



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et applications*

**Ecole doctorale MATISSE**

présentée par

**Amine Abdelmoula**

Préparée à l'unité de recherche INRIA Rennes Bretagne Atlantique  
Institut National de Recherche en Informatique et Automatique  
Composante universitaire ISTIC

---

**Résolution de  
problèmes inverses  
en géodésie physique**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 20 décembre 2013**

devant le jury composé de :

**Slim CHAABANE**

*Professeur à l'Université de Sfax / rapporteur*

**Juliette LEBLOND**

*Directrice de recherche à INRIA Sophia-Antipolis /  
rapporteur*

**Amel BEN ABDA**

*Professeur à l'ENIT, Université de Tunis El Manar /  
examinatrice*

**Jean-Michel LEMOINE**

*Ingénieur de recherche au CNES Toulouse /  
examineur*

**Maher MOAKHER**

*Professeur à l'ENIT, Université de Tunis El Manar /  
directeur de thèse*

**Bernard PHILIPPE**

*Directeur de recherche émérite à INRIA Rennes  
Bretagne Atlantique / directeur de thèse*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à mes deux directeurs de thèse,

Monsieur Bernard Philippe directeur de recherche à l'INRIA pour tous ses précieux conseils, pour sa confiance qu'il m'a donnée, pour son écoute, pour sa patience et son soutien.

Monsieur Maher Moakher professeur à l'université de Tunis pour son oeil critique qui m'a permis de structurer le travail et d'améliorer la qualité des différents chapitres.

Je veux vraiment vous remercier pour votre amitié, pour votre côté humain et pour m'avoir accordé la chance d'être mes directeurs de thèse.

Je remercie Madame Amel Benabda, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de thèse de doctorat, pour son soutien chaleureux dont elle a toujours fait preuve.

Je remercie mes rapporteurs : Madame Juliette Leblond et Monsieur Slim Chaabane pour la diligence et l'attention avec lesquelles ils ont lu mon manuscrit et l'intérêt qu'ils ont accordé à mon travail.

Mes remerciements vont aussi aux autres membres du jury qui ont accepté de juger ce travail et en particulier Monsieur Jean-Michael Lemoine.

Je remercie tous les membres de l'équipe SAGE et en particulier ceux avec qui j'ai partagé les périodes que j'ai passées à Rennes : Jocelyne, Guy, Caroline, Etienne, Mohammad, Mohammed, Désiré, Frédéric, Noha, Jenny et surtout Édouard Canot pour les belles promenades qu'il nous a organisées, pour sa sympathie sans égal et pour m'avoir accueilli chez lui parmi les membres de sa belle famille.

Je tiens à remercier également le personnel administratif de l'IRISA et spécialement Marie-Claude, Céline, Fabienne, Cécile.

Je tiens à remercier les membres du LAMSIN, professeurs, docteurs, doctorants et personnels pour l'atmosphère de travail convivial et spécial qu'ils m'ont fournie.

Enfin je veux remercier ma famille, mon épouse et mes amis les plus proches.

Je remercie mes parents pour m'avoir toujours appris les valeurs de la vie, pour m'avoir supporté et encouragé sans limites et pour avoir partagé avec moi tous les bons et les mauvais moments de mon parcours. Qu'ils trouvent, dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude.

Merci à mon épouse pour avoir supporté ces longues dernières années de thèse et de savoir me motiver pour la finir.

Merci à toi ma soeur pour ton affection, pour ton soutien, pour ton amour.

Merci à mes frères pour votre soutien sans limite.

Merci à vous mes copains Adel, Anis, Chaker, Moez, Mohamed, Mohamed Ali, Rafik, Souheil et Taofic pour votre soutien pendant tout mon cursus. Merci pour m'avoir écouté parler de ma thèse pendant des heures.

*A mes parents*





# Table des matières

<b>Partie I : Détermination d'un géoïde local avec la méthode de collocation</b>	<b>11</b>
<b>1 Ce qu'il faut connaître de la gravimétrie</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Champ de gravité terrestre . . . . .	15
1.3 Champ normal . . . . .	27
1.4 Relations entre champ réel et champ approché . . . . .	31
1.5 Conclusion . . . . .	35
<b>2 Méthode de collocation par moindres carrés</b>	<b>37</b>
2.1 Introduction . . . . .	37
2.2 Prédiction par la méthode des moindres carrés . . . . .	39
2.3 Application de la méthode de moindres carrés en géodésie physique . . . . .	40
2.4 Fonction covariance . . . . .	46
2.5 La technique de "retrait-restauration" . . . . .	52
2.6 Conclusion . . . . .	53
<b>3 Résultats numériques</b>	<b>55</b>
3.1 Introduction . . . . .	55

3.2	Fonction covariance . . . . .	56
3.3	Conclusion . . . . .	63

## **Partie II : Résolution d'un problème inverse local en géodésie physique 65**

<b>4</b>	<b>Position du problème 67</b>
4.1	Introduction . . . . . 67
4.2	Formulation du problème inverse sur la Terre entière . . . . . 71
4.3	Formulation du problème inverse sur une zone limitée de la Terre . . . . . 73
4.4	Concentration dans une région de forme arbitraire . . . . . 81
<b>5</b>	<b>Étude de la solvabilité du problème inverse des points-masses 93</b>
5.1	Introduction . . . . . 93
5.2	Problème inverse et existence de la solution . . . . . 93
5.3	Détermination d'une distribution de points-masses sur une grille 95
5.4	Récapitulatif global et algorithme correspondant . . . . . 102
<b>6</b>	<b>Validation numérique 105</b>
6.1	Choix du domaine et maillage . . . . . 106
6.2	Étude d'un exemple . . . . . 108
6.3	Considération d'un point-masse au géocentre . . . . . 116
<b>7</b>	<b>Conclusion 121</b>
7.1	Étude bibliographique et apport à l'état de l'art . . . . . 121
7.2	Perspectives . . . . . 124
A.1	Introduction . . . . . 126
A.2	Equation de Laplace et fonctions harmoniques . . . . . 126

---

A.3	Harmoniques sphériques . . . . .	126
A.4	Construction d'une base . . . . .	129
A.5	Sommes de quelques séries harmoniques finies et infinies . . . . .	134
<b>Bibliographie</b>		<b>137</b>



# Introduction

Dans cette thèse nous nous intéressons à l'étude de deux problèmes de géodésie physique. Ils sont traités dans deux parties séparées. La première porte sur le calcul d'un géoïde local. Dans la deuxième partie, un problème inverse pour la recherche des points-masses est résolu. Pour bien identifier le géoïde local, il faut imaginer la Terre sans marées ni intempéries, avec des océans au même niveau. Le géoïde est défini comme une surface d'équipotentiel du champ de pesanteur. D'après Gauss [22], c'est la surface mathématique approchant la forme réelle de la Terre, océans compris, et dont les océans font partie. La recherche du géoïde terrestre est un problème classique de la géodésie physique –la science qui traite des questions relatives à la forme de la Terre. Déterminer un géoïde de haute précision est un objectif majeur dans la communauté des chercheurs en géodésie physique, au vu de l'intérêt qu'il a acquis depuis sa première définition. Du point de vue scientifique, le rôle du géoïde est central. En effet, il donne la forme globale de notre planète et rend possible la navigation inertielle qui permet de calculer la vitesse et l'altitude de l'avion (et donc sa trajectoire) [57]. Il est indispensable aussi pour restituer les trajectoires des satellites, qui permettent de constituer des réseaux mondiaux de stations de référence, de suivre la cinématique de la Terre et les déformations de sa surface, et d'étudier les océans par altimétrie spatiale [7]. D'autre part, le géoïde, en tant qu'information géographique, constitue

un outil de travail performant pour se localiser sur la Terre et construire des cartes illustrant les caractéristiques des régions et des pays. Du point de vue économique, le géoïde est une information très utilisée dans la détermination des hauteurs orthométriques (appelées souvent les hauteurs par rapport à la surface de la mer). Ces dernières sont nécessaires pour atteindre la précision nécessaire à des opérations d'ingénierie (par exemple pour la fondation des barrages et percement des tunnels) qui font intervenir des écoulements de fluide.

Déterminer un géoïde aurait été plus facile si la Terre était une sphère homogène. Dans ce cas la pesanteur en un point serait entièrement déterminée à partir de sa distance au centre de la Terre. Comme la Terre n'est ni sphérique ni homogène, la pesanteur doit être calculée en tout point. Le géoïde est par conséquent une surface complexe qui ne peut pas être déterminée explicitement. Plusieurs méthodes ont été utilisées pour approcher cette surface. Notamment la méthode intégrale de Stokes et la méthode de collocation par moindres carrés appelée encore méthode de moindres carrés généralisée. La méthode de Stokes est utilisée pour le calcul de plusieurs géoïdes, en particulier le géoïde Français avec Henri Duquenne [19]. Cette méthode suppose que les valeurs de gravité sont connues sur l'ensemble de la Terre, ce qui n'est pas le cas (notamment sur les océans) même avec le développement des instruments de mesure avec l'arrivée de l'ère spatiale. La méthode de collocation par moindres carrés est la méthode que nous adoptons dans la présente étude. Son principe est d'approcher, tout d'abord, la Terre par une surface mathématique plus simple qui nécessite très peu de paramètres. Cette surface est un ellipsoïde de révolution. Il est choisi par convention de même masse et de même vitesse de rotation que la Terre, aplati aux pôles et légèrement gonflé à l'équateur. L'ellipsoïde est une équipotentielle de son

potentiel propre, appelé le potentiel normal.

La valeur du potentiel de pesanteur au géoïde et la valeur du potentiel normal à l'ellipsoïde sont constants. En un point quelconque de l'espace, la différence entre ces deux potentiels est appelée le potentiel perturbateur,  $T$ . Le géoïde oscille autour de l'ellipsoïde, tantôt au dessus tantôt au dessous. Ces oscillations –de quelques mètres de longueur– sont appelées les ondulations du géoïde et sont notées par  $N$ . Elles sont liées au potentiel perturbateur par la formule de Brun :  $N = T/\gamma$ , où  $\gamma$  est la gravité par rapport à l'ellipsoïde de référence. Ainsi, la recherche des ondulations du géoïde par rapport à l'ellipsoïde revient à calculer le potentiel perturbateur  $T$ . La méthode de collocation sert à exploiter des mesures du type gravimétrique comme l'accélération de pesanteur et les mesures des angles entre la verticale au géoïde et la verticale à l'ellipsoïde, ou bien des mesures d'autres types comme celles fournies par le GPS (Global Positioning System) ou la photogrammétrie (une technique qui permet d'effectuer des mesures spatiales à partir de photos), pour déterminer le potentiel  $T$ . Les mesures sont reliées à  $T$  par des expressions qui résultent d'un processus de linéarisation se basant sur des développement de Taylor du premier ordre. Ces expressions sont rassemblées après dans un même modèle. Notre problème est ramené donc à résoudre un problème de moindres carrés généralisé d'inconnue  $T$ .

La méthode de collocation a un aspect probabiliste vu que les mesures utilisées sont toujours bruitées. Et c'est pour exprimer les corrélations liant ces mesures que l'on introduit la notion de fonction de covariance. Cette fonction a été approchée par plusieurs modèles dans d'autres travaux, notamment le modèle de Markov, le modèle exponentiel et celui de Rapp et Tscherning [38]. Dans cette thèse c'est ce dernier modèle que nous adoptons.

Dans la deuxième partie de ce travail nous nous intéressons à déterminer

une distribution de points-masses (caractérisés par leur intensités et leur positions) de telle manière qu'elle génère un potentiel qui approche au mieux un potentiel donné. On définit ainsi un problème (inverse) au sens des moindres carrés. Sur la sphère unité, ce problème est résolu en identifiant les termes des développements en harmoniques sphériques des deux potentiels [3]. Dans le cas où seulement une région de la sphère unité est considérée, l'estimation des paramètres des points-masses utilisant la base des harmoniques sphériques est susceptible d'erreurs, puisque la propriété d'orthogonalité des éléments de la base n'est plus vérifiée. Cette ambiguïté nous a poussé à penser à construire une base locale orthogonale sur laquelle nous allons résoudre notre problème inverse. Cette technique a été introduite dans des travaux de Slepian et Pollak [50, 51], et utilisée essentiellement dans le traitement du signal [17, 40]. Les fonctions de base locale, ou fonctions de Slepian, sont des fonctions à bande limitée qui concentrent la majorité de leur énergie dans la région considérée. Cette base est déterminée en résolvant un problème de concentration de Slepian sur une géométrie sphérique. Les fonctions de cette base sont orthogonales sur la sphère unité ainsi que sur la région étudiée.

## Plan de la thèse

Nous structurons ce rapport sur deux parties. Nous présentons dans la première partie nos travaux autour de la détermination du géoïde local avec la méthode de collocation par moindres carrés. Cette partie comporte trois chapitres. Dans le premier nous présentons un bref aperçu sur la gravimétrie et la modélisation mathématique de ses différents axes, en particulier la théorie du potentiel terrestre. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode de collocation par moindres carrés et de son historique. Cette

méthode a été proposée en géodésie physique par Moritz et implémentée par Tscherning dans le paquet de programmes “GRAVSOF” écrit en langage Fortran. Dans le troisième chapitre nous testons nos codes Matlab qui traduisent plusieurs codes du paquet “GRAVSOF” de Tscherning, notamment ceux du calcul de la covariance empirique et ceux utilisés pour le calcul des fonctions de covariances. A la fin de ce chapitre nous présentons des résultats numériques sur le calcul d’un géoïde local via la méthode de collocation par moindres carrés.

La deuxième partie de cette thèse traite la résolution d’un problème inverse en géodésie physique. Il s’agit de déterminer une distribution de points-masses qui génère un potentiel équivalent au potentiel gravitationnel terrestre. Cette partie comporte trois chapitres. Dans le premier nous détaillons la mise en contexte du problème inverse des points-masses sur la Terre entière et sur une région limitée de la Terre. Dans le deuxième chapitre nous présentons une étude de la solvabilité du problème. Un algorithme permettant la localisation des points-masses sur une région de la Terre est proposé. Les résultats de ces deux derniers chapitres ont été publiés dans CARRI’08. La validation numérique de notre méthode de résolution est présentée dans le troisième chapitre et soumise pour une publication dans “*Inverse Problems in Science and engineering Journal*”.



# Première partie

## Détermination d'un géoïde local avec la méthode de collocation



# Chapitre 1

## Ce qu'il faut connaître de la gravimétrie

### 1.1 Introduction

Le terme de gravimétrie désigne une méthode en géophysique qui a pour but l'étude du potentiel de gravitation terrestre. La gravitation est un phénomène qui a longtemps été considéré par l'Homme comme étant un phénomène acquis sans besoin d'explications. Quatre siècles avant Jésus-Christ, le philosophe Aristote a considéré que la gravitation est une particularité naturelle des objets qui cause leur chute sur la Terre, et plus la taille de l'objet est grande plus ce phénomène est important. Deux milles ans plus tard, Galileo Galilée avait mis au monde une explication de la gravitation basée sur l'observation et la théorie. Il était le premier qui a expliqué que la gravité est l'accélération de toute masse en chute libre. Tous les objets tombent sur la Terre avec la même accélération, niant par suite l'influence de la masse sur la vitesse de chute d'un objet. Cette loi a donné une explication du comportement d'objet influencé par la gravitation. Kepler (1571 – 1630)

a pu, ensuite grâce à ses études des orbites planétaires, découvrir d'autres lois qui préparaient le terrain pour Isaac Newton. Ce dernier a rassemblé toutes les lois, trouvées précédemment, dans une seule loi exhaustive plus simple. L'influence de la masse d'un objet est de nouveau présente, non pas comme étant auto influente seulement mais aussi comme source d'attraction d'autres objets (sans avoir des explications pour ce phénomène). La loi de Newton a permis aussi de reprendre le problème du pendule qui change de comportement selon sa position sur la Terre. Par conséquent, on a pu déduire que l'accélération gravitationnelle change de valeur selon la position géographique et l'altitude. Ainsi la gravitation a joué un rôle important dans l'apparition et l'évolution des sciences qui étudient la forme, les dimensions et l'entourage de la Terre, notamment l'astronomie et la géodésie physique.

Pendant le 20ème siècle, la mesure de la gravité est devenu un outil important pour l'exploitation des hydrocarbures et des minéraux. Les investissements dans ces domaines ont poussé l'humanité à creuser dans la théorie de Newton qui sert comme point de départ pour toute interprétation de la gravité. Ce fait a favorisé aussi des progrès dans le traitement de plusieurs nouveaux modèles en géodésie et en géophysique. Ces modèles ont réclamé des systèmes de repérage des mesures et des positions sur la Terre, tels qu'une référence pour les hauteurs, des coordonnées géodésiques, etc. Aujourd'hui, un système de repérage sophistiqué est utilisé grâce à la considération d'une surface mathématique (ellipsoïde de référence) comme surface de référence des hauteurs. Les coordonnées d'un point de la Terre relativement à cette surface sont la latitude, la longitude et la hauteur. De telles notions n'auraient pas pu voir le jour sans le développement industriel des instruments de mesures, tels que les télescopes, les gravimètres et les gradio-mètres de haute sensibilité. Avec le lancement des satellites artificiels tels que les satellites ra-

dar et les GPS (Global Positioning System) un nouvel air d'observations de gravité est apparu. L'interprétation est devenue plus précise grâce à l'exploitation de plusieurs observations pour étudier un seul phénomène. Il est aussi devenu possible d'observer indirectement le potentiel gravitationnel terrestre en observant la topographie des océans qui est une surface équipotentielle du potentiel terrestre appelée aussi géoïde et qui constitue encore une réserve d'informations utiles [12]. Parmi les méthodes utilisées dans le calcul de cette surface on peut citer la méthode intégrale, la transformation de Fourier rapide (FFT) et la méthode de collocation par moindres carrés.

Ce chapitre est structuré trois sections, la première décrit la gravité terrestre. La deuxième section est réservée pour présenter le champ normal. Dans la troisième section nous présentons le champ perturbateur, qui est le paramètre en fonction duquel nous allons écrire les relations entre les différents paramètres des deux champs terrestre et normal.

## 1.2 Champ de gravité terrestre

### 1.2.1 La loi de l'attraction et potentiel gravitationnel

La loi de l'attraction universelle était publiée en 1687 par Isaac Newton. C'est un récapitulatif des observations de Galilée sur la chute libre des corps et de Kepler sur les orbites des planètes. Selon cette loi : *l'attraction gravitationnelle entre deux points matériels  $P$  et  $P'$  de masses respectives  $m$  et  $m'$ , est proportionnelle à la masse de chacun des deux points et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare ;  $\ell$  :*

$$F = G \frac{mm'}{\ell^2}, \quad (1.1)$$

où  $G = 6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  est la constante universelle de gravitation.

On remarque que l'attraction exercée par le premier point sur le second dérive du potentiel :

$$V(P') = G \frac{m}{\ell} \text{ et } F(P') = m' \nabla V(P').$$

### 1.2.2 Principe de superposition

La loi d'attraction de Newton (1.1) a été énoncée dans le cas de deux points masses seulement. La formule du potentiel gravitationnel a été obtenue grâce à une propriété importante de la gravitation qui est le principe de superposition.

**Cas discret :** Ce principe dit que le potentiel d'attraction engendré par un ensemble de  $N$  masses est égal à la somme des potentiels des masses, i.e.,

$$V(P) = \sum_{k=1}^N V_k = \sum_{k=1}^N \frac{G m_k}{\ell_k}$$

où  $m_k$  est la masse du point-masse, et les  $\ell_k$  est la distance entre le point  $P$  et le  $k$ -ème point masse  $P_k, k = 1 \dots N$ .

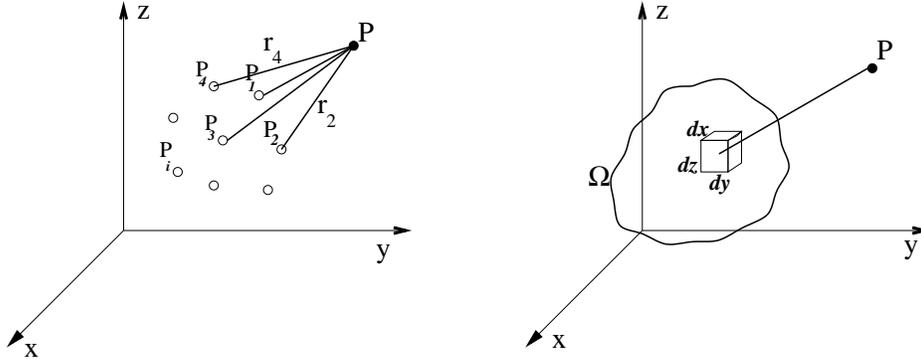
La force d'attraction engendrée par cet ensemble de points est alors donnée par :

$$\mathbf{f} = \nabla V = \sum_{k=1}^N \nabla V_k = -G \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\ell_k^3} \boldsymbol{\ell}_k.$$

Supposons que relativement au repère géocentrique les coordonnées sphériques des points  $P$  et  $P_k$  sont respectivement  $(r, \theta, \phi)$  et  $(r_k, \theta_k, \phi_k)$ .

**Définition 1 (Distance sphérique)** La distance sphérique  $\psi_k$  séparant les deux points  $P$  et  $P_k$ , est définie par :

$$\cos \psi_k = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\phi - \phi_k).$$



**FIGURE 1.1** : Principe de superposition : à gauche, cas d'une distribution discrète ; à droite, cas d'une distribution continue de points.

**Remarque 1.** La distance Euclidienne  $\ell_k$  entre  $P$  et  $P_k$ , s'écrit :

$$\ell_k = \sqrt{r^2 - 2rr_k \cos \psi_k + r_k^2}. \quad (1.2)$$

Lorsque les points  $P_k$  sont des points masses de la Terre, on a  $r_k < r$  pour  $1 \leq k \leq N$ . Par conséquent l'inverse de la distance  $\ell_k$  est une fonction harmonique. Son développement en termes de séries d'harmoniques sphériques est établi comme suit : Posons par  $\alpha_k = r_k/r$ . Nous avons alors :

$$\ell_k = r \sqrt{1 - 2\alpha_k \cos \psi_k + \alpha_k^2}. \quad (1.3)$$

Par conséquent  $r/\ell_k$  peut se développer en une série d'harmoniques sphériques par rapport à  $\alpha_k$  [27] :

$$\frac{r}{\ell_k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_k^n \bar{P}_n(\cos \psi_k), \quad (1.4)$$

où  $\bar{P}_n$  est le polynôme de Legendre de degré  $n$  normalisé (A.16).

Il en résulte que

$$\frac{1}{\ell_k} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_k^n \bar{P}_n(\cos \psi_k), \quad (1.5)$$

et en utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques (voir A.22)

$$\frac{1}{\ell_k} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_k^n \frac{4\pi}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(\theta_k, \phi_k) \bar{Y}_{nm}(\theta, \phi). \quad (1.6)$$

Finalement, l'expression du potentiel élémentaire  $V_k$  est donnée en un point  $P$  de l'espace par :

$$V_k(r, \theta, \phi) = \frac{Gm_k}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_k^n \frac{4\pi}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(\theta_k, \phi_k) \bar{Y}_{nm}(\theta, \phi), \quad (1.7)$$

et par le principe de superposition :

$$V(P) = \sum_{k=1}^N V_k = \sum_{k=1}^N \frac{Gm_k}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_k^n \frac{4\pi}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(\theta_k, \phi_k) \bar{Y}_{nm}(\theta, \phi). \quad (1.8)$$

**Cas continu :** Dans le cas où le potentiel est généré par une distribution continu de points  $\Omega$  (un réseau infini de points ) de densité  $\rho$ , son expression en continu est donnée par

$$V(P) = G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{r} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dx dy dz,$$

où  $r$  est la distance entre le point  $P$  et l'élément de masse  $dm$ . L'attraction générée par  $\Omega$  dans ce cas est donnée par

$$\mathbf{f} = \nabla V = -G \iiint_{\Omega} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dm,$$

où  $\mathbf{r}$  est le rayon vecteur associé au point  $P$ .

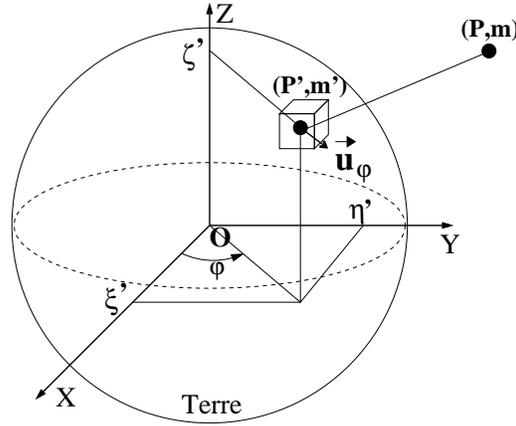


FIGURE 1.2 : Attraction gravitationnelle

### 1.2.3 Attraction gravitationnelle terrestre

La direction de cette force est portée par la droite passant par les deux centres de masse des deux points matériels.

Considérons un point matériel de la Terre  $P'$  de masse élémentaire  $dm$  et de coordonnées  $(x', y', z')$  relativement à un repère cartésien.  $P$  est un point de l'espace externe à la Terre, de masse unitaire ( $m = 1$ ) et de coordonnées  $(x, y, z)$ . La force d'attraction,  $F$ , exercée par le point matériel  $P'$  sur le point matériel  $P$  peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = -G \frac{dm}{\ell^2} \mathbf{u}_{P'},$$

où  $\ell = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  et  $\mathbf{u}_{P'} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$ .

Le champ  $\mathbf{F}$  dérive du potentiel  $V = \frac{Gdm}{\ell}$ . En effet, on a :

$$\text{grad} \frac{1}{\ell} = -\frac{1}{\ell^3} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix}$$

et la démonstration en découle.  $V$  est le potentiel gravitationnel généré par le point matériel  $P'$ . Le potentiel gravitationnel terrestre est obtenu en sommant sur tous les potentiels élémentaires générés par des points matériels de la Terre de masse  $M$  dont une distribution de masse est  $\rho$ . On a alors :

$$V = \frac{GM}{\ell} = G \int_{\mathcal{T}} \frac{dm}{\ell} = G \int_{\mathcal{T}} \frac{\rho}{\ell} dv,$$

avec  $\mathcal{T}$  représente ici le volume de la Terre et  $\ell$  désigne la distance entre le point  $P'$  et le point potentié  $P$ .

### 1.2.4 Potentiel centrifuge

Sous l'effet de la rotation diurne de la Terre, un point matériel  $P$  de masse unitaire subit une force dite centrifuge qui est exprimée en fonction de sa distance à l'axe de rotation de la Terre et de direction orthogonale à l'axe de rotation de la Terre :

$$\mathbf{f} = \omega^2(x^2 + y^2)\mathbf{u}_\varphi,$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation de la Terre;  $\omega = 7,29210^{-5}$ rad/s. La force centrifuge  $\mathbf{f}$  dérive d'un potentiel  $\Phi$ , dit potentiel centrifuge;

$$\Phi(P) = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2).$$

### 1.2.5 Potentiel de pesanteur

Le potentiel de pesanteur terrestre, noté  $W$ , est la somme du potentiel gravitationnel  $V$  et du potentiel centrifuge  $\Phi$ , i.e.,  $W = V + \Phi$ .

### 1.2.6 Accélération de pesanteur et coordonnées astronomiques

Par définition, on appelle accélération de pesanteur terrestre, conventionnellement notée  $\mathbf{g}$ , le vecteur égal à  $\mathbf{grad}W$  sur la surface terrestre.

L'accélération de pesanteur en un point matériel  $P$  est créée par l'attraction gravitationnelle de la Terre et par l'accélération centrifuge :

$$\mathbf{g} = \mathbf{grad}W = G \iiint_{\mathcal{T}} \frac{\rho}{\ell^2} \mathbf{u}_{P'} dv + \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{u}.$$

où  $\mathbf{u}_{P'} = \frac{\overrightarrow{P'P}}{\|P'P\|}$  et  $\mathbf{u} = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$ .

$\mathbf{g}$  est exprimée en  $m/s^2$ , ou en gal ( $1\text{gal} = 1\text{cm}/s^2$ ). La norme du vecteur d'accélération de pesanteur  $\mathbf{g}$  est appelée la gravité de pesanteur, notée  $g$ . Numériquement, la gravité n'est pas constante, elle change d'un lieu à un autre à cause de plusieurs facteurs mesurables, tels que les forces de marée, par exemple à l'équateur  $\|\mathbf{g}_e\| \approx 9.78\text{m}/s^2$  et aux pôles  $\|\mathbf{g}_p\| \approx 9.83\text{m}/s^2$ .

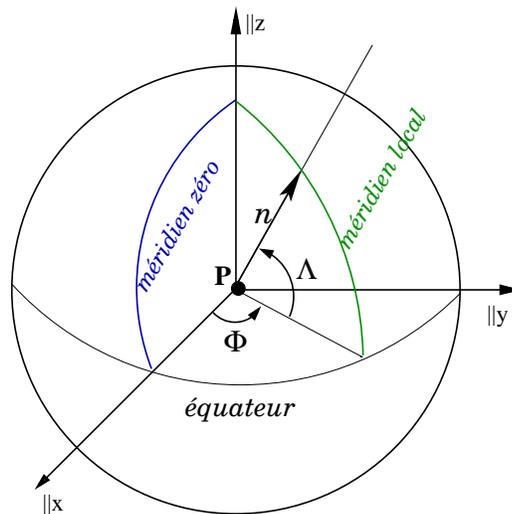
Les mesures de gravité  $g$  sont faites avec deux types de gravimètres. Le premier calcule la gravité du lieu en mesurant la vitesse de chute, à l'aide d'un rayon laser. Bien que ce type de gravimètre fournit des mesures de précision de 0.01 à 0.001 mgal, il est très cher, lourd, et encombrant. Le deuxième type de gravimètre mesure les changements relatifs à la gravité  $g$  entre deux endroits. Cet instrument utilise une masse sur l'extrémité d'un ressort qui s'étire où la gravité  $g$  est plus forte. Il fournit une précision de 0.01 mgal en environ 5 minutes. Des mesures de gravité peuvent aussi être prélevées à partir d'une station de gravité.

Le vecteur unitaire normal au point  $P$  est porté par la direction de  $\mathbf{g}$ , i.e.,  $\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{g}}{g}$ . On l'appelle aussi *fil à plomb*. Le signe moins est pour orienter le sens de la normale vers l'extérieur. Dans le système géocentrique (d'origine

le centre de la Terre) cartésien,  $\mathbf{n}$  se décompose :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \Lambda \cos \Phi \\ \cos \Lambda \sin \Phi \\ \sin \Lambda \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Les angles  $\Lambda$  et  $\Phi$  sont appelés les *coordonnées astronomiques* :  $\Lambda$  est la latitude astronomique, et  $\Phi$  est la longitude astronomique.



**FIGURE 1.3** : Coordonnées astronomiques ;  $\Lambda$  et  $\Phi$  sur une sphère unité centrée au point  $P$ . Ainsi le repère  $(P, ||x, ||y, ||z)$  est local. Les symboles  $||x, ||y, ||z$  indiquent les parallèles aux axes du repère cartésien géocentrique.

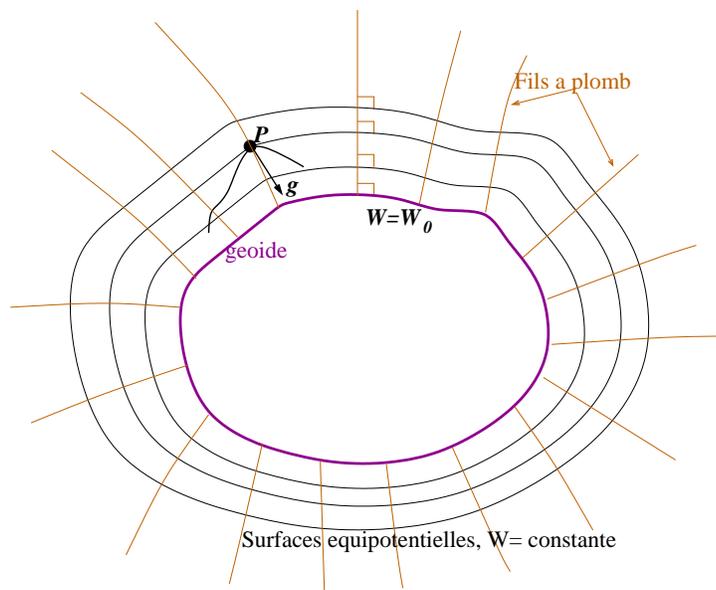
### 1.2.7 Surface équipotentielle et géoïde

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points ayant la même valeur du potentiel  $W$ . Les lignes de champ de pesanteur (ou les fils à plomb) sont les courbes perpendiculaires aux surfaces équipotentielles en tout point.

