

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE PARIS 6
UNIVERSITÉ DE CARTHAGE

THÈSE EN COTUTELLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE CARTHAGE

Discipline : **Mathématiques**

présentée par

Issam MEHRZI

sous la direction des Professeurs

Abderrazek KAROUI et Jacques FARAUT

Sujet :

Analyse harmonique et fonctions d'ondes sphéroïdales

Présentée et soutenue publiquement le : 20 Février 2014

Devant le jury composé de :

Habib Marzougui	Professeur à FS Bizerte	Président
Dominique Bakry	Professeur à IM Toulouse	Rapporteur
Michael Voit	Professeur à FM Dortmund	Rapporteur
Néjib Ben Salem	Professeur à FS Tunis	Rapporteur
Sami Mustapha	Professeur à UPMC Paris	Examineur
Abderrazek Karoui	Professeur à FS Bizerte	Directeur de Thèse
Jacques Faraut	Professeur à UPMC Paris	Directeur de Thèse

Remerciement

Au terme de ce travail, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation par leurs soutiens et leurs conseils.

Mes remerciements les plus particulières pour le Professeur Khalifa Trimèche. Il n'a pas cessé à m'aider scientifiquement et moralement et cela depuis la réalisation de mon mémoire de mastère. Je serai reconnaissant, monsieur, pour tout ce que vous m'avez appris.

Je remercie également mes directeurs de thèse : Professeur Abderrazek Karoui et Professeur Jacques Faraut, qui ont permis la mise en oeuvre de ce projet de thèse.

Je remercie le Professeur Jacques Faraut pour m'avoir accueillie comme doctorant tout au long des stages accomplis à l'UPMC. Je vous adresse, monsieur, toute ma gratitude pour le peu que vous m'avez fourni de votre grande expérience pédagogique et scientifique, votre sympathie et ceci durant cette thèse et pendant la réalisation de mon mémoire de mastère.

Je remercie le Pr. Lotfi Kamoun pour ses remarques précieuses.

Je voudrai remercier les rapporteurs de cette thèse : Pr. Dominique Bakry, Pr. Michael Voit et Pr. Néjib Ben Salem, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce manuscrit. J'associe à ces remerciements le Pr. Sami Mustapha d'avoir accepter d'examiner le manuscrit de la thèse. Toutefois, je remercie le Pr. Habib Marzougui pour avoir accepter de présider l'honorable jury.

Sans oublier, le grand mérite pour ma mère, mon père, mes soeurs, mes frères et mes amis pour leurs soutiens morales et leur encouragement.

Table des matières

1	Matrices aléatoires	6
1.1	Formules de Mehta	6
1.1.1	Noyau de Christoffel-Darboux	10
1.1.2	Formule d'intégration de Weyl	11
1.2	Probabilité $A_n(m, B)$ pour qu'un ensemble B contienne m valeurs propres . . .	16
1.3	Asymptotique de $A_n(m, B)$	19
2	Opérateur différentiel de Legendre perturbé	24
2.1	Opérateur de Legendre perturbé	24
2.2	Principe du minimax	26
2.3	Zéros des fonctions propres	35
2.4	Le laplacien en coordonnées sphéroïdales	40
3	Translations généralisées associées à un opérateur différentiel de Legendre perturbé	47
3.1	Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé	49
3.2	Sur un Principe du Maximum	50

3.3	Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé et opérateur intégral à noyau de convolution sinus	59
3.3.1	Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé	59
3.3.2	Opérateur intégral à noyau de convolution sinus	60
4	Etude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau de convolution Sinus	63
4.1	Etude spectrale	64
4.2	Méthode WKB	66
4.3	Asymptotique des PSWF	69
4.3.1	Etude qualitative	69
4.3.2	Etude asymptotique	81
5	Etude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau d'Airy	86
5.1	Fonctions d'Airy	86
5.2	Etude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau d'Airy	87
5.3	Asymptotique des fonctions propres $\Phi_{n,c}$:	92
5.3.1	Cas n fixé et c large :	92
5.3.2	Cas c fixé et n large :	98
6	Exemples numériques	104
	Bibliographie	110

Introduction

L'équation des ondes écrite dans un système de coordonnées sphéroïdales à ellipsoïde allongé donne naissance à des équations différentielles de second degré. Une de ces équations, qui est du type Sturm-Liouville, est de la forme

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{df}{dx} + (\chi - c^2x^2)f = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

où $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R})$ et c est un paramètre réel positif. Pour des valeurs particulières χ_n ($n = 0, 1, \dots$) de χ cette équation admet des solutions bornées qu'on note $\psi_{n,c}$. Ces fonctions sont appelées fonctions d'ondes sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé. La motivation qui nous a conduit à étudier ces fonctions est le fait suivant : En étudiant la probabilité pour qu'une matrice aléatoire gaussienne n'ait aucune valeur propre dans un intervalle $[-s, s]$ ($s > 0$), on arrive à la question d'évaluer le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral

$$Q_c f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{x-y} f(y) dy. \quad (2)$$

On montre que l'opérateur intégral Q_c commute avec l'opérateur différentiel

$$L_c := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - c^2x^2, \quad (3)$$

par suite les fonctions propres de Q_c sont les mêmes que celles de L_c .

Nous étudions dans cette thèse les valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur différentiel, L , de la forme

$$L := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - q(x), \quad (4)$$

dont l'opérateur (3) est un cas particulier. Puis nous étudions les opérateurs qui commutent avec l'opérateur L . Finalement nous étudions le comportement asymptotique de ces fonctions propres pour les grandes valeurs de c . Nous ne sommes pas parvenus à évaluer ou à approximer le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral Q_c . Nous projetons de poursuivre notre travail dans cette direction.

Dans le premier chapitre nous rappelons des résultats de base sur les matrices aléatoires et les polynômes orthogonaux. En particulier nous rappelons les résultats de Mehta concernant la probabilité pour qu'un sous ensemble \mathcal{B} de \mathbb{R} ne contienne aucune valeur propre. Cette probabilité s'exprime à l'aide d'un opérateur intégral. L'étude asymptotique, pour les grandes dimensions, de cette probabilité conduit au déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral Q_c .

Dans le chapitre 2 nous étudions les valeurs propres χ_n et les fonctions propres associées ψ_n de l'opérateur de Legendre perturbé (4) où q est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et paire. À l'aide d'un principe de maximum, nous montrons que

$$\chi_n \sim n^2.$$

Nous montrons aussi que les fonctions propres ψ_n constituent un système total de l'espace $\mathcal{C}([-1, 1])$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$ pour la topologie de la convergence uniforme. Les propriétés classiques d'entrelacement des zéros des polynômes de Legendre s'étendent aux zéros des fonctions propres ψ_n .

Dans le chapitre 3 nous introduisons les translations généralisées T_x , ($x \in [-1, 1]$), associées

à l'opérateur différentiel L au sens de Delsarte. À l'aide d'un principe du maximum pour un problème aux limites hyperbolique, nous montrons que les translations généralisées sont des opérateurs positifs : si $f \geq 0$ alors $T_x f \geq 0$. On en déduit qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], \quad |\psi_n(x)| \leq C.$$

Cette propriété de positivité de T_x permet de munir l'intervalle $[-1, 1]$ d'une structure d'hypergroupe.

Dans les chapitres 4 et 5, nous étudions le comportement asymptotique des fonctions propres $\psi_{n,c}$ et $\Phi_{n,c}$ respectivement de l'opérateur (3) et de l'opérateur défini sur $[0, +\infty[$ par :

$$L_x f = -x \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} + x(x+c)f. \quad (5)$$

Mais pourquoi cette étude asymptotique ? En effet, l'étude de ce qui se passe sur le demi-cercle de Wigner (voir [37]) d'abord dans la partie centrale du demi-cercle et ensuite dans le voisinage des extrémités de demi-cercle, nous mène à étudier après deux changements d'échelle les deux opérateurs intégraux suivant :

$$Q_c f(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)} f(x) dx \quad (6)$$

$$G_c f(y) = \int_c^{+\infty} Ai(x+y) f(x) dx. \quad (7)$$

Les opérateurs (6) et (7) commutent respectivement avec (3) et (5), donc ils ont respectivement les mêmes fonctions propres. Ainsi, dans le but de déterminer le comportement asymptotique, une fois pour c fixé et n large et vice-versa, des fonctions $\psi_{n,c}$ et $\Phi_{n,c}$, nous faisons appel à la méthode WKB qui nous donne une bonne approximation de ces fonctions. En effet, par des changements de variables et de fonctions, nous trouvons que les $\psi_{n,c}$ ainsi que les $\Phi_{n,c}$ sont approchées par des fonctions de Bessel et des fonctions d'Airy. Plus précisément, nous montrons les théorèmes suivants :

Théorème 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé et $c \gg 1$ un réel, on a alors :

$$\psi_{n,c}(x) = \begin{cases} \frac{A_n(cs_n(x))^{\frac{1}{6}} Ai(-(\frac{3}{2}cs_n(x))^{2/3}) + B_n(cs_n(x))^{\frac{1}{6}} Bi(-(\frac{3}{2}cs_n(x))^{2/3})}{((1-x^2)(q_n^2-x^2))^{\frac{1}{4}}} + R_{1,c}(x) & \text{si } x \in [0, q_n], \\ C_n \frac{(ce_n(x))^{\frac{1}{6}} Ai((\frac{3}{2}ce_n(x))^{2/3})}{((1-x^2)(x^2-q_n^2))^{\frac{1}{4}}} + R_{2,c}(x) & \text{si } x \in]q_n, 1 - q_n], \end{cases} \quad (8)$$

où $q_n = \frac{\sqrt{\chi_n}}{c}$, $s_n(x) = \int_x^{q_n} \sqrt{\frac{q_n^2 - t^2}{1 - t^2}} dt$, $e_n(x) = \int_x^{1-q_n} \sqrt{\frac{t^2 - q_n^2}{1 - t^2}} dt$ et A_n, B_n et C_n sont des constantes. Si $x \in]1 - q_n, 1]$ on a :

$$\psi_{n,c}(x) = \begin{cases} D_n \frac{\sqrt{ct_n(x)} I_0(ct_n(x))}{((1-x^2)(x^2-q_n^2))^{\frac{1}{4}}} + R_{3,c}(x) & \text{si } ct_n(x) \leq 1, \\ E_n \frac{\sqrt{ct_n(x)} K_0(ct_n(x))}{((1-x^2)(x^2-q_n^2))^{\frac{1}{4}}} + R_{4,c}(x) & \text{si } ct_n(x) > 1, \end{cases} \quad (9)$$

où $t_n(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{t^2 - q_n^2}{1 - t^2}} dt$ et D_n, E_n sont deux constantes qui ne dépendent que de n , et $|R_{i,c}(x)|$, $i = 1, \dots, 4$ est de l'ordre de c^{-1} .

Théorème 4 : Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé et $c \gg 1$ un réel, on a alors :

$$\Phi_{n,c}(x) = \begin{cases} A'_n \frac{\sqrt{cs_n(x)} J_0(\sqrt{cs_n(x)})}{(x(\chi_n - x(x+c)))^{1/4}} + \tilde{R}_{1,c}(x) & \text{si } x \in [0, \beta_n - 1/c], \\ B'_n \frac{c^{1/4} (ct_n(x))^{1/6} Ai(-(\frac{3}{2}ct_n(x))^{2/3})}{(x(\chi_n - x(x+c)))^{1/4}} + \tilde{R}_{2,c}(x) & \text{si } x \in]\beta_n - 1/c, \beta_n], \\ C'_n \frac{c^{1/4} (c\tau_n(x))^{1/6} Ai(-(\frac{3}{2}c\tau_n(x))^{2/3})}{(x(-\chi_n(c) + x(x+c)))^{1/4}} + \tilde{R}_{3,c}(x) & \text{si } x > \beta_n. \end{cases} \quad (10)$$

où $\beta_n = \frac{2\chi_n}{c + \sqrt{c^2 + 4\chi_n}}$, $s_n(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\frac{\chi_n}{c} - \frac{t}{c}(t+c)}{t}} dt$,
 $t_n(x) = \int_x^{\beta_n} \sqrt{\frac{\frac{\chi_n}{c} - \frac{t}{c}(t+c)}{t}} dt$, $\tau_n(x) = \int_{\beta_n}^x \sqrt{\frac{\frac{\chi_n}{c} - \frac{t}{c}(t+c)}{t}} dt$ et A'_n, B'_n et C'_n sont des constantes qui ne dépendent que de n , et $|\tilde{R}_{i,c}(x)|$ est de l'ordre de c^{-1} .

On note que pour c fixé et n grand, les auteurs dans [8] ont trouvé qu'il existe une constante C telle que :

$$\left| \psi_{n,c}(x) - A \frac{(\chi_n)^{1/4} \sqrt{s_q(x)} J_0(\sqrt{\chi_n} s_q(x))}{((1-x^2)(1-qx^2))^{1/4}} \right| \leq C_q (\chi_n)^{-1/2}, \quad (11)$$

où $q = \frac{c^2}{\chi_n}$, $s_q(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{1-qt^2}{1-t^2}} dt$, $C_q = \frac{C}{(1-q)^{13/4}}$ et A est une constante proche de 1.

Enfin, on a le comportement asymptotique des fonctions $\Phi_{n,c}(x)$ donné par le théorème suivant :

Théorème 5 : *Pour $c > 0$ fixé et $n \gg 1$, les fonctions $\Phi_{n,c}$ se comportent comme suit :*

$$\Phi_{n,c}(x) \sim \begin{cases} A_{1n} \frac{\sqrt{\chi_n s_n(x)} J_0(\sqrt{c s_n(x)})}{(x(1-x(x+c)))^{1/4}} & \text{si } x \in [0, \beta_n - 1/c], \\ B_{1n} \frac{\chi_n^{1/4} (\sqrt{\chi_n} t_n(x))^{1/6} Ai(-(\frac{3}{2} \sqrt{\chi_n} t_n(x))^{2/3})}{(x(\chi_n - x(x+c)))^{1/4}} & \text{si } x \in]\beta_n - 1/c, \beta_n], \\ C_{1n} \frac{\chi_n^{1/4} (\sqrt{\chi_n} \tau_n(x))^{1/6} Ai(-(\frac{3}{2} \sqrt{\chi_n(c)} \tau_n(x))^{2/3})}{(x(-\chi_n + x(x+c)))^{1/4}} & \text{si } x > \beta_n. \end{cases} \quad (12)$$

Où, $s_n(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\rho_n(t)}{t}} dt$, $t_n(x) = \int_x^{\beta_n} \sqrt{\frac{\rho_n(t)}{t}} dt$, $\tau_n(x) = \int_{\beta_n}^x \sqrt{\frac{-\rho_n(t)}{t}} dt$,

avec $\rho_n(x) = 1 - \frac{x(x+c)}{\chi_n}$ et A_{1n}, B_{1n} et C_{1n} sont des constantes qui ne dépendent que de n .

Dans le chapitre 6 nous illustrons les résultats trouvés dans les chapitres 4 et 5 par des exemples numériques pour des valeurs particulières du paramètre c et de l'entier n .

Les chapitres 4 et 5 ont fait l'objet des deux publications :

1. Abderrazek Karoui et Mehrzi Issam, *Asymptotic behaviors and numerical computations of the eigenfunctions and eigenvalues associated with the classical and circular prolate spheroidal wave functions*. Applied Mathematics and Computation . 218 (2012) p 10871-10888.
2. Abderrazek Karoui, Issam Mehrzi et Taher Moumni, *Eigenfunctions of the Airy's integral transform : Properties, numerical computations and asymptotic behaviors*. Journal of Mathematical Analysis and Applications . 389 (2012) p 989-1005.

Chapitre 1

Matrices aléatoires

Les matrices aléatoires, comme son nom l'indique, sont des matrices dont les éléments sont des variables aléatoires, munies d'une certaine loi. L'étude, porte en général sur les valeurs propres de celles-ci, donc des polynômes caractéristiques ou des moments de ceux-ci par rapport à la même loi. On étudie ces propriétés pour un ordre fini, puis leur comportement quand la dimension tend vers l'infini. La plupart des matrices aléatoires étudiées, appartiennent à trois classes de matrices : l'espace vectoriel réel des matrices symétriques réelles de taille $n \times n$, l'espace des matrices hermitiennes complexes de taille $n \times n$, l'ensemble des matrices auto-duales quaternioniques de taille $2n \times 2n$. Ce travail est consacré à l'étude des matrices hermitiennes de taille $n \times n$ qui fait intervenir les polynômes orthogonaux. La référence de base est le livre de M. L. Mehta [37]. Nous avons aussi utilisé les notes de cours [24].

1.1 Formules de Mehta

Soit μ une mesure positive sur \mathbb{R} . On suppose que son support est infini et qu'elle vérifie pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^m \mu(dx) < \infty.$$

Les moments m_j ($j \in \mathbb{N}$) de cette mesure μ sont définis par :

$$m_j = \int_{\mathbb{R}} x^j \mu(dx)$$

Sur l'espace $P[x]$ des polynômes à coefficients réels et d'une variable, on considère le produit scalaire défini pour $p, q \in P[x]$ par :

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x)\mu(dx).$$

Pour ce produit scalaire, $P[x]$ est un espace pré-hilbertien.

Les monômes $1, x, \dots, x^m, \dots$ sont indépendants et par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on obtient une suite $(P_m)_m$ de polynômes orthogonaux par rapport à la mesure μ . Le polynôme P_m est de degré m et :

$$\int_{\mathbb{R}} P_m(x)P_n(x)\mu(dx) = 0 \text{ pour } m \neq n.$$

On normalise ces polynômes de la manière suivante

$$P_m(x) = x^m + \dots + a_1x + a_0,$$

et on pose

$$h_m = \|P_m\|^2.$$

On note $(M_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1}$ la matrice des moments de la mesure μ donnée par :

$$M_{ij} = m_{i+j} = \int_{\mathbb{R}} x^{i+j} \mu(dx),$$

et on pose

$$D_n = \det \left((M_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \right). \tag{1.1}$$

Théorème 1.1 *On a :*

$$D_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n). \quad (1.2)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} D_n &= \det \left((M_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^1 & \dots & x_n^{n-1} \\ x_1^1 & x_2^2 & \dots & x_n^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^n & \dots & x_n^{2n-2} \end{vmatrix} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} x_1^0 x_2^1 \dots x_n^{n-1} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \end{aligned}$$

Cette expression est invariante sous l'action des permutations $\sigma \in \Sigma_n$ où Σ_n est l'ensemble des permutations de n éléments.

On note $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ , alors :

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) \int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} x_1^0 x_2^1 \dots x_n^{n-1} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \begin{vmatrix} x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) x_1^0 x_2^1 \dots x_n^{n-1} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \\ &= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2 \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Théorème 1.2 On a :

$$D_n = h_0 h_1 \dots h_{n-1} \quad (1.3)$$

où $h_j, 0 \leq j \leq n-1$, est la norme au carré de P_j .

Preuve : On considère les polynômes P_m de n variables définies par : $\forall m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$P_m(x) = P_{m_1}(x_1) P_{m_2}(x_2) \dots P_{m_n}(x_n).$$

Ces polynômes sont orthogonaux pour le produit scalaire suivant :

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x) q(x) \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n)$$

et leur norme au carré est :

$$\|P_m\|^2 = h_{m_1} h_{m_2} \dots h_{m_n}$$

On considère le déterminant de Vandermonde $\Delta(x)$ défini par :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(x)^2 \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) = n! h_0 h_1 \dots h_{n-1}. \quad (1.5)$$

En effet, comme un déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne (respectivement à une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement une combinaison linéaire des autres colonnes), alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &= \begin{vmatrix} P_0(x_1) & P_0(x_2) & \cdots & P_0(x_n) \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \cdots & P_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1}(x_1) & P_{n-1}(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) P_0(x_{\sigma(1)}) \cdots P_{n-1}(x_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \epsilon(\sigma) P_{\sigma, \delta}(x),
\end{aligned}$$

où

$$\sigma.m = (m_{\sigma(0)}, m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(n-1)}) \text{ et } \delta = (0, 1, \dots, n-1).$$

Or les polynômes P_m sont orthogonaux par rapport à la mesure μ , donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \Delta(x)^2 \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} P_0(x_{\sigma(1)})^2 P_1(x_{\sigma(2)})^2 \cdots P_{n-1}(x_{\sigma(n)})^2 \mu(dx_1) \cdots \mu(dx_n) \\
&= n! h_0 h_1 \cdots h_{n-1}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.1.1 Noyau de Christoffel-Darboux

Soit $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} par rapport à la mesure μ .

Soit S_n la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ sur l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Soit $(P_k)_k$ une suite de polynômes orthogonaux relativement à la mesure μ , alors

la projection d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ par S_n s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
S_n f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_k} (f, P_k) P_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_k} \left[\int_{\mathbb{R}} f(y) P_k(y) \mu(dy) \right] P_k(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_k} P_k(y) P_k(x) \right) f(y) \mu(dy).
\end{aligned}$$

Définition 1.1 *Le noyau de Christoffel-Darboux, noté K_n , est défini pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ par :*

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{h_k} P_k(x) P_k(y). \quad (1.6)$$

1.1.2 Formule d'intégration de Weyl

On note \mathcal{H}_n l'espace des matrices hermitiennes d'ordre n à coefficients réels ou complexes, U_n le groupe des matrices unitaires et D_n le groupe des matrices diagonales. U_n opère sur \mathcal{H}_n par l'action T définie par :

$$T_u(x) = u x u^*, \quad x \in \mathcal{H}_n, u \in U_n.$$

Une fonction f est invariante par U_n si $f(uxu^*) = f(x)$ pour $x \in \mathcal{H}_n$ et $u \in U_n$. Comme toute matrice $x \in \mathcal{H}_n$ peut être diagonalisée dans une base orthonormée et que ses valeurs propres sont réelles, alors l'application :

$$\begin{aligned} U_n \times D_n &\rightarrow \mathcal{H}_n \\ (u, a) &\mapsto u a u^* \end{aligned}$$

est surjective. Ainsi $f(x)$ ne dépend que des valeurs propres de x . Il existe alors une fonction symétrique F définie sur \mathbb{R}^n telle que :

$$f(x) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ sont les valeurs propres de la matrice x .

Théorème 1.3 *(Formule d'intégration de Weyl)*

Si f est une fonction intégrable sur \mathcal{H}_n , alors

$$\int_{\mathcal{H}_n} f(x) m(dx) = c_n \int_{D_n} \int_{U_n} f(u a u^*) \alpha_n(du) |\Delta(a)|^2 da_1 \dots da_n,$$

où $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, c_n une constante positive, $\alpha_n(du)$ est la mesure de Haar du groupe U_n et $\Delta(a)$ est le polynôme de Vandermonde définie par :

$$\Delta(a) = \prod_{i < j} (a_j - a_i).$$

Pour la preuve, voir [25](p 236).

Soit V une fonction réelle continue telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^m \exp(-V(t)) dt < \infty.$$

On considère la mesure de probabilité $\mathbf{P}_n(dx)$ sur \mathcal{H}_n définie par :

$$\mathbf{P}_n(dx) = \frac{1}{c_n} \exp(-\text{tr}(V(x))) m_n(dx) \quad (1.7)$$

où m_n est la mesure de Lebesgue et c_n est la constante de normalisation définie par :

$$c_n = \int_{\mathcal{H}_n} \exp(-\text{tr}(V(x))) m_n(dx) \quad (1.8)$$

Soit f une fonction intégrable sur \mathcal{H}_n par rapport à la mesure $\mathbf{P}_n(dx)$ et invariante par l'action du groupe unitaire U_n . Ainsi, f ne dépend que des valeurs propres de x , il existe donc une fonction symétrique F telle que :

$$f(x) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (1.9)$$

où les λ_i ($i = 1, \dots, n$), sont les valeurs propres de x .

On pose $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'après la formule d'intégration de Weyl on aura :

$$\int_{\mathcal{H}_n} f(x) \mathbf{P}_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda) q_n(\lambda) d\lambda_1 \dots d\lambda_n, \quad (1.10)$$

où

$$q_n(\lambda) = \frac{1}{c_n} \exp\left(-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)\right) |\Delta(\lambda)|^2, \quad (1.11)$$

avec

$$c_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} |\Delta(\lambda)|^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n, \quad (1.12)$$

et $\Delta(\lambda)$ est le déterminant de Vandermonde.

On considère une suite $(P_m)_m$ de polynômes orthogonaux par rapport à la mesure $\exp(-V(t))dt$.

On normalise ces polynômes afin d'avoir le coefficient du monôme du plus haut degré égal à un :

$$P_m(t) = t^m + \dots$$

On a :

$$h_m = \int_{\mathbb{R}} |P_m|^2(t) \exp(-V(t)) dt, \quad (1.13)$$

par suite :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} |\Delta(\lambda)|^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= n! h_0 h_1 \dots h_{n-1}. \end{aligned}$$

On définit les fonctions φ_m et K_m par :

$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{h_m}} \exp(-\frac{1}{2}V(t)) P_m(t) \quad (1.14)$$

$$K_m(s, t) = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(s) \varphi_k(t). \quad (1.15)$$

Les fonctions φ_m sont orthonormales dans $L^2(\mathbb{R})$ (l'espace des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} par rapport à la mesure de Lebesgue). Le noyau K_m est le noyau de Christoffel-Darboux, associé aux polynômes orthogonaux P_m au facteur près $\exp(-\frac{1}{2}(V(s) + V(t)))$. Il est aussi le noyau de la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$ sur le sous-espace engendré par les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$.

On pose :

$$K \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{pmatrix} = \det (K(s_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq m} \quad (1.16)$$

Cette notation a été introduite par Fredholm pour un noyau $K(s, t)$.

Théorème 1.4 (1^{ere} formule de Mehta)

$$q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{1}{n!} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \frac{1}{Z_n} |\Delta(\lambda)|^2 \exp\left(-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)\right) \\ &= \frac{1}{n! h_0 \dots h_{m-1}} \left(\prod_{k=1}^m \exp(-V(\lambda_k)) [\det(P_i(\lambda_j))]^2\right) \\ &= \frac{1}{n!} [\det(\varphi_i(\lambda_j))]^2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

avec $0 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq m$.

Considérons la matrice $A = (\varphi_i(\lambda_j))$ pour $0 \leq i \leq m-1$ et $1 \leq j \leq m$, alors les coefficients de la matrice B définie par $B = A^T A$ sont :

$$B_{ij} = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_k(\lambda_i) \varphi_k(\lambda_j) = K_m(\lambda_i, \lambda_j).$$

Donc

$$\begin{aligned} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \frac{1}{n!} [\det(\varphi_i(\lambda_j))]^2 \\ &= \frac{1}{n!} \det(B) \\ &= \frac{1}{n!} K_m \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 Soit K le noyau d'une projection orthogonale P de $L^2(\mathbb{R})$ sur un sous-espace de dimension n . Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}} K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{pmatrix} dt_m = (n - m + 1) K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

□

Preuve : Le noyau K vérifie les propriétés suivantes :

1. $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$ puisque $P^* = P$.
2. $\int_{\mathbb{R}} K(s, u)K(u, t)du = K(s, t)$ car $P \circ P = P$.
3. $\int_{\mathbb{R}} K(s, s)ds = n$, du fait que $\text{tr}P = n$.

