



Comprendre le monde,  
construire l'avenir®



UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE

Sciences et Technologie de l'Information, des Télécommunications et des  
Systèmes

INRIA Paris-Rocquencourt

*DISCIPLINE : Génie Informatique*

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée et soutenue publiquement le 03/04/2014

par

Falou **NDOYE**

Ordonnancement temps réel préemptif  
multiprocesseur avec prise en compte du coût du  
système d'exploitation

### Composition du jury :

<i>Directeur de thèse :</i>	Yves SOREL	Directeur de recherche (INRIA Paris-Rocquencourt)
<i>Rapporteurs :</i>	Emmanuel GROLLEAU	Professeur (ISAE-ENSMA Poitiers)
	Jean-Luc SCHARBARG	Professeur (INPT/ENSEEIH Toulouse)
<i>Examineurs :</i>	Alain MERIGOT	Professeur (Université Paris-Sud Orsay)
	Laurent GEORGE	Maître de conférences HDR (Université Marne-la-Vallée)

## Résumé

Dans cette thèse nous étudions le problème d'ordonnancement temps réel multiprocesseur préemptif avec prise en compte du coût exact du système d'exploitation. Ce coût est formé de deux parties : une partie facile à déterminer, correspondant au coût de l'ordonnanceur et une partie difficile à déterminer, correspondant au coût de la préemption. Cette difficulté est due au fait qu'une préemption peut en engendrer une autre, pouvant ainsi créer un phénomène d'avalanche.

Dans un premier temps, nous avons étudié l'ordonnancement hors ligne multiprocesseur de **tâches indépendantes** avec prise en compte du coût exact de la préemption et proposé une analyse d'ordonnançabilité fondée sur une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur. Cette heuristique utilise la stratégie d'ordonnancement multiprocesseur par partitionnement. Pour prendre en compte le coût exact de la préemption sur chaque processeur nous avons utilisé la condition d'ordonnançabilité proposée par Meumeu et Sorel. Cette condition d'ordonnançabilité pour des tâches à priorités fixes, est basée sur une opération binaire d'ordonnancement qui permet de compter le nombre exact de préemption et d'ajouter leur coût dans l'analyse d'ordonnançabilité des tâches. L'heuristique proposée permet de maximiser le facteur d'utilisation restant afin de répartir équitablement les tâches sur les processeurs et de réduire leur temps de réponse. Elle produit une table d'ordonnancement hors ligne.

Dans un second temps, nous avons étudié l'ordonnancement hors ligne multiprocesseur de **tâches dépendantes** avec prise en compte du coût exact de la préemption. Puisque la condition d'ordonnançabilité utilisée pour ordonnancer les tâches indépendantes ne s'applique qu'à des tâches à priorités fixes, elle ne permet pas de gérer les inversions de priorités que peuvent entraîner les tâches dépendantes. Nous avons donc proposé une nouvelle condition d'ordonnançabilité pour des tâches à priorités dynamiques. Elle prend en compte le coût exact de la préemption et les dépendances sans aucune perte de données. Ensuite en utilisant toujours la stratégie d'ordonnancement par partitionnement, nous avons proposé pour des tâches dépendantes une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur qui réutilise cette nouvelle condition d'ordonnançabilité au niveau de chaque processeur. Cette heuristique d'ordonnancement prend en compte les coûts de communication inter-processeurs. Elle permet aussi de minimiser sur chaque processeur le makespan (temps total d'exécution) des tâches. Cette heuristique produit pour chaque processeur une table d'ordonnancement hors ligne contenant les dates de début et de fin de chaque tâches et de chaque communication inter-processeur.

En supposant que nous avons une architecture multiprocesseur de type dirigée par le temps (Time Trigger TT) pour laquelle tous les processeurs ont une référence de temps unique, nous avons proposé pour chacun des processeurs un

ordonnanceur en ligne qui utilise la table d'ordonnement produite lors de l'ordonnement hors ligne. Cet ordonnanceur en ligne a l'avantage d'avoir un coût constant et facile à déterminer de manière exacte. En effet il correspond uniquement au temps de lecture dans la table d'ordonnement pour obtenir la tâche sélectionnée lors de l'analyse d'ordonnabilité hors ligne, alors que dans les "ordonneurs classiques" en ligne ce coût correspond à mettre à jour la liste des tâches qui sont dans l'état prêt à l'exécution puis à sélectionner une tâche selon un algorithme, par exemple RM, DM, EDF, etc. Il varie donc avec le nombre de tâches prêtes à s'exécuter qui change d'une invocation à l'autre de l'ordonneur. C'est ce coût qui est utilisé dans les analyses d'ordonnabilités évoquées ci-dessus. Un autre avantage est qu'il n'est pas nécessaire de synchroniser l'accès aux mémoires de données partagées par plusieurs tâches, car cette synchronisation a été déjà effectuée lors de l'analyse d'ordonnabilité hors ligne.



## Rémerciements

Je tiens à remercier Yves Sorel, mon directeur de thèse, de m'avoir accueilli comme stagiaire au sein de l'équipe-projet AOSTE et ensuite m'avoir donné l'opportunité de faire une thèse. Il a su guider mes travaux tout en me laissant mon autonomie.

Je remercie également Emmanuel Grolleau et Jean Luc-Scharbarg qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. De même, un grand merci à Alain Merigot et Laurent George qui ont accepté de faire partie des membres du jury.

Je remercie aussi tous les membres de l'équipe-projet AOSTE pour les bons moments passés ensemble.

Enfin, mention spéciale à ma famille et à mes amis qui m'ont soutenus tout au long de cette thèse.



# Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>7</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>8</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
Contexte . . . . .	11
Objectifs . . . . .	11
Plan de la thèse . . . . .	12
<b>I Concepts de base et État de l’art</b>	<b>15</b>
<b>1 Concepts de base</b>	<b>17</b>
1.1 Système temps réel . . . . .	17
1.1.1 Définition . . . . .	17
1.1.2 Classification des systèmes temps réel . . . . .	17
1.2 Tâche temps réel . . . . .	18
1.3 Tâches périodiques . . . . .	19
1.3.1 Tâches concrètes/non concrètes . . . . .	19
1.3.2 Tâches synchrones/asynchrones . . . . .	20
1.4 Contraintes temps réel . . . . .	20
1.4.1 Échéances . . . . .	20
1.4.2 Périodicité stricte . . . . .	21
1.4.3 Dépendances entre tâches . . . . .	21
1.4.4 Latence . . . . .	22
1.5 Ordonnancement des systèmes temps réel . . . . .	22
1.5.1 Algorithmes d’ordonnancement . . . . .	22
1.5.2 Analyse de faisabilité . . . . .	24
1.5.3 Analyse d’ordonnançabilité . . . . .	24
1.5.3.1 Approche analytique . . . . .	24
1.5.3.2 Approche par simulation . . . . .	25

1.6	Viabilité d'une condition d'ordonnançabilité . . . . .	25
1.7	Ordonnanceur . . . . .	25
1.7.1	Invocation de l'ordonnanceur . . . . .	26
1.7.2	États et gestion des tâches . . . . .	26
1.8	Conclusion . . . . .	27
<b>2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>29</b>
2.1	Ordonnancement monoprocesseur . . . . .	29
2.1.1	Priorités fixes . . . . .	29
2.1.1.1	Priorités fixes aux tâches . . . . .	29
2.1.1.2	Priorités fixes aux instances . . . . .	30
2.1.2	Priorités dynamiques . . . . .	31
2.2	Ordonnancement multiprocesseur . . . . .	31
2.2.1	Architecture multiprocesseur . . . . .	31
2.2.2	Stratégies d'ordonnancement . . . . .	32
2.2.2.1	Stratégie par partitionnement . . . . .	33
2.2.2.2	Stratégie globale . . . . .	35
2.2.2.3	Stratégie par semi-partitionnement . . . . .	37
2.3	Allocation des tâches temps réel dans l'ordonnancement multi- processeur . . . . .	37
2.3.1	Méthodes exactes . . . . .	37
2.3.1.1	Branch & Bound . . . . .	38
2.3.1.2	Branch & Cut . . . . .	38
2.3.1.3	Programmation par contraintes . . . . .	38
2.3.1.4	Programmation linéaire . . . . .	39
2.3.1.5	Programmation dynamique . . . . .	40
2.3.1.6	Les Réseaux de flots . . . . .	40
2.3.2	Méthodes approchées . . . . .	41
2.3.2.1	Méthodes de recherche non guidées ou méta- heuristiques . . . . .	41
2.3.2.1.1	Recuit simulé . . . . .	41
2.3.2.1.2	Recherche Tabou . . . . .	41
2.3.2.1.3	Algorithmes génétiques . . . . .	42
2.3.2.2	Méthodes guidées ou heuristiques . . . . .	42
2.3.2.2.1	Heuristiques gloutonnes . . . . .	43
2.3.2.2.2	Heuristiques de listes . . . . .	44
2.3.2.2.3	Heuristiques de regroupement ou "clus- tering" . . . . .	44
2.3.2.2.4	Heuristique de duplication de tâches . . . . .	45
2.4	Ordonnancement de tâches dépendantes . . . . .	45
2.4.1	Transfert de données . . . . .	46



2.4.2	Partage de ressources . . . . .	46
2.4.3	Protocoles de synchronisation monoprocesseur . . . . .	48
2.4.3.1	Priority Inheritance Protocol (PIP) . . . . .	48
2.4.3.2	Priority Ceiling Protocol (PCP) . . . . .	49
2.4.3.3	Stack Resource Policy (SRP) . . . . .	49
2.4.4	Protocoles de synchronisation multiprocesseur . . . . .	50
2.4.4.1	MPCP . . . . .	50
2.4.4.2	MSRP . . . . .	50
2.5	Ordonnancement avec prise en compte du coût de l'OS . . . . .	50
2.5.1	Coût de l'ordonnanceur . . . . .	51
2.5.2	Coût de la préemption . . . . .	51
2.6	Conclusion . . . . .	53

## **II Ordonnancement temps réel multiprocesseur de tâches indépendantes avec prise en compte du coût exact de la préemption** **55**

<b>3</b>	<b>Ordonnancement monoprocesseur de tâches indépendantes</b>	<b>57</b>
3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Modèle de tâches . . . . .	57
3.3	Intervalle d'étude de l'ordonnancement . . . . .	58
3.4	Opération binaire d'ordonnancement $\oplus$ . . . . .	58
3.4.1	Principe . . . . .	58
3.4.2	Application . . . . .	60
3.5	Analyse d'ordonnançabilité avec $\oplus$ . . . . .	60
3.6	Facteur d'utilisation du processeur avec coût de la préemption . . . . .	62
3.7	Impact du coût de la préemption dans l'analyse d'ordonnançabilité . . . . .	62
3.8	Viabilité . . . . .	64
3.9	Conclusion . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Ordonnancement multiprocesseur de tâches indépendantes</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Modèle de tâches et d'architecture . . . . .	69
4.3	Heuristique d'ordonnancement . . . . .	70
4.3.1	Fonction de coût . . . . .	70
4.3.2	Principe de l'heuristique . . . . .	71
4.4	Étude de performances . . . . .	71
4.4.1	Heuristiques <i>BF</i> et <i>WF</i> . . . . .	73
4.4.2	Algorithme exact <i>B&amp;B</i> . . . . .	76
4.4.3	Résultats . . . . .	76

4.4.3.1	Comparaison des temps d'exécution . . . . .	76
4.4.3.2	Comparaison des taux de succès . . . . .	79
4.4.3.3	Comparaison des temps de réponse de l'ordon- nancement des tâches . . . . .	80
4.4.3.4	Comparaison des moyennes des facteurs d'uti- lisation restants . . . . .	81
4.5	Conclusion . . . . .	81

### **III Ordonnancement temps réel multiprocesseur de tâches dépendantes avec prise en compte du coût exact de la préemption** **83**

<b>5</b>	<b>Ordonnancement monoprocesseur de tâches dépendantes</b>	<b>85</b>
5.1	Modèle de tâches et notations . . . . .	86
5.1.1	Modèle de tâches . . . . .	86
5.1.2	Notations . . . . .	87
5.2	Intervalle d'étude de l'ordonnancement . . . . .	88
5.3	Mécanisme de transfert de données . . . . .	88
5.4	Synchronisation de l'accès aux mémoires de données . . . . .	91
5.5	Analyse d'ordonnançabilité hors ligne . . . . .	93
5.5.1	Sélection de la tâche à exécuter . . . . .	94
5.5.2	Durée restant à exécuter avec coût exact de la préemption	96
5.5.3	Échéance relative à une date d'appel de l'ordonnanceur . .	98
5.5.4	Condition d'ordonnançabilité . . . . .	98
5.5.5	Prochaine date d'appel de l'ordonnanceur hors ligne . . .	100
5.5.6	Algorithme d'analyse d'ordonnançabilité monoprocesseur	101
5.5.7	Application . . . . .	102
5.6	Viabilité . . . . .	106
5.7	Conclusion . . . . .	106
<b>6</b>	<b>Ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.2	Modèle de tâches . . . . .	107
6.3	Modèle d'architecture . . . . .	108
6.4	Allocation des tâches aux processeurs . . . . .	109
6.4.1	Condition nécessaire d'ordonnançabilité . . . . .	109
6.4.2	Fonction de coût . . . . .	111
6.4.3	Heuristique d'allocation . . . . .	112
6.5	Analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur . . . . .	113
6.5.1	Communication inter-processeurs . . . . .	114

---

6.5.2	Analyse d'ordonnançabilité des tâches allouées à un processeur . . . . .	116
6.5.3	Condition d'ordonnançabilité multiprocesseur . . . . .	121
6.5.4	Algorithme d'analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur . . . . .	121
6.6	Heuristique d'ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes . . . . .	123
6.7	Application . . . . .	124
6.8	Étude de performance . . . . .	128
6.8.1	Générateur de graphes de tâches dépendantes . . . . .	133
6.8.2	Graphe de processeurs . . . . .	136
6.8.3	Résultats . . . . .	136
6.8.3.1	Temps d'exécutions des algorithmes . . . . .	136
6.8.3.2	Taux de succès . . . . .	138
6.8.3.3	Makespan . . . . .	139
6.9	Conclusion . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Ordonnanceur en ligne avec prise en compte du coût exact de la préemption</b>	<b>143</b>
7.1	Introduction . . . . .	143
7.2	Principe de l'ordonnanceur . . . . .	143
7.3	Implantation de l'ordonnanceur . . . . .	145
7.4	Application . . . . .	146
7.5	Gestion des communications inter-processeurs . . . . .	149
7.6	Conclusion . . . . .	151
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>153</b>
	Conclusion générale . . . . .	153
	Perspectives . . . . .	154



# Table des figures

1.1	Système réactif temps réel . . . . .	18
1.2	Paramètres dynamiques de l'instance $k$ de $\tau_i$ . . . . .	20
1.3	Exemple de graphe de dépendances . . . . .	22
1.4	Illustration de la latence d'un graphe de tâches . . . . .	22
1.5	États et transitions d'une tâche . . . . .	27
2.1	Illustration des pertes de données . . . . .	47
2.2	Inversion de priorités . . . . .	48
2.3	Inter-blocage . . . . .	48
2.4	Illustration du coût de l'ordonnanceur . . . . .	51
2.5	Illustration du coût de la préemption . . . . .	52
3.1	Illustration du PET de l'instance $k$ de $\tau_2$ . . . . .	60
3.2	Opération $\oplus$ entre deux tâches . . . . .	66
3.3	Impact du coût de la préemption . . . . .	67
4.1	Comparaison des temps d'exécution avec variation du nombre de tâches . . . . .	78
4.2	Comparaison des temps d'exécution avec variation du nombre de processeurs . . . . .	78
4.3	Comparaison des taux de succès . . . . .	79
4.4	Comparaison des temps de réponse de l'ordonnancement des tâches . . . . .	80
4.5	Comparaison des moyennes des facteurs d'utilisations restants sur les processeurs . . . . .	81
5.1	Graphe $G_5$ de dépendances de données . . . . .	86
5.2	Illustration des mémoires de données . . . . .	86
5.3	Graphe $G_3$ . . . . .	89
5.4	Illustration du transfert de données des tâches dans $G_3$ . . . . .	90
5.5	Motifs d'exécution des tâches de $\Gamma_3$ . . . . .	90
5.6	Illustration du principe d'héritage de priorités . . . . .	92
5.7	Illustration de $c_1(t)$ et $c_2(t)$ . . . . .	97

5.8	Illustration de $d_i(t)$ . . . . .	98
5.9	Illustration des dates d'appel de l'ordonnanceur . . . . .	102
5.10	Graphe $G'_3$ représentant $\Gamma_3$ . . . . .	102
5.11	Résultat de l'ordonnement de $\Gamma_3$ . . . . .	105
6.1	Illustration d'un graphe d'architecture . . . . .	108
6.2	Illustration de $r_j^{(1,k)}$ et $D_j^k$ . . . . .	111
6.3	Illustration de la marge d'exécution de $\tau_j$ . . . . .	112
6.4	Illustration d'un processeur de communication . . . . .	115
6.5	Illustration d'une communication entre deux processeurs . . . . .	116
6.6	Graphe $G_8$ de dépendances de données . . . . .	124
6.7	Graphe d'architecture de $P_2$ . . . . .	124
6.8	Résultat de l'ordonnement des tâches sur $p_1$ et sur $p_2$ . . . . .	132
6.9	Comparaison des durées d'exécution des algorithmes . . . . .	137
6.10	Comparaison des durées d'exécution des algorithmes . . . . .	138
6.11	Comparaison des taux de succès des algorithmes . . . . .	139
6.12	Comparaison des makespan . . . . .	140
7.1	Exemple de déroulement de l'algorithme 12 . . . . .	150

clearemydoublepage

# Liste des tableaux

5.1	Résumé des notations . . . . .	87
5.2	Table d'ordonnancement de $\Gamma_3$ . . . . .	104
6.1	Table d'ordonnancement du processeur $p_1$ . . . . .	129
6.2	Table d'ordonnancement du processeur $p_2$ . . . . .	130
6.3	Table d'ordonnancement du processeur de communication $p_{com12}$	131
7.1	Table d'ordonnancement $T$ de $\tau_1$ et $\tau_2$ . . . . .	149





# Introduction générale

## Contexte

Cette thèse s'inscrit dans le cadre des recherches menées dans l'équipe-projet AOSTE (Analyse et Optimisation des Systèmes Temps réel Embarquée) d'INRIA Paris-Rocquencourt sur les systèmes distribués temps réel embarqués que l'on trouve dans les domaines applicatifs tels que l'automobile, l'avionique, le ferroviaire, etc. Ces systèmes étant critiques, il faut assurer que les contraintes temps réel et les contraintes de ressources sont satisfaites au risque de conséquences catastrophiques, par exemple de pertes humaines. Satisfaire ces contraintes temps réel et de ressources est d'autant plus difficile que les architectures cibles actuelles sont multicomposant (multiprocesseur, distribués, multi/many-core, parallèles). Les spécifications fonctionnelles et les simulations réalisées par les automaticiens conduisent à ce que les fonctions, qui deviendront des tâches temps réel, aient des périodes différentes, des dépendance entre elles, des contraintes d'échéance et de latence. Afin d'assurer que les conditions d'ordonnancements temps réel soient réellement respectées lorsqu'une application s'exécute en temps réel sur une architecture cible, il faut prendre en compte dans l'analyse d'ordonnabilité le coût du système d'exploitation (OS pour "Operating System") qui réalise effectivement l'ordonnement pendant la vie de l'application, mais qui est en général approximé, voire négligé. Ceci conduit au mieux à du gaspillage de ressources et au pire au non respect des contraintes temps réel lors du fonctionnement de l'application.

## Objectifs

Le coût du système d'exploitation est composé de deux parties : une partie facile à déterminer, correspondant au coût de l'ordonnanceur et une partie difficile à déterminer, correspondant au coût de la préemption. Cette difficulté est due au fait qu'une préemption peut en engendrer une autre, pouvant ainsi créer un phénomène d'avalanche [Yom09]. Meumeu et Sorel [Yom09] ont proposé une

condition d'ordonnançabilité qui permet de prendre en compte le coût exact de la préemption, donc le coût de l'OS. Mais cette condition d'ordonnançabilité n'est applicable qu'à des tâches indépendantes à priorités fixes et sur une architecture monoprocesseur. Notre premier objectif est d'étendre cette condition d'ordonnançabilité pour étudier l'ordonnement de tâches temps réel indépendantes sur une architecture multiprocesseur et en tenant compte du coût exact de la préemption. Les applications temps réel embarquées étant généralement composées de tâches dépendantes, notre deuxième objectif est d'étudier l'ordonnement de tâches dépendantes sur une architecture multiprocesseur et toujours avec prise en compte du coût exact de la préemption. Pour cela nous allons étudier une nouvelle condition d'ordonnançabilité pour des tâches dépendantes, qui permet de prendre en compte le coût exact de la préemption puisque la condition d'ordonnançabilité proposée par Meumeu et Sorel est applicable uniquement pour des tâches indépendantes à priorités fixes et ne permet donc pas de gérer les inversions de priorités que peut entraîner l'ordonnement de tâches dépendantes. Enfin notre troisième et dernier objectif est, à partir de l'analyse d'ordonnançabilité que nous avons proposée, d'utiliser la table d'ordonnement déterminée hors ligne dans un nouveau type d'ordonneur en ligne prenant mieux en compte le coût de l'OS que les ordonnanceurs classiques.

## Plan de la thèse

Ce manuscrit est constitué de trois parties.

La première partie est consacrée aux concepts de bases de l'ordonnement temps réel pour faciliter la compréhension de la suite de la thèse et à l'état de l'art dans lequel on met l'accent sur les méthodes d'allocation des tâches dans l'ordonnement multiprocesseur, sur la prise en compte du coût exact de la préemption et sur les dépendances de données.

La deuxième partie est consacrée à l'ordonnement multiprocesseur de tâches indépendantes avec prise en compte du coût exact de la préemption. Dans le premier chapitre de cette partie on présente la condition d'ordonnançabilité proposée par Meumeu et Sorel qui permet de prendre en compte le coût exact de la préemption en monoprocesseur pour des tâches à priorités fixes. Le deuxième chapitre de cette deuxième partie présente l'étude d'ordonnement multiprocesseur de tâches indépendantes qui étend la condition d'ordonnançabilité de Meumeu et Sorel en multiprocesseur.

La troisième partie est consacrée à l'ordonnement multiprocesseur de tâches dépendantes. Dans le premier chapitre de cette partie, on étudie l'ordonnement des tâches dépendantes en monoprocesseur en proposant une nouvelle condition d'ordonnançabilité qui permet d'ordonner des tâches dépendantes en prenant

---

en compte du coût exact de la préemption et les transferts de données entre tâches qui conduisent à des inversions de priorités. Dans le deuxième chapitre de cette partie, on présente l'étude d'ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes qui étend cette nouvelle condition d'ordonnançabilité monoprocesseur en multiprocesseur tout en tenant compte le coût exact de la préemption et les coûts de communication inter-processeurs. Dans le troisième chapitre de cette partie, on présente l'ordonnanceur en ligne de chaque processeur qui utilise la table d'ordonnancement produite hors ligne, pour ce processeur.



## **Première partie**

### **Concepts de base et État de l'art**



# Chapitre 1

## Concepts de base

L'objectif de ce chapitre est de présenter les concepts de base de l'ordonnement temps réel.

### 1.1 Système temps réel

#### 1.1.1 Définition

Un système réactif doit réagir continûment aux stimuli venant d'un processus qu'il cherche à commander. Un système temps réel est un système réactif qui doit respecter des contraintes de temps. Un système temps réel doit être capable de traiter les informations venant du processus dans un délai qui ne nuit pas à la commande du processus. Réagir trop tard peut conduire à des conséquences catastrophiques pour le système lui-même ou le processus. Le respect des contraintes temporelles est la principale contrainte à satisfaire. La validité d'un système temps réel dépend non seulement des résultats du traitement effectué mais aussi de l'aspect temporel (un calcul juste mais hors délai est un calcul non valable). Dans un système temps réel, les événements d'entrée sont produits par des capteurs et les événements de sortie sont consommés par des actionneurs. La figure 1.1 donne une illustration d'un système réactif temps réel. On rencontre des applications temps réel dans le domaine de l'aéronautique, l'automobile, télécommunication, robotique, etc.

#### 1.1.2 Classification des systèmes temps réel

La criticité des contraintes temporelles conduit à classer les systèmes temps réel en trois catégories suivantes :

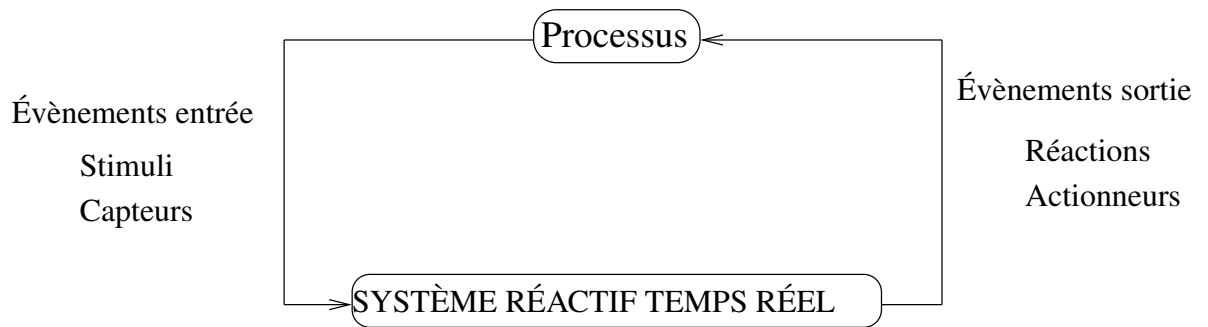


FIGURE 1.1 – Système réactif temps réel

- système temps réel strict : c'est un système soumis à des contraintes temporelles strictes, c'est-à-dire pour lequel la moindre faute temporelle peut avoir des conséquences humaines ou économiques catastrophiques. La plupart des applications dans les domaines avioniques, automobile, etc., sont temps réel strict;
- système temps réel souple : c'est un système soumis à des contraintes temporelles souples, un certain nombre de fautes temporelles peut être tolérées. On parle alors de qualité de service;
- système temps réel mixte : c'est un système soumis à des contraintes temporelles strictes et à des contraintes temporelles souples.

## 1.2 Tâche temps réel

Une tâche temps réel est formée d'un ensemble d'instructions pouvant s'exécuter en séquence sur un ou plusieurs processeurs et respecter des contraintes de temps. Dans la suite nous ferons l'hypothèse qu'une tâche ne s'exécutera pas en parallèle. Elle peut se répéter un nombre quelconque de fois, éventuellement infini. Chacune de ses exécutions est appelée instance ou travail ("job"). Un système temps réel est composé d'un ensemble de tâches temps réel soumises à des contraintes temps réel (voir la section 1.4).

Une tâche temps réel peut être :

- périodique : ses instances (exécutions) se répètent indéfiniment et il existe une durée constante entre deux activations d'instances successives appelée période,
- sporadique : ses instances (exécutions) se répètent indéfiniment et il existe une durée minimum entre deux instances successives,
- a périodique : il y a pas de corrélation entre deux instances successives.



## 1.3 Tâches périodiques

Le modèle de tâches périodiques classique dit de Liu et Layland de [LL73] est le plus utilisé dans la modélisation des systèmes temps réel. Ce modèle permet de définir plusieurs paramètres pour une tâche. Ces paramètres sont de deux types : paramètres statiques relatifs à la tâche elle-même et les paramètres dynamiques relatif à chaque instance de la tâche. Les paramètres statiques de base d'une tâche périodique  $\tau_i = (r_i^1, C_i, D_i, T_i)$  sont :

- $r_i^1$  (release time) : date de première activation de la tâche  $\tau_i$ , date à laquelle  $\tau_i$  peut commencer sa toute première exécution,
- $C_i$  (computing time) : durée d'exécution de  $\tau_i$ . Ce paramètre est considéré dans plusieurs travaux sur l'ordonnancement temps réel comme le pire cas des temps d'exécution (WCET pour Worst Case Execution Time) sur le processeur sur lequel elle va s'exécuter;
- $D_i$  : échéance relative ou délai critique relatif à chaque activation de  $\tau_i$ ,
- $T_i$  : période d'exécution de  $\tau_i$ .

D'autres paramètres statiques sont dérivés des paramètre de base :

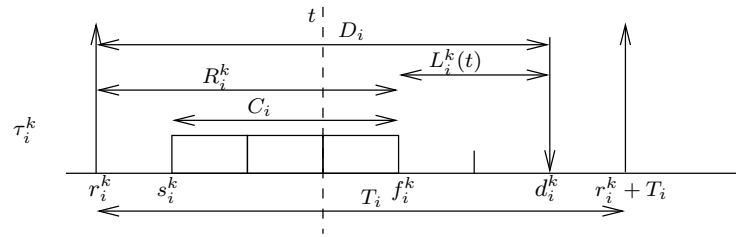
- $u_i = \frac{C_i}{T_i}$  : le facteur d'utilisation du processeur par  $\tau_i$ ,  $u_i \leq 1$ ,
- $CH_i = \frac{C_i}{D_i}$  : la densité de la tâche  $\tau_i$ ,  $CH_i \leq 1$ .

Les paramètres dynamiques d'une tâches déterminent le comportement pendant l'exécution de la tâche  $\tau_i$ . Ces paramètres sont définis pour chaque instance  $k$  noté  $\tau_i^k$  par :

- $r_i^k$  (release time) : date à laquelle  $\tau_i^k$  peut commencer son exécution appelée date d'activation ou date de réveil de la tâche,
- $s_i^k, f_i^k$  : respectivement la date de début d'exécution effective et date de fin d'exécution de  $\tau_i^k$ ,
- $R_i^k$  : temps de réponse de  $\tau_i^k$  donné par  $R_i^k = f_i^k - r_i^k$ . Le pire temps de réponse de  $\tau_i$  noté  $R_i$  est défini par  $R_i = \max\{R_i^k\}_{k \geq 1}$ ;
- $d_i^k = r_i^k + D_i$  : échéance absolue de  $\tau_i^k$  relative à  $r_i^k$ , c'est la date dont le dépassement entraîne une faute temporelle,
- $L_i^k(t)$  (laxity) : c'est la laxité de l'instance  $\tau_i^k$  à la date  $t$ , qui représente le retard maximum pour reprendre l'exécution de la tâche  $\tau_i$  quand elle s'exécute seule.

### 1.3.1 Tâches concrètes/non concrètes

Si toutes les dates de première activation de toutes les tâches sont connues on dit que les tâches sont concrètes. Au contraire si on ne connaît pas ces dates de première activation on dit que ces tâches sont non concrètes.

FIGURE 1.2 – Paramètres dynamiques de l'instance  $k$  de  $\tau_i$ 

### 1.3.2 Tâches synchrones/asynchrones

Si toutes les tâches sont concrètes et ont les mêmes dates de première activation, on dit que les tâches sont à activations synchrones. Sinon, elles sont asynchrones.

## 1.4 Contraintes temps réel

Dans l'ordonnancement temps réel, les tâches peuvent être soumises à plusieurs contraintes telles que des contraintes d'échéances, de périodicité stricte, de dépendances et de précédences, etc.

### 1.4.1 Échéances

Les contraintes d'échéances permettent d'exprimer une condition sur la date de fin d'exécution au plus tard d'une tâche. Considérons un système de tâches périodiques, suivant la relation entre la période  $T_i$  et l'échéance relative  $D_i$  de chaque tâche  $\tau_i$  nous distinguons trois types d'échéances :

- $D_i = T_i$  : à chaque activation de  $\tau_i$ , la tâche  $\tau_i$  doit être exécutée avant sa prochaine activation. On parle de tâches à échéances sur activations, échéances implicites, ou échéances sur requêtes;
- $D_i \leq T_i$  : à chaque activation de  $\tau_i$ , la tâche  $\tau_i$  doit être exécutée au plus tard à une date inférieure ou égale à la date de sa prochaine activation. On parle de tâches à échéances contraintes;
- $D_i \neq T_i$  : il n'y a pas de corrélation entre la date de fin d'exécution au plus tard de  $\tau_i$  lors d'une activation et sa prochaine activation de  $\tau_i$ . On peut avoir  $D_i \leq T_i$  ou  $D_i > T_i$ , on parle de tâches à échéances arbitraires.

### 1.4.2 Périodicité stricte

Considérons une tâche périodique  $\tau_i$  dans un système de tâches temps réel, une contrainte de périodicité stricte impose que le temps qui s'écoule entre deux dates de début d'exécution consécutives  $s_i^k$  et  $s_i^{k+1}$  corresponde exactement à la période de la tâche  $\tau_i$ . L'intérêt de cette contrainte est que la connaissance de la date de début effective de la première instance  $s_i^1$  de  $\tau_i$  implique la connaissance de la date de début effective de toutes les instances suivantes de la même tâche [Cuc04], cela s'exprime par la relation  $s_i^{k+1} = s_i^1 + kT_i, \forall k \geq 1$ . C'est une contrainte qui est utile pour les tâches correspondant aux capteurs et actionneurs et les traitements réalisant une boucle de commande d'un processus.

### 1.4.3 Dépendances entre tâches

Une dépendance entre deux tâches  $\tau_i$  et  $\tau_j$  peut être de deux types : une dépendance de précédence et/ou une dépendance de données. Une dépendance de précédence entre  $(\tau_i, \tau_j)$  impose que la tâche  $\tau_j$  commence son exécution après que la tâche  $\tau_i$  ait complètement fini de s'exécuter [Cuc04, HCAL89, CL87, Xu93]. Les contraintes de précédences sont indirectement des contraintes temps réel et on dit que la tâche  $\tau_i$  est un prédécesseur de la tâche  $\tau_j$  et  $\tau_j$  est un successeur de  $\tau_i$ . Si  $\tau_i$  s'exécute exactement une fois avant une exécution de  $\tau_j$  on a une contrainte de précédence simple sinon une contrainte de précédence étendue [RCR01, FGPR11, PFB<sup>+</sup>11].

Une dépendance de données signifie que la tâche  $\tau_i$  produit une donnée qui est consommée par  $\tau_j$  [Cuc04, HCAL89], cette dépendance entraîne forcément une précédence entre les tâches. Les tâches sont dites indépendantes lorsqu'elles ne sont définies que par leurs paramètres temporels.

L'ensemble des dépendances entre les tâches peut être modélisé par un graphe orienté où les sommets représentent les tâches et l'ensemble des arcs la relation de dépendances entre les tâches. Cette relation est antisymétrique et transitive, c'est donc une relation d'ordre sur l'exécution des tâches. C'est une relation d'ordre partiel car certaines tâches ne sont pas dépendantes. Un exemple de graphe de dépendances de tâches est présenté sur la figure 5.1.

On distingue deux types de dépendances de données :

- sans pertes de données : les données, produites par chaque instance de la tâche productrice sont toutes consommées par l'instance de la tâche consommatrice,
- avec pertes de données : la tâche consommatrice peut perdre des données qui sont écrasées par d'autres données produites par l'exécution d'autres instances de la tâche productrice.

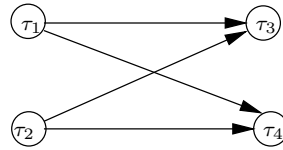


FIGURE 1.3 – Exemple de graphe de dépendances

### 1.4.4 Latence

La latence est définie pour des tâches dépendantes éventuellement par transitivité dans le cas d'un chemin de tâches. Soient  $\tau_i$  et  $\tau_j$  deux tâches liées par un chemin dans un graphe de tâches dépendantes. La latence entre  $\tau_i$  et  $\tau_j$  notée  $L(\tau_i, \tau_j)$  est la durée entre le début d'exécution de  $\tau_i$  et la fin d'exécution de  $\tau_j$ . La figure 1.4 donne une illustration de la latence entre deux tâches.

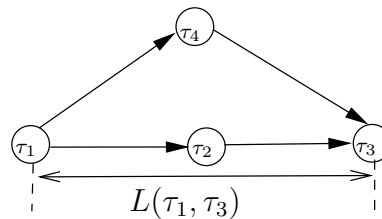


FIGURE 1.4 – Illustration de la latence d'un graphe de tâches

Une contrainte de latence entre  $\tau_i$  et  $\tau_j$  signifie que  $L(\tau_i, \tau_j)$  doit être inférieure ou égale à une certaine valeur.

## 1.5 Ordonnement des systèmes temps réel

### 1.5.1 Algorithmes d'ordonnement

Un système temps réel est constitué d'un ou plusieurs processeurs et d'un ensemble de tâches ayant des contraintes temps réel. Un algorithme d'ordonnement détermine l'ordre total et les dates de démarrage des exécutions des tâches sur un ou plusieurs processeurs. Il existe plusieurs classes d'algorithmes d'ordonnement temps réel.

### **Monoprocasseur/Multiprocasseur**

L'ordonnancement est de type monoprocasseur si toutes les tâches s'exécutent sur un seul processeur. Si les tâches peuvent s'exécuter sur plusieurs processeurs l'ordonnancement est multiprocasseur.

### **Préemptif/Non préemptif**

Un algorithme d'ordonnancement est préemptif lorsqu'une tâche s'exécutant sur un processeur peut être suspendue au profit d'une tâche, dite plus prioritaire, puis reprendre son exécution plus tard. Dans le cas contraire il est non préemptif.

### **En ligne/Hors ligne**

Un algorithme d'ordonnancement hors ligne ("off-line" en anglais) construit la séquence complète des dates de début d'exécution des tâches sur la base des paramètres temporels. Cette séquence est connue avant l'exécution de l'ensemble des tâches. En pratique, l'ordonnancement a la forme d'un plan hors ligne (ou statique), exécuté de façon répétitive ou cyclique.

Un ordonnancement en ligne ("on-line" en anglais) construit la séquence des dates de début d'exécution des tâches à partir des paramètres temporels des tâches pendant l'exécution de l'ensemble des tâches. Les algorithmes en ligne sont plus robustes vis-à-vis des dépassements des WCETs.

### **Priorité fixe/dynamique**

Un algorithme d'ordonnancement est à priorités fixes, si les priorités des tâches sont basées sur des paramètres statiques (par exemple la période). Il existe des algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes aux tâches et d'autres qui sont à priorité fixes aux instances ("job").

Un algorithme d'ordonnancement est à priorités dynamiques, si les priorités des tâches sont basées sur des paramètres dynamiques (par exemple la laxité).

### **Optimal/Non optimal**

Par définition, un algorithme d'ordonnancement optimal pour une classe de problème d'ordonnancement donnée (hors ligne, en ligne, priorités fixes ou dynamiques, etc.) est tel que : si un système est ordonnançable par au moins un algorithme de la même classe, alors le système est aussi ordonnançable par l'algorithme d'ordonnancement optimal. En conséquence, si un système n'est pas

ordonnançable par l'algorithme d'ordonnancement optimal d'une classe donnée, alors il ne l'est pas par aucun autre algorithme d'ordonnancement de la même classe.

### 1.5.2 Analyse de faisabilité

Une analyse de faisabilité d'un ensemble de tâches permet de déterminer s'il existe un algorithme d'ordonnancement qui peut ordonner cet ensemble de tâches. La condition que doit vérifier l'ensemble des tâches pour être faisable est appelée condition de faisabilité.

### 1.5.3 Analyse d'ordonnançabilité

Une analyse d'ordonnançabilité d'un ensemble de tâches permet de vérifier si cet ensemble de tâches est ordonnançable relativement à un algorithme d'ordonnancement, c'est-à-dire vérifier que toute instance de chaque tâche respectera son échéance. La condition que doit vérifier l'ensemble des tâches pour être ordonnançable est appelée condition d'ordonnançabilité.

**Définition 1.5.1** *Une condition d'ordonnançabilité suffisante est une condition qui lorsqu'elle est vérifiée par toutes les tâches assure que celles-ci sont ordonnançables. Dans le cas contraire, elles ne sont pas forcément non ordonnançables.*

**Définition 1.5.2** *Une condition d'ordonnançabilité nécessaire est une condition qui lorsqu'elle n'est pas vérifiée par toutes les tâches assure que celles-ci ne sont pas ordonnançables. Dans le cas contraire, elles ne sont pas forcément ordonnançables.*

**Définition 1.5.3** *Une condition d'ordonnançabilité nécessaire et suffisante est une condition qui lorsqu'elle n'est pas vérifiée par toutes les tâches assure que celles-ci ne sont pas ordonnançables et dans le cas contraire assure que celles-ci sont ordonnançables.*

Une analyse d'ordonnançabilité peut se faire selon deux approches.

#### 1.5.3.1 Approche analytique

L'analyse d'ordonnançabilité par approche analytique consiste à identifier le ou les pires cas d'exécution et de déterminer analytiquement une condition d'ordonnançabilité des tâches. Dans cette approche on peut utiliser :

- le facteur d'utilisation des tâches : dans certains cas le facteur d'utilisation des tâches permet de conclure si un ensemble de tâches est ordonnançable ou non,
- le pire temps de réponse : le pire temps de réponse d'une tâche est calculé puis comparé à son échéance. Si une tâche a un pire temps de réponse inférieur ou égal à son échéance relative alors elle est ordonnançable;
- le temps de demande processeur : c'est le temps requis par le processeur pour exécuter un ensemble de tâches activées puis terminées dans un intervalle donné. Si ce temps est inférieur à la longueur de l'intervalle considéré alors les tâches activées dans cet intervalle sont faisables. Sinon les tâches ne sont pas faisables.

### 1.5.3.2 Approche par simulation

L'approche par simulation revient à faire l'analyse temporelle de l'exécution des tâches temps réel. Lorsque les tâches sont périodiques, cette exécution dure indéfiniment. Il suffit alors de faire l'analyse temporelle sur un intervalle fini appelé intervalle d'étude de l'ordonnancement [LM80, Goo99]. Ainsi si toutes les tâches respectent leurs contraintes sur cet intervalle alors le système de tâches est ordonnançable.

## 1.6 Viabilité d'une condition d'ordonnançabilité

Une condition d'ordonnançabilité est dite viable ("sustainable") si l'ordonnancement trouvé grâce à cette condition d'ordonnançabilité reste valide lors de l'exécution quand intervient un changement intuitivement positif c'est-à-dire par exemple la diminution de la durée d'exécution d'une tâche, l'augmentation de la période d'une tâche ou de l'échéance relative, etc.

Dans ce travail, on suppose que les périodes et les échéances ne seront pas modifiées. Donc nous considérons qu'une condition d'ordonnançabilité est viable ("sustainable") lorsque l'ordonnancement qu'elle trouve reste valide même si la durée d'exécution d'une tâche diminue lors de son exécution.

## 1.7 Ordonnanceur

Un ordonnanceur temps réel est un programme temps réel chargé d'allouer une ou des tâche(s) à ordonner au(x) processeur(s). Il est invoqué à certains instants. Et ceci suivant un algorithme d'ordonnancement donné de tel sorte que toutes les tâches respectent leurs contraintes temps réel.

### 1.7.1 Invocation de l'ordonnanceur

Il existe plusieurs manières d'invoquer un ordonnanceur :

- invocation guidée par les événements (Event-Trigger ET) [CMTN08] : l'ordonnanceur est invoqué sur réception d'un événement tel que l'activation d'une tâche, la libération d'une ressource (processeur, périphériques d'entrées et de sorties, etc.), la fin d'exécution d'une tâche. Ce mode d'invocation est utilisé dans l'ordonnancement en ligne qui prend les décisions d'ordonnancement en fonction des événements qui se produisent lors de l'exécution des tâches;
- invocation guidée par le temps (Time-Trigger TT) [Kop98] : les invocations sont indépendantes des événements. Les dates d'invocation de l'ordonnanceur sont fixées avant l'exécution des tâches et sont généralement périodiques. Cela définit des tranches de temps (slot) pendant lesquelles on peut effectuer un traitement, alors que dans les approches dirigées par les événements (Event-Trigger) le traitement est directement activé par un événement. Ce mode d'invocation de l'ordonnanceur est utilisé dans l'ordonnancement hors ligne où toutes les décisions d'ordonnancement ont été prises hors ligne.

### 1.7.2 États et gestion des tâches

Le partage du ou des processeur(s) et des ressources introduit plusieurs états pour une tâche :

- *Inactif* : la tâche n'est pas encore activée,
- *Prêt* : la tâche est activée et elle dispose de toutes les ressources dont elle a besoin pour s'exécuter,
- *Bloqué* : la tâche est en attente de ressources,
- *Exécution* : la tâche s'exécute,
- *Passif* : la tâche n'a pas de requête en cours, elle a fini son exécution.

L'ordonnanceur est chargé d'assurer la transition d'une tâche d'un état à un autre. À chaque invocation, l'ordonnanceur met à jour la liste des tâches prêtes en y ajoutant toutes les tâches activées et qui disposent de leurs ressources et en supprimant les tâches qui ont fini leurs exécutions ou qui sont bloquées par l'attente d'une ressource. Ensuite parmi les tâches prêtes, l'ordonnanceur sélectionne la tâche la plus prioritaire pour s'exécuter. Ainsi, une tâche dans l'état *inactif* peut passer à l'état *prêt*. Une tâche à l'état *prêt* peut passer à l'état *exécution* ou à l'état *bloqué*. Une tâche à l'état *exécution* peut revenir à l'état *prêt* si elle est préemptée par une autre tâche plus prioritaire, elle peut passer à l'état *bloqué* si elle attend la



libération d'une ressource ou si elle a fini son exécution, elle passe à l'état *passif*. Une tâche peut passer de l'état *bloqué* à l'état *prêt*. Et enfin une tâche peut passer de l'état *passif* à l'état *prêt*. La figure 1.5 donne une illustration des différents états et leurs transitions.

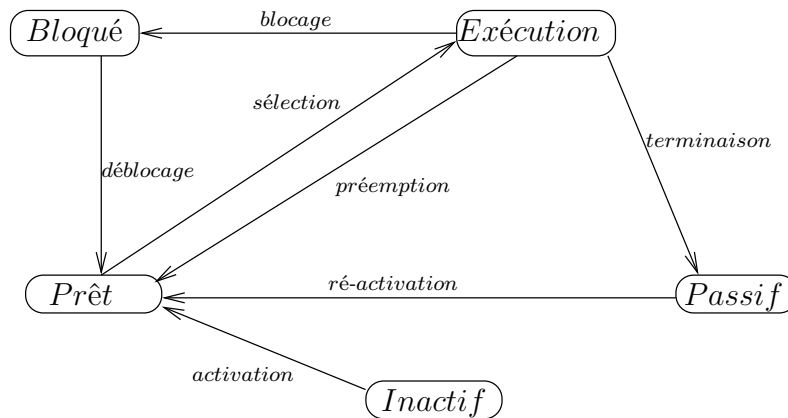


FIGURE 1.5 – États et transitions d'une tâche

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les concepts de base de l'ordonnancement temps réel que nous aurons à utiliser dans la suite de cette thèse. Dans le chapitre qui suit nous allons présenter un état de l'art l'ordonnancement temps réel.



# Chapitre 2

## État de l'art

Après avoir défini les concepts de base de l'ordonnancement temps réel, nous présentons dans ce chapitre un état de l'art de l'ordonnancement temps réel monoprocesseur et multiprocesseur.

### 2.1 Ordonnancement monoprocesseur

#### 2.1.1 Priorités fixes

##### 2.1.1.1 Priorités fixes aux tâches

Une priorité fixe aux tâches est une priorité qui ne varie pas au cours de l'exécution de la tâche. Les algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes aux tâches les plus utilisés sont "Rate Monotonic" et "Deadline Monotonic".