En géodésie physique, un grand intérêt est donné à la surface équipotentielle particulière ; qui coïncide avec le niveau moyen des mers sur la Terre.

Cette surface est appelée le *géoiïde*. Elle est considérée très proche de la forme de la Terre. Au niveau du géoiïde le potentiel de pesanteur  $W = W_0 = \text{cte}$ .

Le géoiïde est aussi, une surface complexe à cause de l'irrégularité de la distribution de la masse terrestre. Il est par conséquent impossible de le déterminer explicitement. Dans la géophysique cette surface particulière présente des ondulations qui sont quantifiées au moyen des variations de sa hauteur  $N$  par rapport à une surface de référence arbitrairement choisie. On choisit en général pour cette surface un ellipsoïde de révolution.



**FIGURE 1.4 :** Surface équipotentielle du champ de pesanteur. La direction du vecteur gravité qui est perpendiculaire à l'équipotentielle et tangent au fil à plomb.

## 1.2.8 Propriétés du potentiel gravitationnel

### 1.2.8.1 Potentiel extérieur et équation de Laplace

Lorsque le point potentié est extérieur à la Terre, c'est à dire lorsque  $\ell$  ne s'annule pas, la fonction  $\frac{1}{\ell}$  est continue et admet des dérivées premières et secondes continues. On peut par suite calculer les dérivées partielles secondes de  $\frac{1}{\ell}$  et montrer que le potentiel  $V$  vérifie l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ , ou encore  $V$  est harmonique. En effet, si  $\ell$  ne s'annule pas alors  $\frac{1}{\ell}$  est harmonique, et on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\ell} \right) &= -\frac{x-x'}{\ell^3} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) = \frac{-\ell^2 + 3(x-x')^2}{\ell^5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\ell} \right) &= -\frac{y-y'}{\ell^3} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) = \frac{-\ell^2 + 3(y-y')^2}{\ell^5} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\ell} \right) &= -\frac{z-z'}{\ell^3} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) = \frac{-\ell^2 + 3(z-z')^2}{\ell^5} \end{aligned}$$

ainsi,

$$\Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{\ell} \right) = 0.$$

Par conséquent, le potentiel gravitationnel  $V$  peut être représenté à l'aide d'un développement en harmoniques sphériques [38]. Dans un repère géocentrique où l'origine  $O$  coïncide avec le centre de gravité de la Terre et en introduisant l'ellipsoïde de référence, on peut écrire :

$$\begin{aligned} V &= \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \bar{S}_{nm} \sin m\varphi) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right) \\ &= \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \left( \frac{a}{r} \right)^n \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \right), \end{aligned} \tag{1.10}$$

où

$r, \theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées sphériques du point de calcul,

$\bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi)$  sont les harmoniques sphériques surfaciques normalisées (A.16),

$$\bar{a}_{nm} = \begin{cases} \bar{C}_{nm} & \text{si } m \geq 0 \\ \bar{S}_{nm} & \text{si } m \leq 0, \end{cases} \quad \text{sont les coefficients du potentiel gravitationnel normalisées,}$$

$M$  est la masse de la Terre,

$a$  est le rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence,

$\bar{P}_{nm}$  sont des fonctions de Legendre de première espèce et normalisées.

Dans l'expression du potentiel gravitationnel, la quantité constante  $\frac{GM}{r}$  (qui est aussi le terme d'ordre  $n = 0$  dans le développement) représente la valeur moyenne du potentiel  $V$ . Cette valeur correspond au modèle d'une masse ponctuelle en  $O$ . Chaque terme de l'expression du potentiel, présente une déviation par rapport à cette valeur moyenne. Lorsque le potentiel est supérieur à la valeur moyenne, il y a un excès de masse, et lorsque le potentiel est inférieur à cette valeur, il y a un défaut de masse.

**Remarque 2 (Modèle géopotential)** *L'étude des perturbations des trajectoires des satellites sous l'influence de l'attraction terrestre, a permis d'élaborer des modèles géopotentiels qui représentent le champ gravitationnel terrestre. Ces modèles sont présentés sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques dont les coefficients sont déterminés grâce aux missions spatiales. Soit :*

$$V = \frac{GM}{r} \left( \sum_{n=0}^{N_{max}} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \bar{S}_{nm} \sin m\varphi) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \right), \quad (1.11)$$

où  $N_{max}$  est l'ordre maximal des termes du modèle, par exemple, pour le modèle EGM96, obtenu par les recherches en géodésie spatiale,  $N_{max} = 360$  [2].

Actuellement il existe le modèle EGM08 qui est plus précis et dont l'ordre maximal est  $N_{max} = 2160$  [1].  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  sont des coefficients sans dimension qui caractérisent la répartition des masses dans le volume de la Terre. Ils sont obtenus principalement par des mesures de pesanteur, des études des perturbations des mouvements des satellites artificiels et des mesures d'altimétrie par satellite.

### 1.2.8.2 Potentiel intérieur et équation de Poisson

Lorsque le point potentié  $P$  est à l'intérieur de la Terre, la fonction  $\frac{1}{\ell}$  n'est plus continue en  $P$ . Dans ce cas les dérivées partielles au voisinage de  $P$  ne peuvent pas être calculées directement et  $V$  n'est plus une fonction harmonique [56]. Soit  $B(P, \varepsilon)$  la boule de centre  $P$  et de rayon  $\varepsilon$ . Décomposons le volume de la Terre sous la forme [29] :

$$\mathcal{T} = [\mathcal{T} \setminus B(P, \varepsilon)] \cup B(P, \varepsilon).$$

Ainsi le potentiel  $V$  s'écrit :

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= G \iiint_{\mathcal{T}} \frac{\varrho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= G \iiint_{\mathcal{T} \setminus B(P, \varepsilon)} \frac{\varrho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &+ G \iiint_{B(P, \varepsilon)} \frac{\varrho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'. \end{aligned}$$

Notons par  $I_\varepsilon$  la première intégrale, i.e., celle sur  $\mathcal{T} \setminus B(P, \varepsilon)$  et par  $J_\varepsilon$  la deuxième intégrale, i.e., celle sur  $B(P, \varepsilon)$ . Nous cherchons maintenant à déterminer les limites de  $\Delta I_\varepsilon$  et de  $\Delta J_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Pour la première on a

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta I_\varepsilon &= G \Delta \left( \iiint_{\mathcal{T}} \frac{\varrho(x', y', z')}{\ell} dx' dy' dz' \right) \\ &= G \iiint_{\mathcal{T}} \varrho(x', y', z') \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) dx' dy' dz' = 0. \end{aligned}$$

Pour la deuxième, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta J_\varepsilon &= G \iiint_{B(P, \varepsilon)} \Delta \left( \frac{\varrho(x', y', z')}{\ell} \right) dx' dy' dz' \\ &= G \iiint_{B(P, \varepsilon)} \varrho(x', y', z') \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) dx' dy' dz' .\end{aligned}$$

$$\text{De plus on a } \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) = \text{div} \left( \text{grad} \left( \frac{1}{\ell} \right) \right).$$

Rappelons la formule de la divergence

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{F} dv = \iint_{\mathcal{S}} F_n ds,$$

où  $\Omega$  est le volume enfermé par la surface  $\mathcal{S}$  et  $F_n$  est la projection du vecteur  $\mathbf{F}$  sur la normale extérieure à la surface  $\mathcal{S}$  (i.e., composante normale de  $\mathbf{F}$ ).

Si  $\mathbf{F}$  est la force d'écoulement d'un fluide, alors  $\iint_{\mathcal{S}} F_n ds$  est le flux du fluide à travers  $\mathcal{S}$  par unité de surface. La quantité  $\text{div } \mathbf{F}$  représente la quantité de fluide par unité de volume. En appliquant cette formule dans notre cas nous obtenons :

$$\begin{aligned}\Delta J_\varepsilon &= G \iiint_{B(P, \varepsilon)} \varrho(x', y', z') \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) dv \\ &= G \iint_{S(P, \varepsilon)} \varrho(x', y', z') \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{\ell} \right) ds + G \iint_{S(P, \varepsilon)} \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial n} (\varrho(x', y', z')) ds.\end{aligned}$$

Sur la sphère  $S(P, \varepsilon)$  on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dr} \text{ et } l = r = \varepsilon, \\ ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ \iint_{S(P, \varepsilon)} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\Delta J_\varepsilon &= G \iint_{S(P, \varepsilon)} \varrho(x', y', z') \left( \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \right) \right)_{r=\varepsilon} \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &+ G \iint_{S(P, \varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dr} (\varrho(x', y', z')) \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -G \iint_{S(P, \varepsilon)} \varrho(x', y', z') \sin \theta d\theta d\varphi + G \iint_{S(P, \varepsilon)} \varepsilon \frac{d}{dr} (\varrho(x', y', z')) \sin \theta d\theta d\varphi.\end{aligned}$$

En outre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho(x', y', z') = \varrho(x, y, z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta J_\varepsilon &= -G\rho \underbrace{\iint_{S(P,\varepsilon)} \sin \theta d\theta d\varphi}_{\downarrow 4\pi} \\ &= -4G\rho\pi. \end{aligned}$$

**Théorème 1.** *A l'intérieur de la Terre,  $V$  satisfait l'équation de Poisson*

$$\Delta V(x, y, z) = -4G\rho\pi.$$

## 1.3 Champ normal

### 1.3.1 Ellipsoïde de référence et potentiel normal

La rotation de la Terre autour de son axe, entraîne une déformation au niveau des pôles (aplatissement) et au niveau de l'équateur (gonflement). L'approximation mathématique la plus fidèle à la forme de la Terre est, par conséquent, l'ellipsoïde de révolution qui est une surface engendrée par la rotation d'une ellipse autour de l'axe des pôles. Il est caractérisé par son demi-grand axe  $a$ , son demi-petit axe  $b$  et son aplatissement  $f = (a - b)/b$ . Il s'écarte d'une distance du géoïde qui ne dépasse pas  $\pm 100m$ . En outre, l'ellipsoïde choisi a la même masse, le même centre, le même rayon équatorial, la même vitesse de rotation, le même axe des pôles, et le même facteur d'aplatissement que la Terre. D'après Clairaut (1743) [29], l'ellipsoïde décrit la forme d'équilibre d'un fluide en rotation. Parmi les ellipsoïdes de références utilisés, nous citons :

Ellipsoïde	Année	$a$	$b$	$f$	$e$
Clarke	1880	6378249.2	6356515.0	0.00340755	0.08248325676
Hayford	1909	6378388.0	6356911.9461	0,003367003	0.08199188998
IAG GRS	1980	6378137.0	6356752.314	0,003352811	0.08181919106

L'ellipsoïde de référence ainsi défini, génère un champ, appelé champ normal et noté  $U$ , qui approche le champ du pesanteur terrestre  $W$ . L'ellipsoïde est une surface équipotentielle du champ  $U$ , et ce dernier est égal, sur l'ellipsoïde, au potentiel de pesanteur sur le géoïde,  $W_0$  (fig.1.5). Le champ normal  $U$  est une fonction harmonique à l'extérieur de l'ellipsoïde de référence associé. Il se décompose en la somme du potentiel gravitationnel  $\mathcal{V}$  et du potentiel centrifuge  $\Phi$  (le même que celui de la Terre), i.e.,  $U = \mathcal{V} + \Phi$ . Comme le potentiel de pesanteur, le potentiel normal  $U$  admet un développement en harmoniques sphériques qui s'écrit :

$$\mathcal{V} = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right],$$

avec  $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ ,  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ,  $e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ ,  $q_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctg e' - \frac{3}{2e'}$ .

et

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3 e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \left( 1 - n + 5n \frac{J_2}{e^2} \right),$$

$$J_2 = \frac{1}{3} e^2 \left( 1 - \frac{2}{15} \frac{m e'}{q_0} \right) : \text{l'aplatissement dynamique de l'ellipsoïde :}$$

$$J_2 = 108263.0000064 \cdot 10^{-8} \text{ pour GRS80}$$

$$J_2 = 108263.000424 \cdot 10^{-8} \text{ pour WGS84.}$$

La valeur du potentiel normal sur la surface de l'ellipsoïde GRS80 par exemple est :

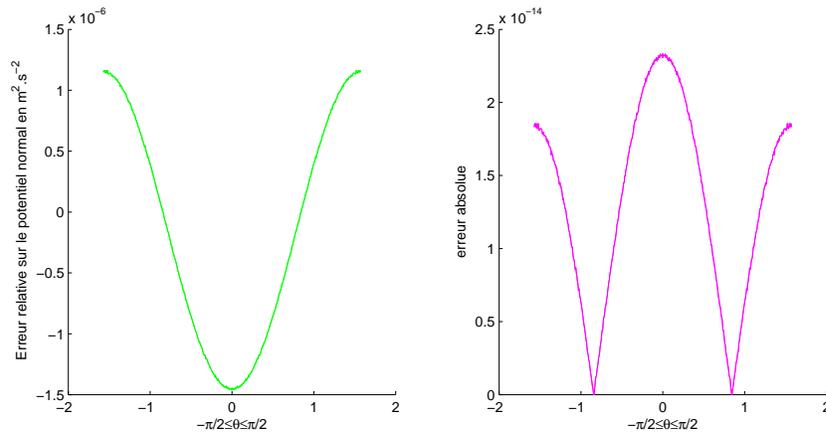
$$U_{GRS80} = 6.263686085004697 \cdot 10^7 \text{m}^2 \text{s}^{-2}.$$

Dans Fig. 1.5, nous présentons l'erreur relative sur le potentiel de l'ellipsoïde définie par :

$$E_{rel} = \frac{|U - U_{GRS80}|}{|U_{GRS80}|},$$

et l'erreur absolue par rapport à la valeur du potentiel gravitationnel sur la l'ellipsoïde définie par :

$$E_{abs} = |U - U_{GRS80}|.$$



**FIGURE 1.5 :** L'erreur relative et l'erreur absolue sur le potentiel normal calculée à la surface de l'ellipsoïde de référence GRS80. C'est la variation du développement en harmoniques sphériques du champ normal autour de sa valeur réelle sur l'ellipsoïde.

### 1.3.2 Gravité normale et coordonnées géodésiques

Le vecteur gravité normale, noté  $\gamma$ , est un analogue de l'accélération de pesanteur  $\mathbf{g}$ . En fait, on peut écrire

$$\gamma = \text{grad } U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

La formule de Somigliana donne le module de la gravité normale sur l'ellipsoïde de référence en fonction de la latitude géographique géodésique  $\lambda$ , l'angle que fait la normale à l'ellipsoïde avec le plan équatorial [38].

$$\gamma = \frac{a\gamma_e \cos^2 \lambda + b\gamma_p \sin^2 \lambda}{(a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.12)$$

où  $\gamma_e$  et  $\gamma_p$  sont respectivement les valeurs de la gravité normale à l'équateur et aux pôles de l'ellipsoïde. Elles sont calculées à l'aide des expressions :

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{me'q'_0}{6q_0}\right), \quad (1.13)$$

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{me'q'_0}{3q_0}\right), \quad (1.14)$$

avec

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2}\right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctg e'\right) - 1.$$

A une hauteur  $h$  au-dessus de l'ellipsoïde, le module de la gravité normale se calcule à partir de :

$$\gamma_h = \gamma \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \lambda) h + \frac{3h^2}{a^2}\right),$$

où  $f = \frac{a-b}{a}$ , est l'aplatissement de l'ellipsoïde considéré.

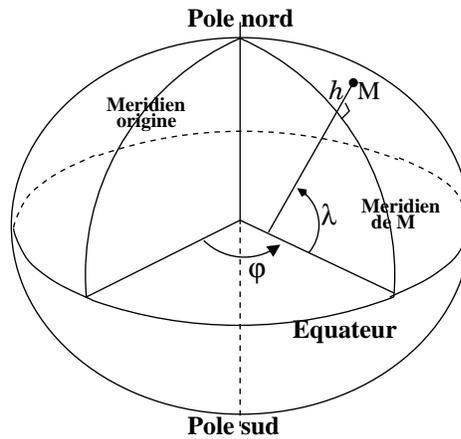
Par analogie au cas de la gravité de pesanteur (1.9), les coordonnées géodésiques  $(\lambda, \phi)$  sont introduites dans l'expression du vecteur de gravité

normale :

$$\begin{aligned}\gamma_x &= -\gamma \cos \lambda \cos \phi, \\ \gamma_y &= -\gamma \cos \lambda \sin \phi, \\ \gamma_z &= -\gamma \sin \lambda,\end{aligned}\tag{1.15}$$

et définies par :

$$\begin{aligned}\lambda &= \arcsin\left(-\frac{\gamma_z}{\gamma}\right), \\ \phi &= \arctg\left(\frac{\gamma_y}{\gamma_x}\right).\end{aligned}\tag{1.16}$$



**FIGURE 1.6** : Coordonnées géodésiques.  $\lambda$  est la latitude, et  $\phi$  est la longitude.

Ces coordonnées servent à localiser un point sur la Terre. Un point au dessus de l'équateur a une latitude positive et réciproquement. Les valeurs des latitudes varient entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ . Les lignes de latitudes égales sont appelées les parallèles. La parallèle la plus importante est la parallèle origine qui est l'équateur. Les longitudes varient entre  $-180^\circ$  et  $180^\circ$ . Les lignes de longitudes égales sont appelées les méridiens. Le méridien le plus important est le méridien origine des longitudes appelé aussi la ligne de Greenwich.

## 1.4 Relations entre champ réel et champ approché

### 1.4.1 Anomalie de gravité

Soient  $M$  un point quelconque de la surface topographique et  $P$  l'intersection du fil à plomb passant par ce point avec le géoïde. Notons par  $Q$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'ellipsoïde (Fig.1.7). L'anomalie de gravité, notée  $\Delta g$ , est la différence entre les modules de la gravité mesurée en  $P$  et la gravité normale en  $Q$ , i.e.,

$$\Delta g = \mathbf{g}_P - \gamma_Q. \quad (1.17)$$

Les anomalies correspondant au modèle géopotential EGM96, admettent un développement en harmoniques sphériques qui s'écrit :

$$\Delta g = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{max}} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \Delta \bar{S}_{nm} \sin m\varphi) \bar{P}_{nm}(\cos \theta), \quad (1.18)$$

où  $\Delta \bar{C}_{nm}$  et  $\Delta \bar{S}_{nm}$  sont les différences entre les coefficients du potentiel terrestre et les coefficients du potentiel normal relativement au modèle géopotential EGM96.

### 1.4.2 Déviation de la verticale

L'angle entre la normale au géoïde ou le fil à plomb -support de  $\mathbf{g}$ - et la normale à l'ellipsoïde -support de  $\gamma$ - est appelé *déviation de la verticale*. Il a deux composantes, une dans la direction nord-sud  $\xi$  et l'autre dans la

direction Est-Ouest  $\eta$  (fig.1.7). Nous avons les formules suivantes :

$$\xi := \Lambda - \lambda, \quad (1.19)$$

$$\eta := (\Phi - \phi) \cos \lambda, \quad (1.20)$$

où  $(\Lambda, \Phi)$  sont les coordonnées astronomiques, et  $(\lambda, \phi)$  sont les coordonnées géodésiques.

### 1.4.3 Potentiel perturbateur

La différence entre le potentiel de pesanteur réel  $W$  et le potentiel normal  $U$  est appelée le potentiel perturbateur :

$$T = W - U.$$

Le potentiel  $T$  est harmonique comme étant différence de deux fonctions harmoniques ( $W$  et  $U$ ). Il possède alors un développement en harmoniques sphériques [27]. La forme du développement associée au modèle EGM96 est donnée par :

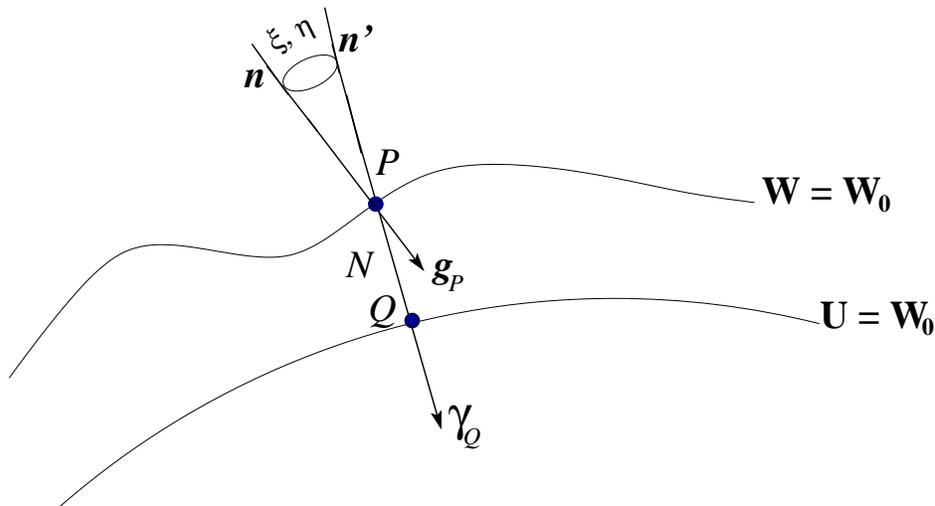
$$T = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\varphi) \bar{P}_{nm}(\cos \theta). \quad (1.21)$$

### 1.4.4 Relation entre potentiel perturbateur et la déviation de la verticale

Les composantes de la déviation de la verticale s'expriment en fonction du potentiel perturbateur  $T$  en un point extérieur à la Terre  $P$  sous la forme [38] :

$$\xi_P = -\frac{1}{\gamma_{QP}} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad (1.22)$$

$$\nu_P = \frac{1}{\gamma_{QP} \cos \theta_P} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \quad (1.23)$$



**FIGURE 1.7** : Vecteur accélération de pesanteur  $\mathbf{g}$ , vecteur accélération normal  $\boldsymbol{\gamma}$ , ondulation du géoïde  $N$  et les composantes Nord-Sud et Est-Ouest de la déviation de la verticale. Notons aussi que  $W(P)$ , la valeur du potentiel de pesanteur au point  $P$ , est égale à  $U(Q)$ , la valeur du potentiel normal au point  $Q$ .

### 1.4.5 Hauteur du géoïde et relation avec potentiel perturbateur

La distance entre  $P$  et  $Q$  suivant le fil à plomb s'appelle la *hauteur du géoïde*  $N$  (Fig.1.8). La distance entre  $M$  et  $P$  suivant le fil à plomb est appelée la *hauteur orthométrique* du point  $M$ . La hauteur du géoïde est liée au potentiel perturbateur  $T$  par la formule de Brun [27] :

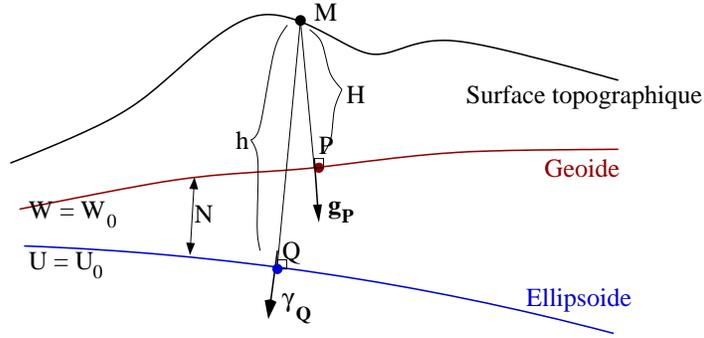


FIGURE 1.8 : Hauteur du géoïde  $N$ , hauteur orthométrique  $H$ .

$$N(P) = \frac{T(P)}{\gamma}. \quad (1.24)$$

Par conséquent il est possible de calculer la hauteur du géoïde dès que le potentiel perturbateur  $T$  est connu.

La valeur de la hauteur du géoïde associé au modèle EGM96, s'écrit sous la forme :

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta\bar{C}_{nm} \cos m\varphi + \Delta\bar{S}_{nm} \sin m\varphi) \bar{P}_{nm}(\cos \theta).$$

#### 1.4.6 Relation fondamentale de gravimétrie

A l'aide des formules (1.17) et (1.24) nous avons la relation fondamentale de gravimétrie qui relie l'anomalie de gravité  $\Delta g$ , la hauteur du géoïde  $N$  et le potentiel perturbateur  $T$  [27] :

$$\Delta g = -\frac{2}{r}T - \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (1.25)$$

### 1.5 Conclusion

Les relations entre les paramètres des deux champs de gravité terrestre et champ normal, s'expriment toutes en fonction du champ perturbateur. Par

---

conséquent, déterminer ce champ perturbateur permet de déterminer plusieurs informations sur le champ de gravité terrestre à partir des mesures effectuées. Dans le chapitre suivant nous détaillons la méthode de collocation par moindres carrés pour la détermination du potentiel perturbateur, qui sert à son tours pour la détermination d'un géoïde.



# Chapitre 2

## Méthode de collocation par moindres carrées

### 2.1 Introduction

La méthode de collocation par moindres carrés (CMC) est une méthode, basée sur le principe de Wiener-Kolmogoroff, qui sert à donner une estimation linéaire d'un processus stochastique en minimisant les carrés des erreurs. En géodésie cette méthode permet de faire le lien entre le sens physique et l'interprétation statistique des différentes fonctions du champ gravitationnel terrestre. Elle a été proposée pour la première fois en 1969 par Krarup dans sa publication "*A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy*", puis illustrée avec détails dans [12, 38]. C'est une méthode qui a été utilisée avec succès dans plusieurs problèmes de géodésie physique. En particulier dans plusieurs applications liées aux missions spatiales telles que l'altimétrie par satellite [42], la prédiction des anomalies de gravité, et le calcul des ondulations du géoïde [44].

La méthode CMC est en outre, un cas particulier de méthodes utilisées en

géostatistique (discipline qui permet l'interprétation statistique de données spatiales et temporelles) pour l'exploitation des observations disponibles sur un site de la terre ou une région donnée. Cette méthode nécessite, par conséquent, la caractérisation des corrélations entre les différentes observations, et ce fait nécessite, tout d'abord, la construction d'un variogramme. Il s'agit d'une fonction qui dépend seulement de la distance qui sépare deux points de mesures, et non pas de leurs coordonnées. La détermination de cette fonction permet la déduction de la fonction covariance empirique (qui est de grande importance dans la méthode de CMC) et réciproquement. On introduit ensuite une fonction covariance analytique noyau qui peut être modélisée à partir de la fonction covariance empirique des observations. Les autres covariances pourront être déduites grâce au couplage du modèle analytique de la covariance noyau et certaines lois physiques reliant les quantités étudiées dans le problème à résoudre.

Parmi les applications les plus intéressantes de la méthode CMC nous citons le calcul du potentiel perturbateur  $T$  [38]. Les relations linéaires avec d'autres quantités géodésiques telles que les anomalies de gravité  $\Delta g$  et les composantes de la déviation de la verticale  $\xi$  et  $\eta$ , permettent une détermination précise du géoïde local ou régional, parmi d'autres informations du terrain étudié.

Parmi les avantages de la méthode CMC, on remarque sa capacité à exploiter des observations non seulement homogènes mais aussi hétérogènes pour la détermination d'une quantité inconnue. Les résultats trouvés sont compétitifs même lorsque le nombre d'observations est limité. L'inconvénient le plus important de la méthode est numérique. En effet, les tailles des matrices à inverser sont d'autant plus grandes que le nombre d'observations augmente. Avec l'avancement des méthodes numériques et du matériel

informatique cet inconvénient s'avère de moins en moins inquiétant [44].

Nous structurons ce chapitre sur quatre sections. Dans la première nous présentons la méthode de prédiction par moindres carrés et son utilisation pour résoudre certains problèmes en géodésie physique est abordée dans la deuxième section. Nous consacrons ensuite la troisième section pour les détails de la fonction covariance qui joue un rôle fondamental dans l'application de la méthode de collocation. Dans la dernière section nous décrivons la technique de "retrait-restauration" qui permet de déterminer les hauteurs du géoïde en tenant compte de la répartition des masses à l'intérieur de la terre.

## 2.2 Prédiction par la méthode des moindres carrés

La méthode de moindres carrés (MMC) permet d'ajuster un modèle mathématique afin d'interpréter un ensemble de mesures expérimentales. Considérons le problème général suivant :

Disposant du vecteur de mesures  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_q)^t$ , on veut déterminer le vecteur signal  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_p)^t$  qui en découle.  $\mathbf{l}$  et  $\mathbf{s}$  sont des vecteurs centrés, i.e.,  $E(\mathbf{l}) = 0$  et  $E(\mathbf{s}) = 0$ , où  $E(\cdot)$  désigne la fonction espérance dans le sens probabiliste. On suppose que la méthode MMC est la meilleure qui permette de prédire ce signal. Elle conduit à la meilleure combinaison possible des observations quelque soit le comportement des erreurs. La résolution de ce problème fait intervenir la construction des fonctions auto-covariance des vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{l}$  définies par :

$$C_{ll} = \text{cov}(\mathbf{l}, \mathbf{l}) = E(\mathbf{l} \mathbf{l}^t), \quad (2.1)$$

$$C_{ss} = \text{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{s}) = E(\mathbf{s} \mathbf{s}^t), \quad (2.2)$$

et la fonction cross-covariance des vecteurs  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{l}$  définies par :

$$C_{sl} = \text{cov}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = E(\mathbf{s} \mathbf{l}^t) = E(\mathbf{l} \mathbf{s}^t)^t. \quad (2.3)$$

Ce sont des matrices de plein rang, symétriques et définies positives.

Ainsi, trouver le meilleur prédicteur linéaire  $\hat{\mathbf{s}}$  de  $\mathbf{s}$ , revient à déterminer la matrice  $H$  qui permet d'avoir  $\hat{\mathbf{s}} = H\mathbf{l}$ . Notons par  $\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}$  le vecteur d'erreurs sur  $\mathbf{s}$ . La matrice de covariance de  $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $C_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}} = \text{cov}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}) = E(\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^t) = E((\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})(\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s})^t)$ . Les termes diagonaux de cette matrice sont les variances  $\sigma_k^2$  des erreurs  $\hat{s}_k - s_k$ . Dans le sens probabiliste les  $\sigma_k^2$  sont aussi appelées les erreurs quadratiques. La matrice de covariance de l'erreur  $\boldsymbol{\epsilon}$  pour une matrice  $H$  arbitraire est établie comme suit :

En écrivant

$$\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^t = (H\mathbf{l} - \mathbf{s})(H\mathbf{l} - \mathbf{s})^t = H\mathbf{l} \mathbf{l}^t H^t - \mathbf{s} \mathbf{l}^t H^t H \mathbf{l} \mathbf{s}^t + \mathbf{s} \mathbf{s}^t,$$

on établit que :

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}} &= E(\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^t) = HE(\mathbf{l} \mathbf{l}^t)H^t - E(\mathbf{s} \mathbf{l}^t)H^t - HE(\mathbf{l} \mathbf{s}^t) + E(\mathbf{s} \mathbf{s}^t) \\ &= HC_{\mathbf{l}\mathbf{l}}H^t - C_{sl}H^t - HC_{ls} + C_{ss}, \end{aligned}$$

or  $C_{sl} = C_{ls}^t$ . Par conséquent,

$$C_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}} = C_{ss} - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1}C_{ls} + (H - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1})C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}(H - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1})^t.$$

La matrice  $C_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}$  est la somme d'une matrice indépendante de  $H$ , notée  $I = C_{ss} - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1}C_{ls}$  et d'une matrice qui dépend de  $H$  notée  $D = (H - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1})C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}(H - C_{sl}C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}^{-1})^t$ .

$C_{\mathbf{l}\mathbf{l}}$  est une matrice définie positive et  $D$  est une matrice positive qui peut s'annuler [38]. Ce fait implique que pour trouver une meilleure estimation linéaire du vecteur signal  $\mathbf{s}$  (i.e., vérifiant une variance d'erreur minimale) il

suffit de prendre  $D$  égale à la matrice nulle, en mettant  $H = C_{st}C_u^{-1}$  [38].  
Ainsi,

$$\hat{s} = C_{st}C_u^{-1}l.$$

## 2.3 Application de la méthode de moindres carrés en géodésie physique

### 2.3.1 Prédiction de signaux à partir de mesures homogènes : Cas de la gravité

Plusieurs problèmes de géodésie et en particulier de gravimétrie nécessitent l'intervention de la méthode de moindres carrés. Parmi ces problèmes, on peut citer la prédiction (c.a.d, l'interpolation ou l'extrapolation) des anomalies de gravité; il s'agit de déterminer en un point  $P$  de l'espace une estimation de la valeur d'anomalie de gravité  $\Delta g_P$ , à partir de  $q$  mesures  $\Delta g_1, \dots, \Delta g_q$  en  $q$  points  $P_1, \dots, P_q$  au voisinage du point  $P$ .

