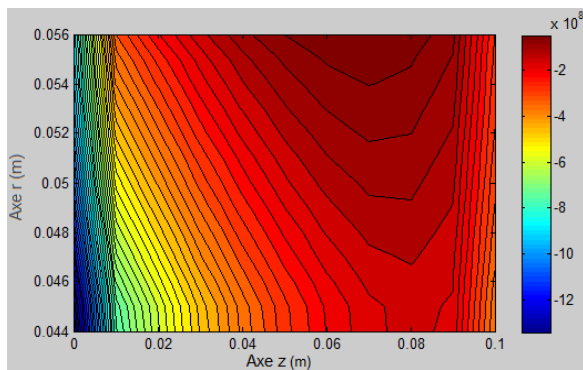
respectivement présentées sur les figures allant de la Figure 6.6 à la Figure 6.10, à  $t=80$  s. En utilisant ces résultats, nous avons calculé la distribution de l'endommagement qui est présentée sur la Figure 6.11. Nous remarquons que le nombre de cycles à l'endommagement le plus faible est localisé au voisinage de la surface intérieure, point  $(R_1, 0)$ , là où la contrainte et la température atteignent leurs valeurs maximales. Sur la Figure 6.12, on présente l'évolution de l'endommagement en ce point et aussi au milieu et sur la face extérieure du cylindre.



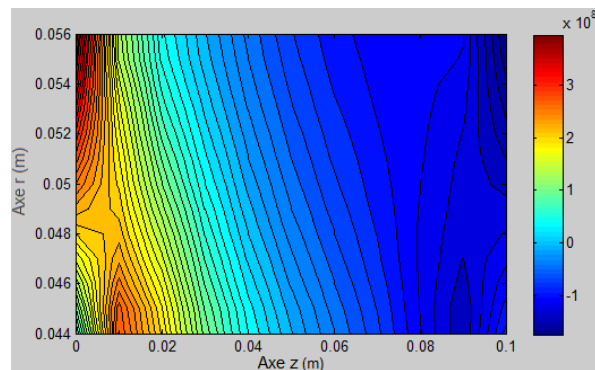
**Figure 6.6 : Champs de contraintes  $\sigma_{rr}$  à  $t=80$  s**



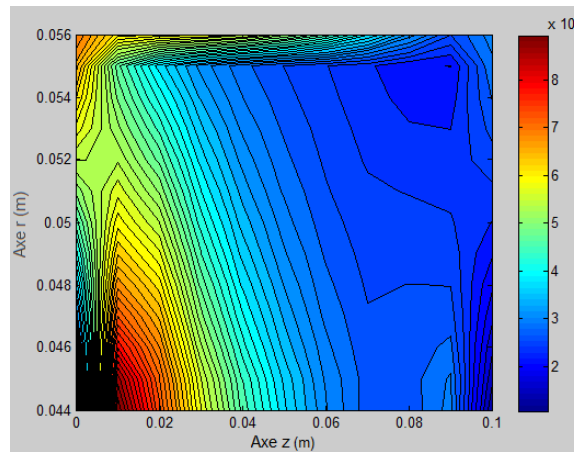
**Figure 6.7 : Champs de contraintes  $\sigma_{zz}$  à  $t=80$  s**



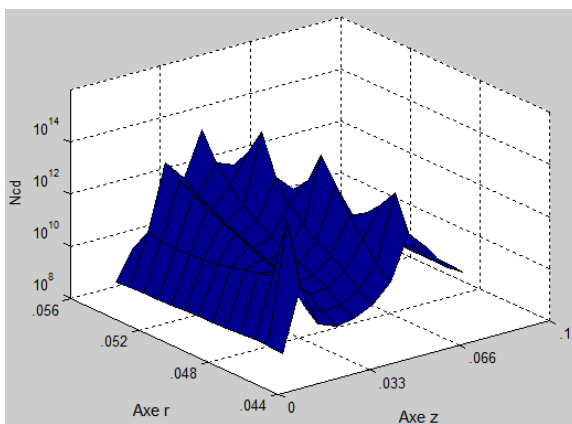
**Figure 6.8 : Champs de contraintes  $\sigma_{\theta\theta}$  à  $t=80$  s**



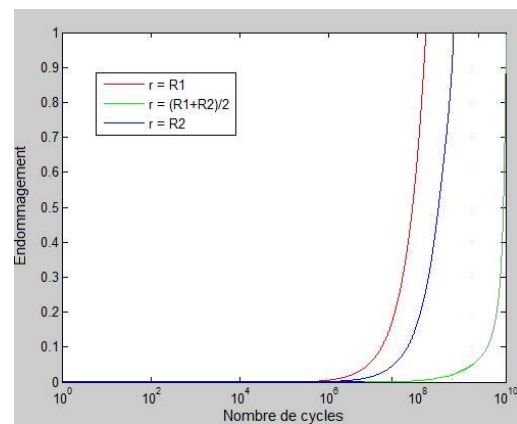
**Figure 6.9 : Champs de contraintes  $\sigma_{zr}$  à  $t=80$  s**