#### Rate Monotonic (RM)

L'algorithme d'ordonnancement RM a été introduit par Liu et Layland en 1973 [LL73]. C'est un algorithme d'ordonnancement préemptif qui s'applique à des tâches périodiques indépendantes, et à échéance sur requête ( $T_i = D_i$ ). La priorité d'une tâche est inversement proportionnelle à sa période, c'est-à-dire que plus la période d'une tâche est petite, plus sa priorité est grande. Cet algorithme est optimal dans la classe des algorithmes à priorités fixes pour les tâches indépendantes préemptibles à échéance sur requête non concrètes ou synchrones. Une condition suffisante d'ordonnançabilité de l'algorithme d'ordonnancement RM [LL73] pour un ensemble de tâches périodiques  $\Gamma_n$  à échéance sur requête est donnée par :

$$\sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \leq n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

### Deadline Monotonic (DM)

L'algorithme d'ordonnement DM a été introduit par Leung et Whitehead en 1982 [LW82] pour des tâches à échéance sur contrainte. La priorité d'une tâche est inversement proportionnelle à son échéance relative, c'est-à-dire que plus l'échéance relative d'une tâche est petite, plus sa priorité est grande. Cet algorithme est optimal dans la classe des algorithmes préemptif à priorités fixes pour les tâches indépendantes préemptibles à échéance contrainte ( $D_i \leq T_i$ ). La condition suffisante d'ordonnabilité de l'algorithme d'ordonnement DM [LW82] pour un ensemble de tâches périodiques  $\Gamma_n$  à échéance sur contrainte est donnée par :

$$\forall \tau_i \in \Gamma_n, C_i + \sum_{j \in hp(\tau_i)} \left\lceil \frac{D_i}{T_j} \right\rceil \cdot C_j \leq D_i$$

avec  $hp(\tau_i)$  est l'ensemble de tâches de  $\Gamma_n$  de priorités supérieures ou égales à celle de  $\tau_i$ , n'incluant pas  $\tau_i$ .

### Analyse du temps de réponse

Le temps de réponse des tâches peut être utilisé pour faire l'analyse d'ordonnabilité. Ainsi Joseph and Pandya [JP86] ont proposé une condition d'ordonnabilité nécessaire et suffisante basée sur le calcul du pire temps réponse. Si  $\Gamma_n$ , un ensemble de tâches, est ordonné par un algorithme à priorités fixes aux tâches, le pire temps de réponse de  $\tau_i \in \Gamma_n$  est donné par le plus petit point fixe (supérieur à  $C_i$ ) de :

$$R_i = C_i + \sum_{j \in hp(\tau_i)} \left\lceil \frac{R_i}{T_j} \right\rceil \cdot C_j \quad (2.1)$$

avec  $hp(\tau_i)$  est l'ensemble de tâches de  $\Gamma_n$  de priorités supérieures ou égales à celle de  $\tau_i$ . Déterminer la valeur de  $R_i$  pour  $\tau_i$  est équivalent à résoudre le point fixe 2.1. Ainsi dans le cas des échéances contraintes,  $\Gamma_n$  est ordonnable par l'ordonnement à priorités fixes aux tâches si et seulement si :

$$\forall \tau_i \in \Gamma_n, R_i \leq D_i$$

#### 2.1.1.2 Priorités fixes aux instances

Une priorité fixe au niveau des instances est une priorité qui ne varie pas au cours de l'exécution des instances. L'algorithme d'ordonnement à priorités fixes aux instances le plus utilisé est "Earliest Deadline First".

### Earliest Deadline First (EDF)

L'algorithme d'ordonnancement EDF a été introduit par Lui et Layland en 1973 [LL73]. C'est un algorithme d'ordonnancement qui peut être préemptif ou non préemptif et qui s'applique à des tâches périodiques indépendantes à échéance sur requête ( $T_i = D_i$ ). La plus grande priorité à la date  $t$  est allouée à la tâche dont l'échéance absolue est la plus proche. EDF est optimal pour les tâches indépendantes préemptibles. Une condition d'ordonnançabilité nécessaire et suffisante de EDF pour un ensemble de tâches périodiques à échéance sur requête noté  $\Gamma_n$  est donnée par :

$$\forall \tau_i \in \Gamma_n, \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \leq 1$$

#### 2.1.2 Priorités dynamiques

Une priorité dynamique varie durant l'exécution d'une instance. L'algorithme d'ordonnancement à priorités dynamiques le plus utilisé est "Least laxity Firsr".

#### Least-Laxity First(LLF)

L'algorithme d'ordonnancement LLF se base sur la laxité. La tâche dont la laxité est la plus faible comparée à toutes les tâches prêtes aura la plus grande priorité [Mok83]. Cet algorithme est optimal pour les tâches indépendantes préemptibles. D'après [CDKM00], la condition d'ordonnançabilité de LLF et celle de EDF sont les mêmes. c'est-à-dire que la condition d'ordonnançabilité nécessaire et suffisante de LLF pour un ensemble de tâches périodiques à échéance sur requête  $\Gamma_n$  est donnée par :

$$\forall \tau_i \in \Gamma_n, \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \leq 1$$

Lorsque plusieurs tâches possèdent la même laxité, l'algorithme LLF a l'inconvénient d'engendrer un grand nombre de préemption ce qui explique qu'il soit aussi peu utilisé dans le cas monoprocesseur [Bim07].

## 2.2 Ordonnancement multiprocesseur

### 2.2.1 Architecture multiprocesseur

Une architecture multiprocesseur est composée de plusieurs processeurs. Plusieurs tâches peuvent s'exécuter en parallèle sur les différents processeurs. Une

architecture multiprocesseurs peut être composée de :

- processeurs identiques : processeurs qui ont la même puissance de calcul,
- processeurs uniforme : chaque processeur est caractérisé par sa puissance de calcul (nombre d'instructions traitées par seconde), avec l'interprétation suivante : lorsqu'un travail (instance d'une tâche) s'exécute sur un processeur de puissance de calcul  $s$  pendant  $t$  unités de temps, il réalise  $s \times t$  instructions sur ce processeur. La vitesse de progression d'un travail varie d'un processeur à un autre;
- processeurs indépendants : un taux d'exécution  $r_{i,j}$  est associé à chaque couple de travail-processeur  $(\tau_i^k, p_j)$ , avec l'interprétation suivante : si le travail  $\tau_i^k$  s'exécute sur  $p_j$  pendant  $t$  unités de temps alors  $\tau_i^k$  réalise  $r_{i,j} \times t$  instructions. La vitesse de progression sur un processeur varie d'un travail à un autre.

Selon le type de mémoire nous pouvons distinguer :

- une architecture multiprocesseur parallèle : les processeurs ont une mémoire partagée par le bus de laquelle ils communiquent,
- une architecture multiprocesseur distribuée : chaque processeur à sa propre mémoire et les communications inter-processeurs se font par envoi/réception de messages.

## 2.2.2 Stratégies d'ordonnement

Considérons un ensemble de  $n$  tâches temps réel indépendantes préemptibles à échéances sur requêtes noté  $\Gamma_n$  et une architecture multiprocesseur composée de  $m$  processeurs. Un algorithme d'ordonnement multiprocesseur détermine pour chaque tâche, le processeur sur lequel cette tâche doit s'exécuter (problème d'allocation) et sur chaque processeur, la date et l'ordre de démarrage d'exécution des tâches (problème d'ordonnement).

Dans l'ordonnement temps réel multiprocesseur nous distinguons deux cas :

- nombre de processeurs non fixé [DL78, OS93, OS95], donc nous pouvons utiliser autant de processeurs que nécessaire pour l'ordonnement,
- nombre de processeurs fixé [OB98, BLOS95], donc impossible de dépasser ce nombre.

Dans le premier cas nous n'avons pas besoins de faire une analyse d'ordonnabilité car le système de tâches à ordonner sera toujours ordonnable (il suffit de prendre un processeur par tâche). Par contre dans le cas où le nombre de processeurs est fixé il peut arriver que le système ne soit pas ordonnable, ce

qui nécessite une étude d'ordonnançabilité.

L'ordonnement temps réel multiprocesseur peut être effectué en utilisant la stratégie d'ordonnement par partitionnement ou la stratégie d'ordonnement globale. Il existe aussi une stratégie d'ordonnement hybride dite de semi-partitionnement obtenue par combinaison de la stratégie globale et par partitionnement.

Dans la suite de ce documents nous limiterons à utiliser le terme stratégie par partitionnement pour désigner la stratégie d'ordonnement par partitionnement (respectivement stratégie globale pour désigner stratégie d'ordonnement global).

### 2.2.2.1 Stratégie par partitionnement

La stratégie par partitionnement [Goo07, DB09, ZA05, AJ] consiste à partitionner l'ensemble des  $n$  tâches en  $m$  sous-ensembles disjoints ( $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^m$  tels que  $\cup_{i=1}^m \Gamma^i = \Gamma_n$  et  $m$  étant le nombre de processeurs) puis d'ordonner chaque sous-ensemble de tâches  $\Gamma^i$  sur un processeur  $p_j$  avec une stratégie d'ordonnement "locale" monoprocasseur. Il y a un ordonnanceur par processeur. Les tâches allouées aux processeurs ne sont pas autorisées à migrer d'un processeur à l'autre, la préemption ne peut entraîner de migration. La stratégie par partitionnement a l'avantage de ramener le problème d'ordonnement multiprocesseur en plusieurs problèmes d'ordonnement monoprocasseur pour lesquels il existe de très nombreuses solutions dans la littérature. Cependant le partitionnement des tâches est NP-difficile [GJ79] car équivalent au problème de "Bin Packing" [CGMV98] qui consiste à ranger un ensemble d'objets de tailles différentes dans un nombre minimum de boîtes de tailles identiques.

Les travaux sur l'ordonnement temps réel multiprocesseur avec un nombre de processeurs non fixé qui utilisent la stratégie de partitionnement ont principalement comme objectif de minimiser le nombre de processeurs nécessaires à l'ordonnement. Parmi ces travaux nous avons :

- dans la famille des algorithmes d'ordonnement à priorités fixes aux tâches, Dhall et Liu [DL78], sont les premiers à proposer deux algorithmes préemptifs avec des tâches indépendantes et périodiques utilisant les heuristiques de "Bin Packing" (voir 2.3.2.2.1 ) sur processeurs identiques: Rate-Monotonic-Next-Fit (RM-NF) et Rate-Monotonic-First-Fit (RM-FF). Ces deux algorithmes d'ordonnement multiprocesseur utilisent Rate Monotonic pour l'ordonnement des tâches sur chaque processeur et les heuristiques respectivement "next-fit" et "first-fit" comme heuristiques d'allo-

- cation des tâches aux processeurs. Dans RM-NF et RM-FF les tâches sont triées dans l'ordre croissant de leurs périodes avant le début de l'allocation. Oh et Son ont repris dans [OS93] ces deux algorithmes d'ordonnancement pour corriger une erreur sur l'évaluation des performances et présentent RM-BF utilisant la méthode d'allocation "best-fit";
- dans [DD86, OS95] est proposé l'algorithme RM First-Fit Decreasing Utilisation Factor (RM-FFDUF), un algorithme similaire à "first-fit" où les tâches sont triées dans l'ordre décroissant de leurs facteurs d'utilisation avant l'allocation;
  - deux autres algorithmes à priorités fixes aux tâches sont proposés dans [BLOS95]. Ce sont le RM-Small-Tasks (RM-ST) et RM-General-Tasks (RM-GT). Le premier algorithme RM-ST alloue les tâches aux processeurs avec l'heuristique "next-fit", mais partitionne les tâches de telle sorte que  $\beta$  (défini dans le théorème 5 [BLOS95]) ait la plus petite valeur possible. Le deuxième algorithme RM-GT partitionne l'ensemble des tâches en deux groupes selon le critère défini dans [BLOS95], ensuite sur les tâches du premier groupe RM-ST est appliqué, et sur le second groupe de tâches "first-fit" est appliqué, avec la condition d'ordonnançabilité définie dans [LSD89];
  - dans le cas des algorithmes d'ordonnancement préemptifs à priorités fixes aux instances, Lopez et al. dans [LDG04] présentent EDF-NF, EDF-FF et EDF-WF, des algorithmes d'ordonnancement multiprocesseur utilisant EDF pour l'ordonnancement et les heuristiques de "bin packing" pour l'allocation des tâches.

Au lieu de considérer un nombre infini de processeurs disponibles, d'autres travaux fixent ce nombre et cherchent des conditions d'ordonnançabilité pour le système de tâches. Parmi ces travaux :

- Oh et Baker [OB98] montrent qu'en appliquant "first-fit" sous RM on peut ordonner n'importe quel ensemble de tâches  $\Gamma$  sur  $m \geq 2$  processeurs identiques. Dans ce même article ils ont démontré qu'avec un algorithme d'ordonnancement multiprocesseur préemptif à priorités fixes aux tâches, le pire facteur d'utilisation des  $m$  processeurs noté  $U_{min}$  est borné par :

$$m(2^{1/2} - 1) < U_{min} \leq (m + 1)/(1 + 2^{(m+1)})$$

$m$  étant le nombre de processeurs. Le pire facteur d'utilisation des processeurs  $U_{min}$  est défini tel que si  $U_n = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i} \leq U_{min}$  alors le système constitué des  $n$  tâches est ordonnançable sur les  $m$  processeurs;

- dans [LDG03] Lopez et al. ont amélioré la borne du facteur d'utilisation définie dans [OB98] et l'ont montrée égale à :

$$U_{RM-FF}(n, m) = (m - 1)(2^{(1/2-1)}) + (n - m + 1)(2^{1/(n-m+1)} - 1) \quad (2.2)$$



Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas où le nombre de processeurs est petit. Si les facteurs d'utilisation des tâches sont plus petits qu'un nombre  $\alpha$  alors  $U_{RM-FF}$  est donné par :

$$U_{RM-FF}(n, m, \alpha) = (m-1)(2^{1/(\beta+1)}-1)\beta + (n-\beta(m-1))(2^{1/(n-\beta(m-1))}-1) \quad (2.3)$$

Où  $\beta = \lfloor 1/\log_2(\alpha + 1) \rfloor$ . En remplaçant  $\alpha$  par 1 dans 2.3 on retrouve 2.2;

- Buchard et Lieber dans [BLOS95] ont calculé les bornes maximales des facteurs d'utilisation des algorithmes RM-ST et RM-GT. Avec un système de  $m \geq 2$  processeurs,  $U_{RM-ST} = (m-2)(1-\alpha) + 1 - \ln 2$ ,  $\alpha$  étant le facteur d'utilisation maximal de l'ensemble des  $n$  tâches. Donc l'algorithme RM-ST trouve un partitionnement possible sur un ensemble de  $m$  processeurs si la somme des facteurs d'utilisation des tâches périodiques notée  $U_n$  reste inférieure à  $U_{RM-ST}$ . Avec RM-GT le résultat est différent,  $U_{RM-GT}$  est donné par  $U_{RM-GT} = 0.5(m-1.42)$  et ne dépend pas de  $\alpha$  et si  $U_n \leq U_{RM-GT}$  alors le système de tâches est ordonnançable. Dans [LGD04] est récapitulé le calcul des bornes maximales et minimales des facteurs d'utilisation permettant de garantir les conditions d'ordonnançabilité d'un ensemble de  $n$  tâches sur  $m$  processeurs avec RM;
- concernant les algorithmes à priorités fixes aux instances, il existe des algorithmes préemptifs basés sur EDF qui fournissent des conditions d'ordonnançabilité utilisant le facteur d'utilisation des processeurs : EDF-FF et EDF-BF dans [LGDG00] avec  $U_{EDF-FF} = U_{EDF-BF} = \frac{\beta_{EDF}m+1}{\beta_{EDF}+1}$  (avec  $\beta_{EDF} = \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor$  et  $\alpha$  représentant le facteur d'utilisation maximal des tâches);
- dans [ESHA94, ESHA90], les algorithmes génétiques sont utilisés pour résoudre le problème d'ordonnancement avec des contraintes de précédences.

### 2.2.2.2 Stratégie globale

Une stratégie globale applique globalement un algorithme d'ordonnancement sur l'ensemble de l'architecture multiprocesseur [Goo07, DB09, ZA05]. Toutes les tâches sont dans la même queue des tâches prêtes qui est partagée par l'ensemble des processeurs. Dans cette queue les  $m$  tâches les plus prioritaires sont sélectionnées pour être exécutées sur les  $m$  processeurs, par exemple en utilisant globalement RM, EDF, etc. Pour ces stratégies globales outre la préemption des tâches, les migrations de ces dernières sont autorisées. Une tâche peut commencer son exécution sur un processeur (soit  $p_j$ ), être préemptée par l'arrivée d'une nouvelle tâche plus prioritaire et reprendre son exécution sur un autre processeur (disons  $p_{j'}, j' \neq j$ ). Dans la stratégie globale, nous avons un seul ordonnanceur et préempter une tâche revient éventuellement à la faire migrer vers un autre processeur. C'est ce phénomène de migration de tâches qui caractérise la stratégie

globale.

L'avantage de la stratégie d'ordonnancement globale est de permettre une meilleure utilisation des processeurs. Son inconvénient est que le coût de migration des tâches est non négligeable. Parmi les travaux basés sur la stratégie globale notons :

- pour les tâches indépendantes, préemptives et périodiques, il existe plusieurs algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes aux instances [SB02, Bar04, BG03, GFB03] ou fixes aux tâches [ABJ01, RM00] qui reposent sur la stratégie globale. Dans [SB02] est présenté l'algorithme EDF-US sur  $m$  processeurs identiques (avec des tâches indépendantes et périodiques) avec comme condition d'ordonnançabilité  $U_n \leq m^2/(2m - 1)$ ,  $U_n$  est la somme des facteurs d'utilisation des tâches à ordonnancer. Cet algorithme est une modification de EDF en choisissant les priorités des tâches selon la règle suivante : si  $u_i > m/(2m - 1)$  alors aux "jobs" de la tâche  $\tau_i$  est allouée la plus haute priorité, sinon si  $u_i \leq m/(2m - 1)$  on applique EDF. Goossens et al. [GFB03] ont donné la condition suffisante d'ordonnançabilité avec EDF pour des tâches périodiques à échéances sur requête, suivante: si  $U_n \leq m(1 - \alpha) + \alpha$ ,  $\alpha = \max(u_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  alors le système de tâches  $\Gamma$  est ordonnançable sur les  $m$  processeurs.
- un algorithme à priorités fixes aux tâches RM-US similaire à EDF-US est présenté dans [ABJ01] avec  $U_{min} = m^2/(3m - 2)$ . Des algorithmes d'ordonnancement préemptifs à priorités fixes aux instances avec des tâches sporadiques sont présentés dans [BG08, AB08, Bar07, BB08]. Dans [Bak03] nous avons un algorithme à priorités fixes aux tâches avec Deadline Monotonic qui donne le résultat suivant : avec des tâches périodiques et  $m \geq 2$  processeurs, la condition suffisante d'ordonnançabilité est donnée par:  $U_n \leq \frac{m}{2}(1 - \alpha)\alpha$ .
- dans [AJ03] nous avons des algorithmes d'ordonnancement basés sur la notion d'équité proportionnée (proportionate fairness). Ces algorithmes dits "pfair" diffèrent des algorithmes d'ordonnancement classiques dans la mesure où il est requis avec ces algorithmes que les tâches s'exécutent à un taux régulier (quasi constant) en divisant une tâche en série de sous-tâches. Ces sous-tâches doivent s'exécuter dans des intervalles de tailles identiques appelés fenêtre.

Il faut noter que les stratégies globales et par partitionnement ne sont pas comparables d'après Leung et Whitehead [LW82]. Ils ont montré que pour les algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes : i) il y a des systèmes de tâches périodiques qui sont ordonnançables en utilisant  $m$  processeurs identiques à l'aide d'une approche partitionnée mais pour lesquels aucune stratégie globale existe

pour les ordonnancer, ii) il y a des systèmes de tâches périodiques ordonnancables avec une approche globale en utilisant  $m$  processeurs mais pour lesquels aucun partitionnement de  $m$  sous-ensembles ordonnancables existe.

### 2.2.2.3 Stratégie par semi-partitionnement

Elle est obtenue par combinaison de la stratégie par partitionnement et de la stratégie globale. Chaque tâche est allouée à un processeur pour toute son exécution, cependant si une tâche ne peut s'exécuter entièrement sur aucun processeur, son exécution est partagée sur deux ou plusieurs processeurs dont la charge maximale n'est pas atteinte (les migrations sont autorisées pour ce type de tâches). Différents types d'algorithmes de semi-partitionnement sont présentés dans [KY08, AT06, KY07]. Cette approche permet de minimiser les migrations de tâches.

## 2.3 Allocation des tâches temps réel dans l'ordonnancement multiprocesseur

Les termes allocation, distribution, partitionnement ou assignation des tâches sont équivalents dans le vocabulaire de l'ordonnancement temps réel multiprocesseur. Dans la suite on utilisera le terme allocation. Allouer une tâche à un processeur signifie l'exécuter sur un processeur de façon à ce que cette tâche et toutes les autres tâches, qui sont déjà allouées à ce même processeur, soient ordonnancables selon une condition d'ordonnancabilité qui est précisée. L'allocation d'une tâche à un processeur se faisant en fonction d'un critère, le problème à résoudre est un problème d'optimisation. Le critère d'optimisation peut être le nombre de processeurs, le facteur d'utilisation, la latence, etc. Dans cette partie nous étudions les différentes méthodes existantes dans la résolution du problème d'allocation des tâches temps réel. Nous distinguons deux grandes catégories de méthodes de résolution : celles qui sont dites exactes et les méthodes approchées.

### 2.3.1 Méthodes exactes

Une méthode exacte est une méthode qui cherche, en parcourant toutes les allocations possibles, une solution (l'ordonnancement où toutes les contraintes sont respectées), si jamais celle-ci existe. Par ailleurs si cette méthode ne trouve pas de solutions, on en déduit que le problème n'a pas de solution. Et puisque le problème d'allocation inclut une optimisation, la solution trouvée par une méthode exacte est la meilleure solution possible dite optimale.

### 2.3.1.1 Branch & Bound

L'algorithme de "Branch and Bound" (B&B) (séparation et évaluation) [CY90, Tal09] est basé sur l'énumération de toutes les solutions du problème d'optimisation. L'espace de recherche est exploré dynamiquement en construisant un arbre dont la racine représente le problème à résoudre avec son espace de recherche associé. Les feuilles de l'arbre sont les solutions potentielles au problème et les noeuds internes les solutions partielles (en ordonnancement c'est une solution ne contenant pas toutes les tâches). La solution optimale est la meilleure parmi les solutions potentielles. La construction et l'exploration de cet arbre se font à l'aide de deux opérations : la séparation et l'évaluation des solutions partielles. L'opération de séparation détermine l'ordre de parcours de l'espace des solutions partielles (parcours en profondeur, en largeur, etc.). L'évaluation des solutions partielles se fait à l'aide d'une fonction coût qui permet d'exclure ou de garder une solution partielle. La performance d'un algorithme de B&B dépend non seulement de la méthode de séparation des solutions partielles mais aussi de la fonction de coût utilisée pour évaluer ces solutions.

L'algorithme de B&B est utilisé dans de nombreux travaux d'ordonnancement temps réel multiprocesseur comme dans [CY90, Xu93, PSA97].

### 2.3.1.2 Branch & Cut

L'algorithme de "Branch and Cut" [Mit02] utilise aussi un arbre pour représenter l'espace des solutions mais toutes les solutions ne sont pas énumérées. En effet pour chaque tâche candidate à l'ordonnancement, l'algorithme teste son ordonnancement sur chaque processeur puis à l'aide d'une fonction de coût il sélectionne le meilleur processeur pour la tâche sélectionnée. Si la tâche  $\tau_i$  n'est ordonnançable sur aucun processeur alors l'algorithme de "Branch and Cut" fait un retour-arrière ("backtrack"), il revient à la tâche  $\tau_{i-1}$  qui a été ordonnancée juste avant et il lui cherche un autre processeur. Si aucun processeur n'est trouvé pour ordonnancer la tâche  $\tau_{i-1}$  alors l'algorithme B&C fait un deuxième retour-arrière. Tant qu'une tâche reste non allouée, ces retour-arrières sont itérés jusqu'à la première tâche qui a été allouée pour lui chercher un autre processeur. Ce qui permet de trouver une allocation possible si toutefois elle existe.

### 2.3.1.3 Programmation par contraintes

La programmation par contrainte (PPC) [Ben06, Hla04] est utilisée pour résoudre plusieurs types de problèmes tels que la planification, l'ordonnancement, etc. Dans la PPC, le problème est modélisé à l'aide de variables de décisions et de contraintes, où une contrainte est une relation entre une ou plusieurs variables

qui limite les valeurs que peuvent prendre simultanément chacune des variables qui est liée à cette contrainte. Un domaine est associé à chaque variable et celui-ci est constitué de l'ensemble des valeurs pouvant être affectées à cette variable. Lorsque le domaine d'une variable est réduit à une valeur, on dit que la variable est instanciée. Un ensemble de variables instanciées est une instantiation. Une solution au problème est alors définie comme une instantiation des variables qui satisfait la conjonction de toutes les contraintes.

Les algorithmes de recherche de solutions en PPC s'appuient généralement sur la propagation de contraintes pour réduire l'espace de recherche de solutions. La propagation de contraintes est le mécanisme qui consiste à déduire de nouvelles contraintes à chaque fois qu'un domaine de variable est modifié. Les algorithmes de recherche de solutions garantissent de trouver une solution, si toutefois elle existe, sinon ils peuvent prouver qu'il n'existe pas une solution qui satisfait toutes les contraintes.

Cette technique de programmation par contraintes a été utilisée dans plusieurs travaux [Hla04, PEHDN08, EJ00, CA95] pour résoudre le problème d'ordonnancement temps réel multiprocesseur.

#### 2.3.1.4 Programmation linéaire

La programmation linéaire (PL) [Van96, DT03] permet de résoudre les problèmes d'optimisation dont la fonction objective et les contraintes sont linéaires. C'est un domaine central dans l'optimisation car les problèmes de programmation linéaire sont les problèmes d'optimisation les plus faciles (toutes les contraintes y sont linéaires). Dans un problème de PL, il est toujours question de minimiser ou de maximiser une fonction objectif exprimée à l'aide de variables de décisions. Les solutions à trouver doivent être représentées par des variables réelles. S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation, on parle de programmation linéaire en nombre entiers (PLNE). Un problème de PLNE est un problème de PL dans lequel on ajoute la contrainte supplémentaire que certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières. La programmation linéaire mixte (PLM), permet de traiter des problèmes dans lesquels les variables sont mixtes (entières et réelles) [She11].

Dans [Sub05] est présenté une formulation sous la forme de PLNE pour le problème d'ordonnancement des tâches temps réel dépendantes dans un système multiprocesseur homogène.

### 2.3.1.5 Programmation dynamique

La programmation dynamique [Sar84] est basée sur la division récursive d'un problème en plusieurs sous-problèmes plus simples. Elle applique le principe de l'optimalité formulée par R. Bellman qui est le suivant : "Dans une séquence optimale de décisions, quelle que soit la première décision prise, les décisions subséquentes forment une sous-séquence optimale, compte tenu des résultats de la première décision". Ce principe implique que le problème à étudier puisse être formulé comme l'évolution d'un système. Il est aussi nécessaire de pouvoir décomposer le problème en plusieurs étapes qui permet une grande économie de calculs.

### 2.3.1.6 Les Réseaux de flots

Un réseau de flots [FJF62] est un graphe dont chaque arc a une capacité et reçoit une quantité de flots. Le flot reçu par un arc ne doit pas dépasser la capacité de l'arc. Dans un réseau de flots la quantité de flots entrant par un sommet doit être égale à la quantité de flot qui ressort par ce même sommet, à l'exception du sommet source qui n'a pas d'arcs entrants et de sommet puits qui n'a pas d'arcs sortants. Il est également possible d'avoir plusieurs sources et puits dans un réseau de flots et d'associer un coût à chaque arc correspondant au coût d'utilisation de cet arc.

Dans les réseaux de flots, le problème du minimum *k-coupe* [FJF62] consiste à déterminer un ensemble d'arcs du graphe de telle sorte que la suppression de ses arcs sépare le graphe en exactement  $k$  composantes connexes (dans une composante connexe pour deux sommets il existe au moins un chemin qui les relie) et chaque composante a au moins un sommet puits ou un sommet source.

En représentant les tâches et les processeurs dans un même graphe comme un réseau de flots dont les puits et sources sont les processeurs, la solution au problème du minimum *k-coupe* permet de résoudre le problème d'allocation des tâches en considérant que  $k$  est le nombre de processeurs disponibles pour l'allocation des tâches.

Généralement les travaux utilisant les réseaux de flots pour résoudre le problème d'allocation des tâches ne prennent pas en compte les contraintes temps réel [Sto77, CHMTE80]. Dans [BF97] un modèle de réseau de flots est présenté pour l'allocation des tâches temps réel avec respect des contraintes de temps dans le cas de tâches indépendantes.

## 2.3.2 Méthodes approchées

Les méthodes exactes, bien que produisant des solutions optimales ne sont pas généralement applicables à cause de leur temps de calcul prohibitif pour des problèmes réalistes. Les méthodes approchées permettent de donner des solutions qui dans la plupart des cas ne sont pas optimales, mais ont des temps de calcul acceptables qui les rendent applicables dans les problèmes de grandes tailles. Nous distinguons deux catégories de méthodes approchées, les méthodes de recherches non guidées qui ne dépendent pas du domaine étudié appelées aussi métaheuristiques et les méthodes guidées ou heuristiques qui dépendent du domaine étudié.

### 2.3.2.1 Méthodes de recherche non guidées ou métaheuristiques

Ce sont des méthodes d'optimisation globales inspirées de plusieurs domaines tels que l'intelligence artificielle, la biologie, la sidérurgie, etc. Nous distinguons celles qui sont basées sur la notion de population de solutions [Tal09, CCH<sup>+</sup>99] (ensemble de solutions appelées individus) comme les algorithmes génétiques et celles qui se basent sur la recherche locale [Tal09, VM05, EL97] comme le recuit simulé. Dans cette dernière, la solution, déterminée à l'aide d'une fonction de coût, est remplacée par la meilleure solution située dans son voisinage. Le recuit simulé et la méthode Tabou font parties de ces métaheuristiques qui utilisent la recherche locale.

#### 2.3.2.1.1 Recuit simulé

L'algorithme de recuit simulé [Tal09] commence par générer de façon aléatoire une solution initiale unique. À cette solution initiale sont associées une fonction d'énergie qui caractérise le système et une température pour permettre à l'algorithme de passer d'une phase à l'autre où la valeur de l'énergie diminue puis augmente pour diminuer par la suite jusqu'à l'obtention d'une valeur minimale, qui correspond à l'optimum global. Cette température est appelée "facteur d'agitation aléatoire". En ordonnancement temps réel la fonction d'énergie peut être une combinaison de plusieurs paramètres tels que le temps de réponse, les coûts de communications inter-processeurs, etc.

Dans [TBW92, CA95], le recuit simulé est utilisé pour résoudre le problème d'allocation des tâches temps réel avec des contraintes de précédences et des coûts de communication inter-processeurs.

#### 2.3.2.1.2 Recherche Tabou

Un algorithme de recherche Tabou [Tal09, GL93] combine une procédure de recherche locale avec un certain nombre de règles et de mécanismes lui permettant de surmonter l'inconvénient des optimums locaux, tout en évitant les problèmes de cycles (visiter plusieurs fois une solution). En effet il possède une mémoire (une liste tabou) qui garde les mouvements déjà effectués pour éviter d'y revenir et d'être piégé dans un cycle qui impliquera la convergence vers un optimum local. Cela permet d'explorer d'autres espaces de solutions et d'améliorer les solutions.

Les algorithmes de recherche tabou peuvent être utilisés dans la résolution du problème d'ordonnancement temps réel multiprocesseur avec des contraintes de précédences et des coûts de communication. [KBKP04, FGLM96].

### **2.3.2.1.3 Algorithmes génétiques**

Les algorithmes génétiques [Tal09] s'inspirent de l'évolution biologique des espèces en exploitant la sélection et la survie de l'espèce la mieux adaptée. Le principe des algorithmes génétiques repose sur la sélection des individus qui représentent les solutions. La reproduction se fait dans le but de générer une autre population avec de meilleurs individus, en leur transmettant certaines de leur caractéristiques. Une fonction de coût est utilisée afin d'évaluer les individus et de sélectionner les meilleurs pour constituer une autre population, à laquelle on appliquera de nouveau la sélection et la reproduction. Ce processus est réitéré jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. La reproduction des individus est réalisée avec le croisement et la mutation. Le croisement consiste à couper deux individus en un point qui peut être choisi aléatoirement et à échanger les parties coupées. La mutation, quand à elle, modifie les gènes des individus afin de produire d'autres individus (par exemple en ordonnancement on crée d'autres solution à partir d'une solution existante en modifiant l'allocation des tâches dans cette solution) [Tal09].

Dans [ESHA94, ESHA90], les algorithmes génétiques sont utilisés pour résoudre le problème d'ordonnancement temps réel multiprocesseur avec des contraintes de précédences.

### **2.3.2.2 Méthodes guidées ou heuristiques**

Les méthodes d'allocation que nous présentons dans cette partie sont guidées par le domaine de l'ordonnancement temps réel multiprocesseur. Ce qui justifie l'utilisation par la suite de la notion de tâche, de processeur, de coûts de communication, etc. Ces méthodes heuristiques sont basées sur l'évolution d'une solution partielle (solution qui ne contient pas toutes les tâches à allouer). Bien que



ces heuristiques soient plus rapides que les métaheuristiques, à fortiori que les méthodes exactes, expérimentalement les heuristiques fournissent des solutions moins proches de l'optimal que les métaheuristiques.

### 2.3.2.2.1 Heuristiques gloutonnes

Les heuristiques gloutonnes construisent la solution incrémentalement. À chaque étape de l'heuristique gloutonne une tâche est rajoutée selon un critère glouton, correspondant à une décision locale déterminant le meilleur choix (à court terme) [Tal09, VM05]. Chaque choix fait est définitif, ces algorithmes n'autorisent pas les retour-arrières ("backtracking"). Ainsi, les solutions obtenues sont très dépendantes de l'ordre de considération des tâches. Les heuristiques gloutonnes donnent très rapidement des solutions qui sont rarement optimales.

Parmi les heuristiques gloutonnes nous avons les heuristiques utilisées dans la résolution du problème de remplissage de boîtes ("bin packing"). Par la suite nous utiliserons la terminologie heuristiques de "*bin packing*" pour désigner ces types d'heuristiques.

Dans le problème d'ordonnancement multiprocesseur, chaque tâche est modélisée par un objet et la taille de cet objet est modélisée par le facteur d'utilisation du processeur par cette tâche. Chaque processeur est modélisé par une boîte de capacité égale à la charge maximale que l'on peut atteindre sur ce processeur avec un algorithme d'ordonnancement fixé. Voici quelques heuristiques gloutonnes :

- heuristique "next-fit" :
  - Étape 1: initialiser le compteur des tâches  $i=1$
  - Étape 2: initialiser le compteur des processeurs  $j=1$
  - Étape 3: Si  $\tau_i$  est ordonnançable sur  $p_j$  (selon Liu et Layland [LL73] par exemple) alors allouer  $\tau_i$  à  $p_j$ ; Sinon  $j = j + 1$  et allouer  $\tau_i$  à  $p_j$
  - Étape 4: Si  $i < n$  alors  $i = i + 1$  et reprendre à partir de l'étape 3, sinon fin et système ordonnançable avec  $j$  processeurs;
- heuristique "first-fit" :
  - avec "next-fit" si la tâche  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable sur  $p_j$  on passe immédiatement à  $p_{j+1}$  même si  $\tau_i$  est ordonnançable sur l'un des  $j - 1$  processeurs déjà utilisés. Ce qui a tendance à augmenter le nombre de processeurs. L'heuristique "first-fit" tente d'abord d'allouer une tâche au processeur, de plus petit indice  $j$  parmi les processeurs déjà utilisés et pouvant l'ordonnançer. Si cela est impossible on passe à un processeur vide;
- heuristique "best-fit" :

cette heuristique alloue une tâche au processeur en suivant une fonction coût  $f$  définie pour chaque processeur (par exemple la capacité restante du processeur). Ainsi une tâche est allouée au processeur de plus petite valeur de  $f$  qui peut l'ordonnancer. Si deux processeurs ont la même valeur de  $f$ , la tâche est allouée au processeur de plus petit indice;

- heuristique de “worst-fit” :  
c'est une heuristique similaire à “best-fit”, mais avec “worst-fit”, une tâche est allouée au processeur ayant la plus grande valeur de la fonction coût  $f$ .

Ces heuristiques de type “bin packing”, cherchent uniquement à minimiser le nombre de processeurs utilisés dans le partitionnement des tâches, à l'exception de “best-fit” et “worst-fit” avec lesquels nous pouvons optimiser une fonction de coût définie.

#### 2.3.2.2.2 Heuristiques de listes

Généralement ces méthodes heuristiques utilisent un graphe acyclique orienté (GAD) pour représenter les dépendances entre les tâches en associant des poids aux arcs (symbolisant les coûts de communication entre processeurs) qui relient les sommets (représentant les tâches), ainsi que des poids aux sommets (symbolisant les durées d'exécution des tâches). Les heuristiques de liste [SS97, ACD74, MKTM93] définissent une liste de tâches en attribuant à chacune d'elles une priorité. Cette liste détermine l'ordre du choix d'allocation d'une tâche aux différents processeurs. À chaque étape de l'heuristique, une tâche est sélectionnée dans la liste des tâches candidates pour être ordonnancée sur un processeur puis la liste est mise à jour (suppression de la tâche ordonnancée et ajout des tâches qui n'ont pas de prédécesseurs dans le graphe des tâches). Ceci est répété jusqu'à ce que la liste soit vide. Par opposition aux heuristiques gloutonnes, certaines approches des heuristiques de liste autorisent les retour-arrières [AaR95, Ram90] sur un choix quand une tâche ne peut pas être allouée à un processeur. Cela a pour conséquence d'augmenter considérablement le temps de recherche et selon Adan et al. [AaR95] et Ramamritham [Ram90] n'améliore pas toujours les résultats. Sans les retour-arrières les heuristiques de listes sont rapides d'exécution mais, comme avec toutes les heuristiques, il y a un risque de ne pas trouver une solution alors qu'il en existe.

#### 2.3.2.2.3 Heuristiques de regroupement ou "clustering"

Les heuristiques de regroupement [CHMTE80, GVV90, KT00] consistent à regrouper les tâches en différents sous-ensembles appelés “clusters” (groupes)

en fonction des objectifs du problème (respect des contraintes temps réel, minimisation des coûts de communication, etc.), les tâches d'un "cluster" devant être ensuite allouées à un même processeur, ce qui diminue la taille du problème. La résolution du problème d'allocation par des heuristiques de regroupement est donc décomposée en deux phases. La première phase constitue le regroupement proprement dit et la seconde consiste à allouer les tâches sur les processeurs en fonction des contraintes temps réel, de précédence entre les tâches, etc. Cette seconde phase peut être menée, par exemple, par des heuristiques de liste. Les heuristiques de regroupement ont l'avantage de réduire l'espace de recherche de solutions en explorant les "clusters" au lieu des tâches elles-mêmes. Par contre le regroupement des tâches en "clusters" peut engendrer la non satisfaction de contraintes (temps réel, minimisation du temps de réponse de l'ordonnancement, etc.).

#### 2.3.2.2.4 Heuristique de duplication de tâches

Ces heuristiques dupliquent les tâches sur les processeurs afin de minimiser une fonction coût qui peut être le temps de réponse de l'ordonnancement des tâches. Dans [XTL10] est présentée une heuristique de duplication de tâches appelée "Heterogeneous Earliest Finish with Duplicator" (HEFD). L'heuristique HEFD utilise le principe des heuristiques de liste en définissant une liste pour les tâches candidates à l'ordonnancement. À chaque étape de l'heuristique une tâche candidate est sélectionnée puis sur chaque processeur la date de démarrage au plus tôt de la tâche est déterminée par duplication des tâches prédécesseurs immédiats de cette tâche candidate sur tous les processeurs sur lesquels elles ne sont pas encore dupliquées. Si la duplication d'une tâche prédécesseur immédiat sur un processeur entraîne un retard sur la date de démarrage au plus tôt de la tâche candidate alors cette duplication est supprimée. Ensuite le processeur produisant la plus petite date de démarrage pour la tâche est sélectionnée pour ordonnancer la tâche candidate.

## 2.4 Ordonnancement de tâches dépendantes

Comme nous l'avons vu à la section 1.4.3, une contrainte de dépendance entre tâches peut être une contrainte de précédence ou une contrainte de dépendances de données. Dans l'ordonnancement de tâches avec des contraintes de précédences, il existe deux approches pour résoudre le problème. La première est basée sur les sémaphores [FGPR11] : un sémaphore est alloué à chaque précédence  $(\tau_i, \tau_j)$ , et la tâche successeur  $\tau_j$  doit attendre que la tâche prédécesseur  $\tau_i$  libère le sémaphore avant de commencer son exécution. La deuxième approche est basée

sur la modification des priorités et des dates de premières activations des tâches [CSB90, FBG<sup>+</sup>10a]. Dans l'ordonnancement des tâches avec des contraintes de dépendances de données en plus des tenir compte des contraintes de précédences, il faut gérer le transfert et le partage de données entre tâches.

### 2.4.1 Transfert de données

Soient  $\tau_i$  et  $\tau_j$  deux tâches de périodes respectives  $T_i$  et  $T_j$  liées par une contrainte de dépendances de données telle que  $\tau_i$  est la tâche productrice et  $\tau_j$  la tâche consommatrice. Dans le cas général le transfert de données entre ces tâches se fait dans un rapport  $k$  relativement à leurs périodes tel que si  $T_i < T_j$  alors  $T_j = kT_i + r$ , sinon  $T_i = kT_j + r$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $r \in \mathbb{N}$ . Dans le cas où  $\tau_i$  a une période plus petite que  $\tau_j$  alors  $\tau_j$  consomme  $k$  données produites par  $\tau_i$ . Dans le cas où  $\tau_i$  a une période plus grande ou égale à celle de  $\tau_j$  alors  $\tau_j$  consomme une ou plusieurs fois la donnée produite par  $\tau_i$ . Si  $r \neq 0$ , il peut arriver que la tâche productrice  $\tau_i$  produise  $k + 1$  données avant que la tâche consommatrice  $\tau_j$  ne consomme, sur ces  $k + 1$  données seules les  $k$  données sont consommées par  $\tau_j$  et la donnée qui reste est perdue. Ce qui fait qu'au total on perdrait une infinité de données. Pour illustrer ce cas prenons l'exemple de deux tâches  $\tau_1(0, 1, 3, 3)$  et  $\tau_2(3, 1, 7, 7)$  telles que  $\tau_1$  est la tâche productrice de données et  $\tau_2$  la tâche consommatrice de données. Nous avons  $T_2 = 7 = 2 * 3 + 1 = 2T_1 + 1$ . Comme le montre la figure 2.1 ci-dessous, avant que la tâche consommatrice  $\tau_2$  ne démarre sa 4<sup>ème</sup> exécution, la productrice s'est exécutée trois fois donc a fourni trois données dont deux seulement sont consommées à la 4<sup>ème</sup> exécution de  $\tau_2$  et la donnée qui reste est perdue.

Il peut y avoir plusieurs possibilités pour la tâche  $\tau_j$  de consommer les données produites par  $\tau_i$  [FBG<sup>+</sup>10b]. La tâche  $\tau_j$  peut consommer la totalité des données produites par  $\tau_i$  ou n'importe quel sous-ensemble des données. Par exemple dans [RCR01], la tâche  $\tau_j$  ne consomme que la dernière donnée produite par  $\tau_i$ . Par contre dans [Ker09, KS07] toutes les données produites par  $\tau_i$  sont consommées par  $\tau_j$  sans qu'aucune données ne soient perdues.

### 2.4.2 Partage de ressources

Les dépendances de données entraînent des partages de données entre tâches. Les données produites par les tâches sont sauvegardées dans des mémoires considérées comme des ressources. Ces mémoires sont partagées entre les tâches productrices qui écrivent leurs données dans ces mémoires et les tâches consommatrices qui y lisent des données. Considérons deux tâches  $\tau_i$  et  $\tau_j$  telles que  $\tau_i$  produit des données que  $\tau_j$  consomme. Lorsque  $\tau_j$  se fait préempter par  $\tau_i$ , les données dans la mémoire partagée par ces deux tâches peuvent être dans un état incon-

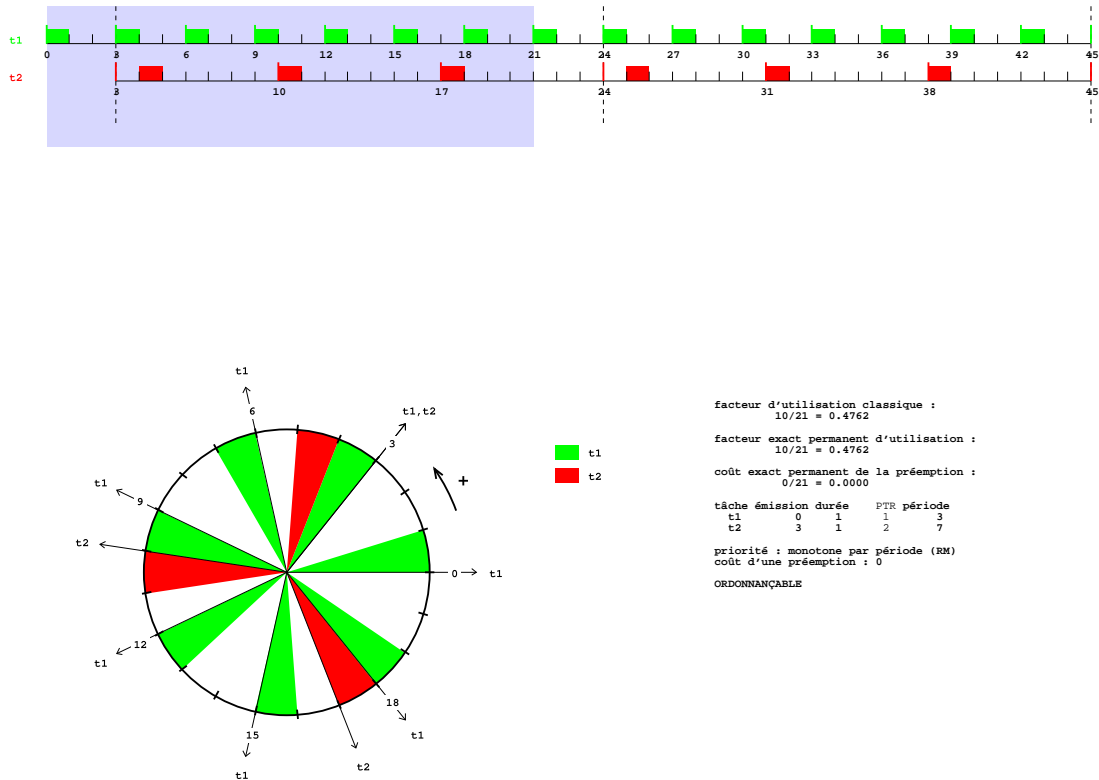


FIGURE 2.1 – Illustration des pertes de données

sistant car  $\tau_i$  risque de modifier les données qui ne seront plus les mêmes à la reprise de l'exécution de  $\tau_j$ . Donc  $\tau_i$  et  $\tau_j$  ne doivent pas accéder en même temps à la mémoire tampon qu'elles partagent. On dit que les deux tâches ont des contraintes d'exclusions mutuelles [Kai81, SRL90]. Pour traiter ces contraintes d'exclusion mutuelles, les tâches sont exécutées dans des sections critiques [Kai81]. Une tâche qui s'exécute en section critique ne pourra pas être préemptée par une autre tâche. Lorsque la tâche  $\tau_i$ , la plus prioritaire, attend la fin de la section critique de  $\tau_j$  pour pouvoir s'exécuter, on parle d'inversion de priorité [SRL90] et on dit que  $\tau_i$  est bloquée par  $\tau_j$ . Un exemple d'inversion de priorité est présenté à la figure 2.2.

On dit que deux ou plusieurs tâches sont en inter-blocage si chacune des tâches est bloquée en attente d'une ressource qui est utilisée par une autre tâche parmi ces tâches [Hav68]. Un exemple d'inter-blocage est présenté à la figure 2.3.