L'objectif est de compléter les observations de gravité par interpolation ou par extrapolation : par interpolation, lorsque les points de mesure sont très éloignés les uns des autres, il s'agit donc de densifier les valeurs de gravité ou des anomalies de gravité pour une étude plus fine de la zone; par extrapolation, lorsque le point  $P$  est loin des points de mesure. Cette dernière situation est très fréquente en géodésie physique, surtout lorsqu'il y a des zones non accessibles pour des mesures. Il est à noter que ces deux types de prédiction ont la même formulation mathématique.

Pour résoudre ce problème il suffit de déterminer une fonction  $\mathcal{F}$  des anomalies de gravité  $\Delta g_1, \dots, \Delta g_q$  telle que la valeur inconnue  $\Delta g_P$  au point

$P$ , peut s'écrire ;

$$\Delta g_P = \mathcal{F}(\Delta g_1, \dots, \Delta g_q).$$

Dans la pratique, la fonction  $\mathcal{F}$  est souvent choisie linéaire par rapport aux mesures des anomalies de gravité [38] et donc il existe  $q$  scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  tels que

$$\Delta g_P = \sum_{i=1}^q \alpha_i \Delta g_i.$$

La résolution de ce problème est réduite à la détermination de la fonction  $\mathcal{F}$  et par suite, à la détermination des scalaires  $\alpha_i$  par la méthode de moindres carrés.

Soient  $C_{P_i} = \text{cov}(\text{dist}(P, P_i))$  et  $C_{ij} = \text{cov}(\text{dist}(P_i, P_j))$  les valeurs des covariances des distances linéaires entre les points de mesure. Pour calculer ces deux fonctions il suffit de calculer la fonction  $C_{ij}$ , l'autre covariance est déduite de cette dernière.  $C_{ij}$  est un modèle analytique qui approche la fonction covariance empirique issue des mesures de gravité.

Les anomalies de gravité sont alors données par l'expression [38] ;

$$\Delta g_P = (C_{P_1} C_{P_2} \dots C_{P_n}) \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ C_{n1} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_n \end{pmatrix}.$$

### 2.3.2 Méthode de collocation par moindres carrés – Prédiction de signaux à partir de mesures hétérogènes et calcul du géoïde

La méthode de moindres carrés peut servir à l'estimation de signaux à partir de mesures hétérogènes. Dans ce cas la méthode est appelée *collocation par moindres carrés* [38]. Les statisticiens l'appellent *krigeage simple*. Un problème classique en géodésie physique est celui de la détermination d'un géoïde

local. Cette surface, approchant le niveau moyen des mers, oscille autour de la surface de l'ellipsoïde de référence. On parle alors des oscillations du géoïde autour de l'ellipsoïde, ou des hauteurs du géoïde par rapport à l'ellipsoïde, notées par  $N$ . Les valeurs de  $N$  sont liées au potentiel perturbateur  $T$  par la formule de Brun (1.24). La détermination de la hauteur géoïdale en tout point d'une région donnée revient essentiellement à déterminer le potentiel perturbateur  $T$  en tout point. Ceci fut le sujet d'un travail formulé et résolu par Krarup en 1969 en utilisant la méthode de prédiction par moindres carrés à partir de mesures de types différents (exemple : les anomalies de gravité ou les valeurs de la gravité et les composantes de la déviation de la verticale qui sont des angles) [38]. Les mesures dépendent linéairement du potentiel perturbateur par des expressions trouvées grâce à des développements de Taylor du premier ordre de quelques lois de la géodésie physique. En effet, en coordonnées sphériques l'anomalie de gravité est donnée par :

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = \left(-\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}\right)T =: L_1T, \quad (2.4)$$

la composante Nord-Sud de la déviation de la verticale est

$$\xi = \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left(\frac{1}{\gamma r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right)T =: L_2T, \quad (2.5)$$

et la composante Est-Ouest de la déviation de la verticale est

$$\eta = -\frac{1}{\gamma r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \left(-\frac{1}{\gamma r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\right)T =: L_3T. \quad (2.6)$$

Les  $L_i$  désignent dans les équations précédentes des formes linéaires (ou la linéarisations de processus non linéaires), et elles représentent les aspects physiques des quantités mesurées. Supposons que le vecteur des mesures  $\mathbf{l}$  contient  $q$  mesures d'anomalies de gravité,  $q$  mesures de la composante Nord-Sud de la déviation de la verticale et  $q$  mesures de la composantes Est-Ouest

de la déviation de la verticale :  $\mathbf{l} = (\Delta g_1, \dots, \Delta g_q, \xi_1, \dots, \xi_q, \eta_1, \dots, \eta_q)^t$ . Par conséquent, on peut écrire :

$$\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{T}, \quad (2.7)$$

avec

$$\mathbf{T} = (T(P_1), \dots, T(P_q)) = (T_1, \dots, T_q), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_3 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice diagonale par bloc,} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{L}_i = \text{diag}(L_i(P_1), \dots, L_i(P_q)), \quad i = 1 \dots 3. \quad (2.10)$$

Comme  $\mathbf{l}$  contient des mesures effectuées par l'homme et avec des instruments de différents niveaux de précision, il est essentiel de modifier l'équation (2.7) pour tenir compte des erreurs de mesures. Elle devient alors :

$$\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{T} + \mathbf{n}, \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur des erreurs de mesure qui sont considérées en général d'espérances nulles, et indépendantes les unes des autres.

Lorsque les données  $\mathbf{X}$ , relatives aux coordonnées des points de mesure ou erreurs systématiques, sont à déterminer, une formulation plus générale du problème de collocation par moindres carrés est présentée [38]. Elle s'écrit comme suit :

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{T} + \mathbf{n}, \quad (2.12)$$

où le terme  $\mathbf{A}\mathbf{X}$  représente la partie déterministe des mesures  $\mathbf{l}$ . La matrice  $\mathbf{A}$  est appelée la matrice de sensibilité.

La détermination du potentiel perturbateur  $\mathbf{T}$  et du vecteur  $\mathbf{X}$  nécessite tout d'abord, la construction des matrices de covariance des différentes quantités mises en jeu. Ce travail est basé sur le calcul de la fonction covariance empirique intrinsèque aux mesures et le choix d'un modèle analytique adéquat qui l'approche. Nous verrons dans la suite de ce chapitre les démarches à suivre pour déduire les autres fonctions covariances (auto-covariance et cross-covariance).

Dans le problème de collocation par moindres carrés les fonctions auto-covariances sont notées :

$$\text{cov}(\Delta g(P), \Delta g(Q)) = C_{PQ}^{\Delta g \Delta g},$$

$$\text{cov}(\xi(P), \xi(Q)) = C_{PQ}^{\xi \xi},$$

$$\text{cov}(\eta(P), \eta(Q)) = C_{PQ}^{\eta \eta},$$

$$\text{cov}(T(P), T(Q)) = C_{PQ}^{TT},$$

$$\text{cov}(n, n) = C_{nn}.$$

Les cross-covariances dans notre problème sont :

$$\text{cov}(\Delta g(P), T(Q)) = C_{PQ}^{\Delta g T}, \quad (2.13)$$

$$\text{cov}(\Delta g(P), \xi(Q)) = C_{PQ}^{\Delta g \xi}, \quad (2.14)$$

$$\text{cov}(\Delta g(P), \eta(Q)) = C_{PQ}^{\Delta g \eta}, \quad (2.15)$$

$$\text{cov}(T(P), \xi(Q)) = C_{PQ}^{T \xi}, \quad (2.16)$$

$$\text{cov}(T(P), \eta(Q)) = C_{PQ}^{T \eta}. \quad (2.17)$$

### Solution du problème :

Ainsi, l'estimateur linéaire centré de  $T$  et vérifiant le principe du minimum de la méthode de collocation i.e.,

$$\hat{\mathbf{T}} = \text{argmin}(\mathbf{T}^t \mathbf{C}_{TT}^{-1} \mathbf{T} + \mathbf{n}^t \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n}),$$

est donné par l'expression :

$$\widehat{\mathbf{T}}(P) = \mathbf{C}_{T(P)l}(\mathbf{C}_{ll} + \mathbf{C}_{nn})^{-1}\mathbf{l},$$

et

$$\widehat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^t(\mathbf{C}_{ll} + \mathbf{C}_{nn})^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{C}_{ll}^{-1}\mathbf{l}$$

avec

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \vdots \\ \Delta g_q \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_q \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{T(P)l} = \begin{pmatrix} C_{PP_1}^{T\Delta g} \\ \vdots \\ C_{PP_q}^{T\Delta g} \\ C_{PP_1}^{T\xi} \\ \vdots \\ C_{PP_q}^{T\xi} \\ C_{PP_1}^{T\eta} \\ \vdots \\ C_{PP_q}^{T\eta} \end{pmatrix}^t,$$

$$\mathbf{C}_{nn} = \text{diag}(\sigma_{\Delta g}^2, \dots, \sigma_{\Delta g}^2, \sigma_{\xi}^2, \dots, \sigma_{\xi}^2, \sigma_{\eta}^2, \dots, \sigma_{\eta}^2),$$

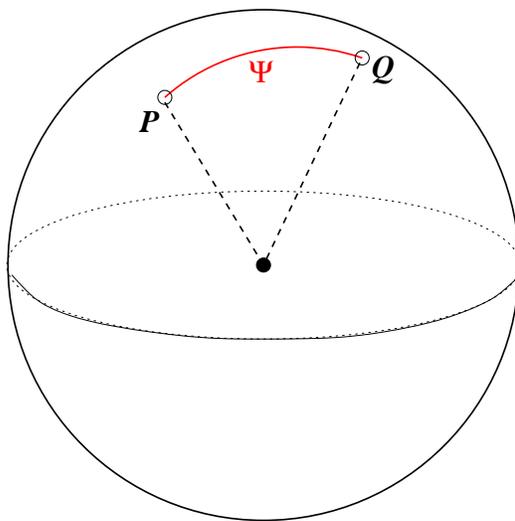
et

$$\mathbf{C}_{ll} = \begin{pmatrix} C_{P_1P_1}^{\Delta g\Delta g} & \dots & C_{P_1P_q}^{\Delta g\Delta g} & C_{P_1P_1}^{\Delta g\xi} & \dots & C_{P_1P_q}^{\Delta g\xi} & C_{P_1P_1}^{\Delta g\eta} & \dots & C_{P_1P_q}^{\Delta g\eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{P_1P_q}^{\Delta g\Delta g} & \dots & C_{P_qP_q}^{\Delta g\Delta g} & C_{P_1P_q}^{\Delta g\xi} & \dots & C_{P_qP_q}^{\Delta g\xi} & C_{P_1P_q}^{\Delta g\eta} & \dots & C_{P_qP_q}^{\Delta g\eta} \\ C_{P_1P_1}^{\xi\Delta g} & \dots & C_{P_1P_q}^{\xi\Delta g} & C_{P_1P_1}^{\xi\xi} & \dots & C_{P_1P_q}^{\xi\xi} & C_{P_1P_1}^{\xi\eta} & \dots & C_{P_1P_q}^{\xi\eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{P_1P_q}^{\xi\Delta g} & \dots & C_{P_qP_q}^{\xi\Delta g} & C_{P_1P_q}^{\xi\xi} & \dots & C_{P_qP_q}^{\xi\xi} & C_{P_1P_q}^{\xi\eta} & \dots & C_{P_qP_q}^{\xi\eta} \\ C_{P_1P_1}^{\eta\Delta g} & \dots & C_{P_1P_q}^{\eta\Delta g} & C_{P_1P_1}^{\eta\xi} & \dots & C_{P_1P_q}^{\eta\xi} & C_{P_1P_1}^{\eta\eta} & \dots & C_{P_1P_q}^{\eta\eta} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{P_1P_q}^{\eta\Delta g} & \dots & C_{P_qP_q}^{\eta\Delta g} & C_{P_1P_q}^{\eta\xi} & \dots & C_{P_qP_q}^{\eta\xi} & C_{P_1P_q}^{\eta\eta} & \dots & C_{P_qP_q}^{\eta\eta} \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Fonction covariance

### 2.4.1 La fonction covariance empirique

Dans la méthode de collocation par moindres carrés la présentation d'une covariance empirique a un rôle fondamental pour l'étude statistique des mesures fournies et le signal à déterminer. Pour déterminer un géoïde local, cette fonction est calculée à partir des mesures de gravité ou d'anomalies de gravité effectuées. D'autre part, elle a un caractère fondamental grâce aux informations qu'elle peut fournir, notamment les variations du champ potentiel et l'aplatissement de la région. Elle dépend uniquement de la distance séparant les points d'observation et non pas de leur localisation. Sur un plan la distance considérée entre deux points est la distance linéaire. Lorsqu'il s'agit d'une sphère la distance est l'angle de l'arc sphérique reliant les deux points.



**FIGURE 2.1** : La distance sphérique  $\psi_{PQ}$  entre deux points  $P(r, \theta, \phi)$  et  $Q(r', \theta', \phi')$ .

Sur la sphère unité, la fonction de covariance empirique des mesures des anomalies de gravité,  $C(\psi)$ , est donnée par :

$$C(\psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Delta g(\theta, \phi) \Delta g(\theta', \phi') \sin \theta d\theta d\phi d\alpha,$$

où  $\theta$  est l'angle polaire ( $\theta = 0$  au pôle nord),  $\phi$  est la longitude et  $\alpha$  est l'azimut [26]. Cependant, en pratique on ne dispose que d'un nombre limité de mesures des anomalies de gravité. Par conséquent la fonction covariance peut être calculée grâce aux formules de Kaula [55] :

- Si le domaine étudié est partagé en des sous domaines d'aires  $A_i$  correspondant chacun à une observation  $\Delta g_i$ , alors la fonction covariance empirique est donnée par :

$$C(\psi) = \frac{\sum_{i,j} A_i A_j \Delta g_i \Delta g_j}{\sum_{i,j} A_i A_j}. \quad (2.18)$$

- Si le domaine est partagé en des petits sous domaines d'aires identiques et si à chacun correspond une observation  $\Delta g_i$ , alors la fonction covariance empirique s'écrit :

$$C(\psi) = \frac{1}{N_c} \sum_{i,j} \Delta g_i \Delta g_j. \quad (2.19)$$

Notons que la somme est effectuée pour toutes les combinaisons des points d'observations  $P_i$  et  $P_j$  (correspondant respectivement aux observations  $\Delta g_i$  et  $\Delta g_j$ ) dont la distance sphérique  $\psi_{ij}$  est comprise entre  $\psi - \Delta\psi$  et  $\psi + \Delta\psi$ . La valeur de  $\Delta\psi$  dépend du pas de la grille utilisée et  $N_c$  est le nombre de combinaisons des points  $P_i$  et  $P_j$ .

## 2.4.2 Modèle analytique global de la fonction covariance

La fonction covariance des anomalies de gravité est considérée stationnaire et isotrope. Par conséquent, sa matrice est symétrique, définie positive.

La fonction covariance empirique telle qu'elle est trouvée ne satisfait pas à ces conditions, il s'en suit qu'il est impossible de l'utiliser dans les calculs. Un modèle analytique adapté aux observations et qui garantit la régularité des fonctions covariances est à déterminer. Selon un travail de Parzen [41], la détermination du potentiel perturbateur  $T$  aboutit à de bons résultats d'approximation lorsque sa covariance est déterminée empiriquement.

Dans la littérature, plusieurs modèles analytiques approchant la fonction  $C(\psi)$  ont été proposés. Nous citons par exemple :

- La fonction covariance Gaussienne :  $C_1(\rho) = C_0 e^{-A^2 \rho^2}$
  - La fonction covariance de Hirvonen :  $C_2(\rho) = \frac{C_0}{(1 + B^2 \rho^2)^2}$
  - La fonction covariance de Tscherning et Rapp [55] :
- $$C_3(\psi) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+2} P_n(\cos(\psi)), \text{ avec } c_n = \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)}.$$

$\psi$  est la distance sphérique entre les deux points  $P(r, \theta, \phi)$  et  $Q(r', \theta', \phi')$ ,  $P_n$  est le polynôme de Legendre (cf. annexe A.5.2),  $\rho = R_B \psi_{PQ}$  et  $R_B$  est le rayon de la sphère de Bjerhammar qui est la plus grande inscrite dans la terre. Sur cette sphère la convergence des séries d'harmoniques sphériques est garantie [38]. Les paramètres  $C_0$ ,  $A$  et  $B$  sont liés au terrain étudié et peuvent être déterminés empiriquement.

Dans notre travail nous avons choisi la fonction  $C_3$  comme modèle analytique. Dans la suite nous noterons par  $C(P, Q)$  la covariance analytique des anomalies de gravité, au lieu de  $C_3(\psi)$ , et par  $K(P, Q)$  la fonction covariance du potentiel perturbateur  $T$ , appelée aussi la fonction de covariance noyau. Cette dernière est plus utile que la covariance des anomalies de gravité. On a

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} k_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)). \quad (2.20)$$

La correspondance entre les variances de degré  $k_n$  et  $c_n$  est donnée par :

$$c_n = \left( \frac{n-1}{R_B} \right)^2 k_n.$$

### 2.4.3 Le principe de propagation de la covariance

Rappelons qu'au début de ce chapitre, nous avons défini la dépendance linéaire des quantités mesurées (les anomalies de gravité  $\Delta g$  et les composantes de la déviation de la verticale  $\xi$  et  $\eta$ ) du potentiel perturbateur  $T$ , de la manière suivante :

$$\Delta g = L_1 T = \left( -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) T, \quad (2.21)$$

$$\xi = L_2 T = \left( \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T \approx \left( \frac{1}{\gamma_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) T, \quad (2.22)$$

$$\eta = L_3 T = \left( -\frac{1}{\gamma r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) T \approx \left( -\frac{1}{\gamma_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) T. \quad (2.23)$$

où  $\gamma_0$  est la gravité normale moyenne.

Les matrices de covariance peuvent être, selon Moritz [38], calculées en utilisant le principe de propagation des covariances basé sur les deux propriétés suivantes :

- la linéarité de la fonction covariance du potentiel perturbateur  $K$ .
- les relations linéaires entre les quantités mesurées et le potentiel perturbateur.

En deux points de mesures  $P(r, \theta, \phi)$  et  $P'(r', \theta', \phi')$ , ce principe permet d'écrire les auto-covariances comme :

$$\begin{aligned} C(\Delta g_P, \Delta g_Q) &= C(L_1 T_P, L_1 T_Q) \\ &= L_1 L_1 K(P, Q) \\ &= \left( -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial r'} - \frac{2}{r'} \right) K(P, Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\xi_P, \xi_Q) &= C(L_2 T_P, L_2 T_Q) \\
&= L_2 L_2 K(P, Q) \\
&= \frac{1}{\gamma_0^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \theta'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\eta_P, \eta_Q) &= C(L_3 T_P, L_3 T_Q) \\
&= L_3 L_3 K(P, Q) \\
&= \frac{1}{\gamma_0^2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \phi'} \right),
\end{aligned}$$

$$C(N_P, N_Q) = \frac{1}{\gamma_0^2} K(P, Q) \text{ (grâce à la formule de Brun),}$$

et les cross-covariances comme :

$$\begin{aligned}
C(T_P, \Delta g_Q) &= C(T_P, L_1 T_Q) \\
&= L_1 K(P, Q) \\
&= -\frac{\partial K(P, Q)}{\partial r} - \frac{2}{r} K(P, Q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(T_P, \xi_Q) &= C(T_P, L_2 T_Q) \\
&= L_2 K(P, Q) \\
&= \frac{1}{\gamma_0 r'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \theta'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(T_P, \eta_Q) &= C(T_P, L_3 T_Q) \\
&= L_3 K(P, Q) \\
&= -\frac{1}{\gamma_0 r' \sin \theta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \phi'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\Delta g_P, \xi_Q) &= C(L_1 T_P, L_2 T_Q) \\
&= L_1 L_2 K(P, Q) \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \left( -\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \left( \frac{1}{r'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \theta'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\Delta g_P, \eta_Q) &= C(L_1 T_P, L_3 T_Q) \\
&= L_1 L_3 K(P, Q) \\
&= \frac{1}{\gamma_0} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \left( \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \phi'} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(\xi_P, \eta_Q) &= C(L_2 T_P, L_3 T_Q) \\
&= L_2 L_3 K(P, Q) \\
&= -\frac{1}{\gamma_0^2 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r' \sin \theta'} \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \phi'} \right), \\
C(N_P, \Delta g_Q) &= \frac{1}{\gamma_0} C(T_P, \Delta g_Q), \\
C(N_P, \xi_Q) &= \frac{1}{\gamma_0} C(T_P, \xi_Q), \\
C(N_P, \eta_Q) &= \frac{1}{\gamma_0} C(T_P, \eta_Q).
\end{aligned}$$

**Remarque 3.** La fonction covariance  $K(P, Q)$  dépend directement de  $r, r'$  et  $\psi$  et indirectement de  $\theta, \theta', \phi$  et  $\phi'$ . Ses dérivées sont effectuées de la manière suivantes :

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial K}{\partial \phi} = \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta'} = \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \theta'}, \quad \frac{\partial K}{\partial \phi'} = \frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi'}. \quad (2.25)$$

#### 2.4.4 Covariance locale

Les fonctions  $C(P, Q)$  et  $K(P, Q)$  données précédemment dans (2.20), correspondent aux formes globales (sur toute la sphère) des fonctions covariances analytiques. Du fait que notre étude n'est effectuée que sur une zone limitée de la terre, il est indispensable d'utiliser un modèle local. D'après les travaux de Tscherning dans [55], les fonctions covariances des anomalies de gravité et du potentiel perturbateur peuvent être décomposées comme suit :

$$\begin{aligned}
C(P, Q) &= \alpha \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n^{(1)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)) + \\
&\quad \sum_{n=n_{max}+1}^{+\infty} c_n^{(2)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)),
\end{aligned}$$

et

$$K(P, Q) = \alpha \sum_{n=0}^{n_{max}} k_n^{(1)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)) + \sum_{n=n_{max}+1}^{+\infty} k_n^{(2)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)).$$

avec

$$c_n^{(2)} = \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)},$$

$$c_n^{(1)} = \left( \frac{GM}{R_m} \right)^2 \sum_{m=0}^{n_{max}} (\sigma^2(\Delta C_{nm}) + \sigma^2(\Delta S_{nm}))$$

qui sont les variances des erreurs associées au modèle du géoïde terrestre EGM96 [2]; Elles sont disponibles jusqu'à l'ordre 360,

$$k_n^{(\cdot)} = \left( \frac{R_B}{n-1} \right)^2 c_n^{(\cdot)},$$

$\alpha$  est une constante positive inférieure à 1,

$A$  est une constante positive en  $\text{mgal}^2$ ,

et  $n_{max}$  est un entier qui sert avec les constantes  $A$  et  $B$  pour adapter le modèle de covariance choisi à la région étudiée. Les covariances locales (correspondant au terrain étudié) des anomalies de gravité et du potentiel perturbateur sont données par les restes des deux séries  $C(P, Q)$  et  $K(P, Q)$ .

## 2.5 La technique de “retrait-restauration”

### 2.5.1 Retrait

Dans les applications numériques de la méthode de collocation, il est nécessaire de “réduire” les mesures des anomalies de gravité pour qu’elles aient un caractère local. La réduction est effectuée en soustrayant les anomalies du modèle EGM96 donnée par l’équation (1.18) et les effets de topographie, des anomalies de gravité observées [18, 30]. Ainsi :

$$\Delta g = \Delta g_{obs} - \Delta g_{EGM96} - \Delta g_{top}.$$

### 2.5.2 Restauration

La restauration est effectuée au niveau des hauteurs du géoïde trouvées à partir des anomalies de gravité réduites. Il s'agit de rajouter les valeurs des hauteurs du géoïde associées au modèle EGM96 aux hauteurs trouvées par la méthode de de collocation [30]. Ainsi

$$N = N_{predit} + N_{EGM96} + N_{top}.$$

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les étapes de l'application de la méthode de collocation par moindres carrés pour calculer un signal stochastique entièrement déterminé par sa covariance (le potentiel perturbateur  $T$ ), à partir d'un mélange d'observations hétérogènes dépendant de ce signal. Le chapitre suivant serait consacré à l'étude d'un exemple numérique permettant la visualisation de la théorie de moindres carrés pour la détermination des hauteurs d'un géoïde.

# Chapitre 3

## Résultats numériques

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous essayons de calculer les hauteurs du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence GRS80 d'une région donnée. Nous utilisons la méthode de collocation par moindres carrés présentée dans le chapitre précédent. Les mesures que nous exploitons sont celles des anomalies de gravité qui correspondent au Liban. Tout d'abord, nous construisons la covariance empirique associée à ces mesures. Ensuite, nous approchons cette fonction par le modèle présenté par Tscherning et Rapp dans [55]. Puis, nous construisons les matrices des cross-covariance et d'auto-covariance du problème, qui permettent de donner finalement un vecteur résultat contenant les hauteurs du géoïde. Cependant, il est important de signaler que les tests que nous menons ont l'objectif de valider nos codes numériques écrits en langage Matlab [36], et peuvent être différents des résultats réels du géoïde libanais. Ceci est dû au nombre limité des observations et des informations fournies. Les résultats que nous trouvons montrent néanmoins que la méthode donnerait de très bons résultats avec un ensemble d'observations réelles et plus complet.

## 3.2 Fonction covariance

### 3.2.1 Fonction covariance empirique

La première étape de la méthode de collocation par moindres carrés est le calcul de la fonction covariance empirique à partir des mesures de gravité disponibles. La formule que nous avons utilisée est (2.19), avec  $\Delta\psi = 5$  minutes d'arcs.

### 3.2.2 Fonction covariance analytique

La deuxième étape, lors de l'application de la méthode de collocation par moindres carrés, est la détermination de l'auto-covariance des anomalies de gravité. Ensuite, la fonction de cross-covariance entre les anomalies de gravité et les hauteurs du géoïde est déterminée. La fonction auto-covariance globale des anomalies de gravité est donnée par :

$$C(P, Q) = \alpha \sum_{n=0}^{n_{max}} c_n^1 \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)) + \sum_{n=n_{max}+1}^{+\infty} \sigma_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)),$$

où  $R$  est le rayon moyen de la Terre,  $\psi$  est la distance sphérique entre  $P$  et  $Q$ ,  $r$  et  $r'$  sont les distances radiales de  $P$  et  $Q$  respectivement, et  $\sigma_n$  est donné par :

$$\sigma_n = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n-3)} \left( \frac{R_B}{R} \right)^2,$$

avec  $R_B$  est le rayon de la sphère de Bjerhammer à l'intérieur de laquelle la fonction covariance est harmonique,  $A$  est une constante en  $(m/s)^4$ , et  $B$  est un entier. Les paramètres  $A, B, \alpha, R_B$  et  $n_{max}$  sont ajustés de manière que la covariance analytique choisie approche bien la covariance empirique. Les coefficients  $\sigma_n$  désignent les coefficients du modèle géopotential qui approche

d'une manière optimale le champ de gravité du Liban. Dans le cadre de ce travail, le modèle EGM96, développé jusqu'à l'ordre 360, est utilisé. Pour retrouver les paramètres recherchés, nous avons utilisé le programme COVFIT de la collection GRAVSOFIT écrit par Tscherning. Il est basé sur l'ajustement des paramètres par moindres carrés pour que le modèle analytique et le modèle empirique s'accordent sur les trois quantités fondamentales suivantes [38] :

- La valeur de la variance des observations de gravité donnée par :

$$C_0 = C(\psi = 0),$$

- La distance sphérique  $\tau$  associée à la moitié de la variance, appelée distance de corrélation :

$$C(\tau) = \frac{C_0}{2},$$

- Le paramètre relié à la courbure de la fonction de covariance  $\kappa$ , en  $\psi = 0$  et donné par :

$$\chi = \kappa \frac{\tau^2}{C_0},$$

et si on note par  $G_0$  la variance du gradient horizontal des observations, on peut écrire

$$\chi = \tau^2 \frac{G_0}{C_0}.$$

En pratique, lorsque le domaine étudié est petit (relativement à la dimension de la Terre) les premiers termes d'un développement en harmoniques sphériques sont identiques en tout point du domaine et par suite ils n'ont pas d'influence sur le problème. On considère seulement les termes de petites longueurs d'ondes dans le développement à partir d'un certain rang  $n_{max}$ . Ceci explique l'expression de la covariance analytique locale qui ne contient que la deuxième partie de ce développement en harmoniques sphériques du modèle de covariance choisi.

Pour simplifier le calcul de la covariance on procède comme suit :

- On reformule la fonction covariance analytique de la façon suivante :

$$C(P, Q) = \sum_{n=0}^{n_{max}} (\alpha c_n^{(1)} - \sigma_n) s^{n+1} P_n(\cos \psi) + \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n s^{n+1} P_n(\cos \psi),$$

- On calcule séparément les deux nouvelles parties de la fonction covariance.

La première partie de la covariance est une somme finie des termes d'une série de Legendre. Nous utilisons une méthode générale pour le calcul de sommes finies de polynômes orthogonaux dont les termes sont reliés par une formule de récurrence, comme le sont les polynômes de Chebyshev, de Legendre, etc [55]. C'est la méthode de Clenshaw introduite en 1955 dans [15]. Les détails de l'application de cette méthode pour les sommes finies des séries de Legendre et leurs dérivées sont dans A.5.1.

La deuxième quantité, qui est une somme infinie, est déduite à partir de la décomposition de la fonction  $\sigma_n$  en éléments simples de la façon suivante :

$$\sigma_n = \frac{1}{(B+1)(B+2)} \left( \frac{B+1}{n-2} - \frac{B+2}{n-1} + \frac{1}{n+B} \right)$$

L'expression de la fonction covariance analytique peut se décomposer en sommes de séries plus simples à calculer. En fait, notons par :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^{n+1} P_n(t) = s \sum_{n=0}^{+\infty} s^n P_n(t) = \frac{s}{\sqrt{1-2st+s^2}} \quad (3.1)$$

$$F_i(t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+i} s^{n+1} P_n(t) & \text{pour } i > 0 \\ \sum_{n=-i+1}^{+\infty} \frac{1}{n+i} s^{n+1} P_n(t) & \text{pour } i \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$L = \sqrt{1-2st+s^2}, \quad M = 1 - L - st, \quad \text{et } N = 1 + M - st. \quad (3.3)$$

avec  $s = \frac{R_B}{r_P r_Q}$  et  $t = \cos \psi$ .

Il en découle les résultats suivants :

$$F_{-2} = s \left( M \left( \frac{3ts + 1}{2} \right) + s^2 \left( P_2(t) \ln \frac{2}{N} + \frac{1-t^2}{4} \right) \right), \quad (3.4)$$

$$F_{-1} = s \left( M + ts \ln \frac{2}{N} \right), \quad (3.5)$$

$$F_0 = s \ln \frac{2}{N}, \quad (3.6)$$

$$F_1 = \ln \left( 1 + \frac{2s}{1-s+L} \right). \quad (3.7)$$

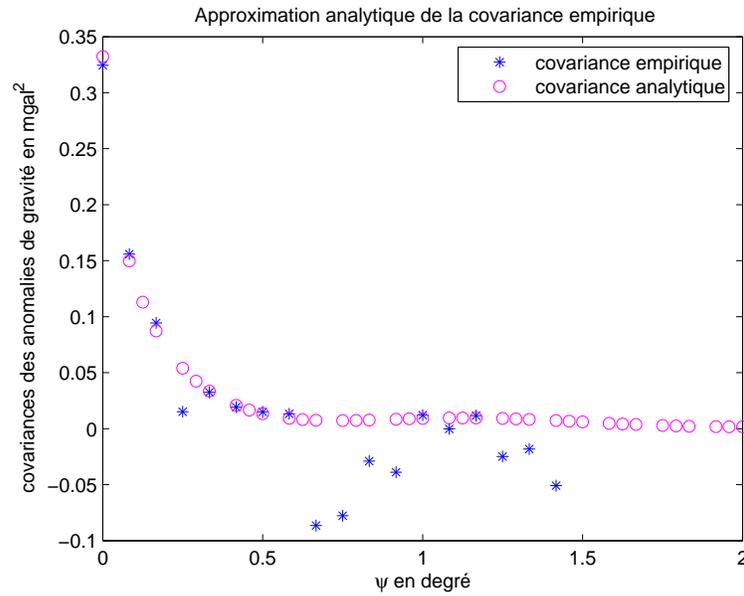
Par conséquent, nous pouvons écrire

$$C(P, Q) = \frac{As}{(B+2)} \left( (B+1)F_B - \frac{s}{B} - \frac{s^2 t}{B+1} - \frac{s^3 P_2(t)}{B+2} + F_{-2} \right).$$

Les paramètres de  $C(P, Q)$  sont estimés selon le choix des valeurs  $n_{max} = 360$ , et  $B = 4$ . Le programme COVFIT de la collection GRAVSOFT de Tscherning a abouti aux résultats suivants :

$A$	411 mgal <sup>2</sup>
$\alpha$	0.000917
$R_B - R_m$	-405.679 m
$s$	0,999936324

Dans Fig. 3.1 nous représentons la covariance empirique et le modèle analytique de la covariance. Nous pouvons remarquer que la covariance analytique approche bien la fonction empirique sauf en quelques points où la fonction empirique est négative.