**Figure 6.10 : Champs de contraintes  $\sigma_{Mises}$  à  $t = 80$  s.**



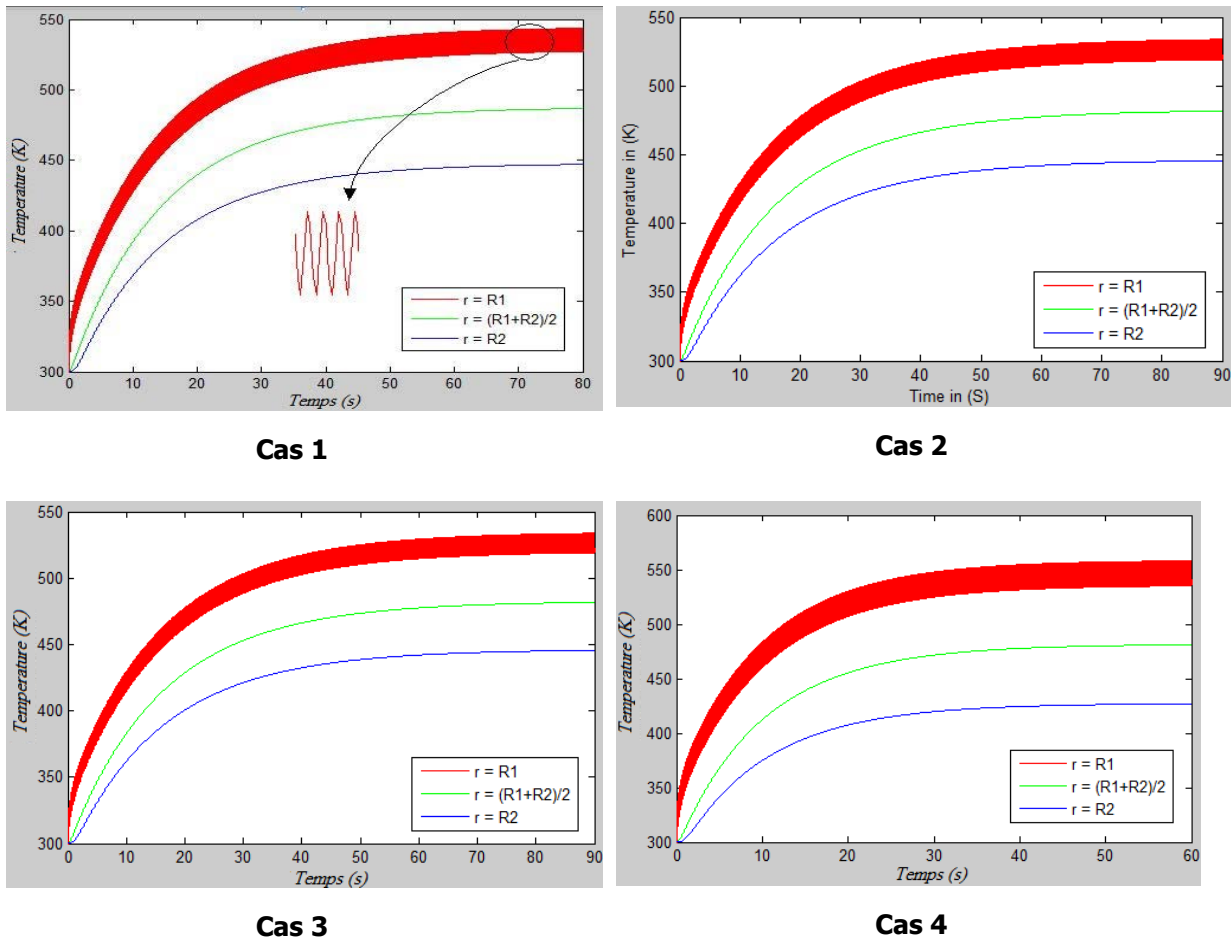
**Figure 6.11 : Distribution (r,z) du nombre de cycles**



**Figure 6.12 : Evolution de l'endommagement.**

De manière générale, pour tous les cas étudiés, la distribution des températures, présentée sur la Figure 6.4, est en accord avec la forme et les variations du flux imposé à l'intérieur du cylindre. Les différences constatées pour chacun des cas, sont dues essentiellement aux effets des sources de chaleur générées par la déformation élastique du matériau. Pour tous les cas, la température maximale est localisée à l'entrée du cylindre en  $z=0$ , là où le flux thermique est maximum.

Dans la suite, on présente respectivement pour les quatre cas du Tableau 6.1 l'évolution des températures au cours temps (Figure 6.13) et l'évolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles (Figure 6.14).