Soit A_m la matrice hermitienne $m \times m$ dont les coefficients $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ sont définis par :

$$a_{ij} = K(t_i, t_j).$$

On a

$$A_m = \begin{pmatrix} A_{m-1} & \alpha \\ \alpha^* & \gamma \end{pmatrix}$$

où $\alpha = (K(t_1, t_m), \dots, K(t_{m-1}, t_m))$, $\gamma = K(t_m, t_m)$ et A_{m-1} est la matrice obtenue de A_m en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne. En posant \tilde{A}_{m-1} la matrice des cofacteurs de A_{m-1} , on obtient :

$$\det A_m = \det A_{m-1} \cdot \gamma - \alpha^* \tilde{A}_{m-1} \alpha.$$

Donc

$$\det(K(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq m}) = \det(K(t_i, t_j)_{1 \leq i, j \leq m-1})K(t_m, t_m) - \sum_{i, j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} K(t_j, t_m) K(t_m, t_i).$$

En intégrant cette relation par rapport à t_m et en tenant compte des propriétés du noyau K , on aura :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_m \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{pmatrix} dt_m &= K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}} K(t_m, t_m) dt_m \\ &- \sum_{i, j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} \int_{\mathbb{R}} K(t_j, t_m) K(t_m, t_i) dt_m \\ &= nK \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{m-1} \end{pmatrix} - \sum_{i, j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} K(t_j, t_i). \end{aligned}$$

Du fait que :

$$\sum_{j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} K(t_j, t_i) = \sum_{j=1}^{m-1} \tilde{a}_{ij} a_{ji} = \det A_{m-1},$$

on déduit le résultat. \square

On définit la fonction de corrélation R_m de m variables par :

$$R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \frac{n!}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{m+1} \dots d\lambda_n. \quad (1.20)$$

Pour $m = n$, on a :

$$R_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = n! q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

D'après la proposition 1.1 appliquée $(n-m)$ fois,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-m}} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m & \lambda_{m+1} & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m & \lambda_{m+1} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} d\lambda_{m+1} \dots d\lambda_n = (n-m)! K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

De la 1^{ere} formule de Mehta on obtient :

$$\begin{aligned} R_m(\lambda_1, \dots, \lambda_m) &= \frac{n!}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) d\lambda_{m+1} \dots d\lambda_n \\ &= \frac{1}{(n-m)!} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m & \lambda_{m+1} & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m & \lambda_{m+1} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} d\lambda_{m+1} \dots d\lambda_n \\ &= K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.2 Probabilité $A_n(m, B)$ pour qu'un ensemble B contienne m valeurs propres

Dans cette section on s'intéresse à la probabilité pour qu'un borélien B de \mathbb{R} contienne exactement m valeurs propres d'une matrice aléatoire gaussienne (MAG) d'ordre n . On note cette probabilité $A_n(m, B)$.

On considère sur \mathcal{H}_n , l'espace des matrices hermitiennes d'ordre n , la probabilité

$$\mathbf{P}_n(dx) = \frac{1}{c_n} e^{-\text{tr}(V(x))} m(dx), \quad (1.22)$$

où $x \in \mathcal{H}_n$, $m(dx)$ est la mesure de Haar définie sur \mathcal{H}_n et c_n est la constante de normalisation.

Appliquons la formule d'intégration de Weyl à la probabilité (1.22). On trouve que celle-ci s'écrit à l'aide des valeurs propres de la matrice x :

$$\mathbf{P}_n(d\lambda) = q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

avec

$$\begin{aligned} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \frac{1}{c_n} e^{-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} (\Delta(\lambda))^2 \\ c_n &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n V(\lambda_i)} (\Delta(\lambda))^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n. \end{aligned}$$

On considère les polynômes P_n , qui sont orthogonaux par rapport à la mesure à densité $e^{-V(x)} dx$ et normalisés de sorte que $P_n(t) = t^n + \dots$

Probabilité $A_n(m, B)$

Soit B un borélien borné de \mathbb{R} . On se propose de calculer la probabilité pour qu'une matrice hermitienne d'ordre n admette exactement m valeurs propres dans B . On note cette probabilité $A_n(m, B)$. Pour $m = 0$, $A_n(0, B)$ représente un trou dans le spectre de cette matrice. Dans ce cas

$$\begin{aligned} A_n(0, B) &= \int_{(\mathbb{R}/B)^n} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (1 - \chi(\lambda_j)) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n, \end{aligned}$$

où χ est la fonction caractéristique de B . On pose

$$A(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n (1 - z\chi(\lambda_j)) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

On considère les fonctions symétriques élémentaires

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= \sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \sigma_2 &:= \sigma_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \\ &\vdots \\ \sigma_n &:= \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.\end{aligned}$$

On écrit $\prod_{j=1}^n (1 - z\alpha_j) = 1 - \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 - \dots + (-1)^n \sigma_n z^n$, d'où

$$\prod_{j=1}^n (1 - z\chi(\lambda_j)) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k(\chi(\lambda_1), \dots, \chi(\lambda_n)) z^k.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}& \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_k(\chi(\lambda_1), \dots, \chi(\lambda_n)) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \chi(\lambda_{i_1}) \dots \chi(\lambda_{i_k}) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_{\mathbb{R}^n} \chi(\lambda_1) \dots \chi(\lambda_k) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \int_{B^k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_{k+1} \dots d\lambda_n \right) d\lambda_1 \dots d\lambda_k \\ &= \frac{1}{k!} \int_{B^k} R_k(\lambda_1, \dots, \lambda_k) d\lambda_1 \dots d\lambda_k,\end{aligned}$$

où R_k est la fonction de corrélation définie dans (1.20). D'après (1.21)

$$A(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} z^k \int_{B^k} K_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} d\lambda_1 \dots d\lambda_k = \det_B (I - zK_n).$$

Rappelons la formule de Fredholm pour le déterminant du même nom d'un noyau mesurable borné $K(x, y)$ sur un espace mesuré (X, μ) :

$$\det(I - zK) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} z^k \int_{X^k} K_n \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_k).$$

C'est une fonction entière de z , et, si K est un noyau de rang fini, la série se réduit à une somme fini. Voir le livre de R. Courant et D. Hilbert [19]. Ainsi, on vient de démontrer la proposition suivante

Proposition 1.2

$$A_n(0, B) = \det_B (I - zK_n)_{/z=1} = \det_B (I - K_n).$$

La probabilité $A_n(m, B)$ pour $m \neq 0$ est donnée par

Proposition 1.3

$$A_n(m, B) = \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dz} \right)^m \det_B (I - zK_n)_{/z=1}.$$

L'indice B indique qu'il s'agit du déterminant de Fredholm du noyau K_n restreint à $B \times B$.

Preuve : Pour $m \neq 0$

$$\begin{aligned} A_n(m, B) &= \int_{B^m} \int_{(\mathbb{R}/B)^{n-m}} q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_E \prod_{i \in E} \chi(\lambda_i) \prod_{j \notin E} (1 - \chi(\lambda_j)) \right) q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \end{aligned}$$

où E est l'ensemble de tous les parties de $\{1, \dots, n\}$ à m éléments. En utilisant les fonctions symétriques $\sigma_i, i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d}{dz} \right)^m \det_B (I - zK_n) &= \left(-\frac{d}{dz} \right)^m ((-1)^m \sigma_m z^m + \dots + (-1)^n \sigma_n z^n) \\ &= \sigma_m m! + \dots + (-1)^{n+m} \sigma_n n(n-1) \dots (n-m+1) z^{n-m} = m! \sum_E \prod_{i \in E} \alpha_i \prod_{j \notin E} (1 - \alpha_j), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

1.3 Asymptotique de $A_n(m, B)$

Dans cette section, on suppose que $V(t) = t^2$. Dans ce cas les polynômes orthogonaux qui interviennent dans le calcul sont les polynômes d'Hermite H_n . On se propose d'étudier comment se comporte la probabilité $A_n(m, B)$ lorsque n tend vers l'infini. Pour cela on va utiliser une propriété asymptotique des fonctions d'Hermite. Les fonctions d'Hermite sont données par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \tag{1.23}$$

où H_n est le polynôme d'Hermite de degré n et

$$h_n = \int_{\mathbb{R}} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Le noyau de Christoffel-Darboux associé est

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x) \varphi_k(y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} H_k(x) H_k(y). \quad (1.24)$$

On a aussi pour $x \neq y$

$$K_n(x, y) = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\varphi_n(x) \varphi_{n-1}(y) - \varphi_{n-1}(x) \varphi_n(y)}{x - y},$$

et pour $x \in \mathbb{R}$

$$K_n(x, x) = n \varphi_{n-1}^2(x) - \sqrt{n(n-1)} \varphi_n(x) \varphi_{n-2}(x).$$

Les fonctions φ_n vérifient l'équation différentielle

$$u'' + (2n+1)u = x^2 u. \quad (1.25)$$

Proposition 1.4

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \cos\left(\sqrt{2n+1}x - n\frac{\pi}{2}\right) + r_n(x),$$

avec

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} |x|^{\frac{5}{2}},$$

$$\text{si } n = 2m, \quad \alpha_{2m} = \varphi_{2m}(0) = \frac{(2m)!}{m!} \frac{1}{\sqrt{h_{2m}}}$$

$$\text{et si } n = 2m+1 \quad \alpha_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{4m+3}} \varphi'_{2m+1}(0) = 2 \frac{(2m+1)!}{m!} \frac{1}{\sqrt{(4m+3)h_{2m+1}}}.$$

Quand n tend vers l'infini

$$\alpha_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Preuve : Les fonctions φ_n vérifient (1.25) avec la donnée $u(0) = \varphi_n(0)$ et $u'(0) = \varphi_n'(0)$. On pose $g(x) = x^2 u(x)$. La fonction g est continue sur \mathbb{R} . Une solution de (1.25) sans second membre est de la forme

$$u(x) = A \cos \sqrt{2n+1}x + B \sin \sqrt{2n+1}x,$$

où A et B sont deux constantes réelles. Une solution avec second membre est de la forme

$$u(x) = A \cos \sqrt{2n+1}x + B \sin \sqrt{2n+1}x + \int_0^x \frac{\cos \sqrt{2n+1}x \sin \sqrt{2n+1}y - \cos \sqrt{2n+1}y \sin \sqrt{2n+1}x}{\mathcal{W}(\cos \sqrt{2n+1}\cdot, \sin \sqrt{2n+1}\cdot)(y)} g(y) dy.$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2n}(0) &= \frac{1}{\sqrt{d_{2n}}} H_{2n}(0) = \frac{1}{\sqrt{h_{2n}}} \frac{(2n)!}{n!}, & \varphi_{2n+1}(0) &= 0 \\ \varphi'_{2n+1}(0) &= 2 \frac{(2n+1)!}{n! \sqrt{(4n+3)h_{2n+1}}}, & \varphi'_{2n}(0) &= 0. \end{aligned}$$

En posant $r_n(x) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{2n+1}(x-y)}{\sqrt{2n+1}} g(y) dy$, on obtient

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) \cos \sqrt{2n+1}x + \varphi_n'(0) \frac{\sin(\sqrt{2n+1}x)}{\sqrt{2n+1}} + r_n(x).$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 |\varphi_n(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \left(\int_0^x y^4 dy \right)^{1/2} \left(\int_0^x \varphi_n^2(y) dy \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{5(2n+1)}} |x|^{5/2}. \end{aligned}$$

D'autre part de la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n},$$

on déduit que $\alpha_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{4}} (n \rightarrow \infty)$.

Dans la suite, on démontrera un résultat énoncé dans [37](p 122), qui consiste à donner la limite de la probabilité $A_n(0, \frac{1}{\sqrt{2n}}B)$. Celle ci s'exprime à l'aide d'un déterminant de Fredholm.

Théorème 1.5 Soit $B \subset \mathbb{R}$ un ensemble borélien borné. Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(0, \frac{1}{\sqrt{2n}}B) = \det_B(I - K),$$

où $K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x-y)}{x-y}$.

Preuve : On sait que

$$A_n(0, \frac{1}{\sqrt{2n}}B) = \det_{\frac{1}{\sqrt{2n}B}}(I - K_n) = \det_B(I - \tilde{K}_n),$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{K}_n(\xi, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{2n}} K_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi, \frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\right) \\ &= \frac{\sqrt{2n}}{2} \frac{\varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi\right)\varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\right) - \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\xi\right)\varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\eta\right)}{\xi - \eta}. \end{aligned}$$

De la proposition 1.4 on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{K}_n(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta},$$

et qu'il existe $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\tilde{K}_n(\xi, \eta)| \leq M$, et enfin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det_B(I - \tilde{K}_n) = \det_B(I - K).$$

□

Corollaire 1.1 Soit B un ensemble borélien de \mathbb{R} .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(m, \frac{1}{\sqrt{2n}}B) = \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dz}\right)^m \det_B(I - zK)_{/z=1}.$$

Preuve : On sait que

$$A_n(m, \frac{1}{\sqrt{2n}}B) = \frac{1}{m!} \left(-\frac{d}{dz}\right)^m \det_{\frac{1}{\sqrt{2n}B}}(I - zK_n)_{/z=1},$$

et du théorème précédent on sait qu'il existe $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |\tilde{K}_n(\xi, \eta)| \leq M$, et enfin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det_B(I - \tilde{K}_n) = \det_B(I - K).$$

La convergence étant uniforme sur tout compact de \mathbb{C} . Par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{d}{dz}\right)^m \det_B(I - z\tilde{K}_n)_{/z=1} = \left(-\frac{d}{dz}\right)^m \det_B(I - zK)_{/z=1}.$$

□

Notre travail est motivé par le théorème 1.5. Nous allons étudier l'opérateur de noyau K sur un intervalle $B = [-c, c], c > 0$,

$$A_c f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\sin(\xi - \eta)}{\xi - \eta} f(\eta) d\eta,$$

qui s'écrit aussi après changement de variable

$$Q_c f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x - y)}{x - y} f(y) dy.$$

Nous verrons que les fonctions propres de l'opérateur Q_c sont des fonctions spéciales classiques appelées fonctions d'onde sphéroïdales.

Chapitre 2

Opérateur différentiel de Legendre perturbé

Nous étudions dans ce chapitre un opérateur différentiel de Legendre que nous avons perturbé par une fonction continue sur $[-1, 1]$ et paire. Nous montrons des propriétés de ses fonctions propres et les valeurs propres associées.

2.1 Opérateur de Legendre perturbé

Soit L l'opérateur différentiel sur $[-1, 1]$ défini par

$$L := \frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx} - q(x), \quad (2.1)$$

où q est une fonction continue sur $[-1, 1]$ et paire. C'est une perturbation de l'opérateur de Legendre

$$L^{(0)} := \frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}$$

qui correspond au cas où $q \equiv 0$.

Valeurs propres et fonctions propres

L'opérateur L muni du domaine $Dom(L) = \mathcal{C}^2([-1, 1])$ est essentiellement autoadjoint dans $L^2([-1, 1])$. Son spectre est discret. Le nombre $-\chi$ est une valeur propre si et seulement s'il existe une solution ψ de $L\psi + \chi\psi = 0$ sur $] - 1, 1[$, ayant des limites en -1 et 1 . Les valeurs propres constituent une suite χ_n ,

$$\chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = +\infty.$$

Les fonctions propres ψ_n correspondantes seront normalisées par la condition $\psi_n(1) = 1$. Elles constituent une base orthogonale de $L^2([-1, 1])$. Observons que, si $q \equiv 0$, $\chi_n = n(n+1)$, et ψ_n est le polynôme de Legendre P_n de degré n .

Proposition 2.1 *Les fonctions ψ_n constituent un système orthogonal complet de $L^2([-1, 1])$.*

Posons

$$h_n = \|\psi_n\|^2 = \int_{-1}^1 \psi_n^2(x) dx,$$

et, pour une fonction $f \in L^2([-1, 1])$,

$$a_n(f) = (f|\psi_n) = \int_{-1}^1 f(x)\psi_n(x) dx.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} a_n(f) \psi_n(x),$$

la convergence ayant lieu en moyenne quadratique, c'est-à-dire au sens de L^2 . De plus

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} |a_n(f)|^2.$$

Notons que, si $q \equiv 0$ alors $h_n = \frac{2}{2n+1}$.

On considère l'espace \mathcal{H}^1 des fonctions $f \in L^2([-1, 1])$ dont la dérivée au sens des distributions

est définie par une fonction localement intégrable f' et vérifie

$$\mathcal{D}_0(f) := \int_{-1}^1 (1-x^2)|f'(x)|^2 dx < \infty.$$

On notera aussi

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &:= \int_{-1}^1 (1-x^2)|f'(x)|^2 dx + \int_{-1}^1 q(x)|f(x)|^2 dx \\ &:= \mathcal{D}_0(f) + \int_{-1}^1 q(x)|f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Muni de la norme $\sqrt{\mathcal{D}_0(f) + \|f\|^2}$, l'espace \mathcal{H}^1 est un espace de Hilbert. À l'aide d'une intégration par partie on montre que, si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$, alors

$$(Lf|f) = -\mathcal{D}(f).$$

Notons que $\psi_n \in \mathcal{H}^1$, $\mathcal{D}(\psi_n) = h_n \chi_n$, et que, si $f \in \mathcal{H}^1$, alors

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi_n}{h_n} |a_n(f)|^2.$$

2.2 Principe du minimax

Ce principe va nous permettre de comparer les valeurs propres $-\chi_n$ de l'opérateur L aux valeurs propres $-\chi_n^{(0)} = -n(n+1)$ de l'opérateur de Legendre $L^{(0)}$.

Théorème 2.1 (*PRINCIPE DU MINIMAX*). *On note \mathcal{M} un sous-espace de dimension finie de \mathcal{H}^1 . Ce principe s'énonce*

$$\chi_n = \min_{\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^1, \dim \mathcal{M} = n+1} \max_{f \in \mathcal{M}, \|f\|=1} \mathcal{D}(f).$$

Preuve : Notons \mathcal{H}_n^1 le sous-espace de \mathcal{H}^1 engendré par les fonctions $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$, et \mathcal{P}_n la projection orthogonale de \mathcal{H}^1 sur \mathcal{H}_n^1 :

$$\mathcal{P}_n f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} a_k(f) \psi_k.$$

Soit \mathcal{M} un sous-espace de \mathcal{H}^1 de dimension $n + 1$. Puisque $\dim \mathcal{H}_{n-1}^1 < \dim \mathcal{M}$, le noyau de la restriction de \mathcal{P}_{n-1} à \mathcal{M} n'est pas réduit à $\{0\}$. Il existe donc une fonction $f \in \mathcal{M}$ de norme 1 telle que $\mathcal{P}_{n-1}f = 0$. Ainsi, pour cette fonction f

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h_k} a_k(f) \psi_k, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_k} |a_k(f)|^2 = 1,$$

et aussi

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\chi_k}{h_k} |a_k(f)|^2 \geq \chi_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{h_k} |a_k(f)|^2 = \chi_n.$$

Ceci montre que

$$\sup_{f \in \mathcal{M}, \|f\|=1} \mathcal{D}(f) \geq \chi_n.$$

Puisque la sphère unité de \mathcal{M} est compacte,

$$\max_{f \in \mathcal{M}, \|f\|=1} \mathcal{D}(f) \geq \chi_n.$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathcal{H}_n^1$, si $f \in \mathcal{M}$, alors

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} a_k(f) \psi_k, \quad \|f\|^2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{h_k} |a_k(f)|^2,$$

et si $\|f\| = 1$, alors

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=0}^n \frac{\chi_k}{h_k} |a_k(f)|^2 \leq \chi_n.$$

En particulier, si $f = \frac{1}{\sqrt{h_n}} \psi_n$, alors $\mathcal{D}(f) = \chi_n$. Donc

$$\max_{f \in \mathcal{M}, \|f\|=1} \mathcal{D}(f) = \chi_n.$$

Le théorème est ainsi établi. □

Corollaire 2.1 Posons $M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |q(x)|$.

Du principe du minimax il résulte que

$$|\chi_n - n(n+1)| \leq M.$$

Ainsi $\chi_n \sim n^2$.

Preuve : Lorsque $q \equiv 0$, l'opérateur $L = L^{(0)}$ est l'opérateur de Legendre et alors $\chi_n^0 = n(n+1)$.

Donc

$$\min_{\mathcal{M} \subset \mathcal{H}^1, \dim \mathcal{M} = n+1} \max_{f \in \mathcal{M}, \|f\|=1} (L^{(0)}f|f) = n(n+1).$$

Puisque

$$\mathcal{D}_0(f) - M\|f\|^2 \leq \mathcal{D}(f) \leq \mathcal{D}_0(f) + M\|f\|^2,$$

le résultat s'en déduit. □

Résolvante

Notons $\mathcal{W}(u_1, u_2)$ le wronskien modifié des deux fonctions u_1 et u_2 :

$$\mathcal{W}(u_1, u_2) = (1 - x^2) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}.$$

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de $Lu + \chi u = 0$, leur wronskien modifié est constant, et il est nul si et seulement si u_1 et u_2 sont proportionnelles. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{W}}{dx} &= (L^{(0)}u_2)u_1 - (L^{(0)}u_1)u_2 \\ &= (Lu_2)u_1 - (Lu_1)u_2 \\ &= -\chi u_2 u_1 + \chi u_1 u_2 = 0. \end{aligned}$$

Notons $\psi(x, \chi)$ l'unique solution de l'équation différentielle $L\psi + \chi\psi = 0$ sur $] -1, 1[$, continue en $x = 1$ et vérifiant $\psi(1) = 1$. Puisque q est paire, la fonction $\psi(-x, \chi)$ est aussi solution. Le wronskien modifié de $\psi(x, \chi)$ et de $\psi(-x, \chi)$ est constant. On le note

$$B(\chi) = \mathcal{W}(\psi(x, \chi), \psi(-x, \chi)). \tag{2.2}$$

La fonction B est analytique entière. Les valeurs propres de L sont les zéros de la fonction B .

Ils sont simples. De plus

$$\psi_n(x) = \psi(x, \chi_n).$$

Si $\chi = \chi_n$, alors $\psi(x, \chi_n)$ et $\psi(-x, \chi_n)$ sont proportionnelles : Il existe $\epsilon_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\psi(-x, \chi_n) = \epsilon_n \psi(x, \chi_n),$$

et $\epsilon_n^2 = 1$, donc $\epsilon_n = \pm 1$.

Exemple

Prenons, dans l'expression de l'opérateur différentiel L , $q \equiv 0$. Alors

$$B(\chi) = \mathcal{W}(P_\nu(x), P_\nu(-x)) = -\frac{2}{\pi} \sin \pi \nu, \quad \text{avec } \nu(\nu + 1) = \chi,$$

où P_ν est la fonction de Legendre d'ordre ν , voir [34].

Cherchons maintenant une deuxième solution $\varphi(x, \chi)$ de l'équation différentielle $Lf + \chi f = 0$ sur $] -1, 1[$, telle que

$$\mathcal{W}(\psi(x, \chi), \varphi(x, \chi)) = 1.$$

On considère l'équation différentielle

$$(1 - x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + (\chi - q(x))u = 0. \quad (2.3)$$

Notons que $\psi(x, \chi)$ est une solution régulière en 1. On cherche une deuxième solution $\varphi(x, \chi)$ de la forme

$$\varphi(x, \chi) = \omega(x, \chi) \psi(x, \chi),$$

où $\omega(x, \chi)$ est une fonction à déterminer de sorte que $\psi(x, \chi)$ et $\varphi(x, \chi)$ constituent une base de l'espace des solutions sur $] -1, 1[$. En remplaçant cette expression dans (2.3), on obtient

$$(1 - x^2) \left[\omega(x, \chi)'' \psi(x, \chi) + 2\omega(x, \chi)' \psi(x, \chi)' \right] - 2x\omega(x, \chi)' \psi(x, \chi) = 0,$$

et en divisant par $\omega(x, \chi) \psi(x, \chi)$,

$$\frac{\omega(x, \chi)''}{\omega(x, \chi)'} + 2 \frac{\psi(x, \chi)'}{\psi(x, \chi)} = \frac{2x}{1 - x^2}.$$

Enfin,

$$\omega(x, \chi)(x) = \int_0^x \frac{1}{(1-t^2)\psi^2(t, \chi)(t)} dt, \quad (2.4)$$

et une solution générale $u(x, \chi)$ de l'équation différentielle $Lf + \chi f = 0$ est de la forme

$$u(x, \chi) = \psi(x, \chi)(A_1 + A_2\omega(x, \chi)), \quad (2.5)$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes. Posons $\varphi(x, \chi) = \omega(x, \chi)\psi(x, \chi)$ ($A_1 = 0$ et $A_2 = 1$). Puisque $\psi(1, \chi) = 1$,

$$\varphi(x, \chi) = \varphi(x, \chi) \sim -\frac{1}{2} \log(1-x) \quad (x \rightarrow 1). \quad (2.6)$$

Dans le cas où $q \equiv 0$, on peut prendre (voir [34])

$$\varphi(x, \chi) = Q_\nu(x), \quad \nu(\nu+1) = \chi,$$

où Q_ν est la fonction de Legendre de deuxième espèce d'ordre ν .

Le wronskien modifié des fonctions $\psi(x, \chi)$ et $\varphi(x, \chi)$ est

$$\mathcal{W}(\psi(x, \chi), \varphi(x, \chi)) = 1,$$

et donc,

$$\psi(-x, \chi) = B(\chi)\varphi(x, \chi) + C\psi(x, \chi), \quad (2.7)$$

où C est une constante. Par suite, si $B(\chi) \neq 0$,

$$\psi(-x, \chi) \sim -\frac{1}{2}B(\chi) \log(1-x) \quad (x \rightarrow 1). \quad (2.8)$$

Si $-\chi$ n'est pas une valeur propre, c'est-à-dire $B(\chi) \neq 0$, le noyau de Green G_χ est défini sur $] -1, 1[\times] -1, 1[$ par

$$G_\chi(x, y) = \frac{1}{B(\chi)} \begin{cases} \psi(-x, \chi)\psi(y, \chi), & \text{si } x \leq y; \\ \psi(x, \chi)\psi(-y, \chi), & \text{si } y \leq x. \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour une fonction f définie sur $[-1, 1]$, on pose

$$(R_\chi f)(x) = \int_{-1}^1 G_\chi(x, y) f(y) dy.$$

Proposition 2.2 (i) *L'opérateur R_χ est continu de $L^2([-1, 1])$ dans $\mathcal{C}([-1, 1])$.*

(ii) *Si f est de classe \mathcal{C}^2 ,*

$$R_\chi(Lf + \chi f) = -f.$$

Lemme 2.1 *Il existe une constante C , qui ne dépend que de χ , telle que, pour tout x ,*

$$\int_{-1}^1 |G_\chi(x, y)|^2 dy \leq C.$$

Preuve : La démonstration se fait en trois étapes :

(1) Il existe une constante C telle que, si $0 \leq x \leq 1$,

$$|\psi(-x, \chi)| \leq C \log \frac{1}{1-x}.$$

En effet, d'après (2.5),

$$\psi(-x, \chi) = \psi(x, \chi) (A + B\omega(x, \chi)),$$

où ω est la fonction définie dans (2.4). La fonction $\psi(x, \chi)$ est continue sur $[0, 1]$, donc il existe une constante D telle que

$$|\omega(x, \chi)| \leq D \int_0^x \frac{dt}{1-t} = D \log \frac{1}{1-x}, \quad x \in [0, 1].$$

(2) Par une intégration par parties, on obtient

$$\int_x^1 \left(\log \frac{1}{1-y} \right)^2 dy = (1-x) \log^2(1-x). \quad (2.10)$$

Donc la fonction $\psi(-x, \chi)$ est de carré intégrable.

(3) Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\int_{-1}^1 |G_\chi(x, y)|^2 dy = \frac{1}{B^2(\chi)} \left(\psi^2(x, \chi) \int_{-1}^x \psi^2(-y, \chi) dy + \psi^2(-x, \chi) \int_x^1 \psi^2(y, \chi) dy \right).$$

Posons

$$H(x) = \int_{-1}^1 |G_\chi(x, y)|^2 dy$$

$$H_1(x) = \psi^2(x, \chi) \int_{-1}^x \psi^2(-y, \chi) dy, \quad H_2(x) = \psi^2(-x, \chi) \int_x^1 \psi^2(y, \chi) dy$$

Pour $x \geq 0$, $\psi(x, \chi)$ est bornée et $\int_{-1}^1 \psi^2(-y, \chi) dy < \infty$, donc la fonction $H_1(x)$ est bornée. D'autre part, il existe deux constantes D_1 et D_2 telles que

$$\int_x^1 \psi^2(y, \chi) dy \leq D_1(1-x) \text{ et } \psi^2(-x, \chi) \leq D_2 \log^2 \frac{1}{1-x},$$

donc la fonction $H_2(x)$ est bornée et donc $H(x)$ est bornée pour $x \geq 0$. Par symétrie, $H(x)$ est également bornée pour $x \leq 0$.

□

Preuve de la Proposition 2.2 :

(i) En utilisant le lemme précédent et l'inégalité de Schwarz on obtient, pour $f \in L^2([-1, 1])$,

$$\begin{aligned} |(R_\chi f)(x)|^2 &\leq \int_{-1}^1 |G_\chi(x, y)|^2 dy \|f\|^2 \\ &\leq C \|f\|^2. \end{aligned}$$

Supposons que le support de f soit contenu dans $] -1, 1[$, $\text{supp}(f) \subset [-\alpha, \alpha]$ ($0 < \alpha < 1$).

Pour $x \in [-\alpha, \alpha]$,

$$B(\chi)R_\chi f(x) = \psi(x, \chi) \int_{-\alpha}^x \psi(y, \chi) f(y) dy + \psi(-x, \chi) \int_x^\alpha \psi(y, \chi) f(y) dy,$$

donc $R_\chi f$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$.