**FIGURE 3.1** : Approximation de la fonction covariance empirique par le modèle analytique de Tscherning. La valeur de  $B$  est choisie égale à 4, et les autres paramètres sont respectivement  $A = 411$ ,  $\alpha = 0.000917$  et  $R_B = 6370,594e03$ .

### 3.2.3 Principe de propagation des covariances

La principe de propagation de covariances (2.21) est utilisé pour déterminer les autres fonctions covariances nécessaires pour la résolution du problème. Dans l'exemple que nous traitons dans ce chapitre, une fois trouvée la fonction covariance des anomalies de gravité il nous reste à déterminer la fonction covariance du potentiel perturbateur (auto-covariance) et la cross-covariance "potentiel perturbateur–anomalies de gravité". Ce sont en général des séries du polynôme de Legendre  $P_n$ , de  $P'_n$  et de  $P''_n$ . La fonction auto-covariance du potentiel perturbateur est donnée par les expressions suivantes :

$$K(P, Q) = C(T_P, T_Q) = \alpha \sum_{n=0}^{n_{max}} k_n^{(1)} \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)) + \sum_{n=n_{max}+1}^{+\infty} \left( \frac{R_B}{n-1} \right)^2 \sigma_n \left( \frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right)^{n+1} P_n(\cos(\psi)), \quad (3.8)$$

$$K(P, Q) = \frac{AR^2}{(B+1)(B+2)} [(B+1)F_{-2} - (B+2)(F_{-1} - s^3 P_2(t)) + F_B - \frac{s}{B} - \frac{-s^2 t}{B+1} - \frac{s^3 P_2(t)}{B+2}]. \quad (3.9)$$

Par conséquent,

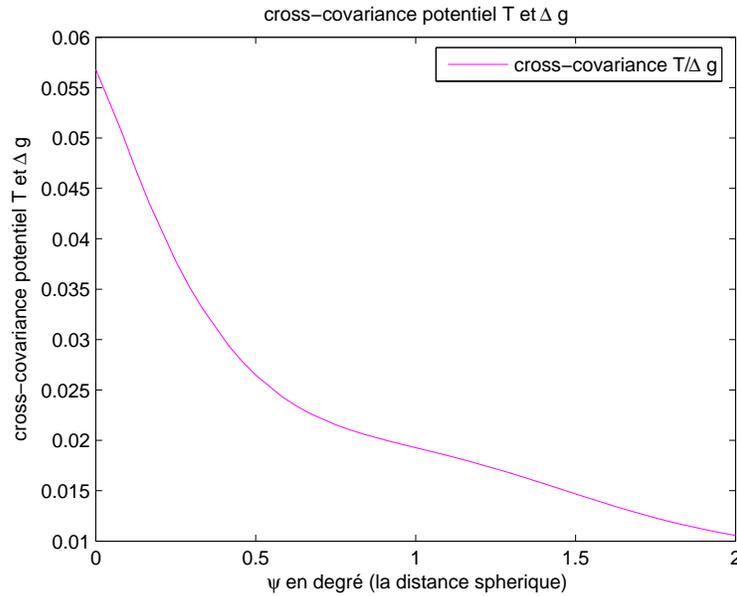
$$C(N_P, N_Q) = \frac{1}{\gamma_0^2} K(P, Q).$$

La fonction cross-covariance est donnée par :

$$C(N_P, \Delta g_Q) = -\frac{\partial K(P, Q)}{\partial r} - \frac{2}{r} K(P, Q).$$

Les fonctions de cross-covariance et d'auto-covariance du problème sont données dans Fig. 3.2 et 3.3

**Remarque 4.**

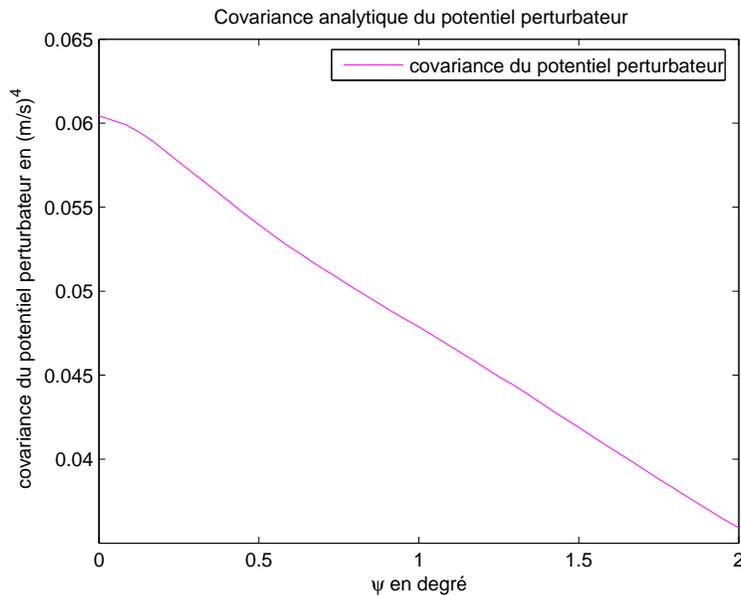


**FIGURE 3.2** : La fonction cross-covariance “anomalies de gravité-hauteur du géoïde”.

- *Parce que nous ignorons si les mesures que nous traitons sont réduites ou non, nous n’appliquons pas la technique du “retrait-restauration” que nous avons définie dans le chapitre précédent.*
- *Dans le cas où les mesures étudiées sont non réduites, les anomalies de gravité et les hauteurs du géoïde associées au modèle EGM96 sont calculées par la méthode de Clenshaw (voir A.5.1).*
- *Les effets de topographie nécessitent la connaissance du modèle numérique du terrain (MNT).*

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié un exemple de calcul du géoïde local disposant de quelques mesures d’anomalies de gravité. Nous rappelons que

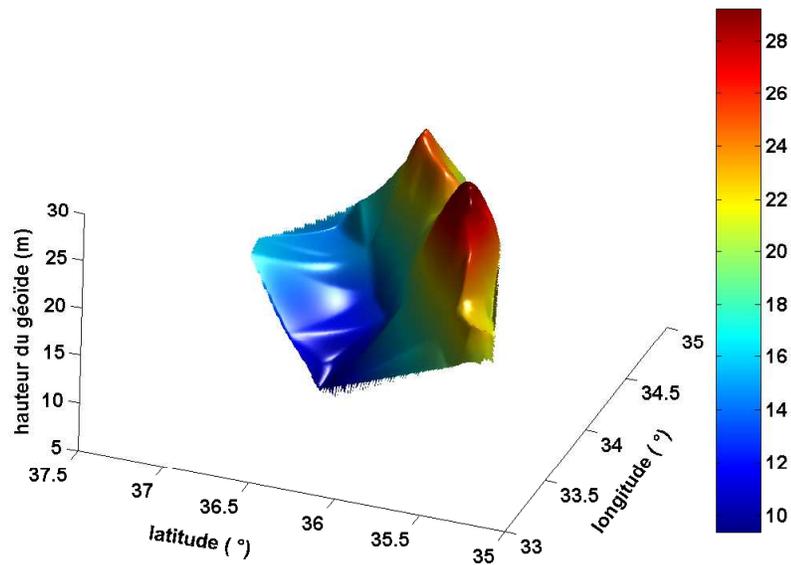


**FIGURE 3.3** : La fonction auto-covariance “hauteur du géoïde-hauteur du géoïde”.

cette première partie a été consacrée à la réalisation du géoïde Tunisien, mais la non disponibilité de fichiers de mesures de gravité, d’erreur de mesures et d’informations géodésiques suffisantes nous a poussé à étudier un exemple simple de mesures d’anomalies de gravité (celui du Liban) fournies sur le web pour prédire les hauteurs correspondantes du géoïde.

Malgré le problème de manque de mesures pour nos tests sur cette partie, il est important d’indiquer que cette partie nous a permis de construire une plate-forme de connaissances en géodésie physique permettant d’étudier n’importe quel problème de mathématiques appliquées dans ce domaine. En particulier, le problème de calcul du géoïde local dès qu’une ou plusieurs types de mesures sont disponibles.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions un autre problème classique de géodésie physique. C’est celui de la détermination d’un ensemble



**FIGURE 3.4** : Les hauteurs du géoïde du Liban trouvées par la méthode de collocation. L'erreur considérée sur les mesures des anomalies de gravité est égale à 2 mgal.

discret de points-masses enterrés générant un potentiel équivalent au potentiel gravitationnel terrestre.

## Deuxième partie

### Résolution d'un problème inverse local en géodésie physique



# Chapitre 4

## Position du problème

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse théorique du problème de points-masses en géodésie. Il s'agit de déterminer une distribution de points-masses enterrés qui génèrent un potentiel donné. L'étude de ce problème est d'importance marquante en géodésie. Elle aide à identifier facilement les zones où il y a de grands écarts de densité de masses topographiques. Par conséquent, elle peut servir comme évaluation de calculs de géoïdes via d'autres méthodes. Ce problème a été étudié par Barthelmes dans [6, 14, 28]. Deux classes particulières de ce problème ont fait couler beaucoup d'encre dans la littérature.

- **Les points-masses distribués sur une grille régulière** : Dans cette approche les positions des points-masses sont fixes. Les seules inconnues sont les valeurs des masses. Dans ce cas l'avantage est que le problème mathématique à résoudre est linéaire. Par conséquent son inversion comporte peu de difficultés numériques. Parmi les travaux qui utilisent cette approche, on cite celui Ihde [28].

- **Les points-masses sont à positions inconnues** : Cette classe consiste à résoudre un problème non linéaire qui se résout itérativement sous contraintes. C'est un problème plus compliqué que le premier et qui a plus d'importance dans la pratique. Dans la littérature ce problème a été étudié par Barthelmes dans [8].

D'autre part la détermination des points-masses est un problème inverse en géodésie physique associé au problème direct qui se formule par : Étant donnée une densité continue ou discrète de masse, calculer le potentiel résultant. Le problème inverse est décrit par Stokes comme étant un problème inverse mal posé dans le sens de Hadamard à cause de la non unicité de la solution [26]. Cependant, sous des contraintes supplémentaires, il est possible de trouver une distribution équivalente de masses ponctuelles discrètes placées sous la surface de la Terre dont le potentiel qu'elle génère approche le champ gravitationnel mesuré dans la région d'intérêt.

Nous rappelons que le problème inverse est dit bien posé au sens de Hadamard quand il vérifie les trois conditions suivantes :

- il existe au moins une solution.
- la solution est unique.
- la solution dépend continûment des données.

Les stratégies utilisées pour résoudre le problème de points-masses varient d'une étude à une autre. Dans notre travail, nous nous intéressons à la détermination d'une distribution de points-masses répartie sur une grille régulière en surface. Les inconnues du problème sont les masses et les profondeurs. Si la région étudiée est la Terre entière, la base des harmoniques sphériques peut être utilisée pour représenter les potentiels (réel et celui des points-masses) pour formuler le problème inverse. Tandis que, si seule une zone limitée de la Terre est considérée, la base des harmoniques sphériques

n'est plus orthogonale. Par conséquent, cette base n'est pas appropriée pour le problème local de la détermination des points-masses. L'issue de ce problème consiste, tout d'abord, à trouver une autre base localisée dans la région étudiée. Ensuite, les potentiels (gravitationnel et approché) seront représentés relativement à cette base, afin que le problème de détermination de la distribution de points-masses soit formulé comme un problème inverse. Nous notons que la recherche d'une base locale était étudiée pour la première fois par Slepian, Pollak et Landau pour un intervalle de la droite réelle et pour une zone rectangulaire du plan [31, 32, 49, 50]. Sur la sphère, la construction d'une base localisée de Slepian est ensuite effectuée en résolvant un problème de concentration spatio-spectral sur la sphère unité. C'est un problème de valeurs propres, où chaque valeur exprime une mesure de la concentration sur la région considérée. Dans le cas où cette région est une calotte sphérique axisymétrique ou formée de deux calottes polaires [16], l'opérateur de projection spatio-spectrale commute avec l'opérateur de Sturm-Liouville. Par conséquent, le problème est ramené à trouver les vecteurs propres d'une matrice tridiagonale. Ce chemin permettra une précision extrême des résultats trouvés, même si l'aire de la région en question ou le nombre de Shannon, est très grand. Cependant lorsque la région étudiée possède une géométrie arbitraire, le problème de valeur propre est résolu directement car l'opérateur spatio-spectral et l'opérateur de Sturm-Liouville ne commutent pas. Ainsi une famille de fonctions orthogonales et à bande limitée dont leurs énergies sont concentrées sur une région de la sphère unité est construite.

La construction de la base de Slepian a favorisé la résolution de plusieurs problèmes dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées et de physique, notamment la géophysique [5, 16, 34], la cosmologie [23], le traitement d'image [13, 35], et le traitement du signal [17, 40].

L'originalité de notre approche consiste en l'application de la théorie des fonctions localisées dans la résolution de notre problème inverse, afin de simplifier les calculs et étudier des domaines limités de la sphère.

Ce chapitre comporte trois paragraphes. Dans le premier nous abordons la formulation de notre problème inverse sur la Terre entière. Nous utilisons les développements en harmoniques sphériques des deux potentiels -mesuré et approché- pour aboutir vers la fin de ce paragraphe à écrire le problème de minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés non linéaire. Dans le second paragraphe nous proposons une formulation du problème associée à une zone limitée de la Terre. Dans le troisième paragraphe nous présentons le problème de concentration spatio-spectral l'origine de la construction d'une base localisée sur un sous domaine de la sphère.

## 4.2 Formulation du problème inverse sur la Terre entière

La détermination de la densité de masse à l'intérieur de la Terre,  $\rho$ , est un problème inverse en gravimétrie mal posé au sens de Hadamard à cause de la non unicité de sa solution. En fait, il correspond à un opérateur intégral de Fredholm de première espèce dont le noyau est l'orthogonal de  $\text{Harm}(\mathbb{E})$  dans  $L^2(\mathbb{E})$ .  $\mathbb{E}$  est la boule unité et  $\text{Harm}(\mathbb{E})$  est l'ensemble de fonctions harmoniques sur  $\mathbb{E}$  [37]. Le caractère mal posé de notre problème inverse persiste, même si nous restreignons notre opérateur sur l'espace  $\text{Harm}(\mathbb{E})$ . En effet, son inverse reste discontinue et ce fait peut inhiber la stabilité de la solution.

Dans le problème des points-masses, la densité à l'intérieur de la Terre,  $\rho$

est approchée par la somme finie,

$$\tilde{\rho} = \sum_{k=1}^N m_k \delta_{\mathbf{x}_k}, \quad (4.1)$$

où  $m_k$  et  $\mathbf{x}_k$  sont respectivement la masse et la position du  $k$ -ième point masse.  $\delta$  est la distribution de Dirac.

Le problème inverse sur l'ensemble de la Terre est de déterminer les masses  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)^t$  et les positions  $\xi = (r_1, \theta_1, \phi_1, \dots, r_N, \theta_N, \phi_N)^t$  des points-masses qui génèrent un potentiel équivalent au potentiel gravitationnel terrestre. C'est à dire, l'écart entre les deux potentiels soit minimal.

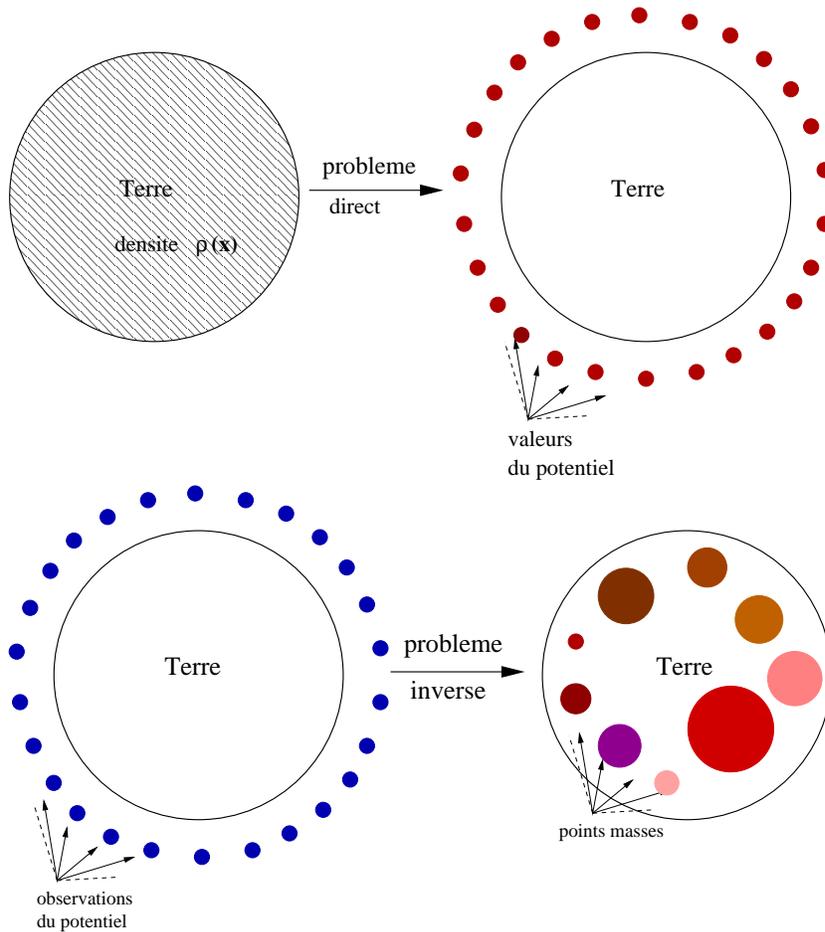


FIGURE 4.1 : Les deux problèmes, direct et inverse.

On suppose que les co-latitudes et longitudes des points-masses  $(\theta_k, \phi_k)$  sont distribuées régulièrement sur une grille fixe de la sphère unité. Les inconnues du problème sont, par suite, les masses  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N)$  de rayons  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ . L'approche la plus directe est de fixer le nombre des points-masses et d'utiliser un algorithme de minimisation non linéaire pour minimiser l'écart entre les deux potentiels (gravitationnel et composite) qui s'écrit sous la forme d'une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^N$  par :

$$F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} |V(\tilde{R}, \theta, \phi) - \tilde{V}(\tilde{R}, \theta, \phi)|^2 d\sigma,$$

Rappelons que relativement à la base orthonormée des harmoniques sphériques, les deux potentiels (gravitationnel et celui des points-masses) sont deux fonctions harmoniques à l'extérieur de la Terre et ils s'écrivent (respectivement) sous les formes et (1.10) (1.8), c'est à dire sous les formes suivantes :

$$V(P) = \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \right), \quad (4.2)$$

$$\tilde{V}(P) = \sum_{k=1}^N \frac{Gm_k}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_k^n \frac{4\pi}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(\theta_k, \phi_k) \bar{Y}_{nm}(\theta, \phi). \quad (4.3)$$

La formulation du problème de minimisation peut s'écrire sous la forme :

$$\min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{3N}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - A(\boldsymbol{\xi})\mathbf{m}\|^2, \quad (4.4)$$

Les inconnues du problème sont alors les masses  $\mathbf{m}$  et les positions  $\boldsymbol{\xi}$  qui minimisent  $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m})$ .  $\mathbf{b}$  est un vecteur de taille infinie et  $A(\boldsymbol{\xi})$  est une matrice fonction de  $\boldsymbol{\xi}$  à  $N$  colonnes et une infinité de lignes.

Les coefficients de  $\mathbf{b}$  et  $A(\boldsymbol{\xi})$  sont :

$$b_{I(n,m)} = Mc_{nm} \left( \frac{a}{\tilde{R}} \right)^n, \quad I(n,m) = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

$$A_{I(n,m)k}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{4\pi}{(2n+1)} \left( \frac{r_k}{\tilde{R}} \right)^n Y_{nm}(\theta_k, \phi_k), \quad I(n,m) = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

avec  $I(n,m) = n(n+1) + m + 1$ .

Les positions des masses sont choisies de façon que la matrice  $A(\boldsymbol{\xi})$  soit de plein rang. Nous verrons plus tard qu'il existe une distance minimale à respecter entre deux points-masses voisins pour que la matrice  $A$  soit de plein rang. Afin de résoudre le problème de minimisation (5.7), nous utilisons un algorithme qui résout itérativement et en alternance, un problème linéaire ( $\mathcal{P}_m$ ), dont les inconnues sont les masses  $\mathbf{m}$  (supposées positives) et un problème non linéaire ( $\mathcal{P}_\xi$ ), dont les inconnues sont les positions  $\boldsymbol{\xi}$ .

Ainsi, nous définissons

- (i) Le premier problème ( $\mathcal{P}_m$ ), dans lequel nous supposons que les positions  $\boldsymbol{\xi}$  sont fixées et les masses sont inconnues, i.e.,

$$(\mathcal{P}_m) \quad \min_{m_k \geq 0, k=1, \dots, N} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - A(\boldsymbol{\xi})\mathbf{m}\|^2.$$

C'est un problème de moindres carrés, linéaire et avec des contraintes de positivité sur les masses. La résolution de ce problème peut être effectuée en utilisant l'algorithme de Lawson et Hanson (NNLS) pour la résolution des problèmes aux moindres carrés à contraintes de positivité [33]. Notons par  $\hat{\mathbf{m}}$  la solution de ce problème.

- (ii) Le deuxième problème ( $\mathcal{P}_\xi$ ), où nous récupérons les masses solutions  $\hat{\mathbf{m}}$  de ( $\mathcal{P}_m$ ). Les inconnues sont les positions  $\boldsymbol{\xi}$ , i. e.,

$$(\mathcal{P}_\xi) \quad \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - A(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathbf{m}}\|^2.$$

Ce problème est non linéaire en  $\boldsymbol{\xi}$ . La solution satisfait les conditions d'optimalité suivantes,

$$(\nabla F(\boldsymbol{\xi}))_i = 0$$

$$\text{où, } (\nabla F(\boldsymbol{\xi}))_i = -(\mathbf{b} - A(\boldsymbol{\xi})\hat{\mathbf{m}})^T \frac{\partial A(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} \hat{\mathbf{m}}.$$

### 4.3 Formulation du problème inverse sur une zone limitée de la Terre

Sur une zone limitée de la Terre  $\Omega$ , définissons le produit scalaire,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\theta, \phi) g(\theta, \phi) d\sigma.$$

Les fonctions de la base des harmoniques sphériques ne sont plus  $L^2$ -orthogonales pour ce produit. Par conséquent, le calcul des coefficients de la matrice  $A(\boldsymbol{\xi})$  et du vecteur  $\mathbf{b}$  devient plus compliqué. Pour contourner ce problème, nous nous proposons d'effectuer la résolution de notre problème localement par analogie au problème global sur toute la sphère. Notre technique est appliquée en ces trois étapes :

- Détermination de la base localisée ou de Slepian associée au domaine géographique étudié. Sur la sphère la détermination de cette base nécessite la résolution du problème de concentration spatio-spectral.
- Formuler le problème des points-masses relativement à cette base. Il s'agit de projeter le potentiel gravitationnel terrestre représenté initialement dans la base des harmoniques sphériques dans la nouvelle base concentrée dans le domaine étudié.
- Minimiser l'écart entre les deux potentiels : le potentiel réel et le potentiel généré par les points-masses.

### 4.3.1 Problème de concentration de Slepian

Afin d'acquérir une bonne compréhension du problème de concentration spatio-spectral sur la sphère, nous allons commencer par introduire le problème de concentration unidimensionnel temps-fréquence continu-continu.

### 4.3.2 Préliminaires

La relation entre une fonction de temps  $f(t)$  et sa transformée de Fourier est donnée par [46] :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

**Définition 2 (Fonction à bande limitée)** Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . Si la transformée de Fourier  $\hat{f}$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[-W, W]$  on dit que  $f$  est à bande limitée  $W$ . L'ensemble  $\mathcal{S}_W = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \text{Supp}(\hat{f}) \subset [-W, W]\}$  des fonctions à bande limitée, est appelé l'espace de Paley-Wiener [54].

**Définition 3 (Fonction limitée en espace)** Une fonction  $h$  est limitée en espace s'il existe un intervalle  $I$  à l'extérieur duquel elle est nulle.

L'ensemble de toutes les fonctions limitées en espace contenues strictement dans l'intervalle  $I$  est noté  $\mathcal{S}_I = \{h; h = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{I\}\}$ .

### 4.3.3 Problème de concentration de Slepian unidimensionnel

La théorie a démarré avec le problème proposé par Slepian et Pollak [51], qui consiste à concentrer d'une manière optimale, un signal  $g(t)$  à bande limitée, dans un intervalle de temps  $|t| \leq T$ , et dont une transformée de Fourier  $G(\omega)$  qui s'annule pour  $|\omega| > W$ . Il s'avère que d'après le principe

d'incertitude de Heisenberg, aucun signal à bande limitée  $g(t)$  ne peut être complètement concentré sur un intervalle fini. Un tel signal est choisi de façon qu'il admette le minimum d'énergie à l'extérieur de l'intervalle choisi. C'est à dire, il vérifie :

$$\lambda = \frac{\int_{-T}^T g^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt} = \text{maximum.} \quad (4.8)$$

En remplaçant  $g(t)$  par son expression en fonction de sa transformée de Fourier (4.7), on établit le problème variationnel équivalent au problème (4.8) et d'inconnue  $G(w)$  –la transformée de Fourier de  $g(t)$ – et donné par :

*Trouver la fonction  $G(w)$  vérifiant l'équation intégrale suivante :*

$$\int_{-W}^W \frac{\sin W(\omega - \omega')}{\pi(\omega - \omega')} G(\omega') d\omega' = \lambda G(\omega), \quad |\omega| \leq W. \quad (4.9)$$

Ce problème peut être énoncé autrement. En effet, nous pouvons essayer de chercher les fonctions  $h(t)$  limitées en espace, dont la transformée de Fourier est concentrée dans un intervalle  $[-W, W]$ . Ainsi, le problème de concentration de Slepian équivalent peut s'écrire :

*Trouver la fonction  $H(w)$  vérifiant*

$$\lambda = \frac{\int_{-W}^W H^2(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} H^2(\omega) d\omega} = \text{maximum.} \quad (4.10)$$

La solution de ce problème est la transformée de Fourier associée aux fonctions  $h(t)$  qui sont solutions de l'équation aux valeurs propres :

$$\int_{-T}^T \frac{\sin W(t - t')}{\pi(t - t')} h(t') dt' = \lambda h(t), \quad |t| \leq T. \quad (4.11)$$

Notons que les deux équations (4.8) et (4.10) possèdent les mêmes valeurs propres  $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$ , associées aux mêmes fonctions propres en espace  $a_1(t), a_2(t), \dots$  et  $h_1(t), h_2(t), \dots$  qui coïncident sur l'intervalle  $|t| \leq T$ . Les transformées de Fourier (dites aussi spectres) propres associées à ces

fonctions propres notées  $G_1(\omega), G_2(\omega), \dots$  et  $H_1(\omega), H_2(\omega), \dots$  coïncident à leurs tours sur l'intervalle  $|\omega| \leq W$ .

En effectuant les changements de variables :

$$\omega = Wx \quad \omega' = Wx' \quad G(Wx) = \kappa(x) \quad G(Wx') = \kappa(x') \quad c = TW,$$

nous pouvons aboutir à un problème sans dimension équivalent aux deux problèmes (4.11) et (4.9) qui s'écrit :

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin c(x-x')}{\pi(x-x')} \kappa(x') dx' = \lambda \kappa(x), \quad |x| \leq 1. \quad (4.12)$$

C'est un problème qui admet des solutions dans  $L^2([-1, 1])$  seulement pour un ensemble discret de valeurs réelles positives  $\lambda$  telles que  $1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ , où  $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  [47, 50]. Les solutions correspondantes ou les fonctions propres sont réelles et simultanément, orthogonales sur  $[-1, 1]$  et orthonormées sur tout  $\mathbb{R}$ , i. e.,

$$\int_{-1}^1 \kappa_n(x) \kappa_m(x) dx = \lambda_n \delta_{nm}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa_n(x) \kappa_m(x) dx = \delta_{nm}.$$

En outre, de l'équation (4.12) on peut voir que les valeurs propres  $\lambda_i$  ainsi que leurs fonctions propres associées dépendent seulement du produit bande limite ;  $c = TW$  [48]. En particulier la somme des valeurs propres vérifie :

$$N = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i = \frac{2c}{\pi}. \quad (4.13)$$

$N$  est appelé le nombre de Shannon [50]. Il représente une bonne estimation du nombre des valeurs propres significatives qui sont associées aux fonctions propres les mieux concentrées sur la région étudiée [46]. Par suite, parmi les fonctions propres trouvées nous pouvons définir une base formée par les  $N$  premières fonctions propres de l'espace des signaux qui sont à bande limitée sur un intervalle de temps  $|t| \leq T$ . Soit  $F = \{a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)\}$  cette

base. Tout signal  $f(t)$  à bande limitée sur l'intervalle de temps  $|t| \leq T$  peut être exprimé relativement à  $F$  à un  $\varepsilon$  près. i. e.,

$$\exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \quad \text{tels que} \quad \int_{-T}^T \left[ f(t) - \sum_{j=1}^N \gamma_j a_j(t) \right]^2 dt < \varepsilon, \quad (4.14)$$

et le nombre de Shanon  $N$  désigne aussi le plus petit nombre de fonctions propres à considérer dans une base de Slepian pour atteindre l'approximation (4.14).

#### 4.3.4 L'opérateur différentiel commutant avec l'opérateur de Slepian

L'opérateur intégral  $K(x) = \frac{\sin c(x-x')}{\pi(x-x')}$  commute avec l'opérateur du second ordre,

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + (\chi - c^2x^2),$$

qui surgit dans les problèmes de séparations de variables dans l'équation tridimensionnelle des ondes scalaires [46, 11]. Grâce à cette découverte, les fonctions  $\kappa$ , solutions du problème (4.12), sont aussi solutions de l'équation de Sturm-Liouville :

$$\frac{d\kappa}{dx}(1-x^2)\frac{d\kappa}{dx} + (\chi - c^2x^2) = 0. \quad (4.15)$$

Cette équation n'admet des solutions partout bornées que dans le cas de valeurs réelles et positives discrètes du paramètre  $\chi$ , i. e.,  $0 < \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots$ . Les solutions correspondantes  $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots$  sont appelées les fonctions d'ondes ellipsoïdales allongées ("*prolate spheroidal wave functions*"). Ce sont des solutions de l'équation (4.12) aussi mais ordonnées dans le sens inverse au sens que nous avons adopté pour ses solutions. La résolution directe du problème de valeurs propres (4.12) ne fournit pas suffisamment d'informations sur les fonctions  $\kappa$ . Cependant, la résolution de (4.15) permet de

déduire plusieurs propriétés des fonctions propres  $\kappa_n$  et des valeurs propres  $\lambda_n$ , notamment :

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots, \quad (4.16)$$

$$\kappa_n(x) \text{ est paire ou impaire, selon } n, \quad (4.17)$$

$$\kappa_n(x) \text{ est non nulle sur } ]-1, 1[, \quad (4.18)$$

$$\kappa_n(x) \sim k_n \frac{\sin cx}{x}, \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty, \quad (4.19)$$

$$\int_{-1}^1 e^{2i\pi xt} \kappa_n(t) dt = \alpha_n \kappa_n(2\pi x/c), -\infty < x < +\infty, \quad (4.20)$$

où  $\alpha_n$  et  $k_n$  sont indépendantes de  $x$ . La dernière équation peut être écrite aussi sous la forme :

$$\kappa_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\frac{c}{2\pi}}^{\frac{c}{2\pi}} e^{2i\pi xt} \kappa(2\pi t/c) dt,$$

et ce fait montre que  $\kappa_n(x)$  est une fonction à bande-limitée de largeur-bande  $c/2\pi$ .

Par analogie à ce que nous avons introduit dans ce paragraphe, nous écrivons le problème de Slepian pour des fonctions sur la sphère unité, ou *problème de concentration spatio-spectrale*.