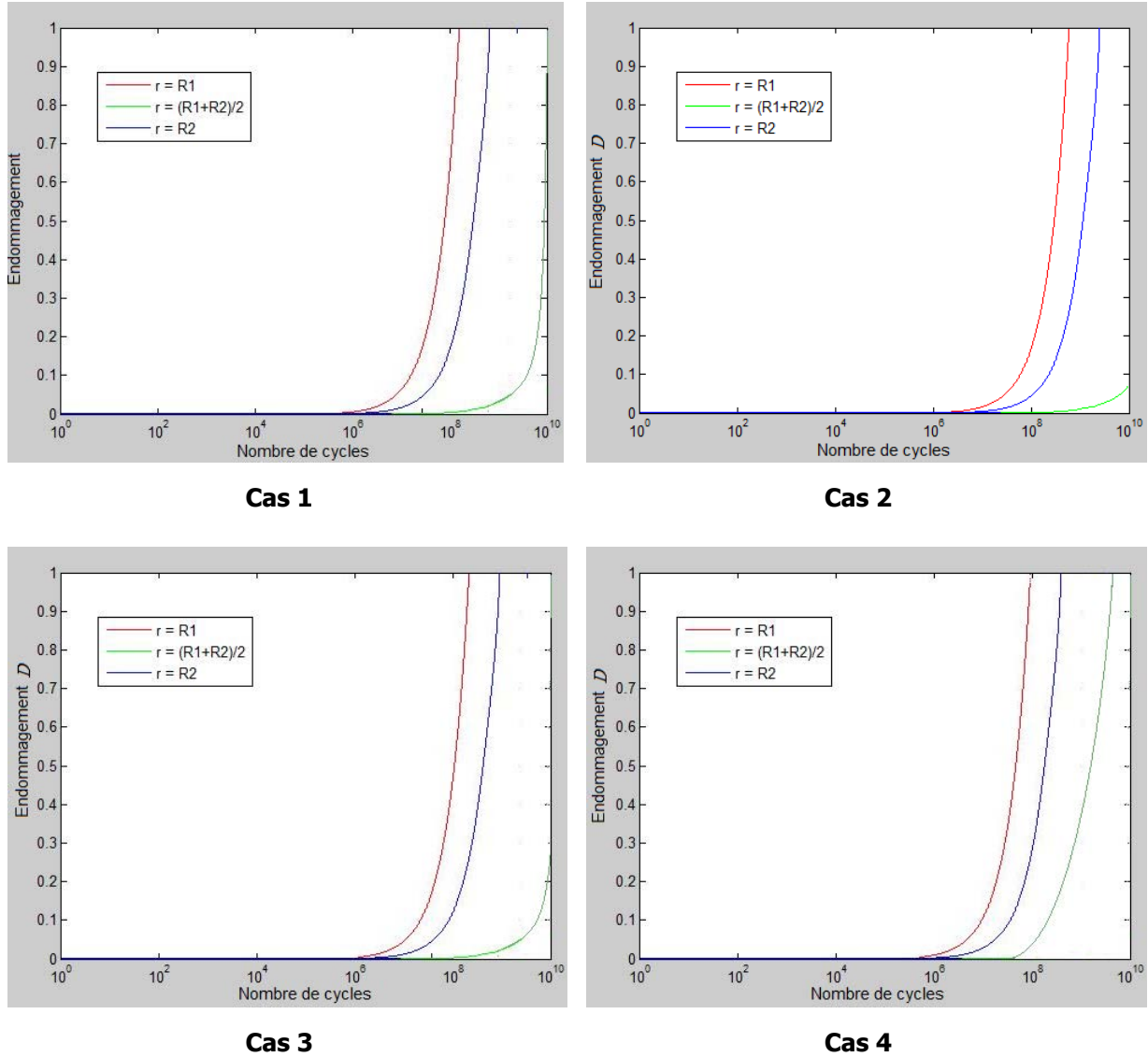


**Figure 6.13 : Evolution de la température en  $z = L/3$ .**

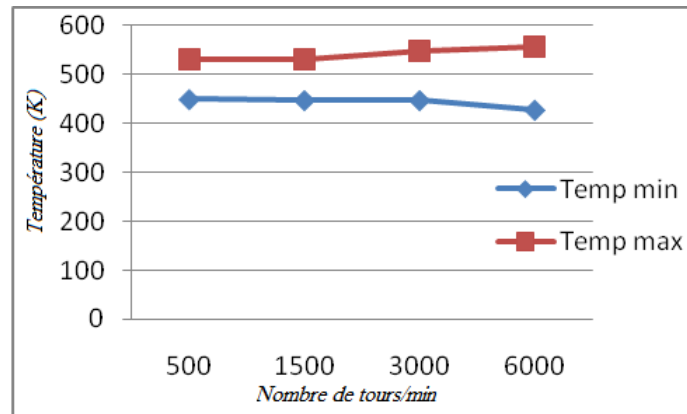
Les évolutions de la température, Figure 6.13, présentées en  $z=L/3$ , à l'intérieur  $r=R_1$ , à l'extérieur  $r=R_2$  et au milieu  $r=(R_1+R_2)/2$  de la couche cylindrique étudiée, atteignent un régime quasi-périodique plus ou moins rapide selon les cas. En règle générale, plus l'échange avec l'extérieur est important plus le régime quasi périodique est rapide, c'est l'exemple du cas 4. Par ailleurs, compte tenue de la nature du matériau utilisé (acier inoxydable), les amplitudes des oscillations thermiques subissent logiquement une décroissance rapide de l'intérieur vers l'extérieur du cylindre où elles sont quasiment nulles.

Les figures précédentes ont montrées que les contraintes et les températures maximales sont localisées au voisinage du point  $(R_1, 0, 0)$ , là où logiquement l'endommagement est le plus important. La Figure 6.15 montre l'évolution de l'endommagement à l'entrée du cylindre à des points situés à l'intérieur, au milieu et à l'extérieur. Cette figure montre d'une manière générale, pour tous les cas, que les surfaces interne et externe s'endommagent avant l'intérieur du cylindre. Les cas 1 et 3 qui diffèrent principalement par le nombre de tours (ou de cycles), présentent des courbes d'endommagement similaires au niveau des limites interne et externe du cylindre alors qu'au milieu, on peut voir que le cas 3 nécessite un peu plus de cycles pour endommager totalement le cylindre. Les cas 2 et 4 apparaissent comme des cas limites, puisqu'on constate qu'avec un faible cyclage et un faible échange convectif, données du cas 2, le cylindre s'endommage le plus tard possible, alors qu'avec un

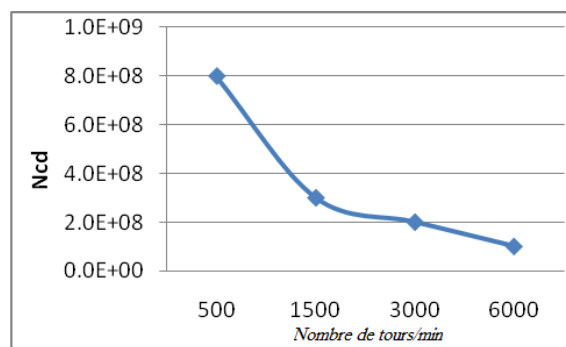
cyclage rapide et un flux et échange convectif élevés, cas 4, l'endommagement est relativement rapide, comparé aux autres cas. A titre d'exemple, pour le cas 4, le nombre de cycles  $N_{cd}$  à l'endommagement est de l'ordre de  $10^8$  pour les couches internes et externes et de  $10^9$  pour le milieu du cylindre.



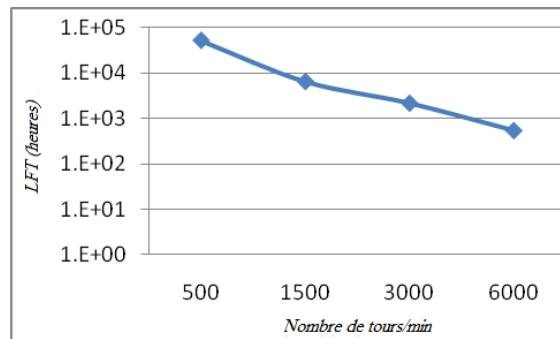
**Figure 6.14 : Evolution de l'endommagement en fonction du nombre de cycles.**



**Figure 6.15 : Variation de la température aux points  $(R_1,0,0)$  et  $(R_2,0,0)$  en fonction du nombre de tours par minute du moteur.**



**Figure 6.16 : Nombre de cycles à l'endommagement**



**Figure 6.17 : Durée de vie en fonction en fonction du nombre de tr/mn.**

La Figure 6.16 montre la variation du nombre de cycles Ncd à l'endommagement en fonction du nombre de tours par minute (ou fréquence) du cylindre moteur. On peut voir clairement qu'aux fréquences élevées, correspond un degré de fatigue ou d'endommagement élevé, ce qui veut dire un nombre de cycles à l'endommagement Ncd faible. Le calcul de la durée de vie, définie par le produit du nombre de cycle par la période du cycle, présentée sur la Figure 6.17, confirme ces remarques et permet de dégager, sur la base des hypothèses et du modèle d'endommagement utilisés, une prédiction raisonnable de la durée de vie du matériau composant le cylindre moteur. Pour conclure, nous pouvons dire que pour maximiser sa durée de vie, il faut fonctionner autant que possible à faible fréquence de cyclage et dans tous les cas, un compromis entre la fréquence d'utilisation et les conditions thermiques de refroidissement du moteur doit être analysé.