Les sections critiques doivent être utilisées convenablement afin d'éviter que des tâches moins prioritaires bloquent indéfiniment des tâches plus prioritaires

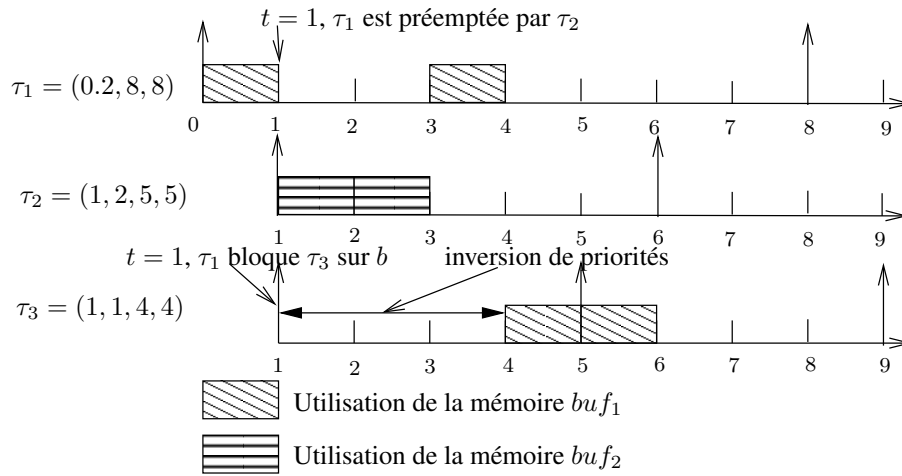


FIGURE 2.2 – Inversion de priorités

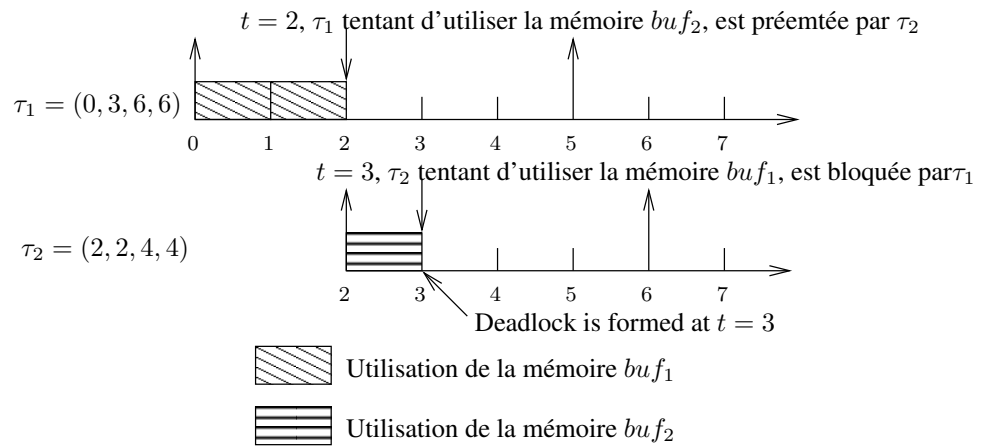


FIGURE 2.3 – Inter-blocage

mais aussi les inter-blocages. Pour cela plusieurs protocoles de synchronisation ont été proposés aussi bien en monoprocesseur qu'en multiprocesseur.

## 2.4.3 Protocoles de synchronisation monoprocesseur

### 2.4.3.1 Priority Inheritance Protocol (PIP)

Le protocole de synchronisation PIP (Priority Inheritance Protocol) a été proposé par Sha and al. [SRL90]. Il est basé sur le principe de l'héritage de priorité.

Pour réduire la durée des inversions de priorités, lorsqu'une tâche  $\tau_j$  bloque une autre tâche  $\tau_i$  plus prioritaire qu'elle,  $\tau_j$  hérite de la priorité de  $\tau_i$  durant toute la durée de son exécution. Après son exécution  $\tau_j$  reprend sa priorité initiale. Ceci permet d'éviter qu'une tâche de priorité intermédiaire (une tâche plus prioritaire que  $\tau_j$  et moins prioritaire que  $\tau_i$ ) préempte  $\tau_j$  ce qui allongerait le temps de blocage de  $\tau_i$ . Ce protocole permet de réduire le temps de blocage mais ne permet pas d'éviter les inter-blocages. Ce protocole est utilisé dans le cas des algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes.

### 2.4.3.2 Priority Ceiling Protocol (PCP)

Le protocole de synchronisation PCP (Priority Ceiling Protocol) [SRL90] est une extension de PIP pour éviter les inter-blocages. Il est basé sur le principe de la priorité plafond. Une priorité plafond est donnée à chaque ressource. Cette priorité plafond est définie par la plus grande priorité des tâches qui utilisent cette ressource. À chaque instant  $t$ , on définit la priorité du système comme étant la plus grande priorité plafond parmi les ressources en cours d'utilisation à  $t$ . Une tâche  $\tau_i$  ne pourra exécuter sa section critique que lorsque sa priorité est plus grande que la "priorité du système" qui est égale à la plus grande priorité parmi les priorités des ressources en cours d'utilisation. Sinon  $\tau_j$  continue son exécution et hérite de la priorité de  $\tau_i$ . Ceci permet d'éviter les inter-blocages.

### 2.4.3.3 Stack Resource Policy (SRP)

Le protocole SRP (Stack Resource Policy MSRP) [Bak91], est la version de PCP avec des priorités dynamiques. Chaque instance d'une tâche possède un plafond de préemption. Une instance de la tâche  $\tau_i$  ne pourra préempter une instance de la tâche  $\tau_j$  que lorsque la priorité de l'instance de  $\tau_i$  est supérieure au plafond de préemption de l'instance de la tâche  $\tau_j$ . Chaque ressource a un plafond de préemption qui est le maximum des plafonds de préemption des instances pouvant utiliser cette ressource. On définit le plafond de préemption du système comme étant le plus grand plafond de préemption des ressources en cours d'utilisation. Une tâche  $\tau_i$  ne peut exécuter une section critique que lorsque sa priorité est plus grande que le plafond de préemption de toutes les tâches actives et que son plafond de préemption est supérieur à celui du système. Les instances actives sont placées dans une pile dans l'ordre décroissant de leur priorité.

## **2.4.4 Protocoles de synchronisation multiprocesseur**

### **2.4.4.1 MPCP**

Le protocole MPCP (Multiprocessor Priority Ceiling Protocol) [Raj90] est une extension en multiprocesseur de PCP. Avec MPCP on distingue deux types de ressources. Les ressources locales sont partagées entre tâches sur le même processeur et les ressources globales sont partagées entre tâches allouées sur des processeurs différents. Chaque ressource globale a une priorité plafond égale à la plus grande priorité parmi celles des tâches pouvant utiliser cette ressource et la plus grande priorité du système (la plus grande priorité des ressources en cours d'utilisation sur les processeurs). Une tâche qui utilise une ressource globale est exécutée à la priorité de cette ressource. Dans le cas des ressources locales, MPCP fonctionne de la même manière que PCP.

### **2.4.4.2 MSRP**

Le protocole MSRP (Multiprocessor Stack Resource Policy MSRP) [GLN01] est une extension en multiprocesseur de SRP. Chaque processeur possède son propre plafond de préemption. Chaque processeur attribue à une ressource globale un plafond de préemption supérieur ou égal au plafond de préemption sur ce processeur. Lorsqu'une tâche utilise une ressource globale sur un processeur, ce processeur hérite du plafond de priorité de cette ressource globale. Dans le cas des ressources locales, MSRP fonctionne de la même manière que SRP.

## **2.5 Ordonnancement avec prise en compte du coût de l'OS**

Le coût du système d'exploitation est composé de deux parties. La première est appelée coût de l'ordonnanceur. Elle correspond au coût de sauvegarde de contexte du processeur, au coût de sélection de la tâche à exécuter et au coût de chargement de la tâche sélectionnée [KAS93]. La seconde partie est appelée coût de la préemption dû à l'ensemble des préemptions [Yom09]. Le coût d'une préemption correspond au coût de sauvegarde de contexte du processeur, de sélection de la tâche à exécuter et de restauration de contexte du processeur au moment de chaque préemption. Les travaux que nous avons présentés jusqu'à présent font l'hypothèse que le coût de l'OS est négligeable ou est approximé dans le pire temps d'exécution de chaque tâche.



### 2.5.1 Coût de l'ordonnanceur

Le coût de l'ordonnanceur est illustré sur la figure 2.4. Ce coût se décompose en :

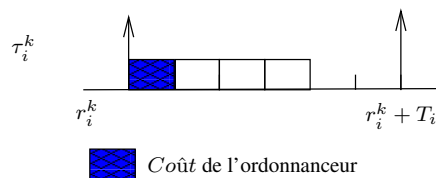


FIGURE 2.4 – Illustration du coût de l'ordonnanceur

- coût de sauvegarde de contexte du processeur,
- coût de sélection de la tâche à exécuter,
- coût de chargement pour exécution de la tâche sélectionnée.

La sauvegarde du contexte de la tâche en cours d'exécution et de chargement de la tâche sélectionnée ont un coût fixe. Dans le cas d'un ordonnancement en ligne la sélection d'une tâche s'effectue pendant l'exécution des tâches. Cette sélection de la tâche à exécuter dépend du nombre de tâches dans l'état "Prêt" et donc son coût varie. Par contre dans le cas d'un ordonnancement hors ligne, la sélection d'une tâche s'effectue à partir d'une table d'ordonnancement qui a été déterminée avant l'exécution des tâches. Le coût de sélection est fixe et égal au coût de lecture dans une table.

Dans la suite comme nous nous intéressons à l'ordonnancement hors ligne, le coût de l'ordonnanceur devient fixe. Pour le prendre en compte dans l'analyse d'ordonnançabilité, il suffira de l'ajouter au pire temps d'exécution de chaque tâche. Dans la suite du manuscrit on expliquera comment prendre en compte le coût exact de la préemption.

### 2.5.2 Coût de la préemption

Lorsqu'une tâche se fait préempter par une autre tâche plus prioritaire, son contexte d'exécution est sauvegardé et celui-ci doit être restauré lors de sa re-sélection. Le coût de sauvegarde de contexte est pris en compte dans la durée d'exécution de la tâche qui préempte plutôt que dans la durée d'exécution de la tâche préemptée car, le coût de l'ordonnanceur qui est supposé inclus dans la durée d'exécution des tâches contient aussi la sauvegarde de contexte. Par contre la restauration du contexte de la tâche préemptée a lieu uniquement lors de sa reprise d'exécution. Cette restauration du contexte de la tâche préemptée est précédée par

une sélection de tâche et par une sauvegarde de contexte d'exécution de la tâche en cours. Cet ensemble de coût de sélection, de sauvegarde de contexte d'exécution de la tâche en cours et de restauration de contexte de la tâche préemptée, est appelé coût d'une préemption. Ce coût temporel de la préemption rallonge le temps de réponse de l'exécution de la tâche préemptée et peut causer à son tour d'autres préemptions pour d'autres tâches moins prioritaires. Cette accumulation de préemptions peut rendre non ordonnançable un système de tâches qui était initialement déclaré ordonnançable en négligeant le coût de la préemption. La figure 5.5.2 illustre le coût de la préemption.

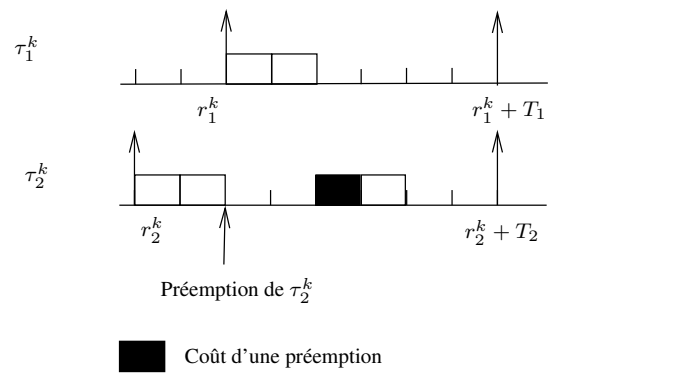


FIGURE 2.5 – Illustration du coût de la préemption

Pour éviter de prendre en compte le coût de la préemption qui a un impact sur l'ordonnançabilité, certains travaux proposent de réduire le nombre de préemption [Bur94, WS99, SW00]. Dans [Bur94], un algorithme d'ordonnancement à priorités fixes et à préemptions différées est proposé. Cet algorithme considère que chaque exécution ou instance d'une tâche est constituée de plusieurs sous-exécutions et une préemption ne peut avoir lieu qu'entre deux sous-exécutions. Ceci permet de réduire le nombre de préemptions d'une tâche au cours de son exécution. Dans [WS99, SW00] un autre algorithme d'ordonnancement avec plafond de priorité est proposé. Cet algorithme assigne à une tâche deux types de priorité : une priorité nominale et une priorité plafond. Avec cet algorithme, une préemption ne peut avoir lieu que lorsque la tâche qui préempte a une priorité nominale plus grande que la priorité de seuil de la tâche qu'elle veut préempter. Donc en choisissant comme il faut les priorités de seuil des tâches on peut réduire le nombre de préemptions. Cependant aucun de ces travaux ne prend en compte dans l'ordonnancement le coût lié à chaque préemption.

En revanche d'autres travaux ont pris en compte le coût de la préemption. Dans le modèle de tâche Liu et Layland [LL73] le coût de la préemption est ap-

proximé dans le WCET. Cette approximation se fait soit en prenant une marge faible, ce qui peut rendre un système de tâches non ordonnancables à l'exécution alors que ce système a été conclu ordonnancable. Ou bien l'approximation est faite en prenant une marge importante ce qui entraîne le gaspillage de la ressource processeur. C'est la raison pour laquelle nous devons prendre en compte le coût exact de la préemption, c'est-à-dire le coût lié à l'occurrence de chaque préemption. A. Burns and al. dans [BTW95] ont essayé de résoudre ce problème en présentant une analyse d'ordonnabilité basée sur le temps de réponse qui prend en compte le coût global lié au nombre maximum de préemptions. Sauf que dans ce cas on a une borne maximum du nombre de préemptions et non pas le nombre exact. Dans [ERC95], Ripoll and al. se sont eux aussi intéressés au nombre exact de préemption en faisant l'ordonnement tâche après tâche et en comptant le nombre de préemption. Mais ils ne prennent pas en compte les préemption engendrées par d'autres préemptions car ils n'ajoutent pas le coût lié à l'occurrence de chaque préemption.

Dans [Yom09] Meumeu et Sorel ont proposé une analyse d'ordonnabilité d'un ensemble de tâches indépendantes périodiques qui permet de prendre en compte le coût exact de la préemption. Cette analyse est basée sur une opération binaire d'ordonnement appelée  $\oplus$  qui permet de compter le nombre exact de préemptions de chaque instance d'une tâche puis ajoute le coût associé à ces préemptions à son WCET ce qui permet d'obtenir une nouvelle durée d'exécution de la tâche avec prise en compte du coût exact de la préemption. Cette durée appelée PET ("Préemption Execution Time") est utilisée dans l'analyse d'ordonnabilité des tâches.

Puisque prendre en compte le coût exact de l'ordonneur revient à rajouter son coût fixe dans le WCET de chaque tâche, ceci avant l'exécution des tâches, on supposera que le coût de l'ordonneur est inclus dans le WCET des tâches. Donc prendre en compte le coût exact de l'OS revient à prendre en compte le coût exact de la préemption. Donc dans la suite nous concentrerons notre étude sur le coût exact de la préemption.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un état de l'art sur l'ordonnement temps réel en mettant l'accent sur les méthodes d'allocation des tâches dans l'ordonnement multiprocesseur, sur la prise en compte du coût exact de la préemption et sur les dépendances de données.

Dans la seconde partie de cette thèse nous étudierons l'ordonnement multiprocesseur des tâches indépendantes avec prise en compte du coût exact de la préemption. Pour cela nous réutiliserons les concepts définis dans cet état de l'art.



## **Deuxième partie**

**Ordonnancement temps réel  
multiprocesseur de tâches  
indépendantes avec prise en compte  
du coût exact de la préemption**



# Chapitre 3

## Ordonnancement monoprocesseur de tâches indépendantes

### 3.1 Introduction

Comme nous l'avons présenté dans l'état de l'art, la prise en compte du coût exact de la préemption dans l'analyse d'ordonnabilité de tâches temps réel est peu étudiée. Les seuls travaux que nous avons trouvés dans l'état de l'art sont ceux de Meumeu et Sorel [Yom09] qui ont présenté l'opération d'ordonnement  $\oplus$  dans le cas de l'ordonnancement monoprocesseur. Ce chapitre donne une présentation simplifiée de l'opération  $\oplus$ . Nous allons aussi dans ce chapitre prouver la viabilité ("sustainability") de l'analyse d'ordonnabilité basée sur cette opération dans le cas d'un ordonnancement à priorités fixes.

### 3.2 Modèle de tâches

Considérons l'ensemble  $\Gamma_n$  de tâches temps réel périodiques indépendantes concrètes. Chaque tâche  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$  est caractérisée par une date de première activation  $r_i^1$ , une pire durée d'exécution  $C_i$  n'incluant pas les coûts de préemption contrairement au modèle classique de Liu et Layland [LL73], une période  $T_i$  et une échéance relative  $D_i$ . Les tâches étant périodiques, la date de la  $k^{\text{ème}}$  activation de  $\tau_i$  est donnée par  $r_i^k = r_i^1 + (k-1)T_i$ . La tâche  $\tau_i$  doit terminer son exécution avant la date  $d_i^k = r_i^k + D_i$ . Le temps qui s'écoule entre la date d'activation et la date de fin d'exécution de la  $k^{\text{ème}}$  activation de  $\tau_i$  désigne le temps de réponse  $R_i^k$  de la  $k^{\text{ème}}$  instance de  $\tau_i$ . On suppose que l'inégalité  $C_i \leq D_i = T_i$  est toujours vérifiée.

Nous supposons aussi que le processeur que nous considérons n'a pas de cache, ni "pipeline" ou d'architecture interne complexe.

### 3.3 Intervalle d'étude de l'ordonnement

L'opération d'ordonnement  $\oplus$  utilise l'approche par simulation présentée à la section 1.5.3.2 de l'état de l'art pour faire l'analyse d'ordonnabilité des tâches. Cette simulation est réalisée sur un intervalle d'étude défini. Cet intervalle est déterminé à l'aide du théorème 3.3.1 ci-dessous.

**Théorème 3.3.1** [Yom09] Soit  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  un ensemble de  $n$  tâches périodiques indépendantes concrètes tel que  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$ , avec  $i = 1, \dots, n$ , rangées par priorités décroissantes relativement à un algorithme d'ordonnement à priorités fixes noté *Algo*, c'est-à-dire  $i < j$  implique que la priorité de  $\tau_i$  est supérieure à la priorité de  $\tau_j$ . Soit  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par

$$\begin{cases} s_1 = r_1^1 \\ s_i = r_i^1 + \left\lceil \frac{(s_{i-1} - r_i^1)^+}{T_i} \right\rceil \cdot T_i, \quad 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

S'il existe un ordonnancement valide de  $\Gamma_n$  jusqu'à la date  $s_n + H_n$  où  $H_n = \text{ppcm}\{T_i \mid i = 1, \dots, n\}$  et  $x^+ = \max(x, 0)$ , alors cet ordonnancement est valide et périodique de période  $H_n$  à partir de  $s_n$ .

D'après le théorème 3.3.1, l'exécution de l'ensemble des tâches  $\Gamma_n$  est périodique à partir de la date  $s_n$  et sa période est égale à  $H_n = \text{ppcm}\{T_i \mid i = 1, \dots, n\}$ . L'intervalle défini par  $[r_{\min}, s_n]$  avec  $r_{\min} = \min\{r_i^1\}_{\tau_i \in \Gamma_n}$  est appelé phase transitoire et l'intervalle défini par  $[s_n, s_n + H_n]$  est appelé la phase permanente qui se répète indéfiniment. Donc un intervalle d'étude de l'ordonnement de  $\Gamma_n$  est donné par  $I_n = [r_{\min}, s_n + H_n]$ . En considérant uniquement l'ordonnement des  $i$  premières tâches on parle d'ordonnement de niveau  $i$  et un intervalle d'étude de l'ordonnement des  $i$  tâches est donné par  $I_i = [r_{\min}, s_i + H_i]$  avec  $H_i = \text{ppcm}\{T_j \mid j = 1, \dots, i\}$ .

### 3.4 Opération binaire d'ordonnement $\oplus$

#### 3.4.1 Principe

L'opération d'ordonnement  $\oplus$  a été proposée par Meumeu [Yom09]. C'est une opération binaire, c'est-à-dire qu'elle ne s'applique qu'entre deux opérands : un opérande de gauche  $op_1$  appelé tâche exécutée et un opérande de droite  $op_2$  appelé tâche exécutable telles que le résultat  $\mathcal{R}$  est donné par  $\mathcal{R} = op_1 \oplus op_2$ . Par convention l'opérande de gauche est toujours plus prioritaire que l'opérande de droite. On représente une instance de la tâche exécutable  $op_2$  par une séquence



de symboles de “ $e_2$ ” en gras suivi par une séquence de symbole de “a”. Chaque symbole de “ $e_2$ ” de la tâche exécutable représente une unité de temps exécutable, c'est-à-dire une unité de temps que  $op_2$ , la tâche à exécuter, doit exécuter. Chaque symbole “a” représente une unité de temps libre. Nous représentons une instance de la tâche exécutée  $op_1$  par de séquences de symbole de “e” suivi par de séquences de symboles de “a” qui ne se suivent pas forcément et qui peuvent se répéter indéfiniment. Chaque symbole “ $e_1$ ” de la tâche exécutée  $op_1$  représente une unité exécutée par  $op_1$ , c'est-à-dire une unité de temps que  $op_1$  a déjà exécutée.

Le principe de l'opération  $\oplus$  est de remplacer les unités de temps “a” libres de la tâche exécutée  $op_1$  par les unités de temps exécutables “ $e_2$ ” de la tâche  $op_2$ . Pour cela, puisque les deux opérands ne sont pas comparables, on les référence par rapport à la même origine de temps, puis on répète l'exécution de  $op_1$  autant de fois qu'il y a d'instances de  $op_1$  sur l'intervalle d'étude  $I_2$ . Ensuite on réécrit le premier opérande  $op_1$  en fonction du nombre d'instances du second opérande  $op_2$  sur l'intervalle d'étude  $I_2$ . Le résultat  $\mathcal{R} = op_1 \oplus op_2$  est une tâche exécutée, composée de séquences de symboles de “ $e_1$ ”, de séquences de symboles de “ $e_2$ ”, suivies de séquences de symboles de “a” qui ne se suivent pas forcément et qui peuvent se répéter indéfiniment.

Soient deux tâches périodiques concrètes  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$  et  $\tau_{i+1} = (r_{i+1}^1, C_{i+1}, T_{i+1}, D_{i+1})$ . On suppose que  $\tau_i$  est plus prioritaire que  $\tau_{i+1}$ . On veut ordonnancer  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  en utilisant  $\oplus$ .  $\tau_i$  étant la plus prioritaire on a  $\mathcal{R} = \tau_i \oplus \tau_{i+1}$ . On étudie l'ordonnancabilité de  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  sur l'intervalle  $I_{i+1} = [r_{min}, S_{i+1} + H_{i+1}]$  avec  $r_{min} = \min\{r_j^1\}_{\tau_j \in \{\tau_i, \tau_{i+1}\}}$  et  $S_{i+1}$ , déterminé à l'aide du théorème 3.3.1. L'exécution de  $\tau_i$  est périodique de période  $T_i$  et se répète indéfiniment à partir de  $r_i^1$ . Le coût d'une préemption est supposé être une constante donnée par  $\alpha$ .

**Définition 3.4.1** *La durée d'exécution de la tâche  $\tau_{i+1}$  sur son instance  $k$  avec prise en compte du coût exact de la préemption appelée “Preemption Execution Time” (PET) est donnée par :*

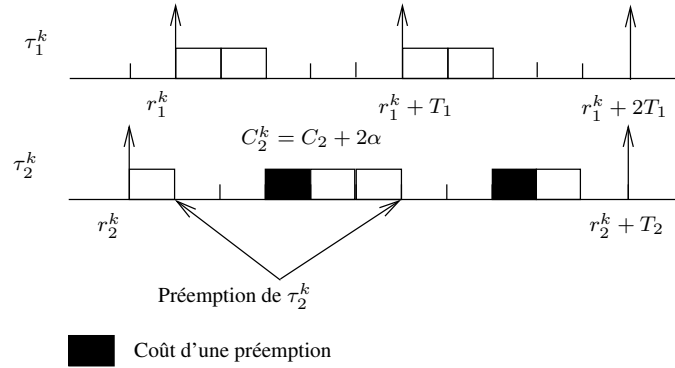
$$C_{i+1}^k = C_{i+1} + np_{i+1}^k * \alpha$$

$np_{i+1}^k$  est le nombre exact de préemption de  $\tau_{i+1}$  sur son instance  $k$ .

La figure 3.1 donne une illustration du PET.

Le nombre  $np_{i+1}^k$  de préemptions de la tâche  $\tau_{i+1}$  sur son instance  $k$  est calculé selon le principe suivant :

- $np_{i+1}^k$  est initialisé à zéro au début de l'instance  $k$ ,

FIGURE 3.1 – Illustration du PET de l'instance  $k$  de  $\tau_2$ 

- à chaque fois que  $\tau_{i+1}$  est préemptée par  $\tau_i$ ,  $np_{i+1}^k$  est incrémenté de 1 et on ajoute  $\alpha$  unités de temps à la durée d'exécution qui reste à  $\tau_{i+1}$  pour finir son exécution. Ceci permet de prendre en compte les préemptions engendrées par d'autres préemptions;
- à la fin de l'instance  $k$ ,  $np_{i+1}^k$  correspond au nombre exact de préemptions de  $\tau_{i+1}$ .

L'algorithme 1 ci-dessous présente les différentes étapes de l'ordonnancement de  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  utilisant  $\oplus$ .

### 3.4.2 Application

Pour illustrer l'ordonnancement avec  $\oplus$  on considère les tâches  $\tau_1 = (1, 2, 4; 4)$  et  $\tau_2 = (0, 2, 6, 6)$  avec  $\tau_1$  plus prioritaire que  $\tau_2$ . L'intervalle d'étude de l'ordonnancement de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  est calculé à l'aide du théorème 3.3.1. Cet intervalle est donné par  $I_2 = [0, 18]$ . La figure 3.2 ci-dessous donne les différentes étapes de l'ordonnancement avec  $\oplus$ .

## 3.5 Analyse d'ordonnançabilité avec $\oplus$

Soit un ensemble de tâches périodiques concrètes  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  où les tâches sont triées dans l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme à priorités fixes noté *Algo*. Puisque l'opération d'ordonnancement  $\oplus$  ne s'applique qu'entre deux opérandes à la fois, alors  $\oplus$  est appliquée  $n - 1$  fois et de façon itérative pour faire l'analyse d'ordonnancement de l'ensemble  $\Gamma_n$ . Ainsi si  $\mathcal{R}_n$  est

**Algorithme 1**  $\mathcal{R} = \tau_i \oplus \tau_{i+1}$ 

- 
- 1: Calculer l'intervalle d'étude de l'ordonnement de  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  noté  $I_{i+1}$
  - 2: Référencer  $\tau_i$  et  $\tau_j$  par rapport à la même origine de temps  $r_{min} = \min\{r_j^1\}_{\tau_j \in \{\tau_i, \tau_{i+1}\}}$
  - 3: Répéter l'exécution de  $\tau_i$  autant de fois qu'il y a d'instances de  $\tau_i$  sur l'intervalle  $I_{i+1}$ . Ceci est possible car  $\tau_i$  est la plus prioritaire donc elle peut s'exécuter sans être préemptée
  - 4: Délimiter toutes les instances de  $\tau_{i+1}$  sur l'intervalle  $I_{i+1}$ . Soit  $n_{i+1}$  le nombre d'instances de  $\tau_{i+1}$  sur  $I_{i+1}$
  - 5: *ordonnançable*  $\leftarrow$  *vrai*
  - 6:  $k \leftarrow 1$
  - 7: **tant que** ( $k \leq n_{i+1}$ ) et (*ordonnançable* = *vrai*) **faire**
  - 8:   Calculer  $C_{i+1}^k$ , la durée d'exécution de  $\tau_{i+1}$  sur son instance  $k$  avec le coût exact de la préemption
  - 9:   Compter le nombre d'unités de temps libres "a" sur l'instance  $k$  de  $\tau_i$ . On note par *idle* <sup>$k$</sup>  ce nombre.
  - 10:   **si** *idle* <sup>$k$</sup>  <  $C_{i+1}^k$  **alors**
  - 11:     *ordonnançable*  $\leftarrow$  *faux*
  - 12:   **sinon**
  - 13:      $\tau_{i+1}$  ne rate pas son échéance sur l'instance  $k$
  - 14:     Remplacer les  $C_{i+1}^k$  premières unités de temps libres "a" par des unités de temps  $e_{i+1}$  exécutées par  $\tau_{i+1}$
  - 15:   **fin si**
  - 16: **fin tant que**
  - 17: **si** *ordonnançable* = *vrai* **alors**
  - 18:    $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  sont ordonnançables et  $\mathcal{R}$  le résultat de l'ordonnement de  $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  est donné par  $I_{i+1}$  avec des exécutions de  $\tau_i$  et de  $\tau_{i+1}$ . Cet ordonancement est périodique de période  $H_{i+1} = ppcm(T_i, T_{i+1})$  et se répète indéfiniment à partir de  $s_{i+1}$  déterminé à l'aide du théorème 3.3.1
  - 19: **sinon**
  - 20:    $\tau_i$  et  $\tau_{i+1}$  ne sont pas ordonnançables car il existe une instance de  $\tau_{i+1}$  dans laquelle  $\tau_{i+1}$  n'est pas ordonnançable.
  - 21: **fin si**
-

le résultat de l'ordonnancement de  $\Gamma_n$ , alors  $\mathcal{R}_n$  est obtenu par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1 = \tau_1 \\ \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i \oplus \tau_{i+1}, \quad 1 \leq i < n \end{cases}$$

À la fin de l'analyse d'ordonnançabilité, nous pouvons produire la table d'ordonnancement des tâches qui contient les dates de début et de fin d'exécution de chaque tâche.

Il faut noter que c'est le choix de priorité qui détermine l'ordre d'application de  $\oplus$ , de la tâche la plus prioritaire à la moins prioritaire.

La complexité de l'analyse d'ordonnançabilité de  $\Gamma_n$  basée  $\oplus$  est évaluée à  $O(n.l)$  avec  $l = \text{ppcm}\{\tau_i : \tau_i \in \Gamma_n\}$ .

### 3.6 Facteur d'utilisation du processeur avec coût de la préemption

Le facteur d'utilisation classique du processeur pour l'ensemble de tâches  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  avec  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$  est donné par :

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{T_i}$$

Lorsque le coût de la préemption est prise en compte, la durée d'exécution d'une tâche  $\tau_i$  avec le coût de la préemption sur une instance  $k$  est donnée par  $C_i^k \geq C_i$ .  $C_i^k$  est obtenu en ajoutant sur la durée d'exécution  $C_i$  le coût associé au nombre de préemptions de  $\tau_i$  sur l'instance  $k$ . On note par  $n_i$  le nombre d'instances de la tâche  $\tau_i$  sur les deux phases (transitoire et permanente) de l'ordonnancement.

**Définition 3.6.1** *Le facteur d'utilisation du processeur avec prise en compte du coût exact de la préemption noté  $U^*$  est défini par :*

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{C_i^*}{T_i} \text{ avec } C_i^* = \sum_{k=1}^{n_i} \frac{C_i^k}{n_i} \quad (3.1)$$

### 3.7 Impact du coût de la préemption dans l'analyse d'ordonnançabilité

Dans cette section nous présentons l'impact du coût de la préemption dans l'analyse d'ordonnançabilité des tâches. Pour cela nous considérons deux cas.

Dans le cas 1 on suppose que le coût de la préemption est négligeable ( $\alpha = 0$ ). Dans le cas 2 on suppose que le coût de la préemption n'est pas approximé dans la pire durée d'exécution des tâches ( $\alpha = 1$ ). Pour montrer l'impact du coût de la préemption, nous comparons les taux de succès de l'analyse d'ordonnabilité dans les deux cas. Soit un ensemble  $E$  composé de plusieurs ensembles de tâches, le taux de succès d'un algorithme  $A$  sur  $E$  est défini par :

$$\frac{\text{nombre d'ensembles de tâches ordonnables avec } A}{\text{nombre total d'ensembles de tâches dans } E} \quad (3.2)$$

Afin de comparer les taux de succès de l'analyse d'ordonnabilité avec  $\oplus$ , nous générons aléatoirement, en utilisant l'outil FORTAS [CG11] fondé sur l'algorithme de Bini [BB05], 15 ensembles chacun composé de 10 ensembles de tâches. Chaque ensemble de tâches est composé de 10 tâches. On calcule le taux de succès de  $\oplus$  dans les deux cas et sur chaque ensemble d'ensembles de tâches. La courbe des taux de succès dans chacun des deux cas et les résultats sont présentés par la figure 3.3. Sur l'axe des ordonnées nous avons les taux de succès et sur l'axe des abscisses, les moyenne des facteurs d'utilisation des ensembles de tâches. En ce qui concerne les conditions techniques de test, l'ordinateur utilisé est un DELL muni d'un processeur *IntelCore<sup>TM</sup> 2 Duo* (2,66 GHz, mémoire RAM 4Go).

Dans la figure 3.3, on observe que jusqu'à un facteur d'utilisation moyen inférieur à 0.8, dans les deux cas nous avons des taux de succès de 1. Ce qui signifie que le coût des préemptions éventuelles dans le cas 2 n'affecte pas l'ordonnabilité des ensembles de tâches. À partir d'un facteur d'utilisation moyen supérieur à 0.77, le taux de succès dans le cas 2 décroît jusqu'à 0. Par contre dans le cas 1, pour les ensembles d'ensembles de tâches avec des facteurs d'utilisation moyens entre 0.8 et 0.9, le taux de succès reste égal à 1 avant de décroître à 0.8. Ceci signifie que parmi les ensembles d'ensembles de tâches de facteurs d'utilisation moyen supérieur à 0.9 aucun ensemble de tâches n'est ordonnable avec la prise en compte du coût exact de la préemption par contre sans prise en compte du coût de la préemption certains ensembles de tâches sont ordonnables. Cela confirme le fait qu'en prenant en compte le coût exact de la préemption dans l'analyse d'ordonnabilité des tâches, un ensemble de tâches peut être non ordonnable alors qu'il a été déclaré ordonnable en négligeant le coût de la préemption. Ceci dépend des facteurs d'utilisation des tâches et aussi du coût de chaque préemption. Dans notre exemple ceci semble être vérifié uniquement pour des tâches qui chargent beaucoup le processeur, mais même dans le cas contraire si le coût d'une préemption est élevé ce fait reste vérifié.

### 3.8 Viabilité

Dans cette section nous allons montrer que l'analyse d'ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  est viable. Cette viabilité est prouvée si un ensemble de tâches est ordonnançable avec  $\oplus$ , alors cet ensemble de tâches reste ordonnançable, même si une ou plusieurs tâches ont des durées d'exécution plus petites que celles considérées lors de l'analyse d'ordonnançabilité.

**Théorème 3.8.1** *Soit un ensemble de tâches périodiques concrètes*

$\Gamma_n = \{\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n\}$  où les tâches sont triées dans l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme à priorités fixes noté *Algo* avec  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$ . Si  $\Gamma_n$  est ordonnançable avec  $\oplus$ , lors de l'exécution en remplaçant  $\tau'_i = (r_i^1, C'_i, T_i, D_i)$  par  $\tau_i$  avec  $C'_i \leq C_i$  alors  $\Gamma'_n = \{\tau_1, \dots, \tau'_i, \dots, \tau_n\}$  est aussi ordonnançable.

**Preuve** on suppose que  $\Gamma_n = \{\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_n\}$  est ordonnançable avec  $\oplus$ . Nous allons montrer par contradiction que  $\Gamma'_n = \{\tau_1, \dots, \tau'_i, \dots, \tau_n\}$  est aussi ordonnançable avec  $\oplus$ . Pour cela supposons que  $\Gamma'_n$  n'est pas ordonnançable avec  $\oplus$ . Ce qui veut dire que  $\exists \tau_l \in \Gamma'_n$  tel que  $\tau_l$  n'est pas ordonnançable. Puisque les  $i - 1$  premières tâches de  $\Gamma_n$  sont les plus prioritaires et sont les mêmes que dans  $\Gamma_n$  alors leur ordonnancement ne change pas donc  $i \leq l \leq n$ .

Supposons que  $l = i$  ce qui veut dire que c'est la tâche  $\tau'_i$  qui n'est pas ordonnançable, alors il existe une instance  $k$  de  $\tau'_i$  dans laquelle on ne peut exécuter toutes les  $C_i^k$  unités de temps de la tâche  $\tau'_i$ . Puisque nous avons des tâches indépendantes avec des priorités fixes et que de plus  $\tau_i$  et  $\tau'_i$  ont la même priorité donc si  $C'_i \leq C_i$  alors  $C_i^k \leq C_i^k \forall k \geq 1$ . Il existe alors une instance  $k$  de la tâche  $\tau_i$  dans laquelle on ne peut pas exécuter toutes les  $C_i^k$  unités de temps de  $\tau_i$ . Ce qui veut dire que  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable donc  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable. Ce qui est absurde d'après notre hypothèse de départ disant que  $\Gamma_n$  est ordonnançable.

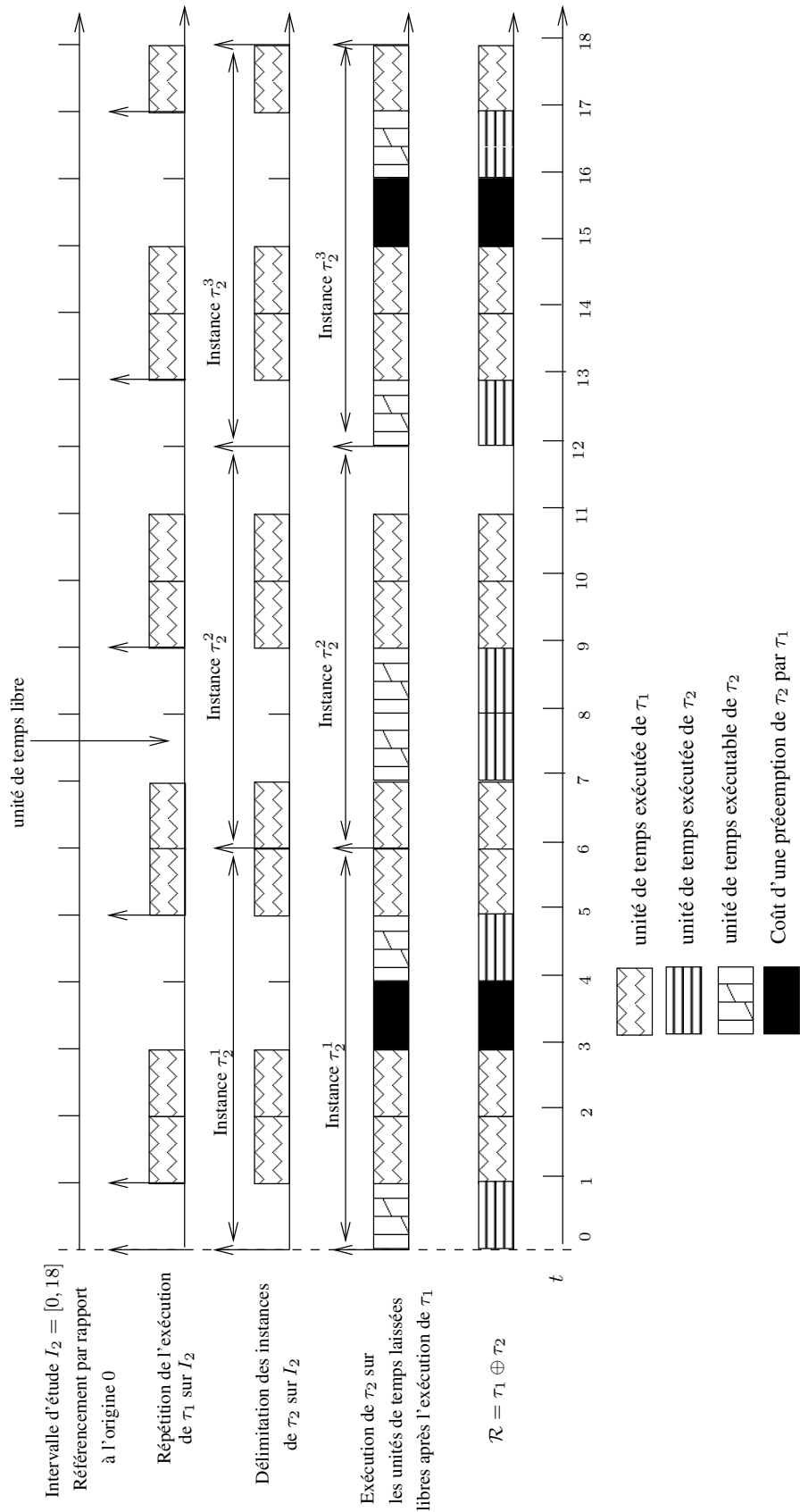
De la même manière on montre que si  $i < l \leq n$  alors  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable. Donc on a prouvé que si  $\Gamma'_n$  n'est pas ordonnançable alors  $\Gamma_n$  ne l'est pas. D'où  $\Gamma_n$  ordonnançable entraîne que  $\Gamma'_n$  soit aussi ordonnançable.  $\square$

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de l'analyse d'ordonnançabilité basée sur l'opération binaire d'ordonnancement  $\oplus$  qui permet de prendre en compte le coût exact de la préemption en monoprocasseur. Ensuite nous avons montré que cette analyse d'ordonnançabilité est viable c'est dire si la durée d'exécution des tâches diminue au cours de leur exécution alors l'ensemble des tâches reste toujours ordonnançable. Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser cette

---

analyse d'ordonnabilité basée sur  $\oplus$  dans l'étude de l'ordonnement multi-  
processeur de tâches indépendantes.

FIGURE 3.2 – Opération  $\oplus$  entre deux tâches



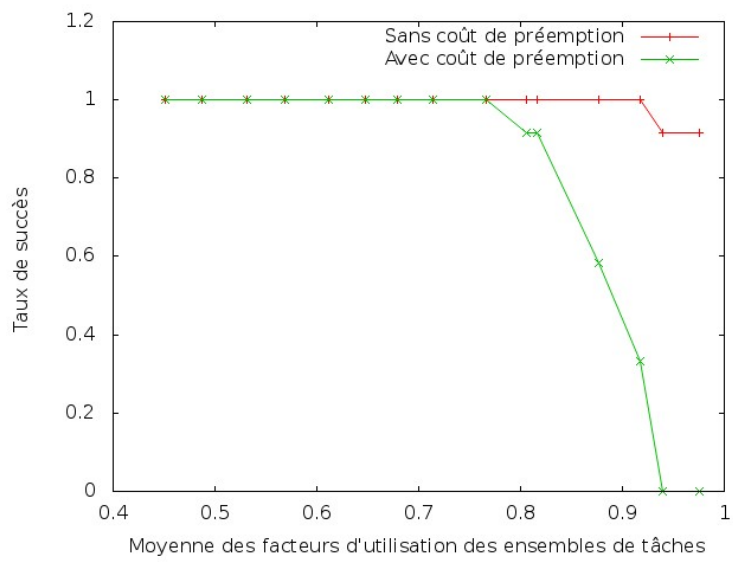


FIGURE 3.3 – Impact du coût de la préemption



# Chapitre 4

## Ordonnancement multiprocesseur de tâches indépendantes

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier l'ordonnancement multiprocesseur de tâches temps réel préemptives indépendantes avec la prise en compte du coût exact de la préemption. Pour cela nous avons choisi la stratégie d'ordonnancement multiprocesseur par partitionnement. Ce choix évite les coûts de migration élevés que l'on a avec la stratégie globale et par semi-partitionnement et nous permet d'utiliser l'analyse d'ordonnancement basée sur  $\oplus$  présentée dans le chapitre précédent. Afin d'obtenir des résultats dans un temps raisonnable pour des applications industrielles réalistes, nous optons pour une heuristique plutôt qu'un algorithme exact très coûteux en terme de temps d'exécution. Ainsi nous proposons dans ce chapitre une heuristique d'ordonnancement qui alloue et qui ordonne les tâches sur les différents processeurs tout en équilibrant l'utilisation des processeurs.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 4.2 présente le modèle de tâches et d'architecture multiprocesseur considérés, la section 4.3 présente l'heuristique d'ordonnancement multiprocesseur proposée et enfin la section 4.4 présente l'étude de performances de notre heuristique. Dans cette analyse de performances nous comparons notre heuristique à celles de *BF* et *WF* et à l'algorithme exact *B&B*.

### 4.2 Modèle de tâches et d'architecture

Soit  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  un ensemble de tâches périodiques concrètes selon le modèle de tâches défini dans le chapitre précédent. Soit  $\Pi_m$  un ensemble de

$m$  processeurs identiques. On suppose que les processeurs sont sans cache, ni “pipeline” ou d’architecture interne complexe. Notre objectif est d’ordonnancer l’ensemble des tâches  $\Gamma_n$  sur les  $m$  processeurs en prenant en compte le coût exact de la préemption et en équilibrant le facteur d’utilisation des processeurs.

### 4.3 Heuristique d’ordonnancement

Dans cette section on présente l’heuristique d’ordonnancement proposée pour résoudre le problème d’ordonnancement multiprocesseur de tâches temps réel indépendantes. Cette heuristique présentée dans l’algorithme 2 permet d’ordonnancer et d’allouer les tâches en même temps. L’allocation d’une tâche consiste à choisir le processeur sur lequel va s’exécuter cette tâche. Le critère d’allocation des tâches sur les différents processeurs est défini à l’aide de la fonction de coût présentée à la section suivante.

#### 4.3.1 Fonction de coût

La fonction de coût permet de décider le choix du processeur sur lequel va être allouée une tâche donnée. Nous définissons cette fonction de coût sur chaque processeur comme étant égale au facteur d’utilisation du processeur considéré avec prise en compte du coût exact de la préemption. Le facteur d’utilisation du processeur avec coût de la préemption est donné par la relation 3.1 à la section 3.6. Puisque nous sommes dans le cas de l’ordonnancement multiprocesseur nous changeons la notation de la relation 3.1 pour préciser le processeur que l’on considère. Ainsi on note par  $U_{p_j}^*$  le facteur d’utilisation du processeur  $p_j$  avec prise en compte du coût exact de la préemption. Par la suite on utilisera le terme facteur d’utilisation tout court pour désigner le facteur d’utilisation d’un processeur avec prise en compte du coût exact de la préemption.

Notre objectif est d’optimiser l’utilisation des processeurs afin d’éviter de surcharger un processeur alors que d’autres processeurs restent disponibles. Pour ce faire nous maximisons le facteur d’utilisation restant, appelé aussi capacité restante [LCGG10] de chaque processeur  $p_j$ . Cette capacité restante pour un processeur  $p_j$  est donnée par  $1 - U_{p_j}^*$  puisque le facteur d’utilisation maximal de  $p_j$  est de 1. Cette maximisation  $1 - U_{p_j}^*$  est équivalente à la minimisation de  $U_{p_j}^*$ . Ainsi dans notre heuristique on utilisera comme fonction de coût  $F(p_j, \tau_i)$  donnée par la relation 4.1.

$$F(\tau_i, p_j) = U_{p_j}^* \tag{4.1}$$

avec  $\tau_i$  allouée à  $p_j$ .

Lorsque  $\tau_i$  peut être allouée à plusieurs processeurs, on choisira le processeur qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$ . Ce choix d'allocation permet de rendre robuste l'exécution des tâches, c'est à dire augmente les chances des tâches de rester ordonnancées lors de leur exécution même si certaines tâches ont vu leurs durées d'exécution augmentées. Il permet aussi une meilleure répartition de l'exécution des tâches sur tous les processeurs, par rapport aux heuristiques de  $BF$  et  $WF$ , ce qui réduit le pire temps de réponse des tâches.