Pour $\alpha \leq x < 1$,

$$B(\chi)R_\chi f(x) = \psi(x, \chi) \int_{-1}^\alpha \psi(y, \chi) f(y) dy,$$

donc $R_\chi f$ est continue sur $[\alpha, 1[$ et a une limite en $x = 1$. De même, pour $-1 < x \leq -\alpha$,

$$B(\chi)R_\chi f(x) = \psi(-x, \chi) \int_{-\alpha}^x \psi(y, \chi) f(y) dy,$$

donc $R_\chi f$ est continue sur $] -1, -\alpha]$ et a une limite en $x = -1$. Puisque l'espace des fonctions f de $L^2([-1, 1])$ de support contenu dans $] -1, 1[$ est dense dans $L^2([-1, 1])$, on en déduit, d'après (i), que R_χ est un opérateur continu de $L^2([-1, 1])$ dans $\mathcal{C}([-1, 1])$.

(ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}^2$,

$$B(\chi)(R_\chi f)(x) = \psi(x, \chi) \int_{-1}^x \psi(-y, \chi) f(y) dy + \psi(-x, \chi) \int_x^1 \psi(y, \chi) f(y) dy.$$

En utilisant la relation

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx} \mathcal{W}(u, v),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} & B(\chi)R_\chi(Lf + \chi f)(x) \\ &= \psi(x, \chi) [\mathcal{W}(\psi(-y, \chi), f(y))]_{-1}^x + \psi(-x, \chi) [\mathcal{W}(\psi(y, \chi), f(y))]_x^1 \\ &= \psi(x, \chi)(1 - x^2) \left(\psi(-x, \chi) f'(x) + \psi'(-x, \chi) f(x) \right) \\ &\quad - \psi(-x, \chi)(1 - x^2) \left(\psi(x, \chi) f'(x) + \psi'(x, \chi) f(x) \right) \\ &= (1 - x^2) \left(\psi(x, \chi) \psi'(-x, \chi) + \psi(-x, \chi) \psi'(x, \chi) \right) f(x) \\ &= -B(\chi) f(x). \end{aligned}$$

Puisque χ n'est pas une valeur propre, alors $B(\chi) \neq 0$, d'où le résultat. \square

Corollaire 2.2 (i) Si $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} a_n(f) \psi_n(x).$$

La série converge uniformément sur $[-1, 1]$.

(ii) L'espace \mathcal{E} des combinaisons linéaires finies des fonctions ψ_n est dense dans $\mathcal{C}([-1, 1])$.

Preuve :

(i) Puisque l'opérateur R_χ est continu de $L^2([-1, 1])$ dans $\mathcal{C}([-1, 1])$, il transforme une série qui converge au sens de $L^2([-1, 1])$ en une série uniformément convergente sur $[-1, 1]$.

Par suite, pour toute fonction f de l'image de R_χ , la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} a_n(f) \psi_n(x)$$

converge uniformément sur $[-1, 1]$. C'est en particulier vrai pour toute fonction de l'espace $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ qui est contenu dans l'image de R_χ .

(ii) D'après (i), l'espace $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ est contenu dans l'adhérence de \mathcal{E} . De plus $\mathcal{C}^2([-1, 1])$ est dense dans $\mathcal{C}([-1, 1])$, d'où le résultat. \square

Pour $\chi < \chi_0$, $B(\chi) > 0$, et $x \in]-1, 1]$.

$$\psi(x, \chi) > 0 \text{ et } G_\chi(x, y) > 0.$$

Observons que

$$\int_{-1}^1 G_\chi(x, y) \psi_n(y) dy = \frac{1}{\chi + \chi_n} \psi_n(x).$$

Par suite, au sens de $L^2([-1, 1] \times [-1, 1])$,

$$G_\chi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\chi + \chi_n} \frac{1}{h_n} \psi_n(x) \psi_n(y).$$

En calculant le résidu de $G_\chi(x, y)$ en $-\chi_n$ de deux façons, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Res}|_{\chi=-\chi_n} G_\chi(x, y) &= \epsilon_n \frac{1}{B'(\chi_n)} \psi_n(x) \psi_n(y) \\ &= -\frac{1}{h_n} \psi_n(x) \psi_n(y). \end{aligned}$$

Les zéros de $B(\chi)$ sont simples, et $B(\chi) > 0$ si $\chi < \chi_0$. Donc le signe de $B'(\chi_n)$ est $-(-1)^n$. Il en résulte que $\epsilon_n = (-1)^n$, et

$$h_n = -(-1)^n B'(\chi_n).$$

Ainsi, nous avons établi la propriété de parité des fonctions ψ_n :

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x), \quad \forall x \in [-1, 1]. \quad (2.11)$$

Exemple :

Dans le cas où $q \equiv 0$,

$$B(\chi) = -\frac{2}{\pi} \sin \pi \nu, \quad \text{avec } \chi = \nu(\nu + 1).$$

On obtient

$$B'(\chi) = \frac{d}{d\nu} \left(-\frac{2}{\pi} \sin \pi \nu \right) \frac{1}{\frac{d\chi}{d\nu}} = -2 \cos \pi \nu \cdot \frac{1}{2\nu + 1},$$

et, pour $\nu = n \in \mathbb{N}$, $\chi_n = n(n + 1)$, ainsi

$$B'(\chi_n) = -2(-1)^n \frac{1}{2n + 1}.$$

On obtient bien $h_n = \frac{2}{2n+1}$.

2.3 Zéros des fonctions propres

L'opérateur différentiel L est une perturbation de l'opérateur $L^{(0)}$ de Legendre. Nous allons voir que la distribution des zéros des fonctions propres ψ_n est semblable à celle des polynômes de Legendre P_n .

Proposition 2.3 *La fonction ψ_n admet exactement n zéros qui appartiennent à $] - 1, 1[$.*

Preuve : Soit u une fonction continue sur $[-1, 1]$, solution dans $] - 1, 1[$ de l'équation différentielle $Lu + \chi u = 0$. On pose

$$v(t) = (1 - t^2) \frac{du}{dt}.$$

La fonction v vérifie $v' = (q - \chi)u$, et donc

$$\begin{pmatrix} 1 - t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q - \chi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

À la fonction u on associe le chemin γ dans \mathbb{R}^2 défini par

$$\gamma(t) = OM(t) = (u(t), v(t)).$$

Pour $u = P_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) on obtient la figure (2.3), où les graphes situées à droite sont ceux des polynômes de Legendre et on a représenté à gauche les chemins γ associés.

Supposons la fonction u non identiquement nulle. La fonction u étant une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, u et u' ne s'annulent pas simultanément. Ainsi, le chemin γ ne passe pas par l'origine O . On suppose que $u(1) = 1$ et que $u(-1) = \pm 1$. Soit Δ l'axe vertical $u = 0$. Le nombre de zéros de u est alors le nombre de fois que le chemin γ traverse Δ . Soit N le nombre de demi-tours que fait la droite $D_t = OM(t)$ quand t varie de -1 à 1 . Puisque $v(-1) = v(1) = 0$, les droites D_{-1} et D_1 sont horizontales. Un zéro t de u correspond à un passage par la position verticale de la droite D_t .

Notons P_+ le demi-plan droit $u > 0$, P_- le demi-plan gauche $u < 0$. Soit t_0 l'un des zéros de u . Supposons $u(t) > 0$ pour $t < t_0$ voisin de t_0 et $u(t) < 0$ pour $t > t_0$ voisin de t_0 . Alors $u'(t_0) < 0$ et donc $v(t_0) < 0$. Ainsi, si le chemin γ traverse Δ en venant de P_+ et en allant vers P_- , au point de passage $(u(t_0), v(t_0))$ l'ordonnée $v(t_0)$ est négative. Supposons au contraire que le chemin γ traverse Δ en venant de P_- et en allant vers P_+ , alors au point de passage $(u(t_0), v(t_0))$ l'ordonnée $v(t_0)$ est positive. Par conséquent le nombre de zéros de u est égal à N .

On considère, pour $\alpha \in [0, 1]$, l'opérateur différentiel $L^{(\alpha)}$ défini par

$$L^{(\alpha)} = L^{(0)} - \alpha q(t).$$

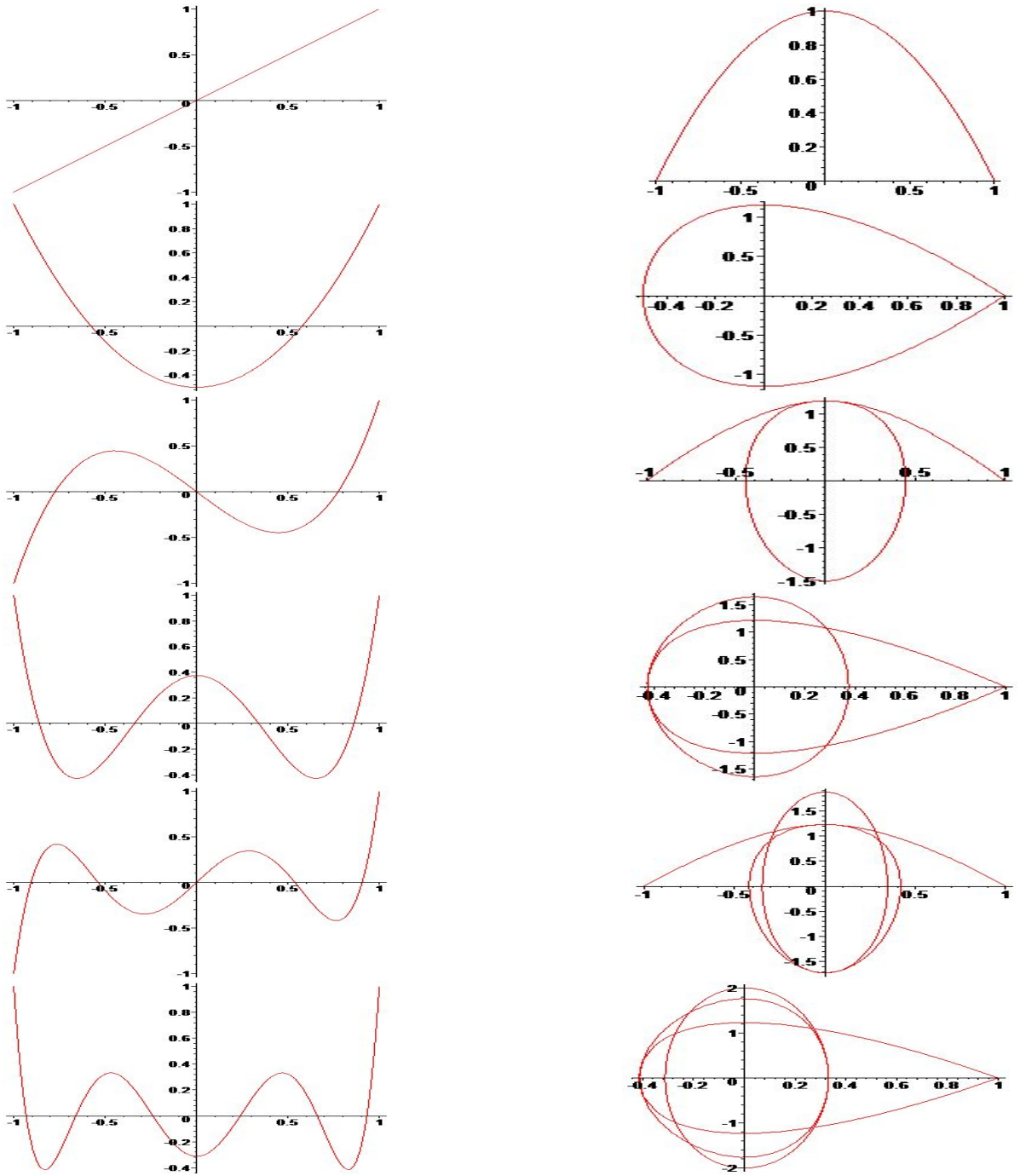


FIG. 2.1 – Graphes des P_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) et les chemis γ associés.

Notons $-\chi_n^{(\alpha)}$ ses valeurs propres et $\psi_n^{(\alpha)}$ ses fonctions propres.

$$\chi_n^0 = n(n+1), \quad \chi_n^1 = \chi_n, \quad \psi_n^0 = P_n, \quad \psi_n^1 = \psi_n.$$

Pour $u = \psi_n^{(\alpha)}$, notons $N(\alpha)$ le nombre de demi-tours que fait la droite $OM(t)$ quand t varie de -1 à 1 . La fonction propre $\psi_n^{(\alpha)}$ et sa dérivée première par rapport à t , dépendent continûment du paramètre α . Par suite $N(\alpha)$ est une fonction continue de la variable α . Mais puisqu'elle prend des valeurs entières, alors $N(\alpha)$ est constant. Comme $N(0)$ est égal au nombre de zéros du polynôme de Legendre de degré n , alors $N(0) = n$, et donc $N(1) = n$. Nous avons montré que $N = n$ et donc, que le nombre de zéros de ψ_n est égal à n . \square

On note $x_i^{(n)}$ le $i^{\text{ème}}$ zéro de ψ_n .

Proposition 2.4 *Les zéros de ψ_{n-1} et de ψ_n sont entrelacés. C'est-à-dire que*

$$x_1^{(n)} < x_1^{(n-1)} < x_2^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n-1)} < x_n^{(n)}.$$

Pour montrer cette proposition, on a besoin des deux lemmes suivants qui sont analogues aux lemmes de comparaison de Sturm [27] :

Lemme 2.2 *Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues sur $[-1, 1]$, et soient u_1 et u_2 deux fonctions non identiquement nulles, solutions de*

$$\begin{aligned} L^{(0)}u_1 - q_1u_1 &= 0, \\ L^{(0)}u_2 - q_2u_2 &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

On suppose que $q_1 \leq q_2$, avec $q_2 - q_1$ non identiquement nulle. Alors, entre deux zéros consécutifs de u_2 dans $] -1, 1[$ il y'a au moins un zéro de u_1 . On dit que la fonction u_1 oscille plus vite que la fonction u_2 .

Preuve : Dans la relation (2.12), on multiplie la première équation par u_2 et la deuxième par u_1 et on fait la différence, on trouve

$$u_2L^{(0)}u_1 - u_1L^{(0)}u_2 = (q_2 - q_1)u_1u_2. \tag{2.13}$$

Soient x_1 et x_2 , ($x_1 < x_2$), deux zéros consécutifs de u_2 dans $] - 1, 1[$. En intégrant (2.13) entre x_1 et x_2 en utilisant le fait que

$$\begin{aligned} u_2 L^{(0)} u_1 - u_1 L^{(0)} u_2 &= \frac{d}{dx} \left((1 - x^2)(u_1 u_2' - u_1' u_2) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \mathcal{W}(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} (q_2 - q_1) u_1 u_2 dx &= \left[(1 - x^2)(u_1 u_2' - u_1' u_2) \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= (1 - x_2^2) u_1(x_2) u_2'(x_2) - (1 - x_1^2) u_1(x_1) u_2'(x_1). \end{aligned} \quad (2.15)$$

u_2 garde un signe constant sur $]x_1, x_2[$. On peut donc supposer que $u_2 > 0$ sur $]x_1, x_2[$, ce qui implique $u_2'(x_1) > 0$ et $u_2'(x_2) < 0$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que u_1 ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$. Supposons que $u_1 > 0$ sur $]x_1, x_2[$. Alors dans (2.15), le premier membre est strictement positif alors que le deuxième est négatif, d'où la contradiction. \square

Lemme 2.3 *Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues sur $[-1, 1]$, et soient u_1 et u_2 deux fonctions non identiquement nulles, solutions de*

$$\begin{aligned} L^{(0)} u_1 - q_1 u_1 &= 0, \\ L^{(0)} u_2 - q_2 u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On suppose que $q_1 \leq q_2$, avec $q_2 - q_1$ non identiquement nulle. On suppose de plus que u_1 et u_2 ont des limites en $x = 1$, que u_2 s'annule en x_1 ($-1 < x_1 < 1$), et ne s'annule pas sur $]x_1, 1[$.

Alors il existe $x_2 \in]x_1, 1[$ tel que $u_1(x_2) = 0$.

Preuve : Comme

$$\lim_{x \rightarrow 1} \mathcal{W}(u_1, u_2)(x) = 0,$$

alors

$$\int_{x_1}^1 (q_2 - q_1) u_1 u_2 dx = (1 - x_1^2) u_1(x_1) u_2'(x_1).$$

Puisque u_2 ne s'annule pas sur $]x_1, 1]$, elle est strictement positive sur cet intervalle, ce qui implique $u_2'(x_1) > 0$.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $u_1 > 0$ sur $]x_1, 1]$, et donc $u_1(x_1) \geq 0$. Le premier membre de l'égalité précédente est strictement positif et le deuxième membre est négatif, d'où la contradiction. \square

Preuve de la Proposition 2.4 : De la proposition 2.3 on déduit que ψ_n s'annule n fois dans $] - 1, 1[$. Notons $x_i^{(n)}$ la suite croissante des zéros de ψ_n . Nous allons appliquer les lemmes 2.2 et 2.3 aux fonctions

$$\begin{aligned} q_1(x) &= q(x) - \chi_n, & u_1(x) &= \psi_n(x) \\ q_2(x) &= q(x) - \chi_{n-1}, & u_2(x) &= \psi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Nous avons bien $q_2(x) - q_1(x) = \chi_n - \chi_{n-1} > 0$. D'après le lemme 2.2, entre deux zéros de ψ_{n-1} il y'a au moins un zéro de ψ_n . D'après le lemme 2.3, il y'a au moins un zéro de ψ_n dans $]x_{n-1}^{n-1}, 1[$. De même, il y'a au moins un zéro de ψ_n dans $] - 1, x_1^{(n-1)}[$. Puisque, d'après la proposition 2.3, ψ_{n-1} possède exactement $n - 1$ zéros, et que ψ_n en possède n , la proposition est établie. \square

2.4 Le laplacien en coordonnées sphéroïdales

Examinons maintenant le cas particulier où $q(x) = c^2 x^2$. L'opérateur différentiel L apparaît en écrivant le Laplacien Δ dans un système de coordonnées sphéroïdales. Fixons $a \geq b \geq c \geq 0$. Les coordonnées sphéroïdales d'un point de coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont les racines ξ_1, ξ_2 et ξ_3 de l'équation

$$\frac{x^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1.$$

En prenant $a = b = 1$ et $c = 0$, nous obtenons

$$\begin{cases} x^2 = (\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)\xi_3^2 \\ y^2 = (\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)(1 - \xi_3^2) \\ z^2 = \xi_1^2 \xi_2^2. \end{cases}$$

Posons $\xi_3 = \cos \phi$. Pour un choix convenable de signes, nous obtenons, pour $\xi_2^2 < 1 < \xi_1^2$,

$$\begin{cases} x = \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \cos \phi \\ y = \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \sin \phi \\ z = \xi_1 \xi_2. \end{cases}$$

Calculons l'élément ds^2 dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ϕ) .

$$\begin{aligned} dx &= \xi_1 \sqrt{\frac{1 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1}} \cos \phi d\xi_1 - \xi_2 \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{1 - \xi_2^2}} \cos \phi d\xi_2 - \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \sin \phi d\phi, \\ dy &= \xi_1 \sqrt{\frac{1 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1}} \sin \phi d\xi_1 - \xi_2 \sqrt{\frac{\xi_1^2 - 1}{1 - \xi_2^2}} \sin \phi d\xi_2 - \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \cos \phi d\phi \\ dz &= \xi_2 d\xi_1 + \xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2 d\xi_1^2 + h_2^2 d\xi_2^2 + h_3^2 d\phi^2,$$

avec

$$h_1^2 = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - 1}, \quad h_2^2 = \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{1 - \xi_2^2} \text{ et } h_3^2 = (\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2).$$

On note $\mathcal{G} := (g_{ij})$ la matrice diagonale

$$\mathcal{G} := (g_{ij}) = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}.$$

Le laplacien Δ s'écrit dans le système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ϕ) :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{G}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\sqrt{\det \mathcal{G}} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\sqrt{\det \mathcal{G}} \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{\det \mathcal{G}} \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right].$$

Puisque $\det \mathcal{G} = h_1^2 h_2^2 h_3^2 = (\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$, nous obtenons

$$\Delta f = \frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (\xi_1^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (1 - \xi_2^2) \frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]. \quad (2.17)$$

Considérons une solution f de l'équation des ondes

$$\Delta f + c^2 f = 0, \quad (2.18)$$

où c est un paramètre réel positif. Supposons que f s'écrive

$$f(x, y, z) = \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2)\psi_3(\phi),$$

alors il existe une constante m telle que

$$\psi_3'' - m^2\psi_3 = 0. \quad (2.19)$$

Si de plus $m = 0$, alors

$$\psi_2 \frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi_1} + \psi_1 \frac{d}{d\xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + c^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)\psi_1\psi_2 = 0,$$

ou

$$\left[\frac{1}{\psi_1} \frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi_1} + c^2\xi_1^2 \right] + \left[\frac{1}{\psi_2} \frac{d}{d\xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{d\psi_2}{d\xi_2} - c^2\xi_2^2 \right] = 0.$$

Par suite, il existe une constante K , positive, telle que

$$\frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi_1} + (c^2\xi_1^2 - K) \psi_1 = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{d\xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + (K - c^2\xi_2^2) \psi_2 = 0. \quad (2.21)$$

Pour $m \neq 0$, d'après (2.17), (2.18) et (2.19)

$$\frac{1}{\xi_1^2 - \xi_2^2} \left[\psi_2\psi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \psi_1\psi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{\partial f}{\partial \xi_2} + \frac{m^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} \psi_1\psi_2\psi_3 \right] + c^2\psi_1\psi_2\psi_3 = 0.$$

En multipliant la dernière relation par $\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\psi_1\psi_2\psi_3}$, elle devient

$$\frac{1}{\psi_1} \frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi_1} + \frac{1}{\psi_2} \frac{d}{d\xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + \frac{m^2(\xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} + c^2(\xi_1^2 - \xi_2^2),$$

or $\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 - 1} + \frac{\xi_2^2}{1 - \xi_2^2}$, donc il existe une constante K_1 , positive, telle que

$$\frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi_1} + \left(c^2\xi_1^2 - K_1 + \frac{m^2}{\xi_1^2 - 1} \right) \psi_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{d\xi_2}(1 - \xi_2^2) \frac{d\psi_2}{d\xi_2} + \left(K_1 - c^2\xi_2^2 - \frac{m^2}{1 - \xi_2^2} \right) \psi_2 = 0. \quad (2.23)$$

Pour ξ_1 fixé et lorsque ξ_2 et ϕ varient, le point de coordonnées sphéroïdales (ξ_1, ξ_2, ϕ) décrit un ellipsoïde de révolution allongé d'équation, si $\xi_1 = ch\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$),

$$\frac{x^2 + y^2}{sh^2\alpha} + \frac{z^2}{ch^2\alpha} = 1.$$

Pour des valeurs particulières du réel K_1 , notées $\chi_{n,m}$, $n = m, m+1, \dots$, l'équation différentielle (2.23) admet des solutions bornées sur $[-1, 1]$. On note ces solutions par les fonctions $\psi_{n,m}$. Elles sont les fonctions propres de l'opérateur différentiel L_m défini par

$$L_m := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - (c^2x^2 + \frac{m^2}{1-x^2}).$$

En suivant les mêmes notations que David Slepian a utilisé dans [44], les $\psi_{n,m}$ sont appelées fonctions d'onde sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé d'ordre m associées aux réels $\chi_{n,m}$. Dans la suite, on s'intéressera seulement aux fonctions d'onde sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé d'ordre zéro ($m = 0$). Il s'agit bien des solutions bornées dans $[-1, 1]$ de l'équation différentielle (2.21). Ainsi l'équation différentielle définie sur $[-1, 1]$ par

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{df}{dx} + (K - c^2x^2)f = 0, \quad (2.24)$$

où K est un paramètre réel positif obtenue en utilisant la méthode de séparation des variables, à partir de l'équation des ondes écrite dans un système de coordonnées sphéroïdales. Elle a été étudiée par de nombreux mathématiciens et physiciens. On peut citer [35] [40] [45] [44] .

Pour des valeurs particulières, $\chi_{n,c}$ ($n = 0, 1, \dots$), du réel K , l'équation (2.24) admet des solutions bornées sur $[-1, 1]$, appelées : fonctions d'onde sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé. On note $\psi_{n,c}$ ces fonctions comme dans [45] et on les normalise par la condition $\psi_{n,c}(1) = 1$. À l'équation (2.24) on associe l'opérateur différentiel

$$L := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - c^2x^2. \quad (2.25)$$

C'est un opérateur de Legendre perturbé avec

$$q(x) = c^2 x^2.$$

Pour $c = 0$ on retrouve l'opérateur différentiel de Legendre. La fonction q est continue sur $[-1, 1]$, paire et croissante sur $[0, 1]$. Les $\chi_{n,c}$ ($n = 0, 1 \dots$) sont les valeurs propres de l'opérateur L et les fonctions $\psi_{n,c}$ sont les fonctions propres associées. Les résultats des sections 2.1, 2.2, 2.3 s'appliquent :

(1) Les valeurs propres, $\chi_{n,c}$, constituent une suite, vérifiant

$$0 \leq \chi_{0,c} < \chi_{1,c} < \chi_{2,c} < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{n,c} = +\infty.$$

(2) $\forall c \in \mathbb{R}_+, \quad \chi_{n,c} \sim n^2.$

(3) Les fonctions propres $\psi_{n,c}$ constituent une base orthogonale de $L^2([-1, 1])$.

(4) Par la formule de Parseval, $(\psi_{n,c})_n$ constitue un système orthogonal complet dans $L^2(\mathbb{R})$.

(5) Si $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} a_n(f) \psi_{n,c}(x)$$

et la série converge uniformément sur $[-1, 1]$.

(6) Les fonctions $\psi_{n,c}$ sont paires si n est paire et impaire si n est impaire, c'est-à-dire

$$\psi_{n,c}(-x) = (-1)^n \psi_{n,c}(x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

(7) La fonction $\psi_{n,c}$ admet exactement n zéros qui appartiennent à $] - 1, 1[$.

(8) Les zéros de $\psi_{n-1,c}$ et de $\psi_{n,c}$ sont entrelacés. C'est-à-dire

$$x_{1,c}^{(n)} < x_{1,c}^{(n-1)} < x_{2,c}^{(n)} < \dots < x_{n-1,c}^{(n-1)} < x_{n,c}^{(n)}.$$

On considère le noyau K_c défini sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ par :

$$K_c(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin c(x - y)}{(x - y)}. \quad (2.26)$$

On pose pour $f \in L^2([-1, 1])$

$$Q_c f(x) = \int_{-1}^1 K_c(x, y) f(y) dy. \quad (2.27)$$

Proposition 2.5 *L'opérateur intégral Q_c de noyau K_c commute avec l'opérateur différentiel L défini par (2.25).*

Preuve : Montrons que les opérateurs L et Q_c commutent, c'est-à-dire que l'on a pour une fonction f assez régulière $(Q_c \circ L)f(y) = (L \circ Q_c)f(y)$. On a

$$\begin{aligned} (Q_c \circ L)f(y) &= Q_c(Lf)(y) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x - y)}{\pi(x - y)} L_x f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x - y)}{\pi(x - y)} \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{df(x)}{dx} dx - c^2 \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x - y)}{\pi(x - y)} x^2 f(x) dx. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dans l'expression de droite de (2.28), effectuons deux intégrations par parties pour la première intégrale. On obtient :

$$\int_{-1}^1 K_c(x, y) \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{df(x)}{dx} dx = - \int_{-1}^1 (1 - x^2) \frac{\partial K_c(x, y)}{\partial x} \frac{df(x)}{dx} dx.$$

En intégrant par parties une deuxième fois cette quantité, on obtient :

$$\int_{-1}^1 K_c(x, y) \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{df(x)}{dx} dx = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{\partial K_c(x, y)}{\partial x} f(x) dx.$$

D'où

$$(Q_c \circ L)f(y) = \int_{-1}^1 L_{1x} K_c(x, y) f(x) dx. \quad (2.29)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(L \circ Q_c)f(y) &= L(Q_c f(y)) \\
&= \frac{d}{dy}(1-y^2) \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^1 K_c(x,y) f(x) dx \right) - c^2 y^2 \left(\int_{-1}^1 K_c(x,y) f(x) dx \right) \\
&= \int_{-1}^1 L_y K_c(x,y) f(x) dx.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Donc pour que L et Q_c commutent, d'après (2.29) et (2.30), il suffit de montrer que :

$$L_x K_c(x,y) = L_y K_c(x,y). \tag{2.31}$$

Ce qui découle du fait que : $\frac{\partial K_c(x,y)}{\partial x} = \frac{c \cos c(x-y)}{\pi} \frac{1}{x-y} - \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)^2}$, et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{\partial K_c(x,y)}{\partial x} &= -2x \left[\frac{c \cos c(x-y)}{\pi} \frac{1}{x-y} - \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)^2} \right] \\
&+ (1-x^2) \left\{ -\frac{c^2 \sin c(x-y)}{\pi} \frac{1}{x-y} - \frac{c \cos c(x-y)}{\pi} \frac{1}{\pi(x-y)^2} - \frac{c \cos c(x-y)}{\pi} \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{2 \sin c(x-y)}{\pi} \frac{1}{\pi(x-y)^3} \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi et après des simplifications, on trouve que :

$$L_x K_c(x,y) = -\frac{c^2 \sin c(x-y)}{\pi} \frac{1}{x-y} = \frac{2c \cos c(x-y)}{\pi} \frac{1}{\pi(x-y)^2} [xy - 1] + \frac{2 \sin c(x-y)}{\pi} \frac{1}{\pi(x-y)^3} [1 - xy]. \tag{2.32}$$

On remarque que l'expression (2.32) est symétrique par rapport à x et y . Du fait que le noyau $K_c(x,y)$ est aussi symétrique, on peut conclure que (2.31) est bien vérifiée, d'où le résultat. \square

De la proposition 2.5, il résulte que les fonctions d'onde sphéroïdales, $\psi_{n,c}$, sont à la fois les fonctions propres de l'opérateur intégral Q_c et de l'opérateur différentiel L .