## 6.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les travaux développés dans les chapitres précédents au calcul de l'endommagement, en régime thermo-élastique, d'un cylindre moteur à combustion interne. Quatre exemples de cas simulant des situations réelles de fonctionnement ont été étudiés. Les principaux résultats obtenus ont montré que :

L'entrée du cylindre subit les températures et les contraintes maximales et par conséquent un endommagement rapide pour tous les cas étudiés.

L'endommagement est très sensible à la fréquence de cyclage. Plus la fréquence de cyclage est faible plus le nombre de cycles à l'endommagement est élevé et par conséquent la durée de vie est élevée. Enfin, à travers les quatre cas analysés, on a pu constater que l'amplitude du flux a une influence directe sur l'endommagement de la surface interne du cylindre, en revanche, la condition de refroidissement du cylindre a une influence sur la vitesse d'endommagement sur le reste de la couche cylindrique.



## CHAPITRE 7 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce travail, nous avons présenté une étude numérique des couplages thermiques et mécaniques d'un matériau bicouche en forme de plaque ou de cylindre creux. Sur le plan thermique, l'étude est réalisée en régime transitoire provoquée par des conditions aux limites thermiques variables périodiques simulant des situations de cyclages thermiques du matériau. Sur le plan mécanique, seule l'analyse statique est prise en compte ; le régime dynamique étant supposé négligeable. Le couplage dans le sens mécanique thermique est donc supposé négligeable également. Il en découle que les déformations et les contraintes résultantes sont uniquement d'origine thermique. Le cyclage thermique est appliqué sur le matériau jusqu'à son endommagement.

L'étude de l'endommagement est menée selon les cas, soit sur des modèles établis directement à partir du comportement thermo élastique soit sur des modèles nécessitant l'étude thermo-élastoplastique. Dans les deux cas, comme la plupart des modèles d'endommagement (Wholer-Miner, Lemaître et Chaboche,...) rencontrés dans la littérature ne sont valides que sur des matériaux uniformes et homogènes, une recherche de matériau équivalent du multi-matériau étudié était donc nécessaire. L'équivalence entre le matériau réel et le matériau équivalent repose sur un critère d'équivalence thermique

L'objectif principal de ce travail est de définir les conditions optimales d'utilisation des matériaux étudiés dans le but d'accroître leur durée de vie lors de sollicitations thermiques variables.

### 7.1 PRINCIPALES CONTRIBUTIONS

Les principales contributions du travail réalisé peuvent se résumer par :

- 1- Les limites des modèles d'endommagement disponibles dans la littérature adaptés principalement à des matériaux simples et uniforme, nous a contraint de passer d'abord par une étape d'homogénéisation. Ce travail repose sur une recherche de matériau équivalent du matériau bicouche en utilisant une technique d'interpolation polynômiale des propriétés thermiques et mécaniques dans des domaines de variations limités par les propriétés des deux couches. Une étude comparative entre matériaux bicouche et équivalent est présentée dans le chapitre 3 et a montré que le degré d'interpolation des propriétés doit être ajusté pour chaque type de combinaison des couches en fonction de leurs propriétés et de leurs épaisseurs.
- 2- Par la suite, l'analyse de l'endommagement, présentée dans le chapitre 4, repose sur l'étude précédente de matériau équivalent. Le modèle utilisé est celui proposé par Wöhler-Miner qui permet de simuler l'endommagement d'un matériau directement à partir de son comportement thermo-élastique transitoire. Les résultats obtenus ont

été présentés en faisant varier de nombreux paramètres aussi bien physiques et géométriques. Une distribution optimale des épaisseurs des deux couches minimisant l'endommagement du matériau et donc maximisant sa durée de vie a été mise en évidence. Par ailleurs, l'étude de différentes formes de cyclage thermique (carrée, triangulaire ou sinusoïdale) n'a pas montré de différences remarquables sur l'endommagement tant que l'amplitude et la période des excitations appliquées restent pas trop élevées.

- 3- L'étude de l'endommagement à partir de son comportement thermo-élasto-plastique a été menée dans les mêmes conditions que le cas thermo-élastique. Les grandeurs recherchées sont le nombre de cycles appliqués pour atteindre l'endommagement et par suite sa durée de vie. Les paramètres analysés sont, comme le cas précédent, la forme du flux thermique, sa période et son amplitude d'une part, la nature, l'épaisseur totale et la distribution des épaisseurs des couches d'une autre part. Les résultats numériques ont montré que les trois formes du flux thermiques (sinusoïdale, triangulaire et carrée), aboutissent encore une fois à des résultats similaires sur l'endommagement, en revanche, la période du flux a une influence remarquable sur ce dernier. Un domaine de périodes, entraînant une durée de vie minimale du matériau, a été mis en évidence pour le type de matériau étudié. Ce domaine varie de façon évidente, en fonction de la nature du matériau et de ses dimensions. Finalement, nous avons remarqué que la distribution des pourcentages des épaisseurs des couches constituant le matériau bicouche possède un impact non négligeable sur sa durée de vie.
- 4- Finalement, l'application de cette étude de l'endommagement thermo-mécanique sur le cas d'un cylindre moteur à piston, a montré et confirmé que les conditions de fonctionnement optimales correspondent à des valeurs de fréquence du piston les plus faibles possibles.

## 7.2 PERSPECTIVES ET NOUVEAUX DEFIS

Le travail développé dans cette thèse ouvre la voie à de nombreuses perspectives et d'autres développements qu'on peut résumer ainsi :

- 1- Faire une étude comparative avec d'autres modèles d'endommagement proposés dans la littérature.
- 2- Refaire la même étude en utilisant d'autres techniques d'homogénéisation permettant de se rapprocher du modèle exact, notamment en régime transitoire.
- 3- Analyser d'autres types de conditions aux limites thermiques et mécaniques de façon à simuler des situations réelles de fonctionnement d'autres systèmes thermomécaniques.