### 4.3.2 Principe de l'heuristique

L'heuristique d'ordonnancement et d'allocation qu'on propose est de type gloutonne. Une fois qu'une tâche est allouée à un processeur, cette allocation est définitive, il n'y a pas de retour en arrière. Cette heuristique ne prend en compte que les algorithmes d'ordonnancement à priorités fixes tels que RM, DM, etc., car elle utilise l'opération  $\oplus$  pour faire l'analyse d'ordonnancabilité et cette opération ne s'applique qu'à des tâches à priorités fixes. Les tâches sont triées dans l'ordre décroissant de leurs priorités. Ce tri permet d'appliquer l'opération d'ordonnancement  $\oplus$  toujours entre la tâche la plus prioritaire et la tâche la moins prioritaire comme l'exige le principe de  $\oplus$ . Tant qu'il reste une tâche non encore allouée dans  $\Gamma_n$ , on sélectionne la tâche la plus prioritaire puis on teste son ordonnancabilité sur chaque processeur en faisant l'analyse d'ordonnancabilité avec  $\oplus$ . Si la tâche sélectionnée est ordonnancable sur plusieurs processeurs, on alloue cette tâche au processeur  $p_j$  sur lequel elle est ordonnancable et qui a la plus petite valeur de  $F(\tau_i, p_j)$ . Si la tâche sélectionnée ne peut être ordonnancée par aucun processeur, donc le système de tâches  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnancable selon notre heuristique.

L'algorithme 2 donne les différentes étapes de notre heuristique. Après avoir ordonnancé les tâches avec notre heuristique, nous pouvons produire une table d'ordonnancement pour chaque processeur qui contient les dates de début et de fin d'exécution des tâches allouées à ce processeur. La complexité de notre heuristique dépend de celle de l'opération  $\oplus$ . Pour un ensemble de  $n$  tâches à ordonnancer sur  $m$  processeurs, la complexité au pire cas de notre heuristique est évaluée à  $O(n.m.l)$  avec  $l = ppcm\{T_i : \tau_i \in \Gamma_n\}$ .

## 4.4 Étude de performances

L'heuristique d'ordonnancement que nous avons présentée dans l'algorithme 2 a été implantée en OCaml afin de pouvoir la comparer aux heuristiques de "bin-packing"  $BF$  et  $WF$  et à l'algorithme exact  $B\&B$  puisqu'on ne dispose pas de "benchmark" sur la prise en compte du coût exact de la préemption. Pour que cette

---

**Algorithme 2** Heuristique d'ordonnancement multiprocesseur
 

---

- 1: Trier les tâches dans  $\Gamma_n$  suivant l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme d'ordonnancement à priorités fixes considéré
  - 2: Initialiser la variable *ordonnançable* à *vrai*
  - 3: **tant que** il reste des tâches non encore allouées dans  $\Gamma_n$  et *ordonnançable* = *vrai* **faire**
  - 4:     Sélectionner dans  $\Gamma_n$  la tâche  $\tau_i$  la plus prioritaire et non encore allouée à un processeur
  - 5:     % boucle pour vérifier l'ordonnançabilité de la tâche  $\tau_i$  sur chacun des processeurs avec  $\oplus$ .%
  - 6:     **pour**  $j = 1$  à  $m$  **faire**
  - 7:         **si** la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable sur  $p_j$  avec prise en compte du coût exact de la préemption selon l'analyse d'ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  **alors**
  - 8:             Calculer  $F(\tau_i, p_j)$  pour  $\tau_i$  allouée à  $p_j$ .
  - 9:         **fin si**
  - 10:     **fin pour**
  - 11:     **si**  $\tau_i$  est ordonnançable au moins sur un processeur **alors**
  - 12:         Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_j$  qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$
  - 13:     **sinon**
  - 14:         *ordonnançable* = *faux*
  - 15:     **fin si**
  - 16: **fin tant que**
-

comparaison ait un sens nous avons utilisé la même condition d’ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  pour toutes les heuristiques et pour l’algorithme exact  $B\&B$ . Le choix de  $BF$  et  $WF$  parmi les heuristiques de “bin-packing” repose sur le fait qu’elles peuvent permettre d’introduire un critère d’optimisation. Avant de présenter les résultats obtenus, on présente d’abord les algorithmes des heuristiques  $BF$  et  $WF$  et de l’algorithme exact  $B\&B$ . En ce qui concerne les détails techniques, l’ordinateur utilisé pour les tests est un DELL muni d’un processeur *IntelCore™ 2 Duo* (2,66 GHz, mémoire RAM 4Go). Tous les algorithmes sont implémentés en OCaml.

#### 4.4.1 Heuristiques $BF$ et $WF$

Les heuristiques  $BF$  et  $WF$  utilisent l’analyse d’ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  pour prendre en compte le coût exact de la préemption. C’est pour cette raison que nous avons trié les tâches dans l’ordre décroissant de leurs priorités au lieu de l’ordre de leur facteur d’utilisation comme dans la plupart des travaux de l’état de l’art [DD86, OS95].

##### Heuristique $BF$

L’heuristique  $BF$  maximise le facteur d’utilisation des processeurs. Elle sélectionne la tâche la plus prioritaire et non encore allouée dans  $\Gamma_n$  qu’on note par  $\tau_i$  puis tente d’allouer cette tâche au premier processeur dans l’ordre croissant des indices des processeurs déjà utilisés (processeurs auxquels on a déjà alloué au moins une tâche) et qui maximise  $F(\tau_i, p_j)$ . Si aucun processeur n’est encore utilisé ou que parmi les processeurs déjà utilisés aucun ne peut ordonnancer  $\tau_i$  alors  $BF$  ajoute un nouveau processeur et alloue  $\tau_i$  à ce nouveau processeur si le nombre de processeurs déjà utilisés est inférieur à  $m$  sinon  $\Gamma_n$  n’est pas ordonnançable. L’heuristique  $BF$  tente de charger au maximum un processeur avant d’en ajouter un nouveau. La fonction de coût et le parcours des processeurs sont les principales différences de  $BF$  et notre heuristique qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$  et qui parcourt tous les processeurs en partant du premier afin de trouver une allocation pour la tâche sélectionnée  $\tau_i$ . L’algorithme 3 présente les étapes de l’allocation de  $BF$ .

##### Heuristique $WF$

La différence entre les heuristiques  $BF$  et  $WF$  est que la première maximise  $F(\tau_i, p_j)$  alors que la deuxième heuristique la minimise. c’est-à-dire que dans le choix du processeur parmi les processeurs déjà utilisés,  $WF$  choisit celui qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$  pour ne pas trop surcharger un processeur alors que

---

**Algorithme 3** Heuristique BF avec coût de la préemption
 

---

- 1: Trier les tâches dans  $\Gamma_n$  suivant l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme d'ordonnancement à priorités fixes considéré
  - 2: Initialiser la variable  $nb\_proc\_utilisés = 1$
  - 3: Initialiser la variable  $ordonnançable$  à *vrai*
  - 4: **tant que** (il reste des tâches non encore allouées dans  $\Gamma_n$ ) et ( $nb\_proc\_utilisés \leq m$ ) et ( $ordonnançable = vrai$ ) **faire**
  - 5:     Sélectionner dans  $\Gamma_n$  la tâche  $\tau_i$  la plus prioritaire et non encore allouée à un processeur
  - 6:     **pour**  $j = 1$  à  $nb\_proc\_utilisés$  **faire**
  - 7:         **si** la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable sur  $p_j$  avec prise en compte du coût exact de la préemption selon l'analyse d'ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  **alors**
  - 8:             Calculer  $F(\tau_i, p_j)$ , le facteur d'utilisation du processeur  $p_j$  en supposant que  $\tau_i$  est allouée à  $p_j$ .
  - 9:         **fin si**
  - 10:     **fin pour**
  - 11:     **si**  $\tau_i$  est ordonnançable au moins sur un des  $nb\_proc\_utilisés$  premiers processeurs **alors**
  - 12:         Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_j$  qui maximise  $F(\tau_i, p_j)$
  - 13:     **sinon**
  - 14:         **si** ( $nb\_proc\_utilisés < m$ ) **alors**
  - 15:             Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_{j+1}$
  - 16:              $nb\_proc\_utilisés \leftarrow nb\_proc\_utilisés + 1$
  - 17:         **sinon**
  - 18:              $ordonnançable \leftarrow faux$
  - 19:         **fin si**
  - 20:     **fin si**
  - 21: **fin tant que**
-



d'autres processeurs sont disponibles.  $WF$  sélectionne la tâche la plus prioritaire et non encore allouée dans  $\Gamma_n$  qu'on note par  $\tau_i$  puis tente d'allouer  $\tau_i$  au premier processeur dans l'ordre croissant des indices des processeurs déjà utilisés et qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$ . Si aucun processeur n'est encore utilisé ou que parmi les processeurs déjà utilisés aucun ne peut ordonnancer  $\tau_i$  alors  $WF$  ajoute un nouveau processeur et alloue  $\tau_i$  à ce nouveau processeur si le nombre de processeur déjà utilisé est inférieur à  $m$  sinon  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable. Le parcours des processeurs est la principale différence de  $WF$  et notre heuristique qui parcourt tous les processeurs en partant du premier afin de trouver le meilleur processeur pour allouer la tâche sélectionnée  $\tau_i$ . L'algorithme 4 présente les étapes de l'allocation de  $WF$ .

---

**Algorithme 4** Heuristique WF avec coût de la préemption
 

---

- 1: Trier les tâches dans  $\Gamma_n$  suivant l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme d'ordonnancement à priorités fixe considéré
  - 2: Initialiser la variable  $nb\_proc\_utilisés = 1$
  - 3: Initialiser la variable  $ordonnançable$  à *vrai*
  - 4: **tant que** (il reste des tâches non encore allouées dans  $\Gamma_n$ ) et ( $nb\_proc\_utilisés \leq m$ ) et ( $ordonnançable = vrai$ ) **faire**
  - 5: Sélectionner dans  $\Gamma_n$  la tâche  $\tau_i$  la plus prioritaire et non encore allouée à un processeur
  - 6: **pour**  $j = 1$  à  $nb\_proc\_utilisés$  **faire**
  - 7:     **si** la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable sur  $p_j$  avec prise en compte du coût exact de la préemption selon l'analyse d'ordonnançabilité basée sur  $\oplus$  **alors**
  - 8:         Calculer  $F(\tau_i, p_j)$ , le facteur d'utilisation du processeur  $p_j$  en supposant que  $\tau_i$  est allouée à  $p_j$ .
  - 9:     **fin si**
  - 10: **fin pour**
  - 11: **si**  $\tau_i$  est ordonnançable au moins sur un des  $nb\_proc\_utilisés$  premiers processeurs **alors**
  - 12:     Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_j$  qui minimise  $F(\tau_i, p_j)$
  - 13: **sinon**
  - 14:     **si** ( $nb\_proc\_utilisés < m$ ) **alors**
  - 15:         Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_{j+1}$
  - 16:          $nb\_proc\_utilisés \leftarrow nb\_proc\_utilisés + 1$
  - 17:     **sinon**
  - 18:          $ordonnançable \leftarrow faux$
  - 19:     **fin si**
  - 20: **fin si**
  - 21: **fin tant que**
-

### 4.4.2 Algorithme exact $B\&B$

Contrairement aux heuristiques présentées précédemment, l'algorithme exact  $B\&B$  explore toutes les solutions possibles pour déterminer la meilleure solution. Puisque notre objectif est d'équilibrer l'utilisation des processeurs pour ne pas surcharger un processeur alors que d'autres sont disponibles alors la fonction de coût est définie pour chaque solution  $S$  par  $H(S)$  donnée par la relation 4.2.

$$H(S) = \max\{U_{pj}^*\}_{p_j \in S} \quad (4.2)$$

Une solution  $S$  est composée d'un ensemble des processeurs pour lesquels un ensemble de tâches a été alloué à chaque processeur. La meilleure solution parmi toutes les solutions est celle qui minimise la fonction de coût  $H$ . L'algorithme 5 présente les étapes de l'allocation selon  $B\&B$ .

### 4.4.3 Résultats

Pour tous les algorithmes, nous avons utilisé le choix de priorités des tâches selon RM (la tâche la plus prioritaire est celle qui a la plus petite valeur de sa période). Nous allons comparer les temps d'exécution des algorithmes, leur taux de succès, les temps de réponse et les moyennes des facteurs d'utilisation restants sur les processeur. Pour la génération des tâches nous avons utilisé l'outil FORTAS [CG11] fondé sur l'algorithme de Bini [BB05].

#### 4.4.3.1 Comparaison des temps d'exécution

Pour comparer le temps d'exécution entre les heuristiques et l'algorithme exact  $B\&B$  nous avons dans un premier temps fixé le nombre de processeurs à 10 et généré 10 ensembles de tâches. Chaque ensemble de tâches est composé entre 100 et 1000 tâches générées aléatoirement avec l'outil FORTAS. On exécute successivement les 4 algorithmes (BF, WF, B&B et notre heuristique) sur tous les ensembles de tâches puis on note le temps d'exécution de chaque algorithme. Seuls les ensembles de tâches ordonnançables avec les 4 algorithmes ont été considérés. La figure 4.1 montre les résultats de ces tests. Dans un deuxième temps nous avons considéré un seul ensemble de tâches composé de 1000 tâches et nous avons fait varier le nombre de processeurs entre 3 et 20 processeurs. Les résultats de ces tests sont donnés par la figure 4.2.

Dans les deux cas on remarque que le temps d'exécution de l'algorithme exact  $B\&B$  explose très vite par contre les heuristiques ont des temps d'exécution raisonnables. On note aussi que sur la figure 4.1 notre heuristique jusqu'à 1000 tâches donne des temps d'exécution proches de  $BF$  et  $WF$ , mais au delà, elle a des temps d'exécution plus importants. Ceci est dû au fait que pour allouer une

**Algorithme 5** Algorithme exact de *B&B* avec coût de la préemption

---

```

1: Initialiser la variable liste_solutions à l'ensemble vide
2: Initialiser la variable ordonnançable à vrai
3: tant que (il reste des tâches non encore allouées dans  $\Gamma_n$ ) et
   (ordonnançable = vrai) faire
4:   Sélectionner dans  $\Gamma_n$  la tâche  $\tau_i$  non encore allouée
5:   si liste_solutions =  $\{\emptyset\}$  alors
6:     Créer la solution  $S_1$  composée d'un processeur avec  $\tau_i$  allouée à ce pro-
       cesseur
7:     Ajouter  $S_1$  à la liste des solutions liste_solutions
8:   sinon
9:      $l\_sol \leftarrow \{\emptyset\}$ 
10:    pour  $k = 1$  à nb_solutions (nombre de solution de liste_solutions)
      faire
11:       $S_k \leftarrow$  solution  $k$  de liste_solutions
12:      pour  $j = 1$  à nb_proc_sk (nb_proc_sk est le nombre de processeurs
        dans  $S_k$ ) faire
13:        si  $\tau_i$  est ordonnançable sur  $p_j$  en utilisant  $\oplus$  alors
14:          Créer la solution  $S_{(k,j)}$  qui est la solution extraite de  $S_k$  en al-
            louant la tâche  $\tau_i$  au processeur  $p_j$ 
15:          Ajouter  $S_{(k,j)}$  à la liste des solutions l_sol
16:        fin si
17:      fin pour
18:      si nb_proc_sk <  $m$  alors
19:        Créer la solution  $S_{(k,j+1)}$  qui est extraite de  $S_k$  en ajoutant un  $j + 1$ 
          ème processeur et en allouant la tâche  $\tau_i$  au processeur  $p_{j+1}$ 
20:        Ajouter  $S_{(k,j+1)}$  à la liste des solutions l_sol
21:      fin si
22:    fin pour
23:    si l_sol =  $\emptyset$  alors
24:      ordonnançable = faux
25:    sinon
26:      liste_solutions  $\leftarrow$  l_sol
27:    fin si
28:  fin tant que
29: si ordonnançable = vrai alors
30:   meilleure_solution  $\leftarrow$  première solution dans liste_solutions
31:   pour  $k = 2$  à nb_solutions faire
32:     Calculer  $H(S_k)$ 
33:     si  $H(S_k) < H(\text{meilleure\_solution})$  alors
34:       meilleure_solution  $\leftarrow S_k$ 
35:     fin si
36:   fin pour
37:    $\Gamma_n$  est ordonnançable et meilleure_solution est la meilleure solution
38: sinon
39:   L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable
40: fin si

```

---

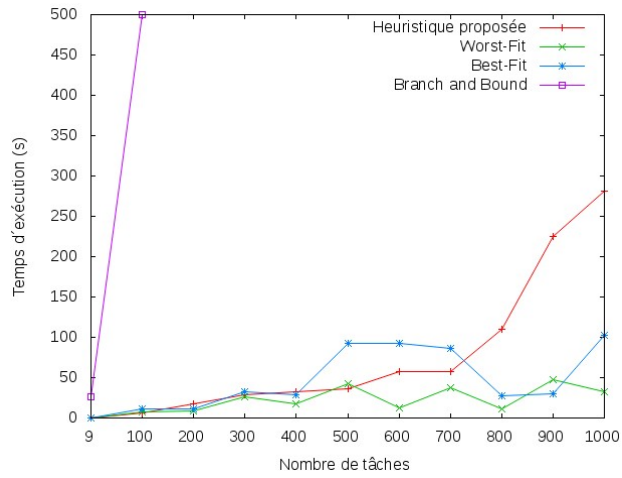


FIGURE 4.1 – Comparaison des temps d'exécution avec variation du nombre de tâches

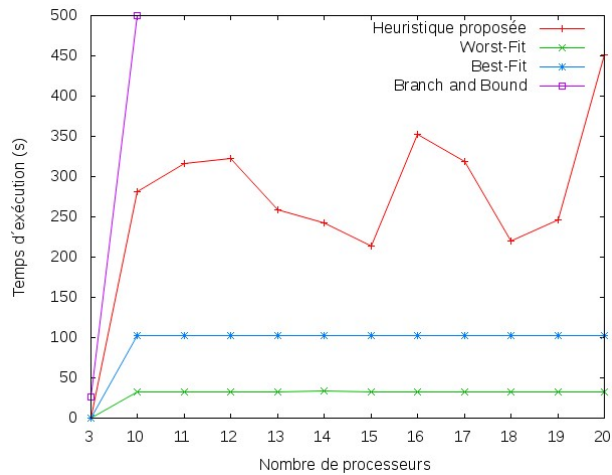


FIGURE 4.2 – Comparaison des temps d'exécution avec variation du nombre de processeurs

tâche, notre heuristique parcourt tous les processeurs afin de trouver une allocation à cette tâche qui donne une meilleure optimisation de l'utilisation des processeurs alors que les heuristiques *BF* et *WF* optimise uniquement sur les processeurs déjà utilisés.

Sur la figure 4.2, on remarque que lorsque le nombre de processeurs varie, les temps d'exécution des heuristiques *BF* et *WF* restent constants, ceci est dû

au fait que ces heuristiques n'utilisent que le nombre de processeurs minimum nécessaire pour ordonnancer un ensemble de tâches. Elles n'optimisent pas l'ordonnement sur l'ensemble des processeurs, ce qui permet de les exécuter plus rapidement. Sur cette même figure 4.2, on constate que le temps d'exécution de notre heuristique ne croît pas de façon monotone avec le nombre de processeurs, ceci parce qu'elle répartit les tâches sur tous les processeurs disponibles et cette répartition entraîne sur certains processeurs une diminution de la valeur du *ppcm* des tâches sur ces processeurs, ce qui réduit le temps d'exécution de  $\oplus$ . Ceci diminue le temps d'exécution de notre heuristique.

#### 4.4.3.2 Comparaison des taux de succès

Dans cette partie nous comparons le taux de succès des différents algorithmes. L'algorithme exact *B&B* nous avons limité les tests à un petit nombre d'ensembles de tâches. Ainsi nous avons fixé le nombre de processeurs à 2 puis nous avons généré 6 ensembles chacun composé de 6 ensembles de tâches. Chaque ensemble de tâches est composé de 10 tâches. On exécute les 4 algorithmes sur chaque ensemble de tâches et on calcule le taux de succès de chaque algorithme sur chaque ensemble d'ensembles de tâches selon l'équation 3.2. Les résultats de ces tests sont donnés par la figure 4.3.

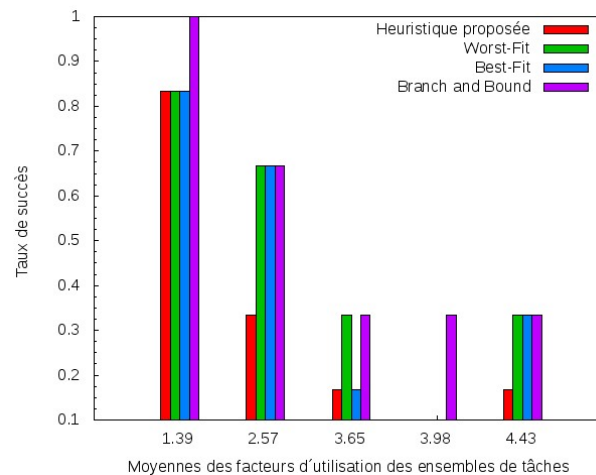


FIGURE 4.3 – Comparaison des taux de succès

On remarque, comme c'était prévu, que l'algorithme exact *B&B* donne des taux de succès meilleurs que les heuristiques. De plus on remarque que les heuristiques *BF* et *WF* donnent aussi des taux de succès meilleurs que notre heuristique. Cette contre performance en terme de taux de succès de notre heuristique

par rapport aux heuristiques  $BF$  et  $WF$  est compensée par le fait que notre heuristique donne de meilleurs temps réponse et optimise la capacité restante sur les différent processeurs.

#### 4.4.3.3 Comparaison des temps de réponse de l'ordonnancement des tâches

Dans cette partie nous comparons les temps de réponse de l'ordonnancement de l'allocation trouvés par les différentes heuristiques ( $BF$ ,  $WF$  et notre heuristique). Nous avons limité ces tests aux heuristiques à cause de la complexité de l'algorithme exact  $B\&B$ . On considère 10 ensembles de tâches. Chaque ensemble de tâches contient entre 100 et 1000 tâches générées aléatoirement et on a fixé le nombre de processeurs à 10. Pour chaque algorithme on détermine l'allocation et on calcule le pire temps de réponse de l'ordonnancement des tâches, c'est-à-dire le pire temps total pour exécuter l'ensemble des tâches sur les différents processeurs sur lesquels elles ont été allouées. Les résultats de ces tests sont donnés par la figure 4.4.

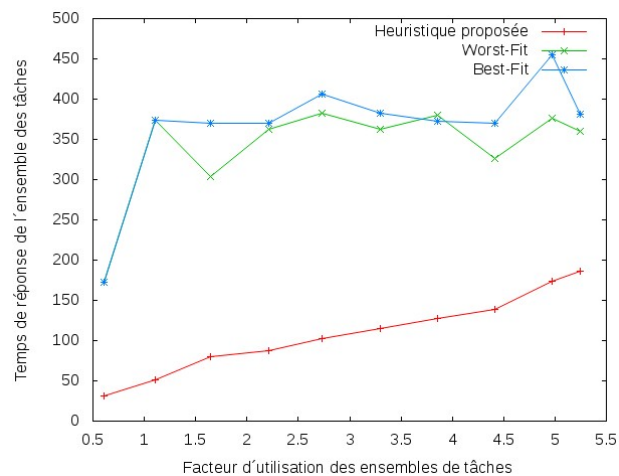


FIGURE 4.4 – Comparaison des temps de réponse de l'ordonnancement des tâches

On remarque que notre heuristique trouve des allocations qui donnent des temps de réponse meilleurs que ceux trouvés par les heuristiques  $BF$  et  $WF$ , ceci parce que notre heuristique répartit l'exécution des tâches sur l'ensemble des processeurs ce qui permet une exécution rapide des tâches.

#### 4.4.3.4 Comparaison des moyennes des facteurs d'utilisation restants

Dans cette partie nous comparons les moyennes des facteurs d'utilisation restants ou capacité restantes sur les processeurs entre les allocations trouvées par les heuristiques. Ces moyennes permettent de déterminer le niveau d'utilisation des processeurs. On considère les mêmes données de test qu'à la section 4.4.3.3. Après exécution de chaque heuristique sur chaque ensemble de tâches, on calcule la moyenne des  $1 - U_{p_j}$  de l'allocation trouvée. Les résultats de ces tests sont donnés sur la figure 4.5.

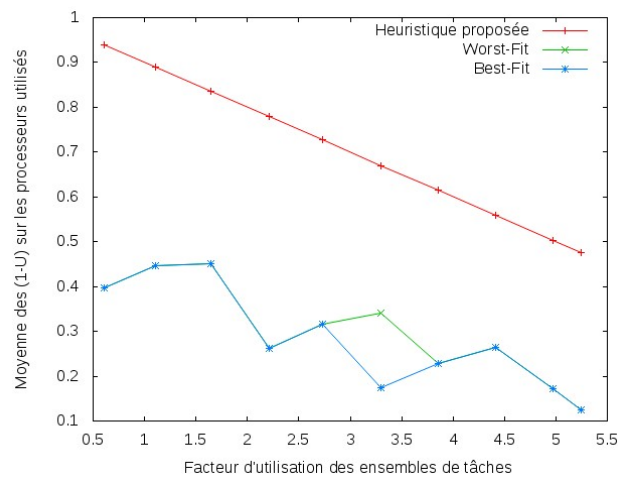


FIGURE 4.5 – Comparaison des moyennes des facteurs d'utilisations restants sur les processeurs

Sur la figure 4.5 on remarque que, les allocations trouvées par notre heuristique donnent de plus grande moyennes de  $1 - U_{p_j}$ . Ceci montre une meilleure répartition de l'utilisation des processeurs. En effet les heuristique *BF* et *WF* n'utilisent que le nombre de processeurs nécessaires pour allouer les tâches. C'est ce qui fait qu'elle peuvent utiliser un plus petit nombre de processeurs par rapport au processeurs disponibles. Ceci a pour conséquence de mettre le maximum de tâches sur ces processeurs.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons traité le problème de l'ordonnancement multi-processeur de tâches temps réel indépendantes avec la prise en compte du coût exact de la préemption. Nous avons proposé une heuristique d'ordonnancement

multiprocesseur qui permet d'équilibrer l'utilisation des différents processeurs. Cette contribution fait partie des premiers travaux réalisés dans l'ordonnement temps réel multiprocesseur avec prise en compte du coût exact de la préemption. Dans la partie qui suit nous allons étudier l'ordonnement multiprocesseur des tâches temps réel avec des dépendances de données, toujours avec prise en compte du coût exact de la préemption.



## **Troisième partie**

**Ordonnancement temps réel  
multiprocesseur de tâches  
dépendantes avec prise en compte  
du coût exact de la préemption**



# Chapitre 5

## Ordonnancement monoprocesseur de tâches dépendantes

Dans ce chapitre on étudie l'ordonnancement de tâches temps réel avec des contraintes de dépendances de données et avec prise en compte du coût exact de la préemption. Nous allons dans ce chapitre étudier ce problème d'ordonnancement en monoprocesseur ensuite nous allons l'étendre en multiprocesseur en utilisant la stratégie par partitionnement. On propose dans ce chapitre une analyse d'ordonnançabilité des tâches dépendantes qui prend en compte le coût exact lié à la préemption. Contrairement à l'analyse d'ordonnancement basée sur l'opération  $\oplus$  (voir chapitre 3), qui ne s'applique qu'à des tâches à priorités fixes aux tâches, notre analyse d'ordonnançabilité est applicable aussi bien à des tâches à priorités fixes qu'à des tâches à priorités dynamiques. Ainsi elle permet d'ordonner des tâches dépendantes qui entraînent des inversions de priorités dues aux partages de ressources (dans notre cas partage des mémoires de données échangées). Notre analyse d'ordonnançabilité permet aussi de gérer les transferts de données entre tâches.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 5.1 présente le modèle de tâches et les notations utilisées, la section 5.2 présente l'intervalle d'étude utilisé pour faire l'analyse d'ordonnançabilité, la section 5.3 présente le mécanisme de transfert de données entre les tâches, la section 5.4 présente la synchronisation de l'accès aux mémoires tampons, la section 5.5 présente l'analyse d'ordonnançabilité proposée et enfin la section 5.6 présente la viabilité de cette analyse d'ordonnançabilité.

## 5.1 Modèle de tâches et notations

### 5.1.1 Modèle de tâches

On considère un ensemble de  $n$  tâches périodiques concrètes  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  avec des dépendances de données représentées par un graphe acyclique de dépendances noté par  $G$  où les sommets représentent les tâches et l'ensemble des arcs la relation de dépendances de données. Une tâche  $\tau_i = (r_i^1, C_i, T_i, D_i)$  est caractérisée par une date de première activation  $r_i^1$ , une pire durée d'exécution  $C_i$  n'incluant pas les coûts de préemptions, une période  $T_i$  et une échéance relative  $D_i$  (durée maximale pour l'exécution de  $\tau_i$  depuis sa dernière activation). On suppose que le coût lié à une préemption est une constante connue notée  $\alpha$ .

Pour éviter les pertes de données on suppose que les tâches qui ont des dépendances de données ont des périodes multiples [Ker09]. Un exemple de graphe tâches dépendantes noté  $G_5$  composé de 5 tâches est présenté à la figure 5.1.

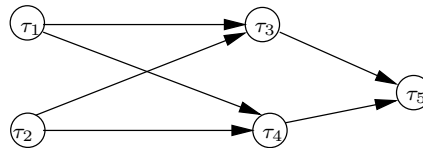


FIGURE 5.1 – Graphe  $G_5$  de dépendances de données

L'ensemble des tâches  $\Gamma_n$  est ordonnancé hors ligne selon un choix de priorité basé sur un algorithme noté *Algo* (les priorités peuvent être fixes ou dynamiques). Nous supposons aussi que chaque tâche  $\tau_i$  produit des données qu'elle sauvegarde dans une mémoire tampon ("buffer" en anglais) notée  $buf_i$ . La figure 5.2 illustre les mémoires de données des tâches du graphe  $G_5$ .

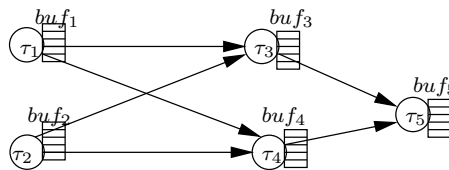


FIGURE 5.2 – Illustration des mémoires de données

Dans la figure 5.2, la mémoire  $buf_1$  est partagée entre la tâche  $\tau_1$  qui y écrit les données qu'elle produit, les tâches  $\tau_3$  et  $\tau_4$  qui y lisent les données produites par  $\tau_1$ . Lorsque la tâche  $\tau_3$ , consommant les données produites par  $\tau_1$  sauvegardées dans  $buf_1$ , est préemptée par  $\tau_1$  au moment où elle commence à lire dans  $buf_1$

Notation	Description
$H_n = ppcm\{T_i\}_{1 \leq i \leq n}$	hyperpériode des tâches dans $\Gamma_n$ ,
$r_{min} = \min\{r_i^1\}_{1 \leq i \leq n}$	La plus petite date de première activation parmi les tâches dans $\Gamma_n$
$r_{max} = \max\{r_i^1\}_{1 \leq i \leq n}$	La plus grande date de première activation parmi les tâches dans $\Gamma_n$
$pred(\tau_i)$	L'ensemble des prédécesseurs de la tâche $\tau_i$
$succ(\tau_i)$	L'ensemble des successeurs de la tâche $\tau_i$
$G$	L'ensemble des dates d'activation et de fin d'exécution sur l'intervalle d'étude $I_n$
$r^-(t)$	La dernière date d'appel de l'ordonnanceur avant $t$
$r^+(t)$	La prochaine date d'appel de l'ordonnanceur après $t$
$\Gamma_r(t)$	L'ensemble des tâches prêtes à la date $t$
$\phi_i(t)$	La tâche sélectionnée à l'exécution à la date $t$
$c_i(t)$	La durée restant à exécuter par la tâche $\tau_i$ à la date $t$
$d_i(t)$	L'échéance relative à la date $t$ de la tâche $\tau_i$
$p_i$	La priorité de la tâche $\tau_i$ selon l'algorithme de choix de priorités <i>Algo</i>

TABLE 5.1 – Résumé des notations

alors les données dans  $buf_1$  peuvent être dans un état inconsistant car la tâche  $\tau_1$  peut modifier ces données en même temps que  $\tau_3$  les lit. Donc  $\tau_1$  et  $\tau_3$  ne doivent pas accéder à la mémoire  $buf_1$  simultanément. Par contre les tâches  $\tau_3$  et  $\tau_4$  peuvent lire à la mémoire  $buf_1$  simultanément puisqu'elles ne modifient pas les données dans  $buf_1$ . En règle générale, deux tâches ne peuvent pas écrire et lire simultanément dans une mémoire partagée, on dit qu'elles ont des contraintes d'exclusions mutuelles dans l'accès à cette mémoire. En revanche, elle peuvent lire la même donnée dans la même mémoire.

Nous supposons aussi que le processeur que nous considérons n'a pas de cache, ni pipeline ou d'architecture interne complexe. On retrouve ces hypothèses dans le contexte des applications critiques. Finalement on suppose aussi que le coût de transfert de données entre les tâches est négligeable puisque nous considérons un seul processeur et qu'il correspond donc à une écriture et une lecture dans une mémoire.

### 5.1.2 Notations

Nous introduisons au tableau 5.1 ci-dessous quelques notations utilisées par la suite.

## 5.2 Intervalle d'étude de l'ordonnancement

Comme dans le cas des tâches indépendantes nous utilisons l'approche par simulation pour faire l'analyse d'ordonnançabilité des tâches dépendantes. La simulation de l'ordonnancement des tâches permet de compter le nombre exact de préemptions et d'ajouter leur coût au fur et à mesure qu'on ordonnance les tâches. Dans [CGG04], Choquet et Grolleau ont proposé un intervalle d'étude pour un ensemble de  $n$  tâches dépendantes périodiques concrètes donné par :

$$I_n = [r_{min}, t_c + H_n] \quad (5.1)$$

où  $t_c$  est la date à partir de laquelle l'ordonnancement se répète et est calculée itérativement par un algorithme donné dans cet article. D'après cet algorithme qui calcule  $t_c$ , on a  $t_c \leq r_{max} + H_n$ . Donc pour simplifier le calcul de  $I_n$ , nous utiliserons l'intervalle d'étude donné par la relation 5.1 avec  $t_c = r_{max} + H_n$ . Mais il faut vérifier que l'ordonnancement à la date  $t_c$  est égal à celui qu'on obtient à la date  $t_c + H_n$ , car dans [CGG04], on considère que le WCET des tâches reste fixe sur une instance d'une tâche. L'intervalle d'étude que nous utiliserons dans notre analyse d'ordonnançabilité est alors donné par la relation 5.2.

$$I_n = [r_{min}, r_{max} + 2 * H_n] \quad (5.2)$$

## 5.3 Mécanisme de transfert de données

Soient deux tâches dépendantes  $\tau_i$  et  $\tau_j$  avec une contrainte de dépendances de données telle que  $\tau_i$  est la tâche productrice de données et  $\tau_j$  est la tâche consommatrice de données. On suppose que toutes les données produites par  $\tau_i$  seront consommées par  $\tau_j$  sans aucune perte de données. Si  $T_i$  est la période de  $\tau_i$  et  $T_j$  celle de  $\tau_j$  alors nous avons les cas suivants :

- $T_i < T_j$  alors la tâche  $\tau_i$  s'exécute  $\frac{T_j}{T_i}$  fois et produit  $\frac{T_j}{T_i}$  données avant une seule exécution de  $\tau_j$  qui consomme ces données durant son exécution,
- $T_i > T_j$  alors la tâche  $\tau_i$  s'exécute une seule fois et produit une donnée avant  $\frac{T_i}{T_j}$  exécutions de  $\tau_j$  qui consomme durant chacune de ses exécutions la donnée produite par  $\tau_i$ ,
- $T_i = T_j$  alors la tâche productrice  $\tau_i$  s'exécute une fois et produit une donnée avant une exécution  $\tau_j$  qui consomme cette donnée durant cette exécution. Ce cas correspond à une contrainte de précédence simple.

Puisque les tâches dépendantes ont des périodes multiples, ces trois cas peuvent être résumés en un seul cas donné par :  $\tau_i$  s'exécute  $k_{ij} = \lceil \frac{T_j}{T_i} \rceil$  fois et produit  $k_{ij}$

donnée(s) pour  $\tau_j$  puis  $\tau_j$  s'exécute  $k_{ji} = \lceil \frac{T_i}{T_j} \rceil$  fois et durant chaque exécution,  $\tau_j$  consomme la ou les  $k_{ij}$  données produites par  $\tau_i$ .  $\lceil x \rceil$  est la partie entière supérieure de  $x$ .

- $k_{ij} = \lceil \frac{T_j}{T_i} \rceil$  est le nombre de données que doit produire la tâche  $\tau_i$  pour la tâche  $\tau_j$ . Ce nombre correspond aussi au nombre de fois que  $\tau_i$  doit s'exécuter avant que  $\tau_j$  ne commence son exécution.  $\tau_i$  doit attendre de recevoir la ou les  $k_{ij}$  donnée(s) de  $\tau_i$  avant de commencer son exécution.
- $k_{ji} = \lceil \frac{T_i}{T_j} \rceil$  est le nombre de fois que  $\tau_j$  doit consommer la ou les  $k_{ij}$  donnée(s) produite(s) par  $\tau_i$ . Ce nombre correspond aussi au nombre de fois que  $\tau_j$  doit s'exécuter avant que  $\tau_i$  ne recommence à produire d'autres données. Pour éviter les pertes de données,  $\tau_i$  doit attendre que  $\tau_j$  consomme toutes les données qu'elle a déjà produites avant qu'elle n'en produise d'autres.

Les tâches  $\tau_i$  et  $\tau_j$  étant périodiques, leurs exécutions se répètent indéfiniment de même que la dépendance de données entre ces deux tâches. On appelle motif d'exécution de  $(\tau_i, \tau_j)$ , une exécution de  $\tau_i$  et  $\tau_j$  telle que le mécanisme de transfert de données est respecté. C'est-à-dire une exécution composée de  $k_{ij}$  instances de  $\tau_i$  et de  $k_{ji}$  instances de  $\tau_j$ .

Un exemple d'ordonnancement sans pertes de données est présenté à la figure 5.4. Dans cette figure nous avons  $\Gamma_3 = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  un ensemble composé de 3 tâches caractérisées par :  $\tau_1 = (0, 2, 6, 6)$ ,  $\tau_2 = (1, 1, 3, 3)$  et  $\tau_3 = (2, 1, 6, 6)$ . Le graphe  $G_3$  donné à la figure 5.3, représente le graphe des dépendances de données des tâches dans  $\Gamma_3$ .

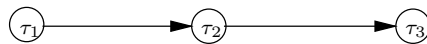


FIGURE 5.3 – Graphe  $G_3$

La tâche  $\tau_1$  s'exécute  $k_{12} = \lceil \frac{T_2}{T_1} \rceil = \lceil \frac{3}{6} \rceil = 1$  et produit durant cette exécution  $k_{12} = 1$  donnée avant que la tâche  $\tau_2$  ne s'exécute  $k_{21} = \lceil \frac{T_1}{T_2} \rceil = \lceil \frac{6}{3} \rceil = 2$  fois et consomme durant chacune des ses exécutions la seule donnée produite par  $\tau_1$ . La tâche  $\tau_2$  s'exécute  $k_{23} = \lceil \frac{T_3}{T_2} \rceil = \lceil \frac{6}{3} \rceil = 2$  fois et produit  $k_{23} = 2$  données avant que  $\tau_3$  ne s'exécute  $k_{32} = \lceil \frac{T_2}{T_3} \rceil = \lceil \frac{3}{6} \rceil = 1$  et consomme durant son exécution les  $k_{23}$  données produites pour la tâche  $\tau_2$ .

La figure 5.5 donne des exemples de motifs d'exécution sans perte de données de l'ensemble  $\Gamma_3$ . Dans cette figure,  $\tau_2^2$  représente la deuxième instance de la tâche  $\tau_2$  et sa deuxième instance dans le premier motif d'exécution de  $\Gamma_3$ ,  $\tau_2^3$  est la troisième instance de  $\tau_2$  et sa première instance dans le deuxième motif d'exécution de  $\Gamma_3$ .

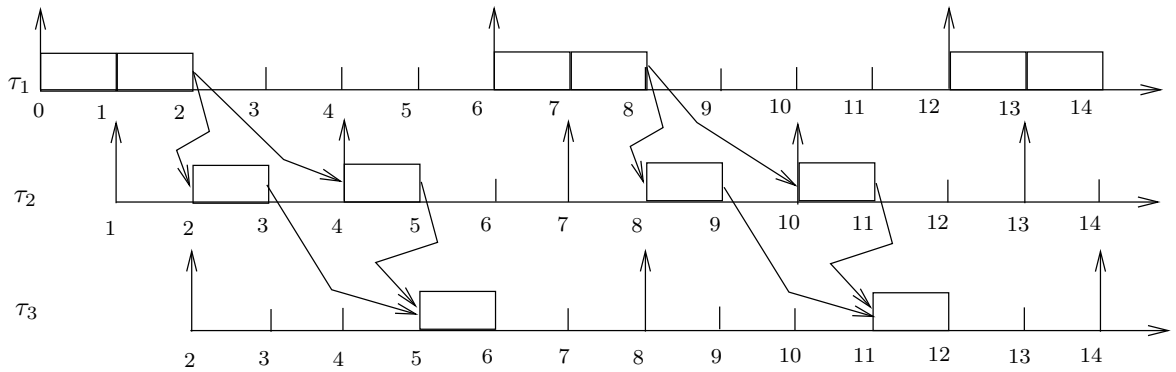


FIGURE 5.4 – Illustration du transfert de données des tâches dans  $G_3$

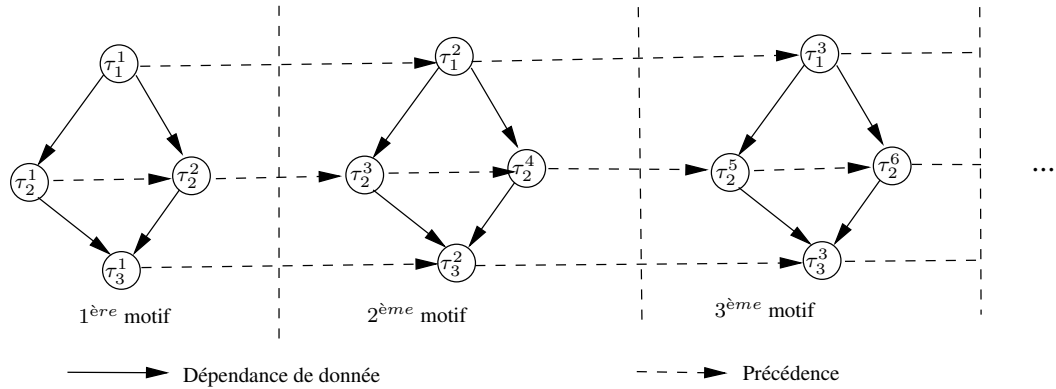


FIGURE 5.5 – Motifs d'exécution des tâches de  $\Gamma_3$

**Définition 5.1** Le *makespan* est défini pour chaque motif d'exécution  $i$  d'un ensemble de tâches  $\Gamma_n$  par le temps qui s'écoule entre la date de début d'exécution de la première instance de la première tâche d'entrée exécutée parmi les tâches sans prédécesseur dans le motif  $i$  et la date de fin d'exécution de la dernière instance de la dernière tâche de sortie exécutée parmi les tâches sans successeur dans le motif  $i$ .

**Définition 5.2** Le *makespan* peut varier d'un motif à un autre à cause de la variation des temps de réponse des tâches. On définit alors le *pire makespan* d'un ensemble de tâches  $\Gamma_n$  par le maximum des *makespans* des motifs d'exécution contenu dans l'intervalle d'étude de  $\Gamma_n$ .

Par exemple dans la figure 5.4, le premier motif de  $\Gamma_3$  débute à  $t = 0$  et se termine à la date  $t = 6$ . Son deuxième motif d'exécution commence à la date



$t = 6$  et se termine à  $t = 12$ . Le makespan de  $\Gamma_3$  est le même dans les deux motifs d'exécution de l'intervalle d'étude. Donc le pire makespan de  $\Gamma_3$  est de 6

## 5.4 Synchronisation de l'accès aux mémoires de données

Le mécanisme de transfert de données vu dans la section précédente permet aussi d'éviter les inter-blocages entre les tâches car la tâche  $\tau_j$  ne pourra commencer son exécution que lorsqu'elle dispose de toutes les  $k_{ij}$  données produite par  $\tau_i$  et ceci durant toute la durée de son exécution, ce qui veut dire que  $\tau_j$  ne peut jamais être arrêtée à cause d'attente de données de  $\tau_i$  donc d'indisponibilité de la mémoire  $buf_i$ . Par contre ce mécanisme ne permet pas d'éviter les inversions de priorités qui rallongent le makespan de l'exécution des tâches. Pour éviter cela, on utilise le principe de l'héritage de priorités qu'on retrouve dans les protocoles de synchronisation *PIP* et *PCP* présenté respectivement aux sections 2.4.3.1 et 2.4.3.2 du chapitre 2. Lorsqu'une tâche  $\tau_j$  commence son exécution, elle hérite de la plus grande priorité de ses tâches prédécesseurs qui lui fournissent des données. Une fois que la tâche  $\tau_j$  a fini son exécution elle retrouve sa priorité initiale. Ceci permet d'éviter que  $\tau_j$  soit préemptée par une tâche de priorité intermédiaire par rapport à ses prédécesseurs, c'est-à-dire les tâches plus prioritaires que  $\tau_i$  et moins prioritaires que les prédécesseurs de  $\tau_j$ . Ainsi on évite le rallongement du makespan des tâches.

On note par  $p_i(t)$ , la priorité de  $\tau_i$  à la date  $t$ .  $p_i(t)$  est déterminée par l'équation 5.3.

$$p_i(t) = \begin{cases} p_i & \text{si } ((t = r_{min}) \vee (\phi(r^-(t)) = \tau_i) \wedge ((r^-(t) + c_i(r^-(t))) = t)) \text{ sinon} \\ \max\{p_j\}_{\tau_j \in pred(\tau_i)} & \text{si } \phi(r^-(t)) = \tau_i \text{ sinon} \\ p_i(r^-(t)) & \end{cases} \quad (5.3)$$

$\phi(r^-(t))$  est la tâche qui a été sélectionnée pour s'exécuter à la dernière date d'appel de l'ordonnancement notée  $r^-(t)$  et  $c_i(r^-(t))$  est la durée restant à exécuter par cette tâche à cette date.

La figure 5.6 donne une illustration de cet héritage de priorités.