### 4.3.5 Problème de concentration spatio-spectrale

Dans ce paragraphe il s'agit de résoudre le problème de concentration spatio-spectrale de Slepian pour une région  $R$  de la sphère unité, qui est un problème bidimensionnel. Le problème est résolu par analogie au cas unidimensionnel introduit précédemment [46]. La différence entre les deux problèmes est que dans le cas bidimensionnel, on peut rencontrer plus de types de domaines – par conséquent plus de problèmes intéressants à étudier – que dans le cas unidimensionnel. e.g., une calotte sphérique, polaire ou

non polaire, une région  $R$  de forme arbitraire connexe ou non connexe i. e.,  $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots$ , etc.

Soient  $S^2$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  et  $\hat{r} = (\theta, \phi)$  un point générique de  $S^2$ .  $0 \leq \theta \leq \pi$  et  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  désignent respectivement la colatitude et la longitude du point  $\hat{r}$ .

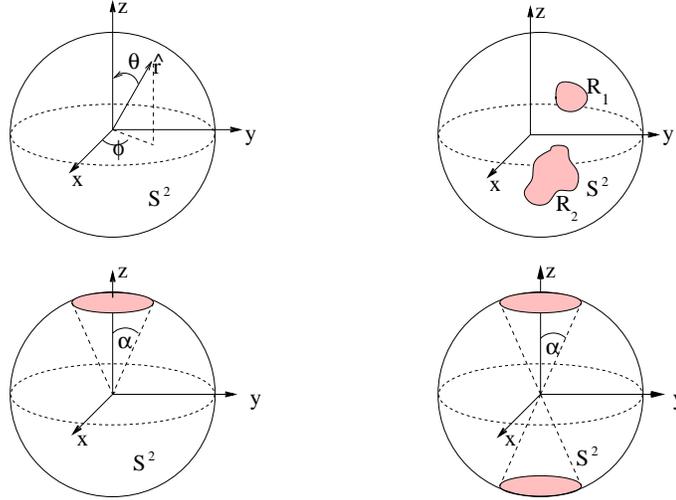


FIGURE 4.2 : Différentes géométries des régions étudiées sur la sphère unité

### 4.3.6 Fonctions sur la sphère

Soit  $f(\hat{r})$  une fonction réelle de  $L^2(S^2)$ .  $f$  admet donc un développement en harmoniques sphériques [17] :

$$f(\hat{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm} \bar{Y}_{nm}(\hat{r}), \quad f_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(\hat{r}) \bar{Y}_{nm}(\hat{r}) d\sigma \quad (4.21)$$

Notons par  $\mathbf{f}$  le vecteur des coefficients du développement de  $f$  en harmoniques sphériques, i. e.,  $\mathbf{f} = (\dots, f_{nm}, \dots)$ . La norme spatiale et son équivalente spectrale de la fonction  $f$  sont données respectivement par :

$$\|f\|_{S^2}^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(\theta, \phi)^2 d\sigma, \quad \|\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n f_{nm}^2. \quad (4.22)$$

**Théorème 2 (Parseval sur la sphère)** Soit  $f(\hat{r})$  une fonction réelle de  $L^2(S^2)$  dont le vecteur de ses coefficients de son développement en harmoniques sphériques est  $\mathbf{f} = (\dots, f_{nm}, \dots)$ . La formule de Parseval pour les séries d'harmoniques sphériques s'écrit :

$$\|f\|_{S^2}^2 = \|\mathbf{f}\|_2^2 \quad (4.23)$$

dite formule de Parseval.

### 4.3.7 Fonctions à bandes limitées et fonctions limitées en espace

**Définition 4 (Fonction à bande limitée)** Soit une fonction  $g \in L^2(S^2)$ .  $g$  est dite à bande limitée s'il existe un entier  $L$  tel que

$$g(\hat{r}) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n g_{nm} \bar{Y}_{nm}(\hat{r}).$$

$L$  est appelée la bande de la fonction  $g$ .

Dans la suite nous notons par

$$\mathcal{S}_L = \{g \in L^2(S^2) \text{ telle que } S_{gg}(n) = 0 \text{ pour } L < n \leq +\infty\}$$

l'ensemble des fonctions à bandes limitées sur la sphère unité, où

$$S_{gg}(n) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n g_{nm}^2, \quad (4.24)$$

est la densité spectrale de la fonction  $g$  par degré  $n$ . Ainsi,

$$g \in \mathcal{S}_L \iff g(\hat{r}) = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n g_{nm} \bar{Y}_{nm}(\hat{r}). \quad (4.25)$$

Notons aussi par  $\mathcal{S}_R$  l'espace des fonctions ayant leur support dans la région  $R$ ,

$$\mathcal{S}_R = \{h \in L^2(S^2) \text{ telle que } h = 0 \text{ dans } S^2 \setminus \{R\}\}.$$

**Remarque 5.**

- L'espace  $\mathcal{S}_R$  est de dimension infinie.
- L'espace  $\mathcal{S}_L$  est de dimension  $(L + 1)^2$ . En effet, si  $g \in \mathcal{S}_L$  alors ses coordonnées dans la base des harmoniques sphériques sont données par  $g = (g_{00}, \dots, g_{LL})^T$  ( $(L + 1)^2$  éléments).

Par analogie aux expressions des normes (4.22), on définit sur les deux sous espaces  $\mathcal{S}_L$  et  $\mathcal{S}_R$ , les deux (semi) normes par :

$$\|f\|_R^2 = \frac{1}{4\pi} \int_R f(\theta, \phi)^2 d\sigma, \quad \|f\|_L^2 = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n f_{nm}^2. \quad (4.26)$$

## 4.4 Concentration dans une région de forme arbitraire

D'après le principe d'indétermination de Heisenberg, il n'existe pas de fonction qui est en même temps à bande limitée  $L$  et strictement limitée dans une portion  $R$  de la sphère unité. i. e.,  $\mathcal{S}_L \cap \mathcal{S}_R = \emptyset$ . Notre but dans ce paragraphe est de déterminer un ensemble de fonctions à bande limitée  $g(\hat{r}) \in \mathcal{S}_L$  telles que le maximum de leur énergie est concentré dans une région choisie  $R$ . Il s'agit également de trouver les fonctions  $h$  limitées en espace dans une région  $R$ , i. e.,  $h(\hat{r}) \in \mathcal{S}_R$ , et qui admettent des spectres  $H$  concentrés dans un intervalle  $[0, L]$ . Comme dans le problème de temps-fréquence (1D) traité dans le premier paragraphe, ces deux problèmes sont équivalents.

### 4.4.1 Concentration spatiale d'une fonction à bande limitée

Afin de maximiser la concentration spatiale d'une fonction à bande limitée  $g(\hat{r})$ , nous allons essayer, par analogie au cas unidimensionnel, de résoudre le problème de maximisation du quotient de Rayleigh des (semi) normes :

$$\lambda = \frac{\|g\|_R^2}{\|g\|_{S^2}^2} = \frac{\int_R g^2(\theta, \phi) d\sigma}{\int_{S^2} g^2(\theta, \phi) d\sigma} = \text{maximum}, \quad (4.27)$$

où  $0 < \lambda < 1$  désigne la concentration spatiale. Remplaçons  $g$  maintenant dans l'expression de  $\lambda$ , par son expression dans (4.25) et intervertissons le signe somme et intégral.  $\lambda$  devient donc :

$$\lambda = \frac{\sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n g_{nm} \sum_{n'=0}^L \sum_{m'=-n'}^{n'} D_{nm,n'm'} g_{n'm'}}{\sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n g_{nm}^2} \quad (4.28)$$

où

$$D_{nm,n'm'} = \int_R Y_{nm} Y_{n'm'} d\sigma, \text{ avec } 0 \leq n, n' \leq L \text{ et } -n \leq m, m' \leq n. \quad (4.29)$$

Les valeurs de  $D_{nm,n'm'}$  peuvent être arrangées dans une matrice, notée  $\mathbf{D}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{00,00} & \dots & D_{00,LL} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{LL,00} & \dots & D_{LL,LL} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Par suite, nous pouvons réécrire le problème (4.27) sous la forme d'un problème variationnel :

$$\begin{aligned} & \text{trouver les fonctions } g \in \mathcal{S}_L \text{ telles que ,} \\ \lambda &= \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g}}{\mathbf{g}^T \mathbf{g}} = \text{maximum} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Les vecteurs  $\mathbf{g}$  vérifiant (4.31) sont les solutions du problème de valeurs propres :

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = \lambda\mathbf{g}, \quad (4.32)$$

qui est analogue au problème de valeurs propres de Fredholm (4.12). La matrice  $\mathbf{D}$  est symétrique définie positive ( $\mathbf{g}^T \mathbf{D}\mathbf{g} > 0$  pour tout  $\mathbf{g}$  non nul). Par conséquent, ses  $(L+1)^2$  valeurs propres sont réelles et leurs vecteurs propres associés sont deux à deux orthogonaux et vérifient :

$$\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{g}_i^T \mathbf{D}\mathbf{g}_j = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Dans la suite, les valeurs propres de  $\mathbf{D}$  sont considérées ordonnées de sorte que :

$$1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{(L+1)^2} > 0.$$

Cet ordre sera considéré pour les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Notons en outre que chaque vecteur propre  $\mathbf{g}_i$  représente une fonction à bande limitée  $g_i(\hat{r})$  définie par (4.25). L'ensemble de ces fonctions forme une base de  $\mathcal{S}_L$ . Elles sont orthonormales sur toute la sphère unité  $S^2$  et orthogonales sur la région étudiée  $R$ ,

$$\int_{S^2} g_i(\hat{r})g_j(\hat{r}) d\sigma = \delta_{ij}, \quad \int_R g_i(\hat{r})g_j(\hat{r}) d\sigma = \lambda_i \delta_{ij}. \quad (4.33)$$

La fonction propre  $g_1(\hat{r})$  associée à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$ , est l'élément de  $\mathcal{S}_L$  dont l'énergie est la plus concentrée dans la région  $R$ .  $g_2(\hat{r})$  est la deuxième fonction propre ayant un maximum d'énergie concentré dans la région  $R$  et qui est orthogonale à  $g_1(\hat{r})$  sur  $S^2$  et sur  $R$ .

Le problème aux valeurs propres (4.32) peut s'écrire autrement. En effet considérons  $\mathbf{g}$  un vecteur propre de  $\mathbf{D}$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Nous pouvons écrire alors :

$$\sum_{n'=0}^L \sum_{m'=-n'}^{n'} D_{nm,n'm'} g_{n'm'} = \lambda g_{nm} \quad (4.34)$$

En multipliant (4.34) par  $\bar{Y}_{nm}(\hat{r})$  et en sommant sur tous les  $n$  tels que  $0 \leq n \leq L$  et les  $m$  tels que  $-n \leq m \leq n$ , nous obtenons, compte-tenu de (4.25) :

$$\int_R D(\hat{r}, \hat{r}') g(\hat{r}') d\sigma' = \lambda g(\hat{r}), \quad \hat{r} \in S^2, \quad (4.35)$$

où

$$D(\hat{r}, \hat{r}') = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\hat{r}) \bar{Y}_{nm}(\hat{r}') = \sum_{n=0}^L \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \psi), \quad (4.36)$$

et  $\psi$  désigne la distance sphérique entre les deux points de la sphère  $\hat{r}$  et  $\hat{r}'$  donnée par :

$$\cos \psi = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi' - \phi). \quad (4.37)$$

Le problème (4.35) est un problème de valeurs propres de Fredholm de second ordre dont le noyau est symétrique, séparable et de rang fini. C'est aussi appelé le problème de concentration spectrale des fonctions limitées en espace dans la région  $R$ . La correspondance que nous venons d'écrire, prouve l'équivalence entre les deux problèmes de concentration spatiale des fonctions à bande limitée et le problème de concentration spectrale des fonctions limitées en espace dans la région  $R$ .

#### 4.4.2 Valeurs propres significatives

Les valeurs propres des équations (4.32) et (4.35),

$$1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0,$$

mesurent la qualité de la concentration spatio-spectrale. Les fonctions propres dont le maximum de leurs énergies est concentré dans la région  $R$ , sont celles qui sont associées aux valeurs propres les plus proches de 1. Plus la bande

limite  $L$  est grande, plus les premières valeurs propres sont proches de 1 et par suite leurs fonctions propres associées possèdent des énergies plus concentrées dans la région  $R$ .

La somme des valeurs propres ou nombre de Shannon, égale à la trace de  $\mathbf{D}$ , est donnée par :

$$N = \sum_{k=1}^{(L+1)^2} \lambda_k = \text{tr } \mathbf{D} = \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n D_{nm, nm} = \int_R D(\hat{r}, \hat{r}') d\sigma = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi}, \quad (4.38)$$

où  $A$  désigne l'aire de la région  $R$ .  $N$  est analogue au nombre de Shannon (4.13) dans le cas unidimensionnel. Ce nombre présente une bonne approximation du nombre de valeurs propres significatives. Autrement dit,  $N$  est la dimension de l'espace des fonctions  $f(\hat{r})$  limitées dans un domaine spectral pour des harmoniques sphériques de degrés  $0 \leq n \leq L$  et approximativement limité en espace dans une région de forme arbitraire  $R$  et d'aire  $A$ . L'idée d'exclure les fonctions propres qui sont faiblement concentrées dans la région  $R$ , provient du fait qu'elles sont a fortiori des fonctions à bande limitées et qui sont concentrées sur  $S^2 \setminus R$ , le complémentaire de la région  $R$  sur la sphère unité. C'est à dire que si  $\lambda_i$  est la concentration de fonctions propres  $g_i$  dans la région  $R$  alors  $1 - \lambda_i$  est sa concentration dans  $S^2 \setminus R$  [46]. Lorsque l'aire  $A$  de la région  $R$  est très petite par rapport à celui de la sphère,  $A \ll 4\pi$ , le nombre de fonctions propres à exclure est plus important, i. e.,  $N \ll (L+1)^2$ . Dans le cas où l'aire  $A$  de la région  $R$  est proche de celle de la sphère,  $A \approx 4\pi$ , le nombre des fonctions propres à garder est plus intéressant, i. e.,  $N \approx (L+1)^2$ .

### 4.4.3 Problème de concentration continental

Afin de visualiser la théorie de Slepian pour des régions de formes arbitraires de la sphère unité, nous avons choisi de considérer la concentration spatio-spectrale sur une région continentale de la Terre : le continent Africain.

**TABLE 4.1** : Deuxième colonne : rapport de l'aire de la région  $R$  et de celui de la sphère unité. Troisième colonne : nombre de Shannon  $N = (L + 1)^2 A / (4\pi)$  associés à chaque choix de la bande-limite dans le problème de concentration sur le continent Africain.  $N$  est arrondi en sa valeur entière.

Région $R$	$A/4\pi$ en %	Nombre de Shannon					
Afrique	5.78	$L = 7$	$L = 11$	$L = 14$	$L = 18$	$L = 20$	$L = 25$
		3	8	13	20	25	39

Dans la figure (fig.4.4) nous pouvons voir l'effet de l'augmentation de la bande-limite  $L$  sur l'évolution des valeurs propres. En effet, plus la bande-limite est grande, plus le nombre de valeurs propres significatives est important, et par suite les fonctions propres concentrées au maximum sur le continent Africain sont plus nombreuses. Ensuite nous représentons dans les figures (fig.4.5, fig.4.6) les répartitions des énergies des fonctions propres sur la carte de l'Afrique. Ce qui permettra de voir l'importance des unes (ou les  $N$  premières) par rapport aux autres. Nous remarquons également à travers ces figures comment une fonction "mal" concentrée sur la région  $R$  pourrait être par contre "bien" concentrée sur le complémentaire de  $R$ ;  $S^2 \setminus R$ .

**Remarque 6 (Régions de formes non connexes)** *Dans l'introduction de ce chapitre nous avons évoqué la pertinence de la méthode même pour étu-*

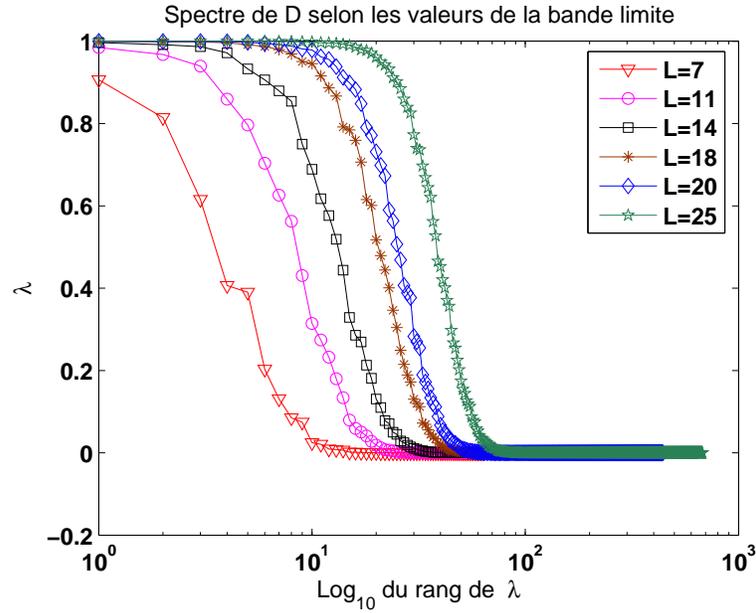
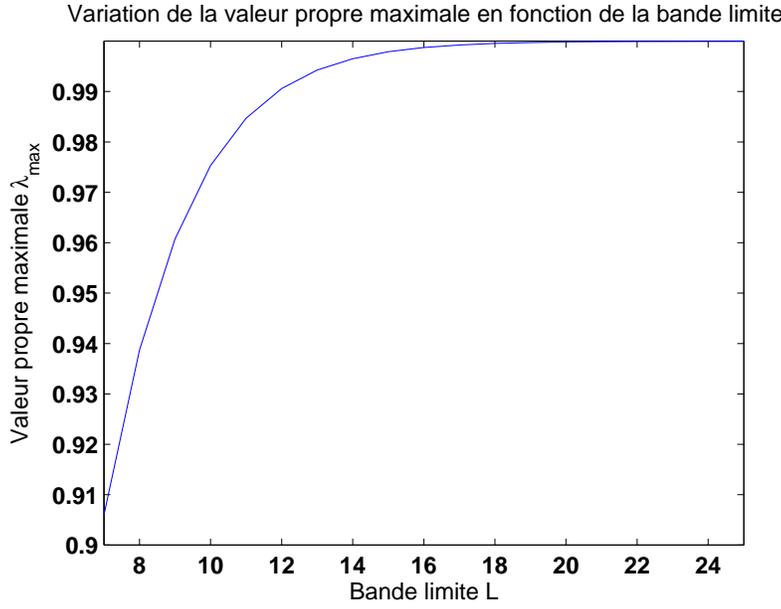


FIGURE 4.3 : Changement du spectre selon les valeurs de la bande limite  $L$ .

dier des domaines non connexes. Soit par exemple  $R = R_1 \cup R_2$  une région de la sphère unité formée par deux parties non connexes  $R_1$  et  $R_2$ . e.g.,  $R_1 = \text{Afrique}$  et  $R_2 = \text{Europe}$ . Supposons que  $\mathbf{D}_1$  est la matrice de concentration associée au domaine  $R_1$  et que  $\mathbf{D}_2$  celle qui est associée au domaine  $R_2$ . Alors la somme  $\mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$  est la matrice associée aux deux domaines  $R_1$  et  $R_2$  réunis. Les vecteurs de la base de Slepian associée au domaine  $R_1 \cup R_2$ , sont les  $N_{12}$  (nombre de Shannon de  $\mathbf{D}_{12}$ ) premières fonctions propres de la matrice  $\mathbf{D}_{12}$  [46].

### Remarque 7 (Calotte sphérique axisymétrique)

Dans le cas où le domaine de concentration est une calotte sphérique polaire



**FIGURE 4.4** : Evolution de la valeur propre maximale en fonction de la bande limite  $L$ .

symétrique, *i.e.*,

$$R = \{\hat{r} = (\theta, \phi) ; \cos \alpha \leq \cos \theta \leq 1\},$$

la résolution du problème de Slepian est plus simple, en vertu de l'idée de Grünbaum et al. [24]. Ils ont découvert un opérateur différentiel du second ordre  $\mathbf{P}$  qui commute avec l'opérateur de concentration  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{P} = \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)(\alpha-x) \frac{d}{dx} \right] - L(L+2)x - \frac{m^2(\alpha-x)}{1-x^2}, \quad \forall 0 \leq m \leq L,$$

avec  $x = \cos \theta$ . Comme nous l'avons déjà signalé pour le cas unidimensionnel dans le paragraphe (4.3.4), les opérateurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$  ont le même ensemble de vecteurs propres. De plus, de point de vue numérique il est plus simple de diagonaliser  $\mathbf{P}$  qui admet une matrice tridiagonale que d'essayer de diagonaliser l'opérateur  $\mathbf{D}$  directement.

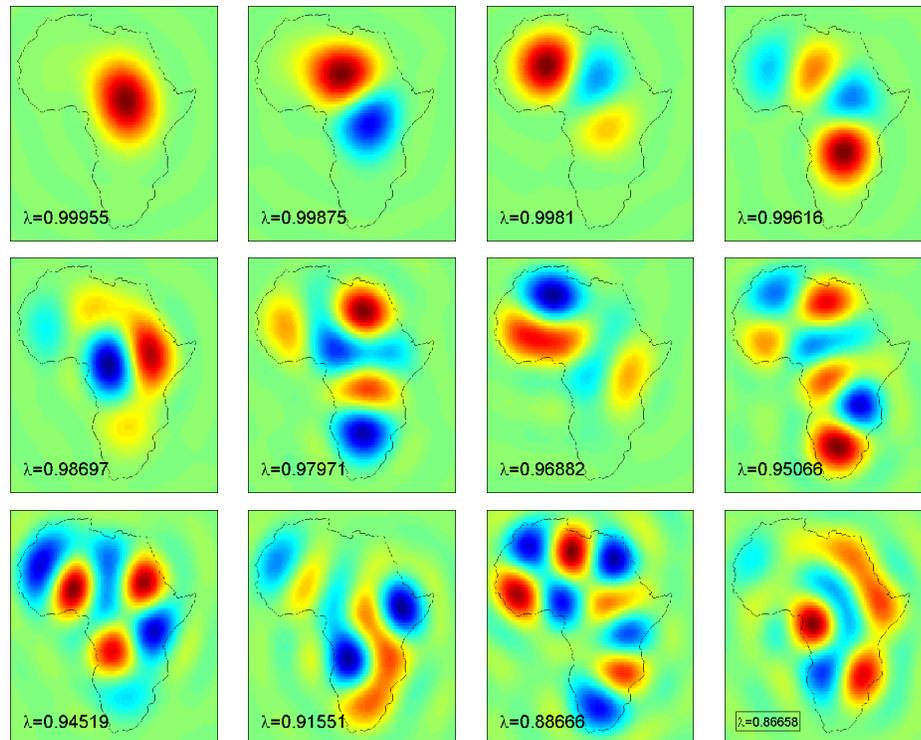
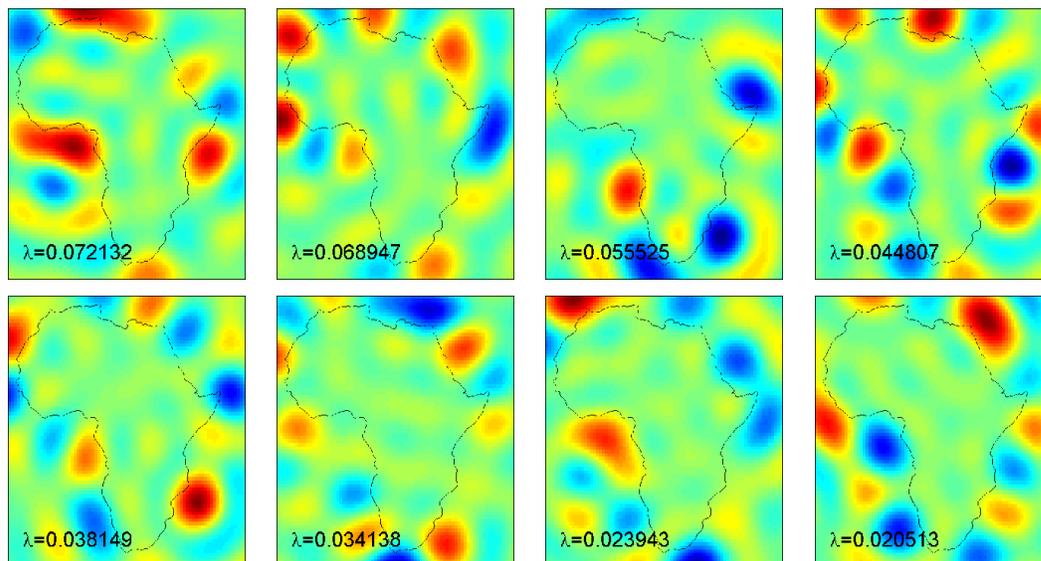
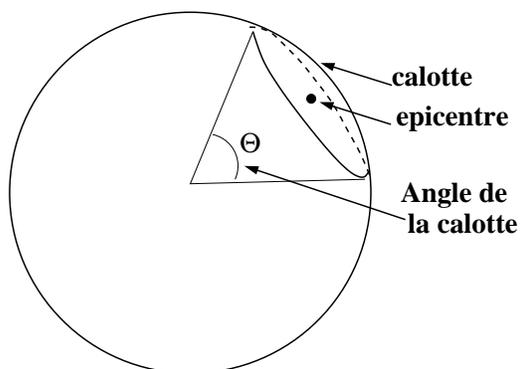


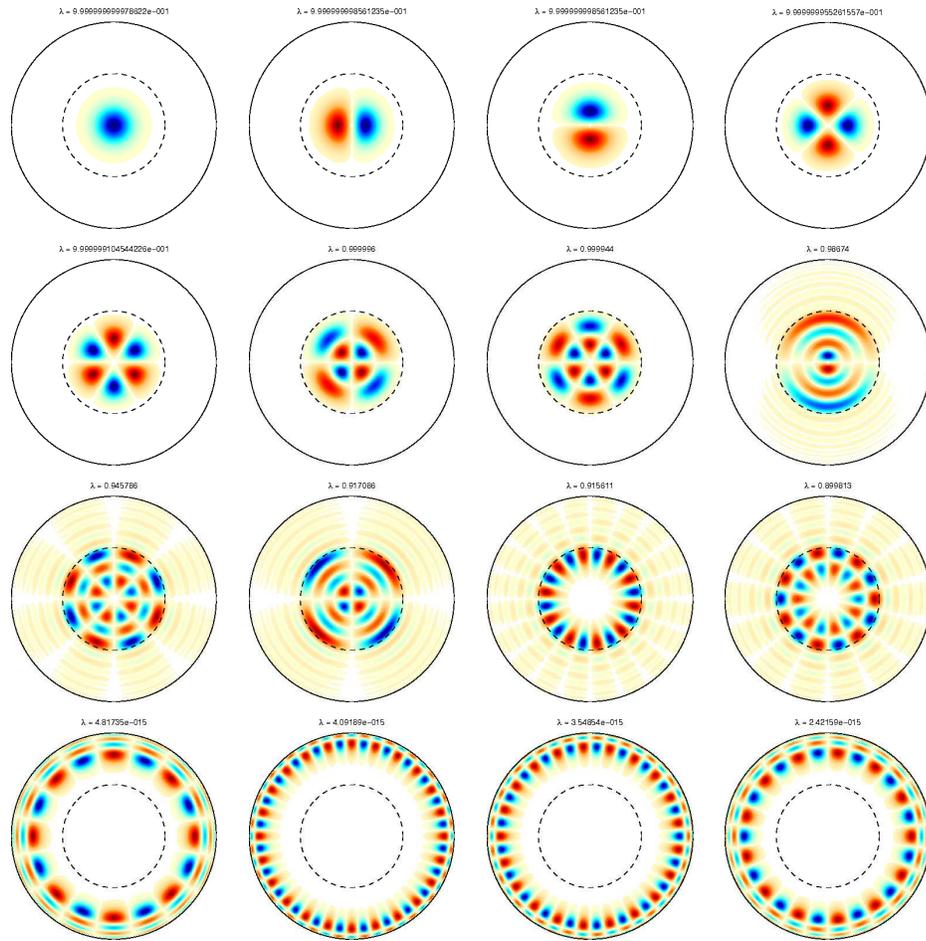
FIGURE 4.5 : Représentation de douze, parmi vingt, fonctions propres qui sont bien concentrées sur le continent Africain. La bande-limite ici est  $L = 18$ .



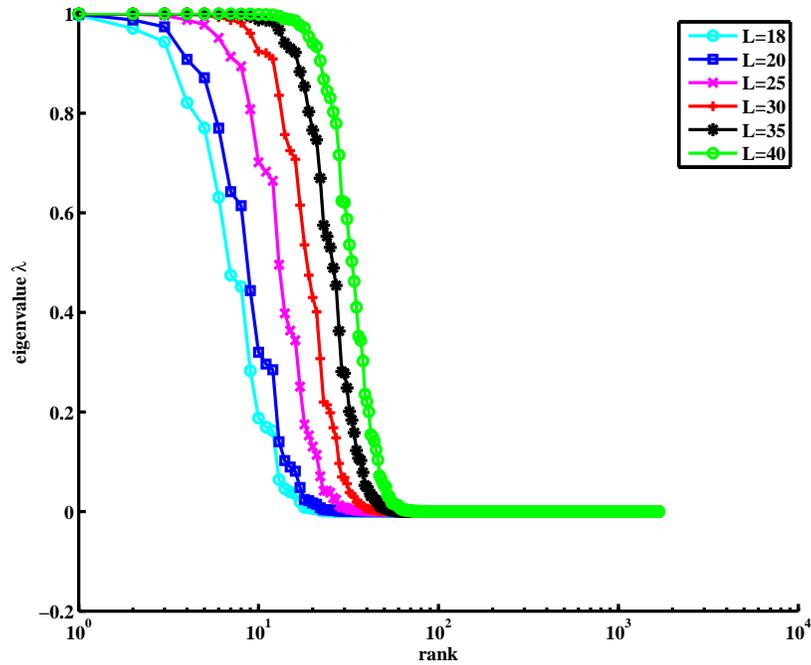
**FIGURE 4.6 :** Quelques fonctions propres “mal” concentrées sur le continent Africain pour la même bande-limite  $L = 18$ .



**FIGURE 4.7 :** Calotte sphérique.



**FIGURE 4.8 :** Les fonctions de base de Slepian pour une bande-limite  $L = 30$  et un domaine sous la forme d'une calotte sphérique dont l'angle est de mesure  $\Theta \leq 45^\circ$ . La première ligne contient les fonctions propres de Slepian les plus concentrées dans le domaine. La dernière ligne contient les fonctions propres de la base de Slepian qui correspondent aux plus petites valeurs propres et par suite les moins concentrées dans le domaine. Les couleurs bleu et rouge correspondent respectivement aux valeurs positive et négative.



**FIGURE 4.9 :** Les valeurs propres du problème spatio-spectral de Slepian sur la calotte sphérique d'angle de mesure  $\Theta \leq 45^\circ$  et  $L = 18, 20, 25, 30, 35, 40$ . Sur l'axe des  $X$  nous mettons les ordres des valeurs propres, et sur l'axe des  $Y$  nous mettons les valeurs propres.



# Chapitre 5

## Étude de la solvabilité du problème inverse des points-masses

### 5.1 Introduction

La résolution pratique du problème inverse des points-masses, qui est mal posé au sens de Hadamard, ne peut être envisagée que dans le cas où certaines conditions sur l'existence, la stabilité et l'identifiabilité sont éclaircies. Dans ce chapitre nous étudions ces thèmes et nous présentons le plan que nous adoptons dans la résolution de notre problème.