- 4- Analyser l'endommagement en combinant des sollicitations thermiques et mécaniques de façon à ne pas négliger le couplage dans le sens mécanique vers la thermique (couplage fort).
- 5- Etendre l'étude au cas tridimensionnel de façon à s'affranchir de la condition de symétrie considérée dans le cas bidimensionnel et de pouvoir couvrir un domaine plus large d'applications.
- 6- Appliquer cette étude à d'autres types de géométries plus ou moins complexes en se basant des grands codes de calcul (ANSYS, ABAQUS) et d'optimisation (ModFrontiers par exemple) dans le seul but de se rapprocher des conditions réelles optimales de fonctionnement des systèmes étudiés.



# ANNEXE

## SOLUTION ANALYTIQUE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE DES DEPLACEMENTS

L'équilibre mécanique formulé en termes de déplacements s'écrit :

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} - 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial \tau}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est obtenue d'après Navier, Goodier et Boussinesq par le potentiel de déplacement  $\phi$  et les fonctions harmoniques  $\varphi$ ,  $\psi$  [27].

Les déplacements sont exprimés par les relations :

$$(7.2) \quad \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} + z \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} + z \frac{\partial \psi}{\partial z} - (3-4\nu)\psi \end{aligned}$$

Les composantes des contraintes s'écrivent alors :

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - K\tau + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - K\tau + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - 2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ \sigma_{zz} &= 2G \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - K\tau + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ \sigma_{rz} &= 2G \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} - K\tau + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

$\phi$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  obéissent aux conditions suivantes :

$$(7.4) \quad \nabla^2 \phi = K\tau, \quad \nabla^2 \varphi = 0 \text{ et } \nabla^2 \psi = 0$$

Dont les solutions générales et particulières sont recherchées en utilisant le principe de séparation des variables :

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \phi &= A_1 (\sin(wz) + B_1 \cos(wz)) (I_0(wr) + C_1 K_0(wr)) - \frac{K}{w^2} \tau(r, z) \\ \varphi &= A_2 (\sin(wz) + B_2 \cos(wz)) (I_0(wr) + C_2 K_0(wr)) \\ \psi &= A_3 (\sin(wz) + B_3 \cos(wz)) (I_0(wr) + C_3 K_0(wr)) \end{aligned}$$

L'introduction de ces expressions dans (7.4) conduit aux expressions des déplacements (7.6) et aux déformations (7.7) :

$$(7.6) \quad \begin{aligned} u_r &= w \left[ \begin{aligned} &I_1(wr) \left( (A_1 + A_2 + zA_3) \sin wz + (A_1B_1 + A_2B_2 + zA_3B_3) \cos(wz) \right) \\ &- K_1(wr) \left( (A_1C_1 + A_2C_2 + zA_3C_3) \sin(wz) + (A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2 + zA_3B_3C_3) \cos(wz) \right) \end{aligned} \right] - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial r} \\ u_z &= \left[ \begin{aligned} &I_0(wr) \left( (A_1w + A_2w + zA_3w - (3-4\nu)A_3B_3) \cos(wz) \right) \\ &- (A_1B_1w + A_2B_2w + zA_3B_3w + (3-4\nu)A_3) \sin(wz) \end{aligned} \right) \\ &+ K_0(wr) \left( (A_1C_1w + A_2C_2w + zA_3C_3w - (3-4\nu)A_3B_3C_3) \cos(wz) \right) \\ &- (A_1B_1C_1w + A_2B_2C_2w + zA_3B_3C_3w + (3-4\nu)A_3C_3) \sin(wz) \end{aligned} \right] - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial z} \end{aligned}$$

(7.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial z} &= w \left[ \begin{aligned} &I_1(wr) \left( (A_1w + A_2w + A_3B_3 + zA_3w) \cos wz - (A_1B_1w + A_2B_2w - A_3 + zA_3B_3w) \sin(wz) \right) \\ &- K_1(wr) \left( (A_1C_1w + A_2C_2w + A_3B_3C_3 + zA_3C_3w) \cos wz \right. \\ &\quad \left. - (A_1B_1C_1w + A_2B_2C_2w - A_3C_3 + zA_3B_3C_3w) \sin(wz) \right) \end{aligned} \right] - \frac{K}{w^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial z \partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \left[ \begin{aligned} &\left( wI_0(wr) - \frac{1}{r} I_1(wr) \right) \left( (A_1w + A_2w + zA_3w - (3-4\nu)A_3B_3) \cos(wz) \right. \\ &\quad \left. - (A_1B_1w + A_2B_2w + zA_3B_3w + (3-4\nu)A_3) \sin(wz) \right) \\ &- \left( wK_0(wr) + \frac{1}{r} K_1(wr) \right) \left( (A_1C_1w + A_2C_2w + zA_3C_3w - (3-4\nu)A_3B_3C_3) \cos(wz) \right. \\ &\quad \left. - (A_1B_1C_1w + A_2B_2C_2w + zA_3B_3C_3w + (3-4\nu)A_3C_3) \sin(wz) \right) \end{aligned} \right] - \frac{K}{w^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial r \partial z} \end{aligned}$$

Les coefficients  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ , et le paramètre  $w$  sont calculés à partir des conditions aux limites :

$$(7.8) \quad \begin{aligned} u_r(r, 0) &= 0 \\ u_z(r, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_r(r, 0)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_z(r, 0)}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

$$(7.10) \quad \begin{aligned} u_r(r, L) &= 0 \\ u_z(r, L) &= 0 \end{aligned}$$

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_r(r, L)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_z(r, L)}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

$$(7.12) \quad \int_0^L \sigma_{rr}(R_1, z) dz = 0$$

$$(7.13) \quad \int_0^L \sigma_{rr}(R_2, z) dz = 0$$

A partir des équations (7.8), (7.9) et des conditions aux limites thermiques (4.5), nous obtenons les relations suivantes :



$$(7.14) \quad u_r(r,0) = 0 \Rightarrow I_1(wr)(A_1B_1 + A_2B_2) - K_1(wr)(A_1B_1C_1 + A_2B_2C_2) = \frac{K}{w^3} \frac{\partial \tau(r,0)}{\partial r}$$

$$(7.15) \quad u_z(r,0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (A_1w + A_2w - (3-4\nu)A_3B_3) = 0 \\ (A_1C_1w + A_2C_2w - (3-4\nu)A_3B_3C_3) = 0 \end{cases}$$

$$(7.16) \quad \frac{\partial u_r(r,0)}{\partial z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (A_1w + A_2w + A_3B_3) = 0 \\ (A_1C_1w + A_2C_2w + A_3B_3C_3) = 0 \end{cases}$$