Chapitre 3

Translations généralisées associées à un opérateur différentiel de Legendre perturbé

Rappelons la définition de Delsarte des translations généralisées associées à un opérateur différentiel L du second ordre sur \mathbb{R}

$$Lu = au'' + bu' + cu,$$

où a, b et c sont trois fonctions réelles définies sur \mathbb{R} . Pour $\chi \in \mathbb{C}$, on note $\psi(x, \chi)$ la solution de $Lu = \chi u$ vérifiant les conditions $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$. Comme fonction de χ , $\psi(x, \chi)$ est une fonction entière et admet un développement en série entière de la forme

$$\psi(x, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \chi^n.$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, la translation généralisée T_y est définie formellement par

$$T_y f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(y) L^n f(x),$$

et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$T_x T_y := T_y T_x \quad (3.1)$$

$$T_y \psi(x) = \psi(y, \chi) \psi(x, \chi). \quad (3.2)$$

On note $\psi(x, \chi_i) = \psi_i$ ($i = 0, \dots, n, \dots$) vérifiant $\psi_i(0) = 1$ et $\psi'_i(0) = 0$. Soit la fonction f combinaison linéaire fini des fonctions propres $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(x),$$

donc

$$T_y f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(y) \psi_k(x).$$

Il est important d'observer que la fonction $u(x, y) = T_y f(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles hyperbolique

$$\begin{cases} L_x u &= L_y u \\ u(x, 0) &= f(x). \end{cases}$$

Dans la suite on considérera l'opérateur différentiel de Legendre perturbé présenté dans le chapitre précédent. Nous construisons un produit de convolution associé à l'opérateur de Legendre perturbé. La méthode que nous utiliserons fait intervenir un principe du maximum pour une équation hyperbolique en deux variables. Dans [13], H. Chebli montre à l'aide de cette méthode la positivité des translations généralisées associées à un opérateur de Sturm-Liouville singulier sur $[0, +\infty[$. Cela a conduit aux hypergroupes de Chebli-Trimèche. Cette méthode est reprise par A. Achour et K. Trimèche [2] pour montrer un résultat similaire pour un opérateur de Sturm-Liouville L sur un intervalle borné vérifiant $L1 = 0$. Dans les deux articles [15] et [16], W. C. Connet et A. L. Schwartz ont établis la positivité des translations généralisées pour un opérateur de Sturm-Liouville singulier sur un intervalle borné : Dans le premier on utilise, comme dans les cas précédents, un principe du maximum pour un opérateur hyperbolique et

dans le deuxième, c'est à l'aide de la fonction de Riemann pour une équation hyperbolique que les translations généralisées sont construites. Dans [17] les auteurs considèrent le cas de l'opérateur de Sturm-Liouville dont les fonctions propres sont les fonctions d'onde spheroidales. La méthode qui y est utilisée est celle de la fonction de Riemann.

3.1 Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé

On considère l'opérateur de Legendre perturbé

$$L := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - q(x). \quad (3.3)$$

On suppose que la fonction q , définie sur $[-1, 1]$, est continue, paire et croissante sur $[0, 1]$. On note ψ_n ($n = 0, 1, \dots$) les fonctions propres de l'opérateur L associées aux valeurs propres χ_n . Nous nous intéresserons plus tard au cas particulier où $q(x) = c^2x^2$, c étant un paramètre réel positif.

La méthode utilisée dans [2, 4, 13] fait intervenir un principe du maximum pour un opérateur hyperbolique. Nous établirons un principe du même type pour un problème aux limites associé à l'opérateur de Legendre perturbé L . Nous allons d'abord définir les translations généralisées T_a , $a \in [-1, 1]$, associées à l'opérateur (3.3) sur l'espace \mathcal{E} des combinaisons linéaires finies des fonctions propres ψ_n de L . Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(x), \quad (3.4)$$

on pose

$$T_a f(x) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(a) \psi_k(x). \quad (3.5)$$

Cela signifie que T_a est un opérateur diagonal relativement à la base des fonctions ψ_n . Notons que pour $a = 1$, T_1 est l'identité, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n(1) = 1$. Pour $a = -1$, l'opérateur

T_{-1} est la symétrie

$$T_{-1}f(x) = f(-x),$$

puisque $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$. D'après le Corollaire 2.2, l'espace \mathcal{E} est dense dans $\mathcal{C}([-1, 1])$ pour la topologie de la convergence uniforme. Nous allons montrer que l'opérateur T_a se prolonge par continuité à l'espace $\mathcal{C}([-1, 1])$ en un opérateur positif : si $f \geq 0$, alors $T_a f \geq 0$.

Posons

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^n c_k \psi_k(y) \psi_k(x), \quad \forall x, y \in [-1, 1].$$

La fonction u vérifie le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \ell(u) = 0 \\ u(x, 1) = f(x), \end{cases} \quad (3.6)$$

où ℓ est l'opérateur différentiel hyperbolique défini par

$$\ell = L_x - L_y = \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(1-y^2) \frac{\partial}{\partial y} + (q(y) - q(x)). \quad (3.7)$$

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} \ell(u) = 0 \\ u(x, 1) = f(x) \\ u(x, -1) = f(-x) \\ u(1, y) = f(y) \\ u(-1, y) = f(-y). \end{cases} \quad (3.8)$$

3.2 Sur un Principe du Maximum

Théorème 3.1 (*Principe du Maximum*). *Soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$. Soit u une fonction continue sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$, de classe C^2 sur $] -1, 1[\times] -1, 1[$, solution du problème aux limites (3.8). Si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$.*

Rappelons que $\psi(x, \chi)$ est la solution régulière en 1 de $Lf + \chi f = 0$ sur $] -1, 1[$, et que χ_0 est la valeur propre de L associée à ψ_0 , alors

Lemme 3.1 *Fixons χ, μ tels que $\mu < \chi < \chi_0$. Pour $x, y \in] -1, 1]$ posons*

$$v(x, y) = \psi(x, \chi)\psi(y, \mu),$$

alors $v(x, y) > 0$ et $\ell(v) < 0$.

Preuve : Nous avons vu que pour $\chi < \chi_0$, la fonction $\psi(x, \chi)$ est définie et positive sur $] -1, 1]$.

Puisque $L\psi(x, \chi) = -\chi\psi(x, \chi)$, alors $\ell(v)(x, y) = (\mu - \chi)v(x, y) < 0$. □

Preuve du théorème 3.1 : Soit, dans un repère orthonormé d'origine O , le carré $ABCD$ dont les quatre sommets sont

$$A = (1, 1), B = (-1, 1), C = (-1, -1), D = (1, -1).$$

Nous allons d'abord montrer que la fonction u est positive dans le triangle (OAB) . (voir figure)

Soit v une fonction définie sur le triangle (OAB) telle que

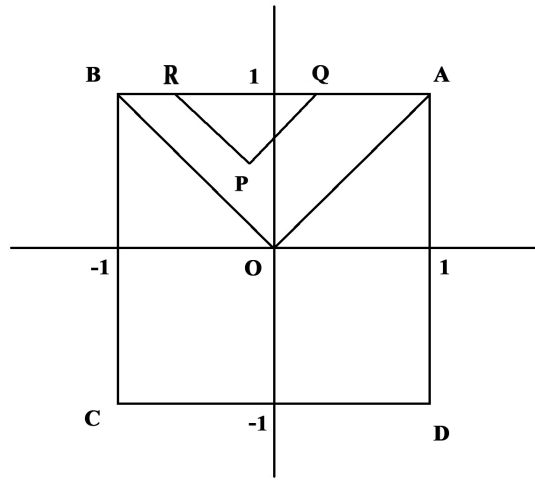
$$v > 0, \ell(v) < 0.$$

Une telle fonction existe d'après le lemme 3.1. Pour $\epsilon > 0$, posons

$$u_\epsilon(x, y) = u(x, y) + \epsilon v(x, y). \tag{3.9}$$

Nous allons montrer que $u_\epsilon \geq 0$ dans le triangle (OAB) . Soient P un point situé à l'intérieur de (OAB) , et Q et R les intersections des deux droites caractéristiques issues de P avec le segment $[AB]$; $Q = (x + 1 - y, 1)$ et $R = (x - 1 + y, 1)$. Posons

$$I(u_\epsilon) = \int_{(PQR)} \ell(u_\epsilon) dx dy.$$



Observons, d'après l'expression (3.7), que

$$\ell(u_\epsilon) = \epsilon \ell(v).$$

Des hypothèses sur u et du choix de v , il résulte que $I(u_\epsilon) < 0$. Nous voulons montrer que u_ϵ est positive sur le triangle (OAB) . Raisonnons par l'absurde. Supposons au contraire que la fonction u_ϵ prenne des valeurs négatives à l'intérieur de (OAB) . Soit $P = (x, y)$ le point de plus grande ordonnée y tel que $u_\epsilon = 0$. La fonction u_ϵ est strictement positive sur le triangle fermé (PQR) , sauf au point P où elle est nulle. Nous allons montrer que $I(u_\epsilon) \geq 0$, ce qui conduira à une contradiction.

Posons

$$\ell^0 = (L_x^0 - L_y^0) = \frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(1 - y^2) \frac{\partial}{\partial y},$$

ainsi

$$\ell := \ell^0 + (q(y) - q(x)). \quad (3.10)$$

Pour la suite de la démonstration nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.2 Soit u une fonction de classe C^2 sur le triangle fermé (PQR) , nulle en P .

(i) Si $u(P) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_{(PQR)} \ell^0(u) dx dy &= (1 - x_Q^2)u(Q) + (1 - x_R^2)u(R) \\ &+ 2 \int_P^Q (x + y)u dx + \int_Q^P (y - x)u dx. \end{aligned}$$

(ii) Si $u \geq 0$ sur (PQR) , alors $\int_{(PQR)} \ell^0(u) dx dy \geq 0$.

Preuve : Il est clair que (i) implique (ii) puisque $y + x \geq 0$, et $y - x \geq 0$. Pour établir (i), nous allons utiliser la formule de Green-Riemann. Posons

$$U(x, y) = (1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad V(x, y) = (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Alors

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \ell^0(u).$$

En appliquant la formule de Green-Riemann au triangle (PQR) :

$$\int_{(PQR)} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial(PQR)} U dx + V dy,$$

on obtient

$$\int_{(PQR)} \ell^0(u) dx dy = \int_{\partial(PQR)} (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy + (1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} dx.$$

La contribution du segment $[QR]$ est nulle. Sur le côté PQ , on a $dx = dy$, et donc

$$\int_P^Q (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} dy + (1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} dx = \int_P^Q (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} dx + (1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_P^Q (1 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} dx + (1 - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [(1 - x^2)u]_P^Q + 2 \int_P^Q x u dx + [(1 - y^2)u]_P^Q + 2 \int_P^Q y u dy \\ &= (1 - x_Q^2)u(x_Q, 1) + 2 \int_P^Q (x + y)u dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

De même $dx = -dy$ sur RP . Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_R^P (1-x^2) \frac{\partial u}{\partial x} dx + (1-y^2) \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [(1-x^2)u]_R^P + 2 \int_R^P x u dx - [(1-y^2)u]_R^P + 2 \int_R^P y u dy \\ &= (1-x_R^2)u(x_R, 1) + 2 \int_R^P (y-x) u dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Enfin, d'après (3.11) et (3.12), la formule annoncée est établie. \square

Fin de la démonstration du théorème 3.1 : D'après la relation (3.10)

$$I(u_\epsilon) = \int_{(PQR)} \ell^0(u_\epsilon) dx dy + \int_{(PQR)} (q(y) - q(x)) u_\epsilon(x, y) dx dy.$$

D'après le lemme 3.2, la première intégrale est positive. D'autre part, puisque la fonction q est paire et croissante sur $[0, 1]$,

$$q(y) - q(x) = q(y) - q(|x|) \geq 0$$

sur (PQR) , car $|x| \leq y$. Finalement nous obtenons que $I(u_\epsilon) \geq 0$, d'où la contradiction.

Nous avons ainsi démontré que, pour tout $\epsilon > 0$, la fonction u_ϵ est positive sur le triangle (OAB) . Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit que $u \geq 0$ sur (OAB) .

Pour établir que la fonction u est positive sur les quatre triangles (OAB) , (OBC) , (OCD) et (ODA) , on utilise l'invariance du problème de Cauchy par les symétries $(x, y) \rightarrow (y, x)$ et $(x, y) \rightarrow (y, -x)$. \square

Théorème 3.2 *Pour $a \in [-1, 1]$, il existe un opérateur unique T_a continu, positif sur $\mathcal{C}([-1, 1])$ tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_a \psi_n = \psi_n(a) \psi_n. \quad (3.13)$$

$$\|T_a f\|_0 \leq M \|f\|_0, \quad (3.14)$$

où $M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \psi_0(x)$ et $\|\cdot\|_0$ est la norme sur $\mathcal{C}([-1, 1])$ définie par

$$\|f\|_0 = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{1}{\psi_0(x)} |f(x)|. \quad (3.15)$$

Preuve : La norme $\|f\|_0$ est équivalente à la norme $\|f\|_\infty$. D'après le théorème 3.1, si $f \in \mathcal{E}$, l'espace des fonctions combinaisons linéaires finies des fonctions ψ_n , et si $f \geq 0$ alors

$$\forall x \in [-1, 1], \quad -\|f\|_0 \psi_0(x) \leq f(x) \leq \|f\|_0 \psi_0(x).$$

Les fonctions $f_\pm = \|f\|_0 \psi_0(x) \pm f(x)$ appartiennent à \mathcal{E} et sont positives, donc $T_a f_\pm \geq 0$. Par suite

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \|f\|_0 \psi_0(a) \psi_0(x) \pm T_a f(x) \geq 0,$$

d'où

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \frac{1}{\psi_0(x)} |T_a f(x)| \leq \psi_0(a) \|f\|_0.$$

On obtient finalement

$$\|T_a f\|_0 \leq \psi_0(a) \|f\|_0.$$

Comme \mathcal{E} est dense dans $\mathcal{C}([-1, 1])$, on en déduit que l'opérateur T_a se prolonge par continuité à l'espace $\mathcal{C}([-1, 1])$. Par suite, pour tout $a \in [-1, 1]$ et $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$, si on pose

$$M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \psi_0(x),$$

$$\|T_a f\|_0 \leq M \|f\|_0,$$

d'où le résultat. □

Corollaire 3.1 *Pour tout $n \in N$ et $x \in [-1, 1]$,*

$$|\psi_n(x)| \leq M,$$

$$\text{où } M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \psi_0(x).$$

Preuve : Dans le théorème 3.2 prenons $f = \psi_n$. Nous obtenons pour tout $a \in [-1, 1]$,

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{1}{\psi_0(x)} |\psi_n(a) \psi_n(x)| \leq \psi_0(a) \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{1}{\psi_0(x)} |\psi_n(x)|,$$

d'où $|\psi_n(a)| \leq \psi_0(a)$, pour tout $a \in [-1, 1]$, donc $|\psi_n(a)| \leq M$. □

Théorème 3.3 *Il existe une mesure positive bornée, $W(x, y; dz)$, sur $[-1, 1]$ telle que*

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad T_y f(x) = \int_{[-1,1]} f(z)W(x, y; dz). \quad (3.16)$$

Preuve : Pour tous $x, y \in [-1, 1]$ l'application

$$f \longmapsto T_y f(x)$$

est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}([-1, 1])$. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure positive $W(x, y; dz)$ sur $[-1, 1]$ telle que

$$T_y f(x) = \int_{[-1,1]} f(z)W(x, y; dz).$$

□

La mesure $W(x, y; dz)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x, y \in [-1, 1]$,

$$W(x, y; dz) = W(y, x; dz).$$

2. Pour tous $x, y \in [-1, 1]$,

$$W(x, y; dz) = \begin{cases} \delta_x & \text{si } y = 1 \\ \delta_{-x} & \text{si } y = -1 \end{cases}$$

où δ_x est la mesure de Dirac au point x .

3. La fonction ψ_n vérifie la formule de produit suivante

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad \int_{[-1,1]} \psi_n(z)W(x, y; dz) = \psi_n(x)\psi_n(y).$$

Exemple : Si $q \equiv 0$, l'opérateur L est l'opérateur différentiel de Legendre et par suite l'opérateur T_y qui lui est associé s'écrit sous la forme

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad T_y f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\cos\theta) d\theta. \quad (3.17)$$

Cette relation est une conséquence de la formule de produit vérifiée par les polynômes de Legendre :

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad P_n(x)P_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_n \left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \cos \theta \right) d\theta.$$

Dans la formule (3.17), on fait le changement de variable

$$z = xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \cos \theta,$$

d'où

$$\forall x, y \in]-1, 1[, \quad T_y f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(z) dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}}.$$

La fonction $T_y f$ s'écrit aussi sous la forme

$$T_y f(x) = \int_{[-1,1]} f(z) W^0(x, y, dz)$$

où,

$$W^0(x, y, dz) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{dz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2+2xyz}} & \text{si } x, y \in]-1, 1[\\ \delta_x & \text{si } y = 1 \\ \delta_{-x} & \text{si } y = -1 \end{cases}. \quad (3.18)$$

Remarques :

(1) On note $\mathfrak{M}([-1, 1])$ l'espace des mesures de Radon bornées sur $[-1, 1]$. On introduit un produit de convolution dans $\mathfrak{M}([-1, 1])$ associé à l'opérateur L , défini pour $\mu, \nu \in \mathfrak{M}([-1, 1])$ par

$$\mu * \nu(f) = \int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(z) W(x, y; dz) \mu(dx) \nu(dy). \quad (3.19)$$

(2) Pour une mesure μ de $\mathfrak{M}([-1, 1])$, on considère l'opérateur T_μ défini sur $\mathcal{C}([-1, 1])$ par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad T_\mu f(x) = \int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(z) W(x, y; dz) \mu(dy). \quad (3.20)$$

Cet opérateur vérifie la relation

$$T_\mu \circ T_\nu = T_{\mu * \nu}.$$

(3) La transformée de Fourier d'une mesure $\mu \in \mathfrak{M}([-1, 1])$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \hat{\mu}(n) = \int_{-1}^1 \psi_n(x) \mu(dx).$$

Pour $\mu, \nu \in \mathfrak{M}([-1, 1])$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{\mu * \nu}(n) = \hat{\mu}(n) \hat{\nu}(n).$$

Ce produit de convolution ne préserve l'ensemble des mesures de probabilités que si $q \equiv 0$ (dans ce cas $\psi_0 = 1$). En suivant les mêmes techniques que M. Voit a utilisé dans [49], on peut modifier le produit de convolution en posant

$$\delta_x \bullet \delta_y = \frac{\psi_0}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \delta_x * \delta_y. \quad (3.21)$$

Le noyau de ce nouveau produit de convolution est donné par

$$\widetilde{W}(x, y; dz) = \frac{\psi_0}{\psi_0(x)\psi_0(y)} W(x, y; dz). \quad (3.22)$$

On obtient ainsi une structure d'hypergroupe sur $[-1, 1]$. En effet, pour tous $x, y \in [-1, 1]$, $\delta_x \bullet \delta_y$ est une mesure de probabilité :

$$\begin{aligned} \langle \delta_x \bullet \delta_y, 1 \rangle &= \frac{1}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \langle \delta_x * \delta_y, \psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \psi_0(x)\psi_0(y) = 1. \end{aligned}$$

Les caractères de cet hypergroupe sont les fonctions

$$\widetilde{\psi}_n = \frac{1}{\psi_0} \psi_n(x), \quad \forall x \in [-1, 1]. \quad (3.23)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle \delta_x \bullet \delta_y, \widetilde{\psi}_n \rangle &= \frac{1}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \langle \delta_x * \delta_y, \psi_0 \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \langle \delta_x * \delta_y, \psi_n \rangle \\ &= \frac{1}{\psi_0(x)\psi_0(y)} \psi_n(x)\psi_n(y) = \widetilde{\psi}_n(x)\widetilde{\psi}_n(y). \end{aligned}$$

3.3 Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé et opérateur intégral à noyau de convolution sinus

3.3.1 Translations généralisées associées à l'opérateur de Legendre perturbé

On considère l'opérateur différentiel

$$L_c := \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} - c^2x^2, \quad (3.24)$$

où c est un paramètre réel positif. On note $\psi_{n,c}$ les fonctions propres de L_c et $\chi_{n,c}$ les valeurs propres associées (voir section 2.4). L'opérateur L_c est un cas particulier de (3.3) d'un opérateur de Legendre perturbé correspondant à $q(x) = c^2x^2$. D'après la section 3.2, il existe un opérateur de translation généralisée sur $\mathcal{C}([-1, 1])$ positif associé à L_c . Cet opérateur, noté T_x ($x \in [-1, 1]$), vérifie les propriétés suivantes :

(1) D'après le théorème 3.3, il existe une mesure positive bornée $W_c(x, y; dz)$ sur $[-1, 1]$ telle que

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad T_y f(x) = \int_{[-1,1]} f(z)W_c(x, y; dz). \quad (3.25)$$

Pour tous $x, y \in [-1, 1]$, la mesure $W_c(x, y; dz)$ vérifie

- (i) $W_c(x, y; dz) = W_c(y, x; dz)$,
- (ii) $W_c(x, y; dz) = \begin{cases} \delta_x & \text{si } y = 1 \\ \delta_{-x} & \text{si } y = -1 \end{cases}$, où δ_x est la mesure de Dirac au point x .

Les fonctions $\psi_{n,c}$ ($n \in \mathbb{N}$) vérifient la formule de produit suivante

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad \int_{[-1,1]} \psi_{n,c}(z)W_c(x, y; dz) = \psi_{n,c}(x)\psi_{n,c}(y). \quad (3.26)$$

Dans [18] une formule de produit est établie pour les fonctions propres de l'opérateur différentiel $L_{\alpha,\gamma}$ défini par

$$L_{\alpha,\gamma}S = S'' + \frac{2\alpha+1}{\tan x}S' - \gamma \sin^2 \theta S.$$

Lorsque $\alpha = 0$ et $\gamma = -c^2$, on obtient l'opérateur de Legendre perturbé L_c en posant $x = \cos \theta$. Ainsi, la formule de produit ci-dessus est un cas particulier de la formule de produit énoncée dans le Théorème 1 de [18]. De plus, on trouve l'expression explicite de $W_c(x, y; dz)$. La démonstration utilise la méthode de la fonction de Riemann.

(2) On note $\|\cdot\|_{0,c}$ la norme sur $\mathcal{C}([-1, 1])$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}([-1, 1]), \quad \|f\|_{0,c} = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{1}{\psi_{0,c}(x)} |f(x)|. \quad (3.27)$$

D'après le théorème 3.2, pour tous $a \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$ on a :

$$\begin{aligned} T_a \psi_{n,c} &= \psi_{n,c}(a) \psi_{n,c}, \\ \|T_a f\|_{0,c} &\leq \psi_{0,c}(a) \|f\|_{0,c}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

D'après le corollaire 3.1, pour tous $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\psi_{n,c}(x)| \leq M(c), \quad (3.29)$$

où $M(c) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \psi_{0,c}(x)$. Ainsi, les fonctions d'onde sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé, $\psi_{n,c}$, sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3.2 Opérateur intégral à noyau de convolution sinus

On considère l'opérateur intégral Q_c défini par la relation (2.27) :

$$Q_c f(x) = \int_{-1}^1 K_c(x, y) f(y) dy, \quad (3.30)$$

où

$$K_c(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin c(x - y)}{x - y}. \quad (3.31)$$

Proposition 3.1 *Pour tous $x \in [-1, 1]$ et $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$*

(i) $Q_c T_x f = T_x Q_c f,$

(ii) $T_x Q_c f(1) = Q_c f(x).$

où T_x ($x \in [-1, 1]$), est l'opérateur de translation généralisée donné par (3.25)

Preuve :

(i) Soit $x \in [-1, 1]$. On sait, d'après proposition 2.5, que l'opérateur L_c commute avec l'opérateur Q_c . On note λ_n ($n \in \mathbb{N}$) les valeurs propres de Q_c . Pour $y \in [-1, 1]$,

$$Q_c T_x \psi_{n,c}(y) = \lambda_n \psi_{n,c}(x) \psi_{n,c}(y) = T_x Q_c \psi_{n,c}(y).$$

Comme l'espace des combinaisons linéaires finies des fonctions $\psi_{n,c}$ est dense dans $\mathcal{C}([-1, 1])$, d'où le résultat.

(ii) D'après (3.8), $T_x f(1) = f(x)$. Donc

$$T_x Q_c f(1) = Q_c T_x f(1) = Q_c f(x).$$

□

Remarque : D'après la proposition 3.1, (i), l'opérateur intégral Q_c commute avec les opérateurs de translations généralisées associés à l'opérateur différentiel L_c .

En utilisant les translations généralisées T_x ($x \in [-1, 1]$), on donnera dans la proposition suivante une autre expression de l'opérateur Q_c .

Proposition 3.2 Pour $x \in [-1, 1]$ et $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$,

$$Q_c f(x) = T_\mu f(x) = \int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(z) W_c(x, y; dz) \mu(dy),$$

avec $\mu(dy) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin c(1-y)}{1-y} dy.$

Preuve : Soit $x \in [-1, 1]$. En utilisant la proposition 3.1, (i), et les relations (3.30), (3.25), (3.20), calculons $T_x Q_c f(1)$. On obtient

$$\begin{aligned} T_x Q_c f(1) &= Q_c T_x f(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_x f(y) \frac{\sin c(x-y)}{x-y} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{[-1,1] \times [-1,1]} f(z) W_c(x, y; dz) \frac{\sin c(1-y)}{1-y} dy, \end{aligned}$$

donc

$$T_x Q_c f(1) = T_\mu f(x), \tag{3.32}$$

avec $\mu(dy) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin c(1-y)}{1-y} dy$.

D'autre part, d'après la proposition 3.1, (ii), et la relation (3.32), on déduit $Q_c f(x) = T_\mu f(x)$, d'où le résultat. \square

Remarque : La mesure μ est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. D'après la proposition 3.2 et la relation (3.31) cette densité est égale à $K_c(1, y)$.

Chapitre 4

Etude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau de convolution Sinus

Deux opérateurs qui commutent admettent les mêmes fonctions propres. Parfois, il est difficile de connaître les fonctions propres d'un opérateur intégral ou différentiel. Par exemple, étant donné un opérateur intégral A et on se propose d'en déterminer ses fonctions propres. Si on trouve un opérateur B qui commute avec A dont on connaît les fonctions propres alors le problème sera résolu. Dans ce chapitre, on va traiter le cas d'opérateurs intégraux et différentiels qui commutent.

On considère la fonction K de deux variables définie pour $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ par

$$K_c(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\sin c(x-y)}{x-y} & x \neq y \\ \frac{c}{\pi} & x = y, \end{cases} \quad (4.1)$$

où c est un paramètre réel positif. L'opérateur intégral à noyau de convolution sinus est

$$Q_c f(x) = \int_{-1}^1 K_c(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2([-1, 1]). \quad (4.2)$$

Cet opérateur intervient dans l'étude des valeurs propres d'une classe de matrices aléatoires, comme on a vu dans le chapitre 1. Dans la suite on étudiera le comportement asymptotique des fonctions propres de cet opérateur Q_c .