## 5.2 Problème inverse et existence de la solution

Rappelons que notre problème inverse gravimétrique consiste à trouver une distribution de points-masses,

$$\tilde{\rho} = \sum_{k=1}^N m_k \delta_{\xi_k},$$

qui génère un potentiel approchant le potentiel gravitationnel terrestre. Le problème est formulé ainsi : *trouver la distribution de points-masses  $P_k(\xi_k, m_k)$  (avec  $\xi_k$  et  $m_k$  désignent respectivement la position et la masse du point-masse  $P_k$ ) qui minimise la fonctionnelle*

$$F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} |V(\tilde{R}, \theta, \phi) - \tilde{V}(\tilde{R}, \theta, \phi)|^2 d\sigma,$$

où  $V$  et  $\tilde{V}$  sont respectivement le potentiel gravitationnel terrestre et le potentiel généré par les points-masses. Nous rappelons que ces deux potentiels vérifient les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{E} \\ \Delta V = -4\pi\rho \text{ dans } \mathbb{E}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{V} = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{E} \\ \Delta \tilde{V} = -4\pi\tilde{\rho} \text{ dans } \mathbb{E}. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

D'autre part, d'après la loi de Newton les deux potentiels  $V$  et  $\tilde{V}$  s'expriment en fonction de  $\rho$  et  $\tilde{\rho}$ ,

$$V(\boldsymbol{\xi}') = G \int_{\mathbb{E}} \frac{\rho(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|}, \quad \tilde{V}(\boldsymbol{\xi}') = G \int_{\mathbb{E}} \frac{\tilde{\rho}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|}. \quad (5.2)$$

Considérons l'opérateur :

$$T : L^2(\mathbb{E}) \longrightarrow T(L^2(\mathbb{E})) \quad (5.3)$$

$$F \longmapsto T(F)(x) := \int_{\mathbb{E}} \frac{F(y)}{|x - y|}. \quad (5.4)$$

Nous avons alors le résultat suivant [37],

**Théorème 3.**

L'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{E})$  se décompose en deux espaces orthogonaux,

$$L^2(\mathbb{E}) = \text{Harm}(\mathbb{E}) \oplus \text{Anharm}(\mathbb{E})$$

où

$$\text{Harm}(\mathbb{E}) := \{H \in C^2(\mathbb{E}) / \Delta H = 0\} \quad (5.5)$$

$$\text{Anharm}(\mathbb{E}) := \{F \in L^2(\mathbb{E}) / \langle F, H \rangle_{L^2(\mathbb{E})} = 0 \forall H \in \text{Harm}(\mathbb{E})\}. \quad (5.6)$$

Le noyau de l'opérateur  $T$  est donné par :

$$\ker T = \text{Anharm}(\mathbb{E})$$

Il en résulte du théorème la **non unicité** de la solution du problème inverse des points-masses car le potentiel gravitationnel  $V$  est dû à la densité terrestre qui est une fonction de l'espace  $L^2(\mathbb{E})$ , c'est à dire qu'elle est formée d'une partie harmonique et d'une partie anharmonique. Ceci implique que deux densités de parties harmoniques égales et de parties anharmoniques différentes sont associées au même potentiel [20].

**Existence de la solution :**

L'existence de la solution du problème des points-masses est satisfaite grâce à la continuité sur  $\mathbb{E}^N \times [0, M]^N$  de la fonction  $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m})$ , donnée précédemment dans (4.2) par :

$$F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} |V(\tilde{R}, \theta, \phi) - \tilde{V}(\tilde{R}, \theta, \phi)|^2 d\sigma,$$

En effet, le fait que  $V$  et  $\tilde{V}$  vérifient les expressions (4.2) :

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{GM}{r} \left( 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \left(\frac{a}{r}\right)^n \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \right), \\ \tilde{V}(P) &= \sum_{k=1}^N \frac{Gm_k}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_k^n \frac{4\pi}{2n+1} \bar{Y}_{nm}(\theta_k, \phi_k) \bar{Y}_{nm}(\theta, \phi), \end{aligned}$$

la fonctionnelle  $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m})$  peut s'écrire,

$$F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{b} - A(\boldsymbol{\xi})\mathbf{m}\|^2, \quad (5.7)$$

qui est continue sur  $\mathbb{E}^N \times [0, M]^N$ . Nous rappelons que  $\mathbf{b}$  et  $A(\boldsymbol{\xi})$  sont données dans (4.5).

## 5.3 Détermination d'une distribution de points-masses sur une grille

### 5.3.1 Distance minimale séparant deux points-masses sur une grille

Afin de consolider notre approche nous étudions la sensibilité de l'identification de deux points-masses  $(P_k(r_k, \theta_k, \phi_k), m_k), k = 1, 2$  (avec  $m_1$  et  $m_2$  non nécessairement égales) en fonction de la distance sphérique qui les sépare et du quotient  $\alpha = \frac{r_k}{r}$ . Dans nos calculs nous choisissons  $r = \tilde{R} = (R_m + 30)\text{km}$  comme rayon d'une sphère d'observation concentrique avec la Terre ( $R_m$  est le rayon moyen de la Terre).

Nous supposons que les deux points-masses  $(P_1, m_1)$  et  $(P_2, m_2)$  sont situés sur une grille régulière enterrée à une profondeur constante  $\xi_0$ , et notons par  $V_{12}$  potentiel engendré par les deux points-masses en un point  $P(\tilde{R}, \theta, \phi)$  de la sphère d'observation. Nous limitons l'étude sur le cas de point  $P$  appartenant à la même section plane contenant  $P_1, P_2$  et le géocentre. On a alors,

$$V_{12}(\tilde{R}, \theta, \phi) = \frac{Gm_1}{\ell_1} + \frac{Gm_2}{\ell_2} \quad (5.8)$$

où  $\ell_k$  est définie dans (1.2) par  $\ell_k = PP_k = \tilde{R}\sqrt{1 - 2\alpha \cos \psi_k + \alpha^2}$  pour  $k = 1, 2$ . Comme  $\ell_k$  dépend seulement de la distance sphérique entre  $P$  et

$P_k$ , nous supposons, sans perte de généralité, que les deux points-masses sont ou bien situés sur le même méridien, c-à-d avec  $\phi$  fixe, ou bien situés sur la même parallèle, c-à-d avec  $\theta$  fixe. Si par exemple, on se place dans le premier cas, nous pouvons écrire  $V_{12}$  comme suit :

$$V_{12}(\tilde{R}, \theta, \phi) = \frac{G}{\tilde{R}} \left( \frac{m_1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos(\theta - \theta_1) + \alpha^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos(\theta - \theta_2) + \alpha^2}} \right).$$

Il est possible encore de simplifier l'expression de  $V_{12}$  en traduisant l'origine des latitudes au milieu des deux points-masses. En notant par  $\delta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ , on a  $\psi_{12} = 2\delta$  et  $V_{12}$  devient :

$$V_{12}(\tilde{R}, \theta, \phi) = \frac{G}{\tilde{R}} (m_1 W(\theta - \delta) + m_2 W(\theta + \delta)),$$

où

$$W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos \eta + \alpha^2}}.$$

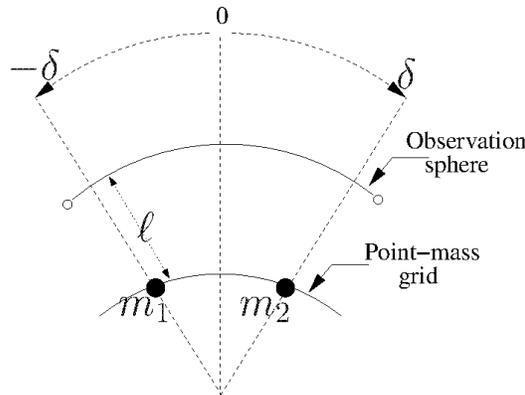


FIGURE 5.1 : Schéma des positions deux points-masses.

Pour  $\alpha = 0.969$  (c'est à dire pour des masses choisies disposées à 168km de profondeur), nous considérons les deux expériences suivantes. Dans la première, les deux points-masses sont considérés avoir la même longitude (fixée)

$\phi$  (c-à-d, qu'ils sont positionnés sur le même méridien) et de latitudes différentes  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui varient dans l'intervalle  $[1^\circ, 10^\circ]$ . Dans la deuxième expérience, les deux points-masses sont considérés avoir la même latitude (fixée)  $\theta$  (c-à-d, qu'ils sont positionnés sur la même parallèle) et de longitudes différentes qui varient dans l'intervalle  $[1^\circ, 10^\circ]$ .

Dans la figure 5.2 nous représentons, pour des masses égales et des masses différentes, les figures du potentiel composite sur l'arc qui résulte de l'intersection de la sphère d'observation et du plan contenant les deux points-masses et le géocentre.

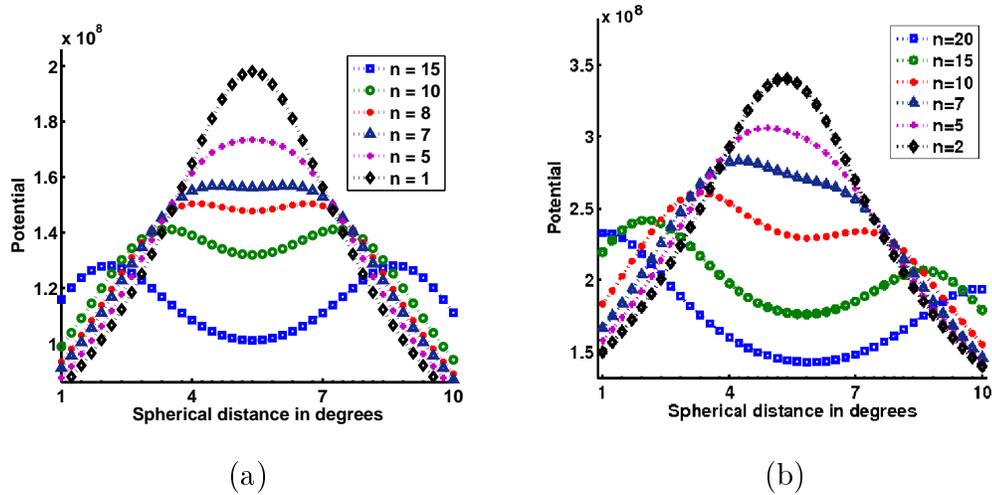


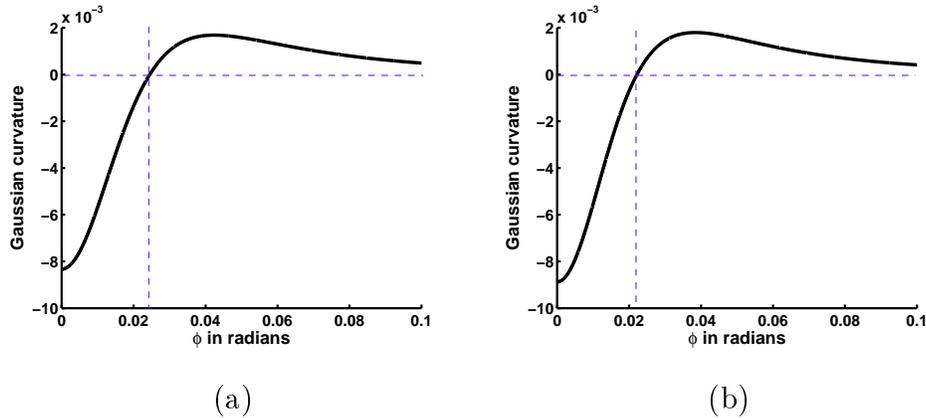
FIGURE 5.2 : Courbe du potentiel sur la sphère d'observation ( $\tilde{R} = R_m + 30$  km,  $R_m = 6378$  km) comme fonction de la distance entre les deux points-masses. Les coordonnées sont données par  $\psi_i = \psi_0 \pm n_i \Delta\psi$  où  $\Delta\psi = 0.2308^\circ$ .

La figure 5.2 montre que lorsque la distance entre les points-masses décroît la courbe du potentiel généré par deux points-masses passe de la forme *courbe à deux bosses* à une *courbe à une seule bosse*. Ce résultat est vrai dans le cas de points-masses de masses égales ou différentes. En outre, il existe une distance minimale critique, au dessous de laquelle le potentiel généré par

deux points-masses apparaît comme étant le potentiel généré par un seul point-masse situé au milieu et de masse égale à la somme des masses des deux points-masses.

Ce phénomène a été observé dans d'autres domaines tels que l'optique et les signaux radar. En effet la confusion entre un signal généré par plusieurs points sources voisins et celui généré par un seul point source est toujours possible.

Le critère de Rayleigh [10] nous aide à trouver une distance minimale entre les points sources permettant d'identifier les points à partir de leurs signaux. Ainsi, pour une valeur fixée du quotient  $\alpha$ , nous utiliserons le critère de Rayleigh pour trouver la distance minimale  $\delta_{\min}$  à considérer afin que les points-masses puissent être distingués. Dans la figure 5.3 nous représentons la dérivée seconde du potentiel au point d'observation par rapport à la distance sphérique entre les deux points-masses. Nous remarquons que lorsque la distance entre les deux points-masses (dans les deux cas : masses égales ou masses différentes) est inférieure à  $2\delta = 2.29^\circ \approx 255$  km, la dérivée seconde est négative et le potentiel atteint un maximum local au point milieu. Dans ce cas, le processus d'identification devient instable.



**FIGURE 5.3** : Courbure Gaussienne du potentiel comme fonction de la distance sphérique entre les points-masses. (a) correspond au cas des points-masses de même masse. (b) représente le cas de deux points-masses de masses différentes.

### 5.3.2 Stabilité du processus d'identification

En général, les erreurs de calcul peuvent aboutir à une instabilité solution d'un problème inverse. Puisque notre but est de trouver une solution stable pour notre problème, il est important d'étudier la stabilité à part. Pour cela nous procédons comme suit. Nous supposons, tout d'abord, que le second membre  $\mathbf{b}$  de notre problème est le potentiel généré par une distribution de points-masses de paramètres (masses et positions) préalablement connus, et nous essayons de retrouver ces paramètres. Ensuite, nous ajoutons au terme  $\mathbf{b}$  un bruit blanc distribué selon la loi normale et nous comparons, pour plusieurs niveaux du bruit ajouté, les résultats retrouvés à partir du problème perturbé avec ceux du problème non perturbé. Notons par  $\tilde{\mathbf{b}}$  le second membre perturbé avec un bruit d'amplitude  $\kappa$  :

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \kappa \text{moy}(\mathbf{b})\bar{\mathbf{a}},$$

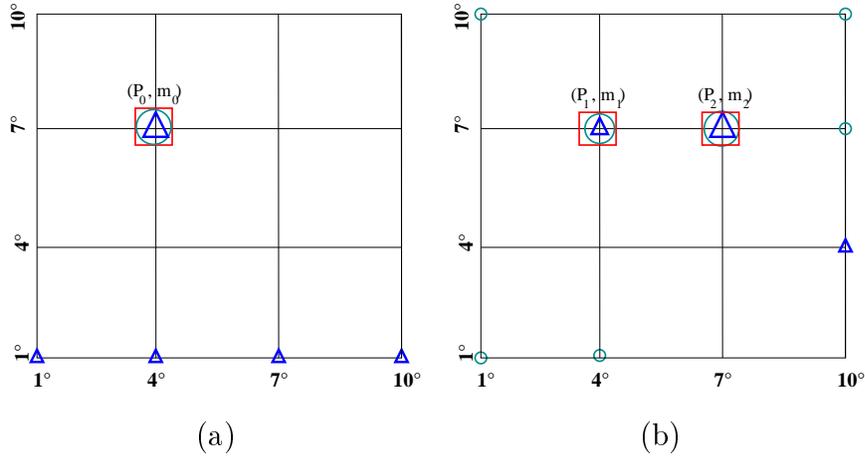
où  $\bar{\mathbf{a}}$  est un vecteur aléatoire de réels normalement distribués.

Les expériences dont nous venons de présenter le cadre, sont effectuées sur une grille régulière de pas  $2.5^\circ$  (qui respecte le critère de la distance minimale entre deux points) de la manière suivante :

**1er cas : un seul point-masse** où le vecteur  $\mathbf{b}$  contient les coefficients du potentiel généré par le point-masse  $(\mathbf{P}(r_0, \theta_0, \phi_0), m_0)$ . Cette expérience consiste à retrouver le point-masse  $\mathbf{P}$  pour un second membre avec et sans bruit ajouté.

Nous remarquons que, sans bruit ajouté aux données, nous retrouvons avec précision le point-masse. Dans le cas où nous ajoutons du bruit au second membre nous retrouvons une masse principale située au point  $\mathbf{P}_0$ , et d'autres masses très petites par rapport à  $m_0$ , et dans son voisinage. La somme de toutes les masses trouvées est égale à  $m_0$ .

**2ème cas : deux points-masses** où le vecteur  $\mathbf{b}$  contient les coefficients du potentiel généré par les deux points-masses  $(\mathbf{P}(r_1, \theta_1, \phi_1), m_1)$  et  $(\mathbf{P}(r_2, \theta_2, \phi_2), m_2)$ . Sans bruit ajouté, nous retrouvons bien nos points-masses. Pour un bruit ajouté d'amplitude 5%, nous retrouvons deux masses principales aux mêmes positions de nos masses initiales, et d'autres masses dans leurs voisinages. Tandis que, dans le cas de 10% de bruit ajouté, nous ne retrouvons plus nos masses. Dans le tableau 5.3.2 nous illustrons les proportions des masses principales retrouvées par rapport aux masses initiales dans les deux cas étudiés (la valeur 1 dans le tableau veut dire que nous retrouvons le point-masse initial avec précision) Les valeurs inférieures à 1 montrent la présence d'autres masses autour des masses initiales. Le tableau 5.3.2 montre en outre que pour un grand niveau de bruit nous échouons à retrouver les points-masses initiaux.



- points-masses retrouvés sans bruit ajouté
- points-masses retrouvés avec un bruit de 5%
- △ points-masses retrouvés avec un bruit de 10%.

**FIGURE 5.4** : Schéma des deux cas étudiés dans le paragraphe 5.3. Dans (a) nous montrons le point-masse principal retrouvé  $(\mathbf{P}_0, m_0)$  et les masses identifiées après l'ajout d'un bruit. Dans (b) nous schématisons la deuxième expérience portant sur l'identification de deux points-masses  $(\mathbf{P}_1, m_1)$  and  $(\mathbf{P}_2, m_2)$ , et nous montrons les masses qui apparaissent à leurs voisinages. Dans les deux cas les différences entre les masses sont considérées.

**TABLE 5.1** : Influence du niveau de bruit ajouté sur les valeurs des masses retrouvées. Dans la deuxième et la troisième colonne nous donnons les rapports des masses principales retrouvées par les masses initiales.

Bruit	Un seul point-masse	Deux points-masses
0%	1	(1, 1)
5%	0.966	(0.962, 1.016)
10%	1.012	(0.869, 0.982)

## 5.4 Récapitulatif global et algorithme correspondant

A titre de récapitulation sur l'étude effectuée dans les paragraphes précédentes de ce chapitre, nous nous proposons d'itérer les différents axes à considérer dans l'algorithme de résolution du problème localisé des points-masses.

Nous rappelons que notre problème local s'écrit

$$\min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N, m_k \geq 0} \frac{1}{2} \|A(\boldsymbol{\xi})\mathbf{m} - \mathbf{b}\|^2, \quad (5.9)$$

Dans une première étape nous choisissons la région de la Terre à étudier et nous déterminons la base de Slepian et la grille qui lui sont associées. Ensuite, pour éviter la confusion entre un potentiel généré par plusieurs points-masses voisins avec le potentiel généré par leur somme, nous mettons en œuvre le critère de Rayleigh pour le choix d'un pas minimal de la grille de calcul ( $\geq 2.29^\circ \approx 255$  km). Une fois trouvée la base de Slepian et fixée la grille, nous procédons à la résolution alternative des deux problèmes  $(\mathcal{P}_m)$ , donné par (4.2), et  $(\mathcal{P}_\xi)$ , donné par (4.2), relativement à cette base.

Pour résoudre le problème  $(\mathcal{P}_m)$  nous utilisons une régularisation entropique. C'est une méthode utilisée surtout dans les problèmes de reconstruction d'images et ses applications. Il s'agit en fait d'ajouter de l'information au problème (4.2) afin d'améliorer la stabilité. Plus précisément, nous cherchons à déterminer le vecteur  $\hat{\mathbf{m}}$  qui minimise

$$F_e(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \|A(\boldsymbol{\xi})\mathbf{m} - \mathbf{b}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \mu^2 \sum_{k=1}^N m_k \log(m_k), \quad (5.10)$$

avec  $\mu$  est le coefficient de régularisation. L'ajout de la fonctionnelle régularisante est utilisé dans le cas où l'on recherche une solution positive. En

effet, cette fonctionnelle (appelée aussi la fonction d'entropie) se comporte comme une fonction barrière, ce qui assure la positivité de la solution. En outre, la régularisation entropique est implémentée dans la fonction *maxent* qui utilise un algorithme de gradient conjugué non linéaire [21]. Les solutions du problème de minimisation de la fonctionnelle  $F_e$  sont trouvées grâce à cette étape d'algorithme :

$$\mathbf{m}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{m}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} \leftarrow -\nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k+1)}) + \beta_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad (5.12)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_0$  est le vecteur des positions initiales des points-masses et le gradient de  $F_e$  est donné par

$$\nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}) = A(\boldsymbol{\xi}_0)^T (A(\boldsymbol{\xi}_0) \mathbf{m} - \mathbf{b}) + \mu^2 \begin{pmatrix} 1 + \log m_1 \\ \vdots \\ 1 + \log m_K \end{pmatrix}.$$

Dans (5.12), le paramètre de régularisation  $\alpha_k$  est calculé avec un algorithme de ligne de recherche inexacte de manière qu'il minimise la fonctionnelle  $F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)})$  sous les contraintes  $\mathbf{m}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$  sont positifs. Par conséquent,  $\beta_k$  est donnée par

$$\beta_k = \frac{(\nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k+1)}) - \nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k)}))^T \nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k+1)})}{\|\nabla F_e(\boldsymbol{\xi}_0, \mathbf{m}^{(k+1)})\|_2^2}.$$

Ce choix de  $\beta_k$  a l'avantage de faire un redémarrage "automatique" dans la direction de la descente dans le cas d'une convergence lente [52]. Le problème  $(\mathcal{P}_\xi)$  est résolu itérativement en utilisant la méthode de point intérieur. Le principe de cette méthode consiste à construire une suite d'itérés dont les termes appartiennent à la zone admissible des solutions du problème (qui correspond dans notre cas à l'intérieur de la Terre) et qui converge vers la solution optimale. Dans notre problème, l'algorithme de point intérieur est initialisé aux paramètres suivants : les points-masses sont de masses  $\hat{\mathbf{m}}$  (solutions

---

du problème ( $\mathcal{P}_m$ ) et positionnés sur une sphère de rayon  $r_0 = (R_m - 30)$ km. Nous cherchons à trouver les points-masses enterrés (avec la possibilité de les considérer positionnés dans une enveloppe sphérique) et solution optimale du problème ( $\mathcal{P}_\xi$ ). Nous bouclons ensuite les deux problèmes afin de trouver une solution optimale du problème global (5.9).

**Constantes**

$R_m$  : réel; le rayon moyen de la Terre en mètre

$N$  : entier; nombre de vecteurs de la base de Slepian

$K$  : entier; nombre de points-masses

$\epsilon$  : réel; tolérance

**Variables**  $m$  : tableau de réels  $[1 \dots K]$ ;

$r$  : tableau de réels  $[1 \dots K]$ ;

$b$  : tableau de réels  $[1 \dots N]$ ;

$A$  : tableau de réels  $[1 \dots N][1 \dots K]$ ;

**Fonction** Maillage(Domaine) : réel

    | choix du domaine d'étude et maillage

**Fin**

**Fonction** Slepian(Domaine) : tableau de réel  $[1..(N+1)^2][1..N]$

    | Détermination de la base de Slepian associée au domaine  
    | d'étude

**Fin**

**Pour**  $k$  de 1 à  $K$  faire

    |  $r_k \leftarrow R_m - 30$ ;

**Fin Pour**

$err \leftarrow 10$ ;

**Tant que** ( $err > \epsilon$ ) faire

- Calcul de  $A$  et de  $b$  Projection de  $A$  et de  $b$  dans la base de Slepian;

$$\hat{m} \leftarrow \maxent_{\frac{1}{2}} \|A(\mathbf{r})\mathbf{m} - \mathbf{b}\|_{L^2(\mathbb{S})};$$

$$\mathbf{r} \leftarrow \text{fmincon}_{\frac{1}{2}} \|A(\mathbf{r})\hat{m} - \mathbf{b}\|_{L^2(\mathbb{S})};$$

$A(\mathbf{r})$  au lieu de  $A(\boldsymbol{\xi})$  car les latitudes et les longitudes sont fixées

- Calcul des potentiels réel et approché ( $V$  et  $\tilde{V}$ );

$$err \leftarrow \frac{\|V - \tilde{V}\|}{\|V\|};$$

**Fait**

# Chapitre 6

## Validation numérique

Ce chapitre vient après l'étude de la solvabilité du problème et l'essai de plusieurs types d'algorithmes pour la résolution des problèmes aux moindres carrés linéaires et non linéaires avec contraintes de positivité. Nous finissons par présenter une étude numérique de la résolution du problème localisé des points-masses relativement à la base de Slepian. C'est aussi la validation numérique de l'algorithme mis au point dans le chapitre précédent. Nous présentons en particulier, une étude numérique de la qualité de la solution relativement à la position du domaine d'étude (relativement aux pôles). La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la résolution d'un nouveau problème de points masses. Nous commençons par supposer que le potentiel des points masses est généré par un point masse principal situé au centre de la Terre (noyau) et d'une distribution de points masses de taille plus petite pour caractériser les variations du potentiel à approcher. Le but de cette partie est d'étudier l'écart relatif entre les deux potentiels selon l'importance affectée au noyau (comparé avec celle de la Terre). Nos expériences numériques sont implémentées sous MATLAB [36]. Plusieurs boîtes à outils ont été utilisées notamment celle de l'optimisation "*Optimization toolbox*" et celle de la

cartographie "*Mapping toolbox*".

## 6.1 Choix du domaine et maillage

Du fait que notre étude est effectuée sur une petite sphère englobant la Terre, nous supposons que toute région étudiée peut être à l'intérieur d'une calotte sphérique de centre  $\Gamma$  et de distance épacentrique  $d$ . La distance  $d$  dépend de la superficie du domaine étudié. Le domaine que nous choisissons dans nos exemples est centré sur la Tunisie (voir figure 6.1). Les points masses sont supposés initialement à une distance  $r = 6341$  km du centre de la Terre. Ils sont disposés à la surface sur une grille régulière. Les nœuds du maillage sont les intersections entre les cercles partageant la calotte transversalement et les secteurs d'origine l'épicentre (voir figure 6.1). Ce maillage respecte la condition que nous avons présentée dans le chapitre précédent concernant la distance minimale qu'il faut considérer entre deux points-masses voisins afin qu'ils soient discernables.

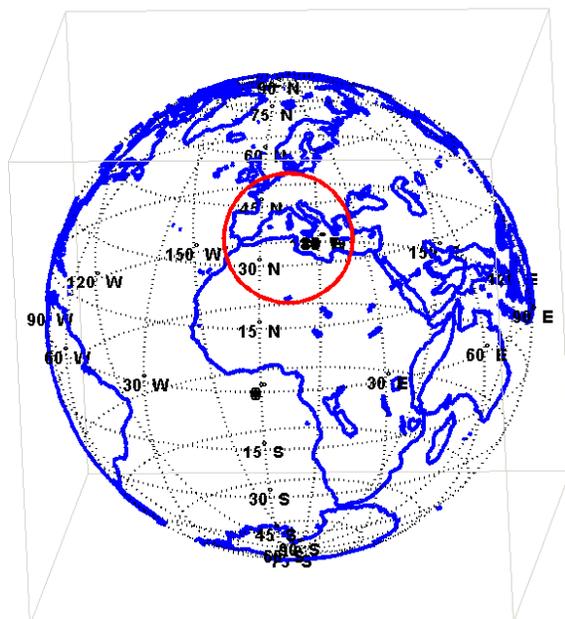


FIGURE 6.1 : Domaine choisi.

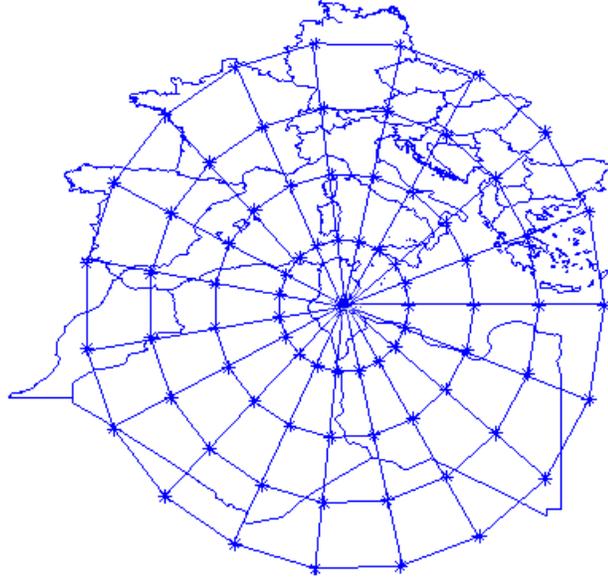


FIGURE 6.2 : Maillage circulaire du domaine étudié.