Les equations (7.15), (7.16) donnent:

$$(7.17) \quad B_3 = 0, A_1 = -A_2 \text{ et } C_1 = C_2$$

Et à partir de (7.10), (7.11), on obtient :

$$(7.18)$$

$$I_1(wr)((LA_3)\sin(wL) + A_1(B_1 - B_2)\cos(wL)) - K_1(wr)((LA_3C_3)\sin(wL) + A_1C_1(B_1 - B_2)\cos(wL)) = \frac{K}{w^3} \frac{\partial \tau(r,L)}{\partial r}$$

$$(7.19) \quad \begin{cases} (LA_3w \cos(wL) - (A_1w(B_1 - B_2) + (3-4\nu)A_3)\sin(wL)) = 0 \\ ((LA_3C_3w) \cos(wL) - (A_1C_1w(B_1 - B_2) + (3-4\nu)A_3C_3)\sin(wL)) = 0 \end{cases}$$

$$(7.20) \quad \begin{cases} (LA_3w \cos(wL) - (A_1w(B_1 - B_2) - A_3)\sin(wL)) = 0 \\ (LA_3C_3w \cos(wL) - (A_1C_1w(B_1 - B_2) - A_3C_3)\sin(wL)) = 0 \end{cases}$$

La différence entre (7.19) et (7.20) donne

$$(7.21) \quad \begin{cases} (4(1-\nu)A_3 \sin(wL)) = 0 \\ (4(1-\nu)A_3C_3 \sin(wL)) = 0 \end{cases} \Rightarrow A_3 = 0, \text{ ou } \sin(wL) = 0$$

1<sup>er</sup> cas : pour  $A_3=0$ , (7.18) donne

$$(7.22) \quad (A_1(B_1 - B_2) \cos(wL)(I_1(wr) - C_1K_1(wr))) = \frac{K}{w^3} \frac{\partial \tau(r,L)}{\partial r}$$

D'après (7.14), (7.17) et la condition de symétrie de la charge thermique  $\frac{\partial \tau(r,0)}{\partial r} = \frac{\partial \tau(r,L)}{\partial r}$ , on obtient :

$$(7.23) \quad \cos(wL) = 1$$

2<sup>ème</sup> cas : si  $\sin(wL) = 0$  on obtient d'après (7.20)

$$(7.24) \quad A_3 = 0,$$

Donc dans les deux cas :

$$(7.25) \quad A_3 = 0, \text{ et } \sin(wL) = 0, \text{ c.à.d. } w_n = \frac{2k_n\pi}{L}$$

Le calcul de la contrainte  $\sigma_{rr}$  est obtenu en se servant des relations (7.17) et (7.25):

$$(7.26) \sigma_r(r, z) = 2G \left[ \begin{array}{l} A_1(B_1 - B_2)w_n \cos(w_n z) \left( w_n I_0(w_n r) - \frac{1}{r} I_1(w_n r) + C_1 \left( w_n K_0(w_n r) + \frac{1}{r} K_1(w_n r) \right) \right) \\ -K\tau - \frac{K}{w_n^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial r^2} \end{array} \right]$$

D'après les conditions aux limites (7.12) l'équation (7.26) donne :

$$(7.27) \int_0^L \sigma_r(R_1, z) dz = 0 \Rightarrow AB \int_0^L \cos w_n z dz = \frac{\int_0^L \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) dz}{I(w_n R_1) + C_1 K(w_n R_1)}$$

Avec

$$(7.28) AB = A_1(B_1 - B_2) \text{ soit : } \begin{cases} I(w_n R_1) = w_n I_0(w_n R_1) - \frac{1}{R_1} I_1(w_n R_1) \\ K(w_n R_1) = w_n K_0(w_n R_1) + \frac{1}{R_1} K_1(w_n R_1) \end{cases}$$

En multipliant les deux membres de l'équation (7.27) par  $\cos w_n z$ , on obtient :

$$(7.29) AB = \frac{2 \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) \cos w_n z dz}{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_1) + C_1 K(w_n R_1)}$$

De même, à partir de la condition (7.13), on trouve  $AB$  mais en fonction de  $R_2$

$$(7.30) AB = \frac{2 \int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_2, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_2, z)}{\partial r^2} \right) \cos w_n z dz}{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_2) + C_1 K(w_n R_2)}$$

On peut donc calculer  $C_1$  à partir de (7.29) et (7.30) :

$$(7.31) C_1 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_1) - I(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} K(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) - K(w_n R_1)}$$

Avec :

$$(7.32) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) = \frac{\int_0^L \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) \cos(w_n z) dz}{\int_0^L \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_2, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_2, z)}{\partial r^2} \right) \cos(w_n z) dz}$$

Et en remplaçant  $C_1$  dans (7.29), on obtient :

$$(7.33) \quad AB = \frac{2}{L} \frac{\int_0^L \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{K}{w_n} \tau(R_1, z) + \frac{K}{w_n^3} \frac{\partial^2 \tau(R_1, z)}{\partial r^2} \right) \cos(w_n z) dz}{\sum_{n=0}^{\infty} I(w_n R_1) + \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (I(w_n R_1) - I(w_n R_2)) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) K(w_n R_1)}{\sum_{n=0}^{\infty} K(w_n R_2) \Gamma(R_1, R_2, z, w_n) - K(w_n R_1)}}$$