Dans cette figure nous avons trois tâches  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$  telles que  $\tau_1$  est plus prioritaire que  $\tau_3$  qui est plus prioritaire que  $\tau_2$ . Les tâches  $\tau_2$  et  $\tau_3$  consomment les données produites par  $\tau_1$ . Dans un premier temps, nous avons ordonné les

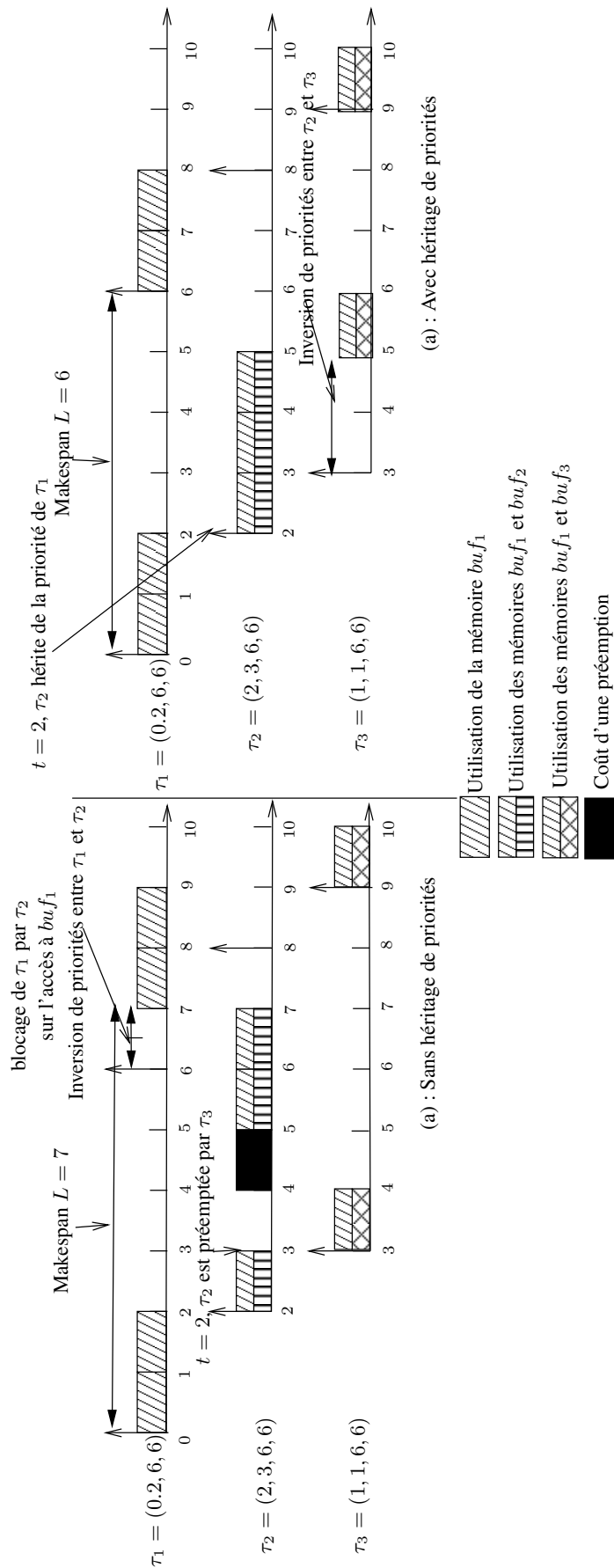


FIGURE 5.6 – Illustration du principe d'héritage de priorités

tâches sans héritage de priorités correspondant à la figure 5.6.(a) puis dans un second temps nous les avons ordonné avec héritage de priorités correspondant à la figure 5.6.(b). Dans le cas sans héritage de priorités, à la date  $t = 3$  lorsque  $\tau_3$  est activée elle préempte la tâche  $\tau_2$  qui avait commencé son exécution à  $t = 2$  ce qui rallonge le temps de réponse de la tâche  $\tau_2$  à cause du coût de la préemption avec un makespan d'exécution des tâches égale à  $L = 7$ . Cette préemption entraîne aussi le blocage d'une unité de temps de la tâche  $\tau_1$  par  $\tau_2$  car à  $t = 6$ ,  $\tau_1$  est activée mais elle attend la libération de  $buf_1$  utilisée par  $\tau_2$  pour s'exécuter. Par contre dans le cas avec héritage de priorités,  $\tau_2$  hérite à  $t = 3$  de la priorité de  $\tau_1$  pour toute la durée de son exécution ce qui lui permet de ne pas être préemptée par  $\tau_3$ . Même si cet héritage de priorités a entraîné une inversion de priorités entre  $\tau_2$  et  $\tau_3$ , il permet d'éviter un blocage de  $\tau_1$  par  $\tau_2$  ou par  $\tau_3$  et donne une meilleur makespan des tâches,  $L = 6$ , par rapport à l'ordonnement sans héritage.

## 5.5 Analyse d'ordonnabilité hors ligne

On considère  $\Gamma_n$ , un ensemble de  $n$  tâches périodiques avec des contraintes de dépendances de données.  $\Gamma_n$  est défini selon le modèle de tâches présenté dans la section 5.1.1. Nous allons faire l'analyse d'ordonnabilité hors ligne de  $\Gamma_n$  sur un seul processeur avec la prise en compte du coût exact de la préemption. Pour cela, en partant de la plus petite des dates de première activation qui est  $r_{min}$ , on appelle notre ordonnanceur hors ligne à cette date qui sélectionne la tâche à exécuter. Puis en utilisant une condition d'ordonnabilité nécessaire et suffisante on vérifie si cette tâche sélectionnée à  $r_{min}$  ainsi que toutes les autres tâches, sont ordonnables à cette date. Cette condition d'ordonnabilité utilise la durée restant à exécuter pour chaque tâche et l'échéance de chaque tâche relative à la date  $r_{min}$ . La durée restant à exécuter prend en compte le coût exact de la préemption. Si toutes les tâches sont ordonnables à la date  $r_{min}$ , on détermine la prochaine date d'appel de notre ordonnanceur. Sinon l'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnable. Au prochain appel de l'ordonnanceur, on répète le même traitement jusqu'à la fin de l'intervalle d'étude  $I_n$  présenté à la section 5.2. Lorsqu'on arrive à la fin de l'intervalle  $I_n$ , si  $\Gamma_n$  est ordonnable, le résultat de l'ordonnement de  $\Gamma_n$  est donné par la table d'ordonnement  $T$ . Cette table donne l'ordre total d'exécution des tâches sous la forme de leur date de début et de fin d'exécution dans l'intervalle d'étude  $I_n$ .

Dans la suite de cette section, on détaille la sélection de la tâche à exécuter, le calcul de la durée restant à exécuter de chaque tâche, le calcul de l'échéance de chaque tâche relative à la date d'appel de l'ordonnanceur, la condition d'ordonnabilité d'une tâche et enfin le calcul de la prochaine date d'appel de l'ordonnanceur. Ces calculs sont faits chaque fois que l'ordonnanceur est appelé. L'ana-

lyse d'ordonnançabilité est donnée dans l'algorithme 5.5.6.

### 5.5.1 Sélection de la tâche à exécuter

À chaque fois que l'ordonnanceur est appelé, il fait la mise à jour de la liste des tâches prêtes afin de sélectionner la tâche à exécuter. Cette liste contient toutes les tâches activées et qui ont reçu toutes les données nécessaires à leurs exécution.

**Lemme 5.1** *Le nombre de données produites par une tâche  $\tau_p$  sur l'intervalle de temps  $[r_{min}, t]$  est donnée par :*

$$b_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (t < r_p^1 + C_p) \text{ sinon} \\ b_p(r^-(t)) + 1 & \text{si } ((\phi(r^-(t)) = \tau_p) \wedge \\ & (r^-(t) + c_p(r^-(t)) \leq t)) \text{ sinon} \\ b_p(r^-(t)) & \end{cases} \quad (5.4)$$

$r^-(t)$ ,  $\phi(r^-(t))$  et  $c_p(r^-(t))$  représentent respectivement la dernière date d'appel de l'ordonnanceur, la tâche sélectionnée pour s'exécuter à la date  $r^-(t)$  et la durée d'exécution que doit s'exécuter  $\tau_p$  à la date  $r^-(t)$  pour terminer son exécution.

#### Preuve

Le nombre de données produites par une tâche  $\tau_p$  à  $t$  est égale à 0 si  $\tau_p$  n'est pas encore activée à  $t$  ou qu'à cette date  $t$ ,  $\tau_p$  est en cours d'exécution de sa toute première instance. Si elle a été sélectionnée pour s'exécuter à la date  $r^-(t)$  ( $\phi(r^-(t)) = \tau_p$ ), correspondant à la dernière date où l'ordonnanceur a été appelé, et qu'elle finit son exécution avant ou à  $t$  ( $r^-(t) + c_p(r^-(t)) \leq t$ ) donc une nouvelle donnée est produite par  $\tau_p$ . Dans ce cas on incrémente son nombre de données produites. Sinon, aucune donnée n'est produite à  $t$  donc le nombre de donnée de  $\tau_i$  ne change pas par rapport à la date  $r^-(t)$ . ■

**Lemme 5.2** *Soit  $(\tau_p, \tau_i)$  un couple de tâches avec une contrainte de dépendance de données telle que  $\tau_p$  est la tâche productrice de données et  $\tau_i$  la tâche consommatrice de données.*

*Le nombre de données produites dans l'intervalle de temps  $[r_{min}, t]$  par la tâche  $\tau_p$  et qui ne sont pas encore consommées par la tâche  $\tau_i$  est donné par :*

$$d_{pi}(t) = b_p(t) * k_{ip} - b_i(t) * k_{pi} \quad (5.5)$$

avec  $k_{pi} = \lceil \frac{T_i}{T_p} \rceil$  et  $k_{ip} = \lceil \frac{T_p}{T_i} \rceil$ .

**Preuve**

Lorsque la tâche  $\tau_p$  produit 1 donnée, cette donnée va être consommée  $k_{ip}$  fois par  $\tau_i$  alors le nombre de données de  $\tau_p$  disponibles pour la tâche  $\tau_i$  est de  $k_{ip}$  données au lieu de 1. En effet la donnée produite par la tâche  $\tau_p$  représente  $k_{ip}$  données pour la tâche  $\tau_i$ . Ce qui veut dire que si  $\tau_p$  a produit  $b_p(t)$  données dans l'intervalle de temps  $[r_{min}, t]$  alors le nombre total de données de  $\tau_p$  disponibles pour  $\tau_i$  est de  $b_p(t) * k_{ip}$  données. De l'autre coté, 1 donnée produite par  $\tau_i$  entraîne la consommation de  $k_{pi}$  données de  $\tau_p$ . Donc si  $\tau_i$  a produit  $b_i(t)$  dans l'intervalle de temps  $[r_{min}, t]$  alors  $\tau_i$  a consommées  $b_i(t) * k_{pi}$  données de  $\tau_p$ . Pour obtenir  $d_{pi}(t)$ , il suffit de faire la différence entre le nombre de données de  $\tau_p$  disponibles pour  $\tau_i$  et le nombre de données que  $\tau_i$  a consommé parmi ces dernières. D'où la relation 5.5. ■

À la date  $t$  (date d'appel de l'ordonnanceur), pour qu'une tâche  $\tau_i$  activée ( $r_i^1 \leq t$ ) puisse être à l'état prêt, donc dans la liste des tâches prêtes, elle doit vérifier certaines conditions par rapport à l'ensemble de ses tâches prédécesseurs  $pred(\tau_i)$  qui lui fournissent les données qu'elle consomme et par rapport à ses tâches successeurs  $succ(\tau_i)$  qu'elle fournit des données. Par rapport à chacun des ses prédécesseurs  $\tau_p \in pred(\tau_i)$ ,  $\tau_i$  doit avoir reçu au plus tard à  $t$  toutes les  $k_{pi} = \lceil \frac{T_i}{T_p} \rceil$  données produites par  $\tau_p$  mais aussi toutes les données  $k_{is} = \lceil \frac{T_s}{T_i} \rceil$ , qu'elle a déjà produites pour chacun des ses successeurs  $\tau_s \in succ(\tau_i)$ , doivent être consommées toutes par  $\tau_s$  au plus tard à  $t$ .

**Théorème 5.1** Une tâche  $\tau_i$  est prête (à l'état prêt d'exécution voir section 1.7.2) à l'exécution à la date  $t$  si et seulement si :

1.  $t \geq r_i^1$ ,
2.  $(r^-(t) + c_i(r^-(t)) > t) \vee ((c_i(r^-(t)) > 0) \wedge (\phi(r^-(t)) \neq \tau_i)) \vee ((t - r_i^1) \bmod T_i = 0)$ ,
3.  $\forall \tau_p \in pred(\tau_i), d_{pi}(t) \geq k_{pi}$ ,
4.  $\forall \tau_s \in succ(\tau_i), d_{is}(t) < k_{is}$ .

**Preuve**

Supposons qu'une de ces quatre conditions n'est pas vérifiée. Si c'est la condition 1) qui est fausse c'est-à-dire que  $t < r_i^1$  alors la tâche  $\tau_i$  n'est pas encore activée donc ne peut pas être prête à l'exécution. Sinon, si c'est la condition 2) qui est fausse c'est à dire que  $(r^-(t) + c_i(r^-(t)) \leq t) \wedge (c_i(r^-(t)) \leq 0) \vee (\phi(r^-(t)) = \tau_i) \wedge ((t - r_i^1) \bmod T_i \neq 0)$  alors la tâche  $\tau_i$  a fini son exécution à la date  $r^-(t)$  et ne commence pas une nouvelle instance à  $t$  donc  $\tau_i$  est à l'état passif à la date  $t$ . Sinon, si la 3) qui est fausse c'est-à-dire que  $\exists \tau_p \in pred(\tau_i) / d_{pi}(t) < k_{pi}$

alors la tâche  $\tau_i$  n'a pas encore reçu toutes les  $k_{pi}$  données de son prédécesseur  $\tau_p$ , donc elle ne peut pas démarrer son exécution. Sinon, si c'est la condition 4) qui est fautive c'est à dire que  $\exists \tau_s \in succ(\tau_i)/d_{is}(t) \geq k_{is}$  alors la tâche  $\tau_i$  a déjà produit  $k_{is}$  données qui ne sont pas encore toutes consommées par son successeur  $\tau_s$  donc elle ne peut pas en produire d'autres avant que  $\tau_s$  ne consomme celles déjà produites. Donc si l'une de ces conditions est fautive, alors la tâche  $\tau_i$  ne peut pas être prête à l'exécution.

Si toutes les quatre conditions sont vérifiées alors :  $\tau_i$  est activée avant ou à la date  $t$  d'après la condition 1),  $\tau_i$  n'a pas fini son exécution avant ou à  $t$ , c'est-à-dire qu'elle n'est pas à l'état passif d'après la condition 2);  $\tau_i$  a reçu toutes les données de ses prédécesseurs avant ou à  $t$ , d'après la condition 3);  $\tau_i$  ne produit pas plus de  $k_{is}$  données à la fois pour chacun de ses successeurs  $\tau_s$ . Donc la tâche  $\tau_i$  est prête à l'exécution. Donc si les quatre conditions sont vérifiées alors la tâche  $\tau_i$  est prête à l'exécution. ■

**Définition 5.5.1** On définit par  $\Gamma_r(t)$  l'ensemble des tâches prêtes à l'exécution à la date  $t$ .  $\Gamma_r^l(t)$  est donné par :  $\Gamma_r(t) = \{\tau_i \in \Gamma_n / \tau_i \text{ est prête à l'exécution à } t \text{ selon le théorème 5.1.}$

Pour ordonnancer les tâches sans pertes de données, à chaque appel de l'ordonnanceur, la tâche sélectionnée pour s'exécuter doit être dans l'ensemble des tâches prêtes.

**Définition 5.5.2** On note par  $\phi(t)$  la tâche sélectionnée pour s'exécuter à la date  $t$ . Elle correspond à la tâche la plus prioritaire à l'instant  $t$  dans  $\Gamma_r(t)$ .

$\forall t \in I(t)$ ,  $\phi(t)$  est donnée par :

$$\phi(t) = \tau_k / p_k(t) = \max\{p_i(t)\}_{\tau_i \in \Gamma_r(t)} \quad (5.6)$$

avec  $p_k(t)$  déterminée par la relation 5.3.

À la date  $t$ , c'est la tâche sélectionnée  $\phi(t)$  qui s'exécute jusqu'à la prochaine date d'appel de l'ordonnanceur qui sélectionnera à cette date soit la même tâche qu'à  $t$  ou une autre tâche. Si aucune tâche n'est sélectionnée pour s'exécuter à une date  $t$  alors le processeur est inoccupé jusqu'au prochain appel de l'ordonnanceur et on note  $\phi(t) = idle$ .

## 5.5.2 Durée restant à exécuter avec coût exact de la préemption

Lors de l'analyse d'ordonnançabilité, le coût exact de la préemption est pris en compte dans la durée restant à exécuter par la tâche préemptée. En effet à chaque fois qu'une tâche  $\tau_i$  se fait préempter à la date  $t$  on ajoute le coût associé à une préemption à la durée d'exécution qui reste à cette tâche. Ce qui rallonge le

temps de réponse de la tâche  $\tau_i$  et permet de prendre en compte les préemptions potentielles engendrées par cette préemption. Ainsi toutes les préemptions sont prises en compte de manière exacte, sans faire aucune approximation comme c'est le cas dans les approches classiques.

On note par  $c_i(t)$  la durée restant à exécuter par la tâche  $\tau_i$  à la date  $t$ .  $c_i(t)$  correspond au nombre d'unités de temps que doit compléter la tâche  $\tau_i$  à partir de  $t$  pour finir son exécution. La figure 5.7, ci-dessous, donne une illustration de cette durée d'exécution. Dans cette figure la tâche  $\tau_i$  est préemptée à la date  $t$  et sa durée restant à exécuter à  $t$  notée par  $c_i(t)$  est rallongée d'une unité de temps sur cet exemple. Car on a fait l'hypothèse que le coût associé à une préemption, représenté ici en noir, était d'une unité de temps.

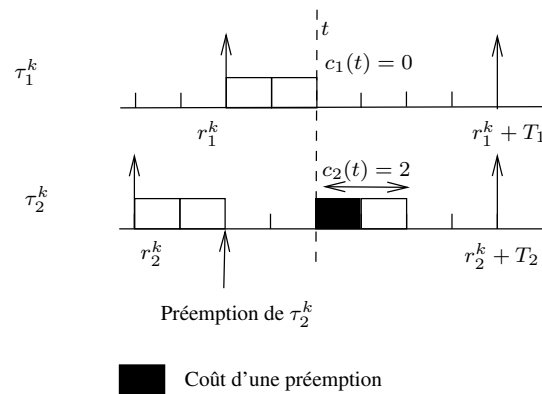


FIGURE 5.7 – Illustration de  $c_1(t)$  et  $c_2(t)$

À la date  $t$ , le calcul de  $c_i(t)$  se fait en fonction de l'ordonnancement obtenu aux dates  $r^-(t)$  et  $t$ . Ainsi nous avons les cas suivants :

- si  $\tau_i$  est activée à  $t$  alors  $c_i(t) = C_i$  sinon;
- si  $\tau_i$  n'était pas la tâche sélectionnée pour s'exécuter lors de la dernière date d'appel de l'ordonnanceur  $r^-(t)$  ou si  $\tau_i$  a déjà terminé son exécution à cette date alors  $c_i(t) = c_i(r^-(t))$  sinon;
- si  $\tau_i$  était la tâche sélectionnée pour s'exécuter à  $r^-(t)$  et qu'elle n'est pas préemptée à  $t$  alors  $c_i(t) = (r^-(t) + c_i(r^-(t)) - t)$  sinon;
- si  $\tau_i$  était la tâche sélectionnée pour s'exécuter à  $r^-(t)$  et qu'elle est préemptée à  $t$  alors  $c_i(t) = (r^-(t) + c_i(r^-(t)) - t) + \alpha$ , avec  $\alpha$  égal au coût d'une préemption.

$\forall t \in I(t)/t \geq r_i^1$ ,  $c_i(t)$  est donnée par :

$$c_i(t) = \begin{cases} C_i & \text{si } (\frac{t-r_i^1}{T_i}) \in \mathbb{N} \text{ sinon} \\ c_i(r^-(t)) & \text{si } (\phi(r^-(t)) \neq \tau_i) \text{ sinon} \\ r^-(t) + c_i(r^-(t)) - t & \text{si } (\phi(t) = \tau_i) \vee \\ & ((\phi(t) \neq \tau_i) \wedge (r^-(t) + c_i(r^-(t)) = t)) \text{ sinon} \\ (r^-(t) + c_i(r^-(t)) - t) + \alpha & \end{cases}$$

### 5.5.3 Échéance relative à une date d'appel de l'ordonnancier

L'échéance d'une tâche  $\tau_i$  relative à la date d'appel de l'ordonnancier  $t$  est la durée  $d_i(t)$  telle que  $\tau_i$  doit obligatoirement terminer son exécution avant  $t + d_i(t)$  sous peine de rater son échéance relative à sa dernière activation. La figure 5.8 donne une illustration de l'échéance relative de  $\tau_i$  par rapport à  $t$ .

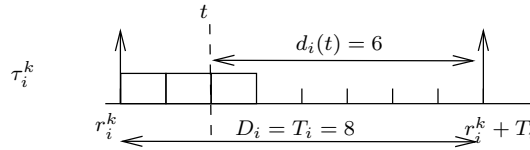


FIGURE 5.8 – Illustration de  $d_i(t)$

Si  $t$  est une activation de la tâche  $\tau_i$ , on a  $d_i(t) = D_i$  et  $d_i(t)$  décroît jusqu'à la prochaine activation de  $\tau_i$ .

$\forall t \in I(t) \geq r_i^1$ ,  $d_i(t)$  est donnée par :

$$d_i(t) = \begin{cases} D_i & \text{si } (\frac{t-r_i^1}{T_i}) \in \mathbb{N} \text{ sinon} \\ r^-(t) + d_i(r^-(t)) - t & \text{si } r^-(t) + d_i(r^-(t)) > t \text{ sinon} \\ 0 & \end{cases}$$

### 5.5.4 Condition d'ordonnançabilité

Dans cette section on présente la condition d'ordonnançabilité d'une tâche  $\tau_i$ . Cette condition est nécessaire et suffisante.



**Théorème 5.5.1** *Soit  $t$  une date d'appel de l'ordonnanceur. Une tâche  $\tau_i \in \Gamma_n$  est ordonnançable à  $t$  avec prise en compte du exact de la préemption si et seulement si :*

$$\begin{aligned} & (c_i(t) \leq d_i(t)) \wedge \\ & ((t \leq r_i^1) \vee (c_i(r^-(t)) = 0)) \vee \\ & (\phi(r^-(t)) = \tau_i) \vee ((t - r_i^1) \bmod T_i \neq 0)) \end{aligned} \quad (5.7)$$

### Preuve

Montrons que si la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable alors on a la condition 5.7 (condition nécessaire). Pour cela, supposons que la condition 5.7 est fausse, alors nous avons:

$$\begin{aligned} & ((c_i(t) > d_i(t)) \vee \\ & ((t > r_i^1) \wedge (c_i(r^-(t)) > 0)) \wedge \\ & (\phi(r^-(t)) \neq \tau_i) \wedge ((t - r_i^1) \bmod T_i = 0)) \end{aligned}$$

Si  $c_i(t) > d_i(t)$  alors la tâche  $\tau_i$  ne pourra pas finir son exécution à  $t + d_i(t)$  donc  $\tau_i$  va dépasser son échéance à la date  $t + d_i(t)$ . Dans ce cas  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable. Si  $((t > r_i^1) \wedge (\phi(r^-(t)) \neq \tau_i) \wedge (c_i(r^-(t)) > 0) \wedge (t - r_i^1) \bmod T_i = 0)$  cela signifie qu'à la dernière date d'appel de l'ordonnanceur  $r^-(t)$ ,  $\tau_i$  n'a pas été sélectionnée pour s'exécuter et que  $\tau_i$  était déjà activée à cette date. Puisque  $((t - r_i^1) \bmod T_i = 0)$ ,  $\tau_i$  débute l'exécution d'une nouvelle instance à  $t$  alors qu'elle n'a pas fini son exécution sur sa dernière instance ( $c_i(r^-(t)) > 0$ ), donc  $\tau_i$  a dépassé l'échéance de sa dernière instance, ce qui veut dire que  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable. Donc si la condition 5.7 est fausse alors  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable. Ou bien, si  $\tau_i \in \Gamma_n$  est ordonnançable alors la condition 5.7 est vérifiée.

Montrons que si la condition 5.7 est vérifiée alors la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable (condition suffisante). Pour cela, supposons que la condition 5.7 est vraie. Si  $((c_i(t) \leq d_i(t)) \wedge ((c_i(r^-(t)) = 0) \vee (t \leq r_i^1)))$  alors  $\tau_i$  a fini son exécution à  $r^-(t)$ , ou  $\tau_i$  n'est pas encore activée à  $t$  ou bien  $\tau_i$  vient d'être activée à  $t$ . Dans chacun de ces cas, la tâche  $\tau_i$  ne rate pas son échéance donc est ordonnançable jusqu'à la date  $t$ . Sinon, si  $((c_i(t) \leq d_i(t)) \wedge (\phi(r^-(t)) = \tau_i))$  alors  $\tau_i$  était la tâche sélectionnée à  $r^-(t)$  et après son exécution nous avons  $c_i(t) \leq d_i(t)$  donc  $\tau_i$  est ordonnançable jusqu'à la date  $t$ . Sinon, si  $((c_i(t) \leq d_i(t)) \wedge ((t - r_i^1) \bmod T_i \neq 0))$  alors  $\tau_i$  n'était pas la tâche sélectionnée à la date  $r^-(t)$  mais ne dépasse pas son échéance à  $t$  ( $c_i(t) \leq d_i(t)$ ) et la date  $t$  ne coïncide pas au début d'exécution d'une nouvelle instance de  $\tau_i$  ( $(t - r_i^1) \bmod T_i \neq 0$ ) donc  $\tau_i$  est toujours ordonnançable à  $t$ . Donc si la condition 5.7 est vraie alors  $\tau_i$  est ordonnançable.

Donc la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable si et seulement si la relation 5.7 est vraie. ■

**Corollaire 5.5.1** *Une tâche  $\tau_i$  est ordonnançable avec prise en compte du coût exact de la préemption si et seulement si elle est ordonnançable lors de chaque appel de l'ordonnanceur.*

**Preuve**

Montrons que si la tâche  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable lors de chaque appel de l'ordonnanceur alors elle n'est pas ordonnançable. Pour cela supposons qu'il existe une date d'appel de l'ordonnanceur à laquelle  $\tau_i$  n'est pas ordonnançable. Donc  $\tau_i$  rate son échéance dans une de ses instances dans l'intervalle d'étude donc n'est pas ordonnançable.

Montrons que si la tâche  $\tau_i$  est ordonnançable lors de chaque appel de l'ordonnanceur alors elle est ordonnançable. Pour cela supposons que  $\tau_i$  est ordonnançable lors de chaque appel de l'ordonnanceur. Donc  $\tau_i$  ne rate aucune de ses échéances dans l'intervalle d'étude donc elle est ordonnançable. ■

**Corollaire 5.5.2** *Un ensemble de tâches dépendantes  $\Gamma_n$  est ordonnançable avec la prise en compte du coût exact de la préemption si et seulement si pour chaque appel de l'ordonnanceur à  $t$ ,  $\forall \tau_i \in \Gamma_n$ ,  $\tau_i$  est ordonnançable selon le théorème 5.5.1.*

**Preuve**

Si  $\Gamma_n$  est ordonnançable alors aucune tâche ne rate son échéance donc toutes les tâches sont ordonnançables.  $\forall t$  telle que  $t$  est une date d'appel de l'ordonnanceur,  $\forall \tau_i \in \Gamma_n$ ,  $\tau_i$  est ordonnançable donc  $\tau_i$  vérifie la condition la 6.6 d'où  $\tau_i$  est ordonnançable selon le théorème 5.5.1. Donc si  $\Gamma_n$  est ordonnançable alors  $\forall \tau_i \in \Gamma_n$  est ordonnançable selon le théorème 5.5.1.

Si  $\forall t$  est une date d'appel de l'ordonnanceur,  $\forall \tau_i \in \Gamma_n$ ,  $\tau_i$  est ordonnançable selon le théorème 5.5.1 alors  $\Gamma_n$  ordonnançable. ■

**5.5.5 Prochaine date d'appel de l'ordonnanceur hors ligne**

L'ordonnanceur hors ligne est appelé aux dates d'activation et de fin d'exécution des tâches afin de sélectionner la tâche à exécuter. Les dates de fin d'exécution des tâches sont déterminées en supposant que hors ligne, les tâches ont des durées d'exécution égales à leur pire temps d'exécution. Dans ce qui suit lorsqu'on parlera d'exécution d'une tâche on entend par là une exécution hors ligne.

On note par  $F$  l'ensemble ordonné des dates d'activation incluses dans  $I_n$ . L'ensemble  $F$  peut être déterminé avant l'exécution des tâches à l'aide des dates de première activation et des périodes des tâches. Cet ensemble nous permet de déterminer la prochaine activation qui arrive après un appel de l'ordonnanceur.  $F$  est donné par la relation 5.8. On suppose que les éléments de  $F$  sont dans l'ordre croissant des dates d'activation.

$$F = \{t \in I_n / \exists (\tau_i, k) \in (\Gamma_n, \mathbb{N}), t = r_i^1 + kT_i\} \quad (5.8)$$

On note par  $G$ , l'ensemble des dates d'activation et de fin d'exécution des tâches qui correspondent aux dates d'appel de notre ordonnanceur. Avant l'exécution des tâches on initialise  $G$  à l'ensemble  $F$  puisqu'on ne connaît pas encore les dates de fin d'exécution des tâches. Nous allons mettre à jour l'ensemble  $G$  au fur et à mesure de l'analyse d'ordonnançabilité des tâches en ajoutant les dates de fin d'exécution. Pour cela en partant de la plus petite des dates de première activation  $r_{min}$ , on détermine la prochaine date d'appel de l'ordonnanceur notée  $r^+(r_{min})$  que l'on ajoute dans  $G$ . Si la tâche sélectionnée à la date  $r_{min}$ , termine son exécution avant la prochaine date d'activation, quelle que soit la tâche, alors  $r^+(r_{min})$  est égale à la date de fin d'exécution de cette tâche sélectionnée à  $r_{min}$ . Sinon,  $r^+(r_{min})$  correspond à la prochaine date d'activation. À la date  $r^+(r_{min})$  on effectue le même traitement jusqu'à la fin de l'intervalle d'étude.

**Définition 5.3** Soit  $t$  une date d'appel de l'ordonnanceur qui ne peut être qu'une date d'activation ou de fin d'exécution d'une tâche. La prochaine date d'appel de l'ordonnanceur après  $t$  est donnée par la relation 5.9.

$$r^+(t) = \begin{cases} t + c_k(t) & \text{si } (t + c_k(t)) < a(t) \text{ sinon} \\ a(t) & \end{cases} \quad (5.9)$$

avec  $c_k(t)$  est la durée restant à exécuter par la sélectionnée à  $t$  et  $a(t)$  est la date de l'activation d'une tâche qui arrive après  $t$ ,  $a(t)$  est l'élément qui succède  $t$  dans  $F$ .

La figure 5.9 donne une illustration du calcul de  $I(t)$ .

À la date  $t$  qui correspond à une date d'appel de l'ordonnanceur, après avoir calculé  $r^+(t)$  on a  $G = G \cup \{r^+(t)\}$ .

### 5.5.6 Algorithme d'analyse d'ordonnançabilité monoprocesseur

L'analyse d'ordonnançabilité de l'ensemble  $\Gamma_n$  est réalisé par l'algorithme 6.

Avec l'algorithme 6 on parcourt l'intervalle d'étude  $I_n$  en se limitant aux dates d'activation et de fin d'exécution des tâches qui correspondent aux date d'appel de l'ordonnanceur. À chacune de ces dates on sélectionne la tâche à exécuter puis on vérifie s'il existe une tâche non ordonnançable en utilisant la condition 5.7 du théorème 5.5.1. Dès qu'il existe une tâche non ordonnançable, c'est-à-dire qu'une tâche qui ne vérifie pas la condition 5.7, alors  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable. Sinon si toutes les tâches vérifient la condition 5.7 alors  $\Gamma_n$  est ordonnançable. À la fin de l'intervalle d'étude, si  $\Gamma_n$  est ordonnançable alors une table d'ordonnancement de  $\Gamma_n$  est produite qui indique pour chacune des dates d'appel de l'ordonnanceur

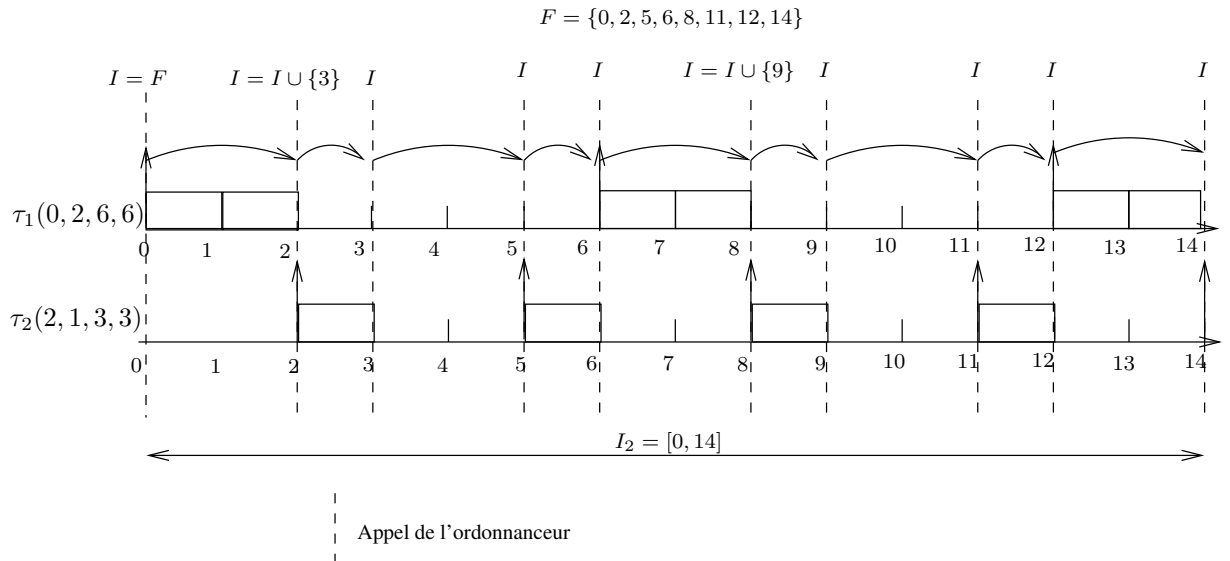


FIGURE 5.9 – Illustration des dates d'appel de l'ordonnanceur

(date d'activation et de fin d'exécution des tâches), la tâche qui s'exécute à cette date.

La complexité au pire cas de cette analyse d'ordonnançabilité est de  $O(n.l)$ ,  $n$  est le nombre de tâches et  $l$  est la longueur de l'intervalle d'étude  $I_n$ .

### 5.5.7 Application

Considérons l'ensemble  $\Gamma_3$  constitué de 3 tâches périodiques avec des contraintes de dépendances de données. Le graphe  $G'_3$  de la figure 5.10 représente les dépendances de données des tâches dans  $\Gamma_3$ . Nous allons faire l'analyse d'ordonnançabilité de  $\Gamma_3$  sur un seul processeur.

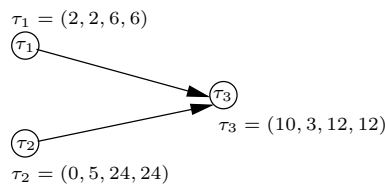


FIGURE 5.10 – Graphe  $G'_3$  représentant  $\Gamma_3$

Selon le mécanisme de transfert de données présenté à la section 5.3, la tâche  $\tau_1$  doit produire 2 données à la tâche  $\tau_3$  et la tâche  $\tau_2$  doit produire 1 donnée à la

**Algorithme 6** Analyse d'ordonnançabilité

---

```

1:  $t \leftarrow r_{min}$ 
2:  $G \leftarrow F$ 
3:  $ordonnançable \leftarrow vrai$ 
4: tant que  $(t < (t_c + H_n)) \wedge (ordonnançable = vrai)$  faire
5:   Calculer  $\phi(t)$ 
6:    $i \leftarrow 1$ 
7:   tant que  $(i \leq n) \wedge (ordonnançable = vrai)$  faire
8:     si  $(t \geq r_i^1)$  alors
9:       Calculer  $c_i(t)$ 
10:      Calculer  $d_i(t)$ 
11:      si  $((c_i(t) > d_i(t)) \vee$ 
       $((t > r_i^1) \wedge (c_i(r^-(t)) > 0) \wedge (\phi(r^-(t)) \neq \tau_i) \wedge ((t - r_i^1) \bmod T_i = 0))$ 
      alors
12:         $ordonnançable \leftarrow faux$ 
13:      fin si
14:    fin si
15:     $i \leftarrow i + 1$ 
16:  fin tant que
17:   $t \leftarrow r^+(t)$ 
18:   $G \leftarrow G \cup \{r^+(t)\}$ 
19: fin tant que

```

---

tâche  $\tau_3$ . On suppose que le coût d'une préemption est égal à  $\alpha = 1$  unité de temps et que les priorités des tâches sont calculées selon l'algorithme Rate Monotonic présenté dans l'état de l'art. L'analyse d'ordonnançabilité de  $\Gamma_3$  est réalisée sur l'intervalle  $I_3 = [r_{min}, t_c + H_3]$  avec  $H_3 = ppcm(T_1, T_2, T_3) = T_2 = 24$  et  $t_c = r_{max} + H_3 = 10 + 24 = 34$ . Donc  $I_3 = [0, 34 + 24] = [0, 58]$ .

Selon l'algorithme 6,  $\Gamma_3$  est ordonnançable avec la prise en compte du coût exact de la préemption. La table d'ordonnancement de  $\Gamma_3$  est présentée au tableau 5.2.

Dans ce tableau,  $\phi(t) = idle$  correspond au moment où le processeur est inoccupé. En utilisant la table d'ordonnancement 5.2 on réalise le diagramme de Gantt de l'ordonnancement de l'ensemble des tâches  $\Gamma_3$  présenté à la figure 5.11.

Dans la figure 5.11, nous observons que la tâche  $\tau_2$  est préemptée aux dates  $t = 2, 26, 32, 50, 56$ . Pour la tâche  $\tau_2$ , c'est sa préemption à  $t = 26$  qui a engendré sa préemption à  $t = 32$ . En effet si à la date  $t = 26$  la tâche  $\tau_2$  n'était pas préemptée alors on aurait  $c_2(26) = 4$  au lieu de  $c_2(26) = 5$  donc  $\tau_2$  finirait son exécution à  $t = 32$ . Nous observons aussi que le mécanisme de transfert de don-

$t$	$\phi(t) = \tau_i$	$c_i(t)$
0	$\tau_2$	5
2	$\tau_1$	2
4	$\tau_2$	4
8	$\tau_1$	2
10	$\tau_3$	3
13	<i>idle</i>	1
14	$\tau_1$	2
16	<i>idle</i>	4
20	$\tau_1$	2
22	$\tau_3$	3
24	$\tau_3$	1
25	$\tau_2$	5
26	$\tau_1$	2
28	$\tau_2$	5
32	$\tau_1$	2
34	$\tau_2$	2
36	$\tau_3$	3
38	$\tau_3$	1
39	$\tau_1$	2
41	<i>idle</i>	3
44	$\tau_1$	2
46	$\tau_3$	3
48	$\tau_3$	1
49	$\tau_2$	5
50	$\tau_1$	2
52	$\tau_2$	5
56	$\tau_1$	2
58	$\tau_2$	2

TABLE 5.2 – Table d’ordonnancement de  $\Gamma_3$ 

nées présenté à la section et les contraintes d’exclusion mutuelles sont bien pris en compte dans l’ordonnancement des tâches. La tâche  $\tau_3$  consomme pour chacune de ses exécutions 2 données produites par  $\tau_1$  et 1 donnée produite par  $\tau_2$ . A la date  $t = 38$ , même si la tâche  $\tau_1$  est plus prioritaire que la tâche  $\tau_3$  c’est cette dernière qui s’exécute à cette date car  $\tau_1$  est bloquée par  $\tau_3$  qui lit sur la mémoire de donnée de  $\tau_i$ .

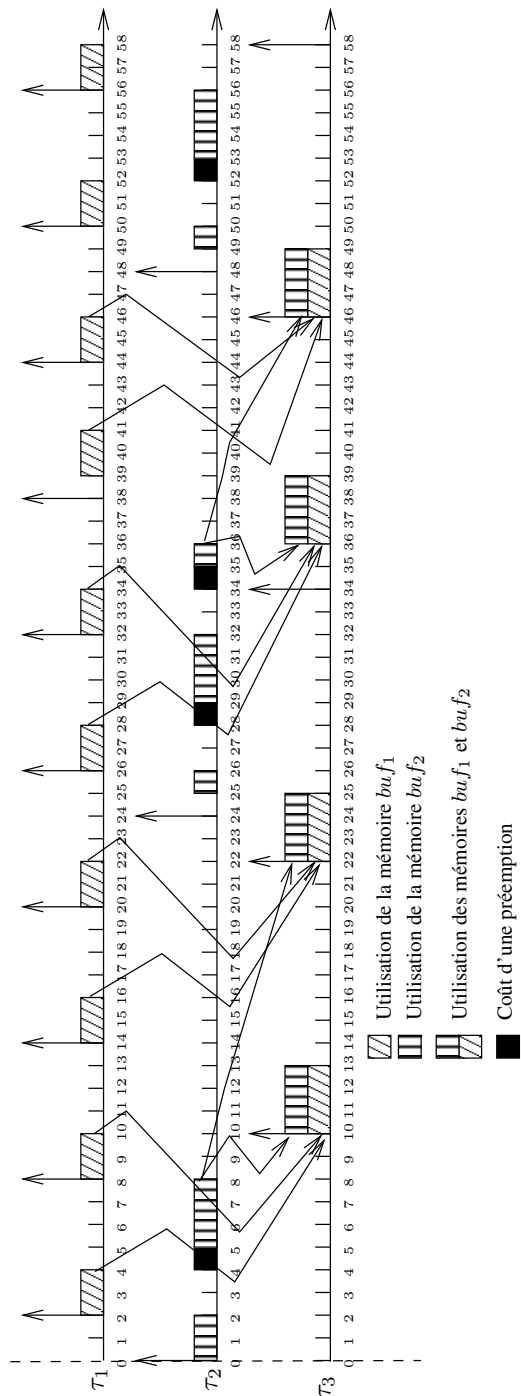


FIGURE 5.11 – Résultat de l'ordonnancement de  $\Gamma_3$

## 5.6 Viabilité

La viabilité de la condition d'ordonnabilité présentée à la section précédente section est montrée par le théorème 5.6.1.

**Théorème 5.6.1** *Soit  $\Gamma_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n\}$ , un ensemble de tâches dépendantes où les tâches sont triées dans l'ordre décroissant de leurs priorités selon l'algorithme à priorités fixes noté Algo avec  $\tau_i = (r_i^1, C_i, D_i, T_i)$ .*

*Si  $\Gamma_n$  est ordonnable alors lors de l'exécution,  $\Gamma'_n = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau'_i, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n\}$ , avec  $\tau'_i = (r_i^1, C'_i, D_i, T_i)$  et  $C'_i < C_i$  est aussi ordonnable.*

### Preuve

Les tâches dans  $\Gamma_n$  ont les mêmes dates de première activation et les mêmes périodes que celles dans  $\Gamma'_n$ . Donc  $\Gamma_n$  et  $\Gamma'_n$  ont le même intervalle d'étude.

Supposons que  $\Gamma_n$  est ordonnable et que  $T$  est une table d'ordonnement de  $\Gamma_n$ . Dans la table d'ordonnement  $T$ , remplaçons la tâche  $\tau_i$  par la tâche  $\tau'_i$ , on obtient la table  $T'$ . Montrons que dans la table d'ordonnement  $T'$  toutes les tâches de  $\Gamma'_n$  respectent leurs échéances.

Avec l'ordonnement obtenu avec  $T'$ , les tâches  $\tau_j \in \Gamma'_n / i \neq j$  respectent leurs échéances puisque ce sont les mêmes tâches que celles dans  $\Gamma_n$  ( $\{\tau_j \in \Gamma_n / i \neq j\} = \{\tau_j \in \Gamma'_n / i \neq j\}$ ) et qu'elles ont les mêmes plages d'exécution que dans  $T$ . Supposons que la tâche  $\tau'_i$  n'est pas ordonnable, c'est-à-dire qu'il existe au moins une instance de  $\tau'_i$  dans laquelle  $\tau'_i$  ne respecte pas son échéance. Cette instance correspond à la même instance que celle  $\tau_i$  dans  $T$ . Hors nous avons  $C'_i < C_i$ , ce qui veut dire que  $\tau_i$  ne respecte pas son échéance sur une instance donc n'est pas aussi ordonnable, ce qui est absurde d'après notre supposition que  $\Gamma_n$  était ordonnable. Donc  $\tau'_i$  est ordonnable de même que toutes les tâches dans  $\Gamma'_n$  sont ordonnelles et que  $T'$  est une table d'ordonnement de  $\Gamma'_n$ . ■

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l'ordonnement des tâches dépendantes. Nous avons présenté une condition d'ordonnabilité de ces tâches avec la prise en compte du coût exact de la préemption sans perte de données. Nous allons utiliser cette condition d'ordonnabilité dans l'ordonnement multiprocesseur des tâches en appliquant la stratégie par partitionnement.



# Chapitre 6

## Ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons le problème d'ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes avec la prise en compte du coût exact de la préemption. Nous proposons une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur qui alloue les tâches aux processeurs puis les ordonnance en prenant en compte le coût exact de la préemption sans migration de tâches. Afin de prendre en compte les coûts de communication inter-processeurs, nous allons étendre en multiprocesseur l'analyse d'ordonnabilité présentée à la section 5.5 du chapitre précédent.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 6.2 présente le modèle de tâches, la section 6.3 présente le modèle d'architecture, la section 6.4 présente le principe d'allocation des tâches aux processeurs, la section 6.5 présente l'analyse d'ordonnabilité multiprocesseur, la section 6.6 présente l'heuristique d'ordonnancement multiprocesseur qui alloue et ordonnance les tâches, la section 6.7 présente l'application de notre heuristique d'ordonnancement multiprocesseur et enfin la section 6.8 présente l'analyse de performance de notre heuristique que l'on compare avec l'algorithme exact *B&B* appliqué à des tâches dépendantes.

### 6.2 Modèle de tâches

Soit  $\Gamma_n$  un ensemble de  $n$  tâches dépendantes selon le modèle de tâches défini au chapitre précédent. Nous utilisons aussi le même mécanisme de transfert de données que celui présenté à section 5.3 du chapitre précédent.

### 6.3 Modèle d'architecture

On considère une architecture multiprocesseur distribuée composée de  $m$  processeurs identiques. Cette architecture est représentée par un graphe non orienté où chaque sommet est un processeur ou un médium de communication et chaque arc est une connexion entre un processeur et un médium de communication [Gra00]. Un médium de communication peut être une liaison *point-à-point*, une liaison *multi-point* (bus) ou une mémoire partagée. Afin d'éviter qu'une communication bloque une tâche sur un processeur on suppose que chaque processeur est doté d'une unité de communication appelé *communicateur* qui permet d'avoir au sein de chaque processeur un parallélisme entre les exécutions des tâches, et les communications entre processeurs. Les tâches sont exécutées par les opérateurs notés  $OPR_i$  et les communications par les communicateurs notés  $COM_i$ .

Un exemple de graphe d'architecture est présenté à la figure 6.1 ci-dessous. Dans cette figure,  $M_1$  et  $M_2$  représentent les médiums de communication et  $RAM$  représente la mémoire programme d'un processeur.

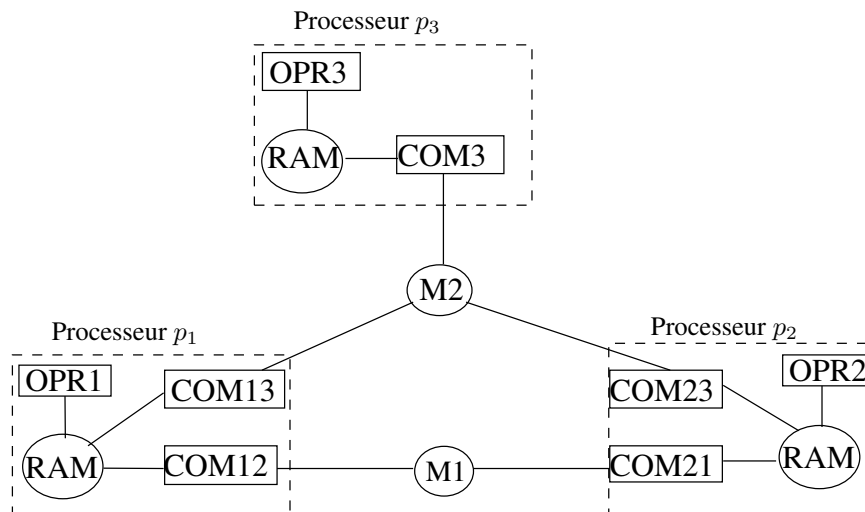


FIGURE 6.1 – Illustration d'un graphe d'architecture

Soient deux tâches  $\tau_i$  et  $\tau_j$ , telles que  $\tau_i$  est la tâche productrice des données de  $\tau_j$  et  $\tau_i$  est la tâche consommatrice des données de  $\tau_i$ , exécutées respectivement sur les processeurs différents  $p_l$  et  $p_k$ . Le coût de transfert d'une donnée de  $\tau_i$  du processeur  $p_l$  au processeur  $p_k$ , appelé coût de communication entre  $p_l$  et  $p_k$ , est considéré comme étant une constante. On note par  $com_{lk}$  ce coût .