## 6.2 Étude d'un exemple

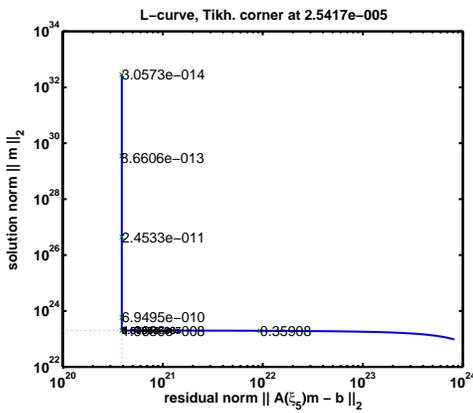
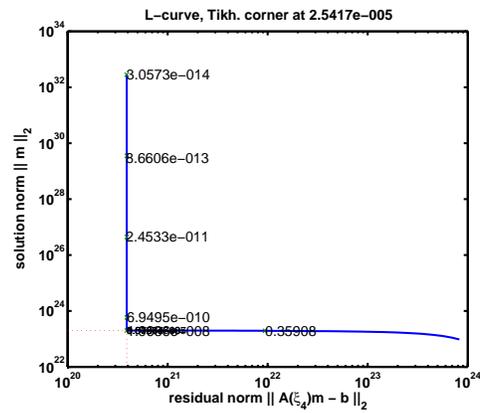
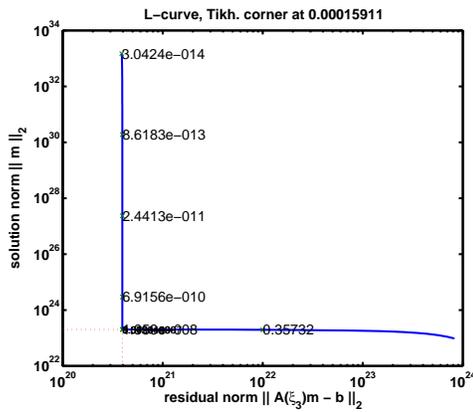
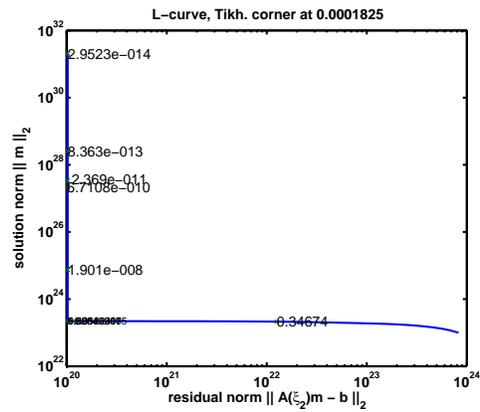
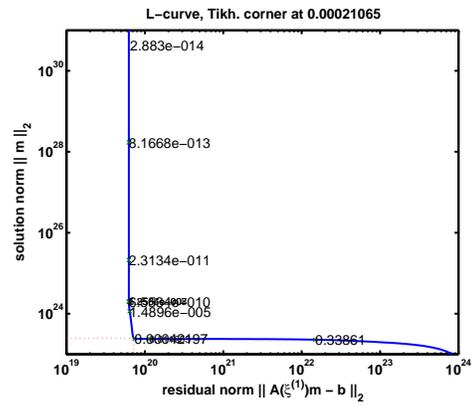
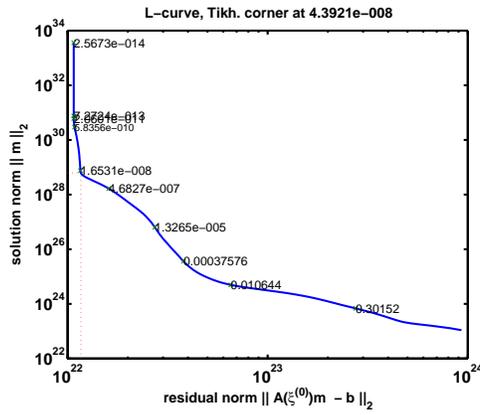
Nous rappelons que le problème  $\mathcal{P}_m$  est un problème de minimisation avec contrainte de positivité. Nous utilisons la méthode de régularisation entropique dans  $L^2(\mathbb{S})$ , qui est proposée par Hansen dans [25]. Nous résolvons à chaque itération  $j$  le problème

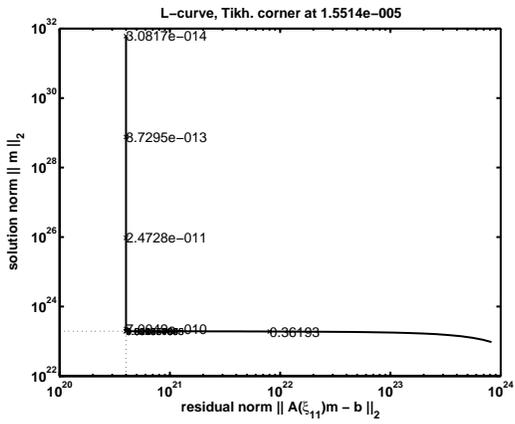
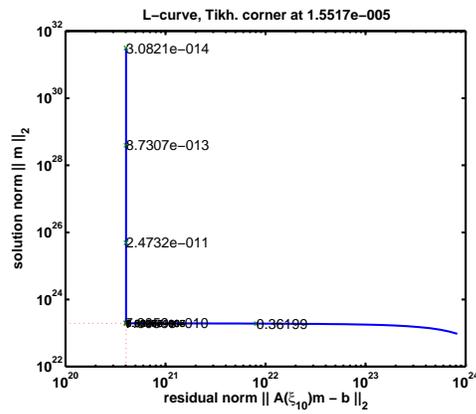
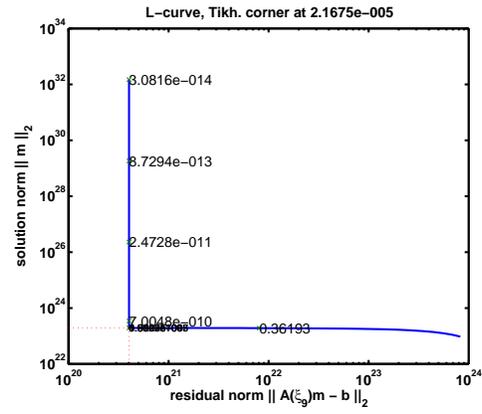
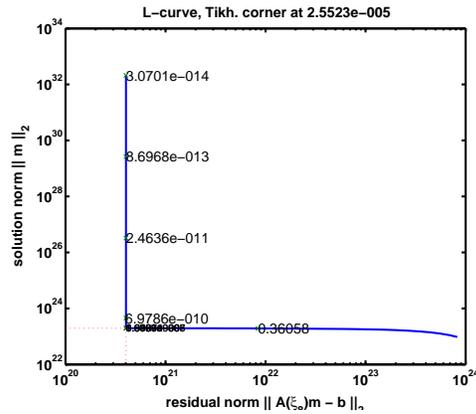
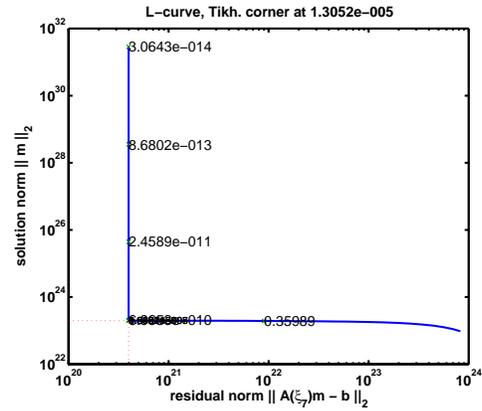
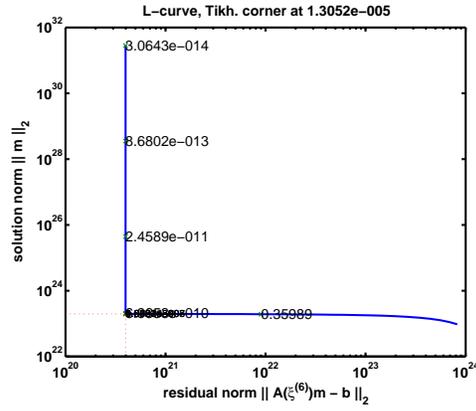
$$\min_m \frac{1}{2} \|A(\boldsymbol{\xi}^{(j)})\mathbf{m} - \mathbf{b}\|_{L^2(\mathbb{S})}^2 + \alpha_j^2 \sum_{k=1}^K m_k \log(m_k),$$

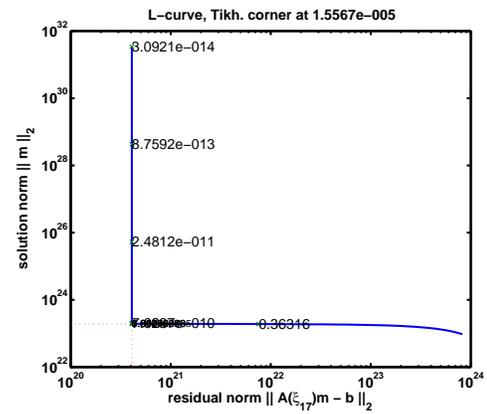
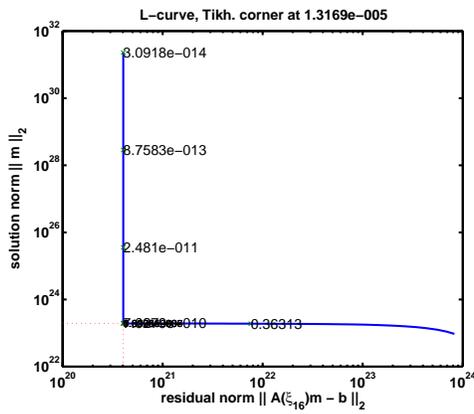
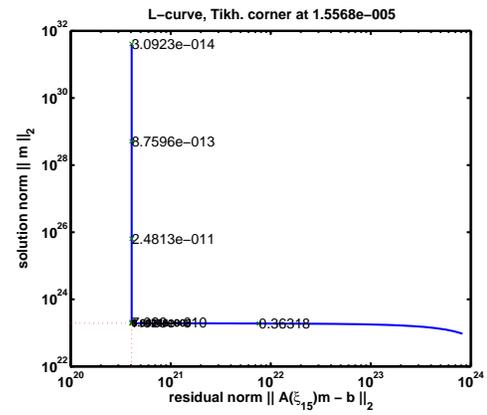
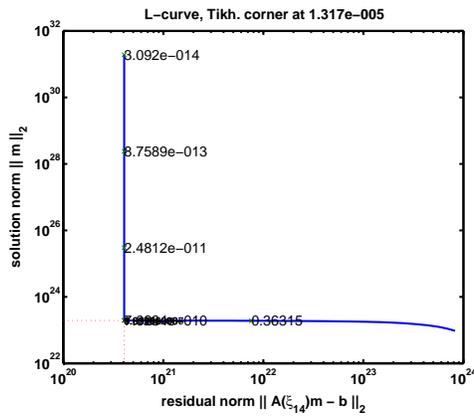
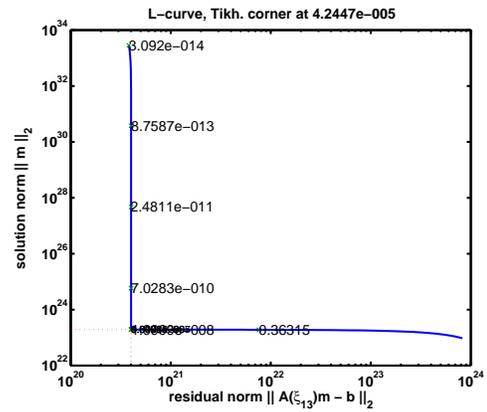
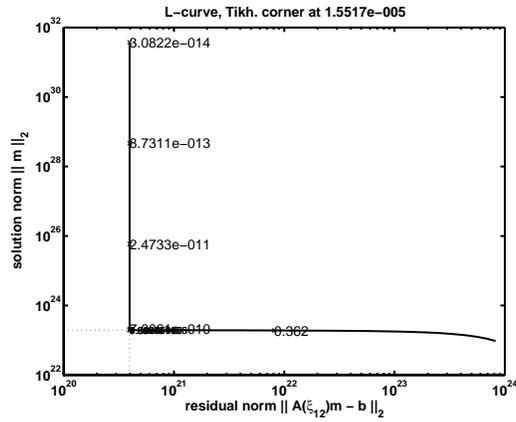
où  $\alpha_j$  est le paramètre de régularisation. Le terme d'entropie  $m_k \log m_k$  assure la positivité des valeurs des masses. Dans [25], Hansen explique que cette méthode de régularisation est pareille à celle de Tikhonov avec contraintes de positivité. La résolution de ce problème nécessite la détermination du

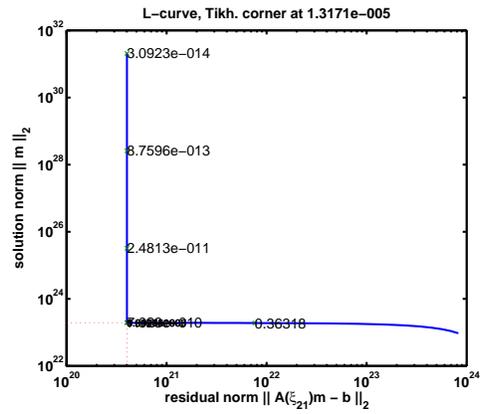
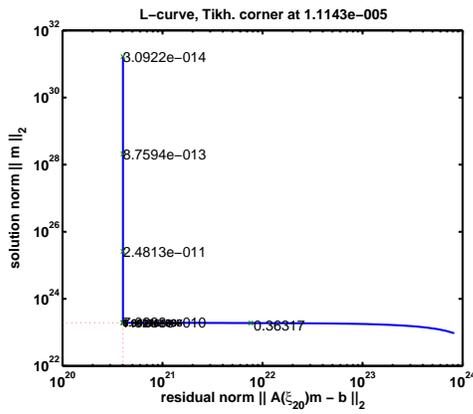
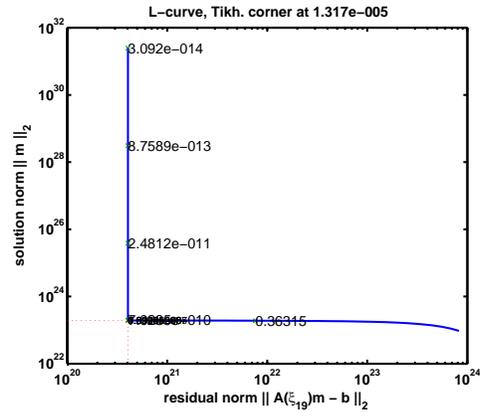
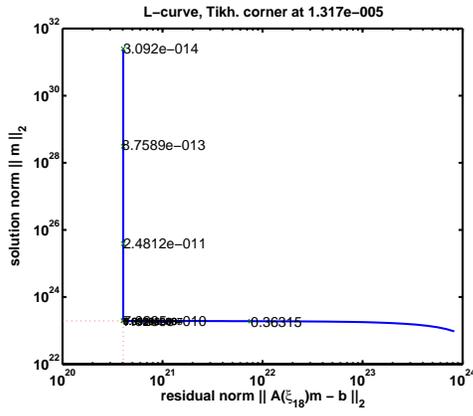
paramètre  $\alpha_j$  approprié à partir des données. Dans nos calculs nous utilisons la méthode de “la courbe en L” (L-curve) pour la détermination d’une valeur optimale du paramètre de régularisation.

Dans les figures suivantes nous présentons pour des itérations consécutives  $j = 1, \dots, 27$ , la norme de la solution en fonction de la norme du résidu. Nous constatons qu’à chaque itération  $j$  nous récupérons une courbe de forme “L”. D’après Hansen dans [25], cette courbe fournit le paramètre optimal de régularisation pour chaque itération  $j$  [4].









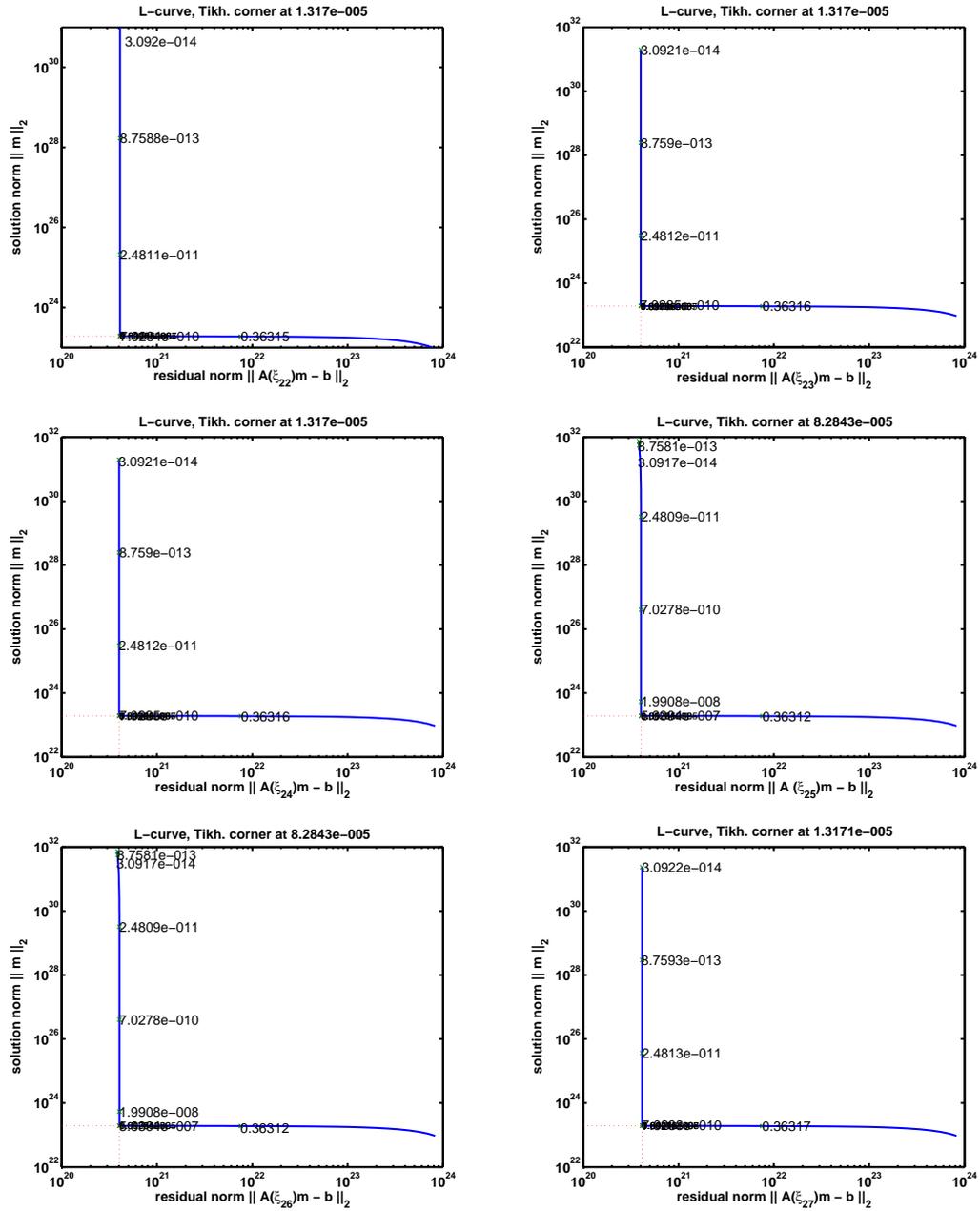


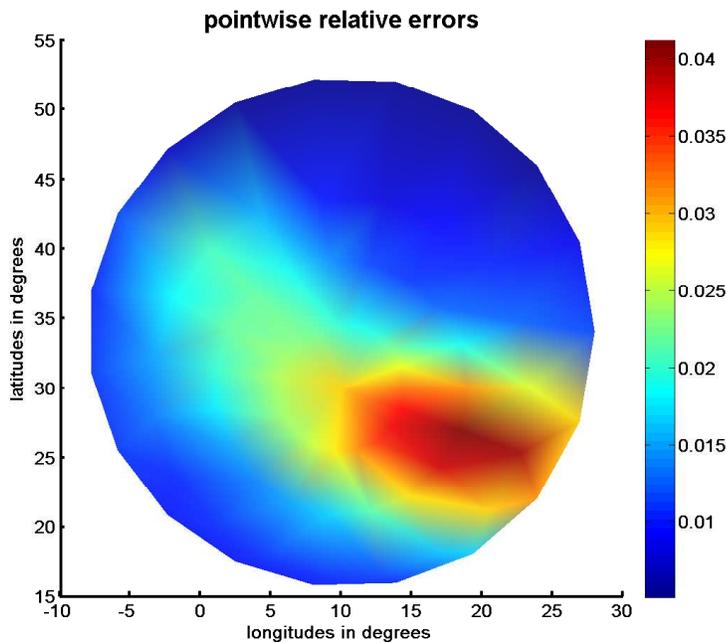
FIGURE 6.3 : Les courbes en  $L$  et les valeurs du paramètre de régularisation correspondant à quelques itérations.

L'évaluation de l'efficacité de notre étude numérique est exprimée par le

calcul de l'erreur relative ponctuelle, entre le potentiel gravitationnel réel,  $V$ , et le potentiel approché  $\tilde{V}$  donnée par la formule suivante :

$$\epsilon(i, j) = \frac{|V(i, j) - \tilde{V}(i, j)|}{|V(i, j)|}.$$

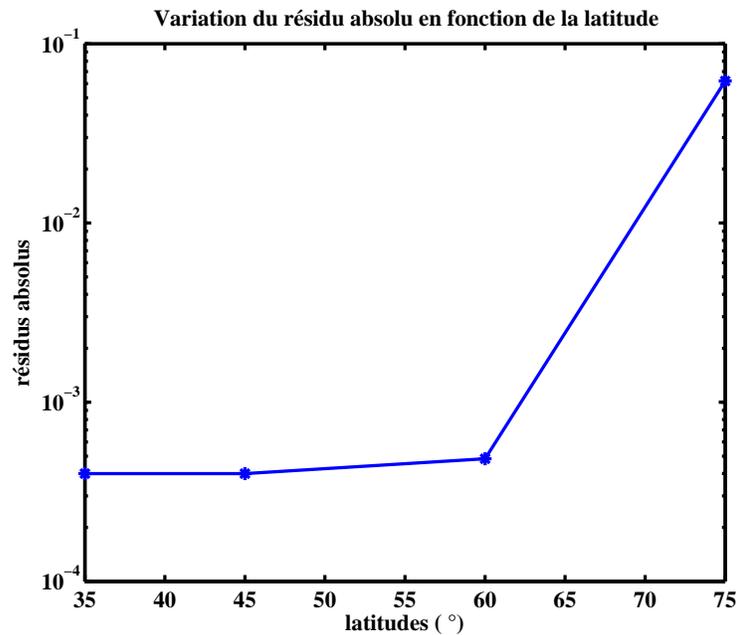
Le graphe de  $\epsilon$  représenté dans la figure 6.2 permet d'observer que les résultats de détermination des points-masses et qui sont trouvés à l'itération  $j = 27$ , sont acceptables [4]. En effet, les erreurs relatives ponctuelles  $\epsilon(i, j)$  sont inférieures à 5% sur une petite partie du domaine étudié et inférieures à 3% sur le reste.



**FIGURE 6.4 :** Erreur relative, entre le potentiel gravitationnel et le potentiel généré par les points-masses trouvés.

### 6.2.1 Dépendance des résultats en fonction de la distance au pôles

En vertu du manque de données satellitaires aux pôles, la qualité de l'inversion peut devenir plus mauvaise. Nous étudions la qualité de l'erreur relative en faisant varier les latitudes. Dans la figure 6.2.1 nous présentons cette variation et nous constatons que plus on s'approche du pôle nord plus grande est l'erreur relative. Ceci montre qu'en augmentant les latitudes l'inversion devient mauvaise.



### 6.3 Considération d'un point-masse au géocentre

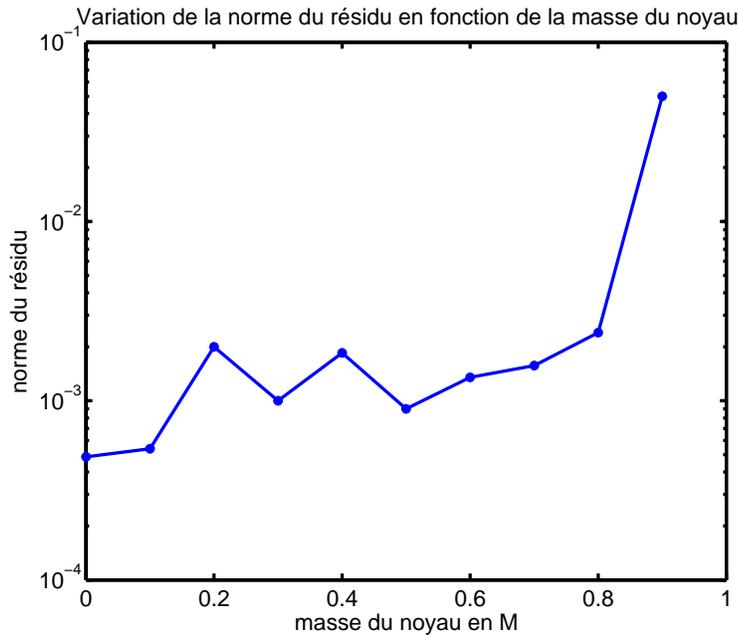
Rappelons nous que l'expression du potentiel gravitationnel terrestre s'écrit relativement à la base des harmoniques sphériques est donnée par (1.10). Cette expression pourrait être considérée comme étant la somme d'une valeur

moyenne du potentiel gravitationnel et d'autres valeurs qui correspondent à des déviations par rapport à cette valeur moyenne. Nous avons noté, en outre, que cette valeur moyenne du potentiel pourrait être considérée comme celle due au potentiel d'une masse ponctuelle située au géocentre de masse  $M$  –la masse de la Terre.

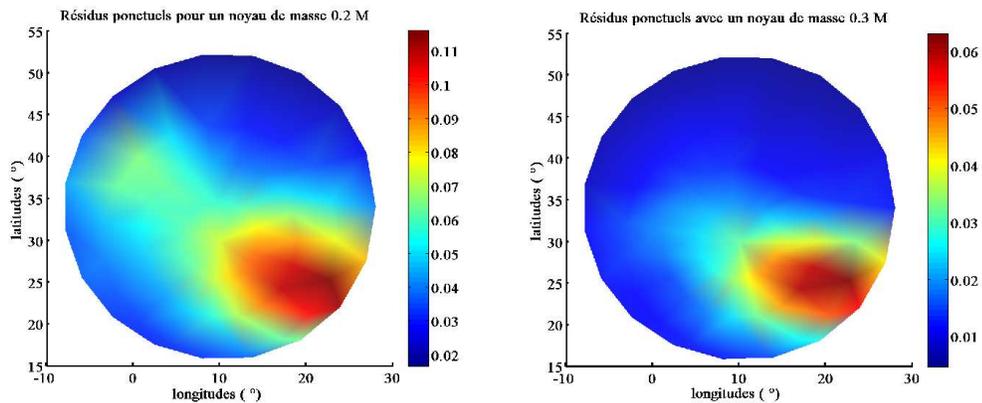
Dans ce paragraphe nous avons pensé à faire varier la valeur de la masse de ce point-masse au noyau et d'interpréter les résultats. Nous rappelons que la masse physique du noyau terrestre est  $M_c = \frac{1}{3}M$  [53]. Dans notre expérience, cette masse peut prendre des valeurs inférieures à la masse de la Terre. Le potentiel généré par le point-masse au noyau en un point de l'espace  $P$  est donné par  $V_c(r, \theta, \phi) = \frac{GM_c}{r}$ . Par conséquent, le potentiel gravitationnel terrestre  $V(r, \theta, \phi)$  s'écrit comme somme du potentiel du point-masse au noyau et d'une partie corrective associée au potentiel généré par des points-masses situés à la croûte terrestre. C'est à dire  $V(P) = V_c(P) + \tilde{V}(P)$ . Dans la figure 6.3 nous représentons pour une masse du noyau qui varie sur l'intervalle  $[0, 0.9M]$ , les normes des erreurs relatives correspondantes et qui sont données par la relation suivante :

$$err = \frac{\|V - \tilde{V}\|}{\|V\|}.$$

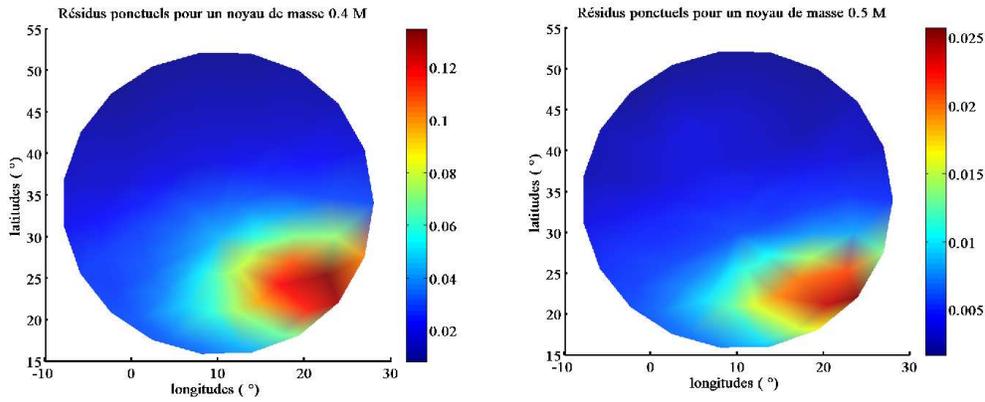
Nous constatons que malgré les résultats acceptables que nous pourrions avoir pour certaines valeurs de  $M_c$  (voir les figures 6.6, 6.7, 6.8 et 6.9 illustrant les résidus ponctuels pour chaque valeur de la masse du noyau), nous n'aboutissons pas à des résultats meilleures que le cas d'une masse centrale nulle.



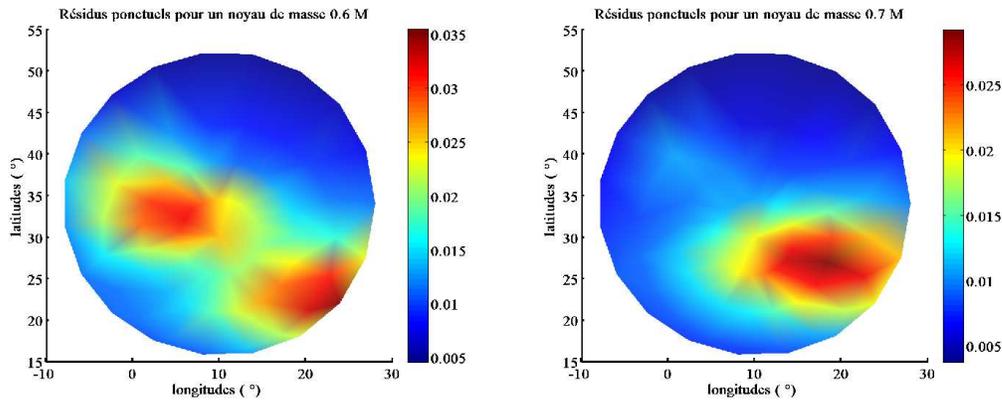
**FIGURE 6.5 :** Variation de l'erreur relative en fonction de la valeur de la masse du noyau. Les valeurs des masses sont :  $[0.2, 0.9M]$ .



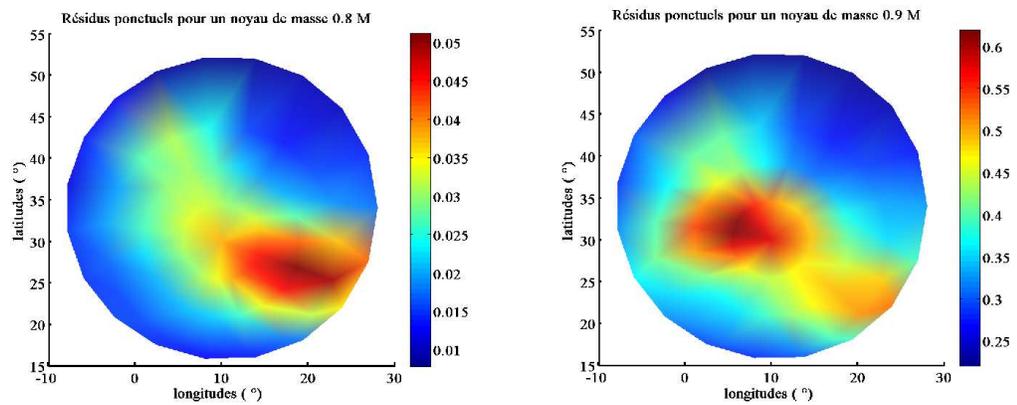
**FIGURE 6.6 :** Les résidus ponctuels pour plusieurs dimensions du noyau. La masse du noyau est exprimée en fonction de la masse de la Terre ( $M$ ). Dans ces deux cas  $M_c = 0.2M$  et  $M_c = 0.3M$ .



**FIGURE 6.7 :** Le résidus ponctuels pour plusieurs dimensions du noyau. La masse du noyau est exprimée en fonction de la masse de la Terre ( $M$ ). Dans ces deux cas  $M_c = 0.4M$  et  $M_c = 0.5M$ .



**FIGURE 6.8 :** Le résidus ponctuels pour plusieurs dimensions du noyau. La masse du noyau est exprimée en fonction de la masse de la Terre ( $M$ ). Dans ces deux cas  $M_c = 0.6M$  et  $M_c = 0.7M$ .



**FIGURE 6.9 :** Le résidus ponctuels pour plusieurs dimensions du noyau. La masse du noyau  $M_c$  est exprimée en fonction de la masse de la Terre ( $M$ ). Dans ces deux cas  $M_c = 0.8M$  et  $M_c = 0.9M$ .

# Chapitre 7

## Conclusion

Deux problèmes de géodésie physique ont été étudiés. Le premier porte sur la détermination d'un géoïde local avec la méthode de collocation par moindres carrés. Le deuxième problème étudié dans cette thèse porte sur la détermination d'une distribution de points-masses enterrés afin d'approcher le potentiel terrestre. Dans ce chapitre de conclusion nous exposons un bilan de notre travail en mettant en évidence ses résultats, ses limitations ainsi que ses perspectives.

### 7.1 Étude bibliographique et apport à l'état de l'art

#### 7.1.1 Calcul du géoïde

Le but de la première partie de cette thèse était de déterminer le géoïde d'une région donnée, qui est de grande importance. En effet, il intervient dans plusieurs domaines notamment en génie civil, en aéronautique et en des travaux militaires. L'étude bibliographique de ce problème a permis de

mettre en lumière la gravimétrie terrestre et la méthode de collocation par moindres carrés, qui est de grand intérêt lorsqu'il s'agit de la détermination d'un signal stochastique à partir de mesures hétérogènes. Cette méthode est utilisée en géodésie physique pour la détermination d'un géoïde local ou pour l'extrapolation de certaines mesures. D'autre part, la détermination du géoïde en utilisant la méthode de collocation par moindres carrés nécessite la détermination des corrélations entre les différentes quantités mesurées. Dans la littérature il existe un logiciel en Fortran "GRAVSOF" qui permet de calculer ces corrélations et de déterminer un géoïde. Notre contribution dans cette partie est la reproduction de ces travaux (écrits en Fortran) avec des codes écrits avec MATLAB.

L'importance de ce travail est la construction d'une boîte à outils MATLAB qui permet d'appliquer la méthode de collocation par moindres carrés dans la résolution d'autres problèmes dans d'autres domaines mais qui ressemblent à la détermination d'un géoïde.

### 7.1.2 Problème inverse en gravimétrie

La deuxième partie de cette thèse a été consacrée à la résolution du problème inverse qui consiste à déterminer une distribution de points-masses générant un potentiel équivalent à un potentiel donné. Nous nous sommes intéressés en particulier au problème local où nous ne disposons que des données sur une région limitée de la Terre. Ce problème est de grand intérêt dans les sciences de l'ingénieur et existe sous plusieurs formes dans la littérature. En géodésie, il permet de répondre à des questions relatives à l'étude de la densité de la masse terrestre. En imagerie médicale ce problème permet d'étudier l'intérieur du cerveau humain à partir de mesures de surface.