Enfin les déplacements et les contraintes s'écrivent sous la forme :

$$(7.34) \quad u_r(r, z) = ABw \cos(wz) (I_1(wr) - C_1 K_1(wr)) - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial r}$$

$$(7.35) \quad u_z(r, z) = ABw \sin(wz) (I_0(wr) - C_1 K_0(wr)) - \frac{K}{w^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial z}$$

$$(7.36) \quad \sigma_{rr}(r, z) = 2G \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \begin{array}{l} AB_n w_n \cos(w_n z) \left( w_n I_0(w_n r) - \frac{1}{r} I_1(w_n r) + C_1 \left( w_n K_0(w_n r) + \frac{1}{r} K_1(w_n r) \right) \right) \\ - K \tau(r, z) - \frac{K}{w_n^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial r^2} \end{array} \right]$$

$$(7.37) \quad \sigma_{zz}(r, z) = 2G \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -AB_n w_n^2 \cos(w_n z) (I_0(w_n r) + C_1 K_0(w_n r)) - K \tau(r, z) - \frac{K}{w_n^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial z^2} \right]$$

$$(7.38) \quad \sigma_{rz}(r, z) = 2G \sum_{n=0}^{\infty} \left[ AB_n w_n^2 \sin(w_n z) (I_1(w_n r) - C_1 K_1(w_n r)) - \frac{K}{w_n^2} \frac{\partial^2 \tau(r, z)}{\partial r \partial z} \right]$$

$$(7.39) \quad \sigma_{\theta\theta}(r, z) = 2G \sum_{n=0}^{\infty} \left[ AB_n w_n \cos(w_n z) \frac{1}{r} (I_1(w_n r) - C_1 K_1(w_n r)) - K \tau(r, z) - \frac{K}{r w_n^2} \frac{\partial \tau(r, z)}{\partial r} \right]$$



# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] D. William and J. Callister, Science et génie des matériaux, Modulo, Ed. France, 2002.
- [2] J. Lemaitre and J. L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides. Paris: DUNOD, deuxième édition, BORDAS, 1988.
- [3] N. RANC, "Couplage thermomécanique, Techniques de l'Ingénieur," 2003.
- [4] C. Bathias and J.-p. Bailon, La fatigue des matériaux et des structures. Hermes, 1997.
- [5] L. M. Kachanov, "Time of the rupture process under creep condition," Izv. Akad. Nauk. S.S.R. Otd. Tech. Nauk., Vol. 8 (1958), pp. 26-31.
- [6] P. Lesteriez, "Modélisation numérique du couplage thermo-mécanique-endommagement en transformations finies. Application à la mise en forme," Thèse de doctorat, UTT, 2003.
- [7] J. L. Chaboche, "Sur l'utilisation des variables d'état interne pour la description de la viscoplastique cyclique avec endommagement, problèmes non linéaires de mécanique," in Symp Franco-polonais de Rheologie et Mécanique, Cracovie, 1977, pp. 137-159.
- [8] A. Gourgues and J. Haudin. mms2.ensmp.fr. [Online].  
[http://mms2.ensmp.fr/mat\\_paris/duree/transparentes/Amphi\\_23\\_Endommagement\\_Rupture.pdf](http://mms2.ensmp.fr/mat_paris/duree/transparentes/Amphi_23_Endommagement_Rupture.pdf)
- [9] H. L. Bernstein, T. S. Grant, C. R. McClung, and J. M. Allen, "Prediction of thermal mechanical Fatigue Life for Gas Turbine Blades in Electric Power Generation," Thermomechanical Fatigue Behavior of Materials , pp. 212-238, 1993.
- [10] R. H. S. Winterton, Thermal Design of Nuclear Reactors. Birmingham, England: Robert Maxwell, M. C., 1981.
- [11] EIST, "Contraintes thermiques , 1970.," Encyclopédie internationale des sciences et techniques, vol. 3, p. 692, Presses de la cité 1970.
- [12] V. Maillot, "Amorçage et propagation de réseaux de fissures de fatigue thermique

dans un acier inoxydable austénitique de type X2 CrNi18-09", Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lille, 2003.

- [13] D. A. SPERA, "What is thermal fatigue ?", ASTM-STP 612, pp. 3-9, 1976.
- [14] Y. Zhonga, Y. Shana, F. Xiaoa, and K. Yanga, "Effect of toughness on low cycle fatigue behavior of pipeline steels", *Materials Letters*, vol. 59, p. 1780–1784, Mar. 2005.
- [15] L. Qian, Z.-g. Wang, H. Toda, and T. Kobayashi, "High temperature low cycle fatigue and thermo-mechanical fatigue of a 6061Al reinforced with SiCw", *Materials Science and Engineering*, vol. A291, p. 235–245, 2000.
- [16] M. Pellizzari, A. Molinari, and G. Straffelini, "Thermal fatigue resistance of plasma duplex-treated tool steel," *Surface and Coatings Technology*, p. 142-144, 2001.
- [17] Ansys software. [Online]. <http://www.ansys.com/>
- [18] P. Lestriez, K. Saanouni, J. Mariage, and A. Cherouat, "Numerical Prediction of Ductile Damage in Metal Forming Processes Including Thermal Effects", *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 13, pp. 59-80, Jan. 2004.
- [19] B. Min, W. Twonzydlo, and K. Xiques, "Adaptative finite element methods for continuum damage modeling" *Computers & Structures*, vol. 58, pp. 887-900, 1995.
- [20] R. V. Pucha, G. Ramakrishna, S. Mahalingam, and S. K. Sitaraman, " Modeling spatial strain gradient effects in thermo-mechanical fatigue of copper microstructures," *International Journal of Fatigue*, vol. 26, p. 947–957, 2004.
- [21] A. Dragon, F. Hild, L. Rota, and H. Trumel, "Modélisation du comportement et de la rupture des matériaux sous sollicitations dynamiques," *Mécaniques & Industries*, vol. 1, p. 521–537, 2000.
- [22] B. Wang and T. Siegmund, "Numerical simulation of constraint effects in fatigue crack growth," *International Journal of Fatigue*, p. 1–7, 2005.
- [23] H. Underwood, et al., "Thermomechanical modeling of transient thermal damage in cannon bore materials," *Wear*, vol. 257, p. 992–998, 2004.
- [24] W. Ju and Y. Zhang, "Axisymmetric thermomechanical constitutive and damage modeling for airfield concrete pavement under transient high temperature," *Mechanics of Materials*, vol. 29, pp. 307-323, 1998.