On suppose que tous les processeurs ont la même horloge et donc la même origine des temps [PBAF10].

## 6.4 Allocation des tâches aux processeurs

Contrairement aux tâches indépendantes où on effectue en même temps l'allocation et l'ordonnancement des tâches avec un condition suffisante d'ordonnançabilité, pour les tâches dépendantes on effectue en même temps l'allocation et un pré-ordonnancement des tâches avec une condition d'ordonnançabilité nécessaire qui permet de décider pour chaque tâche le processeur où elle est allouée. Puis on raffine ce pré-ordonnancement avec notre analyse d'ordonnançabilité qui permet de prendre en compte, en plus du coût de la préemption comme dans la section 5.5 du chapitre précédent, le coût des communications inter-processeur. En effet à cause des dépendances de données, l'analyse d'ordonnançabilité de chaque tâche doit être effectuée avec ses prédécesseurs et ses successeurs. Ceci afin de pouvoir assurer que chaque tâche a reçu toutes les données de ses prédécesseurs et aussi qu'elle a produit le bon nombre de données pour ses successeurs. Ainsi après avoir réalisé l'allocation des tâches sur les différents processeurs, on peut les ordonner plus finement avec une condition d'ordonnançabilité suffisante en prenant en compte le coût exact de la préemption et le coût des communications inter-processeur. Dans la suite on présente le principe de l'allocation et du pré-ordonnancement des tâches.

### 6.4.1 Condition nécessaire d'ordonnançabilité

Pour un processeur donné si la condition nécessaire d'ordonnançabilité n'est pas vérifiée par une tâche, alors cette tâche n'est pas ordonnançable sur ce processeur, donc elle ne peut pas lui être allouée. Cependant une tâche peut vérifier cette condition sur un processeur sans pour autant être ordonnançable sur ce processeur. Dans le cas de l'ordonnancement des tâches indépendantes la condition d'ordonnançabilité utilisée est fondée sur l'opération  $\oplus$ .

À cause des contraintes de dépendances de données, une tâche  $\tau_j$  en attente de recevoir des données de ses prédécesseurs voit sa date de début d'exécution au plus tôt retardée. Donc il existe une date avant laquelle  $\tau_j$  ne pourra pas démarrer son exécution, c'est cette date qui correspond en réalité à sa date de première activation. Cette date dépend du processeur sur lequel la tâche  $\tau_j$  est allouée et des processeurs sur lesquels ses prédécesseurs sont alloués.

Soit  $pred(\tau_j)$  l'ensemble des tâches prédécesseurs de  $\tau_j$  et  $k_{ij} = \lceil \frac{T_j}{T_i} \rceil$  le nombre de données que doit produire  $\tau_i \in pred(\tau_j)$  pour  $\tau_j$ ,  $k_{ij}$  correspond aussi au nombre de fois que  $\tau_i$  doit s'exécuter avant le début d'exécution de  $\tau_j$ .

**Lemme 6.1** *La date de début d'exécution au plus tôt de la première instance de la tâche  $\tau_i$  sur le processeur  $p_k$  est donnée par :*

$$r_j^{(1,k)} = \max(r_j^1, \max(r_i^{(1,l)} + (k_{ij} - 1) * T_i + C_i + \text{com}_{lk})_{\tau_i \in \text{pred}(\tau_j)}) \quad (6.1)$$

$\text{com}_{lk}$  est le coût de communication entre le processeur  $p_l$  où est allouée la tâche  $\tau_i \in \text{pred}(\tau_j)$  et le processeur  $p_k$ . Si  $p_l = p_k$  alors  $\text{com}_{lk} = 0$ .

**Preuve**

La tâche  $\tau_j$  activée à la date  $r_j^1$  doit attendre que chacun des ses prédécesseurs  $\tau_i$  s'exécute  $k_{ij}$  fois afin de lui transférer  $k_{ij}$  données.  $\tau_i \in \text{pred}(\tau_j)$  commence son exécution au plus tôt à la date  $r_i^{(1,l)}$  alors  $\tau_i$  finira de produire les  $k_{ij}$  premières données au plus tôt à la date  $r_i^{(1,l)} + (k_{ij} - 1) * T_i + C_i$ . Donc les  $k_{ij}$  premières données produites par  $\tau_i$  seront disponibles au plus tôt à la date  $r_i^{(1,l)} + (k_{ij} - 1) * T_i + C_i + \text{com}_{lk}$  car il faut prendre en compte le temps de transfert de la dernière donnée produite du processeur  $p_l$  au processeur  $p_k$ . D'où la date de début d'exécution au plus tôt de  $\tau_j$  est donnée par la relation 6.1. ■

**Lemme 6.2** *Soit la tâche  $\tau_j$  sur le processeur  $k$ . L'échéance de la tâche  $\tau_j$  relative à la date  $r_j^{(1,k)}$  est donnée par :*

$$D_j^k = D_j - (r_j^{(1,k)} - r_j^1) \quad (6.2)$$

**Preuve**

La tâche  $\tau_j$  est activée à la date  $r_j^1$  donc elle doit finir son exécution au plus tard à la date  $r_j^1 + D_j$ . Donc l'échéance de  $\tau_j$  relative à la date  $r_j^{(1,k)}$  est égale à  $(r_j^1 + D_j) - r_j^{(1,k)} = D_j - (r_j^{(1,k)} - r_j^1)$ . D'où la relation 6.2. ■

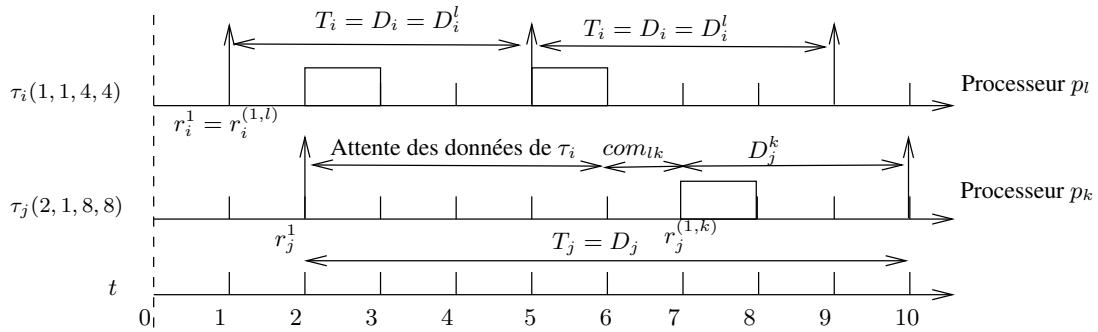
Si la tâche  $\tau_j$  n'a pas de prédécesseur alors  $r_j^{(1,k)} = r_j^1$  et  $D_j^k = D_j$  quel que soit le processeur  $k$  sur lequel  $\tau_j$  est allouée.  $r_j^{(1,k)}$  et  $D_j^k$  sont illustrées par la figure 6.2.

**Théorème 6.1** *Soit  $\tau_j$  une tâche allouée à un processeur  $p_k$ . Si  $\tau_j$  est ordonnançable sur  $p_k$  alors elle doit vérifier nécessairement la condition donnée à la relation 6.3.*

$$C_j \leq D_j^k \quad (6.3)$$

**Preuve**

Supposons que la condition donnée à la relation 6.3 n'est pas vérifiée donc on a  $C_j > D_j^k$ . D'après les lemmes 6.1 et 6.2, la tâche  $\tau_j$  ne peut pas démarrer

FIGURE 6.2 – Illustration de  $r_j^{(1,k)}$  et  $D_j^k$ 

l'exécution de sa première instance avant la date  $r_j^{(1,k)}$  avec  $D_j^k$  l'échéance de  $\tau_j$  relative à la date  $r_j^{(1,k)}$ . Donc la tâche  $\tau_j$  doit terminer l'exécution de sa première instance au plus tard à la date  $r_j^{(1,k)} + D_j^k$ . Puisque  $\tau_j$  ne peut commencer son exécution avant  $r_j^{(1,k)}$  donc  $\tau_j$  terminera au plus tôt l'exécution de sa première instance à la date  $r_j^{(1,k)} + C_j$ . Et comme nous  $C_j > D_j^k$  alors  $r_j^{(1,k)} + C_j > r_j^{(1,k)} + D_j^k$  et  $\tau_j$  dépassera son échéance dans sa toute première instance.

Donc si  $\tau_j$  est ordonnançable sur  $p_k$  alors elle doit vérifier la condition donnée à la relation 6.3. ■

Durant l'allocation des tâches nous utiliserons la condition 6.3 pour allouer les tâches aux processeurs. C'est à dire qu'une tâche ne peut être allouée à un processeur que si la condition 6.3 est vérifiée sur ce processeur.

**Remarque 6.4.1** *La condition 6.3 est une condition nécessaire d'ordonnançabilité, une tâche qui est allouée à un processeur n'est que potentiellement ordonnançable. Mais cette condition permet de prévoir lors de l'allocation des tâches les coûts de transfert de données. Ceci permet d'augmenter les chances des tâches d'être ordonnançables lors de l'étape de l'analyse d'ordonnançabilité et d'ordonnement.*

## 6.4.2 Fonction de coût

Durant l'allocation des tâches nous allons maximiser la fonction de coût correspondant à la marge d'exécution des tâches, donnée par la définition 6.4.1. c'est-à-dire que si une tâche peut être allouée à plusieurs processeurs, nous choisirons le processeur qui lui donne la plus grande marge d'exécution. Ce choix de maximiser la marge d'exécution permet de prévoir lors de l'allocation les éventuels coûts

de préemptions des tâches. Il permet aussi de minimiser le makespan des tâches (voir définition 5.1) car en maximisant la marge d'exécution des tâches on réduit leur temps de réponse.

**Définition 6.4.1** *La fonction de coût de la tâche  $\tau_i$  sur le processeur  $p_k$  est définie par la marge d'exécution de cette tâche sur sa première instance. Cette marge est donnée par :*

$$M_i^k = \begin{cases} (r_i^1 + D_i) - (r_i^{(1,k)} + C_i) & \text{si } \text{pred}(\tau_i) \neq \{\emptyset\} \text{ sinon} \\ D_i - (\sum_{(\tau_j \in \Gamma^k)} C_j + C_i) & \end{cases} \quad (6.4)$$

avec  $\Gamma^k$  l'ensemble des tâches déjà allouées au processeur  $p_k$  qui sont plus prioritaires que  $\tau_i$ .

La marge d'exécution d'une tâche sur une instance correspond à la durée entre la date de fin d'exécution de cette tâche et son échéance absolue [AH98]. Donc plus tôt une tâche termine son exécution plus sa marge d'exécution est importante. La marge d'exécution d'une tâche  $\tau_i$  varie en fonction du processeur sur lequel  $\tau_i$  est allouée. Ainsi si une tâche est allouée sur le même processeur que ses prédécesseurs sa marge d'exécution est plus importante puisque les coûts de transferts de données sont nuls. Si une tâche n'a pas de prédécesseur, sa marge d'exécution sur un processeur est déterminée en fonction des tâches qui sont déjà allouées sur ce processeur et qui sont plus prioritaires qu'elle.

La figure 6.3 donne une illustration de la marge d'exécution d'une tâche.

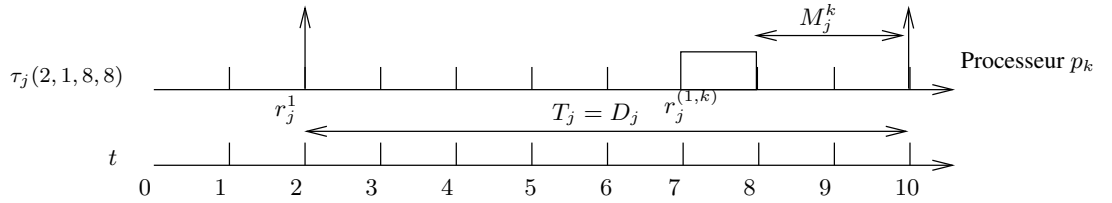


FIGURE 6.3 – Illustration de la marge d'exécution de  $\tau_j$

### 6.4.3 Heuristique d'allocation

Notre heuristique d'allocation donnée dans l'algorithme 7 prend en entrée un ensemble  $\Gamma_n$  composé de  $n$  tâches dépendantes représenté par un graphe de dépendances de tâches  $G_n$  et un ensemble  $\Pi_m$  de  $m$  processeurs identiques représenté

par un graphe de processeurs  $P_n$ . Si l'allocation réussit, l'heuristique fournit en sortie  $m$  sous-ensembles distincts de l'ensemble  $\Gamma_n$  et chaque sous-ensemble noté  $\Gamma_{n_l}$  avec  $1 \leq l \leq m$  composé de  $n_l$  tâches est alloué au processeur  $p_l$ . Ce résultat est appelé une solution de l'allocation des tâches de  $\Gamma_n$  au processeur de  $\Pi_m$  et on le note par  $S$ . C'est une heuristique de type liste, on initialise la liste des tâches candidates  $W$  à l'ensemble des tâches sans prédécesseurs dans le graphe  $G_n$ . À chaque étape de l'allocation, la tâche  $\tau_i$  la plus prioritaire est sélectionnée dans  $W$  pour être allouée à son meilleur processeur selon la fonction de coût définie à la section 6.4.2. Pour cela on parcourt l'ensemble des  $m$  processeurs pour vérifier si  $\tau_i$  vérifie la condition 6.3. Si c'est le cas on calcule la marge d'exécution de cette tâche sur ce processeur. Après avoir parcouru tous les processeurs, parmi les processeurs sur lesquels la tâche sélectionnée  $\tau_i$  vérifie la condition 6.3 on alloue  $\tau_i$  au processeur  $p_j$  qui lui donne la plus grande marge d'exécution et cette allocation est définitive, c'est-à-dire qu'elle ne sera pas remise en cause. Une fois que la tâche sélectionnée  $\tau_i$  est allouée à un processeur, la liste des tâches candidate  $W$  est mis à jour par suppression de  $\tau_i$  et par ajout des successeurs de  $\tau_i$  qui n'ont pas de prédécesseur dans  $W$ . Si on arrive à allouer toutes les tâches de  $\Gamma_n$  aux processeurs de  $\Pi_m$  alors l'allocation a réussi et on a en sortie l'ensemble des processeurs  $\Pi_m$  et sur chaque processeurs  $p_j$  les tâches allouées sur ce processeur.

La complexité au pire cas de cette heuristique d'allocation est  $O(n.m)$ .

## 6.5 Analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur

Après avoir alloué les tâches aux différents processeurs on procède à l'analyse d'ordonnançabilité des tâches sur ces processeurs. Puisque nous appliquons la stratégie d'ordonnancement par partitionnement, chaque processeur  $p_l$  a son propre ordonnanceur, donc il faut faire l'analyse d'ordonnançabilité pour chaque processeur afin de garantir l'ordonnançabilité de l'ensemble des tâches. Pour cela nous allons étendre l'analyse d'ordonnançabilité monoprocesseur présentée au chapitre précédent pour prendre en compte les coûts de communication inter-processeurs afin de pouvoir l'appliquer sur chaque processeur.

Dans la suite de cette section on détaille le principe des communications inter-processeurs, l'analyse d'ordonnançabilité des tâches allouées à un processeur qui tient compte de ces communications inter-processeurs, la condition d'ordonnançabilité multiprocesseur et l'algorithme d'analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur.

**Algorithme 7** Heuristique d'allocation

- 
- 1: Initialiser la liste des tâches candidates  $W$  à l'ensemble des tâches sans prédécesseurs dans  $G_n$
  - 2:  $arrêt \leftarrow faux$
  - 3: **tant que** ( $W \neq \{\emptyset\}$ ) **et** ( $arrêt = faux$ ) **faire**
  - 4:   Sélectionner la tâche la plus prioritaire dans  $W$  notée  $\tau_i$
  - 5:   **pour**  $k = 1$  à  $m$  **faire**
  - 6:     Calculer  $D_i^k$
  - 7:     **si** ( $C_i \leq D_i^k$ ) **alors**
  - 8:       Calculer la marge d'exécution  $M_i^k$  de la tâche  $\tau_i$  sur le processeur  $p_k$
  - 9:     **fin si**
  - 10:   **fin pour**
  - 11:   **si** il existe au moins un processeur sur lequel ( $C_i \leq D_i^k$ ) **alors**
  - 12:     Allouer  $\tau_i$  au processeur  $p_k$  qui maximise  $M_i^k$
  - 13:   **sinon**
  - 14:      $arrêt \leftarrow vrai$
  - 15:   **fin si**
  - 16:   Supprimer  $\tau_i$  de l'ensemble  $W$
  - 17:   Ajouter dans  $W$  toutes les successeurs de  $\tau_i$  qui n'ont pas de prédécesseurs dans  $W$
  - 18: **fin tant que**
  - 19: **si**  $W = \{\emptyset\}$  **alors**
  - 20:   L'allocation a réussi et on a en sortie  $m$  sous-ensemble distincts de  $\Gamma_n$  et chaque sous-ensemble  $\Gamma_{n_l}$  (avec  $1 \leq l \leq m$ ) composé de  $n_l$  tâches est alloué au processeur  $p_l$ .
  - 21: **sinon**
  - 22:   L'allocation n'a pas réussie
  - 23: **fin si**
- 

**6.5.1 Communication inter-processeurs**

L'allocation des tâches aux processeurs peut entraîner des transferts de données entre des tâches allouées à des processeurs différents, dans ce cas on parle de communications inter-processeurs. On les appellera par la suite communications. Par exemple soit le couple de tâches  $(\tau_i, \tau_j)$  tel que  $\tau_i$  est la tâche productrice de données allouée au processeur  $p_l$  et  $\tau_j$  est la tâche consommatrice de données allouée au processeur  $p_k$ . Le transfert d'une donnée produite par  $\tau_i$ , du processeur  $p_l$  au processeur  $p_k$ , entraîne une communication entre les processeurs  $p_l$  et  $p_k$ . On suppose que sur le processeur  $p_l$ , si la tâche  $\tau_i$  produit à la date  $t$  une donnée, celle-ci sera au plus tard disponible pour la tâche  $\tau_j$ , qui est allouée à  $p_k$ ,



à la date  $t + com_{lk}$ .  $com_{lk}$  représente le pire temps de transfert d'une donnée, produite par une tâche, du processeur  $p_l$  au processeur  $p_k$ . À la date  $t + com_{lk}$ , la tâche  $\tau_j$  peut consommer la donnée produite à  $t$  par la tâche  $\tau_i$ . Ainsi nous n'avons pas besoin de synchroniser l'exécution des tâches sur les processeurs  $p_l$  et  $p_k$  puisque la tâche consommatrice  $\tau_j$  connaît exactement la date à laquelle elle peut consommer la donnée de  $\tau_i$  car, tous les processeurs ont la même horloge et donc la même origine des temps. La communication entre ces deux processeurs est exécutée sur ce qu'on a appelé un processeur de communication noté par  $pcom = (COM_l, M, COM_k) = (COM_k, M, COM_l)$  ( $COM_l$  est le communicateur de  $p_l$ ,  $M$  le médium de communication entre  $p_l$  et  $p_k$ , et  $COM_k$  est le communicateur de  $p_k$ ). Une communication est formée d'un *send* suivi d'un *receive* dans le cas d'un médium de communication par passage de messages. Une communication est formée d'un *write* suivi d'un *read* dans le cas d'un médium de communication par mémoire partagée. Les processeurs de communication et les processeurs de calculs ont tous la même base de temps. Les figures 6.4 et 6.5 illustrent respectivement un processeur de communication et une communication entre deux processeurs.

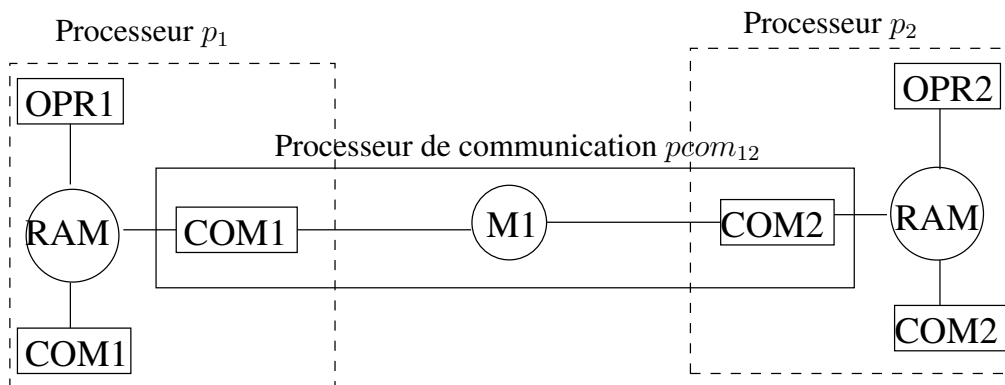


FIGURE 6.4 – Illustration d'un processeur de communication

On suppose que les communications exécutées sur les processeurs de communication sont non préemptibles. C'est-à-dire que plusieurs communications ne peuvent pas avoir lieu simultanément sur un même processeur de communication. Donc si lors de l'analyse d'ordonnançabilité plusieurs communications doivent s'exécuter dans le même intervalle de temps notée  $com_{lk}$  plus haut, on les ordonne en fonction d'une priorité. Celle-ci est égale à la priorité de la tâche recevant les données par cette communication.

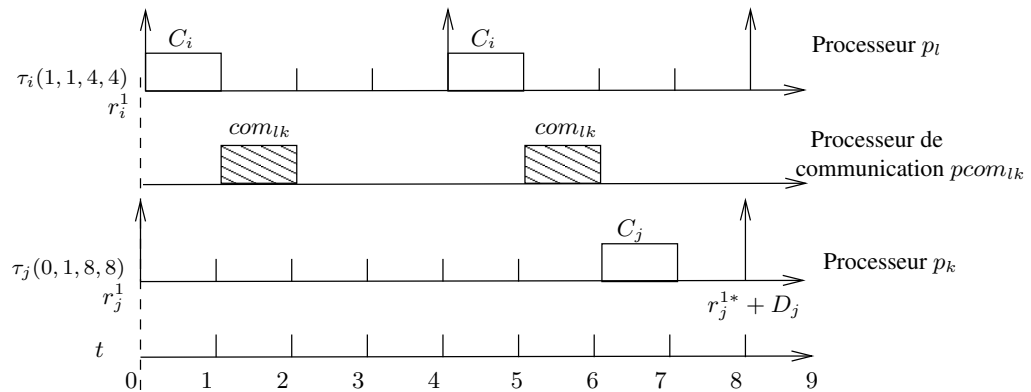


FIGURE 6.5 – Illustration d'une communication entre deux processeurs

### 6.5.2 Analyse d'ordonnançabilité des tâches allouées à un processeur

L'analyse d'ordonnançabilité des tâches allouées à un processeur  $p_l$  est réalisée selon le même principe que celle présentée à la section 5.5 du chapitre précédent. En effet sur un processeur  $p_l$ , on part de la plus petite des dates de première activation des tâches allouées à ce processeur que l'on note  $r_{min}^l$ . Ensuite on appelle notre ordonnanceur hors ligne à cette date qui sélectionne la tâche à exécuter. Puis en utilisant une condition d'ordonnançabilité nécessaire et suffisante on vérifie si cette tâche sélectionnée à  $r_{min}^l$  ainsi que toutes les autres tâches, sont ordonnançables à cette date. Cette condition d'ordonnançabilité utilise la durée restant à exécuter pour chaque tâche et l'échéance de chaque tâche relative à la date  $r_{min}^l$ . La durée restant à exécuter prend en compte le coût exact de la préemption. Si toutes les tâches sont ordonnançables à la date  $r_{min}^l$ , on détermine la prochaine date d'appel de notre ordonnanceur. Sinon l'ensemble des tâches allouées à  $p_l$  n'est pas ordonnançable. La prochaine date d'appel de l'ordonnanceur peut être une date d'activation, une date de fin d'exécution d'une tâche mais aussi une date de réception de données. Au prochain appel de l'ordonnanceur, on répète le même traitement jusqu'à la fin de l'intervalle d'étude  $I_n$  présenté à la section 5.2. Il faut noter que la sélection de la tâche à exécuter s'effectue en tenant compte des coûts de communication, c'est-à-dire que la tâche sélectionnée doit nécessairement recevoir au plus tard à  $r_{min}^l$  toutes les données produites par ses prédécesseurs. Lorsqu'on arrive à la fin de l'intervalle  $I_n$ , si l'ensemble des tâches allouées à  $p_l$  est ordonnançable, le résultat de l'ordonnancement sur  $p_l$  est donné par la table d'ordonnancement  $T^l$ . Cette table donne l'ordre total d'exécution des tâches sous la forme de leur date de début et de fin d'exécution dans l'intervalle

d'étude.

Dans cette section, on détaille pour un processeur  $p_l$  la sélection de la tâche à exécuter en tenant compte des coût de communication, le calcul de la durée restant à exécuter de chaque tâche, le calcul de l'échéance de chaque tâche relative à la date d'appel de l'ordonnanceur, la condition d'ordonnançabilité d'une tâche et enfin le calcul de la prochaine date d'appel de l'ordonnanceur qui peut être aussi une date de réception de données. Ces calculs sont faits chaque fois que l'ordonnanceur du processeur  $p_l$  est appelé.

### Sélection de la tâche à exécuter sur $p_l$

Dans la mise à jour de la liste des tâches prêtes du processeur  $p_l$ , il faut tenir compte des coûts de communication. Lorsqu'une tâche, allouée à un processeur différent de  $p_l$ , produit une donnée à la date  $t$ , cette donnée n'est pas immédiatement disponible sur le processeur  $p_l$  car le transfert de la donnée produite par l'autre processeur prend du temps. Le théorème 6.2 ci-dessous donne les conditions que doit vérifier une tâche sur  $p_l$  pour être prête à l'exécution.

**Théorème 6.2** Soit  $\Gamma_{n_l}$  l'ensemble des tâches allouées au processeur  $p_l$ . Une tâche  $\tau_i \in \Gamma_{n_l}$  est prête à l'exécution à la date  $t$  si et seulement si :

1.  $t \geq r_i^1$ ,
  2.  $(r^{l-}(t) + c_i(r^{l-}(t)) > t) \vee ((c_i(r^{l-}(t)) > 0) \wedge (\phi(r^{l-}(t)) \neq \tau_i)) \vee ((t - r_i^1) \bmod T_i = 0)$ ,
  3.  $\forall \tau_p \in \text{pred}(\tau_i), ((d_{p_i}(r^{k-}(t)) \geq k_{p_i}) \wedge (t - r^{k-}(t) \geq \text{com}_{kl}))$ ,
  4.  $\forall \tau_s \in \text{succ}(\tau_i), d_{i_s}(t) < k_{i_s}$ .
- Avec  $\tau_p$  allouée au processeur  $p_k$  avec  $r^{l-}(t)$  est la dernière date d'appel de l'ordonnanceur du processeur  $p_l$ .

### Preuve

Par rapport au théorème 5.1, c'est uniquement la condition 3) qui change. Cette condition garantit que la tâche  $\tau_i$  reçoit toutes données nécessaires avant de commencer son exécution. Supposons que la condition 3 est fausse, c'est-à-dire que  $\exists \tau_p \in \text{pred}(\tau_i) / (d_{p_i}(r^{k-}(t)) - 1 < k_{p_i}) \vee (t - r^{k-}(t) < \text{com}_{kl})$ . Si  $(d_{p_i}(r^{k-}(t)) - 1 < k_{p_i}) \vee (t - r^{k-}(t) < \text{com}_{kl})$  alors  $(d_{p_i}(r^{k-}(t)) \leq k_{p_i} + 2)$ , qui veut dire que pour que la tâche  $\tau_i$  puisse être prête à la date  $t$  il faut que la tâche  $\tau_p$  produise entre  $r^{k-}(t)$  et  $t$  au minimum deux données. Or ceci n'est pas possible car entre ces date,  $\tau_p$  ne peut s'exécuter au maximum une seule fois donc ne peut pas produire deux données. Donc la tâche  $\tau_i$  ne peut pas être prête à l'exécution car elle n'a pas encore reçu toutes les données de son prédécesseur  $\tau_p$ . De même que si  $(t - r^{k-}(t) < \text{com}_{kl})$  alors la dernière donnée produite à la date  $r^{k-}(t)$  ne pas

être reçu à  $t$ . Donc la tâche  $\tau_i$  ne peut pas être prête à l'exécution car elle n'a pas encore reçu toutes les données de son prédécesseur  $\tau_p$ .

Supposons que la conditions 3) est vérifiée, c'est-à-dire que  $\forall \tau_p \in \text{pred}(\tau_i)$ ,  $((d_{p_i}(r^{k^-}(t)) \geq k_{p_i}) \wedge (t - r^{k^-}(t) \geq \text{com}_{kl}))$  alors la  $k_{p_i}^{\text{ème}}$  donnée produite par  $\tau_p \in \text{pred}(\tau_i)$  et non encore consommée par  $\tau_j$  a été produite avant ou à la date  $r^{k^-}(t)$ . Et puisque  $(t - r^{k^-}(t) \geq \text{com}_{kl})$  donc cette donnée est reçue sur  $p_l$  avant ou à la date  $t$  car  $r^{k^-}(t) + \text{com}_{kl} \leq t$ . Donc à la date  $t$ , la tâche  $\tau_j$  a reçu toutes les données de ses prédécesseurs. ■

**Définition 6.5.1** On définit par  $\Gamma_r^l(t)$  l'ensemble des tâches prêtes à l'exécution sur le processeur  $p_l$  à la date  $t$ .  $\Gamma_r^l(t)$  est donné par :  $\Gamma_r^l(t) = \{\tau_i \in \Gamma_{n_l}/\tau_i \text{ est prête à l'exécution à } t \text{ selon le théorème 6.2.}$

**Définition 6.5.2** On note par  $\phi^l(t)$  la tâche sélectionnée pour s'exécuter sur le processeur  $p_l$  à la date  $t$ .  $\phi^l(t)$  est donnée par :

$$\phi^l(t) = \tau_i/p_i(t) = \max\{p_j(t)\}_{\tau_j \in \Gamma_r^l(t)} \quad (6.5)$$

avec  $p_i(t)$  déterminée par la relation 5.3.

### Durée restant à exécuter avec prise en compte du coût exact de la préemption sur $p_l$

Dans l'analyse d'ordonnançabilité sur  $p_l$ , le coût de la préemption d'une tâche est pris en compte dans le calcul de la durée restant à exécuter par cette tâche comme à la section 5.5.2.

$\forall t \in I^l(t)/t \geq r_i^1$ ,  $c_i(t)$  est donnée par :

$$c_i(t) = \begin{cases} C_i & \text{si } (\frac{t-r_i^1}{T_i}) \in \mathbb{N} \text{ sinon} \\ c_i(r^{l^-}(t)) & \text{si } (\phi^l(r^{l^-}(t)) \neq \tau_i) \text{ sinon} \\ r^-(t) + c_i(r^{l^-}(t)) - t & \text{si } (\phi^l(t) = \tau_i) \vee \\ & ((\phi^l(t) \neq \tau_i) \wedge (r^{l^-}(t) + c_i(r^{l^-}(t)) = t)) \text{ sinon} \\ (r^{l^-}(t) + c_i(r^{l^-}(t)) - t) + \alpha & \end{cases}$$

### Échéance relative aux dates d'appel sur $p_l$

À chaque appel de l'ordonnanceur, l'échéance relative d'une tâche par rapport à cette date d'appel est déterminée selon le même principe que dans la section 5.5.3.

$\forall t \in I^l(t) \geq r_i^1$ ,  $d_i(t)$  est donnée par :

$$d_i(t) = \begin{cases} D_i & \text{si } (\frac{t-r_i^1}{T_i}) \in \mathbb{N} \text{ sinon} \\ r^-(t) + d_i(r^{l-}(t)) - t & \text{si } r^{l-}(t) + d_i(r^{l-}(t)) > t \text{ sinon} \\ 0 & \end{cases}$$

### Condition d'ordonnançabilité sur $p_l$

Dans cette section on présente la condition d'ordonnançabilité d'une tâche  $\tau_i$  allouée au processeur  $p_l$ .

**Théorème 6.5.1** *Soit  $t$  une date d'appel de l'ordonnanceur de  $p_l$ . Une tâche  $\tau_i \in \Gamma_{n_l}$  est ordonnançable à  $t$  avec prise en compte du exact de la préemption si et seulement si :*

$$\begin{aligned} & (c_i(t) \leq d_i(t)) \wedge \\ & ((t \leq r_i^1) \vee (c_i(r^{l-}(t)) = 0)) \vee \\ & (\phi(r^{l-}(t)) = \tau_i) \vee ((t - r_i^1) \bmod T_i \neq 0) \end{aligned} \quad (6.6)$$

#### Preuve

La preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème 5.5.1. ■

**Corollaire 6.5.1** *Une tâche  $\tau_i$  allouée au processeur  $p_l$  est ordonnançable avec prise en compte du coût exact de la préemption et de communication inter-processeur si et seulement si elle est ordonnançable lors de chaque appel de l'ordonnanceur de  $p_l$ .*

#### Preuve

La preuve de ce corollaire est similaire à celui du corollaire 5.5.1. ■

**Corollaire 6.5.2** *L'ensemble des tâches  $\Gamma_{n_l}$  alloué à  $p_l$  avec des contraintes de dépendances de données est ordonnançable avec la prise en compte du coût exact de la préemption si et seulement si  $\forall \tau_i \in \Gamma_{n_l}$ ,  $\tau_i$  est ordonnançable selon le théorème 6.5.1.*

#### Preuve

La preuve de ce corollaire est similaire à celui du corollaire 5.5.2. ■

### Prochaine date d'appel de l'ordonnanceur du processeur $p_l$

L'ordonnanceur du processeur  $p_l$  est appelé aux dates d'activation et de fin d'exécution des tâches, et aux dates de réception de données. On note par  $F^l$  l'ensemble des dates d'activation, incluses dans  $I_n$ , des tâches allouées au processeur  $p_l$ . On note aussi par  $G^l$  l'ensemble des dates d'activation et de fin d'exécution des tâches sur  $p_l$ , et des dates de réception de données. On suppose que les éléments de  $F^l$  et ceux de  $G^l$  sont dans l'ordre croissant des dates. Avant l'exécution des tâches on initialise  $G^l$  à  $F^l$ . Nous allons mettre à jour  $G^l$  en ajoutant les dates de fin d'exécution des tâches et les dates de réception de données au fur et à mesure de l'analyse d'ordonnabilité. Pour cela en partant de la plus petite des dates de première activation des tâches sur  $p_l$  qu'on note par  $r_{min}^l$ , on détermine la prochaine date d'appel de l'ordonnanceur de  $p_l$  qu'on note par  $r^{l+}$ . Si la tâche sélectionnée à  $r_{min}^l$  termine son exécution avant la prochaine date d'activation, quelle que soit la tâche, alors on note par  $f$  la date de fin d'exécution de la tâche sélectionnée. Sinon, on note par  $f$  la prochaine date d'activation. Ensuite on détermine l'ensemble  $H$  des dates de réception de données qui sont envoyées par les tâches allouées aux processeurs qui communiquent avec  $p_l$ . C'est-à-dire que, si une tâche  $\tau_i$  allouée à un processeur  $p_k$  produit à la date  $r_{min}^l$  une donnée destinée à une tâche  $\tau_j$  allouée au processeur  $p_l$ , cette donnée sera reçue sur  $p_l$  à la date  $r_{min}^l + com_{kl}$ , avec  $com_{kl}$  le pire temps de transfert d'une donnée, produite par  $\tau_i$ , du processeur  $p_k$  au processeur  $p_l$ . La date  $t + com_{kl}$  est une date de réception de donnée pour la tâche  $\tau_j$  à laquelle l'ordonnanceur est appelé. Il peut y avoir d'autres tâches que  $\tau_i$ , allouées à d'autres processeurs, qui envoient des données à  $\tau_j$ . Ainsi  $\tau_j$  peut recevoir les données de ses prédécesseurs à des dates différentes. La prochaine date d'appel de l'ordonnanceur  $r^{l+}$  est alors la plus petite date de l'ensemble  $\{f\} \cup H$ . On fait alors la mise à jour  $G^l = G^l \cup \{f\} \cup H$ . À la date  $r^{l+}$  on effectue le même traitement jusqu'à la fin de l'intervalle d'étude  $I_n$ .

**Définition 6.5.3** Soit  $t$  une date d'appel de l'ordonnanceur du processeur  $p_l$  qui ne peut être qu'une date d'activation, de fin d'exécution d'une tâche ou une date de réception de données. La prochaine date d'appel de l'ordonnanceur après  $t$  est donnée par la relation 6.7.

$$r^{l+}(t) = \min(t' \in \{f\} \cup H) \quad (6.7)$$

$f$  et  $H$  sont respectivement déterminés par les relations 6.8 et 6.9.

$$f = \begin{cases} t + c_k(t) & \text{si } (t + c_k(t)) < a(t) \text{ sinon} \\ a(t) & \end{cases} \quad (6.8)$$

$$H = \begin{cases} \{\emptyset\} & \text{si } t = r_{min} \text{ sinon} \\ \{t + com_{kl}\}_{((\tau_i \in pred(\tau_j)) \wedge ((\phi(r^{k-}(t)) = \tau_i) \wedge (r^{k-}(t) + c_i(r^{k-}(t)) = t)))} \end{cases} \quad (6.9)$$

avec  $\tau_j$  allouée à  $p_l$ ,  $\tau_i \in pred(\tau_j)$  allouée au processeur  $p_k$  différent de  $p_l$  et les dates  $r^{l-}(t)$  et  $r^{k-}(t)$  sont respectivement les dernières dates d'appel des ordonnanceurs de  $p_l$  et de  $p_k$ .

### 6.5.3 Condition d'ordonnançabilité multiprocesseur

La condition d'ordonnançabilité multiprocesseur est donnée par le théorème 6.5.2.

**Théorème 6.5.2** *Soit un ensemble  $\Gamma_n$  de tâches dépendantes et un ensemble  $\Pi_m$  de processeurs identiques.*

*S'il existe, selon l'heuristique d'allocation donnée par l'algorithme 7, au moins une solution d'allocation  $S$  de l'ensemble des tâches  $\Gamma_n$  aux différents processeurs de  $\Pi_m$  et que chaque sous-ensemble  $\Gamma_{n_l}$  (avec  $1 \leq l \leq m$ ) de  $\Gamma_n$  alloué au processeur  $p_l$  est ordonnançable sur ce processeur alors l'ensemble  $\Gamma_n$  est ordonnançable sur  $\Pi_m$ .*

#### Preuve

S'il existe, selon l'heuristique d'allocation donnée par l'algorithme 7, au moins une solution d'allocation  $S$  de l'ensemble des tâches  $\Gamma_n$  aux différents processeurs de  $\Pi_m$  et que chaque sous-ensemble  $\Gamma_{n_l}$  (avec  $1 \leq l \leq m$ ) de  $\Gamma_n$  alloué au processeur  $p_l$  est ordonnançable sur ce processeur alors chaque tâche de  $\Gamma_n$  respecte son échéance donc l'ensemble  $\Gamma_n$  est ordonnançable. ■

### 6.5.4 Algorithme d'analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur

L'algorithme 8 donne l'analyse d'ordonnançabilité de l'ensemble  $\Gamma_n$  des tâches dépendantes sur l'architecture multiprocesseur  $\Pi_m$ .

Avec l'algorithme 8 on parcourt l'intervalle d'étude  $I_n$  en se limitant aux dates d'appel de l'ordonnanceur des différents processeurs. Si l'ordonnanceur d'un processeur  $p_l$  est appelé à une date  $t$ , on vérifie s'il existe une tâche non ordonnançable sur ce processeur. Dès qu'il existe une tâche non ordonnançable sur un processeur  $p_l$  alors l'ensemble des tâches  $\Gamma_{n_l}$  sur ce processeur n'est pas ordonnançable, donc  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable. Sinon si chaque ensemble de tâches  $\Gamma_{n_l}$  alloué à chaque processeur  $p_l$  est ordonnançable alors  $\Gamma_n$  est ordonnançable. Si

---

**Algorithme 8** Analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur
 

---

```

1:  $t = r_{min}$ 
2:  $ordonnançable \leftarrow vrai$ 
3: Initialiser suivant à la prochaine date d'activation après  $t$ 
4: tant que  $(t < (tc + H_n)) \wedge (ordonnançable = vrai)$  faire
5:   % Cette boucle permet de parcourir tous les processeurs afin de vérifier
   l'ordonnançabilité des tâches sur chaque processeur
6:   pour  $l = 1$  to  $m$  faire
7:     % On vérifie si l'ordonnanceur du processeur  $p_l$  est appelé à  $t$ 
8:     si  $(t \in G^l)$  alors
9:       Calculer  $\phi^l(t)$ 
10:       $i \leftarrow 1$ 
11:      % On vérifie si les  $n_l$  tâches allouées à  $p_l$  sont ordonnançables à  $t$ .
12:      tant que  $(i \leq n_l) \wedge (ordonnançable = vrai)$  faire
13:        si  $(t \geq r_i^1)$  alors
14:          Calculer  $c_i(t)$ 
15:          Calculer  $d_i(t)$ 
16:          si  $((c_i(t) > d_i(t)) \vee$ 
            $((t > r_i^1) \wedge (c_i(r^{l-}(t)) > 0) \wedge (\phi(r^{l-}(t)) \neq \tau_i) \wedge ((t - r_i^1) \bmod T_i =$ 
            $0))$  alors
17:             $ordonnançable \leftarrow faux$ 
18:          fin si
19:        fin si
20:         $i \leftarrow i + 1$ 
21:      fin tant que
22:       $suivant \leftarrow \text{minimum}(suivant, r^{l+}(t))$ 
23:       $G^l = G^l \cup \{f\} \cup H$ 
24:    fin si
25:  fin pour
26:   $t \leftarrow suivant$ 
27: fin tant que

```

---



$\Gamma_n$  est ordonnançable alors une table d'ordonnement est produite pour chaque processeur  $p_l$ .

La complexité au pire cas de cette analyse d'ordonnabilité est de  $O(n.m.l)$ ,  $n$  est le nombre de tâches,  $m$  le nombre de processeurs et  $l$  est la longueur de l'intervalle d'étude  $I_n$ .

## 6.6 Heuristique d'ordonnement multiprocesseur de tâches dépendantes

L'heuristique d'ordonnement multiprocesseur qu'on propose prend en entrée un ensemble de tâches  $\Gamma_n$  et un ensemble d'architecture  $\Pi_m$ . Elle effectue l'allocation en utilisant l'heuristique d'allocation présentée par l'algorithme 7 puis analyse l'ordonnabilité des tâches en utilisant l'algorithme 8. L'algorithme 9 donne les différentes étapes de cette heuristique.

---

### Algorithme 9 Heuristique d'ordonnement multiprocesseur

---

- 1: *ordonnançable*  $\leftarrow$  *vrai*
  - 2: Allouer les tâches de  $\Gamma_n$  aux processeurs de  $\Pi_m$  en utilisant l'algorithme 7
  - 3: **si** il existe une solution d'allocation  $S$  **alors**
  - 4:   Faire l'analyse d'ordonnabilité de cette solution d'allocation  $S$  en utilisant l'algorithme 8
  - 5:   **si** cette solution  $S$  est ordonnançable selon l'algorithme 8 **alors**
  - 6:     L'ensemble  $\Gamma_n$  est ordonnançable et on a en sortie les tables d'ordonnement de chaque processeur
  - 7:   **sinon**
  - 8:     L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable selon notre heuristique d'ordonnement
  - 9:   **fin si**
  - 10: **sinon**
  - 11:   L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable sur  $\Pi_m$  selon notre heuristique d'ordonnement
  - 12: **fin si**
- 

La complexité au pire cas de cette heuristique d'allocation et d'ordonnement est de  $O(n.m + n.m.l) = O((l + 1).n.m) = O(l.n.m)$ ,  $l$  est la longueur de l'intervalle d'étude. Cette complexité est la somme des complexités de l'heuristique d'allocation et de l'analyse d'ordonnabilité.

## 6.7 Application

On considère l'ensemble  $\Gamma_8$  de tâches dépendantes représenté par le graphe de dépendances de tâches  $G_8$  donné par la figure 6.6. Soit  $\Pi_2$  l'ensemble des processeurs sur lequel on veut ordonnancer les tâches dans  $G_8$ .  $\Pi_2$  est représenté par le graphe de processeurs  $P_2$  dans la figure 6.7.

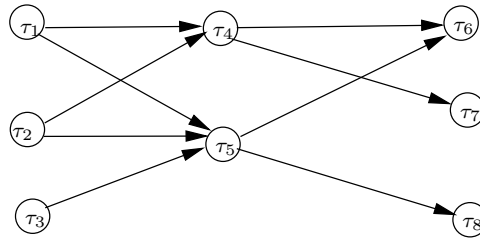


FIGURE 6.6 – Graphe  $G_8$  de dépendances de données

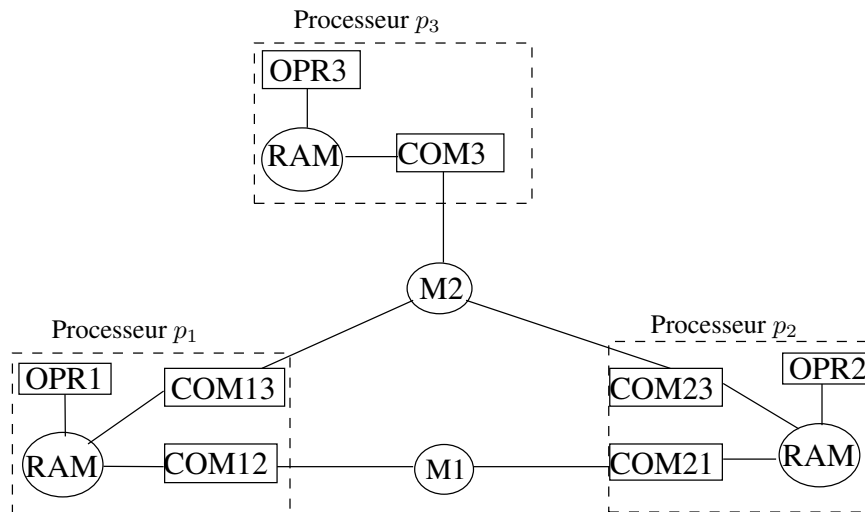


FIGURE 6.7 – Graphe d'architecture de  $P_2$

Les tâches dans  $G_8$  sont définies par :  $\tau_1 = (1, 1, 6, 6)$ ,  $\tau_2 = (1, 2, 12, 12)$ ,  $\tau_3 = (0, 2, 24, 24)$ ,  $\tau_4 = (8, 4, 12, 12)$ ,  $\tau_5 = (2, 1, 6, 6)$ ,  $\tau_6 = (7, 2, 24, 24)$ ,  $\tau_7 = (4, 2, 12, 12)$  et  $\tau_8 = (5, 3, 24, 24)$ . On utilise le choix de priorités basé sur RM, c'est à dire que, la tâche la plus prioritaire est celle qui a la plus petite période. On suppose que le coût d'une préemption est donnée par  $\alpha = 1$  unité de

temps. On suppose aussi que le temps de transfert d'une donnée, du processeur  $p_1$  vers  $p_2$  et réciproquement est fixe,  $com_{12} = com_{21} = 1$  unité de temps.