4.1 Etude spectrale

On se place dans l'ensemble G.U.E des matrices Hermitiennes Gaussiennes unitaires. Soient X une matrice G.U.E, X_n la sous matrice de X d'ordre $n \times n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres qui seront ordonnées de la manière suivante :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

D'après [37], ces valeurs propres, pour n assez grand, suivent la loi de demi-cercle de Wigner σ_n à savoir :

$$\sigma_n \sim \begin{cases} \frac{1}{\pi}(2n - x^2)^{\frac{1}{2}} & |x| < (2n)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & |x| > (2n)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans la suite, on va s'intéresser de plus proche du comportement des valeurs propres de X_n dans des régions voisins de $\pm(2n)^{\frac{1}{2}}$ et dans d'autres régions du demi-cercle de Wigner. En particulier, on s'intéresse à la probabilité de n'avoir aucune valeur propre de la matrice X dans un intervalle de la forme $]s, +\infty[$, ($s > 0$), dans ces deux régions. Cette probabilité, pour n fixé, fait apparaître le noyau de Christoffel-Darboux $K_n(\cdot, \cdot)$ des fonctions d'Hermite normalisées ϕ_n :

$$\phi_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} H_n(x),$$

où $H_n(x)$ est le polynôme d'Hermite d'ordre n , voir [37]. L'expression du noyau K est alors donnée par :

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k(x)\phi_k(y).$$

Après avoir fait un changement d'échelle auprès des extrémités $\pm(2n)^{\frac{1}{2}}$ du demi-cercle de Wigner et en faisant tendre n vers l'infini on trouve que la probabilité pour que X n'ait aucune valeur propre de dans $]s, +\infty[$ fait intervenir le déterminant de Fredholm de noyau K_c .

Proposition 4.1 *Pour $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$*

$$K_c(x, y) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 e^{i\pi x z c} e^{-i\pi y z c} dz. \quad (4.4)$$

Parsuite, K_c est le noyau d'un opérateur nucléaire sur $L^2([-1, 1])$.

Preuve : Pour montrer que K_c est le noyau d'un opérateur nucléaire, il suffit de montrer qu'il est le produit de deux noyaux de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt. On vérifie que

$$\frac{c}{2} \int_{-1}^1 e^{i\pi x z c} e^{-i\pi y z c} dz = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 e^{i\pi(x-y)z c} dz = K_c(x, y),$$

de plus

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{c}{2}\right) e^{2i\pi x z c} dx dz < \infty,$$

d'où le résultat. □

De la proposition 4.1 l'opérateur intégral Q_c est autoadjoint et nucléaire. On vérifie aussi qu'il est positif. Il est donc diagonalisable dans une base orthonormée de fonctions propres. Les valeurs propres, notées λ_n ($n = 0, 1, \dots$), vérifient

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

On considère maintenant l'opérateurs différentiel L_c défini pour $\psi \in C^2([-1, 1])$ par :

$$L_c \psi(x) = \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d\psi(x)}{dx} - c^2 x^2 \psi(x), \quad (4.5)$$

où c est un paramètre réel positif. Alors, d'après proposition 2.5 l'opérateur différentiel L_c et l'opérateur Q_c commutent, donc ils ont les mêmes fonctions propres. Puisque les fonctions d'ondes sphéroïdales $\psi_{n,c}$ (PSWF) sont les fonctions propres de L_c alors elles le sont pour l'opérateur Q_c .

Dans la suite, on étudiera le comportement asymptotique des fonctions PSWF d'abord pour les grandes valeurs de n en fixant c , et ensuite pour les grandes valeurs de c en gardant n fixe. L'outil essentiel pour cette étude est la méthode WKB dont on présentera le principe dans le paragraphe suivant.

4.2 Méthode WKB

L'outil essentiel pour l'étude asymptotique des fonctions propres $\psi_{n,c}$ est la méthode WKB présentée en détail dans [38]. Elle s'applique à une classe particulière d'équations différentielles de second ordre, ce sont les équations différentielles du type Sturm-Liouville.

La méthode WKB a été introduite par Wentzel, Krammers et Brillouin ce qui explique son appellation. Son objectif est de trouver un comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles, définies sur un intervalle $[a, b]$, de la forme :

$$\left(k(x)y'\right)' + \lambda r(x)y = 0, \quad (4.6)$$

quand le paramètre λ tend vers l'infini, où k et r sont deux fonctions supposées de classe C^2 qui gardent un signe constant sur $[a, b]$.

Le principe de la méthode, voir [38], est d'effectuer un changement de variable et de fonction pour transformer (4.6) en une forme plus simple. Deux cas se présentent selon que k et r ne s'annulent pas ou bien qu'elles changent de signe sur $[a, b]$.

Dans le premier cas, supposons que pour tout $x \in [a, b]$ on ait $k(x) > 0$ et $r(x) > 0$. Pour

$x_0 \in]a, b[$ on pose :

$$\begin{cases} y(x) &= \phi(x)u(s(x)) \\ s(x) &= \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{r(t)}{k(t)}} dt \\ \phi(x) &= (r(x)k(x))^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Du changement (4.7), l'équation (4.6) donne naissance à une équation différentielle en u et s de la forme :

$$u'' + (\lambda - q(s))u = 0, \quad s \in s([a, b]), \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} Q(s(x)) &= -\frac{(k(x)\phi'(x))'}{r(x)\phi(x)} \\ &= \frac{k(x)}{4r(x)} \left[\left(\frac{k'(x)}{k(x)} + \frac{r'(x)}{r(x)} \right)' + \left(\frac{3k'(x)}{4k(x)} - \frac{1r'(x)}{4r(x)} \right) \left(\frac{k'(x)}{k(x)} + \frac{r'(x)}{r(x)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

On écrit (4.8) sous la forme $u'' + \lambda u = Q(s)u$, pour $s \in s([a, b])$. Alors une solution u est de la forme :

$$u(s) = \tilde{u}(s) + R_\lambda(s), \quad (4.10)$$

où $\tilde{u}(s) = A \cos \sqrt{\lambda}s + B \sin \sqrt{\lambda}s$, et $R_\lambda(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^s \sin \sqrt{\lambda}(s-t)Q(t)u(t)dt$. L'étape suivante consiste à montrer que pour λ assez grand, $R_\lambda(s)$ est négligeable devant $\tilde{u}(s)$, et donc une solution de (4.8) se comporte comme \tilde{u} . Enfin, de (4.7), on déduit qu'une solution y de (4.6) se comporte comme $\phi(x)\tilde{u}(s(x))$.

On se place maintenant dans le cas où les fonctions k ou r s'annulent en a ou b et cherchons une approximation d'une solution de (4.6) quand λ tend vers $+\infty$. On suppose que $k(a) = r(a) = 0$ et qu'elles sont strictement positives ailleurs. Dans ce cas on a : $k(x) = (x-a)^m k_0(x)$ et $r(x) = (x-a)^l r_0(x)$, où l et m sont deux entiers positifs tels que $\frac{l-m}{2} > -1$ et $k_0(x) > 0$ et $r_0(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Dans ce cas :

$$s(x) = \int_a^{x_0} \sqrt{\frac{r_0(t)}{k_0(t)}} (t-a)^{\frac{l-m}{2}} dt, \quad x_0 \in]a, b[$$

et

$$\begin{aligned}
Q(s(x)) &= (x-a)^{m-l-2} \frac{k_0(x)}{4r_0(x)} \left[\frac{(l+m)(3m-l-4)}{4} \right. \\
&+ \frac{x-a}{2} \left((3m+l) \frac{k'_0(x)}{k_0(x)} + (m-1) \frac{r'_0(x)}{r_0(x)} \right) \\
&+ \left. (x-a)^2 \left[\left(\frac{k'_0(x)}{k_0(x)} + \frac{r'_0(x)}{r_0(x)} \right)' + \left(\frac{3k'_0(x)}{4k_0(x)} - \frac{1r'_0(x)}{4r_0(x)} \right) \left(\frac{k'_0(x)}{k_0(x)} + \frac{r'_0(x)}{r_0(x)} \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Dans un voisinage de a on a :

$$s(x) \approx \sqrt{\frac{r_0(a)}{k_0(a)}} (x-a)^{\frac{l-m}{2}}, \quad (4.11)$$

et ainsi, on peut exprimer $Q(s)$ dans ce voisinage de a comme suit :

$$Q(s) = \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2} + s^{\gamma-2} f(s), \quad (4.12)$$

où $\gamma = \frac{2}{l-m+2} > 0$, $\nu = \frac{|m-1|}{l-m+2}$ et f est une fonction continue sur $[0, s(b)[$. En effectuant le changement de variable et de fonction (4.7) dans (4.6) en tenant compte de (4.11) et de (4.12), on obtient une équation différentielle en u de la forme :

$$u'' + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2} \right) u = s^{\gamma-2} f(s)u. \quad (4.13)$$

On sait que les solutions de l'équation de Lommel, voir [38] :

$$v'' + \left(\lambda - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{s^2} \right) v = 0$$

sont de la forme $v(s) = A(\sqrt{\lambda}s)^{1/2} J_\nu(\sqrt{\lambda}s) + B(\sqrt{\lambda}s)^{1/2} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}s)$ si ν est non-entier. Si ν est un entier, on remplace $J_{-\nu}$ par Y_ν , où J_ν et Y_ν sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce. Ainsi, une solution de (4.13) est de la forme $u(s) = v(s) + \tilde{R}_\lambda(s)$, où

$$\tilde{R}_\lambda(s) = \int_{s_0}^s K_\lambda(s,t) t^{\gamma-2} f(t) u(t) dt,$$

avec

$$K_\lambda(s, t) = (\sqrt{\lambda}s)^{1/2} J_\nu(\sqrt{\lambda}s) (\sqrt{\lambda}t)^{1/2} J'_{-\nu}(\sqrt{\lambda}t) - (\sqrt{\lambda}s)^{1/2} J'_\nu(\sqrt{\lambda}s) (\sqrt{\lambda}t)^{1/2} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}t) \mathcal{W}((\sqrt{\lambda}\cdot)^{1/2} J_\nu(\sqrt{\lambda}\cdot), (\sqrt{\lambda}\cdot)^{1/2} J_{-\nu}(\sqrt{\lambda}\cdot)),$$

et $\mathcal{W}(g, h)(t)$ désigne le Wronskien de f et g . En suivant les mêmes démarches que dans le cas précédent, on montre que \tilde{R}_λ est négligeable devant la solution de l'équation de Lommel v . Enfin, de (4.7), on montre qu'une solution y de (4.6) se comporte comme $\phi(x)v(s(x))$.

4.3 Asymptotique des PSWF

Soit l'équation différentielle définie sur $[0, 1]$ par :

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d\psi_{n,c}}{dx} \right) + (\chi_n - c^2 x^2) \psi_{n,c} = 0. \quad (4.14)$$

L'objectif de cette section est de trouver, pour c assez grand et n fixé, comment se comportent les solutions $\psi_{n,c}$ de cette équation différentielle et ceci en utilisant la méthode WKB. Le comportement de ces fonctions pour c fixé et n grand a été étudié dans [8].

4.3.1 Etude qualitative

On écrit l'équation différentielle (4.14) sous la forme :

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{d\psi_{n,c}}{dx} \right] + c^2 r_n(x) \psi_{n,c} = 0, \quad (4.15)$$

avec $k(x) = 1 - x^2$ et $r_n(x) = \frac{\chi_n}{c^2} - x^2$. Si on suppose que pour de grandes valeurs de c la quantité $q_n = \frac{\sqrt{\chi_n}}{c} < 1$, et si on restreint notre étude sur $[0, 1]$, alors $r_n(x)$ change de signe sur $[0, 1]$ en s'annulant en q_n . Dans la suite, on fera l'étude des solutions de (4.14) sur des parties de $[0, 1]$ où $r_n(x)$ garde un signe constant.

Etude sur $[0, q_n]$.

Dans ce cas $r_n(x) \geq 0$, $r_n(q_n) = 0$, et $k(x) > 0$. Pour $x \in [0, q_n]$, on cherche une solution de

(4.14) de la forme

$$\psi_{n,c}(x) = \varphi_n(x)U_n(s_n(x)),$$

avec

$$s_n(x) = \int_x^{q_n} \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt, \quad \varphi_n(x) = (k(x)r_n(x))^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.16)$$

L'équation (4.14) devient, en terme de U_n , comme suit :

$$U_n''(s_n(x)) + [c^2 - Q(s_n(x))]U_n(s_n(x)) = 0, \quad (4.17)$$

où $Q_n(s_n(x))$ est de la forme (4.9). Si on écrit $r_n(x) = (q_n - x)r_0(x)$ avec $r_0(x) = q_n + x$, alors,

$$Q_n(s_n(x)) = \frac{k(x)}{4r_0(x)(q_n - x)^3} \left[-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}(q_n - x) \left(\frac{r_0'}{r_0} - \frac{k'}{k} \right) + (q_n - x)^2 \left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r_0'}{r_0} \right)' + \left(\frac{3k'}{4k} - \frac{1r_0'}{4r_0} \right) \left(\frac{k'}{k} + \frac{r_0'}{r_0} \right) \right] \right]. \quad (4.18)$$

Lemme 4.1 *Pour tout $x \in [0, q_n[$, il existe une fonction ϵ_n telle que*

$$s_n(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} (q_n - x)^{\frac{3}{2}} + \epsilon_n(x), \quad (4.19)$$

et il existe une constante D positive telle que $\forall c > D$

$$\left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| < 1. \quad (4.20)$$

Preuve : De la relation (4.16), on déduit :

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} \int_x^{q_n} \sqrt{q_n - t} dt + \epsilon_n(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} (q_n - x)^{\frac{3}{2}} + \epsilon_n(x), \quad (4.21)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_n(x) &= \int_x^{q_n} \frac{\sqrt{q_n^2 - t^2} - \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2) (q_n - t)}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= \frac{1}{1 - q_n^2} \int_x^{q_n} \sqrt{q_n - t} \left[\frac{(1 - q_n^2)(q_n + t) - 2q_n(1 - t^2)}{\sqrt{1 - t^2} (\sqrt{q_n + t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2)})} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

On pose

$$C(q_n) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1-q_n^2}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r_0(q_n)}{k(q_n)}}. \quad (4.23)$$

Pour $t \in [0, q_n]$, on trouve que :

$$(1 - q_n^2)(q_n + t) - 2q_n(1 - t^2) = q_n - 2q_n t^2 - t + q_n^3 + q_n t^2 \leq q_n + q_n^3 + q_n t^2 \leq q_n + 2q_n^3,$$

d'où

$$\left| \frac{(1 - q_n^2)(q_n + t) - 2q_n(1 - t^2)}{\sqrt{1 - t^2}(\sqrt{q_n + t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}(1 - t^2)})} \right| \leq \frac{\sqrt{q_n} + 2q_n^{\frac{5}{2}}}{(1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - q_n^2}}. \quad (4.24)$$

De (4.24), on déduit :

$$|\epsilon_n(x)| \leq C'_n(q_n)(q_n - x)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.25)$$

avec

$$C'(q_n) = \frac{2}{3(1 + \sqrt{2})} \frac{\sqrt{q_n} + 2q_n^{\frac{5}{2}}}{(1 - q_n^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.26)$$

On remarque, d'après (4.25), que $\epsilon_n(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers q_n et tend aussi vers zéro lorsque c tend vers ∞ uniformément en x . De (4.16) on a $C(q_n)(q_n - x)^{\frac{3}{2}} = s_n(x) \left[1 - \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)}\right]$. D'après (4.25) et (4.16), on déduit $(C(q_n) - C'(q_n))(q_n - x)^{\frac{3}{2}} \leq s_n(x)$. D'autre part, d'après (4.23) et (4.26) :

$$C(q_n) - C'(q_n) = C(q_n) \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})} \frac{1 + 2q_n^2}{(1 - q_n^2)}\right].$$

Lorsque c tend vers ∞ , la quantité de droite tend vers zéro en restant positive, c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ et $A > 0$ tels que si $c > A$ alors pour tout $x \in [0, q_n]$, on a $0 < \eta(q_n - x)^{\frac{3}{2}} \leq s_n(x)$.

Ainsi pour $c > A$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| &\leq \frac{C'(q_n)}{C(q_n)} \frac{1}{\left[1 - \frac{2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})} \frac{q_n^2}{(1 - q_n^2)}\right]} = \frac{4}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} \frac{q_n^2}{(1 - q_n^2)} \frac{1}{\left[1 - \frac{2\sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})} \frac{q_n^2}{(1 - q_n^2)}\right]} \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} \frac{q_n^2}{1 - \left(\frac{1 + 3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right) q_n^2}, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque c tend vers ∞ , donc il existe $B > 0$ tel que si $c > \max(A, B) = D$

on ait :

$$\left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| < 1. \quad (4.27)$$

□

Lemme 4.2 *Il existe une fonction F telle que $F \circ s_n$ soit continue sur $[0, q_n]$ et pour tout $x \in [0, q_n]$*

$$Q_n(s_n(x)) = -\frac{5}{36} \frac{1}{s_n^2(x)} + s_n^{-\frac{4}{3}}(x)F(x).$$

Preuve : On écrit $Q_n(s_n(x))$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} Q_n(s_n(x)) &= -\frac{5k(x)}{16r_0(x)(q_n - x)^3} \\ &+ \frac{k(x)}{4r_0(x)(q_n - x)^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r'_0}{r_0} - \frac{k'}{k} \right) + (q_n - x) \left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right)' + \left(\frac{3k'}{4k} - \frac{1}{4} \frac{r'_0}{r_0} \right) \left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right) \right] \right] \\ &= -\frac{5}{36} \frac{1}{C^2(q_n)(q_n - x)^3} + (q_n - x)^{-2} f_1(x), \end{aligned} \quad (4.28)$$

avec

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{5}{16(q_n - x)} \left[\frac{k(x)}{r_0(x)} - \frac{9}{4C^2(q_n)} \right] \\ &+ \frac{k(x)}{4r_0(x)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r'_0}{r_0} - \frac{k'}{k} \right) + (q_n - x) \left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right)' + \left(\frac{3k'}{4k} - \frac{1}{4} \frac{r'_0}{r_0} \right) \left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right) \right] \right], \end{aligned} \quad (4.29)$$

qui est continue sur $[0, q_n]$. On a alors d'après (4.19) :

$$\frac{1}{C^2(q_n)(q_n - x)^3} = \frac{1}{(s_n(x) - \epsilon_n(x))^2} = \frac{1}{s_n^2(x)} \frac{1}{\left(1 - \left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| \right)^2} \quad (4.30)$$

En utilisant (4.27), la dernière expression est développable en série convergente dont le premier terme est $\frac{1}{s_n^2(x)}$. Si on note $f_2(s_n(x))$ la fonction composée par les termes de cette série sauf le premier, alors on écrit $Q_n(s_{n,c})$ de la manière suivante :

$$Q_n(s_n(x)) = -\frac{5}{36} \frac{1}{s_n^2(x)} + (q_n - x)^{-2} f_3(s_n(x)), \quad (4.31)$$

avec $f_3(s_n(x)) = -\frac{5}{36}(q_n - x)^2 f_2(s_n(x)) + f_1(x)$, qui est continue sur $[0, q_n]$. De plus on a $\left[s_n(x) \left(1 - \left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| \right) \right]^{-\frac{4}{3}} = C^{-\frac{4}{3}}(q_n)(q_n - x)^{-2}$. En utilisant le même raisonnement que dans (4.31) on obtient :

$$\begin{aligned} (q_n - x)^{-2} f_3(s_n(x)) &= C^{\frac{4}{3}}(q_n) s_n^{-\frac{4}{3}}(x) f_3(s_n(x)) + f_4(s_n(x)) \\ &= s_n^{-\frac{4}{3}}(x) \left[C^{\frac{4}{3}}(q_n) f_3(s_n(x)) + s_n^{\frac{4}{3}}(x) f_4(s_n(x)) \right] = s_n^{-\frac{4}{3}}(x) F(s_n(x)), \end{aligned}$$

où $F(s_n(x)) = C^{\frac{4}{3}}(q_n) f_3(s_n(x)) + s_n^{\frac{4}{3}}(x) f_4(s_n(x))$, qui est continue sur $[0, q_n]$, et $f_4(s_n(x))$ est obtenue par le developpement en série de $\left[s_n(x) \left(1 - \left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| \right) \right]^{-\frac{4}{3}}$ dont on supprime le premier terme. \square

D'après le lemme 4.2 l'équation différentielle (4.17) s'écrit, en posant $z = s_n(x)$:

$$U_n''(z) + \left(c^2 + \frac{5}{36} \frac{1}{z^2} - z^{-\frac{4}{3}}(x) F(z) \right) U_n(z) = 0. \quad (4.32)$$

Pour résoudre (4.32), on résoud tout d'abord l'équation homogène associée :

$$U_n''(z) + \left[c^2 + \frac{5}{36} \frac{1}{z^2} \right] U_n(z) = 0,$$

qui est une équation de Lommel, voir [38], et on cherche ensuite une solution particulière de (4.32). On sait que les fonctions $\sqrt{cz} J_{\frac{1}{3}}(cz)$ et $\sqrt{cz} J_{-\frac{1}{3}}(cz)$ vérifient l'équation différentielle homogène du second order précédente, ce qui est aussi le cas pour leurs sommes et leurs différences.

On sait de plus que si on pose $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, pour $x \geq 0$, on a d'après [41] :

$$Ai(-x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} \left(J_{\frac{1}{3}}(\xi) + J_{-\frac{1}{3}}(\xi) \right), \quad Bi(-x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} \left(J_{-\frac{1}{3}}(\xi) - J_{\frac{1}{3}}(\xi) \right), \quad (4.33)$$

On écrit $\sqrt{cz} = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} cz \right)^{\frac{1}{3}} \right)$. On pose $z_1 = \left(\frac{3}{2} cz \right)^{\frac{2}{3}}$, alors d'après (4.33) on trouve les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt{cz} \left(J_{\frac{1}{3}}(cz) + J_{-\frac{1}{3}}(cz) \right) &= 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1), \\ \sqrt{cz} \left(J_{-\frac{1}{3}}(cz) - J_{\frac{1}{3}}(cz) \right) &= 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1), \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si on note par :

$$V_1(z) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1), \quad V_2(z) = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1),$$

alors une solution $U_n(z)$ de 4.32 vérifie :

$$U_n(z) = A_n V_1(z) + B_n V_2(z) + \int_{z_0}^z K(z, t) t^{-\frac{4}{3}} F(t) U_n(t), \quad (4.35)$$

avec

$$K(z, t) = \frac{V_1(z)V_2(t) - V_1(t)V_2(z)}{\mathcal{W}(V_1, V_2)(t)},$$

où A_n et B_n sont deux constantes qui ne dépendent que de n et $\mathcal{W}(V_1, V_2)(t)$ est le wronskien des fonctions V_1 et V_2 . Puisqu'on sait que $\mathcal{W}(Ai, Bi)(t) = \frac{1}{\pi}$, voir [41], alors on a $\mathcal{W}(V_1, V_2)(t) = -\frac{c}{\pi}$.

Etude sur $[q_n, 1 - q_n]$.

Dans ce cas $r_n(x) \leq 0$, $r_n(q_n) = 0$, et $k(x) > 0$. On écrit (4.14) de la manière suivante :

$$\frac{d}{dx} [k(x) \frac{d\psi_{n,c}}{dx}] - c^2 r_{1n}(x) \psi_{n,c} = 0,$$

où $r_{1n}(x) = x^2 - \frac{x_n}{c^2}$. On a $r_{1n}(x) = (x - q_n)(x + q_n) = (x - q_n)r_0(x)$, avec $r_0(x) > 0$ et $k(x) = 1 - x^2 > 0$. On cherche une solution de (4.14) de la forme $\psi_{n,c}(x) = \beta_n(x) W_n(l_n(x))$,

avec

$$l_n(x) = \int_{q_n}^x \sqrt{\frac{r_{1n}(t)}{k(t)}} dt, \quad \beta_n(x) = (k(x)r_{1n}(x))^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.36)$$

L'équation (4.14) devient en terme de W_n :

$$W_n''(l_n(x)) - [c^2 - Q_{1n}(l_n(x))] W_n(l_n(x)) = 0, \quad (4.37)$$

avec

$$Q_{1n}(l_n) = \frac{k(x)}{4r_0(x)(x - q_n)^3} \left[-\frac{5}{4} + \frac{1}{2}(x - q_n) \left(\frac{r'_0}{r_1} - \frac{k'}{k} \right) + (x - q_n)^2 \left[\left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right)' + \left(\frac{3k'}{4k} - \frac{1r'_0}{4r_0} \right) \left(\frac{k'}{k} + \frac{r'_0}{r_0} \right) \right] \right]. \quad (4.38)$$

Lemme 4.3 Pour tout $x \in [q_n, 1 - q_n]$ il existe une fonction ϵ_{1n} telle que

$$l_n(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} (x - q_n)^{\frac{3}{2}} + \epsilon_{1n}(x), \quad (4.39)$$

et il existe $A > 0$ telle que, si $c > A$,

$$\left| \frac{\epsilon_{1n}(x)}{t_n(x)} \right| < 1. \quad (4.40)$$

Preuve : D'après l'expression (4.36)

$$l_n(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} (x - q_n)^{\frac{3}{2}} + \epsilon_{1n}(x), \quad (4.41)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{1n}(x) &= \int_{q_n}^x \frac{\sqrt{t^2 - q_n^2} - \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2)(t - q_n)}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\ &= \frac{1}{1 - q_n^2} \int_{q_n}^x \sqrt{t - q_n} \left[\frac{(1 - q_n^2)(q_n + t) - 2q_n(1 - t^2)}{\sqrt{1 - t^2}(\sqrt{q_n + t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2)})} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.42)$$

En effet, on a $(1 - q_n^2)(q_n + t) - 2q_n(1 - t^2) = 2q_n(t - q_n)(t + \frac{1 - q_n^2}{2q_n})$, et l'expression de $\epsilon_{1n}(x)$ devient :

$$\epsilon_{1n}(x) = \frac{1}{1 - q_n^2} \int_{q_n}^x (t - q_n)^{\frac{3}{2}} \frac{2q_n(t + \frac{1 - q_n^2}{2q_n})}{\sqrt{1 - t^2}(\sqrt{q_n + t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2)})} dt. \quad (4.43)$$

Pour $t \in [q_n, 1 - q_n]$ on a :

$$1 - 4q_n^2 < 1 - t^2 < 1 - q_n^2, \quad 2q_n < t + q_n < 1, \quad \frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2) > \frac{2q_n(1 - 4q_n^2)}{1 - q_n^2}.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}(\sqrt{q_n + t} + \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2} (1 - t^2)})} &\leq \frac{1}{\sqrt{1 - 4q_n^2}(\sqrt{2q_n} + \sqrt{\frac{2q_n(1 - 4q_n^2)}{1 - q_n^2}})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2q_n} \sqrt{1 - 4q_n^2} (1 + \sqrt{\frac{1 - 4q_n^2}{1 - q_n^2}})}. \end{aligned}$$

D'où :

$$|\epsilon_{1n}(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{5} \frac{1 + 5q_n^2}{\sqrt{1 - q_n^2} \sqrt{1 - 4q_n^2} (1 + \sqrt{\frac{1 - 4q_n^2}{1 - q_n^2}})} \frac{(x - q_n)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{q_n}}, \quad \forall x \in [q_n, 1 - q_n]. \quad (4.44)$$

On conclut que $\lim_{c \rightarrow \infty} \epsilon_{1n}(x) = 0$ et pour $c > A$, $\lim_{x \rightarrow q_n} \epsilon_{1n}(x) = 0$. D'où le résultat. \square

Les mêmes techniques utilisées dans le cas précédent donnent une autre écriture de (4.37), en posant $y = l_n(x)$:

$$W_n''(y) - [c^2 + \frac{5}{36} \frac{1}{y^2} - y^{-\frac{4}{3}} F_1(y)] W_n(y) = 0, \quad (4.45)$$

où $F_1(l_n(x))$ est continue sur $[q_n, 1 - q_n]$. Pour résoudre (4.45) on résoud tout d'abord l'équation homogène associée et on cherche ensuite une solution particulière. On sait que les fonctions $\sqrt{cy} I_{\frac{1}{3}}(cy)$ et $\sqrt{cy} I_{-\frac{1}{3}}(cy)$ vérifient l'équation différentielle homogène du second order précédente, ce qui est aussi le cas pour leurs sommes et leurs différences. On sait que, voir [41] :

$$I_{-\nu} = I_{\nu} + \frac{2}{\pi} \sin \nu \pi K_{\nu}. \quad (4.46)$$

De plus pour $x \geq 0$, si on pose $\xi = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, on a :

$$Ai(x) = \sqrt{\frac{1}{3} x} K_{\frac{1}{3}}(\xi), \quad Bi(x) = \sqrt{\frac{1}{3} x} \left(I_{\frac{1}{3}}(\xi) + I_{-\frac{1}{3}}(\xi) \right). \quad (4.47)$$

On écrit

$$\sqrt{cy} = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cy)^{\frac{1}{6}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{2} cy \right)^{\frac{1}{3}} \right).$$

On pose $y_1 = \left(\frac{3}{2} cy \right)^{\frac{2}{3}}$, alors d'après (4.47) on obtient les deux relations suivantes :

$$\sqrt{cy} I_{-\frac{1}{3}}(cy) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1), \quad \sqrt{cy} \left(I_{\frac{1}{3}}(cy) + I_{-\frac{1}{3}}(cy) \right) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cy)^{\frac{1}{6}} Bi(y_1), \quad (4.48)$$

Si on note :

$$V_{11}(y) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1), \quad V_{12}(y) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} (cy)^{\frac{1}{6}} Bi(y_1), \quad (4.49)$$

alors une solution $W_n(y)$ de (4.45) vérifie :

$$W_n(y) = A_{1n}V_{11}(y) + B_{1n}V_{12}(y) + \int_{y_0}^y K(y, t)t^{-\frac{4}{3}}F_1(t)W_n(t)dt, \quad (4.50)$$

avec

$$K(y, t) = \frac{V_{11}(y)V_{12}(t) - V_{11}(t)V_{12}(y)}{\mathcal{W}(V_{11}, V_{12})(t)},$$

$\mathcal{W}(V_{11}, V_{12})(t)$ est le Wronskien des fonctions V_{11} et V_{12} en t et A_{1n} et B_{1n} sont deux constantes qui ne dépendent que de n . Puisqu'on sait que $\mathcal{W}(Ai, Bi)(t) = \frac{1}{\pi}$, alors on a $\mathcal{W}(V_{11}, V_{12})(t) = -\frac{c}{\pi}$.