- [25] K. Saanouni and J. L. Chaboche, "Computational damage mechanics Application to metal forming". Numerical and Computational methods," Elsevier, vol. 3, no. 7, pp. 321-376, 2003.
- [26] G. A. Maugin, The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge, UK: Bipse, 1992.
- [27] N. Noda, R. B. Hetnarski, and Y. Tanigawa, Thermal Stress 2nd edition. New York, London: Taylor & Francis, 2003.
- [28] S. PAN. (2004, Oct.) Moteurs thermiques, systèmes enceinte. ITC/GIM.
- [29] Mahle, Les chemises de cylindres: modèles d'endurance. [Online]. <http://www.mahle.com/C12570B3006C0D49/CurrentBaseLink/W26TFCKZ288MARSFR>
- [30] S. Abboudi and P. Bonnet, "Transient Thermomechanical Homogenization of Multilayer Material", International Congress on Thermal Stresses, RIT, Rochester, 1997.
- [31] R. B.Hetnarski, Thermal Stress IV. New York, USA.: Lastran, Rochester Institute of Technology, 1999.
- [32] R. B.Hetnarski, Thermal Stress V. New York, USA: Lastran, Rochester Institute of Technology, 1999.
- [33] P. Bonnet, "Contribution a l'étude des couplages thermiques et mécaniques dans les multimatériaux sous sollicitations thermiques variables", Thèse de doctorat, UTBM-UFC, 1998.
- [34] L. Chevalier, Mécanique des systèmes et des milieux déformables, Ellipses, Ed. Paris: Ellipses, 1997.
- [35] H. Ishikawa and K. Hata, "Thermoelastoplastic Creep Stress Analysis for a Thick-Walled Tube", International Journal of Solids and Structures, vol. 16, pp. 291-299, 1980.
- [36] R. B.Hetnarski, Thermal Stress I. New York, USA: LASTRAN, Rochester Institute of Technology, 1968.
- [37] T. Paris, K. Saanouni, M. Francois, and D. Delaplanche, "Caractérisations expérimentales et identification d'un joint soudé hétérogène : application aux

liaisons Ta/TiAl6V4", 18 ème Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007.

- [38] A. J. Dentsoras and E. P. Kouvaritakis, "Effects of vibration frequency on fatigue crack propagation of a polymer at resonance", Elsevier, pp. 467-473, 1995.
- [39] K. Primdahl and R. Kustom, "Cooling the APS Storage Ring Radio-Frequency Accelerating Cavities thermal stress/fatigue Analysis and Cavity Cooling Configuration", Conf.Proc. C950501, 1690-1692, 1995.
- [40] N. Singh, R. Khelawan, and G. N. Mathur, "Effect of stress ratio and frequency on fatigue crack growth rate of 2618 aluminium alloy silicon carbide metal matrix composite. Defence Materials," vol. 24, no. 2, 2001.
- [41] R. J. Wang, D. G. Shang, L. S. Li, and C. S. Li, "Fatigue damage model based on the natural frequency changes for spot-welded joints", International Journal of Fatigue Volume 30, Issue 6, 1047–1055, June 2008.
- [42] A. Boulaajaj, J. M. Cabrera, and J. M. Prado, "Effect of initial microstructure, frequency and temperature on the low cycle fatigue behaviour of the soldering alloys 96.5Sn–3.5Ag and 63Sn–37Pb", Engineering Failure Analysis Volume 15, Issue 3, , Pages 220–228, April 2008
- [43] E. Vidal, "Prévision de la durée de vie en fatigue multiaxiale sous sollicitations d'amplitude variable à l'aide d'un critère global", These de doctorat, INSA Lyon, 1996.
- [44] M. Jabbado, "Fatigue polycyclique des structures metalliques: duree de vie sous chargement variables," These de doctorat, Ecole Polytechnique, 2006.
- [45] C. E. Jaskea, S. C. Deevib, and S. S. Shademana, "Fatigue and cyclic deformation behavior of iron aluminide", Materials science and Engineering A, vol. 258, n° 1-2, pp. 211-218, 1998.
- [46] E. Charkaluk, A. Bignonnet, and J.-J. Thomas, "Dimensionnement à la fatigue thermomecanique de structures dans l'industrie automobile", Mecanique & Industries, vol. 5, pp. 27-40, 2004.
- [47] S. Abboudi and P. Bonnet, "Approche locale de l'endommagement sous des conditions thermiques variables", Journées Nationales sur les Composites N°10, pp. 597-605, 1996, Paris.
- [48] K. D. Sheffler and J. A. Alexander, "Vacuum thermal-mechanical fatigue testing of



- tow iron base high temperature alloys", 1972. NAS CR- 134524, Topical report N° 3.
- [49] D. S. C. Reddy B.V., "Thermophysical properties of FeAl (Fe-40 at.%Al)", *Intermetallics*, Vol 8, Issue 12, pp 1369–1376, December 2000.
- [50] V. Allix, N. Bahlouli, C. Cluzel, and L. Perret, "Modélisation et identification du comportement mécanique en température du pli élémentaire d'un stratifié carbone-epoxy", *C.R. 9<sup>ème</sup> Journ. Nat. Comp. (JNC9)*, pp 475-484, 1994.
- [51] Ch. Raud, "Fissuration des composites carbone a matrice thermostable en traction isotherme et cyclage thermique", *These de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, Cachan*, 1993.
- [52] (2005) The engineering toolbox. [Online]. <http://www.engeneeringtoolbox.com>
- [53] N. Kawasaki, S. Kobayashi, and S. Hasebe, "Spectra Thermal Fatigue Tests under Frequency Controlled Fluid Temperature Variation -Transient Temperature Measurement Tests", *Proc of the ASME Pressure Vessels and Piping Division Conference (PVP2006) Conference, Vancouver, 2006*.
- [54] S. Trampert, T. Gocmez, and S. Pischinger, "Thermomechanical Fatigue Life Prediction of Cylinder Heads in Combustion Engines", *J. Eng. Gas Turbines Power*, vol. 130, no. 1, p. 10ages, 2008.
- [55] N. Masahashi, S. Watanabe, and S. Hanada, "Microstructure and Oxidation Behavior of Low Pressure Plasma Sprayed Iron Aluminides", *SIJ Int (Iron Steel Inst Jpn)*, vol 41; N°: 9; pp 1010-1017, 2001.
- [56] S. Kalpakijan, *Manufacturing Process for Engineering Materials*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.