L'application de notre heuristique d'ordonnement multiprocesseur donnée par l'algorithme 9 implique d'utiliser l'heuristique d'allocation donnée par l'algorithme 7 pour faire d'abord l'allocation des tâches aux processeurs. En suivant les étapes de cette allocation nous obtenons :

- 1: Initialisation de l'ensemble des tâches candidates  $W$  à l'ensemble des tâches de  $G_8$  qui n'ont pas de prédécesseurs. Nous obtenons  $W = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ , les tâches de  $W$  sont rangées dans l'ordre décroissant de leurs priorités.
- 2:  $\tau_1$  est sélectionnée et allouée au processeur  $p_1$ .  $\tau_1$  pourrait aussi bien être allouée à  $p_2$  car les processeurs sont identiques.

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1\} \\ p_2 \leftarrow \{\emptyset\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_2, \tau_4, \tau_3\}$

- 3:  $\tau_2$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  et  $p_2$  nous avons  $r_2^{(1,1)} = r_2^1$  et  $D_2^1 = D_2$  car  $pred(\tau_2) = \{\emptyset\}$ .  $C_2 = 2 \leq D_2^1 = 12$  donc on peut allouer  $\tau_2$  à  $p_1$  ou à  $p_2$ . Le choix de l'allocation est déterminé par la marge d'exécution de  $\tau_2$  calculée sur chaque processeur. Sur  $p_1$ , nous avons  $M_2^1 = (r_2^1 + D_2) - (r_2^{(1,1)} + (C_1 + C_2)) = (1 + 12) - (1 + (1 + 2)) = 13 - 4 = 9$ . Et sur  $p_2$  nous avons  $M_2^2 = (r_2^1 + D_2) - (r_2^{(1,1)} + C_2) = (1 + 12) - (1 + 2) = 13 - 3 = 10$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_2$  est plus grande sur  $p_2$  que sur  $p_1$  d'où  $\tau_2$  est allouée à  $p_2$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_2\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_4, \tau_3\}$ .

- 4:  $\tau_4$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  nous avons  $r_4^{(1,1)} = \max(r_4^1, \max((r_1^{(1,1)} + (k_{14} - 1) * T_1 + C_1), (r_2^{(1,2)} + (k_{24} - 1) * T_2 + C_2 + com_{24}))) = \max(8, \max((1 + (1 * 6) + 1), (1 + 0 + 2 + 1))) = 8$  et  $D_4^1 = D_4 - (r_4^{(1,1)} - r_4^1) = 12 - (8 - 8) = 12$ .  $C_4 \leq D_4^1$  on peut alors calculer  $M_4^1$ . Ce qui donne  $M_4^1 = (r_4^1 + D_4) - (r_4^{(1,1)} + C_4) = (8 + 12) - (8 + 4) = 20 - 12 = 8$ . Sur  $p_2$  nous avons  $r_4^{(1,2)} = \max(r_4^1, \max((r_1^{(1,1)} + (k_{14} - 1) * T_1 + C_1 + com_{14}), (r_2^{(1,2)} + (k_{24} - 1) * T_2 + C_2))) = \max(10, \max((1 + (1 * 6) + 1 + 1), (1 + 0 + 2))) = 9$  et  $D_4^2 = D_4 - (r_4^{(1,2)} - r_4^1) = 12 - (9 - 8) = 12 - 1 = 11$ .  $C_4 \leq D_4^2$  on peut alors calculer  $M_4^2$ . Ce qui donne  $M_4^2 = (r_4^1 + D_4) - (r_4^{(1,2)} + C_4) = 20 - (9 + 4) = 20 - 13 = 7$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_4$  est plus grande sur  $p_1$  que sur  $p_2$  d'où  $\tau_4$  est allouée au processeur  $p_1$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_2\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_3, \tau_6\}$ .

- 5:  $\tau_3$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  et  $p_2$  nous avons  $r_3^{(1,1)} = r_3^{(1,2)} = r_3^1$  et  $D_3^1 = D_3^2 = D_3$  car  $pred(\tau_3) = \{\emptyset\}$ .  $C_3 = 2 \leq D_3^* = 24$  donc on peut allouer  $\tau_3$  à  $p_1$  ou à  $p_2$ . Le choix de l'allocation est déterminé par la marge d'exécution de  $\tau_2$  sur chaque processeur. Sur  $p_1$ , nous avons  $M_3^1 = (r_3^1 + D_3) - (r_3^{(1,1)} + (C_1 + C_4 + C_3)) = (0 + 24) - (0 + (1 + 4 + 2)) = 24 - 7 = 17$ . Et sur  $p_2$  nous avons  $M_3^2 = (r_3^1 + D_3) - (r_3^{(1,2)} + (C_2 + C_3)) = (0 + 24) - (0 + (2 + 2)) = 24 - 4 = 20$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_3$  est plus grande sur  $p_2$  que sur  $p_1$  d'où  $\tau_3$  est allouée à  $p_2$

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_2, \tau_3\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_5, \tau_6\}$ .

- 6:  $\tau_5$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  nous avons  $r_5^{(1,1)} = \max(r_5^1, \max((r_1^{(1,1)} + (k_{15} - 1) * T_1 + C_1), (r_2^{(1,2)} + (k_{25} - 1) * T_2 + C_2 + com_{25}), (r_3^{(1,2)} + (k_{35} - 1) * T_3 + C_3 + com_{35}))) = \max(2, \max((1 + 0 + 1), (1 + 0 + 2 + 1), (0 + 0 + 2 + 1))) = 4$  et  $D_5^1 = (D_5 - (r_5^{(1,1)} - r_5^1)) = 6 - (4 - 1) = 3$ .  $C_5 \leq D_5^1$ , on détermine la marge d'exécution de  $\tau_5$  sur  $p_1$  :  $M_5^1 = (r_5^1 + D_5) - (r_5^{(1,1)} + (C_5)) = (1 + 6) - (4 + 1) = 2$ . Sur  $p_2$  nous avons  $r_5^{(1,2)} = \max(r_5^1, \max((r_1^{(1,1)} + (k_{15} - 1) * T_1 + C_1 + com_{15}), (r_2^{(1,2)} + (k_{25} - 1) * T_2 + C_2), (r_3^{(1,2)} + (k_{35} - 1) * T_3 + C_3))) = \max(1, (1 + 0 + 1 + 1), (1 + 0 + 2), (0 + 0 + 2)) = 3$  et  $D_5^2 = (D_5 - (r_5^{(1,1)} - r_5^1)) = 6 - (3 - 1) = 4$ .  $C_5 \leq D_5^2$ , on détermine la marge d'exécution de  $\tau_5$  sur  $p_2$  :  $M_5^2 = (r_5^1 + D_5) - (r_5^{(1,2)} + (C_5)) = (1 + 6) - (3 + 1) = 3$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_5$  est plus grande sur  $p_2$  que sur  $p_1$  d'où  $\tau_5$  est allouée à  $p_2$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_5, \tau_2, \tau_3\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_7, \tau_6, \tau_8\}$ .

- 7:  $\tau_7$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  nous avons  $r_7^{(1,1)} = \max(r_7^1, (r_4^{(1,1)} + (k_{47} - 1) * T_4 + C_4)) = \max(4, \max((8 + 0 + 4))) = 12$  et  $D_7^1 = (D_7 - (r_7^{(1,1)} - r_7^1)) = 12 - (12 - 4) = 12 - 8 = 4$ .  $C_7 \leq D_7^1$ , on détermine la marge d'exécution de  $\tau_7$  sur  $p_1$  :  $M_7^1 = (r_7^1 + D_7) - (r_7^{(1,1)} + (C_7)) = (4 + 12) - (12 + 2) = 16 - 14 = 2$ . Sur  $p_2$  nous avons  $r_7^{(1,2)} = \max(r_7^1, (r_4^{(1,1)} + (k_{47} - 1) * T_4 + C_4 + com_{47})) = \max(4, (8 + 0 + 4 + 1)) = 13$  et  $D_7^2 = (D_7 - (r_7^{(1,1)} - r_7^1)) = 12 - (13 - 4) = 3$ .  $C_7 \leq D_7^2$ , on détermine la marge d'exécution de  $\tau_7$  sur  $p_2$  :  $M_7^2 = (r_7^1 + D_7) -$

$(r_7^{(1,2)} + (C_7)) = (4+12) - (13+2) = 16 - 15 = 1$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_7$  est plus grande sur  $p_1$  que sur  $p_2$  d'où  $\tau_7$  est allouée à  $p_1$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4, \tau_7\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_5, \tau_2, \tau_3\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_6, \tau_8\}$ .

- 8:  $\tau_6$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  nous avons  $r_6^{(1,1)} = \max(r_6^1, \max((r_4^{(1,1)} + (k_{46} - 1) * T_4 + C_4), (r_5^{(1,2)} + (k_{56} - 1) * T_5 + C_5 + com_{56}))) = \max(7, \max((8 + (12 * 1) + 4), (3 + (1 * 6) + 1 + 1))) = 24$  et  $D_6^1 = D_6 - (r_6^{(1,1)} - r_6^1) = 24 - (24 - 7) = 24 - 17 = 7$ .  $C_6 \leq D_6^1$  on peut alors calculer  $M_6^1$ . Ce qui donne  $M_6^1 = (r_6^1 + D_6) - (r_6^{(1,1)} + C_6) = (7 + 24) - (24 + 2) = 31 - 26 = 5$ . Sur  $p_2$  nous avons  $r_6^{(1,2)} = \max(r_6^1, \max((r_4^{(1,1)} + (k_{46} - 1) * T_4 + C_4 + com_{46}), (r_5^{(1,2)} + (k_{56} - 1) * T_5 + C_5))) = \max(7, \max((8 + (12 * 1) + 4 + 1), (3 + (1 * 6) + 1 + 1))) = 25$  et  $D_6^2 = D_6 - (r_6^{(1,2)} - r_6^1) = 24 - (25 - 7) = 24 - 18 = 6$ .  $C_6 \leq D_6^2$  on peut alors calculer  $M_6^2$ . Ce qui donne  $M_6^2 = (r_6^1 + D_6) - (r_6^{(1,2)} + C_6) = (7 + 24) - (25 + 2) = 31 - 27 = 4$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_6$  est plus grande sur  $p_1$  que sur  $p_2$  d'où  $\tau_6$  est allouée au processeur  $p_1$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4, \tau_7, \tau_6\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_5, \tau_2, \tau_3\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\tau_8\}$ .

- 9:  $\tau_8$  est sélectionnée. Sur  $p_1$  nous avons  $r_8^{(1,1)} = \max(r_8^1, (r_5^{(1,2)} + (k_{58} - 1) * T_5 + C_5 + com_{58})) = \max(5, (3 + (3 * 6) + 2 + 1)) = 24$  et  $D_8^1 = D_8 - (r_8^{(1,1)} - r_8^1) = 24 - (24 - 5) = 24 - 19 = 5$ .  $C_8 \leq D_8^1$  on peut alors calculer  $M_8^1$ . Ce qui donne  $M_8^1 = (r_8^1 + D_8) - (r_8^{(1,1)} + C_8) = (5 + 24) - (24 + 3) = 29 - 27 = 2$ . Sur  $p_2$  nous avons  $r_8^{(1,2)} = \max(r_8^1, (r_5^{(1,1)} + (k_{58} - 1) * T_5 + C_5)) = \max(5, (3 + (3 * 6) + 2)) = 23$  et  $D_8^2 = D_8 - (r_8^{(1,2)} - r_8^1) = 24 - (23 - 5) = 24 - 18 = 6$ .  $C_8 \leq D_8^2$  on peut alors calculer  $M_8^2$ . Ce qui donne  $M_8^2 = (r_8^1 + D_8) - (r_8^{(1,2)} + C_8) = (5 + 24) - (23 + 3) = 29 - 26 = 3$ . Donc la marge d'exécution de  $\tau_8$  est plus grande sur  $p_2$  que sur  $p_1$  d'où  $\tau_8$  est allouée au processeur  $p_2$ .

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4, \tau_7, \tau_6\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_5, \tau_2, \tau_3, \tau_8\} \end{cases}$$

Après mise à jour de  $W$  nous avons  $W = \{\emptyset\}$ .

- 10:  $W = \{\emptyset\}$ , donc toutes les tâches sont allouées et le résultat de l'allocation est :

$$\begin{cases} p_1 \leftarrow \{\tau_1, \tau_4, \tau_7, \tau_6\} \\ p_2 \leftarrow \{\tau_5, \tau_2, \tau_3, \tau_8\} \end{cases}$$

L'allocation des tâches de  $\Gamma_8$  aux processeurs de  $\Pi_2$  a réussi.

Après cette étape d'allocation, nous utilisons l'algorithme 8 pour ordonner les tâches. L'intervalle d'étude de l'ordonnement de  $\Gamma_8$  est donné par  $I_8 = [r_{min} + r_{max} + 2 * H_8]$  avec  $r_{min} = 0, r_{max} = 8, H_8 = ppcm(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8) = 24$ . Donc nous avons  $I_8 = [0, 8 + 2 * 24] = 56$ . Selon l'algorithme 8, le système de tâches  $\Gamma_8$  est ordonnable et les tables d'ordonnement respectives des tâches allouées à  $p_1$  et à  $p_2$  sont données respectivement par les tableaux 6.1 et 6.2. La table d'ordonnement du processeur de communication  $pcom12$  est donnée par le tableau 6.3. Dans cette table d'ordonnement de  $pcom12$ , par exemple,  $com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$  est le transfert d'une donnée produite par  $\tau_1$  sur le processeur  $p_1$  et reçue par  $\tau_5$  sur le processeur  $p_2$ .  $com$  représente la durée qui détermine l'intervalle de temps pour réaliser une communication.

En utilisant ces tables d'ordonnement, on trace le diagramme de Gantt d'ordonnement des tâches donné par la figure 6.8.

Dans cette figure on observe qu'aux dates  $t = 13, 25, 37$  et  $49$ , la tâche  $\tau_7$  est préemptée par  $\tau_1$ . À chacune de ces préemptions on prend en compte le coût de la préemption en ajoutant une unité de temps supplémentaire, correspondant au coût d'une préemption ( $\alpha = 1$ ), sur la durée restant à exécuter par  $\tau_7$ . On observe aussi que chaque tâche reçoit toutes les données de ses prédécesseurs avant de commencer à s'exécuter. Par exemple la tâche  $\tau_6$  attend ses données, produites par les tâches  $\tau_4$  et  $\tau_5$ , de la date 7 à la date 28. Il y a aussi des blocages, mais ces temps de blocage sont de durées faibles. Par exemple sur  $p_2$ , la tâche  $\tau_2$  est bloquée pendant 2 unités de temps par la tâche  $\tau_8$  à partir de la date  $t = 49$  jusqu'à la date  $t = 51$ . Ce temps de blocage, très faible, est le plus grand des temps de blocage parmi ceux qui se produisent pendant l'intervalle d'étude.

## 6.8 Étude de performance

Dans cette section on étudie les performances de l'heuristique d'ordonnement multiprocesseur que nous avons proposée pour les tâches dépendantes et présentée dans l'algorithme 9. Pour cela nous avons comparé notre heuristique avec l'algorithme exact Branch and Bound ( $B\&B$ ) donné par l'algorithme 10 puisqu'on ne dispose pas de "benchmark" sur la prise en compte du coût exact de la préemption. Cet algorithme exact énumère toutes les solutions d'allocation possibles puis parcourt toutes ces solutions afin de déterminer la solution ordonnable selon l'algorithme 8 et qui minimise le makespan des tâches. En ce qui concerne les conditions techniques de test, l'ordinateur utilisé est un DELL muni d'un processeur *IntelCore<sup>TM</sup> 2 Duo* (2,66 GHz, mémoire RAM 4Go). Avant

t	$\phi^1(t) = \tau_i$	$c_i(t)$
1	$\tau_1$	1
2	<i>idle</i>	2
4	<i>idle</i>	1
5	<i>idle</i>	1
6	<i>idle</i>	1
7	$\tau_1$	1
8	$\tau_4$	4
11	$\tau_4$	1
12	$\tau_7$	2
13	$\tau_1$	1
14	$\tau_7$	2
16	<i>idle</i>	1
17	<i>idle</i>	2
19	$\tau_1$	1
20	$\tau_4$	4
23	$\tau_4$	1
24	$\tau_7$	2
25	$\tau_1$	1
26	$\tau_7$	2
28	$\tau_6$	2
30	<i>idle</i>	1
31	$\tau_1$	1
32	$\tau_4$	4
35	$\tau_4$	1
36	$\tau_7$	2
37	$\tau_1$	1
38	$\tau_7$	2
40	<i>idle</i>	1
41	<i>idle</i>	2
43	$\tau_1$	1
44	$\tau_4$	4
47	$\tau_4$	1
48	$\tau_7$	2
49	$\tau_1$	1
50	$\tau_7$	2
52	$\tau_6$	2
54	<i>idle</i>	1
55	$\tau_1$	1

TABLE 6.1 – Table d’ordonnancement du processeur  $p_1$

t	$\phi^2(t) = \tau_i$	$c_i(t)$
0	$\tau_3$	2
1	$\tau_3$	1
2	$\tau_2$	2
3	$\tau_2$	1
4	$\tau_5$	1
5	<i>idle</i>	3
8	<i>idle</i>	1
9	$\tau_5$	1
10	<i>idle</i>	3
13	$\tau_2$	2
14	$\tau_2$	1
15	$\tau_5$	1
16	<i>idle</i>	4
20	<i>idle</i>	1
21	$\tau_5$	1
22	$\tau_8$	3
24	$\tau_8$	1
25	$\tau_2$	2
26	$\tau_2$	1
27	$\tau_3$	2
29	<i>idle</i>	1
30	$\tau_5$	1
31	<i>idle</i>	1
32	<i>idle</i>	1
33	<i>idle</i>	1
34	<i>idle</i>	3
37	$\tau_2$	2
38	$\tau_2$	1
39	$\tau_5$	1
40	<i>idle</i>	4
44	<i>idle</i>	1
45	$\tau_5$	1
46	$\tau_8$	3
49	$\tau_2$	2
51	$\tau_3$	2
53	$\tau_5$	1
54	<i>idle</i>	2

TABLE 6.2 – Table d'ordonnancement du processeur  $p_2$



$t$	$communications$	$com$
2	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
4	$com(p_2, \tau_2, p_1, \tau_4)$	1
5	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
8	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
10	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
14	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
15	$com(p_2, \tau_2, p_1, \tau_4)$	1
20	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
22	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
26	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
27	$com(p_2, \tau_2, p_1, \tau_4)$	1
32	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
34	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
38	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
39	$com(p_2, \tau_2, p_1, \tau_4)$	1
40	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
44	$com(p_1, \tau_1, p_2, \tau_5)$	1
46	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1
51	$com(p_2, \tau_2, p_1, \tau_4)$	1
54	$com(p_2, \tau_5, p_1, \tau_6)$	1

TABLE 6.3 – Table d’ordonnement du processeur de communication  $pcom12$

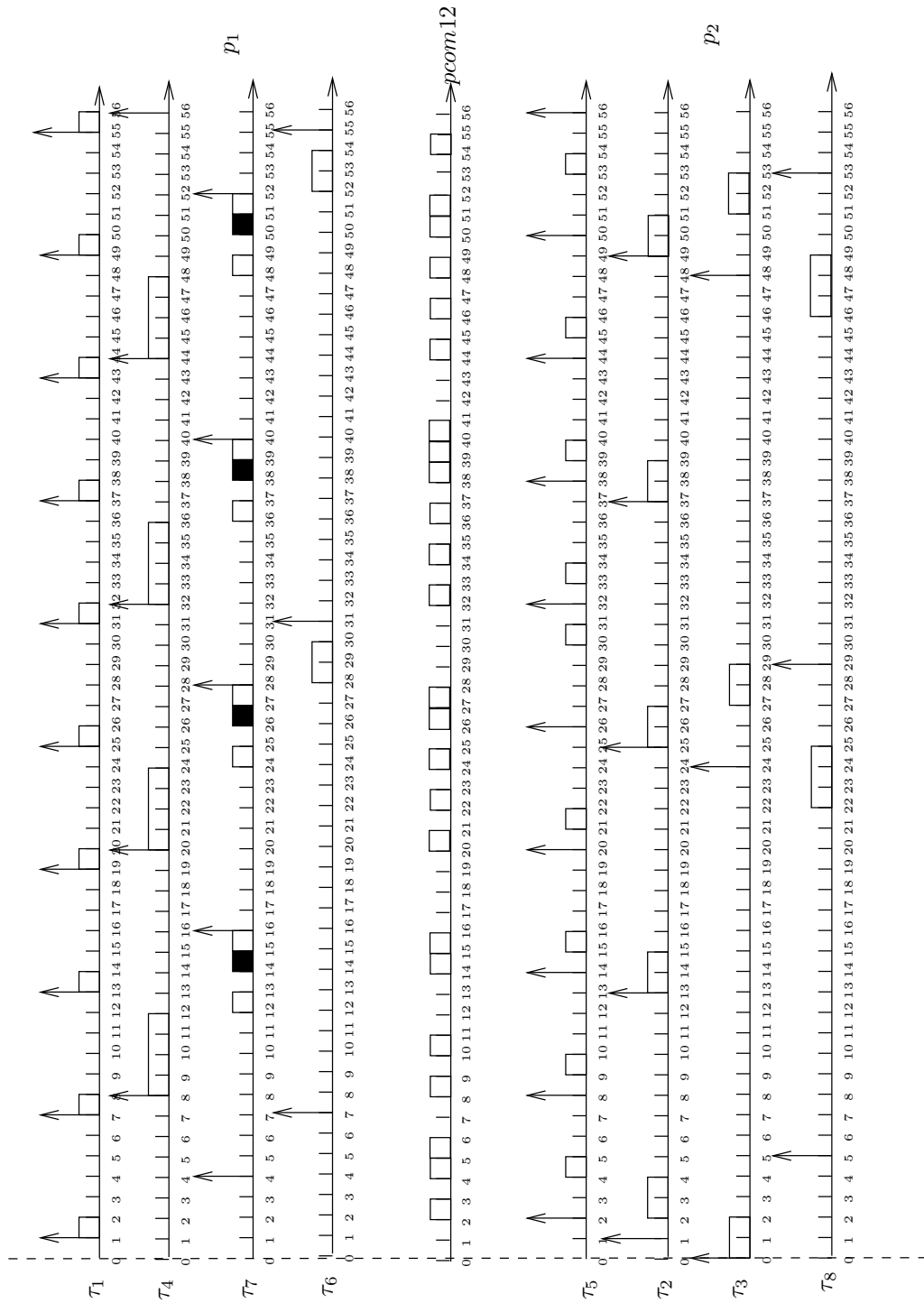


FIGURE 6.8 – Résultat de l'ordonnement des tâches sur  $p_1$  et sur  $p_2$

de présenter les résultats de cette comparaison nous présentons le générateur de graphes de tâches que nous avons implémenté pour générer des tâches dépendantes.

### 6.8.1 Générateur de graphes de tâches dépendantes

Le générateur de tâches que nous avons implémenté est basé sur le principe des travaux présentés dans [Kal04, HGRC96]. On génère des graphes de tâches constitués de plusieurs niveaux ou rangs (au minimum 2 niveaux). Le niveau d'une tâche est la longueur du plus long chemin qui a pour extrémité cette tâche en partant d'une tâche sans prédécesseur. Chaque niveau contient une ou plusieurs tâches et une tâche d'un niveau  $i > 1$  a au moins un prédécesseur au niveau  $i - 1$ . Par rapport au générateur présenté dans [Kal04] notre générateur de tâches dépendantes permet de spécifier le nombre de tâches d'entrées qui représentent les capteurs et le nombre de tâches de sorties qui représentent les actionneurs.

Les paramètres du générateur de graphe de tâches sont :

- la taille du graphe notée  $n$  qui correspond au nombre total de tâches dans le graphe,
- la longueur du graphe notée  $l$  qui correspond au nombre de niveaux dans le graphe,
- la hauteur du graphe notée  $h$  qui correspond au nombre maximum de tâches dans un niveau,
- le nombre de tâches d'entrées ou capteurs noté  $n_{in}$ ,
- le nombre de tâches de sorties ou actionneurs noté  $n_{out}$ .

Les valeurs de ces paramètres doivent être cohérentes pour qu'on puisse générer un graphe de tâches correspondant au type de graphe spécifié par un utilisateur. Pour cela il y a un certain nombre de conditions que ces paramètres doivent vérifier. Ce sont :

- $n_{in} \leq h$ ,
- $n_{out} \leq h$ ,
- $(l + h - 1) \leq n \leq (l * h - (2 * h - n_{in} - n_{out}))$ .

Les deux premières inéquation assurent que le nombre maximum de tâches dans un niveau ne dépasse pas  $h$ . L'inéquation  $(l + h - 1) \leq n$  assure que la taille du graphe soit supérieure à  $(l + h - 1)$  car en créant un graphe de longueur  $l$  et de hauteur  $h$  il y a au minimum  $(l + h - 1)$  tâches dans ce graphe. Et enfin l'inéquation  $n \leq (l * h - (2 * h - n_{in} - n_{out}))$  permet d'assurer d'avoir exactement  $n_{in}$  tâches d'entrées et  $n_{out}$  tâches de sortie. Si l'utilisateur n'indique que la taille du graphe, les paramètres  $l, h, n_{in}$  et  $n_{out}$  sont générés aléatoirement.

**Algorithme 10** Algorithme exact de *B&B* de tâches dépendantes

---

```

1: Initialiser l'ensemble  $W$  à l'ensemble des tâches sans prédécesseurs dans  $G_n$ 
2: Initialiser la variable  $liste\_solutions$  à l'ensemble vide
3: Initialiser la variable  $allocation\_réussie$  à vrai
4: tant que ( $W \neq \emptyset$ ) et ( $allocation\_réussie = vrai$ ) faire
5:   Sélectionner la tâche  $\tau_i$  la plus prioritaire dans  $W$ 
6:   si  $liste\_solutions = \{\emptyset\}$  alors
7:     Créer la solution  $S_1$  composé d'un seul processeur avec  $\tau_i$  allouée à ce
       processeur
8:     Ajouter  $S_1$  à la liste des solutions  $liste\_solutions$ 
9:   sinon
10:     $l\_sol \leftarrow \{\emptyset\}$ 
11:    pour  $k = 1$  à  $nb\_solutions$  (nombre de solution de  $liste\_solutions$ )
       faire
12:       $S_k \leftarrow$  solution  $k$  de  $liste\_solutions$ 
13:      pour  $j = 1$  à  $nb\_proc\_s_k$  ( $nb\_proc\_s_k$  est le nombre de processeurs
        dans  $S_k$ ) faire
14:        si  $C_i \leq D_i^k$  alors
15:          Créer la solution  $S_{(k,j)}$  qui est la solution extraite de  $S_k$  en al-
            louant la tâche  $\tau_i$  au processeur  $p_j$ 
16:          Ajouter  $S_{(k,j)}$  à la liste des solutions  $l\_sol$ 
17:        fin si
18:      fin pour
19:      si  $nb\_proc\_s_k < m$  alors
20:        Créer la solution  $S_{(k,j+1)}$  qui est la solution extraite de  $S_k$  en ajou-
            tant un  $j + 1$  ème processeur et en allouant la tâche  $\tau_i$  au processeur
             $p_{j+1}$ 
21:        Ajouter  $S_{(k,j+1)}$  à la liste des solutions  $l\_sol$ 
22:      fin si
23:    fin pour
24:    si  $l\_sol = \emptyset$  alors
25:       $allocation\_réussie = faux$ 
26:    sinon
27:       $liste\_solutions \leftarrow l\_sol$ 
28:    fin si
29:  fin si
30:  Supprimer  $\tau_i$  de l'ensemble  $W$ 
31:  Ajouter dans  $W$  toutes les successeurs de  $\tau_i$  qui n'ont pas de prédécesseurs
    dans  $W$ 
32: fin tant que
33: si  $allocation\_réussie = vrai$  alors
34:   Déterminer dans la liste des solutions  $liste\_solutions$  et en utilisant l'al-
     gorithme 11, la meilleure solution  $S_k$  qui est ordonnançable
35: sinon
36:   L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable
37: fin si

```

---

---

**Algorithme 11** Meilleure solution de la liste des solutions *liste\_solutions*

---

```
1: ordonnançable  $\leftarrow$  faux
2: si liste_solutions  $\neq$   $\{\emptyset\}$  alors
3:   meilleure_solution  $\leftarrow$  la solution  $S_1$  de liste_solutions
4:   meilleure_makespan  $\leftarrow$  le makespan des tâches avec la solution  $S_1$ 
5:   pour  $k = 2$  à nb_solutions faire
6:     Faire l'analyse d'ordonnançabilité de la solution  $S_k$  en utilisant l'algo-
       rithme 9
7:     Calculer  $L_k$ , le makespan des tâches avec la solution  $S_k$ 
8:     si ( $S_k$  est ordonnançable) et ( $L_k < \textit{meilleure\_makespan}$ ) alors
9:       meilleure_solution  $\leftarrow$   $S_k$ 
10:      meilleure_makespan  $\leftarrow$   $L_k$ 
11:      ordonnançable  $\leftarrow$  vrai
12:    fin si
13:  fin pour
14:  si ordonnançable = vrai alors
15:    L'ensemble  $\Gamma_n$  est ordonnançable et meilleure_solution est la
    meilleure solution qui minimise le makespan des tâches
16:  sinon
17:    L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable
18:  fin si
19: sinon
20:   L'ensemble  $\Gamma_n$  n'est pas ordonnançable
21: fin si
```

---

La génération des tâches se fait en deux étapes. Dans un premier temps, dans une matrice de taille  $l * h$  on génère aléatoirement les  $n$  sommets du graphes. Pour cela on génère d'abord au premier niveau  $n_{in}$  sommets et  $n_{out}$  sommets pour le dernier niveau  $l$  du graphe. Ensuite pour chaque niveau  $i/1 \leq i \leq l$  on génère  $k$  sommets ( $1 \leq k \leq h$ ) en fonction du nombre de sommets du graphe  $s$  qu'il reste à générer. Dans un second temps en commençant au premier niveau du graphe, pour chaque sommet on génère les caractéristiques temporelles ( $r^1, C, T$  et  $D$ ) pour ce sommet qui devient une tâche. Après cela on détermine aléatoirement pour cette tâche un ensemble de prédécesseurs parmi les tâches du niveau inférieur. Pour générer les paramètres des tâches on applique l'algorithme unifast de Bini [BB05] qui détermine d'abord un facteur d'utilisation  $u_i$  pour chaque tâche  $\tau_i$  de telle sorte que la somme des facteurs d'utilisation de toutes les tâches soit égale au facteur d'utilisation qu'on donne en entrée. Ensuite en fixant une période  $T_i$  pour cette tâche  $\tau_i$ , on détermine la durée d'exécution  $C_i$  donnée par  $C_i = u_i * T_i$ . La période d'une tâche est générée de telle sorte qu'elle soit multiple des périodes de ses tâches prédécesseurs.

## 6.8.2 Graphe de processeurs

Pour simplifier les tests, on suppose que le graphe de processeurs est complètement connecté et que chaque processeur est relié à un autre processeur par une liaison *point-à-point*. Les processeurs sont identiques et communiquent par passage de messages. On suppose aussi que le coût de communication entre deux processeur est fixe et égal à une unité de temps.

## 6.8.3 Résultats

Nous avons comparé notre heuristique multiprocesseur et l'algorithme exact *B&B* par rapport à leurs temps d'exécution en faisant varier le nombre de tâches puis le nombre de processeurs. Puis nous les avons comparé par rapport à leurs taux de succès et par rapport au makespan des tâches.

### 6.8.3.1 Temps d'exécutions des algorithmes

Pour comparer notre heuristique et l'algorithme exact *B&B* par rapport à leurs temps d'exécution nous avons dans un premier temps fixé le nombre de processeurs en considérant un seul graphe de processeurs composé de 3 processeurs et on a fait varier le nombre de tâches. Pour cela nous avons généré avec notre générateur de graphes de tâches 10 graphes de tâches. Le nombre de tâches dans les graphes de tâches est compris entre 6 et 100 tâches. On exécute notre heuristique et l'algorithme exact *B&B* sur chaque couple (un graphe de tâches et le graphe

de 3 processeurs considéré) puis on calcule le temps d'exécution des algorithmes pour tracer la courbes des temps d'exécution donnée par la figure 6.9 avec en abscisse le nombre de tâches dans chaque graphe de tâches.

Dans un second temps nous avons considéré un seul graphe de tâches composé de 10 tâches et deux graphes de processeurs composés respectivement de 2 et de 3 processeurs chacun. On a exécuté notre heuristique et l'algorithme exact *B&B* sur chaque couple (le graphe de 10 tâches, un graphe de processeurs) puis on a calculé le temps d'exécution de l'heuristique et de l'algorithme exact. Nous avons considéré ce petit nombre de tâches et de processeurs à cause de la complexité de l'algorithme exact *B&B*. L'objectif étant juste de donner une évolution du temps d'exécution de notre heuristique et de l'algorithme exact lorsque le nombre de processeur croît. Ensuite en considérant uniquement notre heuristique nous avons considéré un graphe de tâches composé de 100 tâches et 13 graphes de processeurs différents avec un nombre de processeurs variant entre 4 et 15 processeurs. On a exécuté notre heuristique sur chaque couple (le graphe de 100 tâches, un graphe de processeurs). Nous avons tracer la courbe des temps d'exécution donnée par la figure 6.10 avec en abscisse le nombre de processeurs et en ordonnée le temps d'exécution des algorithmes.

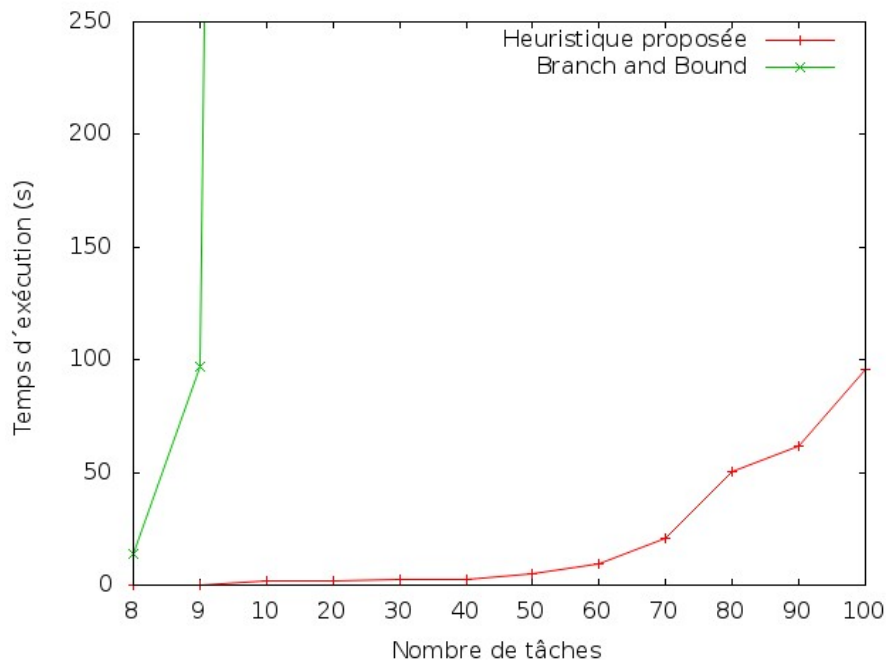


FIGURE 6.9 – Comparaison des durées d'exécution des algorithmes

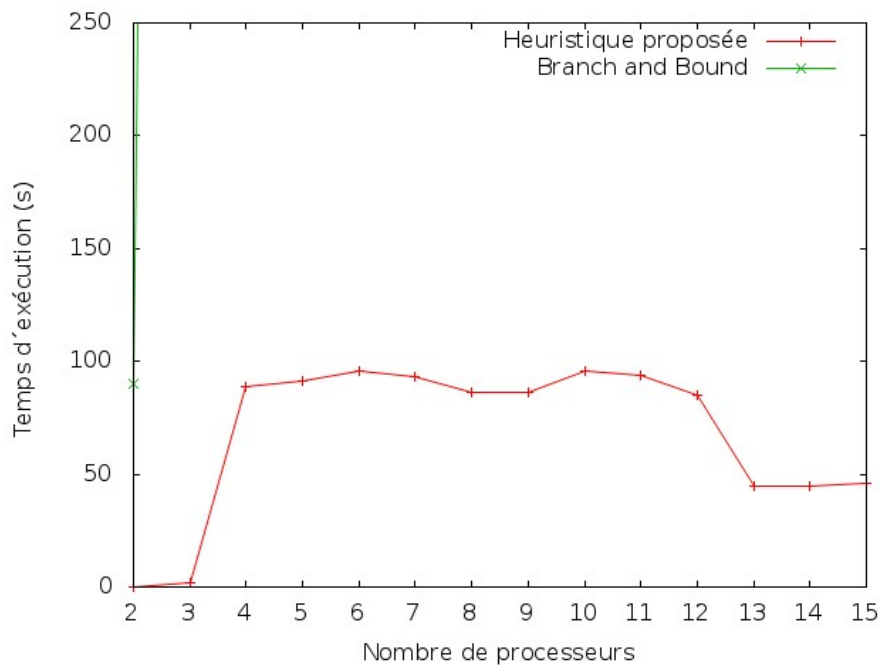


FIGURE 6.10 – Comparaison des durées d'exécution des algorithmes

Dans les figures 6.9 et 6.10 on observe qu'à partir de 10 tâches et 3 processeurs le temps d'exécution de l'algorithme exact  $B\&B$  commence à exploser par contre notre heuristique a des temps d'exécution raisonnables. Dans la figure 6.10 on observe aussi que le temps d'exécution de notre heuristique ne croît pas de façon monotone en fonction du nombre de processeurs. Ce temps d'exécution a tendance à décroître si on augmente le nombre de processeurs. Ceci peut s'expliquer par le fait que plus le nombre de processeurs augmente plus les tâches sont réparties sur tous les processeurs ce qui diminue sur un processeur l'ensemble des dates d'appel de son ordonnanceur qui est fonction, entre autre, des dates d'activation des tâches sur ce processeurs. Ceci diminue la durée de l'analyse d'ordonnançabilité multiprocesseur et donc améliore la durée d'exécution de notre heuristique.

### 6.8.3.2 Taux de succès

Pour comparer notre heuristique et l'algorithme exact  $B\&B$  par rapport à leurs taux de succès nous avons généré un seul graphe de processeurs composé de  $m = 3$ . Ensuite nous avons généré 10 ensembles dont chaque ensemble est composé de 10 graphes de tâches. À cause de la complexité de l'algorithme  $B\&B$  au delà de 10 tâches, nous avons limité le nombre de tâches de chaque graphe



de tâches à 10 tâches. Pour chaque ensemble de graphes de tâches on exécute notre heuristique et l'algorithme exact  $B\&B$  puis on a calculé le taux de succès de chaque algorithmes. Avec ce résultat on trace la courbe des taux de succès en mettant en abscisse la moyenne des facteurs d'utilisation des ensembles de graphes de tâches et en ordonnée les taux de succès. La figure 6.11 donne le résultat obtenu.

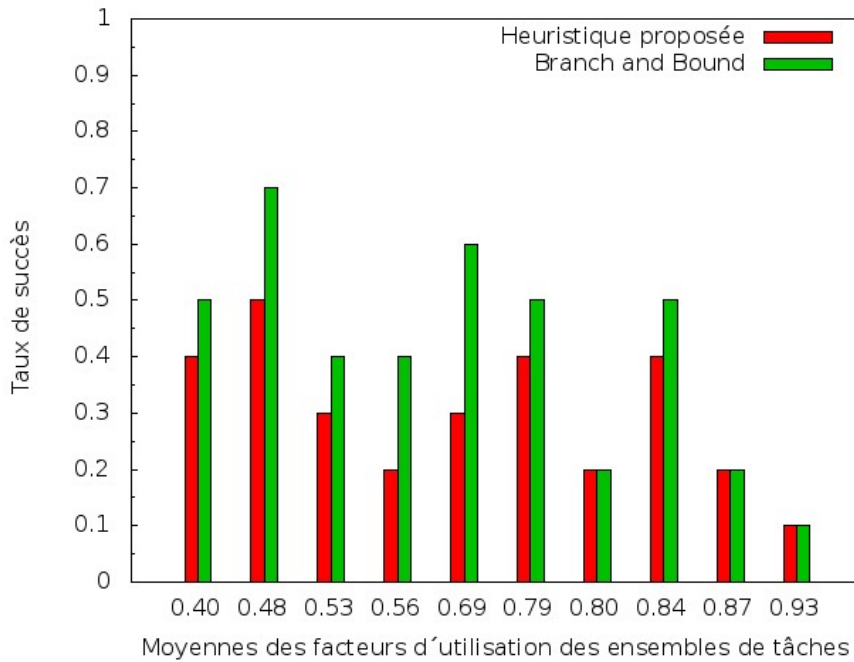


FIGURE 6.11 – Comparaison des taux de succès des algorithmes

Dans la figure 6.11, même si l'algorithme exact  $B\&B$  donne des taux de succès plus importants que notre algorithme, ce qui était prévisible puisque l'algorithme  $B\&B$  énumère toutes les solutions possibles, on remarque que notre algorithme n'est pas très éloigné, en terme de taux de succès.

### 6.8.3.3 Makespan

Pour comparer notre heuristique et l'algorithme exact  $B\&B$  par rapport au makespan des tâches, nous avons considéré 8 graphes de tâches dont chaque graphe de tâches est composé de 10 tâches. On exécute notre heuristique et l'algorithme exact  $B\&B$  sur chaque graphe de tâches et un graphe de processeurs composé de 3 processeurs. Nous avons considéré que des graphes de tâches ordonnancables sur ce graphe de processeurs puis on calcule le pire makespan des tâches avec

l'ordonnancement produit par chaque algorithme pour la courbe des makespan donnée à la figure 6.12.

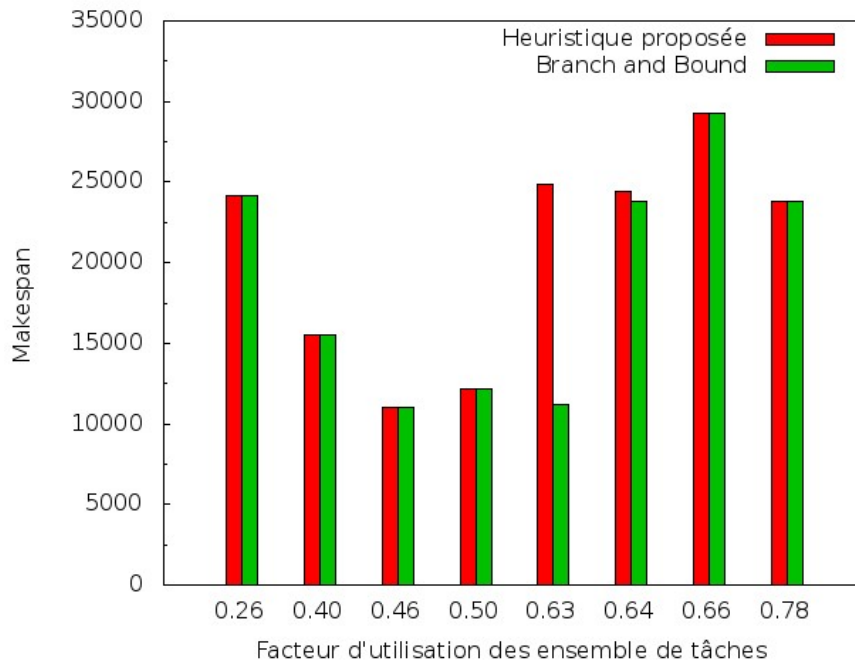


FIGURE 6.12 – Comparaison des makespan

Dans cette figure, on observe que notre heuristique même si elle ne parcourt pas toutes les solutions afin de produire un ordonnancement qui donne le plus petit makespan, a des makespans relativement égaux à ceux de l'algorithme exact de *B&B*. Ceci est dû à la maximisation de la marge d'exécution que l'on effectue lors de l'allocation des tâches.

## 6.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur de tâches dépendantes avec la prise en compte du coût exact de la préemption. Pour allouer les tâches aux processeurs, on a utilisé une heuristique d'allocation de type liste qui maximise la marge d'exécution des tâches ce qui lui permet de minimiser le makespan des tâches lors de l'exécution. Ensuite après l'étape d'allocation des tâches aux processeurs, on a appliqué sur chaque processeur une extension de l'analyse d'ordonnabilité hors ligne présentée au

---

chapitre 5 afin d'ordonnancer les tâches allouées à ce processeur. Après avoir ordonnancé les tâches sur les différents processeurs, notre heuristique produit une table d'ordonnancement pour chaque processeur que l'on utilisera pour implanter l'ordonnanceur (chapitre suivant). Nous avons aussi étudié les performances de notre heuristique en la comparant à un algorithme exact  $B\&B$ . On peut noter que si l'écart, en faveur de l'algorithme  $B\&B$ , entre les taux de succès et les makes-pans des deux algorithmes est faible, alors l'écart, en faveur de notre heuristique, entre les temps d'exécution est important.



# Chapitre 7

## Ordonnanceur en ligne avec prise en compte du coût exact de la préemption

### 7.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons pour un processeur  $p_j$ , l'ordonnanceur en ligne utilisant la table d'ordonnancement produite après l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne. Lors de cette analyse (voir chapitre 6) qui fait appel à un ordonnanceur hors ligne, nous avons pris en compte le coût exact de la préemption et effectué la synchronisation de l'accès aux mémoires de données, tout ceci en garantissant la viabilité de cette analyse d'ordonnançabilité. Dans la suite du chapitre, pour simplifier, on appellera cet ordonnanceur en ligne, ordonnanceur. Comme nous avons choisi l'approche d'ordonnancement multiprocesseur partitionné, cet ordonnanceur en ligne sera utilisé sur chaque processeur. Dans ce chapitre on présente aussi la gestion des communications inter-processeurs.

### 7.2 Principe de l'ordonnanceur

Nous cherchons à implanter un ordonnanceur en ligne en utilisant la table d'ordonnancement produite après l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne, pour cela nous avons choisi un ordonnanceur dirigé par le temps (Time-Trigger).

Dans la classe des ordonnanceurs dirigés par le temps, les plus connus sont ceux qui sont invoqués périodiquement [Kop98, Pon01]. Une horloge périodique est utilisée pour invoquer l'ordonnanceur. L'inconvénient de cette invocation périodique, est que pour déterminer les activations des tâches, la période d'invocation de l'ordonnanceur doit être bien choisie de façon à ce que les instants pério-

diques de l'horloge correspondent à des dates d'activations des tâches. Dans le cas contraire, on risque de ne pas prendre en compte certaines activations de tâches. Par exemple si on a trois tâches à premières dates d'activations synchrones, de périodes 10, 14 et 30 unités de temps, il faut que la période de l'horloge soit le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) des trois périodes, égal à 2 unités de temps. De plus cette approche peut conduire à invoquer l'ordonnanceur plus que nécessaire. Dans l'exemple précédent si on considère que les tâches ont la même durée d'exécution égale à 1 unité de temps, alors l'exécution des trois premières instances de ces tâches se termine au bout de trois unités de temps. Cependant l'ordonnanceur continue à être invoqué deux fois de plus pour rien, jusqu'à la deuxième activation de la tâche de période 10 qui s'exécute à cette date.

À coté de ce type d'ordonnanceur dirigé par le temps invoqué périodiquement, il existe un autre type d'ordonnanceur dirigé par le temps qui permet d'invoquer l'ordonnanceur uniquement à des dates choisies [Kod07, Pon01]. Pour cela, on utilise une horloge, non nécessairement périodique, dont les instants sont déterminés par un "timer". À chaque instant de l'horloge on calcule l'instant suivant en armant le "timer" avec une certaine durée. Celui-ci se décrémente jusqu'à son expiration. On modifie alors à nouveau sa durée, pour déterminer la prochaine date à laquelle on va invoquer l'ordonnanceur. Ceci a l'avantage d'invoquer l'ordonnanceur uniquement aux dates contenues dans la table d'ordonnement. Son principal inconvénient est que la modification du "timer" de l'ordonnanceur a un coût. Mais ce coût est constant et peut être ajouté dans le coût de l'ordonnanceur qu'on a supposé inclus dans le WCET des tâches.