Etude sur $[1 - q_n, 1]$.

Sur $]1 - q_n, 1[$, l'équation différentielle (4.14) s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{d\psi_{n,c}}{dx}\right] - c^2r_{1n}(x)\psi_{n,c} = 0, \quad (4.51)$$

avec $k(x) = 1 - x^2$ et $r_{1n}(x) = x^2 - \frac{\chi_n}{c^2}$. On a $k(1) = 0$ et $k(x) = (1+x)(1-x) > 0$ sur $]q_n, 1[$.

De la même manière que dans le paragraphe précédent, on cherche une solution $\psi_{n,c}$ de (4.14) de la forme :

$$\psi_{n,c}(x) = \alpha_n(x)V_n(t_n(x)), \quad (4.52)$$

avec, pour $x \in [1 - q_n, 1[$ on a :

$$t_n(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{k(s)}} ds, \quad \alpha_n(x) = (k(x)r_{1n}(x))^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.53)$$

Dans ce cas, en posant $\omega = t_n(x)$, on aboutit à une équation différentielle en V_n définie par :

$$V_n''(\omega) - [c^2 + P_n(\omega)]V_n(\omega) = 0, \quad (4.54)$$

avec

$$\begin{aligned} P_n(t_n(x)) &= \frac{(k(x)\varphi_n'(x))'}{r_{1n}(x)\varphi_n(x)} = \frac{1+x}{1-x} \frac{k(x)}{4r_{1n}(x)} \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-x)\left(\frac{3}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)}\right)\right] \\ &+ (1-x)^2 \left[\left(\frac{1}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)}\right)' + \left(\frac{3}{4} \frac{1}{1+x} - \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)}\right)\left(\frac{1}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)}\right)\right] \\ &= -\frac{1+x}{1-x} \frac{k(x)}{16r_{1n}(x)} + f_1(x), \end{aligned}$$

où $f_1(x)$ est continue sur $[1 - q_n, 1]$ et est donnée par :

$$f_1(x) = \frac{1+x}{4r_{1n}(x)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)} \right) + (1-x) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)} \right)' \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4(1+x)} - \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)} \right) \left(\frac{1}{1+x} + \frac{r_{1n}'(x)}{r_{1n}(x)} \right) \right].$$

Si on pose $f_2(x) = \frac{1}{16(1-x)} \left(\frac{1+x}{r_{1n}(x)} - \frac{2}{r_{1n}(1)} \right) + f_1(x)$, qui est continue sur $[1 - q_n, 1]$, alors on obtient

$$P_n(t_n(x)) = -\frac{1}{8r_{1n}(1)(1-x)} + f_2(x). \quad (4.55)$$

Revenons maintenant à l'expression de $t_n(x)$ et cherchons un équivalent de ce dernier dans un voisinage de 1.

Lemme 4.4 *Pour tout $x \in]1 - q_n, 1[$ il existe une fonction ϵ_{2n} vérifiant*

$$t_n(x) = \sqrt{2r_{1n}(x)(1-x)} + \epsilon_{2n}(x), \quad (4.56)$$

et il existe un voisinage $\mathcal{V}(1^-)$ de 1^- tel que

$$\left| \frac{\epsilon_{2n}(x)}{t_n(x)} \right| < 1, \quad \forall x \in \mathcal{V}(1^-). \quad (4.57)$$

Preuve : On écrit

$$t_n(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{k(t)}} ds = \sqrt{2r_{1n}(x)(1-x)} + \epsilon_{2n}(x), \quad (4.58)$$

avec

$$\epsilon_{2n}(x) = \int_x^1 \frac{\sqrt{r_{1n}(s)} - \sqrt{\frac{r_{1n}(1)}{2}(1+s)}}{\sqrt{1-s^2}} ds.$$

En utilisant le fait que $r_{1n}(s) - \frac{r_{1n}(1)}{2}(1+s) = -\frac{1}{2}(1-s)(q_n + (1+2s))$, on peut écrire :

$$\epsilon_{2n}(x) = -\frac{1}{2} \int_x^1 \sqrt{1-s} h_n(s) ds, \quad (4.59)$$

avec

$$h_n(s) = \frac{\frac{q_n^2}{1+s} + \frac{1+2s}{1+s}}{\sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{1+s}} + \sqrt{\frac{r_{1n}(1)}{2}}}. \quad (4.60)$$

Puisque $1 + s > 2 - q_n$, alors

$$\frac{q_n^2}{1+s} + \frac{1+2s}{1+s} \leq \frac{3+q_n^2}{2-q_n}. \quad (4.61)$$

D'autre part, on a $\sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{1+s}} \geq \sqrt{\frac{1-2q_n}{2}}$, d'où

$$\sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{1+s}} + \sqrt{\frac{r_{1n}(1)}{2}} \geq \sqrt{\frac{1-2q_n}{2}} + \sqrt{\frac{1-q_n^2}{2}}. \quad (4.62)$$

D'après (4.61) et (4.62), on conclut que (4.60) vérifie :

$$|h_n(s)| \leq \frac{3+q_n^2}{(2-q_n) \left(\sqrt{\frac{1-2q_n}{2}} + \sqrt{\frac{1-q_n^2}{2}} \right)}.$$

Ainsi, on a :

$$|\epsilon_{2n}(x)| < C_1(q_n)(1-x)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x \in]1-q_n, 1[, \quad (4.63)$$

avec $C_1(q_n) = \frac{3+q_n^2}{2(2-q_n) \left(\sqrt{\frac{1-2q_n}{2}} + \sqrt{\frac{1-q_n^2}{2}} \right)}$. On remarque que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \epsilon_{1n}(x) = 0$, donc $\forall \epsilon > 0$, $\exists v$ voisinage de 1^- tel que $x \in v \Rightarrow |\epsilon_{1n}(x)| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon + \sqrt{2r_{1n}(x)(1-x)} < t_n(x)$. On choisit

ϵ de sorte que la quantité de gauche reste strictement positive, ainsi

$$\frac{\epsilon_{2n,c}(x)}{t_n(x)} = \frac{\epsilon_{2n}(x)}{\sqrt{2r_{1n}(1)(1-x)} + \epsilon_{1n}(x)} < \frac{C_1(q_n)(1-x)}{-\frac{\epsilon}{\sqrt{1-x}} + 2r_{1n}(1)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow 1^-. \quad (4.64)$$

D'où le résultat. \square

Lemme 4.5 *Il existe une fonction G telle que $G \circ t_n$ soit continue sur $[q_n, 1 - q_n]$, et*

$$P_n(t_n(x)) = -\frac{1}{4t_n^2(x)} + G(t_n(x)), \quad (4.65)$$

Preuve : Pour $x \in]q_n, 1 - q_n[$, on écrit

$$2r_{1n}(1)(1-x) = (t_n(x) - \epsilon_{1n}(x))^2 = t_n^2(x) \left(1 - \frac{\epsilon_{1n}(x)}{t_n(x)} \right)^2,$$

et d'après (4.57) et en développant en série $\left(1 - \frac{\epsilon_{1n}(x)}{t_n(x)} \right)^2$, on trouve que :

$$\frac{1}{2r_{1n}(1)(1-x)} = \frac{1}{t_n^2(x)} + \beta_n(t_n(x)),$$

où β_n est le développement en série dont on supprime le premier terme et qu'on divise ensuite par $t_n(x)$. D'après (4.57) et (4.55), on écrit $P_n(t_n(x))$ sous la forme suivante :

$$P_n(t_n(x)) = -\frac{1}{4t_n^2(x)} + G(t_n(x)). \quad (4.66)$$

avec $G(t_n(x)) = \beta_n(t_n(x)) + f_2(x)$, qui est continue sur $[1 - q_n, 1]$. \square

L'équation différentielle (4.54) devient :

$$V_n''(\omega) - [c^2 - \frac{1}{4\omega^2} + G(\omega)]V_n(\omega) = 0.$$

Une solution de (4.54) est de la forme :

$$V_n(\omega) = \tilde{V}_n(\omega) + R_{1c}(\omega),$$

avec

$$\tilde{V}_n(\omega) = C_n(c\omega)^{\frac{1}{2}}I_0(c\omega) + D_n(c\omega)^{\frac{1}{2}}K_0(c\omega), \quad (4.67)$$

et

$$R_{1c}(\omega) = \int_0^\omega K(\omega, s)G(s)V_n(s)ds, \quad (4.68)$$

où C_n, D_n sont des constantes, I_0, K_0 sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro de première et de seconde espèce et $K(t_n(x), s)$ est le noyau défini par :

$$K(\omega, s) = \frac{(c\omega)^{\frac{1}{2}}(cs)^{\frac{1}{2}}}{\mathcal{W}(s)} (I_0(c\omega)K_0(cs) - I_0(cs)K_0(c\omega)),$$

où $\mathcal{W}(s)$ est le wronskien des fonctions $(cs)^{\frac{1}{2}}I_0(cs)$ et $(cs)^{\frac{1}{2}}K_0(cs)$.

On sait que $W(I_\nu, K_\nu)(s) = -\frac{1}{s}$, voir [41], alors $\mathcal{W}(s) = -c$. Ainsi, on a :

$$K(\omega, s) = -\frac{1}{c} \left((c\omega)^{\frac{1}{2}}I_0(c\omega)(cs)^{\frac{1}{2}}K_0(cs) - (cs)^{\frac{1}{2}}I_0(cs)(c\omega)^{\frac{1}{2}}K_0(c\omega) \right). \quad (4.69)$$

Enfin, une solution de (4.14) sur $[1 - q_n, 1]$ est de la forme :

$$\psi_n(x) = \frac{V_n(t_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} = \frac{\tilde{V}_n(t_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} + \frac{R_{1c}(t_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}}. \quad (4.70)$$

4.3.2 Etude asymptotique

Le but de cette section est de trouver une approximation des solutions continues et bornées de (4.14) lorsque $c \gg 1$ et pour n fixé. On rappelle que pour $q_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{c}$ on a noté dans (4.16), (4.36) et (5.25) :

$$s_n(x) = \int_x^{q_n} \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt, l_n(x) = \int_{q_n}^x \sqrt{\frac{r_{1n}(t)}{k(t)}} dt \text{ et } t_n(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{r_{1n}(s)}{k(s)}} ds.$$

Si on pose $z = s_n(x)$ et $z_1 = (\frac{3}{2}cz)^{2/3}$, alors on a le théorème suivant :

Théorème 4.1 *Pour $c \gg 1$ et n fixé il existe des constantes C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) telles que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{x \in [0, q_n]} \left| \psi_{n,c}(x) - \frac{A_n(cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) + B_n(cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1)}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_1}{c} \\ \sup_{x \in [q_n, 1 - q_n]} \left| \psi_{n,c}(x) - \frac{A_{1n}(cz)^{\frac{1}{6}} Ai(z_1)}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_2}{c} \end{array} \right. ,$$

et pour $x \in [1 - q_n, 1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{x \in [1 - q_n, 1]} \left| \psi_{n,c}(x) - \frac{C_n \sqrt{ct_n(x)} I_0(ct_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_3}{c} \text{ si } ct_n(x) \leq 1 \\ \sup_{x \in [1 - q_n, 1]} \left| \psi_{n,c}(x) - \frac{D_n \sqrt{ct_n(x)} K_0(ct_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_4}{c} \text{ si } ct_n(x) >, \end{array} \right.$$

où A_n, B_n, A_{1n}, C_n et D_n sont des constantes qui ne dépendent que de n .

Preuve : Etudions le comportement des fonctions d'ondes sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé, $\psi_{n,c}$, sur les intervalles $[0, q_n]$, $[q_n, 1 - q_n]$ et sur $[1 - q_n, 1]$.

(i) **Etude sur $[0, q_n]$.**

On rappelle qu'au voisinage de q_n on a $s_n(x) \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} (q_n - x)^{\frac{3}{2}}$, donc

$$(q_n - x)^{-\frac{1}{4}} \approx \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} \right)^{\frac{1}{6}} s_n^{-\frac{1}{6}}(x). \quad (4.71)$$

Une solution de (4.17) sur $[0, q_n]$ vérifie :

$$U_n(z) = A_n(cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) + B_n(cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1) + \int_{z_0}^z K(z, t) t^{-\frac{4}{3}} F(t) U_n(t) dt, \quad (4.72)$$

où $z = s_n(x)$, $z_1 = \left(\frac{3}{2}cz\right)^{\frac{2}{3}}$ et si on pose $t_1 = \left(\frac{3}{2}ct\right)^{\frac{2}{3}}$, alors

$$K(z, t) = -\frac{3\pi}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left((cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) (ct)^{\frac{1}{6}} Bi(-t_1) (ct)^{\frac{1}{6}} Ai(-t_1) (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1) \right).$$

On pose

$$R_c(z) = \int_{z_0}^z K(z, t) t^{-\frac{4}{3}} F(t) U_n(t) dt.$$

Dans l'intégrale précédente on prend $u = \left(\frac{3}{2}cz\right)^{\frac{2}{3}}$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} R_c(z) &= -\frac{9\pi}{2c^{\frac{2}{3}}} \int_{u_0}^{u_z} \left[(cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) u^{\frac{1}{4}} Bi(-u) - u^{\frac{1}{4}} Ai(-u) (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1) \right] \\ &\times u^{-2} F\left(\frac{2}{3c}u^{\frac{3}{2}}\right) U_n\left(\frac{2}{3c}u^{\frac{3}{2}}\right) du. \end{aligned} \quad (4.73)$$

On rappelle que $\psi_{n,c}(x) = \varphi_n(x) U_n(s_n(x))$. De là et en utilisant (4.71), on obtient :

$$\psi_{n,c}(x) \approx \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2q_n}{1-q_n^2}}\right)^{\frac{1}{6}} (k(x)(q_n+x))^{-\frac{1}{4}} \frac{U_n(z)}{z^{\frac{1}{6}}}.$$

Comme $\psi_{n,c}(x)$ est bornée alors $\frac{U_n(z)}{z^{\frac{1}{6}}}$ l'est aussi. D'autre part, d'après [41], on sait que

$Ai(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}$ et $Bi(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})}$. Pour $x \gg 1$, on pose $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on a :

$$Ai(-x) \approx \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad Bi(-x) \approx -\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.74)$$

De là, on montre que le noyau K est continu et borné sur $[0, \infty[\times [0, \infty[$ et par suite pour tout $x \in [0, q_n]$:

$$R_c(z(x)) = o(1) \quad (c \rightarrow \infty). \quad (4.75)$$

Ainsi, il existe une constante C_1 telle que

$$\sup_{x \in [0, q_n]} \left| \psi_n(x) - \frac{A_n (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) + B_n (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1)}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{Cte}{c}. \quad (4.76)$$

(ii) **Etude sur $[q_n, 1 - q_n]$.**

On rappelle qu'une solution de (4.51) sur $[q_n, 1 - q_n]$ est de la forme :

$$W_n(y) = A_{1n} (cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1) + B_{1n} (cy)^{\frac{1}{6}} Bi(y_1) + R_{1c}(y), \quad (4.77)$$

avec $R_{1c}(y) = \int_{y_0}^z K(y, t) t^{-\frac{4}{3}} F(t) U_n(t) dt$, où :

$$K(y, t) = -\frac{3\pi}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left((cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1) (ct)^{\frac{1}{6}} Bi(t_1) (ct)^{\frac{1}{6}} Ai(t_1) (cy)^{\frac{1}{6}} Bi(y_1) \right),$$

et $y_1 = \left(\frac{3}{2}cy\right)^{\frac{2}{3}}$ et $t_1 = \left(\frac{3}{2}ct\right)^{\frac{2}{3}}$. Le même changement de variable que dans (4.73), nous donne :

$$\begin{aligned} R_{1c}(y) &= -\frac{\pi^2}{c^{\frac{2}{3}} 3} \int_{u_0}^{u_y} \left[(cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1) u^{\frac{1}{4}} Bi(u) - u^{\frac{1}{4}} Ai(u) (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(y_1) \right] \\ &\times u^{-2} F_1 \left(\frac{2}{3c} u^{\frac{3}{2}} \right) W_n \left(\frac{2}{3c} u^{\frac{3}{2}} \right) du. \end{aligned} \quad (4.78)$$

En tenant compte du fait qu'au voisinage de q_n on a

$$(x - q_n)^{-\frac{1}{4}} \sim \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2q_n}{1 - q_n^2}} \right)^{\frac{1}{6}} l_n^{-\frac{1}{6}}(x), \quad (4.79)$$

et du fait qu'on cherche des solutions continues et bornées de (4.51), on vérifie facilement que $\frac{W_n(l_n(x))}{l_n^{\frac{1}{6}}(x)}$ est aussi continue et bornée. Dans la suite, on note par $y = l_n(x)$. On pose $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. On sait qu'au voisinage de ∞ , voir [41], on a :

$$Ai(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{\frac{1}{2}} x^{14}} \quad Bi(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\pi^{\frac{1}{2}} x^{14}}, \quad (4.80)$$

De la même manière, on montre que pour tout $x \in [q_n, 1 - q_n]$ on a :

$$R_{1c}(y) = o(1) \quad (c \rightarrow \infty). \quad (4.81)$$

D'autre part, puisqu'on cherche des solutions bornées alors B_{1n} doit être nulle. Donc il existe une constante C_2 telle que :

$$\sup_{x \in [q_n, 2q_n]} \left| \psi_n(x) - \frac{A_{1n}(cy)^{\frac{1}{6}} Ai(y_1)}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_2}{c}. \quad (4.82)$$

(iii) **Etude sur $]1 - q_n, 1]$.**

Dans ce qui suit, on montrera que pour $c \gg 1$, la quantité (4.68) est négligeable comparée

à (4.67). On distingue les deux cas suivants $ct_n(x) \leq 1$ et $ct_n(x) > 1$.

On sait qu'au voisinage de zéro, on a d'une part, voir [41] :

$$I_\nu(x) \sim \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \quad K_\nu(x) \sim \log \frac{1}{x}.$$

De plus, il est connu, voir [41], que sur $]0, +\infty[$ et pour $\nu \geq 0$ la fonction I_ν est positive et croissante et que la fonction K_ν est positive et décroissante.

De l'expression (4.69) et des propriétés déjà mentionnées des I_0 et K_0 , on a pour $s \leq t_n(x)$ et pour $ct_n(x) \leq 1$, et en prenant $D_n = 0$ dans l'expression de \tilde{V}_n , on obtient :

$$\tilde{V}_n(t_n(x)) = C_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0(ct_n(x)).$$

Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} |K(t_n(x), s)| &= \left| -\frac{1}{c} \left((ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0(ct_n(x))(cs)^{\frac{1}{2}} K_0(cs) - (cs)^{\frac{1}{2}} I_0(cs)(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} K_0(ct_n(x)) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{c} (ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0(ct_n(x))(cs)^{\frac{1}{2}} K_0(cs) \left(1 - \frac{I_0(cs)}{I_0(ct_n(x))} \frac{K_0(ct_n(x))}{K_0(cs)} \right) \right| \\ &\leq \frac{2}{c} (ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0(ct_n(x))(cs)^{\frac{1}{2}} K_0(cs). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Par conséquent, on a :

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{R_{1c}(t_n(x))}{C_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} I_0(ct_n(x))} = 0. \quad (4.84)$$

De même, pour $ct_n(x) > 1$, et en prenant $C_n = 0$ dans l'expression de \tilde{V}_n , on obtient :

$$\tilde{V}_n(t_n(x)) = D_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} K_0(ct_n(x)).$$

De là, on conclut que :

$$\left| \frac{R_{1c}(t_n(x))}{D_n(ct_n(x))^{\frac{1}{2}} K_0(ct_n(x))} \right| \leq \frac{4MN(1 - q_n^2)}{\pi |D_n| c^{\frac{3}{2}}} \frac{t_n^{-\frac{1}{2}}(x)}{((1+x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}}, \quad (4.85)$$

qui tend vers zéro lorsque c tend vers $+\infty$. Ainsi, si $ct_n(x) \leq 1, \forall x \in]q_n, 1]$ on a :

$$\sup_{x \in]q_n, 1]} \left| \psi_n(x) - \frac{C_n \sqrt{ct_n(x)} I_0(ct_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{Cte}{c}, \quad (4.86)$$

et si $ct_n(x) > 1, \forall x \in]q_n, 1]$

$$\sup_{x \in]q_n, 1]} \left| \psi_n(x) - \frac{D_n \sqrt{ct_n(x)} K_0(ct_n(x))}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{Cte}{c}. \quad (4.87)$$

□

Remarque

Dans le cas où $\chi_n = c^2$, on obtient dans $r_n(x) = k(x)$. Dans ce cas, l'équation différentielle (4.14) se transforme en une équation du type Sturm-Liouville de la forme

$$\left(\rho^2 y' \right)' + \lambda^2 \rho^2 y = 0. \quad (4.88)$$

Le comportement asymptotique des fonctions solutions de (4.88) a été étudié dans [16]. Ce cas correspond à $\alpha = 0$ et $\beta = -1/2$. Ces fonctions se comportent comme la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

Chapitre 5

Etude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau d'Airy

Dans ce chapitre on va faire un rappel sur les fonctions d'Airy de première et de deuxième espèce, solutions d'une équation différentielle du second degré. Ensuite, on va étudier le comportement asymptotique des fonctions propres d'un opérateur à noyau d'Airy.

5.1 Fonctions d'Airy

Dans ce paragraphe, on présentera les propriétés les plus utiles vérifiées par les fonctions d'Airy. Pour plus de détail voir [41]. Les fonctions d'Airy de première et de deuxième espèce, notées respectivement par Ai et Bi , sont solutions de l'équation différentielle $\frac{d^2w}{dx^2} = xw$. Pour

$x \geq 0$, on pose $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Dans ce cas les fonctions d'Airy vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
Ai(0) &= \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})} & ; & \quad Ai'(0) = -\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})} \\
Ai(x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{3}}(\xi) & ; & \quad Ai'(x) = -\pi^{-1}3^{-\frac{1}{2}}xK_{\frac{2}{3}}(\xi) \\
Ai(-x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}\left(J_{\frac{1}{3}}(\xi) + J_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right) & ; & \quad Ai'(-x) = \frac{1}{3}x\left(J_{\frac{2}{3}}(\xi) + J_{-\frac{2}{3}}(\xi)\right) \\
Bi(0) &= \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})} & ; & \quad Bi'(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{1}{3})} \\
Bi(x) &= \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(I_{\frac{1}{3}}(\xi) + I_{-\frac{1}{3}}(\xi)\right) & ; & \quad Bi'(x) = 3^{-\frac{1}{2}}\left(I_{\frac{2}{3}}(\xi) + I_{-\frac{2}{3}}(\xi)\right) \\
Bi(-x) &= \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(J_{-\frac{1}{3}}(\xi) - J_{\frac{1}{3}}(\xi)\right) & ; & \quad Bi'(-x) = 3^{\frac{1}{2}}x\left(J_{-\frac{2}{3}}(\xi) + J_{\frac{2}{3}}(\xi)\right),
\end{aligned}$$

On a aussi, d'après [41], le comportement asymptotique des fonctions d'Airy au voisinage de $+\infty$:

$$Ai(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_s}{\xi^s} \text{ et } Ai(-x) \sim \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}\left\{\cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}}\right\}, \quad (5.1)$$

et pour la fonction d'Airy de deuxième espèce on a au voisinage de $+\infty$:

$$Bi(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{u_s}{\xi^s} \text{ et } Bi(-x) \sim \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}\left\{-\sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s}}{\xi^{2s}} + \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{u_{2s+1}}{\xi^{2s+1}}\right\}, \quad (5.2)$$

où $u_0 = v_0 = 1$, pour $u_s = \frac{(2s+1)(2s+3)(2s+5)\dots(6s+1)}{(216)^s s!}$ et $v_s = -\frac{6s+1}{6s-1}u_s, (s \geq 1)$.

5.2 Étude asymptotique des fonctions propres de l'opérateur à noyau d'Airy

On a vu dans le premier chapitre que la distribution des valeurs propres d'une matrice aléatoire (G.U.E) d'ordre n fait intervenir le déterminant de Fredholm d'un noyau de Christoffel-

Darboux, $K_n(\cdot, \cdot)$, associé aux fonctions d'Hermite φ_j :

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)\varphi_k(y).$$

On considère le changement d'échelle

$$x' = \sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2n^{1/6}}}, \quad y' = \sqrt{2n} + \frac{y}{\sqrt{2n^{1/6}}},$$

alors, voir [37], on trouve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n^{1/6}}} K_n \left(\sqrt{2n} + \frac{x}{\sqrt{2n^{1/6}}}, \sqrt{2n} + \frac{y}{\sqrt{2n^{1/6}}} \right) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai'(x)Ai(y)}{x - y},$$

où $Ai(\cdot)$ est la fonction d'Airy de première espèce.