A ce propos, nous citons le problème inverse de la M/EEG (Magnéto /

Electro Encéphalographie) qui a été étudié dans la thèse de Ana-Maria Nicu [39]. Elle a résolu les problèmes : transmissions des données et localisation de sources à l'intérieur de la boule (modélisant la tête humaine). Dans ces problèmes, les mesures sont supposées disponibles seulement sur des parties de la sphère (calotte sphérique ou hémisphère nord de la sphère). Pour bien représenter les mesures, A-M. Nicu a utilisé la base de Slepian qui a de bonnes propriétés sur les régions étudiées. Ce fait a été en faveur de l'application de la méthode d'approximation rationnelle dans des sections planes de domaines en  $3D$ , pour résoudre les problèmes qu'elle a posés dans sa thèse. Lors de la résolution de notre problème (en géodésie) nous avons rencontré deux sous problèmes essentiels. Le premier est que les points-masses sont supposés avoir des positions libres et des masses positives comme inconnues. Ceci permet de classier notre problème inverse de points-masses, parmi les problèmes les plus difficiles à résoudre dans ce thème de géodésie [14]. Dans ce contexte, nous avons remarqué la sensibilité de la résolution aux distances entre les points-masses (et par conséquent sur le nombre de points-masses considérés). Ceci nous a fait penser à imposer une contrainte sur ces distances pour éviter le problème de stabilité de l'algorithme. Le deuxième sous problème rencontré lors de la résolution du problème des points-masses, est celui de la base relativement à laquelle nous allons effectuer nos calculs. Nous avons vu que lorsqu'on restreint l'étude de notre problème inverse sur une région limitée de la Terre, la base des harmoniques sphériques ne peut plus être directement utilisée, car elle n'est plus orthonormée sur la région choisie. Nous avons choisi d'utiliser les bases de Slepian qui ont l'avantage d'être à la fois orthogonales sur leur régions associées et orthonormées sur toute la sphère [3]. Dans cette partie nous avons exposé en particulier l'originalité et l'efficacité de ce choix. La résolution du problème inverse des points-masses

en étudiant simultanément les deux derniers sous problèmes a permis une nouvelle formulation mathématique du problème global. Le problème de minimisation associé, a été formulé sous la forme d'un problème aux moindres carrés non linéaire à contrainte de positivité.

L'algorithme que nous avons développé pour nos expériences numériques résoud alternativement les deux problèmes d'inconnues les masses (positives) et les positions des points-masses. Les résultats des expériences numériques sur un exemple de domaine choisi ont été très bonnes. A la fin de cette partie nous avons imaginé que le potentiel terrestre pourrait être généré par un point masse principal situé au centre de la Terre (c-à-d : coïncidant avec le noyau ou une partie du noyau de la Terre) auquel nous lui associons une distribution d'autres points-masses de tailles plus petites et dont les potentiels correspondent à des corrections ajoutées au potentiel du noyau (afin d'approcher le potentiel gravitationnel terrestre). Malheureusement, cette approche n'a pas apporté d'amélioration notable à la précision de la solution.

## 7.2 Perspectives

Notre manière pour résoudre le problème des points-masses peut également s'appliquer pour résoudre d'autres problèmes inverses sur la sphère. Il suffit d'adapter les deux parties ; théorique et algorithmique au contexte étudié. En particulier nous avons remarqué que cette méthode a bien résolu notre problème inverse de recherche des points-masses et contribué à la résolution d'un problème d'imagerie médicale [39]. Cette application s'avère être prometteuse et mérite plus de développement.

# Annexe : Harmoniques sphériques

## A.1 Introduction

L'étude du potentiel terrestre nous a amené à résoudre l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$ . Les solutions de cette équation sont appelées les harmoniques sphériques. Dans ce chapitre nous introduisons les différents théorèmes et formules vérifiés par ces fonctions en particulier sur la sphère.

## A.2 Equation de Laplace et fonctions harmoniques

### A.2.1 Opérateur de Laplace

L'opérateur de Laplace s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial z^2},$$

et en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.1})$$

### A.2.2 Fonctions harmoniques

**Définition 5.** Une fonction  $V$  est harmonique sur un domaine  $\Omega$  si ses dérivées secondes sont continues et  $\Delta V = 0$  (équation de Laplace) en tout point de  $\Omega$ .

## A.3 Harmoniques sphériques

### A.3.1 Résolution de l'équation de Laplace

Une solution à l'extérieur d'une sphère de rayon  $R$  et de centre l'origine du repère, peut être trouvée grâce à la technique de séparation des variables. Ainsi cette solution peut s'écrire sous la forme :

$$V(r, \theta, \phi) = f(r)g(\theta)h(\phi).$$

Ensuite, l'injection de cette forme de la solution dans l'équation (A.2), on obtient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La première partie est indépendante de  $\theta$  et  $\phi$ , et la deuxième partie est indépendante de  $r$ . Les deux termes sont égaux à des constantes opposées. On suppose que cette constante est de la forme  $q(q+1)$ . Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = q(q+1) \quad \text{soit encore} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = q(q+1)f \quad (\text{A.3})$$

Si  $f$  est choisie de la forme  $f(r) = r^a$ , on trouve des solutions de l'équation (A.3) de la forme :

$$f(r) = q(q+1) (r^q + r^{-(q+1)}).$$

La deuxième partie de l'équation (A.2) s'écrit,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{g(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{h(\phi)} \frac{\partial^2 h(\phi)}{\partial \phi^2} = -q(q+1)$$

ou encore

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{g(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{h(\phi)} \frac{\partial^2 h(\phi)}{\partial \phi^2} = -q(q+1)f(\theta)g(\phi)$$

En multipliant toute l'équation par  $g(\theta)h(\phi)$ , on obtient :

$$h(\phi) \left( \frac{\partial^2 g(\theta)}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) \frac{g(\theta)}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 h(\phi)}{\partial^2 \phi} = -q(q+1)f(\theta)g(\phi),$$

ou encore,

$$\frac{\sin^2 \theta}{g(\theta)} \left( \frac{\partial^2 g(\theta)}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) + q(q+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{h(\phi)} \frac{\partial^2 h(\phi)}{\partial^2 \phi} = m^2.$$

On retire le système :

$$\begin{cases} \frac{\sin^2 \theta}{g(\theta)} \left( \frac{\partial^2 g(\theta)}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) + q(q+1) \sin^2 \theta - m^2 = 0 \\ \frac{\partial^2 h(\phi)}{\partial^2 \phi} + m^2 h(\phi) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Les solutions de la deuxième équation du système (A.4) sont de la forme :

$$h(\phi) = B_1 \cos \phi + B_2 \sin \phi \quad (\text{A.5})$$

La première équation du système (A.4) s'écrit encore,

$$\sin^2 \theta \frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} + \sin \theta \cos \theta \frac{dg(\theta)}{d\theta} + (q(q+1) \sin^2 \theta - m^2) g(\theta) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Posons  $t = \cos \theta$ , il en résulte que :

$$\frac{dg(\theta)}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dg(\theta)}{dt} \quad \text{et} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{dg(\theta)}{dt} + \sin^2 \theta \frac{d^2 g(\theta)}{dt^2}. \quad (\text{A.8})$$

Par conséquent, la première équation du système (A.4) devient,

$$\frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dh(t)}{dt} \right] + \left[ q(q+1) - \frac{p^2}{1-t^2} \right] h(t) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Les seules solutions physiquement admissibles de l'équation (A.9) sont celles qui correspondent à  $q = n \in \mathbb{N}$ . Elles sont appelées les fonctions sphériques de Laplace ou encore les fonctions de Legendre et pour  $|m| \leq n$  on les note :

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n \quad (\text{A.10})$$

et

$$P_{n(-m)}(t) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(t). \quad (\text{A.11})$$

L'entier  $n$  est appelé le degré de ces fonctions et  $m$  est leur ordre.

Posons par,

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \sin |m| \phi P_{n|m|}(t), & -n \leq m \leq -1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} P_{n0}(t), & m = 0, \\ \cos |m| \phi P_{n|m|}(t) & 1 \leq m \leq n \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

La fonction  $Y_{nm}$  est appelée harmonique sphérique réelle de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

Notons en outre que les fonctions harmoniques sphériques sont les fonctions propres du Laplacien surfacique, i.e.,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{nm}}{\partial \phi^2} = n(n+1) Y_{nm}. \quad (\text{A.13})$$

et à chaque  $n$  fixé (ou à chaque valeur propre  $n(n+1)$  fixée) on a  $2n+1$  fonctions  $Y_{nm}$ .

## A.4 Construction d'une base

Notons par  $L^2(\mathbb{S}^2)$  l'espace des fonctions à carrés intégrables sur la sphère unité. Le produit scalaire associé à cet espace est définie par :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{S}^2) \text{ on a } \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) g(\theta, \phi) d\sigma(\theta, \phi)$$

où,  $d\sigma(\theta, \phi)$  est la mesure de Lebesgue associée à l'espace  $L^2(\mathbb{S}^2)$ . Relativement à ce produit scalaire les fonctions harmoniques sphériques vérifient la relation

d'orthogonalité suivante :

$$\int_{\mathbb{S}^2} Y_{ij}(t)Y_{kl}(t)d\sigma = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (\text{A.14})$$

où  $t = (\theta, \phi)$  et  $\delta_{ik}$  est le symbol de Kronecker. En outre nous pouvons écrire :

$$\|Y_{ij}(t)\|^2 = \int_{\mathbb{S}^2} Y_{ij}(t)Y_{ij}(t)d\sigma = \frac{4\pi}{2i+1} \frac{(i+|j|)!}{(i-|j|)!}. \quad (\text{A.15})$$

Notons par

$$\bar{Y}_{ij} = \sqrt{\frac{2i+1}{4\pi} \frac{(i-|j|)!}{(i+|j|)!}} Y_{ij}. \quad (\text{A.16})$$

L'ensemble des fonctions harmoniques sphériques normalisées  $\bar{Y}_{ij}$  constituent une base orthonormée complète de l'espace  $L^2(\mathbb{S}^2)$ .

### Polynomes de Legendre :

Les harmoniques sphériques d'ordres nulles sont appelées les polynômes de Legendre.

**Base complète :** Les polynômes de Legendre forment une base orthogonale complète de l'espace  $L^2([-1, 1])$ . C'est à dire que pour  $t = \cos\theta \in [-1, 1]$  on peut écrire le développement d'une fonction  $f$  de  $t$  comme suit [43] :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n P_n(t), \text{ avec } f_n = \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt.$$

#### EXEMPLE A.4.1.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha t + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n P_n(t). \quad (\text{A.17})$$

### Formules de récurrences :

$$P_{n+1}(t) - \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) + \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{dP_{nm}(t)}{d\theta} = \frac{1}{2}[(n-m+1)(n+m)P_{nm-1}(t) - P_{nm+1}(t)], \quad (\text{A.19})$$

$$\cos \theta P_{nm}(t) = \frac{1}{2n+1}[(n-m+1)P_{n+1m} + (n+m)P_{n-1m}], \quad (\text{A.20})$$

$$\sin \theta P_{nm}(t) = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1m+1} - P_{n-1m+1}]. \quad (\text{A.21})$$

**Le théorème d'addition :**

$$P_n(\cos \psi_{12}) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{m=n} Y_{nm}(\theta_1, \phi_1) Y_{nm}(\theta_2, \phi_2). \quad (\text{A.22})$$

où  $\psi_{12}$  est la distance sphérique entre les points  $(\theta_1, \phi_1)$  et  $(\theta_2, \phi_2)$ .

### Classes des harmoniques sphériques :

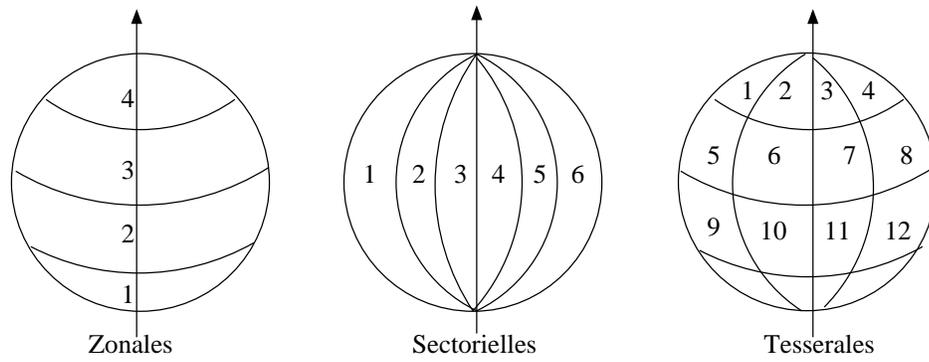
Les harmoniques sphériques sont partagées en trois classes [9, 45] :

- les harmoniques sphériques zonales : elles sont les harmoniques sphériques d'ordre  $m = 0$ . Elles sont indépendantes de la variables  $\phi$ . Sur la sphère, elles ont une symétrie de révolution (l'axe est celui des pôles). Représentées sur la sphère, elles la partagent en des zones. D'où le nom "zonales".
- les harmoniques sphériques sectorielles : Elles correspondent aux harmoniques sphériques du type  $Y_{|m|m}$ , e.g.,  $Y_{00}, Y_{1-1}, Y_{11}, Y_{2-2}, Y_{22}$ , etc.
- les harmoniques sphériques tesserales : cette classe comprend le reste des harmoniques sphériques.

### EXEMPLE A.4.2. Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre du degré  $n = 0$  jusqu'au degré  $n = 5$  pour la variable  $t = \cos \theta$  telle que  $\theta \in [0, 2\pi]$  sont :

$$P_0(t) = 1$$



**FIGURE A.1** : Les différentes classes des harmoniques sphériques.

$$P_1(t) = t$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

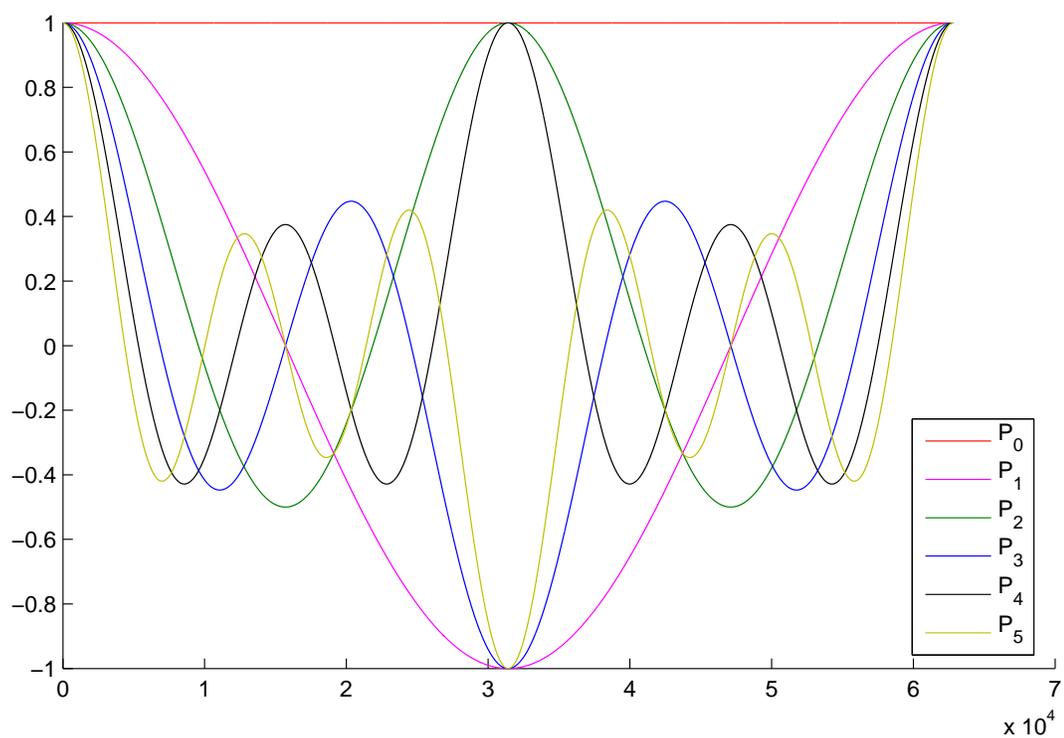


FIGURE A.2 : Représentation graphique de quelques exemples de polynômes de Legendre.

## Harmoniques sphériques

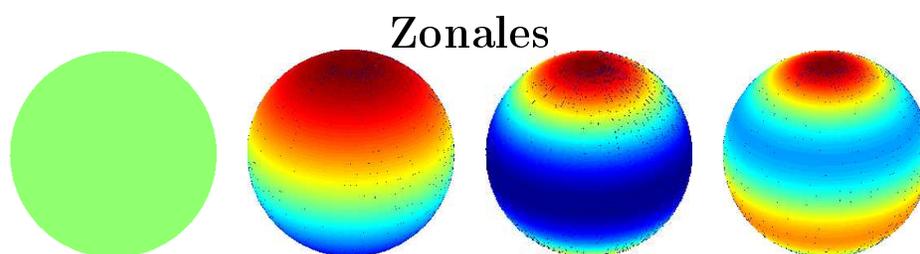


FIGURE A.3 : Harmoniques sphériques zonales.

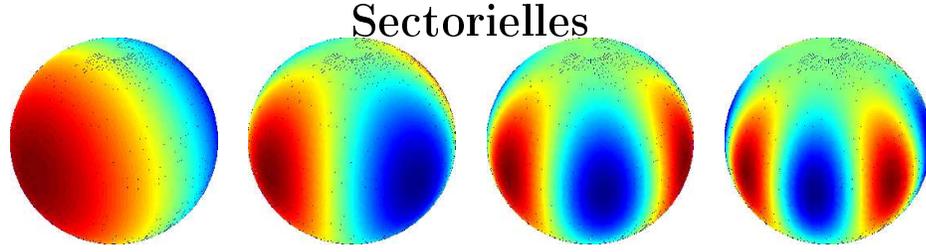


FIGURE A.4 : Harmoniques sphériques sectorielles.

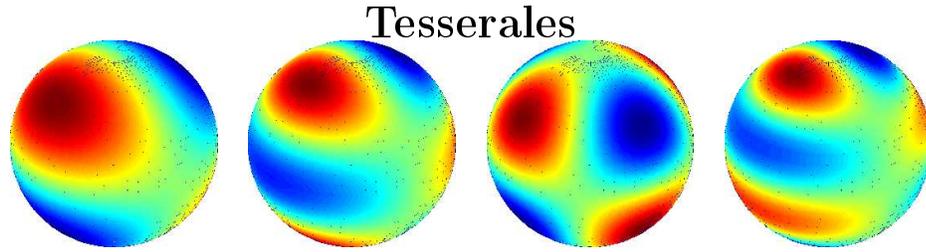


FIGURE A.5 : Harmoniques sphériques tesserales.

### A.4.1 Développement harmonique

On considère le sous espace  $\mathcal{H}_k$  de  $L^2(\mathbb{S}^2)$ , tel que,

$$\mathcal{H}_k = \left\{ \sum_{n=0}^k \sum_{m=-n}^n \alpha_{nm} Y_{nm}; \quad \alpha_{nm} \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\mathcal{H}_k$  est engendré par les harmoniques sphériques de degrés  $n \leq k$ . Par conséquent, l'estimation par la méthode de moindres carrés d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$  dans le sous espace  $\mathcal{H}_k$  que nous notons  $\hat{f}$ , est donnée par :

$$\hat{f}(t) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=-n}^n \langle f, Y_{nm} \rangle Y_{nm}(t). \quad (\text{A.23})$$

Il en découle de résultat suivant :

**Théorème 4.**

$$\sum_{n=0}^k \sum_{m=-n}^n \langle f, Y_{nm} \rangle Y_{nm}(t) = \arg \min_{h \in \mathcal{H}_k} \int_{\mathbb{S}^2} [f(t) - h(t)]^2 d\sigma.$$

Ce théorème est connu dans l'analyse de Fourier. Il décrit le développement d'une fonction de  $L^2(\mathbb{S}^2)$  en série d'harmoniques sphériques [13].

## A.5 Sommes de quelques séries harmoniques finies et infinies

### A.5.1 Sommes de séries harmoniques finies : algorithme de Clenshaw

L'algorithme de Clenshaw est utilisé en général pour la sommation des termes de suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire. En particulier, cet algorithme permet d'étudier les sommes de séries de polynômes orthogonaux très fréquentes dans les problèmes de mathématiques appliquées et en physique. Considérons une suite de fonction,  $\phi_k$  vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\phi_{k+1}(x) + \alpha_k(x) \phi_k(x) + \beta_k(x) \phi_{k-1}(x) = 0 \quad (\text{A.24})$$

où  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont des coefficients dont on connaît en avance. Pour toute suite  $c_0, c_1, \dots, c_N$ , considérons les suites  $b_k$  vérifiant :

$$b_{N+1}(x) = b_{N+2}(x) = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$b_k(x) = c_k - \alpha_k(x) b_{k+1}(x) - \beta_{k+1}(x) b_{k+2}(x). \quad (\text{A.26})$$

Il en résulte que la somme :

$$\sum_{k=0}^n c_k \phi_k(x) = b_0(x) \phi_0(x) + b_1(x) [\phi_1(x) + \alpha_0(x) \phi_0(x)]. \quad (\text{A.27})$$

### A.5.2 Sommes de quelques séries harmoniques infinies

Les développement en harmoniques sphériques d'une fonction converge à l'extérieur d'une boule  $\mathbb{B}$ . En géodésie physique, la boule est représentée par la sphère de Bjerhammer. Notons par  $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^{(n+1)} P_n(t)$  où  $t \in [-1; 1]$  et  $s \in ]0; 1[$ .

$$F(t) = \frac{s}{\sqrt{1 - 2st + s^2}}.$$

# Bibliographie

- [1] *National geospatial-intelligence agency, EGM2008 official webpage*, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008>.
- [2] *National geospatial-intelligence agency, EGM96 official webpage*, <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/egm96.html>.
- [3] A. Abdelmoula, M. Moakher, and B. Philippe, *Localized spectral analysis for an inverse problem in geodesy*, CARI08 (Maroc), <http://www.cari-info.org/actes2008/abdelmoula.pdf>, octobre 2008.
- [4] ———, *A Slepian framework for the inverse problem of equivalent gravitational potential generated by discrete point masses*, to appear in *Inverse problems in science and engineering*, December 2013.
- [5] A. Albertella, F. Sansò, and N. Sneeuw, *Band-limited functions on a bounded spherical domain : the Slepian problem on the sphere*, *J. Geodesy* **73** (1999), 436–447.
- [6] G. Balmino, *La représentation du potentiel terrestre par masses ponctuelles*, *Bulletin géodésique* (1974), no. 1, 85–108.
- [7] ———, *Le géoïde : regard profond sur l'image de la Terre*, *Académie* (2005), no. 16, 8–9.
- [8] F. Barthelmes, R. Dietrich, and R. Lehmann, *Representation of the glo-*

- bal gravity field by point masses on optimised positions based on recent spherical harmonics expansions*, no. XX, IUGG, 1991.
- [9] L. Blitzer, *Handbook of Orbital Perturbations*, University of Arizona, Astronautics 453.
- [10] G. N. Bochkov, A. T. Gavrilin, and K. V. Gorokhov, *Generalized Rayleigh criterion of two-point resolution*, Radiophysics and Quantum Electronics **5** (2005), no. 48, 394–397.
- [11] A. Bonami and A. Karoui, *Uniform Estimates of the Prolate Spheroidal Wave Functions and Spectral Approximation in Sobolev Spaces*, preprint, 2010.
- [12] K. Borre and T. Krarup, *Mathematical Foundation of Geodesy*, Springer, 2006.
- [13] M. K. Chung, K. M. Dalton, and R. J. Davidson, *Tensor-based cortical morphometry via weighted spherical harmonic representation*, IEEE Trans. Med. Imaging **27** (2008), no. 8, 1143–1151.
- [14] S. J. Claessens, W. E. Featherstone, and F. Barthelmes, *Experiences with point-mass gravity field modelling in the Perth region, western Australia*, Geomatics Res Australas (2001), 53–86.
- [15] C. W. Clenshaw, *A note on the summation of Chebyshev series*, Math. Tables Aids. Comput **9** (1955), 118–120.
- [16] F. A. Dahlen and F. J. Simons, *Spectral estimation on a sphere in geophysics and cosmology*, submitted on 22 may 2007, 2008.
- [17] F. A. Dahlen and J. Tromp, *Theoretical Global Seismology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1998.
- [18] S. A. Ben Ahmed Daho and S. Kahlouche, *Validation des mesures gra-*

- vimétriques par la méthode de collocation*, Technologies avancées (2001), no. 13, 61–67.
- [19] H. Duquenne, *Le modèle de quasi-géoïde français QGF96 et la surface de référence d'altitude RAF96*, Tech. report, IGN/ESGT, 1997.
- [20] D. Fischer and V. Michel, *Sparse regularization of inverse gravimetry-case study : spatial and temporal mass variations in south America*, Inverse Problems **28** (2012), 34.
- [21] R. Fletcher, *Unconstrained Optimization. Practical Methods of Optimization*, vol. 1, Wiley, New York, 1980.
- [22] C. F. Gauss, *Bestimmung des Breitenunterschiedes Zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1828.
- [23] K. M. Górski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bantelman, *HEALPix : A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere*, Astroph. J. **622** (2005), 759–771.
- [24] F. A. Grünbaum, L. Longhi, and M. Perlstadt, *Differential operators commuting with finite convolution integral operators : some non-abelian examples*, SIAM J. Appl. Math. **42** (1982), 941–955.
- [25] P. C. Hansen, *Regularization tools : A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*, Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby, Denmark, 2007.
- [26] W. A. Heiskanen and H. Moritz, *Physical Geodesy*, W.H.Freeman and CO., San Francisco, 1967.
- [27] B. Hofmann-Wellenhof and H. Moritz, *Physical Geodesy*, Springer, New York, 2005.

- [28] J. Ihde, U. Schirmer, F. Stefani, and F. Toeppe, *Geoid modelling with point masses*, Second Continental Workshop on the Geoid in Europe, (Budapest), 1998, pp. 199–204.
- [29] C. Jekeli, *Potential Theory and Static Gravity Field of the Earth*, ch. 3, pp. 11–41, Elsevier, The Ohio State University, Columbus, OH, USA, 2007.
- [30] Z. Jiang, C. Poitevin, and C. C. Tscherning, *Nouvelles solutions pour le géoïde gravimétrique, Belgique-Luxembourg*, Géoïde 22, ENSG/LAREG/IGN, France, 1996.
- [31] H. J. Landau and H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, I Bell Syst. Tech. J. **40** (1961), 43–64.
- [32] ———, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty iii*, Bell Syst. Tech. J. **41** (1961), 1295–336.
- [33] C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Prentice–Hall, New Jersey, 1974.
- [34] V. Lesur, *Introducing localized constraints in global geomagnetic field modelling*, Earth Planets Space **58** (2006), no. 4, 477–483.
- [35] H. Maniar and P. P. Mitra, *The concentration problem for vector fields*, Int. J. Bioelectromagn. **7** (2004), no. 1, 142–145.
- [36] Matlab software, The Mathworks Inc., 2009.
- [37] V. Michel and A. S. Fokas, *A unified approach to various techniques for the non-uniqueness of the inverse gravimetric problem and wavelet-based methods*, Inverse Problems **24** (2008), 1–25.
- [38] H. Moritz, *Advanced Physical Geodesy*, Abacus Press, 1980.
- [39] A-M. Nicu, *Approximation and representation of functions on the sphere applications to inverse problems in geodesy and medical imaging*, Ph.D.

- thesis, University of Nice, Sophia Antipolis, Doctoral School : Sciences and Technologies of Information and Communication, february 2012.
- [40] H. Nyquist, *Certain topics in telegraph transmission theory*, Proceedings of the IEEE, vol. 90, february 2002, pp. 280–305.
- [41] E. Parzen, *Statistical inference on time series by Hilbert space methods*, Tech. Report 23, Standford University, Standford, California, 1959.
- [42] R. H. Rapp, *The determination of geoid undulations and gravity anomalies from seasat altimeter data*, J. Geophysical. Res. **88** (1983), no. C3, 1552–1562.
- [43] P. Reuss, *Précis de Neutronique*, W. H. Freeman and CO., Institut National des Sciences et Techniques Nucléaire, France, 2003.
- [44] J. W. Robbins, *Least squares collocation applied to local gravimetric solutions from satellite gravity gradiometry data*, Tech. Report 368, Geodetic and GeoInformation Science Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science, The Ohio State University Columbus, Ohio 43210–1275, 1985.
- [45] V. Schönfeld, *Spherical Harmonics*, july 2005.
- [46] F. J. Simons, F. A. Dahlen, and M. A. Wieczorek, *Spatiospectral concentration on a sphere*, SIAM Review **48** (2006), no. 3, 504–536.
- [47] ———, *Spatiospectral concentration on a sphere*, SIAM **48** (2006), no. 3, 504–536.
- [48] D. Slepian, *On bandwidth*, Proceedings of the IEEE, vol. 64, 1976, pp. 292–300.
- [49] ———, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, V Bell Syst. Tech. J **57** (1978), 1371–430.

- 
- [50] ———, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, Siam **25** (1983), no. 3, 379–393.
- [51] D. Slepian and H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty i*, Bell Syst. Tech. J. **40** (1961), 43–64.
- [52] C. Ray Smith and W. T. Grandy, *Maximum Entropy and Bayesian Methods in Inverse Problems*, Reidel, Boston, 1985.
- [53] R. Teisseyre and E. Majewski, *Earthquake thermodynamics and phase transformation in the earth's interior*, Academic Press, San Diego, USA, 2001.
- [54] B. Torrèsani, *Analyse Continue par Ondelettes*, EDP Sciences, France, 1995.
- [55] C. C. Tscherning and R. H. Rapp, *Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree-variance models*, Tech. Report 208, Dept. of Geodetic Science, The Ohio state University, 1974.
- [56] J. Wahr, *Geodesy and gravity*, Tech. report, Department of Physics University of Colorado, 1996.
- [57] Wikipedia, *Navigation aérienne— Wikipedia, the free encyclopedia*, 2007, Online, accessed 03-Mars-2007.





## Résumé

Ce travail traite de deux problèmes de grande importance en géodésie physique.

Le premier porte sur la détermination du géoïde sur une zone terrestre donnée. Si la terre était une sphère homogène, la gravitation en un point, serait entièrement déterminée à partir de sa distance au centre de la terre, ou de manière équivalente, en fonction de son altitude. Comme la terre n'est ni sphérique ni homogène, il faut calculer en tout point la gravitation. A partir d'un ellipsoïde de référence, on cherche la correction à apporter à une première approximation du champ de gravitation afin d'obtenir un géoïde, c'est-à-dire une surface sur laquelle la gravitation est constante. En fait, la méthode utilisée est la méthode de collocation par moindres carrés qui sert à résoudre des grands problèmes aux moindres carrés généralisés.

Le seconde partie de cette thèse concerne un problème inverse géodésique qui consiste à trouver une répartition de masses ponctuelles (caractérisées par leurs intensités et positions), de sorte que le potentiel généré par eux, se rapproche au maximum d'un potentiel donné. Sur la terre entière une fonction potentielle est généralement exprimée en termes d'harmoniques sphériques qui sont des fonctions de base à support global la sphère. L'identification du potentiel cherché se fait en résolvant un problème aux moindres carrés. Lorsque seulement une zone limitée de la Terre est étudiée, l'estimation des paramètres des points masses à l'aide des harmoniques sphériques est sujette à l'erreur, car ces fonctions de base ne sont plus orthogonales sur un domaine partiel de la sphère. Le problème de la détermination des points masses sur une zone limitée est traitée par la construction d'une base de Slepian qui est orthogonale sur le domaine limité spécifié de la sphère. Nous proposons un algorithme itératif pour la résolution numérique du problème local de

détermination des masses ponctuelles et nous donnons quelques résultats sur la robustesse de ce processus de reconstruction. Nous étudions également la stabilité de ce problème relativement au bruit ajouté. Nous présentons quelques résultats numériques ainsi que leurs interprétations.

## **Abstract**

This work focuses on the study of two well-known problems in physical geodesy.

The first problem concerns the determination of the geoid on a given area on the earth. If the Earth were a homogeneous sphere, the gravity at a point would be entirely determined from its distance to the center of the earth or in terms of its altitude. As the earth is neither spherical nor homogeneous, we must calculate gravity at any point. From a reference ellipsoid, we search to find the correction to a mathematical approximation of the gravitational field in order to obtain a geoid, i.e. a surface on which gravitational potential is constant. The method used is the method of least squares collocation which is the best for solving large generalized least squares problems.

In the second problem, We are interested in a geodetic inverse problem that consists in finding a distribution of point masses (characterized by their intensities and positions), such that the potential generated by them best approximates a given potential field. On the whole Earth a potential function is usually expressed in terms of spherical harmonics which are basis functions with global support. The identification of the two potentials is done by solving a least-squares problem. When only a limited area of the Earth is studied, the estimation of the point-mass parameters by means of spherical harmonics is prone to error, since they are no longer orthogonal over a partial domain

of the sphere. The point-mass determination problem on a limited region is treated by the construction of a Slepian basis that is orthogonal over the specified limited domain of the sphere. We propose an iterative algorithm for the numerical solution of the local point mass determination problem and give some results on the robustness of this reconstruction process. We also study the stability of this problem against added noise. Some numerical tests are presented and commented.