Nous avons donc choisi le type d'ordonnanceur dirigé par le temps qui permet d'invoquer l'ordonnanceur uniquement à des dates choisies. Afin d'invoquer l'ordonnanceur aux dates données dans notre table d'ordonnement, on détermine les durées d'expiration du "timer" de l'ordonnanceur (durée pendant laquelle le "timer" est décrémente jusqu'à arriver à expiration) en faisant des différences de dates. Par exemple dans la table d'ordonnement, supposons que l'on est à la date  $t_0$  qui est l'origine des dates et que l'ordonnanceur doit être appelé successivement aux dates  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Pour pouvoir invoquer notre ordonnanceur exactement aux dates  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ , à la date  $t_0$  on déclenche le "timer" de l'ordonnanceur avec la durée  $t_1 - t_0$ . Ceci pour avoir une invocation à la date  $t_1$ . À la prochaine expiration du "timer", correspondant à la date  $t_1$ , on modifie la durée du "timer" qui passe à  $t_2 - t_1$ . Ceci pour avoir une invocation de l'ordonnanceur à la date  $t_2$ . À la prochaine expiration du "timer", correspondant à la date  $t_2$ , on modifie sa durée qui passe à  $t_3 - t_2$ . Ceci pour avoir une invocation de l'ordonnanceur à la date  $t_3$ . Ce calcul des durées d'expiration du "timer" de l'ordonnanceur est effectué avant l'appel de l'ordonnanceur en ligne. Ainsi à chacune des expirations du "timer", correspondant à une invocation de l'ordonnanceur, l'ordonnanceur n'a rien d'autre à faire que de lire la tâche qui a été sélectionnée lors de l'analyse d'or-

donnançabilité et de la faire exécuter par le processeur. Ceci a l'avantage de rendre le temps de sélection constant (temps de lecture dans une table pour le processeur considéré) qui dans les "ordonnanceurs classiques" en ligne consiste à mettre à jour la liste des tâches qui sont dans l'état prêt d'exécution (voir section 1.7.2) et de sélectionner, selon un certain algorithme par exemple RM, DM, EDF, etc., celle qui doit s'exécuter. Dans ce cas la sélection de la tâche, effectuée en ligne, dépend du nombre de tâches prêtes à s'exécuter qui varie d'une invocation de l'ordonnanceur à une autre. Un autre avantage d'utiliser notre ordonnanceur fondé sur une table d'ordonnement, est qu'on n'a pas besoin de synchroniser l'accès aux mémoires de données partagées par plusieurs tâches, car cette synchronisation a été déjà effectuée lors de l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne 5.4.

### 7.3 Implantation de l'ordonnanceur

Dans cette section on présente les principes d'implantation de notre ordonnanceur en ligne.

Notre ordonnanceur en ligne prend en entrée la table d'ordonnement, obtenue après l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne, représentée par le tableau  $T_{p_j}$  dont la taille est notée  $SIZE\_T$ . On utilise un "timer" pour déterminer les invocations de l'ordonnanceur. Ce "timer" est armé avec une valeur qui est une durée, lue dans le tableau  $T_{p_j}$ . Cette valeur est décrémentée jusqu'à expiration du "timer" qui conduit à invoquer l'ordonnanceur. On parcourt le tableau  $T_{p_j}$  à l'aide d'un indice noté  $i$  qui suit les dates d'invocation de l'ordonnanceur et telle que la différence entre deux dates correspond à la durée d'expiration du "timer" contenue dans le tableau. Puisque l'exécution des tâches se répète indéfiniment à partir de la date  $r_{max} + H_n$ , date de début de la phase permanente, lorsque l'indice  $i$  est égal à  $SIZE\_T - 1$   $i$  est initialisé à  $i_{perm}$ , avec  $i_{perm}$  indice du tableau correspondant à la date début de la phase permanente. Chaque élément  $i$  du tableau  $T_{p_j}$ , noté  $T_{p_j}[i]$ , contient les informations nécessaires pour exécuter la tâche qui a été sélectionnée lors de l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne. Un élément du tableau contient les champs suivants :

- *id* : identifiant de la tâche sélectionnée,
- *durée* : durée d'expiration du "timer", qui permet d'armer le "timer" et de déterminer si  $i = 0$  la première invocation de l'ordonnanceur sinon la prochaine invocation l'ordonnanceur,
- *code* : adresse du code de la tâche à exécuter à la date correspondant à l'indice  $i$  du tableau,
- *statut* : permet de déterminer si le code  $T_{p_j}[i].code$  reprend son exécution suite à une préemption lors de sa dernière exécution, dans ce cas  $T_{p_j}[i].statut = r$  sinon si le code de la tâche démarre une nouvelle exécution  $T_{p_j}[i].statut =$

*d* sinon  $T_{p_j}[i].statut = idle$ . Ce dernier cas correspond à l'exécution du code *idle* de la tâche *idle* qui est une boucle infinie.

L'ordonnanceur en ligne est donné à l'algorithme 12. Dans cet algorithme on utilise un unique "timer" matériel qu'on arme initialement avec la durée  $(r_{min} - 0)$  (on suppose que 0 est l'origine des dates). Cette durée se décrémente et provoque une interruption quand elle passe à 0. Cette interruption entraîne un sauvegarde de contexte du processeur. À chaque interruption provoquée par l'expiration du "timer", qu'on associe avec un élément  $i$  du tableau  $T_{p_j}$ , l'ordonnanceur est invoqué par déclenchement du programme d'interruption *program\_interrupt*. Ce programme d'interruption *program\_interrupt* arme à nouveau le "timer" *timer* avec la durée  $T_{p_j}[i].durée$  et met à jour les indices  $i$ ,  $i_{prec}$  et  $i_{succ}$ . Il sélectionne ensuite la tâche  $T_{p_j}[i].id$  dont il charge le code  $T_{p_j}[i].code$  pour exécution. Le programme d'interruption retourne avec le pointeur d'instruction à la première instruction du code  $T_{p_j}[i].code$ . Si la tâche sélectionnée était préemptée ( $T_{p_j}[i].statut = r$ ), alors le contexte du processeur au moment de sa préemption est restauré, afin de pouvoir poursuivre son exécution.

Il faut noter qu'une préemption d'une tâche qu'on avait prévue lors de l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne, peut ne pas avoir lieu lors de l'exécution en ligne, car cette tâche peut finir son exécution plus tôt. Dans ce cas, à la date de reprise d'exécution de cette tâche, on exécute la tâche *idle* jusqu'à la fin prévue. Ce mécanisme permet de garantir, en ligne, la viabilité de l'analyse d'ordonnançabilité garantie hors ligne.

On suppose que la durée d'exécution du programme d'interruption est inférieure à la plus petite durée d'expiration du "timer". Ceci permet de prendre en compte toutes les interruptions, donc toutes les invocations de l'ordonnanceur.

## 7.4 Application

Soient deux tâches  $\tau_1 = (1, 1, 4, 4)$  et  $\tau_2 = (0, 2, 8, 8)$ . D'après l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne ces deux tâches sont ordonnançables. La table d'ordonnement de ces deux tâches est donnée à la table 7.1.

À la figure 7.1 on présente le fonctionnement de l'ordonnanceur en ligne pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Dans cette figure, on a une étape d'initialisation qui consiste à armer pour la première fois le "timer" avec la durée 0, à autoriser les interruptions venant de ce "timer" et à initialiser les indices  $i$ ,  $i_{prec}$  et  $i_{succ}$  ( $i = 0$ ,  $i_{prec} = 0$  et  $i_{succ} = 0$ ). À  $t = 0$ , on a une première interruption du "timer" qui entraîne une sauvegarde de contexte. Ensuite l'ordonnanceur est invoqué par déclenchement du programme d'interruption *program\_interrupt*. Celui-ci commence par armer à nouveau le "timer" avec la durée  $T[i].durée$  et met à jour les indices  $i$ ,



**Algorithme 12** Ordonnanceur en ligne de  $p_j$ 


---

```

1: % Entrée : Table d'ordonnancement  $T_{p_j}$  du processeur  $p_j$ 
2:  $i \leftarrow 0$ 
3:  $i_{prec} \leftarrow 0$ 
4:  $i_{succ} \leftarrow$ 
5: % Armer le "timer"  $timer$  la première fois
6:  $timer \leftarrow armer\_timer(r\_min)$ 
7: % En utilisant la fonction  $autoriser\_interruption$ , autoriser les
8: % interruptions venant du périphérique  $timer$  et à chaque
9: % occurrence de ces interruptions exécuter le programme d'interruption
    $program\_interrupt$ 
10:  $autoriser\_interruption(timer, program\_interrupt)$ 
11: % Boucle qui s'exécute s'il n'y a pas d'interruption ou lorsqu'il y a
12: % un retour suite à une interruption
13: tant que 1 faire
14:   % Instruction qui ne fait rien
15:    $nop$ 
16: fin tant que

```

---

$i_{prec}$  et  $i_{succ}$  ( $i = 0, i_{prec} = 0$  et  $i_{succ} = 1$ ). Il sélectionne ensuite la tâche  $T[i].id = \tau_2$  dont il charge le code  $T[i].code$  pour exécution. Le programme d'interruption retourne avec le pointeur d'instruction à la première instruction du code  $T[i].code$ . À  $t = 1$ , on a une deuxième interruption qui entraîne une sauvegarde de contexte. Ensuite l'ordonnanceur est invoqué par déclenchement du programme d'interruption  $program\_interrupt$ . Celui-ci arme à nouveau le "timer" avec la durée  $T[i].durée$  puis met à jour les indices  $i, i_{prec}$  et  $i_{succ}$  ( $i = 1, i_{prec} = 0$  et  $i_{succ} = 2$ ). Il sélectionne ensuite la tâche  $T[i].id = \tau_1$  dont il charge le code  $T[i_{nex}].code = \tau_1()$  pour d'exécution. La sélection de la tâche  $\tau_1$  entraîne la préemption de  $\tau_2$ . Le programme d'interruption retourne avec le pointeur d'instruction à la première instruction du code  $\tau_1()$ . À date  $t = 2$ , on a une interruption du "timer", qui entraîne une sauvegarde de contexte. Ensuite l'ordonnanceur est invoqué par déclenchement du programme d'interruption  $program\_interrupt$ . Celui-ci commence par armer à nouveau le "timer" avec la durée  $T[i].durée$  et met à jour les indices  $i, i_{prec}$  et  $i_{succ}$  ( $i = 2, i_{prec} = 1$  et  $i_{succ} = 3$ ). Il sélectionne ensuite la tâche  $T[i].id = \tau_2$  qui reprend son exécution. Le contexte d'exécution de  $\tau_2$  est restauré. Le programme d'interruption retourne avec le pointeur d'instruction à l'instruction qui était en cours lors de la préemption de  $\tau_2$ . Ceci se répète indéfiniment.

---

**Algorithme 13** Programme d'interruption *program\_interrupt*


---

```

1: % On arme le "timer" timer avec la durée
2: %  $T_{p_j}[i].durée$  avec la fonction armer_timer
3: armer_timer(timer, T_{p_j}[i].durée)
4: % On met à jour les indices  $i$ ,  $i_{prec}$ , et  $i_{succ}$  pour qu'ils correspondent
5: % respectivement à l'indice de élément du tableau en cours, à l'élément
6: % précédent et le prochain élément du tableau
7:  $i_{prec} \leftarrow i$ 
8:  $i \leftarrow i_{succ}$ 
9: si  $i = SIZE\_T - 1$  alors
10:    $i_{succ} \leftarrow i_{perm}$ 
11: sinon
12:    $i_{succ} \leftarrow i + 1$ 
13: fin si
14: % Si l'exécution de  $T_{p_j}[i].code$  a été préemptée ce qui correspond à
15: %  $T_{p_j}[i].statut = r$  alors restaurer son contexte d'exécution
16: si  $T_{p_j}[i].statut = r$  alors
17:   Restaurer le contexte de  $T_{p_j}[i].code$ 
18:   Retourner à l'instruction de  $T_{p_j}[i].code$  qui était en cours au moment de la
   préemption de  $T_{p_j}[i].code$ 
19: sinon
20:   % Sinon, l'exécution de  $T_{p_j}[i].code$  n'était pas préemptée
21:   % donc on exécute directement le code  $T_{p_j}[i].code$ , on charge son code
   dans la pile d'exécution avec la fonction charger
22:   charger( $T_{p_j}[i].code$ )
23:   Retourner à la première instruction du code  $T_{p_j}[i].code$ 
24: fin si

```

---

<i>id</i>	<i>durée</i>	<i>code</i>	<i>statut</i>
$\tau_2$	1	$\tau_2()$	<i>d</i>
$\tau_1$	1	$\tau_1()$	<i>d</i>
$\tau_2$	2	$\tau_2()$	<i>r</i>
<i>idle</i>	1	<i>idle()</i>	<i>idle</i>
$\tau_1$	1	$\tau_1()$	<i>d</i>
<i>idle</i>	2	<i>idle()</i>	<i>idle</i>
$\tau_2$	1	$\tau_2()$	<i>d</i>
$\tau_1$	1	$\tau_1()$	<i>d</i>
$\tau_2$	2	$\tau_2()$	<i>r</i>
<i>idle</i>	1	<i>idle()</i>	<i>idle</i>
$\tau_1$	1	$\tau_1()$	<i>d</i>
<i>idle</i>	2	<i>idle()</i>	<i>idle</i>
$\tau_2$	1	$\tau_2()$	<i>d</i>

TABLE 7.1 – Table d’ordonnement  $T$  de  $\tau_1$  et  $\tau_2$ 

## 7.5 Gestion des communications inter-processeurs

Soit la communication  $com(p_l, \tau_i, p_k, \tau_j)$  correspondant au transfert d’une donnée produite par  $\tau_i$  sur le processeur  $p_l$  et reçue par  $\tau_j$  sur le processeur  $p_k$ . Soit  $send(p_k, \tau_i)$  la fonction qui permet d’envoyer la donnée produite par  $\tau_i$  au processeur  $p_k$  et  $receive(p_l, \tau_i)$  la fonction qui permet de recevoir la donnée de  $\tau_i$  provenant de  $p_l$ . La communication  $com(p_l, \tau_i, p_k, \tau_j)$  s’exécute sur le processeur de communication  $pcom_{lk} = (COM_l, M, COM_k)$ . Elle est réalisée en exécutant de manière non préemptive la fonction  $send(p_k, \tau_i)$  sur le communicateur  $COM_l$  puis en exécutant de manière non préemptive la fonction  $receive(p_l, \tau_i)$  sur le communicateur  $COM_k$ . En supposant qu’on connaît la durée d’exécution d’un  $send(p_k, \tau_i)$ , donnée par  $C_s$ , nous pouvons produire une table d’ordonnement pour chaque communicateur. Pour cela pour chaque communication  $com(p_l, \tau_i, p_k, \tau_j)$  qui doit être réalisée dans l’intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ , on exécute la fonction  $send(p_k, \tau_i)$  à la date  $t_0$  sur  $COM_l$  et on exécute la fonction  $receive(p_l, \tau_i)$  à la date  $t_0 + C_s$  sur le communicateur  $COM_k$ . On rappelle que cela est possible car les communicateurs ont la même base de temps. On remplace les  $send$  et  $receive$  utilisés dans le cas d’un médium par passage de messages par des  $write$  et  $read$  dans le cas d’un médium par mémoire partagée.

Considérons le communicateur  $COM_l$ . On utilise un "timer" matériel afin d’invoquer son ordonnanceur aux dates définies dans la table d’ordonnement de  $COM_l$ . Les durées d’expiration sont déterminées par différence de dates selon le même principe présentée à la section 7.2. Le "timer" est armé initialement avec

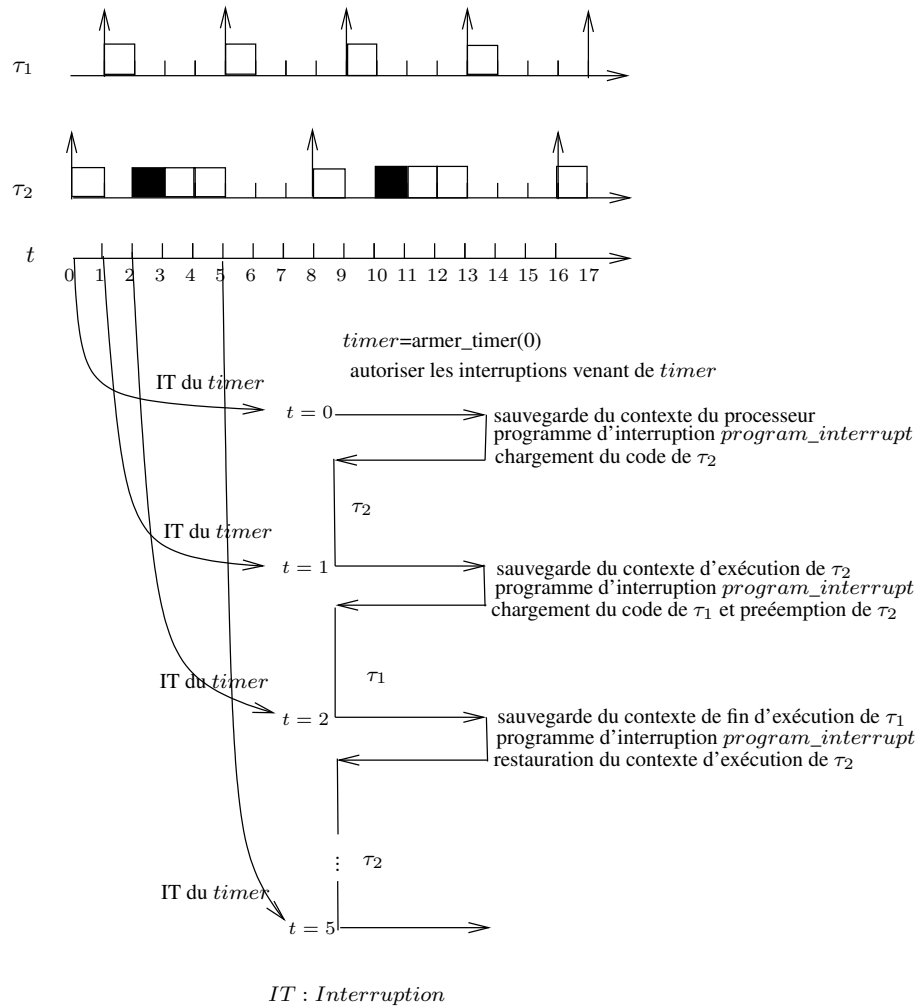


FIGURE 7.1 – Exemple de déroulement de l'algorithme 12

$(t_o - 0)$ ,  $t_0$  est la plus petite date dans la table d'ordonnement de  $COM_l$ . Ensuite à chaque expiration du "timer", on arme à nouveau le "timer" avec une durée lue dans la table, puis on exécute la tâche correspondante dans la table.

La différence principale entre un communicateur et un processeur de calcul est que dans un communicateur les tâches (*send*, *receive*, *write*, *read*) s'exécutent de manière non préemptive. Les durées d'expiration du "timer" sont déterminées de telles sorte qu'il n'y ait pas de préemptions. Par contre dans un processeur de calcul, les tâches peuvent être préemptées.

## 7.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe d'ordonnanceur en ligne et son implantation sur un processeur. Cet ordonnanceur en ligne est dirigé par le temps. Les dates d'invocation de l'ordonnanceur sont déterminées en utilisant la table d'ordonnement produite lors de l'analyse d'ordonnabilité hors ligne. Dans cette analyse d'ordonnabilité, nous avons pris en compte le coût exact de la préemption et les coûts de communication inter-processeur. Cet ordonnanceur en ligne a l'avantage de rendre constant le coût de sélection de la tâche à exécuter qui revient à une lecture dans la table d'ordonnement produite hors ligne. Il évite aussi de synchroniser, lors de l'exécution des tâches, l'accès aux mémoires de données partagées, car cette synchronisation a été faite lors de l'analyse d'ordonnabilité hors ligne. Dans le cas multiprocesseur à chaque processeur utilise des communicateurs pour effectuer les transferts de données. Nous avons présenté le principe d'un l'ordonnanceur en ligne pour chaque communicateur.



# Conclusion générale et perspectives

## Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons étudié le problème d'ordonnancement temps réel multiprocesseur préemptif avec prise en compte du coût exact du système d'exploitation. Pour cela nous avons dans un premier temps étudié l'ordonnancement multiprocesseur hors ligne de **tâches indépendantes** avec prise en compte du coût exact de la préemption en proposant une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur. Cette heuristique est de type gloutonne et utilise la stratégie par partitionnement de tâches. Pour prendre en compte le coût exact de la préemption sur chaque processeur nous avons utilisé la condition d'ordonnançabilité proposée par Meumeu et Sorel [Yom09] qui ne s'applique qu'à des tâches à priorités fixes. L'heuristique permet de maximiser le facteur d'utilisation restant sur les processeurs et réduit le temps de réponse des tâches.

Ensuite, nous avons étudié l'ordonnancement multiprocesseur hors ligne de **tâches dépendantes**. Puisque la condition d'ordonnançabilité utilisée pour ordonner les tâches indépendantes ne s'applique qu'à des tâches à priorités fixes, elle ne permet pas de gérer les inversions de priorités que peuvent entraîner les tâches dépendantes. Nous avons donc proposé une nouvelle condition d'ordonnançabilité pour des tâches à priorités dynamiques. Elle prend en compte le coût exact de la préemption et de l'ordonnanceur, et les dépendances sans aucune perte de données. Ensuite en utilisant toujours la stratégie d'ordonnancement par partitionnement, nous avons proposé pour des tâches dépendantes une heuristique d'ordonnancement multiprocesseur qui réutilise cette nouvelle condition d'ordonnançabilité au niveau de chaque processeur. Cette heuristique d'ordonnancement prend en compte les coûts de communication inter-processeurs. Elle permet aussi de minimiser sur chaque processeur le makespan (temps total d'exécution) des tâches. Cette heuristique produit pour chaque processeur une table d'ordonnancement hors ligne contenant les dates de début et de fin de chaque tâches et de chaque communication inter-processeur.

En supposant que nous avons une architecture multiprocesseur de type dirigée par le temps (Time Trigger TT) pour laquelle tous les processeurs ont une

référence de temps unique, nous avons proposé pour chacun des processeurs un ordonnanceur en ligne qui utilise la table d'ordonnancement produite lors de l'ordonnancement hors ligne. Cet ordonnanceur en ligne a l'avantage d'avoir un coût constant et facile à déterminer de manière exacte. En effet il correspond uniquement au temps de lecture dans la table d'ordonnancement pour obtenir la tâche sélectionnée lors de l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne, alors que dans les "ordonnanceurs classiques" en ligne ce coût correspond à mettre à jour la liste des tâches qui sont dans l'état prêt à l'exécution puis à sélectionner une tâche selon un algorithme, par exemple RM, DM, EDF, etc. Il varie donc avec le nombre de tâches prêtes à s'exécuter qui change d'une invocation à l'autre de l'ordonnanceur. C'est ce coût qui est utilisé dans les analyses d'ordonnançabilités évoquées ci-dessus. Un autre avantage est qu'il n'est pas nécessaire de synchroniser l'accès aux mémoires de données partagées par plusieurs tâches, car cette synchronisation a été déjà effectuée lors de l'analyse d'ordonnançabilité hors ligne.

## Perspectives

Afin d'augmenter le taux de succès dans l'analyse d'ordonnançabilité, il serait intéressant d'autoriser la migration de certaines tâches tout en prenant en compte les coûts de migration dans la condition d'ordonnançabilité.

Nous avons considéré que les dépendances de données étaient sans pertes de données, ceci entraîne des restrictions au niveau des tâches puisque les tâches dépendantes doivent avoir des périodes multiples. Il serait intéressant d'assouplir ce mode de dépendances données de telle sorte qu'il puisse y avoir des pertes de données sans nuire au bon fonctionnement de l'application considérée.

Dans l'architecture multiprocesseur que nous avons considérée, nous avons des communicateurs qui permettent de paralléliser les calculs et les communications. Ce type d'architecture donne de meilleures performances mais paralléliser n'est pas toujours possible. Il serait intéressant d'étudier des types d'architectures qui ne disposent pas de communicateurs et dont les processeurs ont des caches, pipeline, etc.

Poursuivre le travail d'implantation effectué sur l'OS Linux de l'ordonnanceur en ligne que nous avons proposé, en réalisant une implantation sur un processeur sans OS. Cela demandera aussi de mesurer le coût d'une préemption sur ce processeur.



# Bibliographie

- [AaR95] J. M. Adan, M. F. Magalhães, and K. Ramamritham.  
Meeting hard real-time constraints using a client-server model of interaction.  
In *Proceedings of the 7th Euromicro Workshop on Real-Time systems*, pages 286–293, 1995.
- [AB08] B. Anderssons and K. Bletsas.  
Sporadic multiprocessor scheduling with few preemptions.  
In *Proceedings of the 22th Euromicro Conference on Real-Time Systems ECRTS'08*, 2008.
- [ABJ01] B. Anderson, S. Baruah, and J. Jonson.  
Static-priority scheduling on multiprocessors.  
In *Proceedings of 21th IEEE Real-Time Systems Symposium RTSS'01*, 2001.
- [ACD74] L.T. Adams, K. M. Chandy, and J. R. Dickson.  
A comparison of list schedules for parallel processing systems.  
*Commun. ACM*, 17:685–690, December 1974.
- [AH98] P. Altenbernd and H. Hansson.  
The slack method: A new method for static allocation of hard real-time tasks.  
*Real-Time Systems*, 15:103–130, 1998.
- [AJ] B. Andersson and J. Jonsson.  
Fixed-priority preemptive multiprocessor scheduling: To partition or not partition.  
In *Proceedings of the 7th International Conference on Real-Time Systems and Applications RTCSA'00*.
- [AJ03] B. Andersson and J. Jonsson.  
The utilization bounds of partitioned and pfair static-priority scheduling on multiprocessors are 50%.  
In *Proceedings of the 15th Euromicro Conference on Real-Time Systems, ECRT'03*, 2003.
- [AT06] B. Andersson and E. Tovar.

- Multiprocessor scheduling with few preemptions.  
In *Proceeding of the 12th IEEE International Conference on Embedded and Real-Time Computing Systems and Applications, RTCSA'07, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2006*, pages 322–334, 2006.
- [Bak91] Theodore P. Baker.  
Stack-based scheduling of realtime processes.  
*Real-Time Systems*, 3(1):67–99, 1991.
- [Bak03] T. P. Baker.  
Multiprocessor edf and deadline monotonic schedulability analysis.  
In *Proceedings of 24th IEEE International Real-Time Systems Symposium RTSS'03*, 2003.
- [Bar04] S. K. Baruah.  
Optimal utilization bounds for the fixed-priority scheduling of the periodic task system on identical multiprocessors.  
*IEEE Transactions On Computers*, vol. 53(6), June 2004.
- [Bar07] Sanjoy Baruah.  
Techniques for multiprocessor global schedulability analysis.  
In *Proceedings of 28th IEEE Real-Time Systems Symposium RTSS'07*, 2007.
- [BB05] E. Bini and G. C. Buttazzo.  
Measuring the performance of schedulability tests.  
*Real-Time Syst.*, 30(1-2):129–154, May 2005.
- [BB08] S. Baruah and T.P Baker.  
Schedulability analysis of global edf.  
*Real Time Systems*, vol. 38:223–235, December 2008.
- [Ben06] F. Benhamou, editor.  
volume 4204 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2006.
- [BF97] J. Blazewicz and G. Finke.  
Minimizing mean weighed execution time loss on identical and uniform processors.  
*Information processing letters*, 24:259–263, 1997.
- [BG03] S. K. Baruah and J. Goossens.  
Rate-monotonic scheduling on uniform multiprocessors.  
*IEEE Transactions On Computers*, vol. 52(7), July 2003.
- [BG08] S. K. Baruah and J. Goossens.  
The edf scheduling of sporadic task system on multiprocessors.  
In *Proceedings of 24th IEEE International Real-Time Systems Symposium RTSS'08*, 2008.

- [Bim07] F. Bimbard.  
*Dimensionnement temporel de systèmes embarqués: application à OSEK.*  
PhD thesis, CEDRIC Laboratory, Paris, France, 2007.
- [BLOS95] A. Burchard, J. Liebeherr, Y. Oh, and S.H. Son.  
New strategies for assigning real-time tasks to multiprocessor systems.  
*IEEE Transaction on computers*, 44(12):1429–1442, April 1995.
- [BTW95] A. Burns, K. Tindell, and A. Wellings.  
Effective analysis for engineering real-time fixed priority schedulers.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 21:475–480, May 1995.
- [Bur94] Alan Burns.  
Preemptive priority-based scheduling: An appropriate engineering approach.  
In *Advances in Real-Time Systems, chapter 10*, pages 225–248. Prentice Hall, 1994.
- [CA95] S. Cheng and A. K. Agrawala.  
Allocation and scheduling of real-time periodic tasks with relative timing constraints.  
In *Second International Workshop on Real-Time Computing Systems and Applications (RTCISA), IEEE*, pages 25–27, 1995.
- [CCH<sup>+</sup>99] P. Calégari, G Coray, A. Hertz, D. Kobler, and P. Kuonen.  
A taxonomy of evolutionary algorithms in combinatorial optimization.  
*Journal of Heuristics*, 5:145–158, July 1999.
- [CDKM00] F. Cottet, J. Delacroix, C. Kaiser, and Z. Mammeri.  
*Ordonnancement temps réel - Cours et exercices corrigés.*  
Hermès, janvier 2000.
- [CG11] P. Courbin and L. Georges.  
Fortas: Framework for real-time analysis and simulation.  
In *Proceedings of the 2th International Workshop on Analysis Tools and Methodologies for Embedded and Real-time Systems*, Porto, Portugal, July 2011.
- [CGG04] A. Choquet-Geniet and E. Grolleau.  
Minimal schedulability interval for real-time systems of periodic tasks with offsets.  
*Theor. Comput. Sci.*, 310(1-3):117–134, 2004.
- [CGMV98] E.G. Coffman, G. Galambos, S. Martello, and D. Vigo.  
Bin packing approximation algorithms: Combinatorial analysis.

- Handbook of combinatorial optimization*, 1998.
- [CHMTE80] W. W. Chu, L. J. Holloway, L. Min-Tsung, and K. Efe.  
Task allocation in distributed data processing.  
*Computer*, 13:57–69, November 1980.
- [CL87] W. W. Chu and L. M-T. Lan.  
Task allocation and precedence relation for distributed real-time systems.  
*IEEE Transactions on Computers*, vol.C-36(18), June 1987.
- [CMTN08] J. Carlson, J. Mäki-Turja, and M. Nolin.  
Event-pattern triggered real-time tasks.  
In *Proceedings of the 16th International Conference on Real-Time and Network Systems, RTNS'08*, Rennes, France, 2008.
- [CSB90] H. Chetto, M. Silly, and T. Bouchentouf.  
Dynamic scheduling of real-time tasks under precedence constraints.  
*Real-Time System.*, 2(3):181–194, september 1990.
- [Cuc04] L. Cucu.  
*Ordonnancement non préemptif et condition d'ordonnançabilité pour systèmes embarqués à contraintes temps réel.*  
PhD thesis, Université Paris Sud, 2004.
- [CY90] G-H. Chen and J-S. Yur.  
A branch-and-bound-with-underestimates algorithm for the task assignment problem with precedence constraint.  
In *Proceedings of ICDCS*, , 20006, pages 494–501, 1990.
- [DB09] R. I. Davis and A. Burns.  
A survey of hard real-time scheduling algorithms and schedulability analysis techniques for multiprocessor systems.  
Technical report, University of York, Department of Computer Science, 2009.
- [DD86] S. Davari and S. K. Dhall.  
An on line algorithm for real-time allocation.  
In *Proceedings of IEEE Real-Time Systems Symposium*, pages 194–200, 1986.
- [DL78] S.K. Dhall and C.L. Liu.  
On a real-time scheduling problem.  
*Operation Research*, vol. 26(1), 1978.
- [DT03] G. B. Dantzig and M. N. Thapa.  
Linear programming 2: Theory and.  
*Springer Series in Operations Research*, 2003.

- [EJ00] C. Ekelin and J. Jonsson.  
Solving embedded system scheduling problems using constraint programming.  
Technical report, Dept. of Computer Engineering, Chalmers University of Technology, 2000.
- [EL97] E.Aarts and J. K. Lenstra.  
*Local search in combinatorial optimization*.  
Wiley, 1997.
- [ERC95] J. Echague, I. Ripoll, and A. Crespo.  
Hard real-time preemptively scheduling with high context switch cost.  
In *Proceedings of 7th Euromicro workshop on Real-Time Systems*, Los Alamitos, CA, USA, 1995. IEEE Computer Society.
- [ESHA90] R. Hong E. S. Hou and N. Ansari.  
Efficient multiprocessor scheduling based on genetic algorithms.  
*Technical Report CS-TR-3402*, 1990.
- [ESHA94] R. Hong E. S. Hou and N. Ansari.  
A genetic algorithm for multiprocessor scheduling.  
*Transaction on parallel and distributed systems*, 5(2), 1994.
- [FBG<sup>+</sup>10a] J. Forget, F. Boniol, E. Grolleau, D. Lesens, and C. Pagetti.  
Scheduling dependent periodic tasks without synchronization mechanisms.  
In *Proceedings of the 2010 16th IEEE Real-Time and Embedded Technology and Applications Symposium*, pages 301–310, Washington, DC, USA, 2010.
- [FBG<sup>+</sup>10b] J. Forget, F. Boniol, E. Grolleau, D. Lesens, and C. Pagetti.  
Scheduling dependent periodic tasks without synchronization mechanisms.  
In *16th IEEE Real-Time and Embedded Technology and Applications Symposium, RTAS*, Stockholm, Sweden, April 12-15th 2010.
- [FGLM96] P. M. Franca, M. Gendreau, G. Laporte, and F. M. Muller.  
A tabu search heuristic for the multiprocessor scheduling problem with sequence dependent setup times.  
*International Journal of Production Economics*, 43(2-3):79–89, June 1996.
- [FGPR11] J. Forget, E. Grolleau, C. Pagetti, and P. Richard.  
Dynamic Priority Scheduling of Periodic Tasks with Extended Precedences.

- In *IEEE 16th Conference on Emerging Technologies Factory Automation (ETFA)*, Toulouse, France, September 2011.
- [FJF62] L.R. Ford, Jr., and D.R. Fulkerson.  
*Flows network*.  
Princeton Univ. Press, 1962.
- [GFB03] J. Goossens, S. Funk, and S. Baruah.  
Priority-driven scheduling of periodic task systems on multiprocessors.  
*Real Time Systems*, vol. 25:187–205, 2003.
- [GJ79] Garey and Johnson.  
*Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*.  
W.H. Freeman and Company, New York, NY, USA, 1979.
- [GL93] F. Glover and M. Laguna.  
*Tabu search*, pages 70–150.  
John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1993.
- [GLN01] P. Gai, G. Lipari, and M. D. Natale.  
Minimizing memory utilization of real-time task sets in single and multi-processor systems-on-a-chip.  
In *Proceedings of the 22nd IEEE Real-Time Systems Symposium, RTSS '01*, pages 73–83, Washington, DC, USA, December 2001. IEEE Computer Society.
- [Goo99] J. Goossens.  
*Scheduling of Hard Real-Time Periodic Systems with Various Kinds of Deadline and Offset Constraints*.  
PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1999.
- [Goo07] J. Goossens.  
Introduction à l'ordonnancement temps réel multiprocesseur.  
*Ecole d'été temps réel*, 2007.
- [Gra00] T. Grandpierre.  
*Modélisation d'architectures parallèles hétérogènes pour la génération automatique d'exécutifs distribués temps réel optimisés*.  
PhD thesis, Université Paris-Sud, 30/11/2000.
- [GVY90] A. Gerasoulis, S. Venugopal, and T. Yang.  
Clustering task graphs for message passing architectures.  
In *Proceedings of the 4th international conference on Supercomputing*, pages 447–456, New York, NY, USA, 1990. ACM.
- [Hav68] J. W. Havende.  
Avoiding deadlock in multitasking systems.  
*IBM Syst. J.*, 7(2):74–84, June 1968.

- [HCAL89] J.-J. Hwang, Y.-C. Chow, F. D. Anger, and C.-Y. Lee.  
Scheduling precedence graphs in systems with interprocessor communication times.  
*SIAM J. Comput.*, 18:244–257, April 1989.
- [HGRC96] M. Hutton, J. P. Grossman, J. Rose, and D. Corneil.  
Characterization and parameterized random generation of digital circuits.  
In *Proceedings of the 33rd annual Design Automation Conference*, pages 94–99, New York, NY, USA, 1996.
- [Hla04] P. E. Hladik.  
*Ordonnabilité et placement des systèmes temps réel distribués préemptifs et à priorités fixes*.  
PhD thesis, Université de Nantes, Spécialité Automatique et informatique Appliquée, 17/12/2004.
- [JP86] M. Joseph and P. Pandya.  
Finding response times in a real-time system.  
*Comput. J.*, 29(5):390–395, 1986.
- [Kai81] C. Kaiser.  
De l’utilisation de la priorité en présence d’exclusion mutuelle.  
Technical Report RR-0084, INRIA, Jul 1981.
- [Kal04] H. Kalla.  
*Génération automatique de distributions/ordonnancements temps réel fiables et tolérant les fautes*.  
PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Spécialité Systèmes et Logiciel, 17/12/2004.
- [KAS93] D. I. Katcher, H. Arakawa, and J. K. Strosnider.  
Engineering and analysis of fixed priority schedulers.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 19(9):920–934, September 1993.
- [KBKP04] F. Kiraç, U. Bilge, M. Kurtulan, and P. Pekgün.  
A tabu search algorithm for parallel machine total tardiness problem.  
2004.
- [Ker09] Omar Kermia.  
*Ordonnancement temps réel multiprocesseur de tâches non-préemptives avec contraintes de précédence, de périodicité stricte et de latence*.  
PhD thesis, Université Paris XI, UFR scientifique d’Orsay, 2009.
- [Kod07] A. H. Kodancha.  
*Time Management in Partitioned Systems*.

- PhD thesis, Indian Institute of Science, Bangalore, Department of Computer Science and Automation, 2007.
- [Kop98] H. Kopetz.  
The time-triggered model of computation.  
In *Proceedings of the IEEE Real Time Systems Symposium, RTSS'98*, pages 168–177. IEEE Computer Society, 1998.
- [KS07] O. Kermia and Y. Sorel.  
A rapid heuristic for scheduling non-preemptive dependent periodic tasks onto multiprocessor.  
In *Proceedings of ISCA 20th International Conference on Parallel and Distributed Computing Systems, PDCS'07*, Las Vegas, Nevada, USA, sep 2007.
- [KT00] D. Kadamuddi and J. J. P. Tsai.  
Clustering algorithm for parallelizing software systems in multiprocessors environment.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 26:340–361, April 2000.
- [KY07] S. Kato and N. Yammasaki.  
Real-time scheduling with task splitting on multiprocessors.  
In *Proceeding of the 13th IEEE International Conference on Embedded and Real-Time Computing Systems and Applications, RTCSA'07*, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 2007.
- [KY08] S. Katoa and N. Yammasaki.  
Semi-partitioning technique for multiprocessor real-time scheduling.  
In *Proceedings of WIP Session of the 29th Real-Time Systems Symposium (RTSS)*, IEEE Computer Society, 2008.
- [LCGG10] I. Lupu, P. Courbin, L. George, and J. Goossens.  
Multi-criteria evaluation of partitioning schemes for real-time systems.  
In *The 15th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation, ETFA'10*, Bilbao, Spain, September 2010.
- [LDG03] J. M. Lopez, J. L. Diaz, and M. Garcia.  
Utilization bounds for multiprocessor rate-monotonic scheduling.  
*Real Time Systems*, vol 24(number 2):5–28, 2003.
- [LDG04] J. M. Lopez, J. L. Diaz, and M. Garcia.  
Utilization bounds for edf multiprocessor rate-monotonic scheduling.  
*Real Time Systems*, vol 28(number 1), 2004.



- [LGD04] J. M. Lopez, M. Garcia, and D. F. Diaz.  
Minimum and maximum utilization bounds for multiprocessor rate monotonic scheduling.  
*IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, vol. 15(7), October 2004.
- [LGDG00] J. M. Lopez, M. Garcia, J. L. Diaz, and D. F. Garcia.  
Worst-case utilization bound for edf scheduling on real-time multiprocessor system.  
In *Proceedings of 19th Euromicro Conference on Real-Time Systems, ECRTS'00*, Stockholm, Sweden, June 2000.
- [LL73] C. L. Liu and J. W. Layland.  
Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard-real-time environment.  
*Journal of the ACM*, vol. 20(1), January 1973.
- [LM80] J. Leung and M. Merrill.  
A note on preemptive scheduling of periodic, real-time tasks.  
*Information Processing Letters*, 11(3), November 1980.
- [LSD89] J. P. Lechoczky, L. Sha, and Y. Ding.  
The rate-monotonic scheduling algorithm: exact characterization and average behavior.  
In *IEEE Real-Time Systems Symposium RTSS'89*, pages 166–171, 1989.
- [LW82] J. Y-T. Leung and J. Whitehead.  
On the complexity of fixed-priority scheduling of periodic real-time tasks.  
*Performance Evaluation*, vol. 2:237–250, 1982.
- [Mit02] J. E. Mitchell.  
Branch-and-cut algorithms for combinatorial optimization problems.  
In *Handbook of Applied Optimization*, pages 65–67, Oxford University Press, 2002.
- [MKTM93] C. L. McCreary, A. A. Khan, J. J. Thompson, and M. E. McArdle.  
A comparison of heuristics for scheduling DAGs on multiprocessors.  
Technical report, Auburn, AL, USA, 1993.
- [Mok83] A. K. Mok.  
Fundamental design problems of distributed systems for the hard-real-time environment.  
Technical report, Cambridge, MA, USA, 1983.
- [OB98] D. I. Oh and T. P. Baker.

- Utilization bounds for n-processor rate monotone scheduling with stable processor assignment.  
*Real Time Systems*, vol. 15(2):183–193, September 1998.
- [OS93] Y. Oh and S.H. Son.  
Tight performance bounds of heuristics for a real-time scheduling problem.  
Technical Report CS-93-24, Univ. of Virginia. Dep. of Computer Science, Charlottesville, VA 22903, May 1993.
- [OS95] Y. Oh and S.H. Son.  
Fixed-priority scheduling of periodic task on multiprocessor systems.  
Technical Report CS-95-16, Univ. of Virginia. Dep. of Computer Science, Charlottesville, VA 22903, 1995.
- [PBAF10] D. Potop-Butucaru, A. Azim, and S. Fischmeister.  
Semantics-preserving implementation of synchronous specifications over dynamic tdma distributed architectures.  
In *Proceedings of the eighth ACM international conference on Embedded software, EMSOFT'10*, Scottsdale, AZ, USA, October 2010.
- [PEHDN08] H. Pierre-Emmanuel, C. Hadrien, A.-M. Deplanche, and J. Narendra.  
Solving a real-time allocation problem with constraint programming.  
*J. Syst. Softw.*, 81:132–149, January 2008.
- [PFB<sup>+</sup>11] C. Pagetti, J. Forget, F. Boniol, M. Cordovilla, and D. Lesens.  
Multi-task implementation of multi-periodic synchronous programs.  
*Discrete Event Dynamic Systems*, 21(3), sep 2011.
- [Pon01] J. M. Pont.  
*Patterns for Time-triggered Embedded Systems: Building Reliable Applications with the 8051 Family of Microcontrollers*.  
ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., New York, NY, USA, 2001.
- [PSA97] D-T Peng, K. G. Shin, and T. F. Abdelzaher.  
Assignment and scheduling communicating periodic tasks in distributed real-time systems.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 23:745–758, December 1997.
- [Raj90] R. Rajkumar.  
Real-time synchronization protocols for shared memory multiprocessor.

- In *Proceedings of the 10th International Conference on Distributed Computing Systems*, pages 116–123, 1990.
- [Ram90] K. Ramamritham.  
Allocation and scheduling of complex periodic tasks.  
In *Proceedings of the 10th International Conference on distributed Computing Systems (ICDCS)*, 1990.
- [RCR01] P. Richard, Cottet, and M. Richard.  
On-line scheduling of real-time distributed computers with complex communication constraints.  
In *ICECCS*, pages 26–34, 2001.
- [RM00] S. Ramamurth and M. Moir.  
Static-priority periodic scheduling on multiprocessors.  
In *Proceedings of 21th IEEE Real-Time Systems Symposium RTSS'00*, 2000.
- [Sar84] Michel Sarkarovitch.  
*Optimisation Combinatoire: Programmation discrète*.  
Hermann, 1984.
- [SB02] A. Srinivasnan and S. Baruah.  
Deadline-based scheduling of periodic task systems on multiprocessors.  
*Information Processing letters*, vol. 84:93–98, January 2002.
- [She11] Ahmad Al Sheikh.  
*Resource allocation in hard real-time avionic systems. Scheduling and routing problems*.  
PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Département Systèmes Informatiques et Systèmes Embarqués, 2011.
- [SRL90] L. Sha, R. Rajkumar, and J. P. Lehoczky.  
Priority inheritance protocols: An approach to real-time synchronization.  
*IEEE Transactions on Computers*, 39:1175–1185, 1990.
- [SS97] O. Sinnen and L. Sousa.  
List scheduling: extension for contention awareness and evaluation of node priorities for heterogeneous cluster architectures.  
*Real-Time Systems*, 30:81–101, 1997.
- [Sto77] H. S. Stone.  
Multiprocessor scheduling with the aid of network flow algorithms.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 3:85–93, January 1977.
- [Sub05] K. Subramani.

- Periodic linear programming with applications to real-time scheduling.  
*Mathematical. Structures in Comp. Sci.*, 15:383–406, April 2005.
- [SW00] M. Saksena and Y. Wang.  
Scalable real-time system design using preemption thresholds.  
In *Proceedings of 1th IEEE Real-Time Systems symposium*, November 2000.
- [Tal09] E. G Talbi.  
*Metaheuristics: From design to implementation*.  
Wiley, 2009.
- [TBW92] K. Tindell, A. Burns, and A Wellings.  
Allocating hard real time task.  
*Real time systems*, 4:145–165, 1992.
- [Van96] R. J. Vanderbei.  
Linear programming: Foundations and extensions, 1996.
- [VM05] P. V.Hentenryck and L. Michel.  
*Constraint-based Local search*.  
The MIT Press, 2005.
- [WS99] Y. Wang and M. Saksena.  
Scheduling fixed-priority tasks with preemption threshold.  
In *Proceedings of the 6 International Conference on Real-Time Computing Systems and Applications, RTCSA'99*, Washington, DC, USA, 1999.
- [XTL10] G. Liao X. Tang, K. Li and R. Li.  
List scheduling with duplication for heterogeneous computing systems.  
*J. Parallel Distrib. Comput.*, 70:323–329, April 2010.
- [Xu93] J. Xu.  
Multiprocessor scheduling of processes with release times, deadlines, precedence, and exclusion relations.  
*IEEE Trans. Softw. Eng.*, 19:139–154, February 1993.
- [Yom09] P. Meumeu Yomsi.  
*Prise en compte du coût exact de la préemption dans l'ordonnement temps réel monoprocesseur avec contraintes multiples*.  
PhD thesis, Université paris Sud, Spécialité PHYSIQUE, 02/04/2009.
- [ZA05] O.U.P. Zapata and P.M. Alvarez.  
Edf and rm multiprocessor scheduling algorithms: Survey and performance evaluation.

Technical report, Report No. CINVESTAV-CS-RTG-02.  
CINVESTAV-IPN, Sección de Computación, Zacatenco,  
Mexico, Oct 2005.