On appelle noyau d'Airy, la fonction de deux variables $K(\cdot, \cdot)$ définie sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ par

$$K(x, y) = \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai'(x)Ai(y)}{x - y}. \quad (5.3)$$

Soient $g \in L^2([0, +\infty[)$ et c un réel positif. On associe au noyau K l'opérateur intégral G_c défini par

$$G_c g(x) = \int_c^{+\infty} K(x, y)g(y)dy. \quad (5.4)$$

Proposition 5.1 *Pour $(a, b) \in [c, +\infty[\times [c, +\infty[$ on a :*

$$K(a, b) = \int_c^{+\infty} Ai(a+z)Ai(b+z)dz.$$

Preuve

Le problème se ramène par une translation à l'origine. Soient $a, b \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) K(a, b) &= \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \left(\frac{Ai(a)A'i(b) - A'i(a)Ai(b)}{a - b} \right) \\
 &= \frac{(A'i(a)A'i(b) - A''i(a)Ai(b))(a - b) - (Ai(a)A'i(b) - A'i(a)Ai(b))}{(a - b)^2} \\
 &+ \frac{(Ai(a)A''i(b) - A'i(a)A'i(b))(a - b) + (Ai(a)A'i(b) - A'i(a)Ai(b))}{(a - b)^2} \\
 &= \frac{Ai(a)A''i(b) - A''i(a)Ai(b)}{a - b}.
 \end{aligned}$$

Or on sait que la fonction d'Airy Ai vérifie $Ai''(a) = aAi(a)$, ainsi l'expression précédente devient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) K(a, b) = \frac{bAi(a)Ai(b) - aAi(a)Ai(b)}{a - b} = -Ai(a)Ai(b). \quad (5.5)$$

Dans le cas où $a = b$, soit $\epsilon > 0$ et écrivons :

$$\begin{aligned}
 K(a + \epsilon, a) &= \frac{Ai(a + \epsilon)A'i'(a) - A'i'(a + \epsilon)Ai(a)}{\epsilon} \\
 &= \frac{Ai(a + \epsilon) - Ai(a)}{\epsilon} A'i'(a) - \frac{A'i'(a + \epsilon) - A'i'(a)}{\epsilon} Ai(a),
 \end{aligned}$$

en faisant tendre ϵ vers 0 on trouve :

$$K(a, a) = \left(A'i'(a) \right)^2 - A'i''(a)Ai(a) = \left(A'i'(a) \right)^2 - a(Ai(a))^2.$$

Enfin on aboutit à :

$$\frac{\partial}{\partial a} K(a, a) = 2A'i'(a)A'i''(a) - (Ai(a))^2 - 2aA'i'(a)Ai(a) = -(Ai(a))^2. \quad (5.6)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \int_0^{+\infty} Ai(a+z)Ai(b+z)dz = \\
& \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} (Ai(a+z)) Ai(b+z)dz + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial b} (Ai(b+z)) Ai(a+z)dz \\
& = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (Ai(a+z)) Ai(b+z)dz + \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (Ai(b+z)) Ai(a+z)dz \\
& = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} (Ai(b+z)Ai(a+z)) dz \\
& = -Ai(a)Ai(b) + \lim_{z \rightarrow +\infty} Ai(b+z)Ai(a+z) = -Ai(a)Ai(b), \tag{5.7}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\frac{\partial}{\partial a} Ai(a+z) = \frac{\partial}{\partial z} Ai(a+z)$, et que $\lim_{z \rightarrow +\infty} Ai(z) = 0$. Pour $a = b$ et d'après [41], on a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{+\infty} (Ai(a+z))^2 dz = -(Ai(a))^2. \tag{5.8}$$

Enfin, d'après (5.5),(5.7), (5.6) et (5.8) on obtient le résultat. \square

Corollaire 5.1 K est un opérateur nucléaire sur $L^2([0, +\infty[)$.

Preuve : Pour montrer que K est un opérateur nucléaire, il suffit de montrer qu'il est le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt, ce qui est le cas d'après la proposition (5.1). En effet, si on pose $I = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |Ai(x+z)|^2 dx dz$, alors du fait que $\int (Ai(x))^2 dx = x(Ai(x))^2 - (Ai'(x))^2$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} x(Ai(x))^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (Ai'(x))^2 = 0$, voir [41], on obtient :

$$\begin{aligned}
I & = \int_0^{+\infty} \left(\int_z^{+\infty} |Ai(u)|^2 du \right) dz = \int_0^{+\infty} (Ai'(z))^2 dz - \int_0^{+\infty} z(Ai(z))^2 dz \\
& = \int_0^{+\infty} Ai'(z) dz - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} Ai'(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} Ai'(z) dz,
\end{aligned}$$

et comme au voisinage de $+\infty$ on a $Ai'(z) \sim -\frac{x^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}}$, alors $I < +\infty$. Ainsi, on a montré que K est le produit de deux noyaux d'un opérateurs de Hilbert-Schmidt. \square

On considère maintenant l'opérateur différentiel L_2 défini pour $\varphi \in C^2([0, +\infty[)$ par :

$$L_2\varphi(x) = -\frac{d}{dx} x \frac{d\varphi(x)}{dx} + x(x+c)\varphi(x), \tag{5.9}$$

où c est un paramètre réel positif.

Proposition 5.2 *L'opérateur intégral de noyau K commute avec l'opérateur différentiel L_2 .*

Preuve Montrons que L_2 commute avec l'opérateur intégral G_c défini pour $g \in L^2([0, +\infty[)$ par (5.4), c'est à dire montrons que $(L_2 \circ G_c)g(x) = (G_c \circ L_2)g(y)$, ce qui revient à montrer que

$$L_{2,x}K(x, y) = L_{2,y}K(x, y). \quad (5.10)$$

À l'aide de l'expression (5.3) du noyau K , montrons que $L_{2,x}Ai(x + y) = L_{2,y}Ai(x + y)$. En utilisant les propriétés de dérivation de la fonction $Ai(\cdot)$, voir [41], on a :

$$\begin{aligned} L_{2,x}Ai(x + y) &= -\frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} Ai(x + y) \right) + x(x + c)Ai(x + y) \\ &= -\frac{d}{dx} \left(xA'i(x + y) - x(x + c)Ai(x + y) \right) \\ &= -Ai'(x + y) + cAi(x + y) = -Ai'(x + y) + cAi''(x + y). \end{aligned}$$

On remarque que la dernière expression est symétrique par rapport à x et y , donc $L_{2,x}Ai(x + y) = L_{2,y}Ai(x + y)$. De là, et de la propriété du noyau K on obtient (5.10). \square

D'après la proposition (5.1), l'opérateur intégral G_c à noyaux K définis dans (5.4) est autoadjoint et nucléaire (on peut vérifier qu'il est aussi positif), donc il est diagonalisable dans une base orthonormée de fonctions propres. Soient $\{\Phi_{n,c}\}_n$ l'ensembles des fonctions propres de l'opérateur G_c . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note par μ_n la valeur propre associée à $\Phi_{n,c}$.

Dans la suite, et en utilisant la commutativité de cet opérateur intégral avec l'opérateur différentiel L_2 , on va étudier le comportement asymptotique des fonctions propres $\Phi_{n,c}$ d'abord lorsque n prend de grandes valeurs en gardant le paramètre c fixé, et ensuite lorsque c prend de grandes valeurs et pour n fixé.

5.3 Asymptotique des fonctions propres $\Phi_{n,c}$:

Comme dans le cas des fonctions d'ondes sphéroïdales de l'ellipsoïde allongé $\psi_{n,c}$, on va utiliser la méthode WKB déjà décrite dans le chapitre précédent pour déterminer le comportement asymptotique des fonctions $\Phi_{n,c}$ suivant les valeurs des paramètres n et c . On considère l'équation différentielle du second ordre définie sur $[0, \infty[$ par :

$$x\Phi_{n,c}'' + \Phi_{n,c}' + (\chi_n - x(x+c))\Phi_{n,c} = 0, \quad (5.11)$$

où le nombre χ_n ($n = 0, 1, \dots$) est une valeur propre de l'opérateur différentiel :

$$L_x f = -x \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} + x(x+c)f, \quad x \geq 0 \text{ et } f \in L^2([0, +\infty[),$$

et c est un paramètre réel strictement positif. L'objectif de cette section est de trouver une approximation des solutions de (5.11) d'abord pour n fixé et c large, et ensuite pour c fixé et n large.

5.3.1 Cas n fixé et c large :

On écrit (5.11) comme suit :

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{d\Phi_{n,c}}{dx} \right) + cr_n(x)\Phi_{n,c} = 0, \quad (5.12)$$

où $k(x) = x$ et $r_n(x) = \frac{\chi_n}{c} - \frac{x}{c}(x+c)$. On espère trouver une bonne approximation des solutions de (5.12) en utilisant la méthode WKB. Cela consiste à utiliser un changement de variable et de fonction dans le but de déduire de (5.12) une équation différentielle simple à résoudre. Le signe du produit $k(x)r_n(x)$ change sur $[0, \infty[$ et les fonctions $k(x)$ et $r_n(x)$ s'annulent sur le même intervalle. Cela nous amène à étudier (5.12) séparément sur des régions différentes de $[0, \infty[$. Soient x_1 et x_2 les racines de $r_n(x) = 0$. Si on pose $a_n = \frac{\chi_n}{c}$, alors on a :

$$x_1 = -\frac{c}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a_n}{c}} \right) \quad x_2 = \frac{2a_n}{1 + \sqrt{1 + \frac{4a_n}{c}}}.$$

Ainsi les équations $k(x) = 0$ et $r_n(x) = 0$ admettent respectivement 0 et x_2 comme solutions dans $[0, \infty[$, et on a $k(x)r_n(x) > 0$ sur $]0, x_2[$ et $k(x)r_n(x) < 0$ sur $]x_2, \infty[$. Donc pour appliquer la méthode WKB à (5.12) il faut diviser $[0, \infty[$ en trois régions comme suit :

a) $x \in [0, \frac{x_2}{2}]$,

On cherche des solutions de (5.12) de la forme $\Phi_n = \psi_n(x)U(s_n(x))$, où :

$$s_n(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt, \quad \psi_n(x) = \frac{1}{(k(x)r_n(x))^{1/4}} = \frac{1}{(x(\frac{x-x(x+c)}{c}))^{1/4}}. \quad (5.13)$$

En utilisant dans (5.12) le changement (5.13), on obtient une nouvelle équation différentielle en U à savoir :

$$U''(s) + (c - h(s))U(s) = 0, \quad s = s_n(x), \quad (5.14)$$

où

$$h(s_n(x)) = \frac{1}{x} \frac{1}{4r_n(x)} \left\{ \frac{-1}{4} + \frac{x r_n'}{2 r_n} + x^2 \left[\left(\frac{r_n'}{r_n} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{r_n'}{r_n} \right)^2 \right] \right\} = \frac{-1}{16xr_n(0)} + f_1(x),$$

et $f_1(x) = \frac{1}{16x} \left[\frac{1}{r_n(0)} - \frac{1}{r_n(x)} \right] + \frac{1}{4r_n(x)} \left\{ \frac{1 r_n'}{2 r_n} + x \left[\left(\frac{r_n'}{r_n} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{r_n'}{r_n} \right)^2 \right] \right\}$ est continue sur $[0, \frac{x_2}{2}]$. Le lemme suivant nous sera utile pour donner une expression simple de $h(s_n(x))$.

Lemme 5.1 Pour tout $x \in [0, \frac{x_2}{2}]$ on a $s_n(x) = 2\sqrt{a_n x} + \epsilon_n(x)$, avec

$$|\epsilon_n(x)| \leq \frac{1}{c\sqrt{a_n}} \left(\frac{2}{3}c + \frac{2}{5}x \right) x^{3/2} \text{ et } \left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| < 1. \quad (5.15)$$

Preuve : De (5.13) on déduit :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^x \sqrt{\frac{\chi_n - ct - t^2}{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^x \sqrt{\frac{\chi_n}{t}} dt + \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^x \frac{\sqrt{\chi_n - ct - t^2} - \sqrt{\chi_n}}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\sqrt{\frac{\chi_n}{c}} \sqrt{x} + \epsilon_n(x) = \tilde{s}_n(x) + \epsilon_n(x), \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\tilde{s}_n(x) = 2\sqrt{a_n x}$ et $\epsilon_n(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^x \frac{-t^2 - ct}{(\sqrt{\chi_n - ct - t^2} + \sqrt{\chi_n})\sqrt{t}} dt$. On remarque que :

$$|\epsilon_n(x)| \leq \frac{1}{c\sqrt{a_n}} \int_0^x (ct^{1/2} + t^{3/2}) dt = \frac{1}{c\sqrt{a_n}} \left(\frac{2}{3} cx^{3/2} + \frac{2}{5} x^{5/2} \right), \quad (5.17)$$

ainsi $\sup_{x \in [0, \frac{x_2}{2}]} \left| s_n(x) - 2\sqrt{\frac{x\chi_n}{c}} \right| \leq \frac{1}{c\sqrt{a_n}} \left(\frac{2}{3} c \frac{x_2^{3/2}}{2} + \frac{2}{5} \frac{x_2^{5/2}}{2} \right) \rightarrow 0$ si $c \rightarrow +\infty$. Ici on a utilisé le fait que $\frac{x_2}{2} < a_n$ et $\chi_n = O(c^{1/2})$, voir [43]. En utilisant (5.17) on déduit que :

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon_n(x)}{\tilde{s}_n(x)} = 0$, ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} = 0$. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \eta[$ on ait $\left| \frac{\epsilon_n(x)}{s_n(x)} \right| < 1$. Puisque $\lim_{c \rightarrow \infty} x_2 = 0$, alors pour tout $\alpha > 0$ il existe $A > 0$ tel que pour tout $c > A$ on ait $x_2 < \alpha$. Pour $\eta = \alpha$ on obtient le résultat. \square

En utilisant (5.16), on obtient $x = \frac{1}{4a_n} (s_n(x) - \epsilon_n(x))^2$. Maintenant on peut écrire $h(s_n)$ comme suit :

$$h(s_n(x)) = \frac{-1}{16r(0)} \frac{4a_n}{(S(x) - \epsilon_n(x))^2} + f_1(x) = \frac{-1}{4s_n^2(x)} + F(s_n(x)), \quad (5.18)$$

où $F(s_n(x))$ est obtenue en ajoutant à $f_1(x)$ le développement en série de $\frac{4a_n}{(s_n(x) - \epsilon_n(x))^2}$ sauf le premier terme. Alors $F(s_n(x))$ est une fonction continue sur $[0, \frac{x_2}{2}]$ et l'équation (5.14) se met sous la forme, en posant $z = s_n(x)$:

$$U''(z) + \left(c + \frac{1}{4z^2} \right) U(z) = F(z)U(z), \quad (5.19)$$

Il est connue, voir [1], que les solutions de l'équation sans second membre associée à (5.19) sont de la forme :

$$U_1(z) = \sqrt{cz}^{\frac{1}{2}} J_0(\sqrt{cz}) \quad \text{et} \quad U_2(z) = \sqrt{cz}^{\frac{1}{2}} Y_0(\sqrt{cz}),$$

où J_0 et Y_0 sont respectivement les fonctions de Bessel d'ordre zéro de première et de deuxième espèce. Une solution générale U de (5.19) vérifie (voir [39]) :

$$U(z) = A_n U_1(z) + B_n U_2(z) + \sqrt{z} R_c(z), \quad (5.20)$$

où A_n et B_n sont des constantes réelles, et

$$R_c(z) = \frac{1}{\mathcal{W}(U_1, U_2)} \int_0^z K(z, t) F(t) U(t) dt,$$

où $K(\cdot, \cdot)$ est le noyau continue sur $[0, s_n(\frac{x_2}{2})] \times [0, s_n(\frac{x_2}{2})]$, défini par :

$$K(z, t) = \frac{1}{\sqrt{z}} [U_1(z)U_2(t) - U_1(t)U_2(z)] = \sqrt{t} [J_0(\sqrt{cz})Y_0(\sqrt{ct}) - J_0(\sqrt{ct})Y_0(\sqrt{cz})], \quad (5.21)$$

et $\mathcal{W}(U_1, U_2)(t) = U_1(t)U_2'(t) - U_1'(t)U_2(t) = \frac{2}{\pi}$, est le wronskien de U_1 et U_2 . Une solution générale de (5.12) est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_{n,c}(x) &= \frac{A\sqrt{\sqrt{cz}}J_0(\sqrt{cz})}{x^{1/4} \left(\frac{\chi_n - x(x+c)}{c}\right)^{1/4}} + \frac{B\sqrt{\sqrt{cz}}Y_0(\sqrt{cz})}{x^{1/4} \left(\frac{\chi_n - x(x+c)}{c}\right)^{1/4}} \\ &+ \frac{\sqrt{z}}{x^{1/4} \left(\frac{\chi_n - x(x+c)}{c}\right)^{1/4}} R_c(z). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Il est facile de vérifier que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{s_n(x)}}{x^{1/4}} = 2\sqrt{a_n}.$$

Il reste à montrer que $\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{S \in [0, s_n(a)]} |R(S)| = 0$. Pour cela, on pose :

$$\sup_{(z, z') \in [0, s_n(a)]^2} |K(z, z')| = M_K, \quad \sup_{z \in [0, s_n(\frac{x_2}{2})]} |F(z)| = M_F, \quad \sup_{z \in [0, s_n(\frac{x_2}{2})]} |U(z)| = M_U. \quad (5.23)$$

Si on pose $C_1 = M_K M_F M_U$, alors, pour tout $z \in [0, s_n(\frac{x_2}{2})]$, on a $|R_c(z)| \leq C_1 s_n(\frac{x_2}{2})$.

En se basant sur le fait que $\lim_{c \rightarrow +\infty} s_n(\frac{x_2}{2}) = 0$, on déduit que $\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{z \in [0, s_n(\frac{x_2}{2})]} |R(z)| = 0$.

Noter ici que $\Phi_{n,c}$ admet une limite finie à droite en 0, donc la constante B_n doit être égale à 0. Enfin, dans le cas où $c \gg 1$ et $x \in [0, \frac{x_2}{2}]$, on a le théorème suivant :

Théorème 5.1 *Pour tout $x \in [0, \frac{x_2}{2}]$, il existe une constante C_1 telle que*

$$\left| \Phi_{n,c}(x) - \frac{A_n \sqrt{\sqrt{\chi_n} s_n(x)} J_0(\sqrt{\chi_n} s_n(x))}{\left(x \frac{\chi_n - x(x+c)}{c}\right)^{1/4}} \right| \leq \frac{C_1 s_n(\frac{x_2}{2})}{\sqrt{c}}, \quad (5.24)$$

où A_n est une constante réelle qui ne dépend que de n .

b) $x \in [\frac{x_2}{2}, x_2]$:

Dans ce cas on écrit $r_n(x) = (x_2 - x)r_{n,0}(x)$, où $r_{n,0}(x) = \frac{1}{c}(x - x_1)$. Comme précédemment, on cherche les solutions de (5.12) de la forme $\Phi_{n,c}(x) = \psi_n(x)V(t_n)$ où ψ_n est définie par (5.13) et :

$$t_n(x) = \int_x^{x_2} \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt. \quad (5.25)$$

En utilisant le changement de variable (5.25), l'équation (5.12) donne naissance à l'équation différentielle en V sous la forme suivante :

$$V''(z) + (c + \frac{5}{36z^2})V(z) = z^{\frac{-4}{3}}F_1(z)V(z), \quad (5.26)$$

où $z = t_n(x)$ et $F(t_n(x))$ est une fonction continue sur $[\frac{x_2}{2}, x_2]$. On sait, d'après [1], que les fonctions de Bessel de première espèce $\sqrt{cz}J_{\frac{1}{3}}(cz)$ et $\sqrt{cz}J_{-\frac{1}{3}}(cz)$ vérifient l'équation différentielle sans second membre associée à (5.26) ainsi que toute combinaison linéaire de ces dernières. De là, en utilisant la relation liant les fonctions de Bessel d'ordre $\pm\frac{1}{3}$ avec les fonctions d'Airy Ai and Bi , voir ([41]), et en posant :

$$V_1(z) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) \text{ et } V_2(z) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1), \quad (5.27)$$

on obtient qu'une solution $V(z)$ de (5.12) vérifie :

$$V(z) = A_n V_1(z) + B_n V_2(z) + \int_{z_0}^z K(z, t) t^{-\frac{4}{3}} F(t) V(t) dt, \quad (5.28)$$

avec $K(z, t) = -\frac{\pi}{c} (V_1(z)V_2(t) - V_1(t)V_2(z))$. On utilise les valeurs de Ai et Bi en 0 et leurs développements asymptotiques en $+\infty$ (voir ([41])) et on observe que $\frac{V(z)}{z^{\frac{1}{6}}}$ est borné.

On pose $C_2 = (z - z_0)IML$, avec

$$M = \max_{x \in [z_0, z]} \frac{V(x)}{x^{\frac{1}{6}}}, \quad L = \max_{x \in [z_0, z]} F(x) \text{ et } I = \psi(x) \int_{z_0}^z K(z, t) t^{-\frac{7}{6}} dt.$$

On obtient le théorème :

Théorème 5.2 *Il existe une constante C_2 telle que*

$$\sup_{x \in [\frac{x_2}{2}, x_2]} \left| \Phi_n(x) - \frac{A_n (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(-z_1) + B_n (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(-z_1)}{(k(x)r_n(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_2}{c}. \quad (5.29)$$

c) $x \in [x_2, \infty[$.

On écrit (5.11) sous la forme :

$$\frac{d}{dx}(k(x)\Phi'_{n,c}(x)) - cr_{1n}(x)\Phi_{n,c} = 0, \quad (5.30)$$

où $r_{1n} = -r_n$. On a $r_{1n}(x_2) = 0$ et pour $x \in]x_2, \infty[$ on a $r_n(x) > 0$ et $k(x) > 0$. Comme on a fait précédemment, on cherche une solution de (5.30) de la forme :

$$\Phi_{n,c} = \beta_{n,c}(x)W(l_n), \text{ avec } l_n(x) = \int_{x_2}^x \sqrt{\frac{r_{1n}(t)}{k(t)}} dt \text{ et } \beta_{n,c} = (r_{1n}(x)k(x))^{-\frac{1}{4}}. \quad (5.31)$$

Alors, il existe un réel positif A tel que sur $[x_2, x_2 + A]$ et par le changement de variable et de fonction (5.31) on déduit de (5.11) que W vérifie :

$$W''(z) - (c + \frac{5}{36z^2})W(z) = z^{-\frac{4}{3}}F_2(z)W(z), \quad (5.32)$$

avec $z = l_n(x)$. On sait d'après [39] que les fonctions de Bessel modifiées $\sqrt{cz}I_{\frac{1}{3}}(cz)$ et $\sqrt{cz}I_{-\frac{1}{3}}(cz)$ sont solutions de (5.32). D'autre part, d'après ([41]), on a :

$$I_{-\nu} = I_{\nu} + \frac{2}{\pi} \sin \nu \pi K_{\nu}. \quad (5.33)$$

En utilisant les relations liant les fonctions d'Airy et les fonctions de Bessel modifiées d'ordre $\pm \frac{1}{3}$ on trouve que :

$$W_1(z) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Ai(z_1) \text{ et } W_2(z) = \sqrt{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}} (cz)^{\frac{1}{6}} Bi(z_1). \quad (5.34)$$

Ainsi, une solution W de (5.32) vérifie :

$$W(z) = A_1 V_{11}(z) + B_1 V_{12}(z) + \int_{z_0}^z K(z,t) t^{-\frac{4}{3}} F_2(t) W(t) dt, \quad (5.35)$$

où $K(z, t) = -\frac{\pi}{c} (W_1(z)W_2(t) - W_1(t)W_2(z))$. On sait que pour $x \gg 1$, et si on pose $\xi = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on a :

$$Ai(x) \sim \frac{e^{-\xi}}{2\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}} \quad Bi(x) \sim \frac{e^{\xi}}{\pi^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}}. \quad (5.36)$$

Puisqu'on cherche des solutions bornées, alors on doit prendre $B_1 = 0$. Alors on obtient le théorème suivant :

Théorème 5.3 *Il existe une constante C_3 telle que*

$$\sup_{x \in [x_2, +\infty]} \left| \Phi_{n,c}(x) - \frac{A_{1n}(cz)^{\frac{1}{6}} Ai(z_1)}{(k(x)r_{1n}(x))^{\frac{1}{4}}} \right| \leq \frac{C_3}{c}. \quad (5.37)$$

5.3.2 Cas c fixé et n large :

Dans cette section on utilisera les techniques utilisées dans ([8]). On s'intéresse au comportement asymptotique des fonctions $\Phi_{n,c}(x)$ de (5.11) pour c fixé et n large. On écrit (5.11) de la manière suivante :

$$\frac{d}{dx}(k(x)\Phi'_{n,c}(x)) + \chi_n r_n(x)\Phi_{n,c} = 0, \quad (5.38)$$

où $k(x) = x$ et $r_n(x) = 1 - \frac{x(x+c)}{\chi_n(c)}$. On note $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ les zéros de $r_n(x)$. On a alors :

$$x_2 = \frac{\sqrt{c^2 + 4\chi_n} - c}{2} = \frac{2\chi_n}{\sqrt{c^2 + 4\chi_n} + c} < \frac{\chi_n}{c}.$$

Selon les valeurs du réel x on distingue les cas suivants :

a) $0 \leq x \leq a < x_2$

On introduit les changements de variable et de fonctions suivants :

$$s_n(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt \quad (5.39)$$

$$\Phi_{n,c} = \psi_{n,c}(x)U_n(s_n), \quad (5.40)$$

où $\psi_{n,c}(x) = \frac{1}{(k(x)r_n(x))^{1/4}} = \frac{1}{(x(1 - \frac{x(x+c)}{\chi_n(c)})^{1/4}}$. Par ce changement, (E) se transforme en une nouvelle équation différentielle donnée par :

$$U_n''(s_n) + (\chi_n - h_n(s_n))U_n(s_n) = 0, \quad (5.41)$$

où

$$\begin{aligned} h_n(s_n) &= \frac{1}{x} \frac{1}{4r_n(x)} \left\{ \frac{-1}{4} + \frac{x r_n'}{2 r_n} + x^2 \left[\left(\frac{r_n'}{r_n} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{r_n'}{r_n} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{-1}{16x} + \frac{1}{16x} \left[1 - \frac{1}{r_n(x)} \right] + \frac{1}{4r_n(x)} \left\{ \frac{1 r_n'}{2 r_n} + x \left[\left(\frac{r_n'}{r_n} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{r_n'}{r_n} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{-1}{16x} + f_2(x). \end{aligned}$$

Ici, $f_2(x) = \frac{1}{16x} \left[1 - \frac{1}{r_n(x)} \right] + \frac{1}{4r_n(x)} \left\{ \frac{1 r_n'}{2 r_n} + x \left[\left(\frac{r_n'}{r_n} \right)' - \frac{1}{4} \left(\frac{r_n'}{r_n} \right)^2 \right] \right\}$ est une fonction continue sur $[0, a[$. Ecrivons $h_n(s_n)$ en fonction de s_n . Pour cela, on a besoin du lemme suivant

Lemme 5.2 *Pour $x \in [0, a]$, il existe une fonction $\epsilon_{n,c}$ telle que*

$$s_n(x) = 2\sqrt{x} + \epsilon_{n,c}(x),$$

et il existe un voisinage \mathcal{V} de zéro tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad \left| \frac{\epsilon_{n,c}(x)}{s_n(x)} \right| < 1.$$

Preuve : Réécrivons s_n de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \int_0^x \sqrt{\frac{r_n(t)}{t}} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_0^x \frac{\sqrt{r_n(t)} - 1}{\sqrt{t}} dt \\ &= 2\sqrt{x} + \epsilon_{n,c}(x), \end{aligned} \quad (5.42)$$

où on a posé $\epsilon_{n,c}(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{r_n(t)} - 1}{\sqrt{t}} dt$. Pour $a \leq \chi_n^{1/4}$ on a :

$$\sup_{x \in [0, a]} |\epsilon_{n,c}(x)| \leq \chi_n^{1/4} \frac{\chi_n^{1/8} (\chi_n^{1/4} + c)}{\chi_n}.$$

Par conséquent, on a :

$$|s_n(x) - 2\sqrt{x}| \leq \frac{(\chi_n^{1/4} + c)}{\chi_n^{5/8}}, \quad \forall x \in [0, a]. \quad (5.43)$$

De l'équation (5.42), on déduit que $x = \frac{(s_n(x) - \epsilon_{n,c}(x))^2}{4}$. Ainsi on a $\frac{\epsilon_{n,c}(x)}{2\sqrt{x}} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$, et par suite $\frac{\epsilon_{n,c}(x)}{s_n(x)} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. D'où le résultat. \square

Du lemme 5.2, en écrivant le développement en série au voisinage de zéro de la fonction

$\frac{1}{1 - \frac{\epsilon_{n,c}(x)}{s_n(x)}}$, on obtient

$$h(s_n) = \frac{-1}{4(s_n(x) - \epsilon_{n,c}(x))^2} = \frac{-1}{4(s_n(x))^2} + f_3(x), \quad (5.44)$$

où f_3 est une fonction continue sur $[0, a]$. Soit F la fonction définie par $F(s_n(x)) = f_3(x)$.

Alors F est continue sur $[0, a]$. De l'équation (5.41) et (5.44), on déduit que $U_n(s_n)$ est une solution de l'équation différentielle suivante

$$U_n'' + \left(\chi_n + \frac{1}{4(s_n)^2} \right) U_n = F(s_n)U_n, \quad (5.45)$$

où $s_n \in [0, s_n(a)]$. Il est connu, voir [1], qu'une solution de l'équation homogène associée à (5.45) est de la forme

$$U_{n,1}(s_n) = \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n), \quad U_{n,2}(s_n) = \sqrt{\alpha_n s_n} Y_0(\alpha_n s_n),$$

où $\alpha_n = \sqrt{\chi_n}$ et J_0 et Y_0 sont respectivement, les fonctions de Bessel d'ordre 0 de première et de deuxième espèce. Une solution générale de (5.45), est alors de la forme

$$U_n(s_n) = A_n U_{n,1}(s_n) + B_n U_{n,2}(s_n) + R_{\alpha_n}(s_n), \quad (5.46)$$

où $R_{\alpha_n}(s_n) = \frac{\sqrt{s_n}}{W(U_{n,1}, U_{n,2})} \int_0^{s_n} K_{\alpha_n}(s_n, s') F(s') U_n(s') ds'$. Ici l'expression du noyau K_{α_n} est $K_{\alpha_n}(s, s') = \mu_n \sqrt{s'} [J_0(\alpha_n s) Y_0(\alpha_n s') - J_0(\alpha_n s') Y_0(\alpha_n s)]$ et le wronskien de $U_{n,1}$ et

$U_{n,2}$ est $W(U_{n,1}, U_{n,2}) = U_{n,1}(s)(U_{n,2})'(s) - (U_{n,1})'(s)U_{n,2}(s) = \frac{2\alpha_n}{\pi}$, voir [1]. Le noyau

$K_{\alpha_n}(s, s')$ est continue sur $[0, s_n(1)] \times [0, s_n(1)]$. Une solution de (5.38) vérifie :

$$\begin{aligned} \Phi_{n,c}(x) &= \frac{A_n \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} + \frac{B_n \sqrt{\alpha_n s_n} Y_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \\ &\quad + \frac{\pi \sqrt{s_n}}{2\alpha_n x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \int_0^{s_n} K_{\alpha_n}(s_n, s') F(s') U_n(s') ds'. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{s_n(x)}{\sqrt{x}} = 2$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{U_{n,2}(s_n(x))}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} Y_0(\alpha_n s_n(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} Y_0(y) = -\infty.$$

Par conséquent, $\Phi_{n,c}(x)$ admet une limite finie en $x_0 = 0$ si et seulement si $B_n = 0$. Dans

ce cas, l'expression de $\Phi_{n,c}(x)$ est donnée par :

$$\Phi_{n,c}(x) = \frac{A_n \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} + \frac{\pi \sqrt{s_n}}{2\alpha_n x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \int_0^{s_n} K_{\alpha_n}(s_n, s') F(s') U_n(s') ds'. \quad (5.48)$$

Puisque la fonction $g_n(x) = \frac{\sqrt{s_n}}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}}$ est continue sur $[0, s_n(a)]$ alors il existe

$\beta_n \in \mathbb{R}_+$ telle que : $\sup_{x \in [0, s_n(a)]} |g_n(x)| \leq \beta_n$. Soit $L_n = \sup_{s_n \in [0, s_n(a)]} \int_0^{s_n(a)} |K_{\alpha_n}(s_n, s') F(s')| ds'$

et $M_n = \sup_{s_n \in [0, s_n(a)]} |U_n(s_n)|$. En utilisant les mêmes notations que dans (5.48), on obtient :

$$\left| \Phi_{n,c}(x) - \frac{A_n \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \right| \leq \frac{\pi}{2\alpha_n} L_n M_n \beta_n. \quad (5.49)$$

D'après [39], on sait que $M_n \leq \frac{\widetilde{M}_n}{1 - \frac{L_n}{\alpha_n}}$, où $\widetilde{M}_n = \sup_{s_n \in [0, s_n(1)]} |U_{n,1}(s_n)|$. Donc, (5.49) implique

$$\left| \Phi_{n,c}(x) - \frac{A_n \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \right| \leq \frac{\pi \beta_n \widetilde{M}_n L_n}{2(\alpha_n - L_n)} = \alpha_n. \quad (5.50)$$

On va montrer que pour $c \in \mathbb{R}_+$ fixé, $n \gg 1$ et pour la normalisation de $\Phi_{n,c}$, donnée par $2\pi \int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx = 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \sim 1$.

Lemme 5.3 *Pour $c \in \mathbb{R}_+$ fixé et $n \gg 1$, on normalise les fonctions $\Phi_{n,c}$ par*

$$2\pi \int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx = 1,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \sim 1.$$

Preuve : D'après (5.50) et le fait que $s'_n(x) = \sqrt{\frac{1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}}{x}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx &\sim A_n^2 \int_0^1 \mu_n s_n(x) (J_0(\alpha_n s_n(x)))^2 \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}}} dx \\ &= A_n^2 \int_0^1 \alpha_n s_n(x) (J_0(\alpha_n s_n(x)))^2 \frac{s'_n(x)}{1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}} dx \\ &\sim A_n^2 \int_0^1 \alpha_n s_n(x) (J_0(\alpha_n s_n(x)))^2 s'_n(x) dx. \end{aligned}$$

En posant $t = \alpha_n s_n(x)$ dans l'intégrale précédente, on obtient :

$$\int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx \sim \frac{A_n^2}{\alpha_n} \int_0^{\alpha_n s_n(1)} t (J_0(t))^2 dt. \quad (5.51)$$

De plus, en utilisant l'identité suivante, voir [3] :

$$\int_0^x t (J_0(t))^2 dt = \frac{x^2}{2} [(J_0(x))^2 + (J_1(x))^2],$$

on écrit (5.51) comme suit :

$$\int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx \sim \frac{A_n^2 \alpha_n}{2} [(J_0(\alpha_n s_n(1)))^2 + (J_1(\alpha_n s_n(1)))^2]. \quad (5.52)$$

En utilisant le développement asymptotique des fonctions de Bessel suivant, voir [1] :

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

et la normalisation $\Phi_{n,c}(x)$ de sorte que $\int_0^1 (\Phi_{n,c}(x))^2 dx = \frac{1}{2\pi}$, on déduit le résultat. \square

Ainsi, d'après (5.50), on aboutit au théorème suivant

Théorème 5.4 *Pour $c \in \mathbb{R}_+$ fixé et $n \gg 1$, il existe une constante α_n qui ne dépend que de n telle que*

$$\left| \Phi_{n,c}(x) - \frac{A_n \sqrt{\alpha_n s_n} J_0(\alpha_n s_n)}{x^{1/4} \left(1 - \frac{x(x+c)}{\alpha_n^2}\right)^{1/4}} \right| \leq \alpha_n.$$

b) $x \in [a, x_2]$:

On procède de la même manière que dans le paragraphe précédent, en posant dans (5.11)

$t_n(x) = \int_x^{\beta_n} \sqrt{\frac{r_n(t)}{k(t)}} dt$, on trouve que les fonctions $\Phi_{n,c}$ se comportent comme :

$$C_n \frac{\chi_n^{1/4} (\sqrt{\chi_n} t_n(x))^{1/6} Ai\left(-\left(\frac{3}{2}\sqrt{\chi_n} t_n(x)\right)^{2/3}\right)}{(x(\chi_n - x(x+c)))^{1/4}}, \quad (5.53)$$

où C_n est une constante qui ne dépend que de n , et Ai est la fonction d'Airy de première espèce.

c) $x > x_2$:

De même, on trouve que les fonctions $\Phi_{n,c}$ se comportent comme suit :

$$A_{1n} \frac{\chi_n^{1/4} (\sqrt{\chi_n} \tau_n(x))^{1/6} Ai\left(-\left(\frac{3}{2}\sqrt{\chi_n} \tau_n(x)\right)^{2/3}\right)}{(x(-\chi_n + x(x+c)))^{1/4}}, \quad (5.54)$$

où $\tau_n(x) = \int_{\beta_n}^x \sqrt{\frac{-r_n(t)}{k(t)}} dt$, et A_{1n} est une constante qui ne dépend que de n .

Chapitre 6

Exemples numériques

Dans ce dernier chapitre, on présente quelques exemples numériques qui illustrent certains résultats des chapitres précédents. Pour cela, on commence par rappeler que les fonctions d'ondes sphéroïdales à ellipsoïde allongé, $\psi_{n,c}$, sont les fonctions propres de l'opérateur différentiel, L_c , défini pour $\psi \in C^2([-1, 1])$ par :

$$L_c(\psi) = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi}{dx} + c^2x^2\psi. \quad (6.1)$$

L'opérateur (6.1) commute avec l'opérateur intégral F_c définie par :

$$Q_c(\psi)(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-y)}{\pi(x-y)} \psi(y) dy. \quad (6.2)$$

Cet opérateur intervient dans le calcul de la probabilité, $E(n, s)$, pour qu'une matrice aléatoire (GUE) admet exactement n valeurs propres dans un intervalle de longueur s . Une telle probabilité est illustrée dans les figures (6.1) et (6.2S). Noter que $E(n, s)$ est donnée par les formules de Mehtha suivantes, voir [37] :

$$E(0, s) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - \lambda_i(\frac{\pi}{2}s)), \quad (6.3)$$

$$E(n, s) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[\prod_{i \geq 0} (1 - z\lambda_i(\frac{\pi}{2}s)) \right] /_{z=1} = E(0, s) \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n} \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_{i_j}(\frac{\pi}{2}s)}{1 - \lambda_{i_j}(\frac{\pi}{2}s)}. \quad (6.4)$$

Pour le calcul des λ_i , on remarque que (6.2) s'écrit, pour une fonction continue f , sous la forme $\frac{c}{2\pi} F_c^*(F_c f)(x) = Q_c(f)(x)$, où F_c est l'opérateur intégral défini par :

$$F_c(\psi_{n,c})(x) = \int_{-1}^1 e^{icxy} \psi_{n,c}(y) dy = \mu_n(c) \psi_{n,c}(x), \quad (6.5)$$

où $\mu_n(c)$ est la n ième valeur propre de F_c associée à la fonction propre $\psi_{n,c}$. Noter que des approximations précises de $\psi_{n,c}$ sont obtenues en utilisant la méthode de calcul développée dans [28]. En effet, on écrit les $\psi_{n,c}$ dans la base $\{\tilde{P}_k, k \geq 0\}$ de $L^2([-1, 1])$, où \tilde{P}_k est le polynôme de Legendre de degré k normalisé de sorte que $\|\tilde{P}_k\|_2 = 1$, alors on a :

$$\psi_{n,c}(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_k^n \tilde{P}_k(x), \quad (6.6)$$

où les β_k^n vérifient la relation de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}} c^2 \beta_{k+2}^n + \left(k(k+1) + \frac{2k(k+1)-1}{(2k+3)(2k-1)} \right) c^2 \beta_k^n \\ & + \frac{k(k-1)}{(2k+3)\sqrt{(2k-1)(2k-3)}} c^2 \beta_{k-2}^n = \chi_n(c) \beta_k^n, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

D'après [8], il existe une suite de réels positifs $(C_k)_k$ telle que $|\beta_k^n| \leq C_k$ et la série $\sum_{k \geq 0} |C_k \sqrt{k+1/2}|$ converge, d'où la convergence uniforme de la série dans (6.6). D'autre part, on sait, voir [38], que :

$$\int_{-1}^1 e^{ixy} \tilde{P}_k(y) dy = i^k \sqrt{k+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} J_{k+1/2}(x), \quad \forall x \neq 0, \quad (6.7)$$

avec $J_{k+1/2}$ est la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre $k+1/2$. Maintenant, en remplaçant (6.6) dans (6.5) et en combinant avec (6.7), on trouve que :

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k^n i^k \sqrt{k+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{cx}} J_{k+1/2}(cx) = \mu_n(c) \sum_{k \geq 0} \beta_k^n \tilde{P}_k(x). \quad (6.8)$$

En prenant $x = 1$ dans (6.8), on trouve que les $\mu_n(c)$ sont calculés à partir des β_k^n par la relation suivante :

$$\mu_n(c) = \frac{\sum_{k \geq 0} \beta_k^n i^k \sqrt{k+1/2} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} J_{k+1/2}(c)}{\sum_{k \geq 0} \beta_k^n \sqrt{k+1/2}}. \quad (6.9)$$

Ainsi, de (6.9) et du fait que $\lambda_n(c) = \frac{c}{2\pi} |\mu_n(c)|^2$, avec $\mu_n(c) = i^n |\mu_n(c)|$, on peut calculer, pour des valeurs particulières n et c la valeur propre $\lambda_n(c)$. En utilisant la méthode précédente de calcul des valeurs propres λ_n développée dans [30] et en appliquant (6.3) avec le produit infini tronqué, à un ordre convenable, et des valeurs de $s_i = n + i \times (0.1)$, $i = -30, \dots, 30$, de s , on obtient les courbes suivantes des approximations de $E(30, s)$ et $E(70, s)$. Pour illustrer

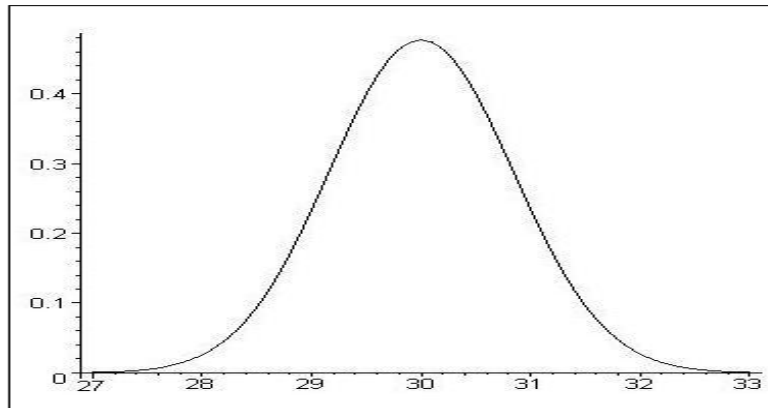


FIG. 6.1 – $E(n, s)$ pour $n = 30$.

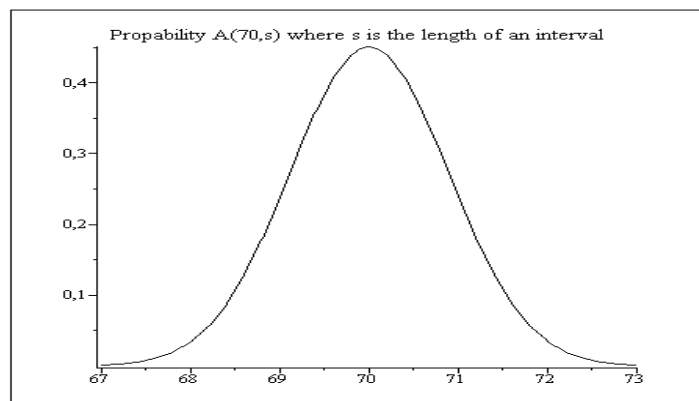


FIG. 6.2 – $E(n, s)$ pour $n = 70$.

certaines résultats du chapitre 3, on compare les $\psi_{n,c}$ avec leur approximant par la formule (4.76).

Pour cela, on considère des valeurs particulières du paramètre c et n , données par $n = 20$ et $c = 50$. Dans ce cas on prend $q_n \sim 0,85$. Ainsi, on utilise la formule (4.76) pour avoir des approximations des valeurs de $\psi_{n,c}(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On rappelle que la constante décrite dans (4.76) est fixée pour la condition $\varphi_{n,c}(1) = 1$. Dans ce cas, on obtient les résultats données par les figures suivantes :

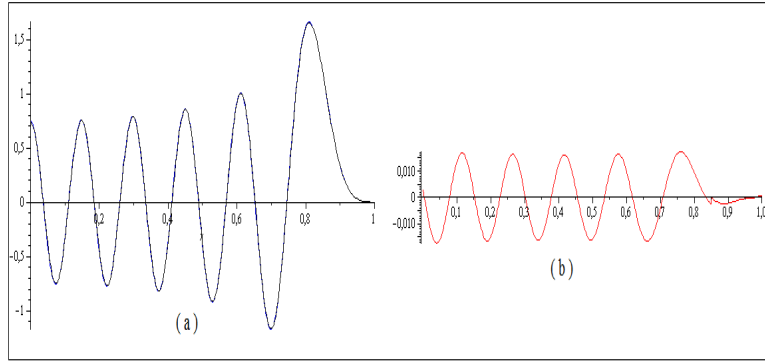


FIG. 6.3 – (a) graphe de $\psi_{n,c}$ (en noir) et de $\tilde{\psi}_{n,c}$ (en bleu), (b) Graphe de l'erreur d'approximation.

De la même manière, pour illustrer les résultats du chapitre 4, on compare $\Phi_{n,c}$ avec son approximant donné par (5.1). Ici, on considère le cas $c = 25$ et $n = 4$. Tout d'abord, on rappelle que l'opérateur différentiel (5.9) et l'opérateur intégral à noyaux K_2 donné par (5.3) commutent. Donc ils ont les mêmes fonctions propres $\Phi_{n,c}$. Pour calculer $\Phi_{n,c}$, on utilise le principe de calcul développé dans [10]. On écrit le développement en série de Fourier des fonctions $\Phi_{n,c}$ suivant une base de fonctions d'Hermite $\{h_n, n \in \mathbb{N}\}$, donné par (1.23). On a alors :

$$\Phi_{n,c}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^n h_k(x), \quad x \geq 0 \quad (6.10)$$

où $a_k^n = \int_0^{+\infty} \Phi_{n,c}(t) h_k(t) dt$. Dans [32], on montre que les a_k^n sont donnés par la formule de récurrence à 5 termes donnée par la proposition suivante :

Proposition 6.1 *En suivant les mêmes notations, la suite $(a_k^n)_k$ est donnée par la relation de récurrence suivante :*

$$a_{k-2}^n k(k-1) - a_{k-1}^n \left[\left(c - \frac{1}{4} \right) k + 4k^2 \right] + a_k^n \left[6k^2 + \left(\frac{13}{2} + 2c \right) k + \frac{9}{4} + c + \chi_n(c) \right] + a_{k+1}^n \left(4k - \frac{1}{4} + c \right) k + a_{k+2}^n (k+1)(k+2) = 0. \quad (6.11)$$

On peut écrire (6.11) sous la forme matricielle $\mathcal{M}a = -\chi_n a$, où a est le vecteur dont les composantes sont $(a_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\mathcal{M} = [b_{k,l}]_{k,l \geq 1}$ est la matrice dont les éléments sont donnés par :

$$b_{k,k} = 6(k-1)^2 + \left(\frac{13}{2} + 2c \right) (k-1) + \frac{9}{4} + c, \quad b_{k,k+1} = \left(4k - \frac{1}{4} + c \right) k, \quad b_{k,k+2} = k(k+1),$$

$$b_{k+1,k} = b_{k,k+1}, \quad b_{k+2,k} = b_{k,k+2}, \quad \text{et } b_{j,k} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si on tronque cette matrice à un ordre suffisamment grand, et en calculant ses valeurs propres, on trouve qu'elles représentent une bonne approximation des valeurs propres de \mathcal{M} . Dans le cas particulier où $c = 25$, on applique (6.10) et (6.11) et on obtient les graphiques suivantes des fonctions $\Phi_{n,c}$ pour $0 \leq n \leq 4$. De plus, pour $n = 4$ et $c = 25$, on a utilisé le théorème

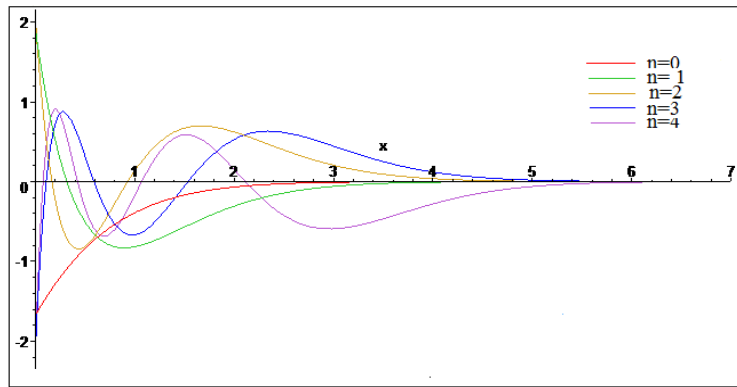


FIG. 6.4 – graphe de $\Phi_{n,c}(x)$, $c = 25$.

(5.1) pour calculer une approximation précise des $\Phi_{n,c}(x)$ pour $0 \leq x \leq 3$. Le résultat obtenu

est illustré par le graphe suivant qui met en évidence la qualité de l'approximation des $\Phi_{n,c}(x)$ par nos formules asymptotiques.

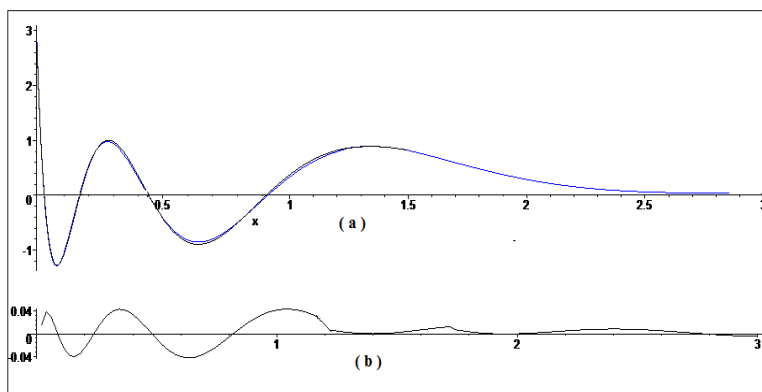


FIG. 6.5 – (a) graphe de $\Phi_{n,c}$ (en noir) et son approximation par la méthode WKB (en bleu), (b) graphe de l'erreur.

Bibliographie

- [1] M. ABRAMOWITZ ET I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publication, INC, New York.1972.
- [2] A. ACHOUR ET K. TRIMÈCHE, *Opérateurs de translation généralisée associés à un opérateur différentiel singulier sur un intervalle borné*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 288(7) :A399-A402, 1979.
- [3] G. E. ANDREWS , R. ASKEY ET R. ROY, *Special Functions* Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1999
- [4] D. BAKRY ET N. HUET *The hypergroup property and representation of Markov kernels*, Séminaire de probabilités XLI, 295-347, Lecture Notes in Math., 1934, Springer, Berlin, 2008.
- [5] R. BEALS ET R. WONG, *Special functions, A graduate text*, Cambridge University press. 2010.
- [6] E. BRÉZIN ET S. HIKAMI, *Characteristic polynomials of random matrices* , Commun.Math.Phys.214,(2000), 111–135.
- [7] R. BHATIA, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, Berlin. 1997.
- [8] A. BONAMI ET A. KAROUI, *Uniform Estimates of the Prolate Spheroidal Wave Functions and Spectral Approximation in Sobolev Spaces*, arXiv :1012.3881, (2010)

- [9] A. BONAMI ET A. KAROUI, Qualitative Behaviors of the Prolate Spheroidal Wave Functions and their Associated Spectrum, preprint (2012).
- [10] C. J. BOWKAMP, *On spheroidal wave functions of order zero*, J. Math. Phys. **26**, (1947), 79–92.
- [11] H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Herman,(1964)
- [12] T. S. CHAHIRA, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Sciences Publishers, INC. 1978.
- [13] H. CHEBLI, *Positivité des opérateurs de "Translation généralisé" associés à un opérateur de Sturm-Liouville et quelques applications à l'analyse harmonique*, Thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg I. 1974.
- [14] H. CHEBLI, *Opérateurs de translation généralisée et semi-groupes de convolution*, Théorie du Potentiel et Analyse Harmonique, Lecture notes in Mathematics, 404, 1974, pp 35-59.
- [15] W. C. CONNET ET A. L. SCHWARTZ, *Positive product formulas and hypergroups associated with singular Sturm-Liouville problems on a compact interval*, Colloquium Mathematicum, 60-61, 525-535, 1990.
- [16] W. C. CONNET ET A. L. SCHWARTZ, *Analysis of a class of probability preserving measure algebras on compact intervals*, Trans. Amer. Math. Soc., 320, 371-393, 1990.
- [17] W. C. CONNET, C. MARKET ET A. L. SCHWARTZ, *Convolution and hypergroup structures associated with a class of Sturm-Liouville systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 332, 365-390, 1992.
- [18] W. C. CONNET, C. MARKET ET A. L. SCHWARTZ, *Product formulas and convolutions for angular and radial spheroidal wave functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 338, 695-710,

1993.

- [19] R. COURANT ET D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol.1, section III, § 7, Interscience Publishers, New York, 1955.
- [20] N. G. DE BRUIJN, *Asymptotic methods in analysis*, Interscience publishers Inc, NewYork, (1957).
- [21] F. J. DYSON, *A class of matrix ensembles*, J.Math.Phys.13,(1972), 90–97.
- [22] M. S. P. EASTHAM, *Theory of ordinary differential equations*, Van N. Reinhold company,Ostrand.1972.
- [23] A. ERDELYI, *Tables of Integral Transforms, Vol I* McGraw-Hill Book Company, INC. 1954
- [24] J. FARAUT, *Random matrices and orthogonal polynomials*, Cours donné à l'école CIMPA de Merida, (2006).
- [25] J. FARAUT, *Analyse sur les groupes de Lie*, Calvage and Mounet,(2006).
- [26] P. J. FORRESTER, *Log-Gases and Random Matrices*, Princeton University Press, 2010
- [27] E. L. INCE, *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications,INC, N. York.1956.
- [28] A. KAROUI, *Uncertainty Principles, Prolate Spheroidal Wave Functions, and Applications*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, 2010, Recent Developments in Fractals and Related Fields, Part 2, Pages 165-190
- [29] A. KAROUI, *Unidimensional and bidimensional prolate spheroidal wave functions and applications*, J. Franklin Inst. (2010), doi :10.1016/j.jfranklin.2010.09.001
- [30] A. KAROUI ET T. MOUMNI, *New efficient methods of computing the prolate spheroidal wave functions and their corresponding eigenvalues*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 24 (2008), pp. 269-289

- [31] A. KAROUI ET T. MOUMNI, *Spectral Analysis of the Finite Hankel Transform Operator and Circular Prolate Spheroidal Wave Functions*, Comput. Appl. Math. 233 (2009), pp. 315-333
- [32] A. KAROUI, T. MOUMNI ET I. MEHRZI, *Eigenfunctions of the Airy's integral transform : Properties, numerical computations and asymptotic behaviors* , Journal of Mathematical Analysis and Applications . 389 (2012) p 989-1005.
- [33] A. KAROUI, I. MEHRZI, *Asymptotic behaviors and numerical computations of classical and circular prolate spheroidal wave functions* , Applied Mathematics and Computation . 218 (2012) p 10871-10888.
- [34] N. N. LEBEDEV, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, N. J. 1965.
- [35] W. L. LE, K. K. XIAO ET S. L. MOOK, *Spheroidal wave functions in electromagnetic theory*, John Wiley and Sons, Inc, New York (2002).
- [36] E. LEVIN ET D. S. LUBINSKY, *On the Airy reproducing kernel, sampling series, and quadrature formula*, Integr. Equ. Oper. Thoery **63** (2009), pp.427-438.
- [37] M. L. MEHTA *Random Matrices*, Elsevier, troisième édition, (2004).
- [38] A. NIKIFOROV ET V. OUVAROV, *Eléments de la théorie des fonctions spéciales*, Editions Mir. Moscou. 1976.
- [39] A. F. NIKIFOROV, V. B. UVAROV, *Special Functions of Mathematical Physics : a Unified Introduction with Applications* Birkhäuser Boston, 1ère edition, (1988).
- [40] C. NIVEN, *On the Conduction of Heat in Ellipsoids of Revolution* Phil. Trans. R. Soc. Lond,171, (1988),117-151.
- [41] F. W. J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press Inc, 1974

- [42] M. PLANCHEREL ET W. ROTACH, *Sur les valeurs asymptotiques des polynômes d'Hermite*, Comment. Math. Helv. 1, (1929), 227–254.
- [43] D. SLEPIAN, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty–IV : Extensions to many dimensions ; generalized prolate spheroidal functions*, Bell System Tech. J. **43** (1964), 3009–3057.
- [44] D. SLEPIAN, *D. Slepian, Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*. J. Math. Phys, 44(2), 99-140.(1965)
- [45] D. SLEPIAN ET H. O. POLLAK, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty–I*, Bell Syst. Tech. J. Vol. 40 (1961), 43 –64.
- [46] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, (1939).
- [47] C. A. TRACY ET H. WIDOM, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. 159, 1, (1994), 151-174.
- [48] O. VALLEE ET M. SOARES, *Airy Functions and Application to Physics*, Imperial College Press, London, (2004).
- [49] M. VOIT, *A positivity result and normalization of positive convolution structures*, Math. Ann., 297, 677-692, 1993.
- [50] K. YOSIDA, *Lectures on differential and integral equations*, Interscience publishers, New York, (1960).